

Л. В. Тарасов

# ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ОПТИКУ



ДОПУЩЕНО  
Министерством высшего  
и среднего специального  
образования

**СССР**

в качестве учебного  
пособия для студентов  
высших учебных  
заведений



URSS

**Л. В. Тарасов**

# **ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ОПТИКУ**

Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений

Издание второе



**URSS  
МОСКВА**

**Тарасов Лев Васильевич**

**Введение в квантовую оптику: Учебное пособие. Изд. 2-е. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 304 с.**

В настоящей книге дано систематизированное изложение вопросов, вводящих в квантовую оптику. Рассмотрены фотонные представления о природе света; эти представления применены к объяснению различных оптических явлений, включая фотоэффект, люминесценцию, нелинейно-оптические явления. Анализируются одно- и многофотонные процессы взаимодействия света с веществом на уровне элементарных актов, состояния квантованного поля излучения, вопросы оптической когерентности.

Пособие предназначено для студентов физико-математических и инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

**Рецензенты:**

кафедра физики-1 Московского энергетического института  
(зав. кафедрой — проф. А. М. Васильев);  
проф. Д. Н. Клышко (Московский государственный  
университет им. М. В. Ломоносова)

Издательство ЛКИ. 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 19. Зак. № 1277.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».  
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-382-00481-5

© Издательство ЛКИ, 2007

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете:
	<a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс: 7 (499) 135-42-16
<b>URSS</b>	Тел./факс: 7 (499) 135-42-46

5508 ID 64971



9 785382 004815

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Оптические исследования играют все более возрастающую роль в ускорении научно-технического прогресса. Современное производство широко использует разнообразные оптические приборы и устройства для совершенствования существующих и создания качественно новых технологий, для решения сложнейших научно-технических проблем, для существенного расширения наших возможностей целенаправленно воздействовать на вещество, управлять происходящими в нем физическими процессами.

Оптические исследования — это прежде всего исследование физики *взаимодействия света с веществом*. Существуют три последовательных уровня рассмотрения указанного взаимодействия, три постепенно углубляющихся подхода: 1) *классический*, 2) *полуклассический*, 3) *квантовый*. На первом уровне оптическое излучение представляют в виде световых лучей или электромагнитных волн в соответствующем диапазоне частот, а вещество описывают с использованием понятий и аппарата механики сплошных сред, термодинамики, классической электродинамики. Иными словами, при данном подходе как свет, так и вещество рассматриваются в рамках классической физики. Полуклассический подход предполагает квантование вещества при сохранении классической трактовки света: классические световые волны взаимодействуют с коллективами атомов и молекул. Принимаются во внимание структура энергетических уровней атомов и молекул, энергетических зон кристаллов, статистика заселения различных квантовых состояний. Наконец, при квантовом подходе осуществляется квантование не только вещества, но и излучения; именно такой подход используется в *квантовой электродинамике*. Если при рассмотрении взаимодействия света с веществом на классическом и полуклассическом уровнях учитывается только *волновая* природа света, то на квантовом уровне принимаются во внимание также и его *корпускулярные (квантовые)* свойства. Это отвечает переходу от классической оптики, имеющей дело с лучами и световыми волнами, к оптике, которую естественно назвать *квантовой оптикой*. Одним из основных понятий этой оптики является

---

**фотон** — квант светового поля, своеобразный «атом» световой волны.

Отметим, что многие вопросы физики взаимодействия света с веществом удается достаточно глубоко проанализировать на основе полуклассического подхода. В качестве примера укажем вынужденное испускание света, резонансную флуоресценцию, нелинейно-оптические явления. Даже такое сугубо «квантовое» явление, как фотоэффект, можно, оказывается, неплохо описать на полуклассическом уровне. В связи с этим иногда высказывается мнение, что при рассмотрении взаимодействия света с веществом квантование светового поля, по сути дела, не обязательно — достаточно проквантовать только вещество. Такую точку зрения надо признать слишком категоричной. Отдавая должное большим возможностям полуклассического подхода, не следует их переоценивать. По самой своей сути этот подход внутренне непоследователен — вещество и поле рассматривают здесь на разных уровнях. Ясно, что наиболее последовательным и глубоким с физической точки зрения является подход, при котором квантуются как вещество, так и излучение. Именно при таком подходе можно наиболее глубоко исследовать физическую природу света, а значит, и физику процессов взаимодействия света с веществом.

Относящиеся к квантовой оптике вопросы (фотонные представления; явления, в которых проявляются корпускулярные свойства излучения) освещаются с той или иной степенью полноты во всех современных учебных пособиях по физике. В вузовских курсах физики рассматриваются закономерности теплового излучения (от закона Кирхгофа до формулы Планка), сообщаются сведения о фотоэффекте, эффекте Комптона, фотохимическом действии света, дается объяснение испускания и поглощения света атомами на основе теории Бора. При более глубоком изучении физики студентов знакомят также с люминесцентными явлениями, эффектом Мёссбауэра, многофотонными процессами, дают им некоторые сведения о квазичастицах в твердых телах. При этом авторы одних учебников пользуются термином «квантовая оптика», тогда как в других учебниках этот термин не применяется, а соответствующие вопросы собраны в главах, называемых «Тепловое излучение», «Световые кванты», «Действие света» и т. п. Дело в том, что в использовании термина «квантовая оптика» нет четкой договоренности. Согласно точке зрения, принятой в современной научной литературе, все отмечавшиеся выше вопросы — это еще не сама квантовая

---

оптика, а всего лишь преддверие к ней. Собственно квантовая оптика занимается квантованием электромагнитного поля, анализом различных состояний квантованного поля, рассмотрением когерентных свойств света. В узком смысле слова квантовая оптика — довольно специальный раздел современной оптики, где на основе аппарата квантовой электродинамики анализируется степень когерентности оптического излучения и в связи с этим исследуются вопросы формирования оптических изображений, улучшения параметров оптических локационных систем, передачи информации по световому лучу и т. д.

После изложенных соображений, касающихся существа предмета (квантовой оптики), обратимся к данному учебному пособию. Оно состоит из четырех частей: 1. *Развитие фотонных представлений*. 2. *Физика микрообъектов*. 3. *Квантово-оптические явления*. 4. *Теоретические основы квантовой оптики*. В первой части на основе ставших классическими работ Планка, Бора, Эйнштейна рассматриваются рождение и становление квантовой теории света, излагаются свойства фотона и фотонных ансамблей, демонстрируется переход от волновых представлений к квантовым. Во второй части анализируются некоторые принципиальные вопросы квантовой физики; это позволяет объяснить интерференционные эффекты на корпускулярном языке. В третьей части приводятся необходимые сведения из физики твердого тела и затем обстоятельно рассматриваются три группы оптических явлений: фотоэлектрические, люминесцентные, нелинейно-оптические; эти явления иногда объединяют термином «квантово-оптические». Вопросы, излагаемые в указанных трех частях пособия, составляют содержание раздела «Квантовая природа света», и, кроме того, входят в разделы «Элементы атомной физики и квантовой механики» и «Элементы квантовой статистики и физики твердого тела» в действующей программе курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. В последней (четвертой) части пособия даются основы собственно квантовой оптики, включая вопросы вычисления вероятностей оптических переходов разной фотонной кратности и вопросы оптической когерентности. Эти вопросы выходят за рамки программы по физике для общетехнических вузов, но представляют интерес для педагогических вузов и специальностей оптического профиля.

Если строго следовать точке зрения на квантовую оптику, принятой в научной литературе, то данное пособие следовало бы озаглавить, например, так: «Фотонные представ-

---

ления и квантовая оптика». Мы предпочитаем, однако, в соответствии с традициями учебной физической литературы рассматривать фотонные представления — их развитие и использование для объяснения ряда оптических явлений — как важный *начальный этап* в изучении квантовой оптики, органически связанный с ней. Это и предопределило выбор названия данного учебного пособия — «Введение в квантовую оптику».

Автор глубоко признателен докторам физико-математических наук, профессорам Д. Н. Клышко, А. М. Васильеву, И. Н. Компанцу, канд. техн. наук Г. Б. Ткачуку, канд. физ.-мат. наук А. А. Васильеву, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

*Автор*

## ВВОДНАЯ БЕСЕДА

---

### О ВАЖНОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ СВЕТА

Диалог автора с воображаемым оппонентом — читателем, сомневающимся в важности исследования природы света.

Говорят, что солнечный свет не представляет собой чего-то сплошного, но что солнце настолько часто мечет свои лучи один за другим, что мы просто не в состоянии заметить промежутки, которые их отделяют.

*Монтень («Опыты»)*

**АВТОР.** Однажды у меня в руках оказался довольно любопытный учебник физики Л. Эллиота и У. Уилкокса. Перелистывая его, я наткнулся на интересную фразу: «Ничто в природе не было так неуловимо, ни один свой секрет природы не охраняла так тщательно, как секрет о том, что же представляет свет в действительности. На этом основании свет часто называли самым темным пятном в физике»\*. И в

---

\* Эллиот Л., Уилкокс У. Физика / Пер. с англ. — М.: Наука, 1975. С. 547.



---

самом деле — что же такое свет? Какова его физическая природа? В течение многих веков люди ищут ответ на эти вопросы.

**ОППОНЕНТ.** Я знаком с упомянутым Вами учебником физики. И хотел бы обратить внимание на продолжение приведенной цитаты: «Однако несмотря на это, свет позволял нам познать окружающий мир при помощи нашего зрения в гораздо большей степени, чем мы могли бы это сделать при помощи всех остальных чувств, вместе взятых».

**АВТОР.** Вы хотите тем самым сказать, что исследование физической природы света не так уж и необходимо?

**ОППОНЕНТ.** Я, конечно, понимаю, что природу света исследовать надо. Но насколько это важно на практике? Френель не знал квантовой оптики, ему была неизвестна также электромагнитная природа световых волн. Он считал, что свет — это упругие волны в некоем эфире; следовательно, как мы теперь понимаем, он весьма упрощенно представлял себе природу света. Несмотря на это он сумел объяснить, например, явление частичного отражения и преломления света на границе двух диэлектриков, а его формула для коэффициентов отражения пользуются и по сей день. Во всех современных учебниках по оптике можно найти «формулы Френеля». В ка-

честве еще одного примера можно привести работы Гюйгенса. В понимании природы света Гюйгенс был, пожалуй, еще дальше от истины, нежели Френель. Пользуясь представлением об упругом световом эфире, он рассматривал распространение в нем не воли, а неких импульсов. И тем не менее он установил волновой принцип, который теперь носит его имя и входит в современные учебники. До сих пор мы пользуемся геометрическими построениями Гюйгенса при рассмотрении двойного лучепреломления в кристаллах.

**АВТОР.** Разумеется, и у Френеля, и у Гюйгенса модели света были очень упрощенными. Однако в них содержалось определенное «рациональное зерно». Ученые сумели воспользоваться им и получили результаты, сохранившие свою научную ценность и в наше время.

**ОППОНЕНТ.** Мне кажется, что, наблюдая и изучая, например, отражение, преломление, двойное лучепреломление, можно вообще ничего не знать о строении света. Разве нельзя вывести систему определенных закономерностей непосредственно из наблюдаемых фактов?

**АВТОР.** Любое исследование начинается с наблюдения и осмысливания фактов. Действительно, многие закономерности в оптике были установле-

ны лишь на основе обобщения наблюдаемых фактов. Однако Френель для вывода коэффициентов отражения света должен был использовать представление о световых волнах (пусть даже в упругом эфире). А ведь такое представление нельзя рассматривать как «наблюдаемый факт»; это уже попытка постичь физическую природу света.

Что же касается Гюйгенса, то здесь вопрос о понимании ученым природы света оказался более острым. Недостаточное понимание этой природы, как известно, не позволило Гюйгенсу объяснить его же собственные опыты по двойному лучепреломлению, в которых пучок света пропускался последовательно через два кристалла. Гюйгенс наблюдал, как вышедшие из первого кристалла обыкновенный и необыкновенный лучи вели себя во втором кристалле по-разному — в зависимости от взаимной ориентации кристаллов. В одних случаях каждый из лучей снова «расщеплялся» на два луча. В других случаях нового «расщепления» лучей не происходило; при этом вышедший из первого кристалла обыкновенный луч либо оставался во втором кристалле обыкновенным лучом, либо (при иной ориентации кристаллов) вел себя как необыкновенный луч. Аналогично вел себя и необыкновенный луч, вышедший из первого крис-

талла. Гюйгенс не смог объяснить полученных результатов, так как не знал (и не решался даже предположить), что световые волны поперечны. Его опытов было вполне достаточно для открытия поляризации света. Достаточно, но при условии более глубокого понимания природы света. Такого понимания не было, и поэтому открытие поляризации не состоялось (поляризация была открыта лишь более чем через сто лет).

Каким бы простым ни казалось наблюдаемое явление, все равно в процессе его все более глубокого исследования понадобятся представления о природе света. Казалось бы, что может быть проще и понятнее отражения света от зеркальной поверхности? А ведь при таком отражении происходит частичная поляризация света, иначе говоря, изменяется строение света, его структура. Здесь уже не обойтись без рассмотрения природы света. По этому поводу французский физик Араго (начало XIX в.) писал: «Отражение света занимало наблюдателей еще со времен Платона и Евклида. Но никто не подозревал в нем ничего большего, как средство отклонять лучи, никто не воображал, что изменение пути может быть причиной изменения природы.»

**ОППОНЕНТ.** Ваши замечания вполне убедительны. Однако такой талантливый ис-

---

следователь, как Ньютон, все же избегал вопросов, связанных с природой света. В своей знаменитой «Оптике» он заявлял: «Мое намерение в этой книге — не объяснять свойства света гипотезами, но изложить и доказать их рассуждением и опытами». Именно опытами Ньютон и занимался: придумал и эффектно применил метод скрещенных призм, осуществил первый монохроматор света, разработал и использовал различные оптические схемы, сочетая в них призмы, линзы, экраны с щелями, зеркала. А «гипотезы», которых он стремился избегать, — это, как я понимаю, были различные предположения о природе света.

**АВТОР.** Слова Ньютона надо воспринимать с учетом психологии великого ученого, стремящегося каждый свой шаг тщательно перепроверить, подкрепить опытом и вычислениями. Он использовал разные способы «проверить то же самое, ибо испытующему обилие не мешает». Естественно, что ему претили догадки тех или иных ученых, взятые, что называется, «с потолка». Сюда можно отнести, например, гипотезу Аристотеля о том, что различие в цвете связано с различием в количестве темноты, «примешиваемой» к солнечному свету: фиолетовый цвет возникает при наибольшем добавлении темноты к свету, а красный — при наи-

меньшем. Эта гипотеза оказалась живучей; она просуществовала вплоть до Ньютона, который своими блестящими оптическими опытами опроверг ее. В качестве примера можно также упомянуть Гука, который много полемизировал с Ньютоном. Гук не верил, что в простом световом луче могут содержаться все цвета, и выдвигал гипотезу, согласно которой цвета в призме образуются в результате «возмущения» призмой простого волнового движения. Против таких и подобных им гипотез, не проверенных и не подкрепленных опытом, и выступал Ньютон. Отсюда вовсе не следует, что он пренебрегал вопросами, касающимися природы и строения света.

**ОППОНЕНТ.** Но он уделял им мало внимания.

**АВТОР.** Не могу согласиться с Вами. Позднее мы познакомимся с взглядами Ньютона на природу света. Интересно, что он пытался создать модель света, в которой бы сочетались корпускулярные и волновые стороны. Но об этом в свое время.

**ОППОНЕНТ.** В любом случае взгляды Ньютона на природу света представляют ценность только в историческом плане. Вклад же Ньютона в оптику тем не менее исключительно огромен и имеет непреходящую научную и практическую ценность.

**АВТОР.** Об этом мы уже го-

ворили в связи с Гюйгенсом и Френелем. Естественно, что в XVII в. представления о свете заметно отличались от представлений XX в.

**ОППОНЕНТ.** Вот именно. Ньютон в XVII в. пользовался представлениями, которые по сравнению с сегодняшними кажутся упрощенными, порой даже в какой-то мере наивными. Но разве не покажутся такими же наши представления о природе света ученым, скажем, XXII в.? Касаясь вопроса о том, что такое свет, С. И. Вавилов как-то заметил: «Не один раз за тысячи лет физики полагали, что вопрос исчерпан. Потом, в результате новых опытов, оказывалось, что заключение преждевременное, и начиналась новая стадия развития, которая опять приводила к временному успокоению». Не следует ли отсюда, что физическая природа света как была, так и останется для нас тайной «за семью печатями»?

**АВТОР.** Нет не следует. Процесс познания всегда идет по схеме последовательных приближений. Вчера мы были дальше от истины, чем сегодня; завтра будем еще ближе к ней. В этом диалектика процесса познания. Можно сказать, что мы постепенно приближаемся к истине через последовательность «относительных истин». Процесс этого приближения бесконечен. Следует подчеркнуть, что непонимание диа-

лектики процесса познания не раз приводило физиков к неоправданной самоуспокоенности, к ложному убеждению в том, что тот или иной вопрос исчерпан.

**ОППОНЕНТ.** Согласен, что познание природы света — никогда не кончающийся процесс. А ведь оптика существует. И притом вот уже многие столетия.

**АВТОР.** Оптика не просто существует. Она развивается. И развитие ее происходит одновременно с углублением наших представлений о природе света. В свою очередь, развитие оптики способствует дальнейшему углублению наших представлений о строении света. По мере развития и углубления представлений о свете выявляются внутренние связи между, казалось бы, совсем разными явлениями, обнаруживаются их общие причины. Достаточно указать на происшедшее во второй половине XIX в. слияние электромагнетизма с оптикой, покончившее с механистическим подходом к оптическим явлениям. Подчеркнем, что по мере развития оптики, накопления новых фактов, открытия новых явлений все более возрастает важность вопроса о физической природе света. Хорошим примером может служить люминесценция. Как Вы полагаете, когда возникло учение о люминесценции?

---

**ОППОНЕНТ.** Еще Аристотель наблюдал люминесценцию гниющей рыбы. Галилей называл свечение болонского камня одним из «чудес природы». Ломоносов получал зеленое свечение паров ртути в откачанной трубке с жидкой ртутью при резких встряхиваниях трубки. Одним словом, люминесценция известна ученым довольно давно.

**АВТОР.** Действительно, люминесценцию наблюдали с давних времен.

**ОППОНЕНТ.** Насколько мне известно, Ломоносов полагал, что свечение возникает в упругом эфире в результате быстрых колебаний частиц эфира, обусловленных резкими встряхиваниями трубки с ртутью. Хорватский ученый XVIII в. Бошкович разработал модель люминесценции, согласно которой световые корпускулы сначала захватывались силовым полем молекул вещества, а затем за счет «внутренних движений вещества» выталкивались из молекулярного поля и тем самым снова излучались. Теорию люминесценции разрабатывал также Л. Эйлер. Он полагал, что люминесценция возникает в системе в результате ее собственных колебаний, которые происходят под действием каких-либо внешних вынуждающих колебаний; при этом частота вынуждающих колебаний может быть иной, чем частота собственных колебаний. Были и дру-

гие теории люминесценции. **АВТОР.** Совершенно верно, теорий люминесценции было предложено довольно много. Как подчеркивал С. И. Вавилов, «характерная черта всех теоретических построений в области люминесценции до XX в. состояла в том, что их авторы волею-неволею ограничивались произвольно избранным кругом явлений, закрывая глаза на остальное. Изолированное от остальной физики, учение о люминесценции само, внутри себя, распадалось на отдельные, почти не связанные части». Как Вы полагаете, в чем здесь причина?

**ОППОНЕНТ.** Возможно, в сложности явления люминесценции, а также в недостаточном высоком уровне развития физического эксперимента.

**АВТОР.** Главная причина заключалась в недостаточно глубоком понимании природы света, а конкретнее — в непонимании его квантовой природы. Для возникновения цельного учения о люминесценции необходима была квантовая оптика. Точнее говоря, были нужны квантовая оптика и квантовая теория атомных спектров. Они появились в начале XX в., и вскоре была создана теория люминесценции. **ОППОНЕНТ.** Согласен, что при рассмотрении люминесценции понимание квантовой природы света весьма важно. Но ведь люминесцентные про-

цессы, наверное, нельзя считать чисто оптическими. Здесь происходит взаимодействие света и вещества.

**АВТОР.** Действительно, здесь свет взаимодействует с веществом: молекулы и атомы поглощают и испускают фотоны. Однако, строго говоря, во всех оптических явлениях в той или иной форме происходит взаимодействие света и вещества, будь то отражение, преломление или рассеяние света. И это еще один аргумент в пользу важности изучения природы света.

Ранее я отмечал, что углубление наших представлений о природе света способствует развитию оптики. Примером может служить возникновение на основе квантово-оптических представлений так называемой «нелинейной оптики». По словам С. И. Вавилова, «е того времени, когда были открыты квантовые свойства света, вопрос о линейности оптики сделался спорным».

**ОППОНЕНТ.** Тут мы действительно выходим за рамки простых наблюдений.

**АВТОР.** Между прочим, «линейность» в оптике наблюдать вовсе нетрудно. Как известно, два световых пучка проходят один сквозь другой без взаимного возмущения (закон независимости световых пучков). Это и есть проявление «линейности» оптики. Сам термин «линейный» имеет математическое происхождение: он свя-

зан с линейностью уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитных, а значит, и световых волн. Существенно, что до появления квантово-оптических представлений линейность в оптике казалась сама собой разумеющейся. Однако все изменилось с появлением и развитием квантовой физики.

**ОППОНЕНТ.** Но световые пучки действительно не возмущают друг друга.

**АВТОР.** Это верно для света, распространяющегося в пустоте или воздухе, при условии, что интенсивность света не очень велика. Получаемые с помощью лазеров интенсивные световые пучки, попадая в прозрачную среду, могут весьма сильно взаимодействовать друг с другом. При этом свет в среде может дефокусироваться или, напротив, фокусироваться; может измениться его частота. Подобные явления и составляют содержание нового направления в современной оптике, названного «нелинейной оптикой». Позднее мы поговорим о нелинейно-оптических явлениях подробнее. Здесь же важно лишь отметить связь этих явлений с квантовой природой света.

**ОППОНЕНТ.** Приходится согласиться с тем, что вопросы квантовой природы света и в связи с этим вопросы квантовой оптики действительно выходят за рамки обычно рассматриваемых квантово-опти-

---

ческих явлений и приобретают принципиальное значение. АВТОР. Закончим нашу беседу словами из книги С. И. Вавилова «Глаз и Солнце», вышедшей в 1927 г.: «На пути понимания природы света человек получил микроскопы, телескопы, дальномеры, радио, лучи Рентгена... В поисках истины человек безгранично расширяет область своего владения природой. А не в этом ли подлинная задача науки?» Сегодня нам остается до-

бавить, что на пути понимания природы света человек получил люминесцентные осветители и экраны, лазеры, генераторы оптических гармоник, умножающие частоту света, параметрические генераторы света, позволяющие плавно перестраивать частоту, а также целый ряд других оптических приборов и устройств, без которых уже нельзя представить себе совершающуюся на наших глазах научно-техническую революцию.

**РАЗВИТИЕ ФОТОННЫХ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЙ**

**ГЛАВА 1**

**ПРОЛОГ**

§ 1.1. Световые корпускулы 17

§ 1.2. Световые волны  
в упругом эфире 23

§ 1.3. Электромагнитная  
природа света 29

**ГЛАВА 2**

**РОЖДЕНИЕ**

§ 2.1. Проблемы теплового  
излучения 36

§ 2.2. Формула Планка 42

§ 2.3. Световые кванты  
Эйнштейна 46

§ 2.4. Вывод формул Рэлея —  
Джинса и Планка по  
современной теории  
(переход от световых волн  
к фотонам) 52

**ГЛАВА 3**

**СТАНОВЛЕНИЕ**

§ 3.1. Спектры атомов.  
Постулаты Бора 60

§ 3.2. Испускание  
и поглощение излучения  
по квантовой теории 68

§ 3.3. Эффект Комптона 73

§ 3.4. Фотоны 78



---

---

**История науки есть сама наука.**

**Гете**

---

---

*Корпускулярные модели в оптике прошли  
длинный путь развития — от световых  
корпускул Ньютона до квантов энергии Планка,  
световых квантов Эйнштейна  
и, наконец, фотонов.*

*Современные фотонные представления  
сформировались в первой четверти нашего  
столетия на основе исследований  
по тепловому излучению тел и оптическим  
спектрам атомов; существенную роль  
сыграли при этом также эксперименты  
по фотоэффекту и эффекту Комптона.*

## ГЛАВА I

---

### ПРОЛОГ

#### § 1.1. Световые корпускулы

Свет в представлении античных ученых. В VI в. до н. э. последователи Пифагора полагали, что из глаз человека выходит невидимое истечение, которое как бы «ощупывает» наблюдаемый объект. В V в. до н. э. Эмпедокл считал, что наряду с истечением из глаз существует также истечение из светящихся тел. Демокрит (около 400 г. до н. э.) отрицал существование каких бы то ни было истечений из глаз. Он объяснял зрительное ощущение воздействием попадающих в глаз мелких «атомов», которые испускает светящееся тело. Фактически это была первая гипотеза о световых корпускулах. Тем не менее Аристотель (IV в. до н. э.) в своих трудах все еще пользовался представлением о лучах, выходящих из глаз человека, употребляя термин «зрительные лучи». Так, в книге Аристотеля «Метеорологика» мы встречаем фразы типа: «...в этом случае зрительный луч человека легко достигает солнца». В трудах Евклида по оптике, созданных около 300 г. до н. э., есть утверждение: «Испускаемые глазами лучи распространяются по прямому пути».

В поэме Лукреция «О природе вещей» (около 50 г. до н. э.) — прекрасном поэтическом произведении, где отразилась в сконцентрированном виде достижения античной науки, — уже нет упоминания о лучах, выходящих из глаз человека. Световые лучи рассматриваются как поток мелких частиц, летящих в разные стороны от светящихся или освещенных тел. Об этом Лукреций говорит так:

От вещей всевозможных, какие мы видим,  
Необходимо должны истекать и лететь, рассыпаясь,  
Тельца, которые бьют по глазам, вызывая в них зренья.

---

Свойства световых «телец» Лукреций не обсуждает. Он отмечает лишь, что

... света тела основные  
Мельче, чем те, из каких состоит благодатная влага.

Этот вывод делается из того факта, что свет через прозрачные тела проходит, а дождь не проходит. Так как Солнце испускает световые «тельца», то, утверждает Лукреций, оно не может существовать вечно:

Должны мы признать что и солнце, и месяц, и звезды  
Света метают лучи, возмещая их снова и снова,  
Пламя теряя всегда, излученное ранее ими;  
А потому и не верь, что они нерушимы и вечны.

Световые корпускулы Ньютона. XVII век занимает в истории оптики особое место. В этом веке трудились Кеплер, Галилей, Декарт, Гук, Гюйгенс. Снеллиус открыл закон преломления света, Гримальди выполнил первые опыты по дифракции света, Бартолин обнаружил явление двойного лучепреломления в кристаллах, Рёмер измерил скорость света. Наконец, во второй половине этого века проводил свои знаменитые оптические исследования Исаак Ньютон. Как заметил академик Л. И. Мандельштам, «Ньютон впервые дал действенное учение о цветах, на основании которого он сам нашел огромное число новых фактов, количественно связанных друг с другом, и открыл путь к нахождению новых... Целый класс явлений стал теперь доступен количественному рассмотрению». Можно утверждать, что именно в XVII в. были заложены экспериментальные основы физической оптики.

Активно исследуя оптические явления, ученые XVII в., естественно, проявляли большой интерес к вопросам, связанным с природой света. По этим вопросам между учеными возникла дискуссия, затянувшаяся на многие годы. Участники дискуссии принято делить на два лагеря. В одном находились сторонники теории истечения *световых корпускул*, предложенной Ньютоном. В другом были сторонники концепции *упругого эфира*, в котором распространяются *световые волны* (или *световые импульсы*); лидерами здесь являлись Гук и Гюйгенс. Обе концепции — и корпускулярная, и волновая — являлись *механистическими*. Огромные успехи механики XVII в. невольно инициировали механистический подход к оптическим явлениям.

В «теории истечения» Ньютона свет рассматривался как поток мелких корпускул, которые либо выбрасываются,

---

либо отражаются телами и летят с огромной скоростью. Эти корпускулы играли роль своеобразных «световых атомов». Корпускулы предполагались разных размеров и массы: наибольшие — для темно-красных лучей, наименьшие — для фиолетовых. При переходе через границу двух сред разные корпускулы преломлялись по-разному: чем меньше размеры и масса корпускулы, тем сильнее преломление. Солнечный свет Ньютон представлял в виде смеси различных корпускул.

Световые корпускулы Ньютона не обладали осевой симметрией, но имели четыре разные «стороны». Представим, что корпускула поворачивается вокруг оси (вокруг направления ее движения) последовательно на 90, 180, 270, 360°; при этом она всякий раз будет повернута к наблюдателю новой стороной. Вывод об отсутствии осевой симметрии у световых лучей был сделан Ньютоном на основе опытов Гюйгенса по двойному лучепреломлению в двух последовательно расположенных кристаллах (мы упоминали об этих опытах в вводной беседе). В своей книге «Оптика», вышедшей в 1704 г., Ньютон писал: «Не существует двух сортов лучей, отличающихся по своей природе один от другого так, что один постоянно при всех положениях преломляется обыкновенным способом, другой же постоянно во всех положениях — необыкновенным способом. Разница между двумя сортами лучей в опыте, указанном в 25-м вопросе (имеется в виду опыт Гюйгенса с двумя кристаллами.— Авт.), была только в положениях сторон лучей относительно плоскостей перпендикулярных преломления. Ибо один и тот же луч преломляется здесь иногда обыкновенно, иногда необыкновенно — сообразно положению его сторон относительно кристалла». Здесь содержится в неявном виде открытие *поляризации света*. Различным «положениям сторон» ньютоновских корпускул в современной оптике соответствуют различные ориентации плоскости поляризации плоскополяризованного света, рассматриваемые относительно плоскости, проходящей через оптическую ось кристалла и направление светового луча.

Заметим, что Ньютон, сознавая сложность природы света, пытался ввести в свою корпускулярную модель элементы волнового движения. Он понимал, что чисто корпускулярная теория не объяснит интерференционные кольцевые полосы, которые сам же Ньютон наблюдал при прохождении света через воздушный промежуток между сферической поверхностью линзы и плоскостью стекла, подложенного

---

под линзу (хорошо известные «кольца Ньютона»). Ньютон допустил, что существуют и световые корпускулы, и светоносный эфир. Двигаясь в эфире, световые корпускулы возбуждают «эфирные волны», которые распространяются в пространстве значительно быстрее самих корпускул. Эти волны приводят к попеременным сжатиям и разрежениям эфира. Попадая в область сжатого эфира, световая корпускула испытывает «приступ легкого отражения», попадая же в разреженную область, она испытывает «приступ легкого прохождения». «Приступы» следуют через определенные промежутки времени и разделены в пространстве расстояниями, которым соответствуют длины световых волн (по современной терминологии).

Введя в рассмотрение наряду с корпускулами эфир, в котором корпускулы испытывают не вполне понятные «приступы», Ньютон тем самым усложнил природу света. Вместо одной материальной сущности (корпускулы либо эфира) он предложил рассматривать сразу две сущности. Может быть, в этом проявилось гениальное предвидение корпускулярно-волнового дуализма света?

Между прочим, говоря о взглядах Ньютона на природу света, довольно часто упускают из виду сложность позиции, занимаемой ученым в этом вопросе. Ньютона часто представляют ортодоксальным приверженцем корпускулярной концепции, забывая, что эта концепция была для него основной, но не единственной. Периодичность следования «приступов», которые испытывают ньютоновские корпускулы, явно указывала на то, что Ньютон наделял свои корпускулы также и волновыми свойствами.

**Критика корпускулярной концепции.** В споре между сторонниками корпускулярной и волновой концепций особенно непреклонными были сторонники волновой концепции. Они выдвинули целый ряд аргументов против самой идеи световых корпускул.

Мы рассмотрим три таких аргумента. Первый принадлежит Гюйгенсу. «Удивительнейшее свойство света, — отмечал Гюйгенс, — состоит в том, что лучи, идущие из различных и даже противоположных направлений, проходят один сквозь другой, нисколько не препятствуя обоюдным действиям». В связи с этим он ставил вопрос: как могут не взаимодействовать два пучка световых корпускул, если они взаимно пересекаются? Позднее с такой же критикой в адрес корпускулярной концепции выступал М. В. Ломоносов, указывавший, что при пересечении световых пучков корпускулы должны были бы соударяться, следствием чего долж-

---

но было бы наблюдаться «в лучах замешательство», т. е. должно было бы происходить саморассеяние света. Критика Ломоносова особенно интересна тем, что если отсутствие саморассеяния световых корпускул в воздухе он еще как-то допускал, то решительно отказывался от такого допущения при рассмотрении световых пучков в прозрачных плотных телах. К этому замечанию Ломоносова мы еще вернемся.

Второй аргумент против корпускул был выдвинут Гуком. Как могут материальные тела (световые корпускулы) двигаться со столь огромной скоростью? Напомним, что благодаря выполненным в 1676 г. измерениям Рёмера было уже известно, что скорость света составляет около 300 000 км/с. С такой огромной скоростью могут, считал Гук, распространяться световые возбуждения в эфире, но не могут лететь какие-либо материальные тела.

Гук выдвинул и третий аргумент. Если свет есть поток корпускул, то почему мы не замечаем уменьшения массы Солнца? Позднее этот аргумент активно поддержал Л. Эйлер. Он находил корпускулярную концепцию весьма странной, «потому что, если Солнце испускает непрерывно и во все стороны потоки светового вещества, и притом с такой огромной скоростью, то следовало бы ожидать, что оно должно скоро истощиться или, по крайней мере, претерпеть заметные изменения в течение стольких столетий».

**Несостоятельность критики корпускулярной концепции.** С позиций современной науки представляется несостоятельной критика корпускулярной концепции, с которой выступали оппоненты Ньютона.

Скорость порядка сотен тысяч километров в секунду несколько не удивит современного физика. Известно, что такие скорости могут иметь даже частицы, обладающие, в отличие от фотона, массой покоя. В качестве примера укажем электроны, вылетающие при  $\beta$ -распаде атомных ядер, различные частицы в космических лучах, частицы, получаемые на ускорителях. Отметим также излучение Вавилова — Черенкова; ведь для его возникновения надо, чтобы скорость электрона превышала скорость света в той или иной прозрачной среде.

Современная физика установила взаимосвязь энергии и массы (знаменитое соотношение Эйнштейна  $E=mc^2$ ). Установление этой взаимосвязи не оставляет никаких сомнений в том, что масса Солнца, как и любой другой звезды, непрерывно уменьшается в процессе излучения. Так что прав был Лукреций.

Особого внимания заслуживает первый из приведенных ранее аргументов против световых корпускул — по поводу неизбежных соударений корпускул в пересекающихся световых пучках. В современной оптике вместо ньютоновых световых корпускул рассматриваются фотоны. Они движутся, как известно, с неизменной скоростью — скоростью света в вакууме. Поэтому будем полагать, возвращаясь к Ньютону, что скорость его световых корпускул также неизменна; при любых соударениях она остается одной и той же

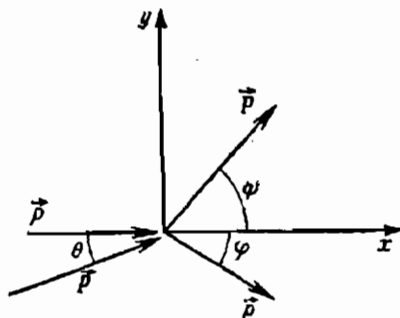


Рис. 1.1

по модулю. Далее учтем, что, как известно, при пересечении световых пучков в вакууме или в воздухе сохраняется частота света, а значит, энергия каждого фотона (напомним, что эта энергия равна произведению постоянной Планка на частоту света:  $E=h\nu$ ). В связи с этим будем полагать, что кинетическая энергия  $mv^2/2$  световой корпускулы так-

же остается неизменной. Вместе с предположением о неизменности модуля скорости это означает, что при соударениях сохраняется постоянная масса корпускулы.

Нетрудно убедиться, что корпускулы с неизменными массой и модулем скорости при соударениях друг с другом не будут обмениваться ни энергией, ни импульсом. Относительно энергии такой вывод очевиден. Что касается импульса, то ясно, что сохраняется неизменным его модуль. Остается рассмотреть вопрос о направлениях.

Пусть сталкиваются две корпускулы. Обозначим модуль импульса первой корпускулы  $p$ , а второй —  $P$ . Для простоты будем рассматривать двумерную задачу. Направим одну из координатных осей — ось  $x$  — вдоль импульса первой корпускулы до соударения. Обозначим через  $\theta$  угол между импульсами корпускул перед соударением. После соударения модуль импульса каждой из корпускул остается прежним; направление же импульсов определится некоторыми углами с осью  $x$ , которые обозначим  $\psi$  и  $\phi$  (рис. 1.1). Воспользуемся законом сохранения импульса для соударяющихся корпускул. Запишем его сначала для проекций импульсов на ось  $x$ , а затем на ось  $y$ ; получим систему

уравнений

$$\left. \begin{aligned} p + P \cos \theta &= P \cos \Psi + p \cos \varphi; \\ P \sin \theta &= P \sin \Psi - p \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

Легко видеть, что данная система уравнений имеет решение:

$$\Psi = \theta, \quad \varphi = 0. \quad (1.1.2)$$

Таким образом, направление движения корпускул при соударении также не меняется. Итак, мы приходим к выводу: световые корпускулы, свойства которых приведены в соответствии со свойствами фотонов (т. е. корпускулы с неизменной массой и модулем скорости), оказываются взаимно «проницаемыми».

На это обстоятельство обращал внимание С. И. Вавилов. Он писал: «Современная оптика с ее принципами о постоянстве скорости света и о квантовой природе света несколько ограничивает простую корпускулярную трактовку. Если принять, что массы световых корпускул при ударе не меняются (т. е. частота световых колебаний остается неизменной) и скорость сохраняется, то из законов сохранения энергии и импульса непременно будет следовать взаимная «проницаемость» корпускул, т. е. суперпозиция. Иными словами, нарушение суперпозиции возможно только при условии изменения массы соударяющихся световых частиц, или частоты колебаний».

Весьма интересна последняя фраза в этом высказывании. Для того чтобы происходило рассеяние корпускул друг на друге, необходимо допустить, что их масса не постоянна. На языке квантовой оптики это соответствует тому, что изменяется частота света. Такое явление действительно наблюдается при взаимодействии лазерных пучков в прозрачных средах, например в кристаллах, при определенных условиях. Оно относится к нелинейно-оптическим явлениям. При этом действительно происходит взаимодействие фотонов друг с другом (тогда как в вакууме или воздухе фотоны практически не взаимодействуют). Ну как же тут не вспомнить упоминавшееся ранее замечание Ломоносова о том, что в прозрачных твердых телах световые корпускулы обязательно должны взаимодействовать друг с другом!

## § 1.2. Световые волны в упругом эфире

**Природа света по Гюйгенсу.** Свои взгляды на природу света Христиан Гюйгенс изложил в книге «Трактат о свете», вы-



---

шедшей в 1690 г. Распространение света, по Гюйгенсу,— это передача импульсов возбуждения («импульсов движения», «сотрясений») по заполняющему все пространство эфиру — от одних частиц эфира к другим. Для пояснения такого процесса приводился пример с цепочкой соприкасающихся друг с другом шаров. Цепочка шаров показана на рис. 1.2, а, взятом из «Трактата о свете». «Если некоторое число одинаковых шаров, сделанных из очень твердого вещества,— писал Гюйгенс,— расположить прямолинейно рядом так, чтобы они соприкасались, то при ударе такого же шара в крайний движение передается почти в одно мгновение последнему шару и тот отскакивает, тогда как остальные шары остаются неподвижными, так же как и тот, что ударил. Движение передается с большой скоростью, тем большей, чем больше твердость вещества, из которого сделаны шары». Шары, о которых здесь идет речь, Гюйгенс сопоставлял с частицами эфира. Он подчеркивал, что распространение импульса светового возбуждения через частицы эфира «заключается не в переносе самих частиц, а только в небольшом сотрясении, в передаче которого окружающим частицам они не могут мешать друг другу».

Используемая Гюйгенсом механическая модель эфира объясняла не только большую скорость распространения света, но и независимость распространения взаимно пересекающихся световых пучков. Последнее легко продемонстрировать на следующем опыте. Надо расположить шары на горизонтальной плоскости так, как это показано на рис. 1.2, б. Пусть шар *A* катится по направлению к шару *B* (вдоль прямой *BC*), а шар *D* — по направлению к *E* (вдоль прямой *EF*). В результате соударения шары *A* и *D* остановятся вплотную у шаров *B* и *E* соответственно, а шары *C* и *F* отскочат. В этом опыте два импульса возбуждения распространяются под прямым углом друг к другу и, пересекаясь в центре изображенной на рис. 1.2, б фигуры, не оказывают один на другого какого-либо влияния.

Хотя при описании распространения света в упругом эфире Гюйгенс пользовался термином «волна», однако, строго говоря, световые волны он не рассматривал. Он писал, что импульс возбуждения «распространяется так же, как и при звуке, сферическими поверхностями, или волнами». «Я называю эти поверхности волнами,— замечал он,— по сходству с волнами, наблюдаемыми на воде, в которую брошен камень». Чтобы его не заподозрили в переоценке этого сходства, Гюйгенс считал нужным подчеркнуть: «Так как

удары в центрах этих волн совершаются без определенной последовательности, то не нужно представлять себе, что сами волны следуют друг за другом на одинаковых расстояниях. Если на нашем рисунке (речь идет о рис. 1.3. — Авт.) эти расстояния показаны одинаковыми, то это скорее должно изображать передвижение одной и той же волны за одинаковые промежутки времени, чем нескольких волн, исходящих из одного центра». Отрицая периодичность в процессе распространения импульсов возбуждения, Гюйгенс тем

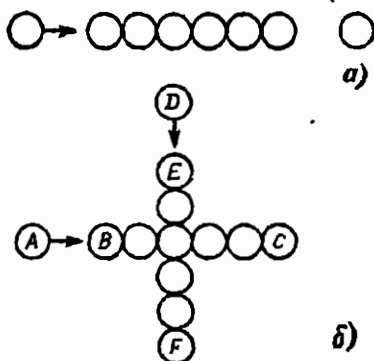


Рис. 1.2



Рис. 1.3

самым отказывался, по сути дела, от картины световых волн. Недаром он нигде не употреблял понятие длины волны.

Можно сказать, что Гюйгенс фактически рассматривал распространение в эфире не волн, а *волнового фронта*. Несмотря на известную ограниченность, такой подход позволил ему получить ряд важных результатов и прежде всего знаменитый волновой принцип (*волновой принцип Гюйгенса*). Как уже отмечалось в вводной беседе, предложенные Гюйгенсом построения для сферических и эллипсоидальных поверхностей (волновых фронтов) в кристаллах до сих пор используются при объяснении двойного лучепреломления. Известный английский физик Уильям Брэгг назвал учение Гюйгенса о свете «теорией импульсов, предвосхитившей современную волновую теорию».

Следует отметить, что из учения Гюйгенса вытекало важное следствие: скорость света в оптически более плотной среде меньше, чем в среде менее плотной. Так была внесена существенная поправка в теорию Ньютона, который допустил ошибку, сделав противоположное заключение.

Дальнейшее развитие механической модели эфира. Будучи сторонником волновой концепции, М. В. Ломоносов пытался уточнить структуру светоносного эфира. В 1756 г. он опубликовал «Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее». Распространение света Ломоносов связывал с колебательными движениями частиц эфира. Он полагал, что световые волны не могут быть перемещающимися по пространству разрежениями и сгущениями эфира, поскольку частицы должны довольно плотно заполнять эфир. Фактически Ломоносов пришел к мысли о поперечности световых волн. Правда, он выразил эту мысль несколько замысловато. Приводя поясняющий рисунок (рис. 1.4), он писал: «Пусть будет движение в частицах эфира таким, что когда ряды их  $ab$  и  $ef$  тряхнутся от  $a$  и  $e$  к  $b$  и

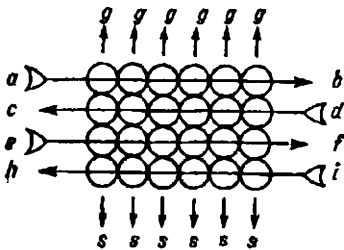


Рис. 1.4

и  $f$ , то в то же самое время ряды  $cd$  и  $hi$  тряхнутся в противоположную сторону — от  $d$  и  $i$  к  $c$  и  $h$ . Через сие должно последовать сражению частиц и движению в стороны  $s$  и  $g$  ближних частиц эфира, и так повсюду свет разливается и со всех сторон видим быть может». Здесь мы встречаем не совсем понятные «сражение частиц» и «разливание света». Но, во всяком случае, ясно (и рисунок это подтверждает), что если частицы эфира смещаются при колебаниях в горизонтальном направлении, то световые волны распространяются в вертикальном направлении.

Любопытно, что Ломоносов допускал наличие связи между оптическими и электрическими явлениями. В начатой (но так и не законченной) книге «Теория электричества» он писал: «Поскольку эти явления (электрические явления.— Авт.) имеют место в пространстве, лишенном воздуха, а свет и огонь происходят в пустоте и зависят от эфира, то кажется правдоподобным, что эта электрическая материя тождественна с эфиром». Ломоносов предполагал выполнить соответствующие исследования для проверки этого предположения. В частности, он ставил вопрос: «Будет ли луч преломляться иначе в наэлектризованной воде или наэлектризованном стекле?». Тем самым он предполагал поставить электрооптический опыт, который в действительности был осуществлен лишь через сто с лишним лет.

Большой вклад в развитие механической модели эфира внес современник Ломоносова Л. Эйлер. В своем труде «Новая теория света и цветов» (1746) он дал математическое описание распространения волн в упругой среде. Световые волны, по Эйлеру, — это продольные волны; он представлял их в виде чередующихся сжатий и разрежений, бегущих по эфиру в пределах области пространства, занимаемой расходящимся световым пучком (см. рис. 1.5, взятый из книги Эйлера).

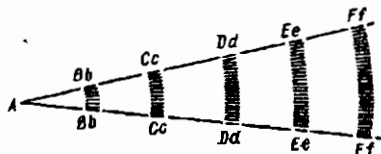


Рис. 1.5

Длина световых волн различна для лучей разного цвета; у красных лучей она больше, у фиолетовых — меньше. В отличие от Ломоносова Эйлер рассматривает продольные световые волны. Однако он идет существенно дальше Ломоносова в описании волн — вместо общих замечаний качественного характера он использует математический аппарат, впервые вводит и применяет уравнение бегущей волны. Высоко оценивая труды Эйлера, С. И. Вавилов подчеркивал, что Эйлер «пишет, вероятно, впервые в истории учения о свете привычное нам теперь уравнение плоской гармонической волны, т. е. создает аппарат элементарной волновой оптики, вполне достаточный для решения простейших интерференционных задач».

**Торжество волновых представлений.** Давний спор между сторонниками корпускулярной и волновой концепций завершился в первой половине XIX в., казалось бы, неоспоримой и окончательной победой сторонников волновой концепции. Решающую роль в этом сыграли исследования Т. Юнга и О. Френеля, заложившие основы *волновой оптики*. Юнг открыл явление *интерференции* и воспользовался им для объяснения цвета тонких пленок, цвета побежалости на металлических поверхностях, возникновения колец Ньютона и ряда других явлений. Свои результаты он опубликовал в работах, вышедших в свет в первом десятилетии XIX в. Необычные идеи и блестящие опыты Юнга по интерференции света поражали воображение. Об этом красноречиво говорит известное восклицание Араго: «Кто бы мог подумать, что свет, слагаясь со светом, может вызвать мрак!».

Френель уточнил волновой принцип Гюйгенса, дополнив его принципом интерференции Юнга; так появился широко используемый в волновой оптике «принцип Гюйген-

---

са — Френеля». На основе этого принципа Френель обстоятельно исследовал *дифракцию света*; результаты он изложил в «Мемуаре о дифракции света» (1819). «Юнг первый дал основную идею интерференции, но Френелю мы обязаны ее математическим обоснованием», — писал впоследствии известный английский физик Дж. Дж. Томсон.

Следует особо отметить опыты по интерференции поляризованных световых пучков, выполненные Френелем совместно с Араго в 1816 г. Исследователи обнаружили, что выходящие из двулучепреломляющего кристалла исландского шпата обыкновенный и необыкновенный лучи друг с другом не интерферируют. «Две системы волн, на которые делится свет при прохождении через кристалл, не оказывают друг на друга никакого действия», — констатировал Френель. После ряда интерференционных опытов, в которых варьировалась поляризация световых пучков, Френель пришел к выводу, что световые волны *поперечны*: колебания частиц эфира совершаются не вдоль направления распространения волны, а перпендикулярно этому направлению. Два параллельных световых пучка, у которых плоскости колебаний совпадают, интерферируют друг с другом наилучшим образом тогда как при взаимно перпендикулярных плоскостях колебаний пучки совсем не интерферируют. Иначе говоря, наилучшая интерференция наблюдается при взаимной параллельности плоскостей поляризации световых пучков; если же пучки поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях (как, например, выходящие из кристалла обыкновенный и необыкновенный лучи), то интерференция отсутствует.

Вывод о поперечности световых волн Френель решился опубликовать лишь через пять лет — в 1821 г. Слишком уж необычным представлялся такой вывод в применении к упругому эфиру, которому приходилось приписать теперь свойства твердого тела. Ведь только в твердых телах возможны поперечные упругие волны.

Выполненные в начале XIX в. впечатляющие исследования по интерференции, дифракции и поляризации света сделали волновую концепцию в оптике практически безраздельно господствующей. Однако при этом возникали серьезные сомнения по поводу свойств той среды, в которой распространяются световые волны, — свойств упругого эфира.

**Кризис механической модели эфира.** Упомянутые выше опыты Френеля — Араго убедительно продемонстрировали

---

поперечность световых волн. Более того, опыты показали, что световые волны ни в какой мере, даже частично, не могут быть продольными; иными словами, они не содержат «продольной составляющей». Но это означало, что упругий эфир должен «работать» только на сдвиг, что он совершенно не может сжиматься. Представить себе твердый и абсолютно несжимаемый эфир практически невозможно, если к тому же принять во внимание, что эфир должен быть также всепроникающим и, следовательно, его плотность должна быть чрезвычайно ничтожной.

Итак, исследования, приведшие в первой половине XIX в. к возникновению волновой оптики, привели также к кризису механической модели эфира. Эта модель оказывалась явно нереалистичной. Так заканчивалась эпоха «механистической оптики».

Все чаще ученые стали приходить к мысли о возможной связи оптических явлений с электрическими и магнитными. На эту возможность указывали еще Ломоносов и Эйлер. Догадывался об этом также Юнг. И вот в середине XIX в. появились первые экспериментальные результаты, показывающие, что подобные догадки ученых были правильными.

### § 1.3. Электромагнитная природа света

Открытие электромагнитной природы световых волн. В 1846 г. М. Фарадей экспериментально открыл явление поворота плоскости поляризации светового пучка, который пропускался сквозь кристалл, помещенный в магнитное поле. Это магнитооптическое явление называют сегодня «эффектом Фарадея». Обнаружив данный эффект, Фарадей тем самым продемонстрировал существование связи между оптикой и магнетизмом. Вскоре он написал статью «Мысли о лучевых колебаниях», где поставил вопрос: не могут ли световые волны передаваться по электрическим и магнитным силовым линиям? Иными словами, не является ли электромагнитный эфир (его существование в те времена пока еще не подвергалось сомнению) также и той «средой», в которой распространяются световые волны? Таким образом, Фарадей предлагал заменить полную внутренних противоречий механическую модель светоносного эфира электромагнитной моделью.

Идея Фарадея об электромагнитной природе света получили убедительное математическое обоснование в работах Дж. К. Максвелла. В его знаменитой книге «Динами-

ческая теория поля» (1864) имелась специальная глава под названием «Электромагнитная теория света». Максвелл показал, что изменения во времени электрической и магнитной составляющих поля перемещаются в пространстве, образуя *электромагнитную волну*. Из теории Максвелла следовало, что электромагнитные волны поперечны и распространяются со скоростью, равной скорости света. Анализируя полученные результаты, Максвелл пришел к заключению: свет есть явление электромагнитное, *световые волны — это электромагнитные волны*. Максвелл нашел, что показатель преломления света  $n$  для данной среды связан с диэлектрической ( $\epsilon$ ) и магнитной ( $\mu$ ) проницаемостями среды соотношением

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (1.3.1)$$

Это соотношение связывает друг с другом оптическую, электрическую и магнитную постоянные вещества.

В 1888 г. опытами Г. Герца существование электромагнитных волн было подтверждено экспериментально. Герц получил волны метрового диапазона. С этого времени началось постепенное освоение диапазона электромагнитных волн, связанное с продвижением в область все более коротких волн.

На шкале электромагнитных волн видимый свет занимает очень узкий диапазон длин волн — от 0,4 до 0,75 мкм (1 мкм =  $10^{-6}$  м). Обычно *оптическое излучение* рассматривают в существенно более широком диапазоне длин волн, включая сюда ультрафиолетовый диапазон (примерно от 0,01 мкм и до видимого света), а также инфракрасный диапазон (от видимого света до примерно 100 мкм).

**Электромагнитная волна.** В отсутствие электрических зарядов векторы электрической и магнитной напряженности поля (векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  соответственно) удовлетворяют следующей системе уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

Постоянная  $c$  есть скорость света в вакууме. Используя эти уравнения, находим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (1.3.3)$$

Для любого вектора  $\vec{a}$  справедливо соотношение  $\text{rot rot } \vec{a} = -\text{grad div } \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}$ . Так как  $\text{div } \vec{E} = 0$ , то  $\text{rot rot } \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$ . С учетом (1.3.3) получаем отсюда волновое уравнение для  $\vec{E}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.3.4)$$

Аналогичное уравнение может быть записано для вектора  $\vec{H}$ .

Зная напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , можно найти энергию электромагнитной волны в единице объема (плотность энергии):

$$\rho = (E^2 + H^2)/8\pi, \quad (1.3.5)$$

а также плотность потока энергии волны, определяемую количеством энергии, падающей нормально на единицу площади в единицу времени:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}). \quad (1.3.6)$$

Вектор  $\vec{S}$  называют *вектором Умова — Пойнтинга*. Его направление есть направление распространения электромагнитной волны (направление светового луча). Электромагнитная волна *поперечна*: плоскость векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярна направлению распространения волны.

В дальнейшем важную роль будет играть плоская электромагнитная волна, т. е. волна, фронт которой представляет собой плоскость (эта плоскость перпендикулярна направлению распространения волны). Для плоской волны справедливо соотношение

$$\vec{H} = (\vec{j} \times \vec{E}), \quad (1.3.7)$$

где  $\vec{j}$  — единичный вектор в направлении распространения волны;  $\vec{j} = \vec{S}/S$ . Из (1.3.7) можно заключить, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в плоской волне взаимно перпендикулярны и одинаковы по модулю. Подставляя (1.3.7) в (1.3.5.) и (1.3.6), находим

$$\rho = E^2/4\pi; \quad (1.3.8)$$

$$\vec{S} = \vec{j}cE^2/4\pi = \vec{j}\rho c. \quad (1.3.9)$$

Плотность светового потока равна, как мы видим, произведению плотности энергии на скорость света.



На рис. 1.6 показана плоская монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси  $z$ . Хорошо видно, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  совершают гармонические колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях и в одинаковых фазах.

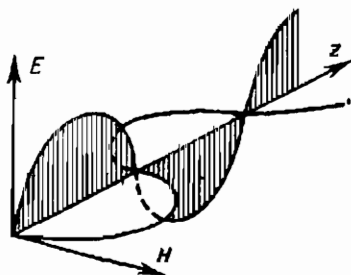


Рис. 1.6

Длина волны  $\lambda$  связана с циклической частотой  $\omega$  соотношением

$$\lambda = 2\pi c/\omega. \quad (1.3.10)$$

В заключение, отметим, что если плоская электромагнитная волна распространяется не в вакууме, а в некоторой непроводящей среде, то вместо (1.3.7)—(1.3.10) следует использовать такие соотношения:

$$\vec{H} = \frac{c}{n} (\vec{j} \times \vec{E}); \quad (1.3.11)$$

$$\rho = \epsilon E^2/4\pi; \quad (1.3.12)$$

$$\vec{S} = \vec{j} \epsilon E^2 c/4\pi n = \vec{j} \rho c/n; \quad (1.3.13)$$

$$\lambda = 2\pi c/n\omega. \quad (1.3.14)$$

Здесь  $n$  — показатель преломления среды,  $\epsilon$  — ее диэлектрическая проницаемость. Напомним, что  $c/n$  есть скорость света в среде.

**Давление света.** Пусть электромагнитная волна падает нормально на поверхность тела. При этом векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  оказываются в плоскости облучаемой поверхности. Вектор  $\vec{E}$  будет инициировать электрический ток, направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$ . Магнитное поле световой волны (вектор  $\vec{H}$ ), взаимодействуя по закону Ампера с упомянутым током, будет действовать на поверхность с некоторой силой. Таким образом, электромагнитная волна, падая на поверхность тела, должна оказывать на нее *давление*. Максвелл нашел, что это давление определяется соотношением

$$p = \rho(1 + R) = S(1 + R)/c, \quad (1.3.15)$$

где  $R$  — коэффициент отражения поверхности. Для поверхности, которая полностью поглощает падающее на нее излучение,  $R=0$ ; для идеально отражающей поверхности  $R=1$ .

---

Представляя собой электромагнитные волны, свет должен оказывать давление на тела, которые он освещает. По оценкам Максвелла, солнечные лучи в яркий день дают на  $1 \text{ м}^2$  черной поверхности с силой порядка  $10^{-6} \text{ Н}$ .

В 1900 г. на Международном конгрессе физиков в Париже П. Н. Лебедев сделал сообщение об экспериментальном обнаружении давления света на твердые тела. опыты Лебедева являлись для своего времени образцом экспериментального искусства. Его измерения дали значение давления, которое с точностью до 20 % согласовывалось с теорией Максвелла.

Результаты опытов Лебедева по прямому измерению давления света следует рассматривать не только как доказательство электромагнитной природы света. Эти опыты подтвердили наличие импульса у электромагнитного поля.

«Изгнание» эфира. Триумф теории Максвелла еще не означал, что все проблемы оптики решены. Сохранялась таинственная «сущность» — эфир. Правда, теперь природа эфира была уже не *механистической*, а *электромагнитной*. «Изменение» природы эфира позволило преодолеть противоречия, связанные с требованием одновременно и абсолютной несжимаемости, и сильной разреженности упругого эфира. Однако оставалась нерешенной проблема эфира и *движущихся тел*. Если электромагнитный эфир существует, то увлекается ли он движущимися телами? Подчеркивая принципиальность этого вопроса, Л. И. Мандельштам отмечал: «Здесь возникает кардинальная проблема взаимодействия между движущейся Землей и эфиром, а тем самым и проблема взаимодействия между эфиром и материей вообще». Вопрос об увлечении эфира движущимися телами обсуждал еще Гюйгенс. Особую остроту он приобрел в первой половине XIX в. в связи с исследованиями Юнга и Френеля по волновой оптике.

В середине XIX в. Герц предложил теорию, согласно которой эфир полностью увлекается телами при их движении. Эта теория была опровергнута в 1851 г. опытами Физо. Позднее Лоренц развил теорию, основанную на противоположной гипотезе — гипотезе неподвижного эфира. Лоренц предположил, что существует абсолютно неподвижный эфир, сквозь который свободно проходят все движущиеся тела. Наблюдатель в системе, связанной с движущимся телом, должен «ощущать» «эфирный ветер», скорость которого соответствует скорости движения тела относительно неподвижного эфира. Экспериментальные поиски эфирного ветра,

---

связанного с движением Земли относительно эфира, предприняли Майкельсон и Морли, выполнившие с этой целью уникальные измерения. Схема использовавшегося в этих опытах интерферометра Майкельсона, равно как и идея выполнявшихся измерений, достаточно хорошо известны. Уже первый опыт (1881) позволил заключить, что теория Лоренца неверна. В последующие годы Майкельсон и Морли совершенствовали методику измерений; в результате уверенность в отсутствии эфирного ветра окончательно укрепилась. Вместе с тем укреплялось убеждение в отсутствии и самого эфира.

Окончательно эфир был «изгнан» из физики в самом начале XX в. в связи с созданием А. Эйнштейном специальной теории относительности.

Итак, на рубеже XIX и XX столетий было установлено, что для распространения электромагнитных, в частности световых, волн не нужна какая-то специальная среда. Волны сами по себе являются материальной «сущностью», обладающей энергией и импульсом, и могут распространяться в вакууме. Тем самым понятие «волна» приобретало новое содержание. Физикам приходилось расставаться с привычкой рассматривать волновое движение *обязательно в какой-то среде*.

**Затишье перед бурей.** XIX столетие ознаменовалось целым рядом достижений в физике. К ним относятся достижения в области электричества и магнетизма, которые привели к теории электромагнитного поля Максвелла и позволили включить оптику в рамки электромагнитных явлений; значительный прогресс в развитии классической механики, которая достигла особой стройности и законченности благодаря блестящим математическим исследованиям; разработка универсальных физических принципов, среди которых на первое место следует поставить закон сохранения и превращения энергии. Неудивительно, что к концу века стало складываться убеждение в том, будто физическое описание законов природы близко к окончательному завершению.

В 1879 г. тогда еще мало кому известный молодой ученый Планк защитил диссертацию. После защиты он сообщил своему учителю Филиппу Жолли о намерении посвятить себя теоретической физике. «Молодой человек, — ответил ему Жолли, — зачем Вы хотите испортить себе жизнь? Ведь теоретическая физика уже в основном закончена, дифференциальные уравнения решены; остается рассмотреть отдельные частные случаи с измененными гранич-

---

ными и начальными условиями. Стоит ли браться за такое бесперспективное дело?»

На Международном конгрессе математиков в 1900 г. выдающийся математик Гильберт сформулировал знаменитые 23 проблемы. Шестой проблемой была проблема аксиоматизации физики. Гильберт предложил рассмотреть конечное число исходных аксиом, из которых чисто логически можно было бы вывести все следствия, достаточные для полного описания физической картины мира. Сам факт постановки такой проблемы как нельзя лучше говорил об убежденности ученых того времени в близости окончательного завершения физической науки.

Как и над всей физикой, над оптикой небо также представлялось совершенно ясным. Правда, в этом небе существовали два «облака» — некоторые проблемы, возникавшие в связи с исследованиями *теплового излучения*, а также экспериментально обнаруженные непонятные закономерности *фотоэффекта*. В преддверии нового века эти два «облака» особых опасений не вызывали; тогда надеялись, что их удастся со временем благополучно развеять. Да и выглядели они не очень устрашающе на общем фоне достигнутых в оптике успехов. Идеи волновой оптики Юнга и Френеля, перенесенные на «почву» электромагнитной теории Максвелла, казалось, исчерпывающе объясняли почти все оптические явления. Природа света представлялась полностью разгаданной, тем более что такая таинственная «сущность», как эфир, оказывалась попросту ненужной.

Конечно, «изгнание» эфира могло бы и насторожить, так как указывало на *особенный* характер световых волн, на то, что эти волны принципиально отличаются от обычных волн, для распространения которых нужна какая-то среда. Здесь же никакой среды не требовалось; как и корпускулы, световые волны существовали «сами по себе». Казалось бы, тут впору было вспомнить о корпускулярной концепции света. Однако в конце XIX в. о некогда авторитетной концепции световых корпускул старались вообще не упоминать.

Царившая в те годы в оптике, как и во всей физике, обстановка общего удовлетворения успехами оказалась всего лишь затишьем перед бурей. Очень скоро стало ясно, что корпускулярная концепция была списана в архив совершенно напрасно, что казавшиеся безобидными два упомянутых выше «облака» в действительности превратились в настоящие тучи, которые привели к революционным потрясениям в оптике и, более того, в физике в целом. Эти потря-

---

сения затронули самые основы — представления о природе света. В результате произошло диалектическое *объединение* волновой и корпускулярной концепций.

---

## ГЛАВА 2

---

### РОЖДЕНИЕ

#### § 2.1. Проблемы теплового излучения

Классическая электродинамика могла успешно объяснить лишь те оптические явления, где несущественна структура элементарных процессов *взаимодействия света с веществом*. При рассмотрении же теплового излучения эти процессы становятся существенными. Поэтому решение проблем теплового излучения оказалось в конечном счете «не по силам» классической электродинамике.

**Тепловое излучение.** Вокруг любого тела существует излучение, возникающее в результате испускания телом электромагнитных волн за счет внутренней (тепловой) энергии тела \*. Это излучение называют *тепловым* или, иначе, *температурным*. С ростом температуры тела плотность излучения увеличивается. Тепловое излучение наблюдается при любых температурах; однако при невысоких температурах, например комнатных, испускаются практически лишь длинные (инфракрасные) электромагнитные волны.

Тело не только *испускает*, но также и *поглощает* тепловое излучение. В результате может устанавливаться термодинамическое равновесие между излучением и телом. В этом случае можно говорить о *температуре излучения*; она, очевидно, равна температуре тела. Тепловое излучение — единственный вид излучения, которое может быть *равновесным*.

Остальные возможные виды излучения всегда *неравновесны*. Их объединяют под общим названием — *излучения люминесценции*. Люминесценция происходит при наличии дополнительных (по отношению к нагреванию) процессов сообщения энергии телу. Эти процессы могут быть различными; соответственно говорят о различных видах люминесценции. Мы рассмотрим их позднее.

На первый взгляд может показаться, что структура элементарных процессов взаимодействия излучения с ве-

---

\* Здесь и далее под термином «излучение» понимается не процесс, а электромагнитное поле. Для процесса же используется термин «испускание». Будем говорить: «испускание излучения».

ществом может быть существенна при рассмотрении только люминесценции, но не теплового излучения, поскольку последнее способно находиться в термодинамическом равновесии и, следовательно, к нему можно применять законы термодинамики. Действительно, первые теоретические работы по тепловому излучению основывались на законах термодинамики, и на этом «классическом пути» были получены первые результаты. Однако дальнейший прогресс в исследовании равновесного теплового излучения оказался невозможным без решительной ломки классических представлений, без привлечения радикально новых идей, относящихся к характеру элементарных процессов взаимодействия излучения с веществом. При рассмотрении люминесценции эти идеи нужны уже, можно сказать, на начальном этапе. При рассмотрении теплового излучения они «выступают на сцену» на втором этапе — после того, как исчерпаны возможности классического подхода, основанного на термодинамике и электродинамике. Поэтому если «история люминесценции» началась лишь после создания квантовой оптики, в первой половине XX в., то «история теплового излучения» уходит своими истоками в XIX век. Рассмотрим же основные этапы этой истории.

**Закон Кирхгофа.** В 1859 г. Г. Кирхгоф сформулировал закон для равновесного теплового излучения. Прежде чем рассматривать этот закон, необходимо ввести понятия испускательной и поглощательной способностей тела. Обозначим через  $d\Phi$  энергию излучения, испускаемого в единицу времени единицей поверхности тела в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  \*. Иными словами,  $d\Phi$  есть плотность потока энергии излучения в указанном интервале частот. Представим  $d\Phi$  в виде

$$d\Phi = \Phi(\omega) d\omega. \quad (2.1.1)$$

Величина  $\Phi(\omega)$  называется *испускательной способностью* тела; она является функцией частоты. Используют также испускательную способность, определяемую как функция длины волны излучения; ее обозначают  $\Phi'(\lambda)$ . Величины  $\Phi(\omega)$  и  $\Phi'(\lambda)$  выражаются в разных единицах: Дж/м<sup>2</sup> и Дж/(м<sup>2</sup> · с) соответственно. Связь между  $\Phi(\omega)$  и  $\Phi'(\lambda)$  нетрудно найти, если учесть, что

$$\Phi(\omega) |d\omega| = \Phi'(\lambda) |d\lambda|. \quad (2.1.2)$$

\* Здесь и далее применяется не обычная частота  $\nu$ , а циклическая частота  $\omega$ ;  $\omega = 2\pi\nu$ .

---

Используя (1.3.10), находим отсюда

$$\Phi'(\lambda) = \Phi(\omega(\lambda)) \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Phi(\omega(\lambda)). \quad (2.1.3)$$

*Поглощательная способность тела*  $A(\omega)$  есть величина, равная отношению плотности потока энергии излучения частоты  $\omega$ , поглощенного телом, к плотности падающего потока. Поглощательная способность — безразмерная величина.

Как испускательная, так и поглощательная способности тела сильно зависят от его температуры и, кроме того, могут существенно изменяться при переходе от одного тела к другому. Что же касается их отношения, то, как показал Кирхгоф, оно от природы тела не зависит и, следовательно, является универсальной для всех тел функцией частоты и температуры. Обозначим эту функцию через  $\varphi(\omega, T)$ . Тогда закон Кирхгофа можно записать в виде

$$\Phi(\omega, T)/A(\omega, T) = \varphi(\omega, T). \quad (2.1.4)$$

Кирхгоф сформулировал закон, исходя из весьма общих термодинамических соображений, согласно которым тепловое равновесие в изолированной системе не может нарушаться в результате теплообмена между частями системы.

В 1860 г. Кирхгоф ввел понятие *абсолютно черного тела* как тела, полностью поглощающего падающее на него излучение для любой частоты и при любой температуре. У такого тела поглощательная способность равна единице. Таким образом, становится понятным смысл функции  $\varphi(\omega, T)$  в законе Кирхгофа: это есть испускательная способность абсолютно черного тела.

Заметим, что в природе абсолютно черных тел, строго говоря, не существует. Достаточно хорошей моделью такого тела может служить замкнутая полость с маленьким отверстием (диаметр отверстия не должен быть больше  $1/10$  поперечника самой полости). Излучение, попадающее через отверстие внутрь полости, практически уже не может выйти наружу и в конечном счете полностью поглощается ее стенками. Модель абсолютно черного тела показана на рис. 2.1; именно такие устройства использовали в опытах с абсолютно черным телом.

После того как был сформулирован закон Кирхгофа, естественно встал вопрос о виде функции  $\varphi(\omega, T)$ . Для экспериментального определения этой функции проводились иссле-

дования спектрального состава излучения, выводимого из отверстия в стенке полости, имитирующей черное тело. Интересно было, однако, теоретически установить вид функции  $\varphi(\omega, T)$ .

**Общая формула Вина.** В 1893 г. В. Вин пришел к выводу, что испускательная способность абсолютно черного тела может быть записана в виде

$$\varphi(\omega, T) = \omega^3 F(\omega/T), \quad (2.1.5)$$

где  $F$  — некоторая функция отношения частоты к температуре. Эта формула была получена Вином на основе законов термодинамики и принципа Доплера.

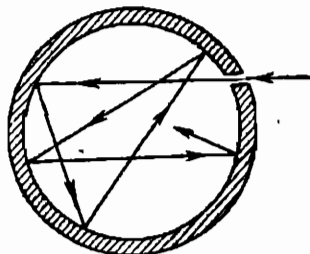


Рис. 2.1

Будем называть ее в дальнейшем *общей формулой Вина*. После установления этой формулы все последующие попытки получить выражение для испускательной способности черного тела сводились к поискам вида функции  $F$ .

Принтегрировав (2.1.5) по всем частотам, найдем интегральную испускательную способность черного тела:

$$\varphi(T) = \int_0^{\infty} \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = T^4 \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx = \sigma T^4. \quad (2.1.6)$$

Здесь  $x = \omega/T$ ;

$$\sigma = \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx. \quad (2.1.7)$$

Результат (2.1.6) был получен еще в 1879 г.; он носит название *закон Стефана — Больцмана*. Постоянную  $\sigma$  называют *постоянной Стефана — Больцмана*; по современным измерениям она равна  $5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>).

Кроме закона Стефана — Больцмана из общей формулы Вина можно получить еще один интересный результат. Предварительно перейдем от  $\varphi(\omega, T)$  к  $\varphi'(\lambda, T)$  в соответствии с (2.1.3). Тогда общая формула Вина может быть переписана в виде

$$\varphi'(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T). \quad (2.1.5a)$$

[Легко убедиться, что  $f(\lambda T) = 2\pi c F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)$ .] Продиффе-



ренцируем (2.1.5 а) по  $\lambda$ :

$$\frac{d\varphi'}{d\lambda} = \frac{T}{\lambda^5} \frac{df}{d\lambda} - \frac{5}{\lambda^6} f = \frac{1}{\lambda^6} \left[ \lambda \frac{df}{d\lambda} - 5f \right].$$

При длине волны  $\lambda_m$ , отвечающей максимуму функции  $f$ , а следовательно, и функции  $\varphi'$ , выражение, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль; поэтому

$$\lambda_m \frac{d}{d\lambda} f(\lambda T) \Big|_{\lambda=\lambda_m} = 5f(\lambda_m T).$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$\lambda_m T = b, \quad (2.1.8)$$

где  $b$  — некоторая постоянная (ее называют *постоянной Вина*); согласно современным измерениям,  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

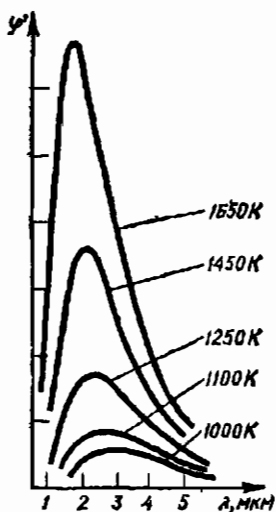


Рис. 2.2

Соотношение (2.1.8) известно как *закон смещения Вина*. Он показывает, что при возрастании температуры черного тела максимум функции  $\varphi'(\lambda, T)$  смещается в сторону более коротких волн. На рис. 2.2 приведены экспериментальные кривые  $\varphi'(\lambda, T)$  для различных температур; они подтверждают закон смещения Вина и позволяют определить постоянную Вина.

**Частная формула Вина.**

В 1896 г. Вин предложил явное выражение для излучательной способности абсолютно черного тела. Если

рассматривать излучательную способность как функцию частоты, то предложенная Вином формула может быть записана так:

$$\varphi(\omega, T) = \alpha \omega^3 \exp(-\beta\omega/T), \quad (2.1.9)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — эмпирические постоянные. Чтобы получить эту формулу, Вин сделал дополнительное предположение, что распределение излучения по частотам аналогично максвелловскому распределению для скоростей молекул в газе.

Легко видеть, что частная формула Вина (формула (2.1.9)) согласуется с его общей формулой; здесь

$$F(\omega/T) = \alpha \exp(-\beta\omega/T).$$

Формула Рэлея — Джинса. В 1900 г. Джон Уильям Стрэтт (лорд Рэлей), а позднее и Джинс получили другое выражение для функции  $\varphi$ , используя теорему статистической физики о равнораспределении энергии по степеням свободы. Рассматривая равновесное излучение, они предположили, что на каждое электромагнитное колебание приходится в среднем энергия, равная  $kT$  (здесь  $k$  — постоянная Больцмана;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К). Число же электромагнитных колебаний (электромагнитных волн), приходящих на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  в единице объема полости, равно  $\omega^2 d\omega / \pi^2 c^3$  (этот результат будет получен в § 2.4). Умножив рассматриваемое число колебаний на среднюю энергию колебания  $kT$ , получим выражение для плотности энергии равновесного излучения  $\rho(\omega, T)$ :

$$\rho(\omega, T) d\omega = kT \omega^2 d\omega / \pi^2 c^3. \quad (2.1.10)$$

Плотность энергии излучения  $\rho(\omega, T)$  связана с испускательной способностью абсолютно черного тела  $\varphi(\omega, T)$  известным соотношением (его вывод можно найти в курсах общей физики)

$$\varphi(\omega, T) = \frac{c}{4} \rho(\omega, T). \quad (2.1.11)$$

Таким образом,

$$\varphi(\omega, T) = kT \omega^2 / 4\pi^2 c^3. \quad (2.1.12)$$

Формула (2.1.12), как и формула (2.1.10), называется *формулой Рэлея — Джинса*. Легко видеть, что (2.1.12) согласуется с общей формулой Вина; здесь

$$F(\omega/T) = (k/4\pi^2 c^3) / (\omega/T).$$

Ограниченность области применимости частной формулы Вина и формулы Рэлея — Джинса. Обе формулы как (2.1.9), так и (2.1.12), вызвали справедливую критику. Предложенная Вином формула (2.1.9) приводила к странному результату: при любой фиксированной частоте испускательная способность черного тела, а значит, и плотность энергии равновесного излучения должны были при возрастании температуры стремиться к некоторому пределу. Это противоречило здравому смыслу, подсказывающему увеличение плотности энергии излучения с ростом температуры. Разумеет-

ся, это противоречило и экспериментальным данным. Кроме того, входящие в формулу (2.1.9) постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  являлись эмпирическими; в рамках теории Вина они не могли быть рассчитаны.

В формуле Рэлея — Джинса нет эмпирических постоянных. Однако и эта формула вызывала критику. Если при любой фиксированной температуре проинтегрировать (2.1.10) по всем частотам — от нуля до бесконечности, то получится физически бессмысленный результат: плотность энергии излучения окажется бесконечно большой. Это обстоятельство известно как «ультрафиолетовая катастрофа».

Сопоставление рассматриваемых формул с экспериментальными данными показало, что формула Вина (2.1.9) согласуется с опытом лишь при достаточно высоких частотах (точнее говоря, когда  $\beta\omega/T \gg 1$ ), тогда как формула Рэлея — Джинса согласуется с опытом, напротив, при очень низких частотах. Отмеченные выше «недоразумения», связанные с предельными переходами при  $T \rightarrow \infty$  (в формуле (2.1.9)) или при  $\omega \rightarrow \infty$  (в формуле (2.1.10)), объясняются тем, что рассматриваемые формулы имеют ограниченные области применения. Формула (2.1.9) попросту «не работает» при  $T \rightarrow \infty$ , тогда как закон Рэлея — Джинса «не работает» при  $\omega \rightarrow \infty$ . Таким образом, указанные формулы не могут решить проблем равновесного теплового излучения. Решение этих проблем в рамках классической физики оказалось невозможным, потребовались радикально новые идеи.

## § 2.2. Формула Планка

«Об одном улучшении закона излучения Вина». Так очень скромно озаглавил Макс Планк свой доклад, сделанный в октябре 1900 г. в Немецком физическом обществе. Речь шла о частной формуле Вина. Планк предложил вместо этой формулы использовать следующую формулу:

$$\varphi(\omega, T) = \frac{\alpha\omega^3}{\exp(\beta\omega/T) - 1}. \quad (2.2.1)$$

Формула Вина (2.1.9) оказывалась частным случаем данной формулы при  $\beta\omega/T \gg 1$ . Более того, из предложенной формулы следует формула Рэлея — Джинса, если принять  $\beta\omega/T \ll 1$  и в связи с этим положить  $\exp(\beta\omega/T) = 1 + \beta\omega/T$ .

Тот факт, что формулы (2.1.9) и (2.1.12) представляют собой два крайних предельных случая формулы (2.2.1), по-видимому, может объяснить распространенное мнение, будто Планк пришел к своей

формуле, комбинируя формулы Вина и Рэлея — Джинса. Это, однако, неверно. В работах Планка, относящихся к 1900—1901 гг., формула Рэлея — Джинса вообще не упоминается. Есть основания полагать, что Планк, критически относившийся к кинетической теории Больцмана, поначалу не обратил внимания на работу Рэлея.

К формуле (2.2.1) Планк пришел, опираясь на формулу Вина (2.1.9) и исследуя равновесие между процессами испускания и поглощения электромагнитного излучения равновесным коллективом линейных гармонических осцилляторов (так называемых вибраторов Герца). Он рассматривал энтропию осцилляторов, в частности вторую производную энтропии  $s$  по средней энергии осциллятора  $\langle E \rangle$ . Обратная величина этой производной фактически есть средняя квадратичная флуктуация энергии:

$$(d^2s/d\langle E \rangle^2)^{-1} = -\frac{1}{k} \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle. \quad (2.2.2)$$

Согласно теории Вина,

$$(d^2s/d\langle E \rangle^2)^{-1} \sim E. \quad (2.2.3)$$

Планк же предложил иное соотношение:

$$(d^2s/d\langle E \rangle^2)^{-1} \sim (\langle E \rangle + a \langle E \rangle^2). \quad (2.2.4)$$

Сегодня трудно сказать, какими именно соображениями руководствовался Планк, вводя такую поправку в теории Вина, но, во всяком случае, эта его догадка оказалась в высшей степени удачной и физически оправданной. Позднее, в четвертой части книги, мы рассмотрим физическое содержание соотношения (2.2.4). Пока же отметим только, что из него как раз и получается формула Планка (2.2.1).

**Формула Планка и кванты энергии.** Конечно, формулу (2.2.1) не следует рассматривать как всего лишь «улучшение закона излучения Вина». Она открывала качественно новый подход к проблеме теплового излучения, о чем Планк вначале, по-видимому, и не подозревал. Прекрасное соответствие полученной формулы экспериментальным данным побудило Планка попытаться выяснить физическое содержание формулы. После нескольких недель напряженной работы это ему удалось сделать, и вот 14 декабря 1900 г. Планк доложил Немецкому физическому обществу совершенно неожиданный результат. Он показал, что его формула для испускательной способности черного тела получается, если допустить, что электромагнитное излучение испускается не непрерывно, а в виде порций энергии (квантов энергии).

Энергия отдельной порции есть

$$\varepsilon = \hbar\omega \quad (2.2.5)$$

Постоянная  $\hbar$  в этом соотношении известна сегодня как *постоянная Планка* \*. Она является одной из фундаментальных физических постоянных;  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$  Дж·с. В механике есть физическая величина, называемая действием; она имеет размерность энергия  $\times$  время. Постоянную Планка иногда называют квантом действия.

Энергия испускающих излучение осцилляторов с частотой  $\omega$  должна, по Планку, быть кратной кванту энергии  $\hbar\omega$ :

$$E_n = n\hbar\omega \quad (2.2.6)$$

( $n$  — натуральные числа). В этом случае средняя энергия линейного гармонического осциллятора при температуре  $T$  определяется соотношением

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}, \quad (2.2.7)$$

а не вытекающим из классической статистики соотношением  $\langle E \rangle = kT$ . Классический результат получается из (2.2.7) при  $\hbar\omega/kT \ll 1$  (когда можно принять  $\exp(\hbar\omega/kT) = 1 + \hbar\omega/kT$ ).

Из (2.2.7) немедленно следует знаменитая *формула Планка*. Она имеет такую же структуру, что и предложенная Планком ранее формула (2.2.1); однако теперь вместо эмпирических постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  здесь фигурируют фундаментальные физические постоянные (включая и новую постоянную — постоянную Планка  $\hbar$ ):

$$\varphi(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (2.2.8)$$

Формулой Планка называют также связанную с (2.2.8) соотношением (2.1.11) формулу для плотности энергии равновесного излучения:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (2.2.9)$$

\* Так как мы пользуемся циклической частотой, то поэтому вместо обычной постоянной Планка  $h$  целесообразно применять здесь «перечеркнутую» постоянную Планка  $\hbar$ ;  $\hbar = h/2\pi$ .

Позднее, в § 2.4, будет дан подробный вывод формулы Планка, использующий современную теорию. Еще один вывод этой формулы будет приведен в § 3.2.

Исчерпывающее описание равновесного теплового излучения на основе формулы Планка. Прекрасное согласие формулы Планка с экспериментальными данными при всех частотах позволяло считать установленным явное выражение для функции  $F$  в общей формуле Вина:

$$F\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (2.2.10)$$

Частная формула Вина (2.1.9) получается из (2.2.8) при  $\hbar\omega/kT \gg 1$  и имеет вид

$$\varphi(\omega/T) = (\hbar\omega^3/4\pi^2 c^3) \exp(-\hbar\omega/kT). \quad (2.2.11)$$

Из сопоставления (2.2.11) и (2.1.9) становится ясным содержание эмпирических постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ . Подставляя (2.2.10) в (2.1.7), получаем выражение, позволяющее рассчитать постоянную Стефана — Больцмана:

$$\sigma = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\exp(\hbar x/k) - 1} = \frac{k^4}{4\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{y^3 dy}{e^y - 1}. \quad (2.2.12)$$

$(y = \hbar x/k)$

Входящий в (2.2.12) определенный интеграл равен  $\pi^4/15$ . Отсюда следует, что

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^3 \hbar^3}. \quad (2.2.13)$$

Из формулы Планка получается также выражение для вычисления постоянной в законе смещения Вина:

$$b = 2\pi^5 \hbar c / 4,965 k. \quad (2.2.14)$$

Сомнения. Планк понимал, что идея квантования энергии осцилляторов и существования квантов энергии, испускаемых излучающими осцилляторами, выходит за рамки классической физики. Он писал: «...Или квант действия был фиктивной величиной — тогда весь вывод закона излучения был принципиально иллюзорным и представлял просто лишенную содержания игру в формулы, или же при выводе этого закона в основу была положена правильная физическая мысль — тогда квант действия должен был играть в физике фундаментальную роль, тогда появление его возвещало нечто совершенно новое, дотоле неслышанное,

что, казалось, требовало преобразования самых основ нашего физического мышления, покоившегося, со времен обоснования анализа бесконечно малых Ньютоном и Лейбницем, на предположении о непрерывности всех причинных связей». Неудивительно, что Планк одолевали серьезные сомнения. Много лет спустя он сознался: «В течение многих лет снова и снова я пытался вставить квант действия в рамки классической физики».

Так, Планк предполагал, что излучение только испускается порциями. Он связывал это с особенностями механизма испускания излучения атомами и молекулами вещества. Само же излучение существовало, как полагал Планк, не в виде квантов, а в виде непрерывной «сущности», в виде непрерывных электромагнитных волн в пространстве. Однако такие представления казались не вполне состоятельными, так как в этом случае непрерывная световая энергия должна была бы где-то «ждать» возможности порционного поглощения атомами вещества; иначе говоря, непрерывная энергия должна была бы каким-то образом разбиваться на кванты перед поглощением (такое возражение выдвигал Пуанкаре). Под влиянием подобной критики Планк выдвинул так называемую «гибридную» гипотезу, согласно которой излучение испускается квантами, а поглощается непрерывно. Однако допущение столь разных физических механизмов испускания и поглощения излучения не могло не казаться довольно странным. Напрашивался единственный выход: признать, что само излучение не непрерывно, а состоит из отдельных порций (квантов). Сделать такой вывод Планк все же не решился. Это сделал Эйнштейн.

### § 2.3. Световые кванты Эйнштейна

**Гипотеза о квантовании энергии излучения.** В 1905 г. появилась работа Эйнштейна «Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света». Ограничиваясь областью достаточно высоких частот, Эйнштейн воспользовался формулой Вина (2.2.11) или, точнее говоря, формулой Планка (2.2.9) в предельном случае  $\hbar\omega/kT \gg 1$ . Придерживаясь хода рассуждений Эйнштейна, проделаем следующие несложные выкладки. Энергия излучения частоты  $\omega$ , содержащаяся в объеме  $V$ , есть

$$W = \frac{\hbar\omega^3 V}{\pi^2 c^3} \exp(-\hbar\omega/kT).$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{T} = -\frac{k}{\hbar\omega} \ln\left(\frac{\pi^2 c^3 W}{\hbar\omega^3 V}\right). \quad (2.3.1)$$

Используя известное термодинамическое соотношение

$$ds/dW = 1/T, \quad (2.3.2)$$

приходим после интегрирования (2.3.1) к следующему выражению для энтропии  $s$  равновесного излучения частоты  $\omega$  в объеме  $V$ :

$$s = -\frac{kW}{\hbar\omega} \left[ \ln\left(\frac{\pi^2 c^3 W}{\hbar\omega^3 V}\right) - 1 \right]. \quad (2.3.3)$$

Пусть  $s_0$  — энтропия того же самого излучения, но в объеме  $V_0$ :

$$s_0 = -\frac{kW}{\hbar\omega} \left[ \ln\left(\frac{\pi^2 c^3 W}{\hbar\omega^3 V_0}\right) - 1 \right]. \quad (2.3.4)$$

Из (2.3.3) и (2.3.4) следует, что

$$s - s_0 = \frac{kW}{\hbar\omega} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right). \quad (2.3.5)$$

Сравним полученный результат с известным результатом для энтропии равновесного идеального газа из  $N$  молекул:

$$s - s_0 = kN \ln(V/V_0). \quad (2.3.6)$$

Сравнение наводит на мысль, что в области высоких частот (где справедлива частная формула Вина) излучение можно рассматривать как бы состоящим из  $N$  «частиц»; каждая «частица» имеет энергию  $\hbar\omega$ , так что

$$W = N\hbar\omega. \quad (2.3.7)$$

И вот Эйнштейн делает вывод: «Монохроматическое излучение в смысле теории теплоты ведет себя (в пределах области применимости закона излучения Вина) так, как будто оно состоит из взаимно независимых квантов энергии». Забегая вперед, заметим, что впоследствии, говоря о *световых квантах*, Эйнштейн уже не вводил ограничения областью высоких частот.

Для обоснования высказанной гипотезы Эйнштейн в той же работе анализирует ряд явлений и, в частности, *фотоэлектрический эффект* (фотоэффект).

**Загадки фотоэффекта.** Фотоэффектом называется испускание электронов веществом под действием света, поглощаемого этим веществом. Экспериментально фотоэффект



был обстоятельно исследован в 1888—1889 гг. в опытах А. Г. Столетова, а позднее, в конце 90-х годов, в опытах Ленарда и других исследователей. В этих опытах пучок света или рентгеновских лучей освещал катод (рис. 2.3); испускаемые катодом под действием света электроны (фотоэлектроны) достигали анода, и в цепи возникал электрический ток (фототок). К началу XX столетия фактически все основные закономерности фотоэффекта были установлены. При этом оказалось, что некоторые закономерности не могут быть объяснены в рамках классической электродинамики.

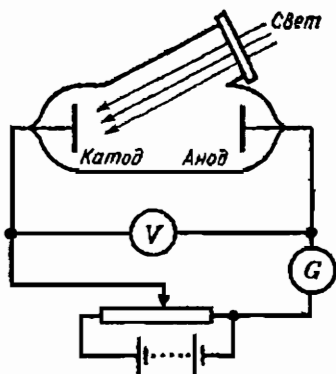


Рис. 2.3

Учитывая, что более подробно фотоэффект будет рассмотрен в гл. 7, обратим сейчас внимание только на те особенности этого явления, которые представлялись непонятными на рубеже XIX и XX вв.

Прежде всего было непонятно, почему возникновение фототока не зависит от интенсивности света, но зато существенно зависит от его частоты. Было установлено, что для каждого материала есть своя характерная частота — так называемая *красная граница* фотоэффекта. Если частота света, освещающего катод, выше красной границы фотоэффекта для данного катода, то фототок наблюдался практически при любой интенсивности света; он возникал сразу же после того, как начиналось освещение катода, и сила фототока оказывалась пропорциональной интенсивности света. Если же частота света была ниже красной границы фотоэффекта, то фототок не возникал, сколько бы времени ни продолжалось освещение катода и как бы сильно ни возрастала интенсивность света.

Применяя метод задерживающего потенциала, исследователи смогли измерять энергию фотоэлектронов. Они обнаружили, что эта энергия совершенно не зависит от интенсивности света, а зависит от его частоты, увеличиваясь по мере возрастания частоты.

Все это (за исключением того, что сила фототока пропорциональна интенсивности света) противоречило представ-

лениям классической электродинамики. Согласно этим представлениям, плотность световой энергии определяется квадратом напряженности поля волны и не зависит от частоты света (см. (1.3.12)); иначе говоря, плотность световой энергии определяется только интенсивностью света. Отсюда следовало, что только интенсивностью света должна определяться и энергия фотоэлектронов. Фотоэффект должен был наблюдаться при любой частоте света. Более того, он должен был возникать и при любой освещенности катода, причем при относительно слабой интенсивности света фотоэффект должен был начинаться, возможно, с некоторым «запаздыванием», определяемым временем, необходимым световой волне, чтобы «раскачать» и освободить электрон из вещества.

В действительности же все происходило иначе.

Уравнение Эйнштейна. Полагая, что излучение не непрерывно, а состоит из квантов энергии  $h\omega$ , Эйнштейн сделал вывод, что оно не только испускается, но и поглощается в виде квантов. При облучении вещества светом его электроны получают энергию не непрерывно, а порциями. Электрон полностью поглощает энергию одной порции. Так что ни о каком «раскачивании» электрона, ни о каком постепенном накоплении им энергии, достаточной для вылета из вещества, не может быть и речи. Если энергия  $h\omega$  одной порции достаточна для освобождения электрона из данного материала, то фотоэффект наблюдается, причем, естественно, без «запаздывания». В этом случае чем больше интенсивность света (чем больше в световом пучке квантов), тем чаще будут происходить акты поглощения кванта электроном и тем, следовательно, больше будет сила фототока. Если же энергии одного кванта недостаточно, чтобы освободить электрон, то фотоэффекта не будет, сколько бы таких квантов ни падало на вещество. Подразумевается, что конкретный электрон может поглотить сразу только один квант; вероятность же одновременного поглощения электроном двух (или более) квантов ничтожно мала. Таким образом, возникновение фототока зависит не от определяющей интенсивности света количества квантов в световом пучке, а от энергии кванта  $h\omega$  и, следовательно, от частоты света.

Пусть  $A_0$  — работа выхода для данного материала (наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону, чтобы освободить его из рассматриваемого материала). Кинетическая энергия  $E_k$  фотоэлектрона, поглотившего

---

квант  $\hbar\omega$ , будет определяться соотношением

$$E_n = \hbar\omega - A_n. \quad (2.3.8)$$

Это и есть знаменитое *уравнение Эйнштейна для фотоэффекта*. Само по себе оно очень простое; все дело в той необычной для начала XX века физике, которая «заложена» в этом уравнении. Легко видеть, что предложенное Эйнштейном простое уравнение исчерпывающе объясняет все отмеченные выше закономерности фотоэффекта, которые не могла объяснить классическая электродинамика. Из (2.3.8) следует, в частности, выражение для красной границы фотоэффекта  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = A_n / \hbar. \quad (2.3.9)$$

**Световые кванты Эйнштейна.** Дискретность излучения понималась вначале как квантование энергии излучения. Позднее, в 1916 г., Эйнштейн сделал следующий шаг и показал, что каждая порция излучения характеризуется не только энергией  $\varepsilon = \hbar\omega$ , но и импульсом

$$\vec{p} = \vec{j}\hbar\omega/c \quad (2.3.10)$$

( $\vec{j}$  — единичный вектор в направлении импульса). В результате дискретность излучения приобретала действительно глубокий смысл: излучение можно было рассматривать как поток своеобразных «частиц», каждая из которых имела определенную энергию и определенный импульс. Так в физике появились *световые кванты Эйнштейна*; начиная с 1926 г. их называют *фотонами*.

Из (2.3.10) следует, что энергия и импульс светового кванта (фотона) связаны друг с другом соотношением

$$\varepsilon = pc. \quad (2.3.11)$$

Согласно теории относительности, такое соотношение возможно лишь для частиц, у которых масса покоя равна нулю и которые всегда движутся со скоростью  $c$ .

Реальное существование световых квантов было убедительно доказано рядом экспериментов, выполненных в 20-х годах. Один из таких экспериментов выполнил в 1926 г. немецкий физик Боте.

Схема установки в опыте Боте показана на рис. 2.4. Металлическая фольга  $\Phi$  помещалась между двумя газоразрядными счетчиками  $C_1$  и  $C_2$ . Фольга освещалась пучком рентгеновских лучей  $R$ , в результате чего она сама становилась источником рентгеновских лучей (явление рентгеновской флуоресценции). Исходный рентгеновский пучок имел очень малую интенсивность, поэтому и количество квантов, испускаемых фольгой в единицу времени, было невелико. Попаданию рентгеновского излучения в каждый из счетчиков вызывало немедленное (меньше чем через  $10^{-8}$ с) вздрагивание нити электрометра, автоматически регистрировавшееся на движущейся ленте. Если бы излучаемая фольгой энергия распространялась равномерно во все стороны, как это следует из волновых представлений, то оба счетчика должны были бы срабатывать одновременно. Однако

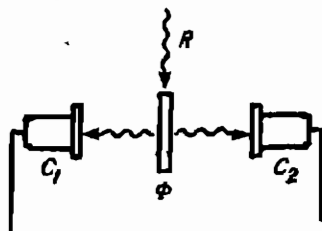


Рис. 2.4

опыт совершенно отчетливо продемонстрировал беспорядочность показаний электрометров. Отсюда можно было заключить, что излучение испускается фольгой не в виде волны, а в виде световых квантов, которые вылетают то в одну, то в другую сторону и регистрируются то тем, то другим счетчиком.

**Световые кванты и давление света.** Используя представления о световых квантах (фотонах), можно особенно наглядно объяснить давление света на освещаемое тело. Оно объясняется передачей телу импульса ударяющихся о его поверхность фотонов. Как известно, давление света находит объяснение в классической электромагнитной теории. Эта теория дает для давления  $p$  соотношение (1.3.15):

$$p = \rho(1 + R),$$

где  $\rho$  — плотность энергии излучения,  $R$  — коэффициент отражения света поверхностью тела. Полагая, что импульс фотона дается выражением (2.3.10), выведем соотношение (1.3.15) для давления света; это можно будет рассматривать как косвенное доказательство правильности выражения (2.3.10).

Пусть направленный световой пучок падает нормально на некоторую стенку, характеризующуюся коэффициентом

---

отражения  $R$ . Число  $N$  фотонов в единице объема есть

$$N = \rho / \hbar \omega, \quad (2.3.12)$$

где  $\rho$  — плотность излучения (излучение полагаем монохроматическим). Все фотоны летят перпендикулярно стенке, и каждый имеет импульс  $\hbar \omega / c$ . Давление, оказываемое светом на стенку, равно импульсу, который передается единице площади стенки в единицу времени. Число фотонов, падающих на единицу площади стенки в единицу времени, есть  $Nc$ . При этом  $RNc$  фотонов отражаются, а  $(1-R)Nc$  фотонов поглощаются стенкой. При отражении фотона стенка получает импульс  $2\hbar \omega / c$ , а при поглощении — импульс  $\hbar \omega / c$ . Таким образом, импульс, передаваемый фотонами единице площади стенки в единицу времени, есть  $2RNc\hbar \omega / c + (1-R)Nc\hbar \omega / c = N\hbar \omega (1+R)$ . Подставляя сюда (2.3.12), получаем выражение (1.3.15) для давления света.

#### § 2.4. Вывод формул Рэлея — Джинса и Планка по современной теории (переход от световых волн к фотонам)

До сих пор мы излагали материал, следуя исторической канве. Естественно, что на этом пути мы неизбежно встречались с некоторыми неточностями. Так, Планк, рассматривая взаимодействие вещества с равновесным излучением, использовал весьма упрощенную модель — он представлял вещество в виде бальмановского газа из линейных гармонических осцилляторов-излучателей. С точки зрения современной теории следует рассматривать в данном случае не осцилляторы-излучатели вещества, а осцилляторы излучения, соответствующие электромагнитным волнам; при этом производится операция, называемая «разложением поля на осцилляторы». Хотя такой подход приводит к той же самой формуле Планка, однако он является более физически корректным (чем подход, использовавшийся в свое время Планком), а главное, позволяет перейти впоследствии к рассмотрению общего случая — когда излучение *неравновесно*.

Поэтому целесообразно прервать на время исторический экскурс и рассмотреть в данном параграфе, как можно вывести формулу Планка (а заодно и формулу Рэлея — Джинса) по современной теории. Это целесообразно еще и потому, что здесь, на примере задачи о равновесном тепловом излучении, удастся наиболее просто показать, как совершается

переход от световых волн к коллективу фотонов или, иными словами, переход от классической оптики к квантовой.

Поле световой волны в конечном объеме. Будем рассматривать световые волны в конечном объеме  $V$ , который, однако, может быть выбран сколь угодно большим. Для простоты предположим, что это куб с длиной ребра  $L$ . Пусть плоская монохроматическая световая волна распространяется вдоль оси  $x$ . В выражение для ее электрического вектора  $\vec{E}$  будет входить множитель  $\exp(ik_x x)$ , где  $k_x$  — составляющая волнового вектора. Потребуем выполнения так называемых циклических граничных условий:

$$\exp(ik_x 0) = \exp(ik_x L). \quad (2.4.1)$$

Эти граничные условия означают, что колебания вектора  $\vec{E}$  волны в симметрично расположенных точках  $A$  и  $A_1$  на противоположных гранях куба (рис. 2.5) происходят в одной и той же фазе; отклонения от равновесия в этих точках в любой момент времени одинаковы. Иными словами, распространяющаяся вдоль оси  $x$  световая волна, достигшая в некоторый момент времени точки  $A_1$ , тождественна волне, отправившейся в этот же момент из точки  $A$ . Получается так, как если бы световая волна по достижении точки  $A_1$  тотчас же начинала повторное движение по объему  $V$  из  $A$  в  $A_1$ .

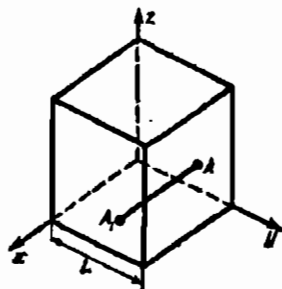


Рис. 2.5

Так как  $\exp(ik_x 0) = 1$ , то из (2.4.1) следует  $\exp(ik_x L) = 1$  и, значит,

$$k_x = 2\pi n/L, \quad (2.4.2)$$

где  $n$  — целые числа.

При произвольном относительно осей куба направлении распространения световой волны величина  $k_x$  должна рассматриваться как  $x$ -проекция волнового вектора. Результат, аналогичный результату (2.4.2), будет справедлив также для двух других проекций волнового вектора ( $k_y$  и  $k_z$ ). Каждая проекция волнового вектора квантуется с «шагом»  $2\pi/L$ . Таким образом, пространство волновых векторов (простран-

ство, где по координатным осям откладываются не пространственные координаты, а проекции волнового вектора; его называют  $k$ -пространством) оказывается разбитым на ячейки «объемом»

$$\Delta_0 = (2\pi/L)^3 = 8\pi^3/V. \quad (2.4.3)$$

Каждой такой ячейке отвечают две плоские монохроматические волны, различающиеся поляризацией (мы учитываем здесь, что свет имеет две независимые поляризации).

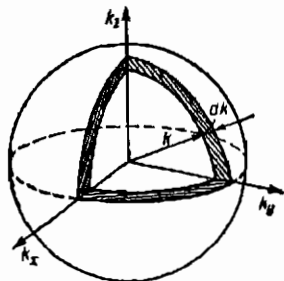


Рис. 2.6

Обозначим через  $g(\omega)d\omega$  число волн, приходящихся на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Функцию  $g(\omega)$  можно найти, используя результат (2.4.3) и тот факт, что

$$\omega = ck \quad (2.4.4)$$

(связь между частотой и волновым вектором изотропна). Последнее обстоятельство означает, что рассматриваемому интервалу частот соответствует в  $k$ -пространстве шаровой слой радиуса  $k = \omega/c$  и толщины  $dk = d\omega/c$  (рис. 2.6). «Объем» этого слоя равен  $4\pi k^2 dk = 4\pi \omega^2 d\omega/c^3$ . Поделив его на «объем»  $\Delta_0$  одной ячейки и умножив на 2 (учет поляризации света), найдем

$$g(\omega)d\omega = 2 \frac{4\pi \omega^2 d\omega/c^3}{\Delta_0} = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega.$$

Таким образом,

$$g(\omega) = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (2.4.5)$$

Итак, в  $k$ -пространстве поле световой волны можно описать с помощью хотя и бесконечного, но дискретного набора величин — волновых векторов  $\vec{k}$ . (Число этих векторов в пределах изображенного на рис. 2.6 шарового слоя равно  $V\omega^2 d\omega/\pi^2 c^3$ .) Это и есть, можно сказать, первый шаг на пути от волнового к фотонному описанию света.

Разложение поля на осцилляторы. Следующий шаг — выполнение операции, называемой «разложением поля на осцилляторы». Разложим векторный потенциал  $\vec{A}$  электромагнитного поля по диск-

ретному набору плоских монохроматических волн:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \left[ \vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right], \quad (2.4.6)$$

$$\vec{a}_{\vec{k}} \sim e^{-i\omega t}; \quad \omega = ck.$$

Учитывая, что

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad (2.4.7)$$

находим

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} ik \left[ \vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} - \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right]. \quad (2.4.8)$$

Далее рассмотрим энергию  $\mathcal{W}$  поля в объеме  $V$ . Исходя из (1.3.12), представим

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4\pi} \int_V E^2(\vec{r}, t) dV. \quad (2.4.9)$$

Подставим сюда разложение (2.4.8). При этом учтем, что все интегралы типа  $\int_0^L \exp(i2\pi x/L) dx$  обращаются в нуль при  $\lambda \neq 0$ ; если же  $\lambda = 0$ , то они дают  $L$  (т. е. в конечном итоге  $V$ ). Итак,

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \sum_{\vec{k}} ik \left[ \vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} - \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right] \times \\ &\times \sum_{\vec{k}'} ik' \left[ \vec{a}_{\vec{k}'} e^{i\vec{k}'\vec{r}} - \vec{a}_{\vec{k}'}^* e^{-i\vec{k}'\vec{r}} \right] dV = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \sum_{\vec{k}} k^2 \left[ \vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} - \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right]^2 dV = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\vec{k}} k^2 \vec{a}_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}}^* \int_V dV = \frac{V}{2\pi} \sum_{\vec{k}} k^2 \vec{a}_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}}^*. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Заданием векторов  $\vec{a}_{\vec{k}}$  поле в объеме  $V$  определено полностью. Векторы  $\vec{a}_{\vec{k}}$  называют «дискретными переменными» поля.

Далее целесообразно перейти от переменных  $\vec{a}_{\vec{k}}$  к «каноническим переменным»: обобщенным координатам  $\vec{Q}_{\vec{k}}$  и обобщенным импульсам  $\vec{P}_{\vec{k}}$ , удовлетворяющим каноническим уравнениям механики



(уравнениям Гамильтона):

$$\frac{\partial}{\partial \vec{Q}_k} H = -\frac{d}{dt} \vec{P}_k; \quad \frac{\partial}{\partial \vec{P}_k} H = \frac{d}{dt} \vec{Q}_k, \quad (2.4.11)$$

где  $H$  — функция Гамильтона (полная энергия) рассматриваемой системы. Заметим, что переход от классической механики к квантовой предполагает замену канонических переменных соответствующими эрмитовыми операторами. Именно поэтому целесообразно вместо  $\vec{a}_k$  и  $\vec{a}_k^*$  ввести  $\vec{Q}_k$  и  $\vec{P}_k$ .

Перейдем к каноническим переменным при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} \vec{Q}_k &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\vec{a}_k + \vec{a}_k^*); \\ \vec{P}_k &= \frac{d}{dt} \vec{Q}_k = -i\omega \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\vec{a}_k - \vec{a}_k^*). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.12)$$

Отсюда

$$\vec{a}_k = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}} (\vec{P}_k - i\omega \vec{Q}_k). \quad (2.4.13)$$

Подставляя (2.4.13) в (2.4.10), получаем

$$W = \sum_k \left( P_k^2 + \omega^2 Q_k^2 \right) / 2. \quad (2.4.14)$$

Как известно, потенциалы поля могут быть выбраны таким образом, чтобы выполнялось соотношение:  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Отсюда следует, что  $\vec{k} \vec{a}_k = 0$  и, следовательно,

$$\vec{k} \vec{Q}_k = 0; \quad \vec{k} \vec{P}_k = 0. \quad (2.4.15)$$

Результат (2.4.15) означает, что векторы  $\vec{Q}_k$  и  $\vec{P}_k$  перпендикулярны направлению распространения волны и, следовательно, имеют по две независимые составляющие, которые будем фиксировать индексом поляризации  $\alpha$ . Теперь (2.4.14) можно переписать в виде

$$W = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\vec{k}} W_{k\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\vec{k}} \left( P_{k\alpha}^2 + \omega^2 Q_{k\alpha}^2 \right). \quad (2.4.16)$$

Легко видеть, что  $W_{k\alpha}$  есть энергия линейного гармонического осциллятора  $\vec{k}\alpha$ -типа. Таким образом, энергия поля оказалась представленной в виде суммы энергий линейных гармонических осцилляторов. Каждому осциллятору отвечает плоская монохроматическая волна с волновым вектором  $\vec{k}$  и поляризацией  $\alpha$ .

Ранее мы нашли число плоских монохроматических волн в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ ; это число есть  $V\omega^3 d\omega / \pi^2 c^3$ . Такое же число осцилляторов поля будет приходиться на указанный интервал частот.

Задача о равновесном тепловом излучении; формулы Рэлея — Джинса и Планка. Используя разложение поля на осцилляторы, представим величину  $\rho(\omega)d\omega$  в виде суммы энергий осцилляторов, приходящихся на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Равновесный характер излучения позволяет весьма просто записать эту сумму

$$\rho(\omega) d\omega = \langle E_\omega \rangle \frac{g(\omega)}{V} d\omega. \quad (2.4.17)$$

Здесь  $\langle E_\omega \rangle$  — средняя при температуре  $T$  энергия осциллятора поля, имеющего частоту  $\omega$ . Используя (2.4.5), представим

$$\rho(\omega) = \langle E_\omega \rangle \cdot \omega^3 / \pi^2 c^3. \quad (2.4.18)$$

Остается найти  $\langle E_\omega \rangle$ . В связи с этим рассмотрим два случая.

1. *Классические осцилляторы.* В этом случае

$$\langle E_\omega \rangle = kT. \quad (2.4.19)$$

(надеемся, что читатель не спутает входящую в это выражение постоянную Больцмана с волновым вектором). Подставляя (2.4.19) в (2.4.18), приходим к формуле Рэлея — Джинса:

$$\rho(\omega) = kT\omega^3 / \pi^2 c^3. \quad (2.4.20)$$

2. *Квантовые осцилляторы.* Уровни энергии квантового гармонического осциллятора описываются выражением

$$E_n = \hbar\omega (n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.21)$$

В данном случае учет слагаемого  $1/2$  в скобках не дает ничего нового; поэтому можем положить, следуя Планку,  $E_n = \hbar\omega n$ . Обозначим через  $w_n$  вероятность осциллятору находиться при температуре  $T$  на  $n$ -м энергетическом уровне. Используя распределение Больцмана, представим

$$w_n = \text{const} \exp(-E_n/kT). \quad (2.4.22)$$

Тогда

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp(-E_n/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/kT)}. \quad (2.4.23)$$

Подставляя сюда  $E_n = \hbar\omega n$ , получаем

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\hbar\omega n/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega n/kT)}. \quad (2.4.24)$$

Воспользуемся формулой для суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии и представим сумму в знаменателе выражения (2.4.24) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega n/kT) = \frac{1}{1 - \exp(-\hbar\omega/kT)}. \quad (2.4.25)$$

Продифференцируем последнее равенство по частоте; в результате найдем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\hbar\omega n/kT) = \frac{\exp(-\hbar\omega/kT)}{[1 - \exp(-\hbar\omega/kT)]^2}. \quad (2.4.26)$$

Подставляя (2.4.26) и (2.4.25) в (2.4.24), приходим к следующему выражению для средней энергии квантового осциллятора:

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (2.4.27)$$

Наконец, подставляя (2.4.27) в (2.4.18), получаем формулу Планка:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (2.4.28)$$

При  $\hbar\omega \ll kT$  формула Планка переходит в формулу Рэля — Джинса. Это означает, что при высоких температурах, когда средняя энергия осциллятора много больше расстояния между его уровнями, эффект квантования энергии осциллятора становится несущественным.

На рис.2.7 представлены результаты расчета функции  $\rho(\omega)$  по формуле Рэлея — Джинса (штриховая кривая) и по формуле Планка (сплошная кривая).

**Функция распределения равновесного фотонного «газа».**  
Сделаем еще один шаг, оставаясь в рамках задачи о равновесном излучении. Представим, что вместо квантового осциллятора поля с частотой  $\omega$ , находящегося на  $n$ -м уровне, имеется  $n$  фотонов с энергией  $\hbar\omega$ . В этом случае переходу осциллятора на более высокий соседний уровень энергии будет отвечать *рождение фотона* с энергией  $\hbar\omega$ , а переходу на более низкий соседний уровень — *уничтожение фотона* с той же энергией. Разделив  $\langle E_\omega \rangle$  (см. (2.4.27)) на  $\hbar\omega$ , найдем среднее число  $\nu_\omega$  фотонов, приходящихся на один осциллятор частоты  $\omega$  в термодинамически равновесном фотонном «газе» при температуре  $T$ :

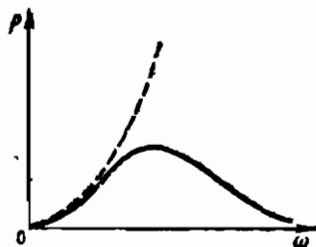


Рис. 2.7

$$\nu_\omega = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \quad (2.4.29)$$

Умножив  $\nu_\omega$  на число осцилляторов  $g(\omega)/V$ , найдем среднее число фотонов с энергией  $\hbar\omega$  в единице объема рассматриваемого равновесного фотонного «газа»:

$$N(\omega) = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \quad (2.4.30)$$

Функцию  $N(\omega)$  называют *функцией распределения фотонов по частотам*. Величина  $N(\omega)d\omega$  есть среднее число фотонов с частотами от  $\omega$  до  $\omega+d\omega$ , находящееся в единице объема фотонного «газа». Выражение (2.4.30) дает вид функции распределения для равновесного фотонного «газа».

На фотонном языке формула Планка (2.4.28) означает, что энергия поля световой волны есть сумма энергий фотонов, представляющих это поле. Действительно, с учетом (2.4.30) формула (2.4.28) может быть переписана в виде

$$\rho(\omega) = \hbar\omega N(\omega) \quad (2.4.31)$$

Заметим, что сопоставление с  $n$ -кратно возбужденным квантовым осциллятором поля коллектива из  $n$  фотонов предполагает, очевидно, что для характеристики фотона

используются те же самые величины, которые характеризуют соответствующий осциллятор поля, а следовательно, соответствующую плоскую монохроматическую волну. Такими величинами являются волновой вектор  $\vec{k}$  и индекс поляризации  $\alpha$ .

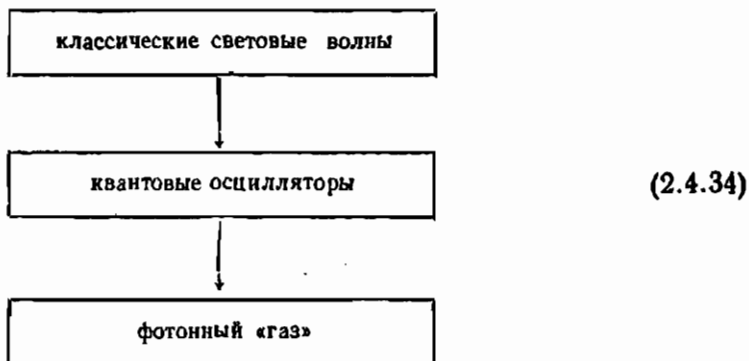
Состояние фотона описано полностью, если заданы четыре величины: три проекции волнового вектора ( $k_x, k_y, k_z$ ) и поляризация  $\alpha$ . При этом оказываются заданными также проекции импульса фотона

$$p_x = \hbar k_x, \quad p_y = \hbar k_y, \quad p_z = \hbar k_z, \quad (2.4.32)$$

и его энергия

$$e = pc = \hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (2.4.33)$$

Итак, на примере задачи о равновесном тепловом излучении удастся достаточно просто продемонстрировать переход:



В общем случае этот переход будет рассмотрен в гл.10.

### ГЛАВА 3

#### СТАНОВЛЕНИЕ

#### § 3.1. Спектры атомов. Постулаты Бора

**Загадки атомных спектров.** К концу XIX в. было установлено, что спектры испускания свободных атомов не непрерывны, а состоят из набора спектральных линий (*линейчатые спектры*). При этом каждый химический элемент характеризуется своим собственным набором линий в спектре; спектральные линии располагаются на шкале частот упо-

рядоченным образом, они образуют регулярные группы (*серии*). В 1885 г. Бальмер открыл названную впоследствии его именем серию линий в спектре атомарного водорода, описываемую достаточно простой формулой. В современном написании формула Бальмера имеет вид

$$\omega_n = 2\pi cR \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (3.1.1)$$

Здесь  $R$  — постоянная Ридберга;  $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Частоты  $\omega_n$ , определяемые этой формулой, попадают в область частот видимого спектра.

Позднее (в начале XX в.) были открыты серии частот в спектре атомарного водорода, попадающие в ультрафиолетовую (серия Лаймана) и инфракрасную (серии Пашена, Брэкета, Пфунда) части спектра. Закономерности в структуре всех этих серий оказались такими же, как и в серии Бальмера, что позволило обобщить формулу (3.1.1):

$$\omega_n = 2\pi cR \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (3.1.2)$$

Натуральное число  $s$  фиксирует здесь серию; в каждой серии  $n > s$ . При  $s=1$  получаем серию Лаймана, при  $s=2$  — серию Бальмера, при  $s=3$  — серию Пашена, при  $s=4$  — серию Брэкета, при  $s=5$  — серию Пфунда.

Закономерности в структуре спектров были установлены не только у водорода, но и у других элементов. Спектральные исследования выполнили в конце XIX в. Кайзер и Рунге, применившие фотографирование спектров. Обобщая экспериментальные данные, Ритц в 1908 г. сформулировал так называемый *комбинационный принцип*, согласно которому всякую новую линию в спектре можно вывести из ранее известных, комбинируя их в виде сумм и разностей.

Богатый экспериментальный материал по атомным спектрам, накопленный к началу XX в., не имел теоретического обоснования. Почему спектры атомов линейчатые? Чем объясняются наблюдаемые закономерности в структуре серий спектральных линий? Как устроен атом и как связаны с его строением закономерности в спектре? На все эти вопросы в то время ответа не было. Не был известен физический механизм испускания света атомом. Было неясно, в частности, что же именно испускает отдельный атом: сразу все линии в спектре данного элемента или только одну линию из спектра. Первой точки зрения придерживался, например, Кайзер. Вторая была высказана в 1907 г. Конвеем, который полагал,

что набор спектральных линий — следствие испускания света множеством атомов данного элемента, при этом каждый из атомов испустил только одну какую-то линию.

Можно ли рассматривать атом-излучатель как осциллятор? Напомним, что при выводе своей знаменитой формулы Планк в 1900 г. рассматривал излучающие атомы именно как осцилляторы. Это была дань классической теории, где испускание электромагнитной волны происходит вследствие колебаний заряда (вibrator Герца), причем частота волны равна частоте, с какой колеблется заряд. Правда, от давнего должно классической теории, Планк затем резко отошел от нее, предположив, что осциллятор испускает излучение не непрерывно, а порциями.

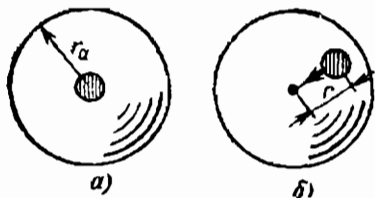


Рис. 3.1

Однако как представить атом в виде осциллятора?

Это попытался сделать Дж. Дж. Томсон. В 1903 г. он предложил модель атома водорода в виде равномерно заряженного положительным электричеством шара, в центре которого локализован отрицательно заряженный электрон (рис. 3.1, а); положительный заряд шара равен по модулю заряду электрона. Напряженность поля внутри равномерно заряженного шара определяется на расстоянии  $r$  от центра шара выражением

$$E(r) = er/r_a^3, \quad (3.1.3)$$

где  $e$  — заряд шара,  $r_a$  — его радиус. На электрон, находящийся на расстоянии  $r$  от положения равновесия, т. е. от центра шара, будет действовать возвращающая сила (рис. 3.1, б), модуль которой равен

$$F = eE = e^2 r/r_a^3. \quad (3.1.4)$$

Сила пропорциональна  $r$ , т. е. является квазиупругой; коэффициент жесткости есть  $K = e^2/r_a^3$ . Под действием этой силы электрон, выведенный каким-либо внешним воздействием из положения равновесия, совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{K/m} = \sqrt{e^2/mr_a^3} \quad (3.1.5)$$

( $m$  — масса электрона). При этом атом будет испускать излучение с той же самой частотой  $\omega$ .

---

Полагая  $\omega = 10^{15} \text{ с}^{-1}$  и используя известные данные о заряде и массе электрона, Томсон оценил радиус атома  $r_0$  по формуле (3.1.5). Получилось значение порядка  $10^{-10} \text{ м}$ , что совпадало с размером атома, определенным по газокинетической теории. Казалось бы, это подтверждало модель атома, предложенную Томсоном.

И все же модель осциллирующего атома оказалась несостоятельной. Известные опыты Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц убедительно показали, что структура атома должна быть совсем иной, нежели по модели Томсона. Почти вся масса атома сосредоточена в положительном заряженном ядре, линейные размеры которого на 4—5 порядков меньше диаметра самого атома. Вокруг ядра движутся электроны на расстояниях, которые и определяют размеры атома. Опыты Резерфорда наводили на мысль о *планетарной модели атома*, в которой электроны движутся по замкнутым (например, круговым) орбитам.

На первый взгляд, такая модель атома не противоречит представлениям об осциллирующем электроне. В самом деле, предположим, что некая частица совершает одновременно колебания по двум взаимно перпендикулярным направлениям: по  $x$ -оси и  $y$ -оси. Пусть фазы колебаний взаимно сдвинуты, так что  $x = a \cos \omega t$ ,  $y = a \sin \omega t$ . В этом случае  $x^2 + y^2 = a^2$ , т. е. частица движется по окружности, радиус которой равен амплитуде колебаний  $a$ . Ясно также, что период вращения по окружности равен периоду колебаний.

Беда, однако, в том, что если в модели Томсона электрон совершает колебания лишь, когда действует внешнее возбуждение, а в невозбужденном атоме покоится, находясь в центре атома, то в случае планетарной модели упомянутые выше взаимно перпендикулярные колебания должны совершаться постоянно. А это означает, что атом должен постоянно испускать излучение. Непрерывно теряя энергию на излучение, электрон будет по спирали приближаться к ядру и в конце концов упадет на него. Таким образом по законам классической электродинамики, атом вообще не мог бы сколь-либо долго существовать. При этом за время своего короткого существования он должен был бы непрерывно испускать излучение с непрерывно изменяющейся частотой.

Все это указывает на то, что классические представления об осциллирующем атоме-излучателе не соответствуют действительности.



**Постулаты Бора.** В 1913 г. выдающийся датский физик Нильс Бор в работе «О строении атомов и молекул» предложил теорию атома водорода. Теория Бора хорошо известна; она излагается во всех курсах физики. Поэтому мы лишь напомним вытекающие из этой теории формулы и затем сосредоточим внимание на интересующих нас вопросах испускания и поглощения излучения атомом.

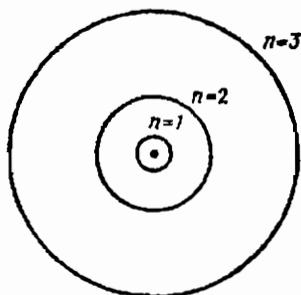


Рис. 3.2

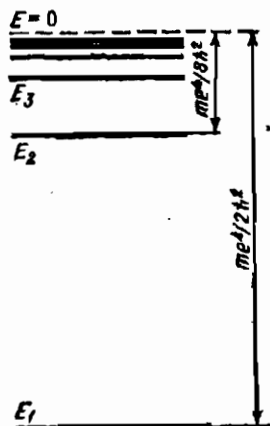


Рис. 3.3

Электрон в атоме водорода может находиться, по Бору, лишь на определенных (дозволенных) орбитах, имеющих радиус

$$r_n = \hbar^2 n^2 / m e^2; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.6)$$

Скорость электрона на  $n$ -й орбите

$$v_n = e^2 / \hbar n, \quad (3.1.7)$$

а полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия

$$E_n = - m e^4 / 2 \hbar^2 n^2. \quad (3.1.8)$$

Отрицательность энергии означает, что электрон находится в связанном состоянии (за нуль принимается энергия свободного электрона). На рис. 3.2 показаны орбиты для нескольких первых значений  $n$ , а на рис. 3.3 изображены энергетические уровни.

Все эти результаты Бор получил, используя два соотношения: классическое соотношение (второй закон Ньютона для заряда, движущегося по окружности под действием

кулоновской силы)

$$mv_n^2/r_n = e^2/r_n^2 \quad (3.1.9)$$

и условие квантования момента импульса электрона

$$mv_n r_n = n\hbar. \quad (3.1.10)$$

Это условие Бор получил, исходя из постулата Планка о том, что возможны лишь те состояния гармонического осциллятора, энергия которых равна  $E_n = n\hbar\omega$ , и обобщив сформулированное для осциллятора правило квантования на другие механические системы и, в частности, на движущееся по круговой орбите тело.

В основе теории Бора лежат два постулата. Именно они придают теории глубокий физический смысл и демонстрируют разрыв с классическими представлениями. *Первый постулат* вводит понятие «дозволенная орбита». Это есть орбита, находясь на которой электрон, вопреки требованиям классической электродинамики, не испускает излучения. Таким орбитам отвечают стационарные состояния атома и определенные уровни энергии атома (см. (3.1.8)).

*Второй постулат* утверждает, что испускание или поглощение света происходит при переходе электрона с одной дозволенной орбиты на другую или, иными словами, при переходе атома с одного энергетического уровня на другой. Эти переходы называют *квантовыми*. При каждом таком переходе испускается (поглощается) один фотон; его энергия  $\hbar\omega$  равна разности энергий соответствующих уровней. Если, например, происходит квантовый переход с уровня  $E_n$  на уровень  $E_s$  (пусть  $E_n > E_s$ ), то испускается фотон с энергией

$$\hbar\omega = E_n - E_s. \quad (3.1.11)$$

Соотношение (3.1.11) известно как *правило частот Бора*. Оно представляет собой «сердцевину» теории Бора. Впервые, из него следует, что частота испускаемого атомом излучения не зависит от частоты вращения электрона по той или иной орбите, а определяется разностью энергий соответствующих уровней: надо поделить эту разность энергий на постоянную Планка. Сточки зрения классической теории это обстоятельство является не менее революционным, чем постулирование стационарных орбит или квантование момента импульса и энергии. Любопытно, что, когда Эйнштейн ознакомился с работой Бора, он воскликнул: «Но в таком

случае частота света совершенно не зависит от частоты электрона! Это же колоссальное открытие!».

Во-вторых, правило частот (3.1.11) ярко демонстрирует дискретность процесса испускания (поглощения) излучения атомом. Вместо непрерывного, требующего какого-то конечного промежутка времени, процесса испускания или поглощения электромагнитной волны происходит мгновенный акт рождения или уничтожения фотона, при этом состояние атома соответствующим образом скачкообразно меняется. В зависимости от того, между какой парой уровней данного атома совершился квантовый переход, рождается (уничтожается) фотон, вносящий вклад в ту или иную линию спектра испускания (поглощения).

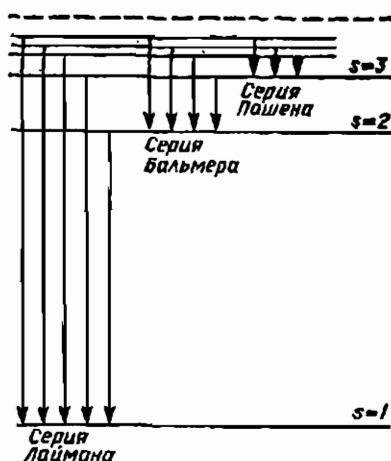


Рис. 3.4

В-третьих, правило частот объяснило не только линейчатый характер спектров атомов, но и наблюдаемые закономерности в структуре этих спектров. Рассмотрим, например,

спектр атомарного водорода. Подставляя (3.1.8) в (3.1.11), находим

$$\omega = \frac{me^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (3.1.12)$$

В результате приходим к закономерности (3.1.2). Одновременно получаем расчетное выражение для постоянной Ридберга (из сравнения (3.1.12) с (3.1.2)):

$$R = me^4 / 4\pi c \hbar^3. \quad (3.1.13)$$

Вычисленное по этой формуле значение постоянной Ридберга оказалось в прекрасном согласии с экспериментом.

На рис. 3.4 стрелками показаны квантовые переходы в атоме водорода, соответствующие спектральным сериям Лаймана, Бальмера, Пашена.

**Преходящее и непреходящее в теории Бора.** Теорию Бора рассматривают как один из первых этапов в развитии квантовой физики и при этом отмечают ее непоследо-

вательность, проявляющуюся в том, что здесь наряду с условием квантования используется и чисто классическое соотношение — второй закон Ньютона. Действительно, теория Бора страдает непоследовательностью; поэтому в ней и присутствует такой классический атрибут, как орбита электрона. В последовательной квантовой теории электронных орбит в атоме нет.

И все же теория Бора интересна отнюдь не только в историческом плане. Непреходящая ценность этой теории — в правиле частот (3.1.11). Электронных орбит нет, но есть

*энергетические уровни атома* (это убедительно доказали знаменитые опыты Франка и Герца в 1914 г.). Не выдержал испытания временем рис. 3.2, но сохранили свое значение рис. 3.3 и 3.4. *Квантовые переходы* между энергетическими уровнями отражают суть процессов взаимодействия излучения с веществом (процессов испускания и поглощения излучения).

Подчеркнем, что кванты света, т. е. фотоны, органически вписываются в эту картину. Когда квантовая система (атом или молекула) переходит с уровня  $E_2$  на уровень  $E_1$ , рождается фотон; при обратном переходе фотон уничтожается (рис. 3.5). Схемы на этом рисунке кажутся сегодня очень простыми. Но в 1913 г. они таковыми не казались. Они вызывали целый ряд вопросов. Вот два из них.

*Первый вопрос* таков. Чем вызываются те или иные квантовые переходы? Какова роль излучения, находящегося вблизи атома? Ответ на этот вопрос дал в 1916 г. Эйнштейн; мы поговорим об этом в § 3.2.

*Второй вопрос* касается отмечавшейся еще Резерфордом логической трудности, связанной с переходом между дискретными уровнями. Чтобы совершить данный квантовый переход, атом должен поглотить (испустить) фотон определенной, а не какой-либо иной энергии. Каким же образом атом производит «выбор» нужного фотона? Этот вопрос более сложен, чем предыдущий. Ответ на него был получен в процессе развития квантовой физики, о чем мы поговорим в гл. 5.

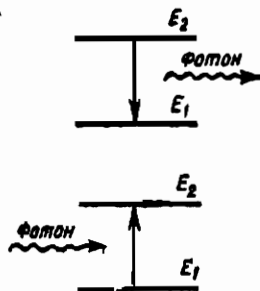


Рис. 3.5

### § 3.2. Испускание и поглощение излучения по квантовой теории

К представлениям о световых квантах привели два направления исследований. Первое связано с проблемой *теплового излучения*, второе — с *атомными спектрами*. Первоначально эти направления развивались независимо друг от друга. Так было до 1916 г., когда появились фундаментальные работы Эйнштейна «Испускание и поглощение излучения по квантовой теории» и «К квантовой теории излучения». В первой работе, опираясь на теорию Бора, Эйнштейн рассмотрел задачу о взаимодействии равновесного излучения с равновесной системой испускающих и поглощающих атомов. Он показал, что для получения формулы Планка надо наряду с поглощением и спонтанным испусканием рассмотреть *дополнительный* процесс испускания, который может быть назван *индуцированным (вынужденным)*. Во второй работе обоснована необходимость учитывать изменение импульса атома при испускании или поглощении им светового кванта; здесь же сделан вывод, что импульс светового кванта равен  $\hbar\omega/c$ .

Вопросы, рассматриваемые в настоящем параграфе, соответствуют содержанию указанных работ Эйнштейна и прежде всего его знаменитой работы «Испускание и поглощение излучения по квантовой теории». Эта работа не только способствовала становлению квантовой оптики, но и заложила основы *квантовой электроники* — научно-технического направления, получившего развитие во второй половине нашего столетия.

**Три процесса взаимодействия излучения с атомами.** Для простоты будем полагать, что взаимодействующие с излучением атомы имеют всего два уровня энергии ( $E_1$  и  $E_2$ ). В соответствии с правилом частот Бора эти атомы будут испускать и поглощать излучение на частоте

$$\omega_{12} = (E_2 - E_1)/\hbar. \quad (3.2.1)$$

Существует три процесса взаимодействия излучения с атомами.

1. *Спонтанное испускание излучения* (рис. 3.6, а). Возможен самопроизвольный (спонтанный) квантовый переход атома с уровня  $E_2$  на уровень  $E_1$ . При этом испускается фотон с энергией  $\hbar\omega_{12} = E_2 - E_1$ . Самопроизвольность процесса означает, что он не зависит от каких-либо внешних факторов, на которые можно было бы как-то воздействовать.

Данный процесс напоминает радиоактивный распад атомного ядра; он имеет ярко выраженный случайный характер. Случаен момент испускания спонтанного фотона, случайно направление движения испущенного фотона. Отнесенную к единице времени вероятность рассматриваемого процесса представим, следуя Эйнштейну, в виде

$$\omega_{\text{сп}} = A_{21}. \quad (3.2.2)$$

В теории Эйнштейна величина  $A_{21}$  выступает как некая постоянная, относящаяся к конкретному квантовому переходу. Современная квантовая теория позволяет выразить эту величину через характеристики перехода и фундаментальные физические постоянные (см. ч. IV).

2. Поглощение излучения (рис. 3.6, б). Поглотив фотон с энергией  $\hbar\omega_{12}$ , атом совершает квантовый переход  $E_1 \rightarrow E_2$ . Отнесенную к единице времени вероятность данного процесса представим в виде

$$\omega_{\text{п}} = B_{12}\rho(\omega_{12}). \quad (3.2.3)$$

Здесь  $\rho(\omega_{12})$  — плотность излучения на частоте  $\omega_{12}$ ,

$B_{12}$  — постоянная, относящаяся к данному переходу. Естественно, что вероятность поглощения излучения тем больше, чем больше плотность излучения. В этом смысле можно говорить о возможности воздействия на рассматриваемый процесс. На фотонном языке это означает, что для того, чтобы находившийся на уровне  $E_1$  атом совершил переход на уровень  $E_2$ , надо «обстрелять» его фотоном с энергией  $\hbar\omega_{12}$ . Причем чем больше будет таких фотонов, тем вероятнее, что переход  $E_1 \rightarrow E_2$  действительно произойдет. В связи с этим говорят о *вынужденном* характере процесса поглощения излучения; процесс «вынуждается» (инициируется) излучением. Разумеется, вынужденный характер процесса не отменяет его случайной природы; просто в отличие от спонтанного испускания здесь есть возможность воздействия на вероятность процесса.

3. Вынужденное испускание излучения (рис. 3.6, в). Поглощение не единственный процесс, инициируемый излуче-

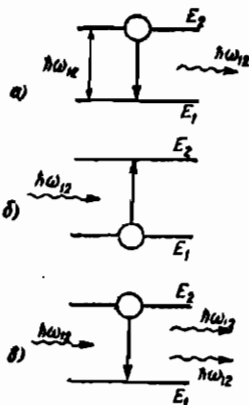


Рис. 3.6

нием. Если атом находится не на уровне  $E_1$ , а на уровне  $E_2$ , то излучение частоты  $\omega_{12}$  будет инициировать не поглощение, а испускание излучения. На фотонном языке это означает, что фотон с энергией  $\hbar\omega_{12}$  может вызвать квантовый переход в атоме с уровня  $E_2$  на уровень  $E_1$ , в результате появится еще один фотон с энергией  $\hbar\omega_{12}$ . Отнесенная к единице времени вероятность рассматриваемого процесса описывается выражением, аналогичным выражению (3.2.3):

$$\omega_{21} = B_{21}\rho(\omega_{12}). \quad (3.2.4)$$

Постулирование вынужденного испускания — основной момент в работе Эйнштейна (речь идет о первой из двух упомянутых выше работ). При этом Эйнштейн показал, что излучение, испущенное в результате вынужденных переходов  $E_2 \rightarrow E_1$ , должно иметь *точно такие же характеристики*, что и первичное излучение, инициировавшее переходы: оно имеет такую же частоту, такую же фазу, такое же направление распространения, такую же поляризацию. На фотонном языке это означает, что вторичный фотон (фотон, родившийся при вынужденном переходе  $E_2 \rightarrow E_1$ ) имеет такие же характеристики, что и первичный фотон; иными словами, является точной копией первичного фотона. Как говорят, оба фотона — вторичный и первичный — находятся в одном и том же квантовом состоянии.

Величины  $A_{21}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  получили название *коэффициентов Эйнштейна*. Они не зависят от температуры и являются характеристиками конкретного квантового перехода. В теории Эйнштейна они выступают в качестве феноменологических параметров.

**Равновесное излучение и равновесная система атомов; связь между коэффициентами Эйнштейна.** Пусть  $n_1$  и  $n_2$  — отнесенное к единице объема число атомов, находящихся соответственно на уровне  $E_1$  и на уровне  $E_2$ . Для термодинамически равновесной системы атомов при температуре  $T$  в отсутствие излучения справедливо известное распределение Больцмана:

$$n_i \sim g_i \exp(-E_i/kT); \quad i = 1; 2. \quad (3.2.5)$$

Здесь  $g_i$  — кратность вырождения  $i$ -го уровня (число квантовых состояний, характеризующихся энергией  $E_i$ ). Эйнштейн принял, что такое же распределение имеет место и при наличии излучения, взаимодействующего с атомами. Ниже мы вернемся к этому обстоятельству, которое, на пер-

вый взгляд, может показаться очевидным и не заслуживающим внимания.

При поглощении излучения атомы будут совершать квантовые переходы  $E_1 \rightarrow E_2$ . Число таких переходов (в единице объема в единицу времени) есть  $n_1 \omega_{\pi}$ . При испускании излучения будут происходить переходы  $E_2 \rightarrow E_1$ ; их число равно  $n_2 (\omega_{\pi\pi} + \omega_{\text{вн}})$ . При наличии термодинамического равновесия указанные числа переходов равны друг другу:

$$n_1 \omega_{\pi} = n_2 (\omega_{\pi\pi} + \omega_{\text{вн}}). \quad (3.2.6)$$

Подставляя сюда (3.2.5), приходим к соотношению

$$\frac{g_1}{g_2} e^{(E_2 - E_1)/kT} = \frac{\omega_{\pi\pi} + \omega_{\text{вн}}}{\omega_{\pi}}. \quad (3.2.7)$$

Используя (3.2.1)–(3.2.4), перепишем (3.2.7) в виде

$$\frac{g_1}{g_2} e^{\hbar\omega_{12}/kT} = \frac{A_{21} + B_{21}\rho(\omega_{12})}{B_{12}\rho(\omega_{12})}. \quad (3.2.8)$$

С повышением температуры функция  $\rho$  растет. В пределе при  $T \rightarrow \infty$  можно пренебречь слагаемым  $A_{21}$  по сравнению с  $B_{21}\rho$  и, кроме того, положить  $\exp(\hbar\omega_{12}/kT) = 1$ . В результате из (3.2.8) получим

$$\boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}. \quad (3.2.9)$$

Отсюда следует, что с точностью до кратности вырождения уровней вероятности обоих индуцированных процессов (поглощения и вынужденного испускания) одинаковы.

С учетом (3.2.9) преобразуем (3.2.8) к виду

$$\rho(\omega_{12}) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\exp(\hbar\omega_{12}/kT) - 1} \quad (3.2.10)$$

Предположим далее, что  $\hbar\omega_{12} \ll kT$ . Тогда  $\exp(\hbar\omega_{12}/kT) = 1 + \hbar\omega_{12}/kT$ , поэтому (3.2.10) принимает вид

$$\rho(\omega_{12}) = (A_{21}/B_{21}) (kT/\hbar\omega_{12}). \quad (3.2.11)$$

В рассматриваемом случае плотность равновесного излучения должна описываться формулой Рэля — Джинса (2.1.10). Сравнивая (3.2.11) с (2.1.10), получаем еще одно соотношение, связывающее коэффициенты Эйнштейна:

$$\boxed{A_{21}/B_{21} = \hbar\omega_{12}^3/\pi^2 c^3}. \quad (3.2.12)$$

Таким образом, без использования аппарата квантовой механики удается получить два соотношения между тремя



коэффициентами Эйнштейна (соотношения (3.2.9) и (3.2.12)) и тем самым связать друг с другом вероятности различных процессов. Заметим, что хотя результаты (3.2.9) и (3.2.12) получены при рассмотрении равновесного излучения и равновесной системы атомов, однако, как показывает более строгая теория, они пригодны также и для неравновесных ситуаций. Недаром в эти соотношения не вошла температура.

**Формула Планка и необходимость учета вынужденного испускания.** Чтобы получить формулу Планка (2.2.9), осталось сделать всего один шаг — подставить (3.2.12) в (3.2.10). Это дает

$$\rho(\omega_{12}) = \frac{\hbar \omega_{12}^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar \omega_{12}/kT) - 1}. \quad (3.2.13)$$

Так как наши рассуждения применимы к любому квантовому переходу, то частоту  $\omega_{12}$  в (3.2.13) можно заменить произвольным значением  $\omega$ , после чего (3.2.13) «превращается» в формулу Планка (2.2.9).

Проделанные выше выкладки, в ходе которых была установлена связь между коэффициентами Эйнштейна, можно рассматривать как еще один вывод формулы Планка. В данном выводе не используется квантование энергии осциллятора. Здесь применяется теория Бора, в частности его правило частот, и, кроме того, делается принципиальное предположение о наличии наряду со спонтанным также и вынужденного испускания. Нетрудно убедиться (предлагаем читателю самому сделать это), что если бы в (3.2.6) отсутствовало слагаемое  $\omega_{вк}$ , то вместо (3.2.10) мы получили бы результат

$$\rho(\omega_{12}) = (g_2 A_{21}/g_1 B_{12}) \exp(-\hbar \omega_{12}/kT), \quad (3.2.14)$$

соответствующий не формуле Планка, а частной формуле Вина. Как и формула Вина, этот результат «не работает» при  $T \rightarrow \infty$ . Он следует из (3.2.10) при условии, что  $\hbar \omega_{12} \gg kT$ . Физически это означает, что для поддержания термодинамического равновесия при  $\hbar \omega/kT \gg 1$  достаточно практически лишь спонтанного испускания.

В те годы, когда появилась работа Эйнштейна, особенно ценным представлялся вывод формулы Планка на основе учета вынужденного испускания, а не установление связи между коэффициентами Эйнштейна. В настоящее время больший интерес представляет не вывод формулы Планка (сегодня она уже не нуждается в дополнительных подтверж-

дениях), а соотношения, связывающие коэффициенты Эйнштейна. Эти соотношения используются в квантовой электронике.

**Об импульсе фотона.** Как уже отмечалось, Эйнштейн предполагал, что наблюдаемое в отсутствие излучения распределение (3.2.5) сохраняется и при наличии излучения. В работе «К квантовой теории излучения» Эйнштейн показал, что это предположение имеет интересный физический смысл. Он рассмотрел два разных механизма спонтанного испускания: 1) излучение испускается в виде расходящейся от атома во все стороны сферической электромагнитной волны, и тогда импульс атома-излучателя не меняется; 2) излучение испускается в виде кванта света, и тогда атом-излучатель получает всякий раз импульс отдачи, причем у разных атомов эти импульсы будут иметь случайное направление. Оказывается, что равновесие системы атомов, взаимодействующих с излучением, не нарушается только при условии, что имеет место второй из указанных механизмов спонтанного испускания и при этом импульс кванта света равен  $\hbar\omega/c$ . Таким образом, Эйнштейн привел дополнительное подтверждение существования световых квантов, характеризующихся наряду с энергией  $\hbar\omega$  также импульсом  $\hbar\omega/c$ .

### § 3.3. Эффект Комптона

Прямое экспериментальное подтверждение наличия у фотона импульса  $\hbar\omega/c$  было получено в 1923 г. в опытах Комптона по рассеянию рентгеновских лучей различными веществами.

**Результаты, полученные Комптоном.** Схема опыта Комптона представлена на рис. 3.7. Диафрагмы  $D$  выделяют узко направленный пучок монохроматического (характеристического) рентгеновского излучения. Пучок направляется на рассеивающий образец  $O$ . С помощью надлежащим образом размещенных в пространстве кристалла  $Kp$  и ионизационной камеры  $K$  (представляющих собой рентгеновский спектрограф) можно исследовать спектральный состав рентгеновского излучения, рассеянного под тем или иным углом  $\theta$ .

Согласно классической теории, рассеяние рентгеновских лучей обусловлено иницированными колебаниями электронов вещества рассеивателя. Отсюда следует вывод, что частота рассеянного излучения должна быть равна частоте падающего излучения. Однако результаты, полученные

Комптоном, противоречили такому выводу. На рис. 3.8 представлены полученные в опытах Комптона результаты рассеяния рентгеновских лучей (характеристическая линия  $K_{\alpha}$ , молибден) на графите.

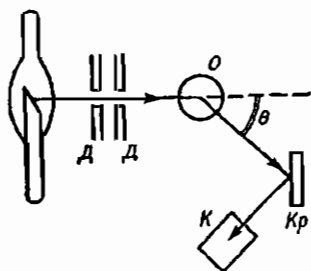


Рис. 3.7

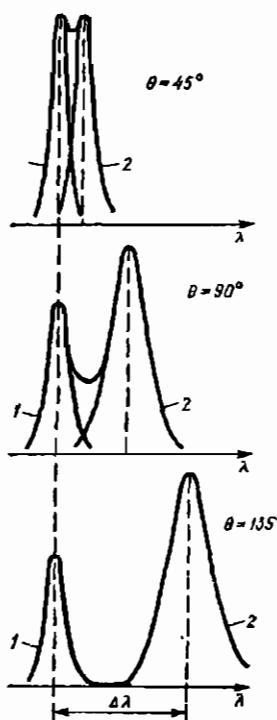


Рис. 3.8

В спектре рассеянного рентгеновского излучения четко видны две линии — одна имеет такую же длину волны, что и падающее излучение (несмещенная линия; отмечена на рисунке цифрой 1), тогда как другая имеет более высокую длину волны (смещенная линия; отмечена цифрой 2). По вертикальной оси здесь отложена интенсивность рассеянного излучения, по горизонтальной — длина волны излучения. На рисунке приведены три спектра — для трех углов рассеяния: 45, 90, 135°. Видно, что чем больше угол рассеяния, тем больше смещение  $\Delta\lambda$ .

Опыты Комптона дали следующее выражение для смещения длины волны рентгеновского излучения, рассеянного на угол  $\theta$ :

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2(\theta/2). \quad (3.3.1)$$

Здесь  $\lambda_C$  — постоянная, получившая впоследствии название *комптоновской длины волны*; она равна  $2,4 \cdot 10^{-12}$  м. Из (3.3.1) следует: смещение  $\Delta\lambda$  не зависит ни от длины волны падающего излучения, ни от

свойств материала, на котором происходит рассеяние.

**Теория эффекта Комптона.** Классическая теория не в состоянии объяснить эффект Комптона. Он может быть объ-

яснен лишь при условии, что излучение есть поток фотонов, имеющих энергию  $\hbar\omega$  и импульс  $\hbar\omega/c$ .

Хотя, как отмечалось выше, смещение  $\Delta\lambda$ , определяемое формулой (3.3.1), не зависит от выбора материала рассеивателя, однако важно, чтобы рассеиватель состоял из сравнительно легких атомов (например, парафин, графит, алюминий). Дело в том, что в легких атомах относительно высока доля электронов, слабо связанных с атомным ядром. Рассеяние рентгеновских лучей на этих электронах и обуславливает эффект, описываемый формулой (3.3.1).

Эффект Комптона на легких атомах можно объяснить, если рассматривать столкновения рентгеновских фотонов с электронами. В этих столкновениях фотон передает электрону часть своей энергии; в результате энергия фотона, а значит, и частота излучения уменьшаются, что и объясняет появление смещенной линии в спектре рассеянного рентгеновского излучения. Электрон должен быть сравнительно слабо связан с атомным ядром, его энергия связи должна быть существенно меньше, чем та энергия, которую передает ему при столкновении рентгеновский фотон. Такой электрон можно рассматривать свободным и покоящимся до столкновения.

Для получения (3.3.1) надо воспользоваться законами сохранения энергии и импульса для столкновения фотона со свободным электроном. До столкновения энергия фотона равна  $\hbar\omega$ , а энергия электрона есть его энергия покоя  $mc^2$  ( $m$  — масса покоя электрона). После столкновения энергия фотона есть  $\hbar\omega'$ ; энергию электрона представим выражением, следующим из теории относительности:  $c\sqrt{m^2c^2 + P^2}$ , где  $P$  — импульс, полученный электроном при столкновении. Используя закон сохранения энергии, запишем

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{m^2c^2 + P^2}. \quad (3.3.2)$$

Импульс фотона до столкновения есть  $p = \hbar\omega/c$ ; у электрона импульса нет. После столкновения импульс фотона обозначим через  $p' = \hbar\omega'/c$ ; пусть  $\theta$  — угол, образуемый этим импульсом с направлением движения падающего фотона. Импульс электрона после столкновения мы обозначили через  $P$ ; пусть  $\phi$  — угол, под которым «отскакивает» электрон. Закон сохранения импульса запишем в виде двух равенств: для проекций импульсов на ось  $x$  (которая выбрана вдоль направления импульса падающего фотона) и для про-

екций импульсов на ось  $y$ . Эти равенства имеют вид (рис. 3.9)

$$\left. \begin{aligned} P \cos \varphi + \frac{\hbar \omega'}{c} \cos \theta &= \frac{\hbar \omega}{c}; \\ P \sin \varphi - \frac{\hbar \omega'}{c} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

Из (3.3.3) получаем

$$\left. \begin{aligned} P^2 \cos^2 \varphi &= \left( \frac{\hbar \omega}{c} \right)^2 + \left( \frac{\hbar \omega'}{c} \right)^2 \cos^2 \theta - 2 \frac{\hbar^2}{c^2} \omega \omega' \cos \theta; \\ P^2 \sin^2 \varphi &= \left( \frac{\hbar \omega'}{c} \right)^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \right\}$$

Складывая эти равенства, находим

$$P^2 = \left( \frac{\hbar \omega}{c} \right)^2 + \left( \frac{\hbar \omega'}{c} \right)^2 - 2 \frac{\hbar^2}{c^2} \omega \omega' \cos \theta. \quad (3.3.4)$$

Из (3.3.2) получаем

$$P^2 = \frac{\hbar^2}{c^2} (\omega - \omega')^2 + 2m\hbar (\omega - \omega'). \quad (3.3.5)$$

Подставляем (3.3.5) в (3.3.4):

$$\frac{\hbar^2}{c^2} (\omega - \omega')^2 + 2m\hbar (\omega - \omega') = \left( \frac{\hbar \omega}{c} \right)^2 + \left( \frac{\hbar \omega'}{c} \right)^2 - 2 \frac{\hbar^2}{c^2} \omega \omega' \cos \theta.$$

Отсюда следует, что

$$\omega - \omega' = \frac{\hbar}{mc^2} \omega \omega' (1 - \cos \theta). \quad (3.3.6)$$

Далее учтем, что  $\lambda = 2\pi c/\omega$ ,  $\lambda' = 2\pi c/\omega'$  и, следовательно,

$$\omega - \omega' = 2\pi c \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = 2\pi c \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'}.$$

В итоге (3.3.6) принимает вид

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'} = \frac{\hbar}{mc^2} \frac{2\pi c}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \theta).$$

Таким образом,

$$\Delta \lambda = \frac{2\pi \hbar}{mc} (1 - \cos \theta) = \frac{4\pi \hbar}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.3.7)$$

Сравнивая (3.3.7) с (3.3.1), получаем выражение для комптоновской длины волны:

$$\lambda_c = 4\pi \hbar / mc. \quad (3.3.8)$$

Значение  $\lambda_c$ , рассчитанное по формуле (3.3.8), прекрасно согласуется с экспериментальными данными.

**Эффект Комптона на тяжелых атомах.** Если электрон достаточно сильно связан с ядром, то при столкновении с фотоном рентгеновского излучения импульс отдачи получает атом как целое. Теперь под массой в формуле (3.3.8) надо понимать уже не массу электрона, а массу атома. Она в десятки тысяч раз больше массы электрона, поэтому смещение  $\Delta\lambda$  в данном случае не обнаруживается. Указанное смещение наблюдают при столкновении рентгеновского фотона с электроном, который слабо связан с ядром и поэтому ведет себя при столкновении с фотоном как свободный электрон.

В легких атомах доля слабо связанных с ядром электронов достаточно велика, поэтому эффект Комптона на таких атомах наблюдается. Смещенная линия в спектре рассеянных рентгеновских лучей имеет в данном случае интенсивность, превышающую интенсивность несмещенной линии, обусловленной рассеянием на сильно связанных электронах. По мере перехода ко все более тяжелым атомам уменьшается

доля (а значит, и вклад в эффект Комптона) слабо связанных с ядром электронов. В результате интенсивность смещенной линии в спектре рассеяния будет уменьшаться при переходе к более тяжелым атомам, а интенсивность несмещенной линии будет при этом постепенно возрастать.

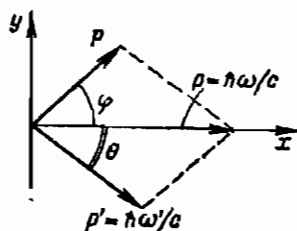


Рис. 3.9.

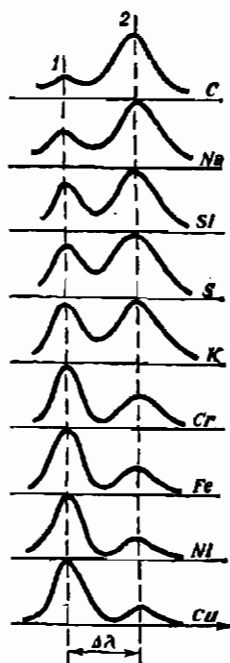


Рис. 3.10

---

Это хорошо видно на экспериментальных спектрах рассеяния рентгеновских лучей, показанных на рис. 3.10. Все спектры даны для одного и того же угла рассеяния; изменяются рассеиватели. Спектры представлены в порядке, отвечающем переходу от легких к более тяжелым атомам. Здесь 1 — несмещенная линия, 2 — смещенная линия. Видно, как постепенно увеличивается интенсивность несмещенной линии и в то же время падает интенсивность смещенной линии. Смещение  $\Delta\lambda$  остается при этом неизменным.

### § 3.4. Фотоны

Путь, пройденный оптикой в исследовании природы света, — от световых корпускул Ньютона до световых квантов (фотонов) Эйнштейна — напоминает виток спирали. Оптика снова пришла к корпускулярной концепции, но, разумеется, уже на новом уровне. Фотоны принципиально отличаются от ньютоновских световых корпускул прежде всего тем, что отнюдь не исключают волновых представлений. Уже в свойствах отдельного фотона отражается диалектическое единство корпускулярной и волновой концепций. Что же касается фотонных коллективов, то при определенных условиях они особенно ярко проявляют волновые свойства, обнаруживаемые в явлениях интерференции и дифракции света. Забегая вперед, заметим, что интерференционная картина, как оказалось, может наблюдаться и тогда, когда фотоны проходят через интерферометр поодиночке. Понимание этого принципиального факта возможно лишь на основе представлений квантовой физики. На этих вопросах мы специально остановимся в ч. II. Пока же рассмотрим свойства фотона (некоторые из них уже отмечались ранее), а затем поговорим о свойствах фотонного коллектива или, иными словами, о поведении фотона в коллективе.

**Свойства фотона.** Перечислим и при необходимости прокомментируем основные свойства фотона.

Масса покоя и электрический заряд фотона равны нулю. В любой инерциальной системе отсчета фотон движется со скоростью  $c$ .

Фотон — стабильная элементарная частица. Его время жизни определяется лишь взаимодействием с другими частицами. В этих взаимодействиях фотон либо рождается, либо уничтожается. Выше мы говорили о рассеянии фотона. Это была дань прежним представлениям, берущим начало от ньютоновских корпускул. В действительности же при

рассеянии происходит уничтожение исходного (падающего) фотона и рождение нового («рассеянного») фотона.

Энергия фотона  $\epsilon$  и его импульс  $\vec{p}$  определяются выражениями

$$\epsilon = \hbar\omega; \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad \text{или} \quad \vec{p} = \vec{j}\hbar\omega/c, \quad (3.4.1)$$

где  $\omega$  и  $\vec{k}$  — частота и волновой вектор излучения, а  $\vec{j}$  — единичный вектор в направлении распространения волны. Диалектическое единство корпускулярных и волновых свойств, отмечавшееся выше, усматривается уже в (3.4.1). Здесь в левых частях равенств стоят корпускулярные характеристики фотона, а в правых — волновые. В связи с этим говорят о корпускулярно-волновом дуализме свойств фотона. Он послужил отправной точкой для Луи де Бройля, предложившего в 1924 г. распространить идею корпускулярно-волнового дуализма на частицы с массой покоя и вообще на все микрообъекты, включая атомные ядра и атомы.

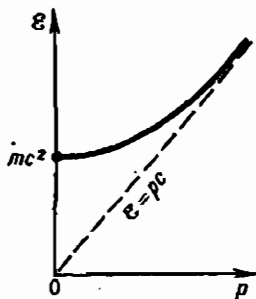


Рис. 3.11

Согласно теории относительности, энергия  $\epsilon$  элементарной частицы, имеющей массу покоя  $m$  и импульс  $p$ , описывается выражением (мы уже пользовались им в § 3.4)

$$\epsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}. \quad (3.4.2)$$

Определяемая этим выражением зависимость  $\epsilon(p)$  показана на рис. 3.11 в виде сплошной кривой. Там же штриховой прямой показана зависимость

$$\epsilon = pc, \quad (3.4.3)$$

реализуемая в пределе достаточно больших энергий (по сравнению с энергией покоя  $mc^2$ ). У фотона энергия покоя равна нулю, поэтому для него зависимость  $\epsilon(p)$  всегда описывается выражением (3.4.3).

Одной из важнейших специфических характеристик микрообъекта является спин. Его можно интерпретировать как своеобразный момент импульса микрообъекта, не связанный с движением микрообъекта; спин часто называют



---

внутренним моментом импульса. Квадрат этого момента импульса равен  $\hbar^2 s(s+1)$ , где  $s$  — определенное для данного микрообъекта целое или полуцелое положительное число. Обычно это число и называют спином. У фотона  $s=1$ .

Фотон может характеризоваться двумя независимыми поляризациями. Типы поляризации фотона соответствуют возможным типам поляризации той световой волны, из которой «взят» данный фотон.

Для задания состояния фотона надо определить четыре величины. Это могут быть три проекции импульса и поляризация. Так, определенное состояние фотона называют  $\vec{k}\alpha$ -состоянием ( $\alpha$  — индекс поляризации). Энергия фотона в  $\vec{k}\alpha$ -состоянии определяется автоматически, коль скоро определены три проекции импульса, а значит, и сам импульс фотона. Напомним читателю, что с  $\vec{k}\alpha$ -состояниями мы уже встречались в § 2.4.

Как и для всякого микрообъекта, для фотона возможны разные квантовые состояния, определяемые разными наборами одновременно измеримых величин. В § 2.4 рассматривались состояния, в которых фотон имеет одновременно измеримые проекции импульса (а следовательно, и энергию) и поляризацию —  $\vec{k}\alpha$ -состояния. Возможны, однако, и иные состояния — с набором иных физических величин. Например, возможны состояния, в которых импульс и поляризация фотона являются неопределенными, а определенными являются энергия, момент импульса, проекция момента импульса и четность.

Не имеет смысла говорить о пространственных координатах фотона. Локализация фотона в пространстве возможна лишь с точностью до длины волны излучения. На «языке» квантовой механики это означает, что не существует волновой функции фотона в обычном, координатном, представлении.

**Фермионы и бозоны; вынужденное испускание света и бозонный характер статистики фотонов.** По своим статистическим свойствам, т. е. по характеру поведения в коллективе себе подобных, все частицы разделяются на две группы: *фермионы* и *бозоны*.

Эти термины происходят от фамилий ученых, активно исследовавших статистические свойства соответствующих частиц. Имеются в виду выдающийся итальянский физик Энрико Ферми, который совместно с Дираком выполнил фундаментальные исследования по статистической теории электронов (на основе этих работ возникла статистика Ферми — Дирака), и индийский физик Бозе, исследова-

---

ния которого по статистике фотонов позднее дополнил Эйнштейн (эти работы создали статистику Бозе — Эйнштейна).

Фермионы способны занимать квантовые состояния только поодиночке. В данном квантовом состоянии не могут оказаться одновременно два (и более) одинаковых фермиона. Это обстоятельство известно как *принцип запрета Паули* (он был сформулирован Паули для электронов в 1925 г). По современной теории, к фермионам относятся кроме электронов также протоны, нейтроны, мюоны, нейтрино — вообще все микрообъекты с полуцелым спиновым числом  $s$ .

В отличие от фермионов бозоны, напротив, могут занимать одно и то же квантовое состояние в неограниченном числе. Более того, вероятность заполнения данного состояния оказывается тем выше, чем плотнее это состояние заселено. Кроме фотонов к бозонам относятся пионы, каоны, все микрообъекты без спина или с целочисленным спиновым числом  $s$ .

Бозонный характер статистики фотонов играет в оптических явлениях исключительно важную роль. Именно различием в статистических свойствах фотона и электрона объясняется, например, тот принципиальный факт, что фотонный коллектив при определенных условиях может описываться классическими волнами (электромагнитными волнами), тогда как с электронным коллективом никаких классических волн сопоставить нельзя.

Прямым следствием бозонного характера статистики фотонов является вынужденное испускание излучения. Процесс вынужденного испускания способствует более плотному заселению фотонных состояний поля, взаимодействующего с атомами, в соответствии с тенденцией фотонов более «охотно» заполнять те состояния, которые сильнее заселены. Получается, что фотоны поля уже самим фактом своего присутствия вблизи атомов стимулируют рождение атомами новых фотонов. Новые фотоны рождаются в тех же квантовых состояниях, в которых находятся фотоны поля, инициирующие вынужденные переходы в атомах.

Замечания о невырожденных и вырожденных коллективах. Сделаем некоторые общие замечания, касающиеся статистических свойств частиц. Пусть коллектив частиц есть идеальный газ, находящийся в термодинамическом равновесии; он характеризуется термодинамическими параметрами — температурой  $T$  и химическим потенциалом  $\mu$ . Обозначим через  $g$  число каким-либо образом выделенных состояний частицы; для определенности можно говорить о

числе состояний частицы в единице объема в интервале энергий от  $\epsilon$  до  $\epsilon + \Delta\epsilon$ . Среднее число частиц в выделенных состояниях  $N$  определяется произведением числа состояний  $g$  на среднее число частиц в одном состоянии  $\nu$ :

$$N = g\nu. \quad (3.4.4)$$

Величина  $\nu$  имеет универсальный вид. При этом возможны три случая.

1. *Вырожденный газ бозонов.* В данном случае величина  $\nu$  имеет вид

$$\nu = \frac{1}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT] - 1}. \quad (3.4.5)$$

Такой коллектив описывается *распределением Бозе — Эйнштейна* (квантовая статистика Бозе — Эйнштейна):

$$N = \frac{g}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT] - 1}. \quad (3.4.6)$$

2. *Вырожденный газ фермионов.* Для фермионов среднее число частиц в одном состоянии не может превышать единицы. Это хорошо видно из соотношения

$$\nu = \frac{1}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT] + 1}. \quad (3.4.7)$$

Так как  $\exp[(\epsilon - \mu)/kT] > 0$ , то  $\nu < 1$ . При  $T=0$  и  $\epsilon - \mu < 0$  имеем  $\nu = 1$ . Вырожденный коллектив фермионов описывается *распределением Ферми — Дирака* (квантовая статистика Ферми — Дирака):

$$N = \frac{g}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT] + 1}. \quad (3.4.8)$$

3. *Невырожденный газ.* Если выполнено условие

$$\exp(-\mu/kT) \gg 1, \quad (3.4.9)$$

то, как легко видеть, (3.4.5) и (3.4.7) принимают вид

$$\nu = \exp[(\mu - \epsilon)/kT]; \quad (3.4.10)$$

соответственно распределения (3.4.6) и (3.4.8) превращаются в распределение

$$N = g \exp[(\mu - \epsilon)/kT], \quad (3.4.11)$$

называемое *распределением Больцмана — Максвелла*. Условие (3.4.9) называют условием невырожденности коллектива. Для невырожденного коллектива разбиение частиц на бозоны и фермионы становится несущественным. При выполнении условия невырожденности обе квантовые статисти-

ки переходят в классическую статистику. Для определяемой выражением (3.4.10) величины  $\nu$  с учетом (3.4.9) справедливо неравенство

$$\nu \ll 1. \quad (3.4.12)$$

Оно означает, что в невырожденном коллективе число частиц много меньше числа состояний. Ясно, что в этом случае частицы фактически «не встречаются» друг с другом, поэтому важный для проявления бозонного либо фермионного «характера» частицы вопрос о заселении одного и того же состояния попросту не возникает. Этим и объясняется тот факт, что в невырожденном коллективе фермионы и бозоны ведут себя одинаково.

**Фотонный газ.** Теперь обратимся к бозонному коллективу, состоящему из фотонов. Такой коллектив имеет ряд специфических свойств, из которых укажем следующие три.

Во-первых, фотоны непосредственно не взаимодействуют друг с другом; один поток фотонов свободно проходит сквозь другой поток. Равновесие в фотонном газе устанавливается лишь благодаря наличию других частиц, взаимодействуя с которыми фотоны рождаются либо уничтожаются. Так, равновесное тепловое излучение в полости возникает благодаря взаимодействию излучения со стенками полости. Взаимодействия фотонов возможны только в веществе (нелинейно-оптические явления).

Во-вторых, на фотоны в отличие от других частиц не распространяется условие сохранения числа частиц; фотоны могут рождаться и уничтожаться в различных состояниях без нарушения равновесия газа. Следствием этого обстоятельства является равенство нулю химического потенциала фотонного коллектива:

$$\mu = 0. \quad (3.4.13)$$

В-третьих, как следует из (3.4.13), условие невырожденности (3.4.9) для фотонных коллективов не выполняется. Это означает, что для фотонного газа невозможен переход к классической статистике. Фотонный газ всегда вырожден; он всегда описывается квантовой статистикой Бозе — Эйнштейна.

Полагая  $\varepsilon = \hbar\omega$  и учитывая (3.4.13), получаем из (3.4.5) следующий результат для равновесного фотонного газа:

$$\nu = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (3.4.14)$$

Это есть уже известное соотношение (2.4.29).

**Фотоны и световые волны.** Пусть  $\nu_{\vec{k}\alpha}$  — среднее число фотонов в  $\vec{k}\alpha$ -состоянии, находящихся в единице объема. Плотность энергии излучения может быть представлена в виде

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\vec{k}} \hbar c k \nu_{\vec{k}\alpha} \quad (3.4.15)$$

Это означает, что энергия светового поля есть сумма энергий фотонов, «населяющих» это поле. Аналогичное соотношение может быть написано и для импульса  $\vec{P}$  единицы объема поля:

$$\vec{P} = \vec{S}/c^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} \nu_{\vec{k}\alpha} \quad (3.4.16)$$

(здесь, напоминаем,  $\vec{S}$  есть вектор Умова — Пойнтинга). Импульс светового поля равен сумме импульсов фотонов.

Представление светового поля в виде коллектива фотонов заменяет классическую картину световых волн. Последняя должна рассматриваться как частный случай, подобно тому как классическая механика является частным (предельным) случаем квантовой механики. Для перехода от фотонного описания к световым волнам необходимо выполнение условия

$$\nu_{\vec{k}\alpha} \gg 1. \quad (3.4.17)$$

Иначе говоря, если в каких-то  $\vec{k}\alpha$ -состояниях числа фотонов достаточно велики, то можно пренебречь квантовой структурой светового поля и «работать» со световыми волнами, характеризуемыми соответствующими волновыми векторами  $\vec{k}$  и поляризациями  $\alpha$ . Здесь полезно обратить внимание, что именно бозонный характер статистики фотонов делает возможным выполнение условия классичности (3.4.17).

Условие классичности может быть переписано в ином виде:

$$E^2 \gg \hbar \omega (\omega/c)^2, \quad (3.4.18)$$

где  $E$  — электрическая напряженность светового поля. Пусть излучение имеет частоту  $\omega$ . В соответствии с полученным в § 2.4 выражением для  $g(\omega)d\omega$  оценим число осцилляторов поля в единице объема как  $(\omega/c)^2$ . Энергия поля в единице объема по порядку величины равна  $E^2$ . Разделив эту

---

энергию на  $(\omega/c)^2$ , получим энергию, которая приблизительно приходится на один осциллятор:  $E^2(c/\omega)^2$ . Разделив затем на  $\hbar\omega$ , найдем число фотонов:  $\nu \approx E^2(c/\omega)^2/\hbar\omega$ . Для выполнения условия классичности необходимо, чтобы  $\nu \gg 1$ . Таким образом,  $E^2(c/\omega)^2/\hbar\omega \gg 1$ , откуда немедленно следует (3.4.18).

Из (3.4.18) видно, что условие классичности ухудшается с уменьшением напряженности поля и с ростом частоты. В радиодиапазоне условие (3.4.18) практически всегда выполняется. В оптическом диапазоне оно может выполняться плохо, а может вообще не выполняться. Например, для фиолетового излучения ( $\omega = 5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ) имеем  $\sqrt{\hbar\omega(\omega/c)^2} \approx 50 \text{ В/м}$ ; следовательно, для выполнения условия классичности напряженность светового поля должна быть много больше 50 В/м. Максимальные напряженности полей для нелазерных источников света составляют примерно 1000 В/м, а используемая на практике напряженность поля оказывается часто заметно ниже. Поэтому условие (3.4.18) в оптическом диапазоне, особенно в его коротковолновой области, может вполне оказаться под угрозой.

Имея в виду прогресс современной оптики, сделаем два замечания. Во-первых, появились лазеры, генерирующие световые поля напряженностью до  $10^8$ — $10^{10}$  В/м. Это существенно упрочило позиции классических волновых представлений в оптическом диапазоне. Во-вторых, созданы детекторы, реагирующие фактически на отдельные фотоны. Это позволяет детектировать излучение предельно слабых источников света и исследовать корпускулярный (квантовый) характер оптических полей.

**Фотонные состояния и типы световых волн.** Представлению излучения в виде коллектива фотонов в  $\vec{k}\alpha$ -состояниях отвечает при классическом подходе разложение поля по плоским волнам. Если же излучение представлять в виде фотонов в состояниях с определенными моментом импульса и четностью, то в этом случае при классическом подходе надо рассматривать разложение поля по сферическим волнам. Как известно, сферическая волна может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн. Соответственно фотонное состояние с определенными моментом импульса и четностью может быть представлено в виде квантово-механической суперпозиции фотонных  $\vec{k}\alpha$ -состояний. Верно также и противоположное заключение — о разложении плоской волны по сферическим и о представлении  $\vec{k}\alpha$  — состояний фотона в виде суперпозиции фотонных состояний с определенными моментом импульса и четностью.

О связи между когерентностью излучения и характером заселения фотонных состояний. Когерентность излучения связана с его способностью создавать интерференционную картину. С повышением степени когерентности света растет контраст интерференционной картины.

Вообразим идеальную ситуацию — лишь одно какое-то состояние заселено фотонами, а все остальные состояния пусты. В этом случае излучение есть плоская монохроматическая поляризованная световая волна (здесь и далее мы рассматриваем только  $\vec{k}\alpha$ -состояния фотона). Такая идеальная ситуация отвечает полностью (идеально) когерентному излучению. Оно идеально монохроматично, полностью поляризовано, его расходимость равна нулю.

В действительности, однако, подобная идеальная ситуация не реализуется. Фотоны всегда в той или иной мере разбросаны по разным состояниям. Чем сильнее этот разброс, тем ниже степень когерентности излучения.

Таким образом, повышение степени когерентности излучения предполагает *избирательность* заселения фотонных состояний, когда в определенных немногих состояниях сосредоточены почти все фотоны, а в остальных состояниях фотонов фактически нет. Чем жестче реализована такая избирательность, тем выше степень когерентности света.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бор Н. Избранные труды.— М.: Наука, 1970. Т. I.— 584 с.
2. Вавилов С. И. Микроструктура света.— М.: Изд-во АН СССР, 1950.— 160 с.
3. Герц Г. Из первых лет квантовой физики // УФН. 1977. Т. 122, вып. 3. С. 497—511.
4. Кудрявцев П. С. Курс истории физики.— М.: Просвещение, 1982.— 448 с.
5. Ландсберг Г. С. Оптика.— М.: Наука, 1976.— 928 с.
6. Планк М. Избранные труды.— М.: Наука, 1975.— 788 с.
7. Тарасов Л. В. Физические основы квантовой электроники.— М.: Советское радио, 1976.— 368 с.
8. Тер-Хаар Д. К истории статистики фотонов // УФН. 1969. Т. 99, вып. 1. С. 129—140.
9. Тригг Дж. Решающие эксперименты в современной физике / Пер. с англ.— М.: Мир, 1974.— 150 с.
10. Филонович С. Р. Лучи, волны, кванты.— М.: Наука, 1978.— 208 с.
11. Швиф Х. Г. От Кирхгофа до Планка / Пер. с нем.— М.: Мир, 1981. 160 с.
12. Эйнштейн А. Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1966. Т. 3.— 632 с.

**ФИЗИКА  
МИКРООБЪЕКТОВ**

**ГЛАВА 4**

**СЮРПРИЗЫ КВАНТОВОЙ  
ФИЗИКИ**

§ 4.1. От волн материи  
к волнам вероятности 89

§ 4.2. Некоторые  
принципиальные опыты  
с микрообъектами 94

**ГЛАВА 5**

**ВЕРоятНОСТЬ  
В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ**

§ 5.1. Интерференция амплитуд  
вероятностей переходов 100

§ 5.2. Суперпозиция состояний  
106

§ 5.3. Измерительный процесс  
в квантовой физике 113

§ 5.4. Волновая функция 117

Беседа. Фотон  
в интерферометре (о волнах  
в квантовой физике) 122



---

---

При изучении атомных явлений  
мы неоднократно научались тому,  
что вопросы, на которые, как считалось,  
давно получены окончательные ответы,  
таят в себе подчас неожиданные для нас сюрпризы.

Нильс Бор

---

---

*Рассматривая вопросы, связанные с физикой фотонов, мы вступаем в своеобразный мир микрообъектов с его специфическими закономерностями, представлениями, образами. Данная и следующая главы посвящены некоторым принципиальным вопросам физики этого мира. Очевидно, что нельзя изучать квантовую оптику, не познакомившись с общими основами квантовой физики.*

## ГЛАВА 4

### СЮРПРИЗЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

#### § 4.1. От волн материи к волнам вероятности

**Корпускулярно-волновой дуализм.** В 1924 г. французский физик Луи де Бройль предложил распространить идею корпускулярно-волнового дуализма не только на излучение, но и вообще на все микрообъекты. Соотношения

$$e = \hbar\omega; \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (4.1.1)$$

установленные для фотонов, де Бройль предложил применить ко всем микрообъектам. Это означало, что с любым микрообъектом следует сопоставлять, с одной стороны, корпускулярные характеристики ( $e$ ,  $\vec{p}$ ), а с другой стороны, волновые ( $\omega$ ,  $\vec{k}$ ). Необычность такой гипотезы заключалась прежде всего в том, что микрообъектам, которые до этого рассматривались как корпускулы, например электронам, приписывались теперь также и волновые свойства. Заметим, что второе из соотношений (4.1.1) обычно записывается в виде

$$p = 2\pi\hbar/\lambda. \quad (4.1.2)$$

Величина  $\lambda$  получила название «длина волны де Бройля».

Однако как понимать наличие у электрона волновых свойств? Что такое «волна де Бройля»? На эти вопросы ответа не было. В 1925 г. де Бройль ввел в употребление таинственное понятие о «волнах материи», описываемых так называемой волновой функцией. В 1926 г. немецкий физик Эрвин Шредингер предложил для волновой функции дифференциальное уравнение, вошедшее в квантовую теорию как «уравнение Шредингера». Еще через год в опытах Дэвиссона и Джермера и, независимо от них, П. С. Тарта-

ковского была обнаружена дифракция электронов. Дебройлевские «волны материи» электронов дифрагировали на кристаллической решетке мишени и создавали на экране характерную картину дифракционных колец (рис. 4.1.). Измерения расстояний между кольцами для электронов заданной энергии подтверждали формулу де Бройля

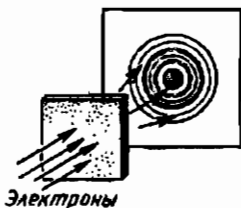


Рис. 4.1

(4.1.2).

Опыты по дифракции электронов рассматривались как убедительное доказательство существования дебройлевских «волн материи», хотя физическая сущность таких волн оста-

валась непонятной. С выдвиганием гипотезы де Бройля и особенно после упомянутых опытов стала весьма популярной волновая концепция. Физику микрообъектов называли в те годы волновой механикой (термин «квантовая механика» закрепился позднее). Делались попытки объяснить все известные тогда особенности физики микрообъектов наличием у них волновых свойств.

В 20-е годы и позднее предпринимались многочисленные попытки «материализовать» волны де Бройля, получить наглядную модель микрообъекта, обладающего и корпускулярными, и волновыми свойствами, представить его в виде симбиоза корпускулы и волны. Так, например, предлагалась модель волны-пилота, согласно которой микрообъект есть некое «соединение» корпускулярной сердцевинки с волной, управляющей движением сердцевинки. Эта волна представляет собой колебания некоторого нового поля ( $\psi$ -поля), похожего на гравитационное или электромагнитное, но со своими специфическими свойствами. Взаимодействие сердцевинки с  $\psi$ -полем приводит к тому, что сердцевинка будет стремиться туда, где интенсивность  $\psi$ -поля больше. Этому мешают неупорядоченные движения сердцевинки, обусловленные флуктуациями  $\psi$ -поля. В итоге возникает некое распределение сердцевинки в пространстве, имеющее максимумы в областях с повышенной интенсивностью  $\psi$ -поля.

Возможно, что подобные модели могут показаться на первый взгляд привлекательными. Однако все они, всякое буквальное толкование корпускулярно-волнового дуализма несостоятельны. Микрообъект не является симбиозом корпускулы и волны.

В настоящее время корпускулярно-волновой дуализм понимают как потенциальную способность микрообъекта проявлять различные свойства в зависимости от внешних условий, в частности условий наблюдения. Как писал ака-

демик В. А. Фок, «...у атомных объектов в одних условиях выступают на передний план волновые свойства, а в других — корпускулярные; возможны и такие условия, когда те и другие свойства выступают одновременно. Можно сказать, что для атомного объекта существует потенциальная возможность проявлять себя, в зависимости от внешних условий, либо как частица, либо как волна, либо промежуточным образом. Именно в этой потенциальной возможности различных проявлений свойств, присущих микрообъекту, и состоит дуализм волна — частица. Всякое иное, более буквальное, понимание этого дуализма в виде какой-нибудь модели неправильно».

**Соотношения неопределенностей.** В 1927 г. немецкий физик В. Гейзенберг сформулировал *соотношения неопределенностей*. Ограничимся здесь соотношениями неопределенностей для энергии — времени

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar, \quad (4.1.3)$$

и для импульса — координаты

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar; \Delta p_y \Delta y \geq \hbar; \Delta p_z \Delta z \geq \hbar. \quad (4.1.4)$$

В соотношении  $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$  величина  $\Delta x$  есть неопределенность  $x$ -координаты микрообъекта, а  $\Delta p_x$  — неопределенность  $x$ -проекции его импульса. Чем меньше  $\Delta x$ , тем больше  $\Delta p_x$ , и наоборот. Если, в частности, микрообъект находится в состоянии с определенным значением  $p_x$ , то он должен быть делокализован по всей оси  $x$ . Аналогичный смысл имеют другие соотношения в (4.1.4). Соотношение (4.1.3) можно трактовать так. Предположим, что микрообъект не стабилен; пусть  $\Delta t$  — время его жизни в рассматриваемом состоянии. Энергия микрообъекта в данном состоянии имеет неопределенность  $\Delta E$ , которая связана с  $\Delta t$  рассматриваемым соотношением. В частности, если состояние стационарное ( $\Delta t$  сколь угодно велико), то энергия объекта определена точно ( $\Delta E=0$ ).

В соотношениях неопределенностей ярко отразилась специфика представлений квантовой физики. «Мы не можем, — писал Гейзенберг, — интерпретировать процессы в атомарной области так же, как процессы большого масштаба. Если же мы продолжаем пользоваться привычными понятиями, то их применимость надо ограничивать так называемыми соотношениями неопределенностей».

Поскольку микрообъект не может одновременно иметь и определенную координату, и определенный импульс, то для него классическое понятие траектории, строго говоря, не имеет смысла. В частности, утрачивает смысл и понятие «орбита электрона в атоме».

С соотношениями неопределенностей связано, в частности, разбиение динамических характеристик микрообъекта на наборы одновременно измеримых величин (так называемые *полные наборы*). Каждому такому набору отвечает свой способ задания состояния микрообъекта. Ранее мы уже говорили о двух наборах величин, используемых для описания состояния фотона: один набор включал три проекции импульса и поляризацию, другой — энергию, момент импульса, одну из проекций момента импульса и четность. При описании состояний электрона используют следующие три полных набора:

$$x, y, z, s; \quad (4.1.5a)$$

$$p_x, p_y, p_z, s; \quad (4.1.5б)$$

$$E, l, m, s. \quad (4.1.5в)$$

Здесь  $l, m, s$  — соответственно орбитальное, магнитное и спиновое квантовые числа.

Заметим, что соотношения неопределенностей не разрешают прямого переноса в квантовую физику многих классических выражений. В качестве примера укажем хорошо известные равенства:

$$E = \frac{p^2}{2m} + v(\vec{r}); \quad \vec{M} = (\vec{r} \times \vec{p}) \quad (4.1.6)$$

( $\vec{M}$  — момент импульса). В них входят и импульс, и координата объекта. Так как в квантовой физике импульс и координата не являются одновременно измеримыми величинами (они входят в разные полные наборы), то соотношения (4.1.6) в применении к микрообъекту не работают (вместо (4.1.6) надо использовать аналогичные соотношения для эрмитовых операторов энергии, момента импульса, импульса, координаты).

**Волны вероятности.** Немецкий физик М. Борн предложил в 1926 г. *вероятностную* интерпретацию волновой функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера. Квадрат модуля этой функции стал рассматриваться как вероятность (или плотность вероятности) обнаружить микрообъект в том или ином состоянии. Точнее говоря, речь идет о вероятности обнаружить микрообъект в некотором состоя-

нии, отвечающем одному полному набору, если известно, что микроробъект находится в определенном состоянии, отвечающем другому полному набору.

Приведем пример — электрон в атоме. При этом обычно используют наборы (4.1.5а) и (4.1.5в), причем вместо декартовых координат применяют сферические координаты  $r, \theta, \varphi$ . Волновую функцию электрона в атоме можно представить как  $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ ;  $n$  — главное квантовое число, вместе с числом  $l$  оно определяет энергию электрона в атоме. Пусть электрон находится в состоянии, характеризуемом числами  $n, l, m$ . Вероятность обнаружить такой электрон в элементе объема  $dV$  вблизи точки с координатами  $r, \theta, \varphi$  равна, по Борну,

$$dw = |\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)|^2 dV \quad (4.1.7)$$

(квадрат модуля волновой функции выступает здесь как плотность вероятности). Вместо электронной орбиты теперь можно рассматривать «электронное облако», плотность которого в различных точках вокруг ядра пропорциональна  $|\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)|^2$ . На рис. 4.2. показаны формы таких «облаков» для электронов с  $l=0$  и  $l=1$ .

Итак, «волны материи» сменились «волнами вероятности». Уже в конце 20-х годов была вполне осознана невозможность толкования волновой функции как «напряженности» некоторого материального поля, подобного гравитационному или электромагнитному.

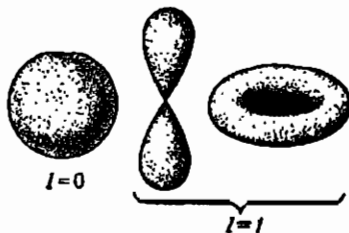


Рис. 4.2

Планк писал в 1928 г.: «То, что эта величина не может быть представлена наглядно в обычном смысле, но имеет только непрямо, символическое значение, следует уже из того, что волны движутся, вообще говоря, вовсе не в обычном трехмерном, а в так называемом конфигурационном пространстве». Планк имеет в виду, что в роли аргумента волновой функции могут выступать не обязательно пространственные координаты, но также величины иных полных наборов.

Вероятностная трактовка волновой функции отражает присущие микроробъектам элементы случайного в их поведении. Необходимой оказывается лишь вероятность пове-

---

дения микрообъекта. Это означает, что предсказания в квантовой физике имеют, вообще говоря, *вероятностный* характер и, следовательно, физика микрообъектов является *принципиально статистической теорией*.

Случаен факт обнаружения электрона в той или иной точке около ядра; вероятность же его обнаружения вблизи этой точки вполне определена — она описывается соотношением типа (4.1.7), т. е., иными словами, определяется формой и размерами соответствующего «электронного облака». Важно отметить, что случайность в поведении микрообъекта проявляется уже в соотношениях неопределенностей. Так, из соотношения для импульса — координаты следует, что принципиально невозможно нацелиться микрообъектом и попасть им в заданную точку. Ведь для этого надо было бы четко определить начальные координаты и импульс микрообъекта. Следовательно, факт регистрации конкретного микрообъекта в той или иной точке экран-детектора принципиально случаен; можно говорить лишь о вероятности этого факта.

*Вероятность лежит в самой основе квантовой физики.* Это неоднократно подчеркивали многие выдающиеся физики. Академик В. А. Фок писал: «В квантовой механике понятие вероятности есть понятие первичное, оно играет там фундаментальную роль». «Статистические методы в физике,— писал Борн,— по мере развития науки распространялись все больше и больше, и сегодня можно сказать, что современная физика полностью опирается на статистическую основу... Сегодня квантовая теория привела нас к более глубокому пониманию: она установила более тесную связь между статистикой и основами физики. Это является событием в истории человеческого мышления, значение которого выходит за пределы самой науки».

#### **§ 4.2. Некоторые принципиальные опыты с микрообъектами**

Вероятностная трактовка квантовой физики основывается на богатом экспериментальном материале. Используя этот материал, рассмотрим несколько принципиальных идеализированных опытов, являющихся, по сути дела, обобщением многих реальных экспериментов. При этом мы не будем входить в подробности, касающиеся конкретных экспериментальных установок, а также в детали исторического плана.

**Микрообъект в интерферометре.** Начнем с хорошо известного опыта по интерференции света. На рис. 4.3 показана схема простейшего интерферометра: 1 — источник монохроматического света, 2 — экран с щелями А и Б, 3 — экран-детектор, регистрирующий распределение интенсивности падающего на него света. Это распределение описывается на рисунке кривой  $I(x)$ , имеющей интерференционный характер, что хорошо объясняет классическая волновая теория света. Напомним, что интерференцию света наблюдали еще в XVII в. (Гримальди), а ее объяснение на основе волновых представлений было дано в начале

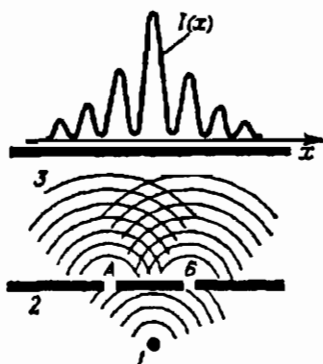


Рис. 4.3

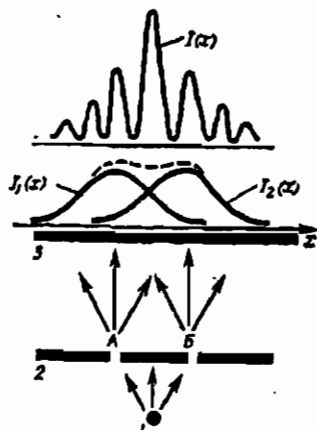


Рис. 4.4

XIX в. (Юнг). С тех пор опыт, изображенный на рис. 4.3, называют опытом Юнга.

Казалось бы, какое отношение имеет к квантовой физике давно открытое и объясненное явление интерференции света? Оказывается, самое прямое.

Будем постепенно уменьшать интенсивность света от источника. Освещенность экрана-детектора будет при этом, естественно, уменьшаться. Однако интерференционный характер кривой  $I(x)$  сохранится. Увеличивая время экспозиции, можно получить на фотодетекторе интерференционную кривую  $I(x)$  при сколь угодно малой интенсивности светового пучка — даже тогда, когда через интерферометр проходят уже не световые волны, а отдельные фотоны. Как показывает опыт, распределение попаданий фотонов дает на фотодетекторе такую же интерференционную картину, как и от световых волн.



Интерференция наблюдается и тогда, когда в точке  $I$  (рис. 4.3) помещен источник моноэнергетических электронов. При этом можно опять-таки сколь угодно уменьшать интенсивность пучка. Можно даже поставить опыт, в котором электроны проходят через интерферометр сугубо поодиночке; такой опыт поставил в 1949 г. В. А. Фабрикант (вместе с Л. М. Биберманом и Н. Г. Сушкиным). И в этом случае на экране-детекторе возникала интерференционная кривая  $I(x)$  (разумеется, при достаточно большом времени экспозиции). Опыты, повторенные с другими микрообъектами, дали аналогичные результаты.

Таким образом, явление интерференции наблюдается для всех микрообъектов (фотонов, электронов, нейтронов и т. д.). Более того, опыт показывает, что оно должно объясняться не свойствами коллективов микрообъектов, а свойствами отдельного микрообъекта.

Как ведет себя в интерферометре отдельный микрообъект? Пусть это будет электрон. Закроем щель  $B$ ; в этом случае на экране-детекторе возникает распределение попаданий, описываемое кривой  $I_1(x)$  (рис. 4.4). Откроем щель  $B$ , но закроем щель  $A$ ; возникнет распределение  $I_2(x)$ . При обеих открытых щелях имеем не суммарное распределение  $I_1 + I_2$ , а интерференционное распределение  $I(x)$ . Если считать, что каждый электрон проходит через какую-либо одну щель, то наличие интерференционного распределения  $I(x)$  наводит на мысль, что электрон неким образом «ощущает» при этом другую щель. В противном случае каждому электрону, проходящему через ту или иную щель, безразлично, открыта или закрыта соседняя щель, и тогда распределение попаданий при обеих открытых щелях должно описываться не интерференционной, а суммарной кривой  $I_1(x) + I_2(x)$ .

Каким же образом электрон, проходя через одну щель, «ощущает» при этом другую? Здесь пригодилась бы модель волны-пилота, если бы только ею можно было пользоваться. А может быть, электрон как-то проходит сразу через две щели?

Остается одно — обратиться снова к опыту и попробовать подглядеть, как именно проходит электрон через экран с щелями.

Подглядывание за поведением микрообъекта в интерферометре. Поместим вблизи щелей  $A$  и  $B$  экрана 2 источника света 4 и фотоприемники 5 (рис. 4.5), предназначенные для подглядывания за прохождением электрона через экран с щелями (фотоприемники регистрируют свет, рассеянный

электроном). Если электрон проходит сразу через две щели, то должны срабатывать одновременно оба фотоприемника. Если же электрон проходит через одну какую-либо щель, то срабатывает лишь соответствующий фотоприемник.

Итак, включим источники света и понаблюдаем за фотоприемниками. При этом позаботимся, чтобы электроны проходили через экран с щелями поодиночке: источник электронов должен испускать очередной электрон уже после того, как предыдущий достиг экрана-детектора. Опыт показывает, что всякий раз срабатывает только один фотоприемник (либо левый, либо правый) и никогда не срабатывают оба фотоприемника одновременно. Значит, электрон проходит не через две, а через одну щель. При этом всякий раз можно указать, через какую именно щель прошел тот или иной электрон.

Неужели снова придется обсуждать вопрос о том, как может электрон, проходя через одну щель, «ощущать» при этом другую? Не будем, однако, торопиться и сначала до-

ведем опыт до конца — получим достаточно большое число попаданий электронов на экране-детекторе и посмотрим, как распределятся эти попадания. Вот тут-то нас и ожидает сюрприз! На экране  $З$  обнаруживается не интерференционная кривая  $I(x)$ , а суммарная кривая  $I_3(x) = I_1(x) + I_2(x)$ . Повторим опыт, выключив источники света (и тем самым прекратив подглядывание за прохождением электронов через щели). В этом случае опять возникнет интерференционная кривая  $I(x)$ .

Получается, что при выключенных источниках света интерференция есть, а при включенных ее нет. Как только начинается контролирование процесса прохождения электронов через экран с щелями, *интерференция исчезает*. Можно сказать, что подглядывание за поведением электронов в интерферометре *разрушает интерференцию*.

Иначе говоря, если опыт ставится таким образом, чтобы всякий раз было ясно, через какую именно щель проходит электрон, интерференции нет. Однако интерференция

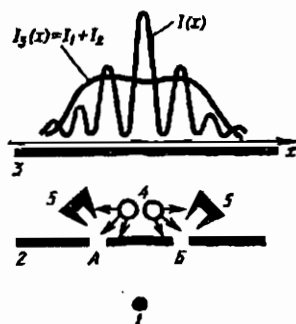


Рис. 4.5

возникает, если опыт ставится так, что неизвестно, где именно прошел электрон. Иными словами, интерференция возникает, когда прохождения электрона через щель *A* и через щель *B* оказываются неразличимыми альтернативами.

**Прохождение фотонов через поляризаторы.** Рассмотрим еще один опыт. Пропустим пучок света через поляризатор, например кристалл турмалина. Из кристалла выйдет ли-

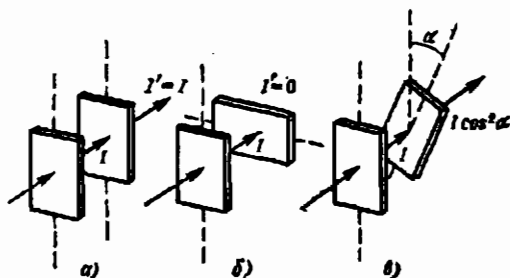


Рис. 4.6

нейно поляризованный световой пучок; его направление поляризации совпадает с направлением оси поляризатора. Пусть интенсивность линейно поляризованного пучка есть  $I$ . Далее поместим на пути пучка второй поляризатор и выделим три случая: *a* — ось второго поляризатора параллельна оси первого, *б* — ось второго поляризатора перпендикулярна оси первого, *в* — ось второго поляризатора составляет угол  $\alpha$  с осью первого. Будем измерять интенсивность света  $I'$  после второго поляризатора. В случае *a* получим  $I' = I$ , в случае *б* —  $I' = 0$ , а в случае *в* —  $I' = I \cos^2 \alpha$  (рис. 4.6).

Данный опыт хорошо известен в классической оптике. Однако, подобно интерференционному опыту Юнга, он имеет прямое отношение к квантовой физике. Как и в интерференционном опыте, будем уменьшать интенсивность светового пучка до тех пор, пока через поляризаторы не пойдут одиночные фотоны. Рассмотрим проиллюстрированные на рис. 4.6 случаи в применении к одиночным фотонам. Напомним, что поляризация фотона соответствует поляризации световой волны, из которой «взят» данный фотон. Это означает, в частности, что после первого поляризатора будем иметь линейно поляризованные (в направлении оси поляризатора) фотоны. Вот с этими фотонами и будем далее работать, называя их условно исходными.

В случае *a* исходный фотон всегда проходит через второй поляризатор; в случае *b*, напротив, никогда не проходит. Тут все ясно. В случае же *в* фотон может пройти через второй поляризатор, но может и не пройти. Нельзя предсказать, какая именно из двух альтернатив (прошел или не прошел) будет реализована конкретным фотоном. Если окажется, что фотон прошел, его поляризация изменится — теперь он будет поляризован в направлении оси второго поляризатора. Итак, в случае *в* судьба конкретного исходного фотона оказывается в принципе непредсказуемой.

Пусть имеется  $N$  исходных фотонов. Если  $N$  достаточно велико, то число прошедших фотонов (в случае *в*) можно предсказать с хорошей точностью — оно близко к  $N \cos^2 \alpha$ .

Непредсказуемость в отношении поведения отдельного микрообъекта сочетается с предсказуемостью поведения множества микрообъектов. Существует определенная вероятность исходному фотону пройти через второй поляризатор; эта вероятность равна  $\cos^2 \alpha$ .

А теперь усложним опыт: добавим третий поляризатор, ось которого ориентируем перпендикулярно оси первого поляризатора (рис. 4.7). Число исходных фотонов есть  $N$ . После второго поляризатора имеем  $N \cos^2 \alpha$  фотонов, они поляризованы по оси второго поляризатора. Рассуждая далее аналогичным образом, заключаем, что после третьего поляризатора имеется  $N \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$  фотонов, причем их поляризация должна совпадать с направлением оси третьего поляризатора.

Опыт подтверждает такое заключение.

Вроде бы все понятно. И тем не менее здесь кроется сюрприз. Уберите в схеме на рис. 4.7 второй поляризатор. Тогда после третьего поляризатора не будет обнаружено никаких фотонов! Получилась интересная ситуация. Фотоны летят через некое устройство, как бы фильтруясь сначала вторым, а затем третьим поляризаторами; сначала мы имеем  $N$ , затем  $N \cos^2 \alpha$  и, наконец,  $N \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$  фотонов. И вот мы убираем один из «фильтров». Казалось бы, тем

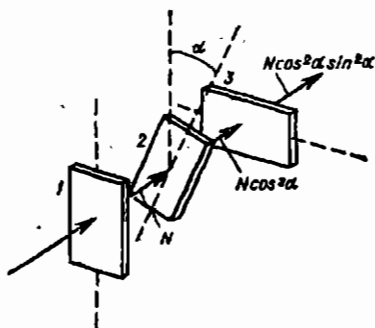


Рис. 4.7

самым мы улучшаем условия прохождения фотонов через рассматриваемое устройство. Однако в действительности все оборачивается иначе — теперь фотоны вообще не проходят через устройство!

## ГЛАВА 5

### ВЕРоятность В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

#### § 5.1. Интерференция амплитуд вероятностей переходов

**Амплитуда вероятности перехода.** Предположим, что микрообъект совершает квантовый переход из некоторого  $s$ -состояния в некоторое  $f$ -состояние. Конкретные характеристики этих состояний, равно как и природа микрообъекта, пока несущественны. Переход имеет вероятностный характер, поэтому введем в рассмотрение вероятность перехода  $\omega_{s \rightarrow f}$ . Наряду с вероятностью перехода в квантовой физике рассматривают *амплитуду* вероятности перехода  $\langle f|s \rangle$ . Это есть некое, вообще говоря, комплексное число, квадрат модуля которого равен вероятности перехода:

$$\omega_{s \rightarrow f} = |\langle f|s \rangle|^2. \quad (5.1.1)$$

Заметим, что в записи амплитуды справа указывается начальное состояние, а слева — конечное, как если бы эта запись читалась справа налево.

Рассмотрение квантовых представлений на основе понятия «амплитуда вероятности» проводится, например, в трудах английского физика П. Дирака и американского физика Р. Фейнмана. Обсуждая в данном параграфе принципиально важный вопрос об интерференции амплитуд вероятностей, мы будем следовать подходу к этому вопросу, изложенному Фейнманом в его знаменитых «Фейнмановских лекциях по физике».

Введение понятия амплитуды вероятности перехода оказывается весьма плодотворным. Чтобы показать это, обратимся к известной теореме сложения вероятностей для несовместных событий. Обычно не оговаривают, что эта теорема применима для событий, которые являются не только несовместными, но и различными. Последнее попросту подразумевается; ведь в классических теориях все рассматриваемые события всегда в принципе различимы. Иное дело физика микрообъектов. Вследствие того что микрообъекты одного и того же типа абсолютно тождественны, возможны

события, например квантовые переходы, являющиеся принципиально неразличимыми. Так вот, если существует несколько неразличимых способов (неразличимых альтернатив) перехода микрообъекта из  $s$ - в  $f$ -состояние, то в этом случае надо складывать не вероятности отдельных альтернатив, а амплитуды вероятностей. Иначе говоря, в данном случае вместо теоремы сложения вероятностей

$$|\langle f|s \rangle|^2 = \sum_i |\langle f|s \rangle_i|^2 \quad (5.1.2)$$

надо применять новое правило — правило сложения амплитуд вероятностей (индекс  $i$  фиксирует  $i$ -й способ перехода):

$$\langle f|s \rangle = \sum_i \langle f|s \rangle_i. \quad (5.1.3)$$

Этот момент исключительно важен. Остановимся на нем подробнее.

**Различные и неразличимые альтернативы; интерференция амплитуд вероятностей.** Пусть переход микрообъекта из начального состояния в конечное (переход  $s \rightarrow f$ ) совершается всякий раз через одно из промежуточных состояний  $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_N$ . Существует  $N$  возможных вариантов осуществления перехода  $s \rightarrow f$  ( $N$  альтернатив). Амплитуду вероятности для  $i$ -й альтернативы запишем в виде

$$\langle f|s \rangle_i = \langle f|v_i \rangle \langle v_i|s \rangle \quad (5.1.4)$$

(правую часть равенства надо читать справа налево).

Рассмотрим два случая.

1. **Физически различные альтернативы.** Здесь известно, через какое именно промежуточное состояние произошел тот или иной конкретный переход; имеется принципиальная возможность обнаружить микрообъект в соответствующем промежуточном состоянии. В рассматриваемом случае складываются вероятности, поэтому результирующая вероятность перехода имеет вид

$$|\langle f|s \rangle|^2 = \sum_i^N |\langle f|v_i \rangle \langle v_i|s \rangle|^2. \quad (5.1.5)$$

2. **Физически неразличимые альтернативы.** Здесь неизвестно, через какое именно промежуточное состояние произошел конкретный переход (микрообъект не обнаруживается в том или ином промежуточном состоянии), поэтому складываются не вероятности, а амплитуды вероятностей и

результатирующая вероятность имеет вид

$$|\langle f|s \rangle|^2 = \left| \sum_i^N \langle f|v_i \rangle \langle v_i|s \rangle \right|^2. \quad (5.1.6)$$

Раскрыв квадрат модуля в правой части равенства, получим сумму, где наряду со слагаемыми  $|\langle f|v_i \rangle \langle v_i|s \rangle|^2$  присутствуют слагаемые перекрестного (интерференционного) типа:  $\langle f|v_i \rangle \langle v_i|s \rangle \langle f|v_j \rangle^* \langle v_j|s \rangle^*$ . В связи с этим говорят об *интерференции амплитуд вероятностей*. Она имеет место, когда альтернативы, описываемые амплитудами вероятностей, оказываются *неразличимыми*.

**Микрообъект в интерферометре и интерференция амплитуд вероятностей.** Вернемся к первому опыту, рассмотренному в предыдущем параграфе. Электрон (или фотон) совершает переход из начального  $s$ -состояния в конечное  $x$ -состояние (микрообъект регистрируется вблизи точки с координатой  $x$  на экране-детекторе). При этом микрообъект проходит через щель  $A$  или  $B$ . Таким образом, имеются две альтернативы. Амплитуды вероятностей для этих альтернатив представим в виде

$$\begin{aligned} \langle x|s \rangle_A &= \langle x|A \rangle \langle A|s \rangle; & \langle x|s \rangle_B &= \\ &= \langle x|B \rangle \langle B|s \rangle. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Когда обе щели открыты, рассматриваемые альтернативы в условиях данного опыта неразличимы. Поэтому результирующая вероятность перехода  $s \rightarrow x$  имеет вид

$$\begin{aligned} |\langle x|s \rangle|^2 &= |\langle x|s \rangle_A + \langle x|s \rangle_B|^2 = \\ &= |\langle x|s \rangle_A|^2 + |\langle x|s \rangle_B|^2 + \langle x|s \rangle_A \langle x|s \rangle_B^* + \\ &+ \langle x|s \rangle_B \langle x|s \rangle_A^*. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Регистрируемая на экране-детекторе кривая  $I(x)$  соответствует распределению попаданий микрообъектов, которое определяется вероятностью  $|\langle x|s \rangle|^2$ . Интерференционный характер кривой  $I(x)$  обусловлен наличием в  $|\langle x|s \rangle|^2$  слагаемых  $\langle x|s \rangle_A \langle x|s \rangle_B^*$  и  $\langle x|s \rangle_B \langle x|s \rangle_A^*$ . Таким образом, интерференционное распределение попаданий микрообъектов (электронов, фотонов или других) на экране-детекторе, наблюдаемое при обеих открытых щелях, есть следствие интерференции амплитуд двух возможных переходов микрообъекта из заданного начального в заданное конечное состояние.

Разрушение интерференции амплитуд при контроле поведения микрообъекта в интерферометре. На рис. 5.1 изображена схема соответствующего опыта:  $s$  — источник электронов,  $S$  — источник фотонов,  $F_1$  и  $F_2$  — фотоприемники, фиксирующие два конечных состояния фотонов, рассеянных на электронах вблизи щелей  $A$  и  $B$ . Вначале будем полагать, что фотоны, рассеянные вблизи любой из щелей, могут быть зарегистрированы как  $F_1$ -приемником, так и  $F_2$ -приемником (что соответствует применению излучения с достаточно большой длиной волны). В этом случае фотоны, очевидно, не контролируют прохождение электронов через экран с щелями. Для краткости записи обозначим амплитуды вероятностей:

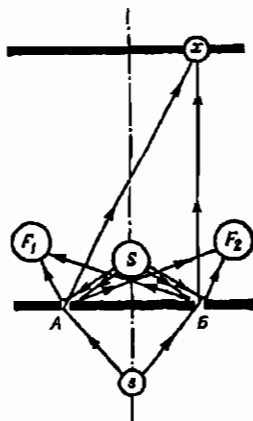


Рис. 5.1

для электронов

$$\langle x|A\rangle\langle A|s\rangle = \varphi_1; \quad \langle x|B\rangle\langle B|s\rangle = \varphi_2;$$

для фотонов (с учетом симметрии схемы опыта, хорошо видной на рисунке)

$$\langle F_1|A\rangle\langle A|S\rangle = \langle F_2|B\rangle\langle B|S\rangle = \psi_1;$$

$$\langle F_2|A\rangle\langle A|S\rangle = \langle F_1|B\rangle\langle B|S\rangle = \psi_2.$$

Теперь предположим, что электрон совершает переход  $s \rightarrow x$  и одновременно фотон, рассеиваясь на этом электроне, совершает переход  $S \rightarrow F_1$ . Выпишем выражение для амплитуды  $\langle xF_1|sS\rangle$  такого парного перехода. Возможны две альтернативы: 1) электрон проходит через щель  $A$ , в этом случае  $\langle xF_1|sS\rangle_A = \varphi_1\psi_1$ ; 2) электрон проходит через щель  $B$ , в этом случае  $\langle xF_1|sS\rangle_B = \varphi_2\psi_2$ . Так как обе альтернативы неразличимы, то

$$\langle xF_1|sS\rangle = \langle xF_1|sS\rangle_A + \langle xF_1|sS\rangle_B = \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2. \quad (5.1.9)$$

Аналогичные рассуждения проделаем, предположив, что электрон совершает переход  $s \rightarrow x$  и одновременно фотон,



рассеиваясь на этом электроны, совершает переход  $S \rightarrow F_2$ . В результате получим

$$\langle xF_2 | sS \rangle = \varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1. \quad (5.1.10)$$

Вероятность регистрации электрона вблизи  $x$  независимо от того, где при этом зарегистрирован фотон, имеет вид

$$|\langle x | s \rangle|^2 = |\langle xF_1 | sS \rangle|^2 + |\langle xF_2 | sS \rangle|^2. \quad (5.1.11)$$

Здесь складываются уже не амплитуды, а сами вероятности, поскольку альтернативы, соответствующие регистрации фотона приемником  $F_1$  или приемником  $F_2$ , естественно, различимы. Подставляя (5.1.9) и (5.1.10) в (5.1.11), находим

$$|\langle x | s \rangle|^2 = (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + (\varphi_1 \varphi_2^* + \varphi_2^* \varphi_1)(\psi_1 \psi_2^* + \psi_2^* \psi_1). \quad (5.1.12)$$

Итак, результирующая вероятность электронного перехода  $s \rightarrow x$  складывается из двух слагаемых: 1-е — умноженная на  $(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$  сумма вероятностей переходов через щели  $A$  и  $B$ , рассматриваемых по отдельности, 2-е обусловлено интерференцией амплитуд. Благодаря наличию последнего слагаемого наблюдается интерференционное распределение попаданий электронов на экране-детекторе. Напомним, что в рассмотренном случае предполагалась достаточно большая длина волны излучения, поэтому фотоны не могли контролировать прохождение электронов через щели.

Будем теперь уменьшать длину волны излучения. При этом будет уменьшаться вероятность попадания рассеянного электроном фотона в «чужой» приемник (например, вероятность попадания фотона, рассеянного у щели  $A$ , в приемник  $F_2$ ). Это означает, что с уменьшением длины волны излучения должна уменьшаться амплитуда  $\psi_2$ . Уменьшение же амплитуды  $\psi_2$  понизит, как это видно из (5.1.12), относительный вклад интерференционного слагаемого. В результате наблюдаемая на экране-детекторе интерференционная картина начнет смазываться.

При достаточно малой длине волны излучения возможен точный контроль за прохождением электронов через щели. В этом предельном случае фотон, рассеянный вблизи той или иной щели, попадает только в «свой» приемник. Это означает, что  $\psi_1 = 0$ . С учетом того, что  $\psi_2 = 0$ , выражение (5.1.12) преобразуется к виду

$$|\langle x | s \rangle|^2 = |\psi_1|^2 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2). \quad (5.1.13)$$

Таким образом, контроль за прохождением электронов через щели приводит к разрушению интерференции амплитуд и,

---

как следствие, к исчезновению интерференционного распределения попаданий электронов на экране-детекторе. Контролирование делает различимыми альтернативы, отвечающие прохождению электрона через разные щели.

Рассматривая данный пример, мы убеждаемся, что в вопросе различимости альтернатив есть некоторая тонкость: наряду с полной неразличимостью и полной различимостью существует непрерывный ряд промежуточных ситуаций, отвечающих частичной различимости. Результат (5.1.13) относится к предельному случаю полной различимости рассматриваемых альтернатив ( $\psi_2=0$ ). Противоположный предельный случай полной неразличимости альтернатив предполагает, очевидно, одинаковую вероятность фотону попасть как в «свой», так и в «чужой» приемник; это означает, что  $\psi_1=\psi_2$ . С учетом равенства амплитуд  $\psi_1$  и  $\psi_2$  выражение (5.1.12) преобразуется к виду

$$|\langle x|s\rangle|^2 = 2|\psi_1|^2|\varphi_1 + \varphi_2|^2. \quad (5.1.14)$$

Общее выражение (5.1.12) описывает промежуточные ситуации, отвечающие частичной различимости рассматриваемых альтернатив. Эти ситуации отличаются друг от друга величиной интерференционного слагаемого в (5.1.12). Чем меньше интерференционное слагаемое, тем больше степень различимости альтернатив.

Теперь внесем поправку в сделанные ранее замечания. Теорема сложения вероятностей работает, когда альтернативы полностью различимы. Она не работает в случае частичной различимости и тем более полной неразличимости. Во всех этих случаях наблюдается интерференция амплитуд вероятностей.

**Главное в квантовой физике.** Если попытаться кратко сформулировать то главное, что дала квантовая физика человеку, познающему окружающий его мир, то следует выделить следующие два основных момента.

*Первый:* квантовая физика показала, что основными закономерностями в природе являются закономерности не динамического, а статистического типа и что вероятностная форма причинности есть основная форма, тогда как классический (лапласовский) детерминизм представляет собой лишь предельный случай.

*Второй:* квантовая физика обнаружила, что с вероятностями в природе следует обращаться не совсем так, как это принято в классических статистических теориях; оказалось, что в определенных случаях надо складывать не

---

сами вероятности событий, а амплитуды этих вероятностей. Последнее обстоятельство приводит к специфическому эффекту *интерференции амплитуд вероятностей*.

Итак, подчеркнем, во-первых, вероятностный характер законов природы (примат статистических закономерностей), а во-вторых, особые отношения между вероятностями, предполагающие не только сложение вероятностей, но и специфические интерференционные эффекты.

В итоге вопросы интерференции и волновых процессов оказываются поставленными в новой плоскости. До появления квантовой физики интерференцию всегда рассматривали как пример специфически *волнового* явления. Если в каком-либо эксперименте обнаруживали характерную интерференционную картину, то это считалось безусловным основанием для заключения о присутствии неких волн. В этом смысле волны рассматривались как нечто первичное, а интерференция — как нечто вторичное. Квантовая физика показывает, что более оправдана противоположная расстановка акцентов и что в основе интерференционной картины отнюдь не обязательно должны лежать классические волновые процессы. В общем случае интерференция — это специфическое квантовое явление, связанное со сложением амплитуд вероятностей.

Подчеркнем, что в общем случае объяснение интерференции выходит за рамки традиционной волновой картины. Например, нельзя объяснить на основе волновых процессов разделение микрообъектов на фермионы и бозоны, являющееся, как оказывается, следствием интерференции амплитуд вероятностей переходов. Анализ процесса разрушения интерференции амплитуд вероятностей в измерительном акте (так называемой «редукции волнового пакета») прямо указывает на неправомочность использования представлений о классических волнах при рассмотрении микроявлений. Однако, прежде чем говорить об этом вопросе, надо познакомиться с одним из фундаментальных принципов квантовой физики — *принципом суперпозиции состояний*.

## § 5.2. Суперпозиция состояний

**Принцип суперпозиции состояний.** Интерференция амплитуд вероятностей переходов органически связана с принципом суперпозиции состояний, отражающим специфику «взаимоотношений» состояний микрообъекта. Как отмечалось ранее, возможные состояния микрообъекта разби-

ваются на группы, в каждой из которых определены значения того или иного полного набора физических величин. Обозначим разные полные наборы как  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -набор и т. д. Допустим, что микрообъект находится в одном из состояний, где определены величины  $\alpha$ -набора (в одном из  $\alpha$ -состояний). Что можно сказать при этом о величинах, например,  $\beta$ -набора? Согласно принципу суперпозиции, между состояниями микрообъекта, отвечающими разным полным наборам, существует связь: любое состояние из одного набора может быть представлено в виде суперпозиции состояний другого набора. Например, данное  $\alpha$ -состояние может быть представлено в виде суперпозиции  $\beta$ -состояний. Условимся использовать для обозначения состояния микрообъекта символ  $|\alpha\rangle$ . Тогда суперпозицию можно записать в виде

$$|\alpha\rangle = \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta} |\beta\rangle. \quad (5.2.1)$$

Это соотношение выглядит как разложение состояния  $|\alpha\rangle$  по совокупности  $\beta$ -состояний, при этом величины  $\Phi_{\alpha\beta}$  играют роль коэффициентов разложения. Конкретнее:  $\Phi_{\alpha\beta}$  есть амплитуда вероятности того, что при измерении величины  $\beta$ -набора в состоянии  $|\alpha\rangle$  будут получены значения, отвечающие состоянию  $|\beta\rangle$ . Иными словами, это есть амплитуда вероятности того, что микрообъект, находящийся в состоянии  $|\alpha\rangle$ , может быть обнаружен также и в состоянии  $|\beta\rangle$ . Обозначим эту амплитуду символом  $\langle\beta|\alpha\rangle$ , после чего выражение (5.2.1) принимает вид

$$|\alpha\rangle = \sum_{\beta} |\beta\rangle \langle\beta|\alpha\rangle. \quad (5.2.2)$$

Ранее рассматривалась амплитуда вероятности перехода. На первый взгляд, принцип суперпозиции вводит новый тип амплитуды вероятности. Действительно, приведенная выше фраза « $\langle\beta|\alpha\rangle$  есть амплитуда вероятности того, что микрообъект, находящийся в состоянии  $|\alpha\rangle$ , может быть обнаружен и в состоянии  $|\beta\rangle$ » допускает перефразировку: « $\langle\beta|\alpha\rangle$  есть амплитуда вероятности пребывания микрообъекта в состоянии  $|\beta\rangle$ , если известно, что данный микрообъект с достоверностью находится в состоянии  $|\alpha\rangle$ ». Коротко говоря, последнее утверждение означает, что  $\langle\beta|\alpha\rangle$  есть амплитуда вероятности, с какой в данном  $\alpha$ -состоянии «представлено» то или иное  $\beta$ -состояние. Может возникнуть

---

впечатление, что амплитуды  $\langle \beta | \alpha \rangle$  не имеют отношения к каким-либо переходам, к каким-либо процессам. Учитывая это, введем для  $\langle \beta | \alpha \rangle$  новый термин — «амплитуда состояния».

Сразу же отметим, что упомянутое выше впечатление в действительности ошибочно. Однако, чтобы убедиться в этом, надо проанализировать измерительный акт. Сделаем это в следующем параграфе и тогда внесем в приведенные определения амплитуд  $\langle \beta | \alpha \rangle$  некоторые уточнения, которые фактически сведут амплитуды состояний к уже знакомым читателю амплитудам переходов.

Принцип суперпозиции состояний как бы «дополняет» соотношения неопределенностей: его позитивное содержание «компенсирует» известное негативное содержание этих соотношений. Образно говоря, соотношения неопределенностей указывают на то «старое», от чего надо отказаться при переходе от макроявлений к микроявлениям; они требуют, в частности, отказаться от одновременной измеримости многих физических величин. В то же время принцип суперпозиции состояний указывает на то «новое», чем надо пользоваться при рассмотрении микроявлений: суперпозиция (б.2.2) означает, что если микрообъект находится в состоянии, где измеримы величины  $\alpha$ -набора, то значения величин  $\beta$ -набора могут быть предсказаны вероятностно — с вероятностью, равной  $|\langle \beta | \alpha \rangle|^2$ .

Суперпозиция в классической и квантовой физике. Суперпозиция часто встречается в классической физике; это хорошо известная суперпозиция классических волн. С математической точки зрения классическая суперпозиция и суперпозиция в квантовой физике аналогичны. Именно это обстоятельство немало способствовало развитию квантовой теории. В то же время оно затрудняло осмысливание физического содержания получаемых в теории результатов, так как порождало соблазн проводить неоправданные аналогии с классическими волнами. Как писал Дирак, «допущение суперпозиционных связей между состояниями приводит к математической теории, в которой уравнения движения, определяющие состояния, линейны по отношению к неизвестным. Ввиду этого многие пытались установить аналогии с системами классической механики, такими, как колеблющиеся струны или мембраны, которые подчиняются линейным уравнениям, а следовательно, и принципу суперпозиции. Важно помнить, однако, что суперпозиция в квантовой физике существенным образом отличается от суперпозиции, встречающейся в любой классической теории. Это

видно из того факта, что квантовый принцип суперпозиции требует неопределенности результатов измерений».

Суперпозиция двух классических волн дает новую волну, обладающую, естественно, и новыми характеристиками. Суперпозиция же двух состояний  $|\beta_1\rangle$  и  $|\beta_2\rangle$ , характеризующихся соответственно значениями  $\beta_1$  и  $\beta_2$  величин  $\beta$ -набора, отнюдь не приводит к состоянию с каким-либо новым значением  $\beta$ . Возьмем суперпозиционное состояние

$$|\beta_1\rangle \langle \beta_1 | \alpha \rangle + |\beta_2\rangle \langle \beta_2 | \alpha \rangle.$$

Будем измерять в этом состоянии  $\beta$ -величину. Всякий раз будет получаться одно из прежних значений — либо  $\beta_1$ , либо  $\beta_2$ . При этом нельзя предсказать, какое именно из двух значений появится в конкретном измерении; можно указать лишь вероятность получения  $\beta_1$  или  $\beta_2$ . Эти вероятности равны соответственно  $|\langle \beta_1 | \alpha \rangle|^2$  и  $|\langle \beta_2 | \alpha \rangle|^2$ . Неопределенность результатов измерений и определяет принципиальное отличие квантовой суперпозиции от классической.

Переход с одного энергетического уровня на другой. В § 3.1 отмечалось противоречие, связанное с квантовым переходом электрона с одного уровня энергии на другой. Напомним суть этого противоречия. Чтобы перейти с уровня  $E_1$  на уровень  $E_2$ , электрон должен поглотить фотон с энергией  $\hbar\omega = E_2 - E_1$ . Если энергия фотона больше или меньше, чем  $E_2 - E_1$ , то такой фотон не будет поглощен электроном. Значит, находясь на уровне  $E_1$ , электрон должен «знать» об уровне  $E_2$ , чтобы поглотить фотон с нужной энергией. Однако, чтобы «знать» об уровне  $E_2$ , электрон должен побывать на нем, чего он не может сделать, не поглотив фотона. Возникает порочный логический круг.

Противоречие снимается, если воспользоваться принципом суперпозиции состояний. Обозначим через  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  состояния микрообъекта, в которых он имеет энергию  $E_1$  или  $E_2$ . Согласно принципу суперпозиции, наряду с состояниями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  возможно также состояние

$$|f\rangle = |1\rangle \langle 1 | f \rangle + |2\rangle \langle 2 | f \rangle. \quad (5.2.3)$$

Измерение энергии микрообъекта в этом состоянии приводит либо к результату  $E_1$ , либо к результату  $E_2$ , как если бы микрообъект находился и на уровне  $E_1$ , и на уровне  $E_2$  (специфически квантовая ситуация, которую бесполезно пытаться представить буквально, наглядно). Первый результат реализуется с вероятностью  $|\langle 1 | f \rangle|^2$ , а второй —

$|\langle 2|f\rangle|^2$ . Возможность такой специфически квантовой ситуации как раз и снимает противоречие квантового перехода с уровня на уровень. Достаточно предположить, что взаимодействие микрообъекта с излучением переводит микрообъект в суперпозиционное состояние типа (5.2.3).

**Базисные состояния.** Вернемся к выражению (5.2.2) и подумаем, что произойдет с ним при переходе к классической физике. В классической физике все величины в принципе одновременно измеримы. Следовательно, все они могут рассматриваться как единый «полный набор». Учитывая, что отражаемые в (5.2.2) суперпозиционные связи действуют между разными полными наборами, заключаем: в классическом пределе подобные связи попросту отсутствуют, и, значит, все формально составленные амплитуды состояний должны быть приняты равными нулю. В квантовой же физике равенство нулю амплитуд состояний имеет место лишь в пределах одного и того же полного набора:

$$\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = 0, \text{ если } i \neq j. \quad (5.2.4)$$

Амплитуда состояния равна нулю тогда и только тогда, когда соответствующие два состояния взаимно независимы (если объект находится в одном из них, он не может быть обнаружен в другом). О таких состояниях говорят как о *взаимно ортогональных*. В этом смысле все состояния классического объекта взаимно ортогональны, тогда как в квантовой физике ортогональны лишь состояния, соответствующие одному и тому же полному набору, и неортогональны состояниям, соответствующие разным наборам. Последнее обстоятельство и отражено в принципе суперпозиции состояний. Заметим, что представление о взаимно ортогональных состояниях позволяет указать критерий *полной* и *частичной* различимости состояний. Если  $\langle s_1 | s_2 \rangle = 0$ , то состояния  $|s_1\rangle$  и  $|s_2\rangle$  полностью различимы (между ними нет суперпозиционных связей). Если же  $\langle s_1 | s_2 \rangle \neq 0$ , то рассматриваемые состояния частично различимы. Итак, критерием полной различимости состояний является их взаимная ортогональность.

Чтобы данное состояние можно было разложить по совокупности каких-либо других состояний, последние должны быть взаимно ортогональными, т. е. должны отвечать одному и тому же полному набору. Такие состояния принято называть *базисными*. Амплитуды базисных состояний удовлетворяют условию, которое является очевидным обобщением соотношения (5.2.4):

$$\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (5.2.5)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — так называемый символ Кронекера; он равен нулю при  $i \neq j$  и равен единице при  $i = j$ . Условие (5.2.5) называют *условием ортонормировки базисных состояний*.

Базисные состояния могут быть выбраны различным образом — в зависимости от рассматриваемого полного набора. Как говорят, возможны различные *представления*. Принцип суперпозиции состояний означает, что любое состояние  $|f\rangle$  микрообъекта может быть

разложено по любой системе базисных состояний:

$$|f\rangle = \sum_i |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i | f \rangle;$$

$$|f\rangle = \sum_i |\beta_i\rangle \langle \beta_i | f \rangle;$$

$$|f\rangle = \sum_i |\gamma_i\rangle \langle \gamma_i | f \rangle \text{ и т. д.} \quad (5.2.6)$$

**Прохождение фотонов через поляризаторы.** Используя принцип суперпозиции состояний, рассмотрим прохождение фотонов через систему из трех поляризаторов, изображенную на рис. 4.7. Обозначим через  $|s\rangle$  состояние поляризации фотона после первого поляризатора. Это состояние можно рассматривать как суперпозицию базисных состояний  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ , отвечающих двум независимым поляризациям фотона — соответственно вдоль и поперек оси второго поляризатора:

$$|s\rangle = |1\rangle \langle 1 | s \rangle + |2\rangle \langle 2 | s \rangle$$

или, что то же самое,

$$|s\rangle = |1\rangle \cos \alpha + |2\rangle \sin \alpha \quad (5.2.7)$$

(заметим, что в данном примере система базисных состояний включает всего два состояния). Второй поляризатор пропускает фотоны только в состоянии  $|1\rangle$ . Так как, согласно (5.2.7), состояние  $|1\rangle$  «представлено» в состоянии  $|s\rangle$  с вероятностью  $\cos^2 \alpha$ , то поэтому из  $N$  фотонов через второй поляризатор пройдут  $N \cos^2 \alpha$  фотонов, причем все прошедшие фотоны окажутся в состоянии  $|1\rangle$  (т. е. будут поляризованы вдоль оси второго поляризатора). Итак, перед вторым поляризатором фотон находился как бы частично в состоянии  $|1\rangle$ , а частично в состоянии  $|2\rangle$  (напоминаем, что эту фразу нельзя представлять наглядно и не надо придавать буквального смысла слову «частично»). При взаимодействии фотона с поляризатором происходит реализация фотона либо в состоянии  $|1\rangle$ , и тогда он проходит через поляризатор, либо в состоянии  $|2\rangle$ , и тогда он не проходит. Для конкретного фотона нельзя предсказать, какое именно состояние будет реализовано, поэтому нельзя предсказать, пройдет или не пройдет через поляризатор данный фотон.

Рассматривая прохождение фотонов через третий поляризатор, рассуждаем аналогичным образом. Состояние  $|1\rangle$  раскладывается по системе базисных состояний  $|1'\rangle$  и



$|2'\rangle$ , отвечающих поляризации фотона вдоль и поперек оси третьего поляризатора:

$$|1\rangle = |1'\rangle \sin \alpha + |2'\rangle \cos \alpha. \quad (5.2.8)$$

Третий поляризатор пропускает фотоны только в состоянии  $|1'\rangle$ . Это состояние «представлено» в состоянии  $|1\rangle$  с вероятностью  $\sin^2 \alpha$ . Поэтому из  $N \cos^2 \alpha$  фотонов через третий поляризатор пройдут  $N \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$  фотонов, причем все прошедшие фотоны окажутся в состоянии  $|1'\rangle$ .

Если теперь убрать второй поляризатор, то вместо (5.2.7) и (5.2.8) будем иметь

$$|s\rangle = |1'\rangle \langle 1'|s\rangle + |2'\rangle \langle 2'|s\rangle, \quad (5.2.9)$$

где, как нетрудно сообразить,  $\langle 1'|s\rangle = 0$  и  $\langle 2'|s\rangle = 1$ , так что  $|s\rangle = |2'\rangle$ . Естественно, что в этом случае на выходе системы поляризаторов фотоны вообще не наблюдаются.

**Принцип суперпозиции состояний и интерференция амплитуд вероятностей переходов.** Пусть переход из состояния  $|s\rangle$  в состояние  $|f\rangle$  происходит через некоторые промежуточные  $v$ -состояния. Предположим, что микробъект в промежуточном состоянии не обнаруживается, так что альтернативы физически неразличимы. В этом случае амплитуда вероятности перехода  $\langle f|s\rangle$  описывается соотношением (см. (5.1.6))

$$\langle f|s\rangle = \sum_i \langle f|v_i\rangle \langle v_i|s\rangle, \quad (5.2.10)$$

где  $\langle f|v_i\rangle$  и  $\langle v_i|s\rangle$  — амплитуды соответствующих переходов. Промежуточные  $v$ -состояния должны быть полностью различимыми, поскольку в противном случае нет смысла вводить понятия различных или неразличимых альтернатив, так как фактически теряет смысл само понятие альтернативы. Следовательно,  $v$ -состояния должны образовывать систему взаимно ортогональных базисных состояний. Учитывая это, воспользуемся принципом суперпозиции состояний и представим состояние  $|s\rangle$  в виде

$$|s\rangle = \sum_i |v_i\rangle \langle v_i|s\rangle', \quad (5.2.11)$$

где амплитуды  $\langle v_i|s\rangle'$  суть амплитуды состояний (штрих предназначен для того, чтобы пока отличать амплитуду состояния от амплитуды перехода  $\langle v_i|s\rangle$ ). При наличии суперпозиции (5.2.11) уже нет фактически необходимости совершать переход из  $|s\rangle$  в  $|f\rangle$ . Так как состояние  $|s\rangle$  есть суперпозиция состояний  $|v_i\rangle$ , то достаточно учесть переходы из каждого состояния  $|v_i\rangle$  в состояние  $|f\rangle$ . Это означает, что амплитуда перехода  $\langle f|s\rangle$  есть суперпозиция амплитуд переходов  $\langle f|v_i\rangle$ :

$$\langle f|s\rangle = \sum_i \langle f|v_i\rangle \langle v_i|s\rangle'. \quad (5.2.12)$$

Сравнивая (5.2.12) с (5.2.10), заключаем, что

$$\langle v_i | s' \rangle = \langle v_i | s \rangle. \quad (5.2.13)$$

Это означает, что на уровне математического аппарата мы уже осуществили сведение амплитуд состояний к амплитудам переходов. Иными словами, в аппарате квантовой физики амплитуды состояний играют фактически ту же роль, что и амплитуды переходов. Попутно мы убеждаемся, что соотношения (5.2.10) и (5.2.11) органически связаны друг с другом. Следовательно, органически взаимосвязаны интерференция амплитуд переходов и принцип суперпозиции состояний.

### § 5.3. Измерительный процесс в квантовой физике

**О возникновении суперпозиции состояний и о смысле амплитуд состояний.** Пусть микрообъект находится в состоянии  $|\alpha\rangle$ . Согласно принципу суперпозиции состояний, состояние  $|\alpha\rangle$  можно разложить по любой системе базисных состояний, например по  $|\beta_i\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = \sum_i |\beta_i\rangle \langle \beta_i | \alpha \rangle. \quad (5.3.1)$$

Входящие в (5.3.1) величины  $\langle \beta_i | \alpha \rangle$  — амплитуды состояний  $|\beta_i\rangle$ , или, точнее, амплитуды вероятностей, с какими в состоянии  $|\alpha\rangle$  представлены различные базисные состояния  $|\beta_i\rangle$ .

Все это уже известно читателю из предыдущего параграфа. Теперь уместно внести некоторые уточнения.

Прежде всего отметим, что та или иная суперпозиция состояний микрообъекта возникает при его взаимодействии с внешней средой, например некоторым макротелом (искусственного происхождения или представляющим часть естественных внешних условий); это макротело называют *анализатором*. Соотношение (5.3.1) надо понимать так: в результате взаимодействия с определенным анализатором (в данном случае говорят о  $\beta$ -анализаторе) микрообъект, находившийся в состоянии  $|\alpha\rangle$ , переходит в суперпозиционное состояние

$$\sum_i |\beta_i\rangle \langle \beta_i | \alpha \rangle.$$

Принимая во внимание квантовую специфику этого состояния, можно сказать, что, взаимодействуя с  $\beta$ -анализатором, микрообъект в каком-то смысле переходит сразу во все состояния  $|\beta_i\rangle$ . При этом амплитуду  $\langle \beta_i | \alpha \rangle$  надо рассматривать как амплитуду обусловленного указанным взаимо-

---

действием перехода  $|\alpha\rangle \rightarrow |\beta_i\rangle$ . Величина  $|\langle\beta_i|\alpha\rangle|^2$  есть вероятность обнаружить микробъект в конечном счете именно в состоянии  $|\beta_i\rangle$ .

Предвидим появление у читателя по крайней мере двух вопросов.

*Вопрос первый.* Что же все-таки означает фраза «микробъект переходит сразу во все состояния  $|\beta_i\rangle$ »? Мы попробуем ответить на этот вопрос позднее, в пункте «Потенциальные возможности и их реализация в процессе измерения». Пока же заметим, что хотя при взаимодействии с анализатором микробъект переходит сразу во все базисные состояния, однако обнаружить его принципиально возможно всякий раз лишь в каком-то одном из этих состояний. Напомним в связи с этим эксперимент по выявлению того, как микробъект проходит через экран с щелями.

*Вопрос второй.* Коль скоро амплитуда состояния есть в действительности амплитуда перехода, то как быть с определением амплитуды состояния, приведенным в предыдущем параграфе? Напомним это определение: « $\langle\beta|\alpha\rangle$  есть амплитуда вероятности того, что микробъект, находящийся в состоянии  $|\alpha\rangle$ , может быть обнаружен также в состоянии  $|\beta\rangle$ ». В этом определении следует заменить слово «находящийся» словом «находившийся», так как после взаимодействия с анализатором микробъект уже не находится в состоянии  $|\alpha\rangle$ ; при этом становится лишним слово «также». Теперь определение выглядит так: « $\langle\beta|\alpha\rangle$  есть амплитуда вероятности того, что микробъект, находившийся в состоянии  $|\alpha\rangle$ , может быть обнаружен в состоянии  $|\beta\rangle$ ». Обнаружение есть измерительный процесс, и величина  $\langle\beta|\alpha\rangle$  играет роль амплитуды вероятности перехода  $|\alpha\rangle \rightarrow |\beta\rangle$ , совершающегося в этом процессе.

**Сущность измерительного процесса.** Измерительный процесс в квантовой физике состоит из трех последовательных этапов.

1. *Подготовительный этап.* Микробъекты «приготавливают» в некотором состоянии  $|s\rangle$ . Это состояние далее рассматривается как начальное.

2. *Рабочий этап.* Происходит взаимодействие «приготовленного» микробъекта с анализатором, переводящим микробъект в суперпозиционное состояние. Например, экран с двумя щелями, действуя как анализатор, создает суперпозицию состояний  $|A\rangle\langle A|s\rangle + |B\rangle\langle B|s\rangle$ . Создавая суперпозицию состояний, анализатор фактически обеспечивает возникновение неразличимых альтернатив, причем число

альтернатив равно числу базисных состояний в данной суперпозиции.

3. *Регистрирующий этап.* Происходит обнаружение микрообъекта в том или ином из базисных состояний, образующих суперпозицию. На этом этапе микрообъект взаимодействует с неким макротелом, способным изменить свое состояние под воздействием микрообъекта; такое макротело называют *детектором*.

Если для простоты не рассматривать подготовительный этап, то абстрактная «схема» измерительного процесса может быть представлена условно в следующем виде:

$$|s\rangle \xrightarrow{1} \sum_i |\beta_i\rangle \langle \beta_i | s \rangle \xrightarrow{2} |\beta_j\rangle. \quad (5.3.2)$$

Стрелка 1 отвечает рабочему этапу, стрелка 2 — регистрирующему.

Основными элементами измерительного устройства являются, таким образом, анализатор и детектор. Роль анализатора мы уже выяснили. Остановимся на роли детектора. Образно говоря, его роль сводится к тому, чтобы подглядеть, как именно ведет себя микрообъект в той суперпозиции состояний, какую создал анализатор. Например, через какую именно щель прошел конкретный электрон? Детектор обнаруживает микрообъект всякий раз в каком-то одном из состояний, составляющих суперпозицию; это совершается ценой разрушения суперпозиции. Учитывая сделанные ранее замечания, заключаем, что детектор превращает неразличимые альтернативы в различимые и тем самым разрушает интерференцию амплитуд переходов.

Выделим их «схемы» (5.3.2) регистрирующий этап, на котором микрообъект взаимодействует с детектором:

$$\sum_i |\beta_i\rangle \langle \beta_i | s \rangle \rightarrow |\beta_j\rangle. \quad (5.3.3)$$

Часто говорят, что (5.3.3) описывает «стягивание» суперпозиции  $\sum_i |\beta_i\rangle \langle \beta_i | s \rangle$  к состоянию  $|\beta_j\rangle$ . Этот процесс известен также как «редукция волнового пакета».

Итак, если анализатор создает определенную суперпозицию состояний, то детектор ее разрушает, «стягивая» к одному из состояний. Какую информацию получает при этом наблюдатель? Очевидно, что если «схема» (5.3.2) испытана на одном микрообъекте, то о получении какой-либо полезной информации говорить трудно. Надо повторить измерительный акт для достаточно большого числа микрообъектов. В этом случае наблюдатель может выяснить, во-

---

первых, какие значения величин  $\beta$ -набора реализуются на практике, и, во-вторых, как часто микрообъект обнаруживается в том или ином  $\beta$ -состоянии. Это позволяет экспериментально определить, во-первых, спектр значений величин  $\beta$ -набора и, во-вторых, вероятности  $|\langle \beta_i | s \rangle|^2$ .

**Особенности квантового измерительного процесса.** Прежде всего процесс измерения радикально воздействует на микрообъект. Как известно, при выполнении измерений с макротелами можно в той или иной мере абстрагироваться от средств наблюдения. В квантовой физике этого сделать нельзя; нельзя пренебречь взаимодействием микрообъекта с окружающей его обстановкой.

«Схема» измерительного процесса, а конкретнее — та ее часть, которую описывает (5.3.3), демонстрирует наличие случайности в поведении микрообъекта. Действительно, нельзя точно предсказать, в каком  $\beta$ -состоянии будет обнаружен в конечном счете тот или иной микрообъект.

Специфической чертой квантового измерительного процесса является также невозможность наглядного представления ни первого этапа процесса (когда анализатор создает суперпозицию состояний), ни заключительного этапа (когда детектор упомянутую суперпозицию «стягивает» к одному состоянию). Так, нельзя считать, будто на первом этапе микрообъект в буквальном смысле «размазывается» по разным состояниям суперпозиции, например частично проходит через одну щель; а частично — через другую. Точно так же нельзя полагать, будто на заключительном этапе процесса измерения «размазанный» по разным состояниям микрообъект вдруг сразу «соберется целиком» в одном из этих состояний.

**Потенциальные возможности и их реализация в процессе измерения.** Возможное и действительное — известные категории диалектики. Существующее между ними противоречие разрешается всякий раз, когда потенциальная возможность тем или иным образом реализуется. Процесс реализации необратим — как только он свершился, исходная ситуация качественно изменяется. Одна из возможностей реализуется за счет того, что все остальные имевшиеся ранее возможности оказываются теперь исключенными. Реализовавшаяся возможность отвечает новой ситуации, обладающей, в свою очередь, новыми потенциальными возможностями.

В классической механике, как и во всех теориях динамического типа, проблема различия возможного и действ-

---

вительного не возникает, что связано с отсутствием в подобных теориях случайностей. Эта проблема возникает в теориях статистического типа. Отмечавшийся ранее принципиально статистический характер квантовой физики, где случайность проявляется в поведении уже отдельного объекта, предопределяет важность проблемы возможного и действительного при рассмотрении микрообъектов и микроявлений.

Именно с точки зрения разрешения противоречия между возможным и действительным и надо рассматривать процесс измерения в квантовой физике. Пребывание микрообъекта в суперпозиционном состоянии соответствует ситуации, когда микрообъект обладает определенным набором потенциальных возможностей. В результате взаимодействия микрообъекта с детектором как раз и происходит разрешение противоречия между возможным и действительным — суперпозиция потенциально возможных альтернатив, разрушаясь, заменяется одной реализовавшейся альтернативой. Акт этого разрешения носит характер необратимого и неконтролируемого скачка.

#### § 5.4. Волновая функция

*Волновая функция и амплитуда вероятности* — это одна и та же сущность. Представление об амплитуде вероятности более удобно при рассмотрении физики микрообъектов. Волновую функцию чаще используют, переходя к математическому аппарату квантовой теории.

**Волновая функция как амплитуда вероятности** состояния. Пусть  $|x\rangle$  — состояние микрообъекта, отвечающее локализация его в точке с координатой  $x$  (для простоты используется одномерная ситуация). Тогда  $\langle x|s\rangle$  может рассматриваться как амплитуда вероятности того, что микрообъект, находящийся в состоянии  $|s\rangle$ , имеет координату  $x$ . Сделаем уточнение, состоящее в том, что надо учитывать непрерывность изменения пространственной координаты. Поэтому вместо вероятности найти микрообъект точно в точке  $x$  надо рассматривать вероятность найти его в интервале от  $x$  до  $x+dx$ . Эта вероятность может быть представлена в виде

$$dw_s(x) = |\langle x|s\rangle|^2 dx. \quad (5.4.1)$$

Следовательно,  $\langle x|s\rangle$  есть, строго говоря, не амплитуда вероятности, а амплитуда *плотности* вероятности.

---

Величину  $\langle x|s\rangle$  часто называют *волновой функцией* и обозначают, например, как  $\psi_s(x)$ . Итак,

$$\psi_s(x) = \langle x|s\rangle. \quad (5.4.2)$$

С учетом (5.4.2) перепишем (5.4.1) в виде

$$dw_s(x) = |\psi_s(x)|^2 dx. \quad (5.4.3)$$

Из (5.4.3) видно, что  $|\psi_s(x)|^2$  есть плотность вероятности обнаружить в точке  $x$  микрообъект, который находится в состоянии  $|s\rangle$ .

С математической точки зрения волновая функция  $\psi_s(x)$  есть параметрическая функция. Роль параметра играют значения тех величин, которые точно определены в состоянии  $|s\rangle$ . Учитывая сделанные ранее замечания о структуре амплитуд состояний, можем сказать, что аргументом волновой функции служат величины одного полного набора, а ее параметром — величины другого набора. Принято говорить, что  $\psi_s(x)$  есть собственная функция величин  $s$ -набора, заданная в *представлении*, определяемом величинами  $x$ -набора (или проще: в  $x$ -представлении).

**Обобщение понятия волновой функции.** На практике часто используют волновые функции именно в  $x$ -представлении (в координатном представлении). Однако возможны и другие представления. В связи с этим обобщим понятие волновой функции:

$$\psi_\alpha(\beta) = \langle \beta|\alpha\rangle. \quad (5.4.4)$$

Функция  $\psi_\alpha(\beta)$  есть собственная функция величин  $\alpha$ -набора, заданная в  $\beta$ -представлении. Если величины  $\beta$ -набора изменяются дискретно, то  $\psi_\alpha(\beta)$  есть амплитуда вероятности того, что состояние  $|\beta\rangle$  представлено в состоянии  $|\alpha\rangle$ . В случае непрерывно изменяющихся величин  $\beta$ -набора  $\psi_\alpha(\beta)$  есть амплитуда плотности указанной вероятности.

Задание волновой функции  $\psi_\alpha(\beta)$  означает точное задание величин  $\alpha$ -набора и вероятностное задание величин  $\beta$ -набора. Соответственно задание функции  $\varphi_\alpha(\gamma)$  означает точное задание величин  $\alpha$ -набора и вероятностное задание величин  $\gamma$ -набора. Говорят, что функция  $\psi_\alpha(\beta)$  описывает состояние  $|\alpha\rangle$  в  $\beta$ -представлении, а функция  $\varphi_\alpha(\gamma)$  описывает то же состояние, но в  $\gamma$ -представлении. Естественно, что между указанными функциями существует связь. Ее как раз и

выражает принцип суперпозиции состояний:

$$\Psi_{\alpha}(\beta) = \sum_i \varphi_{\alpha}(\gamma_i) \chi_{\gamma_i}(\beta) \quad (5.4.5)$$

(предполагаем, что  $\gamma$ -величины изменяются дискретно). Легко видеть, что (5.4.5) выражает суперпозицию амплитуд состояний:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \sum_i \langle \beta | \gamma_i \rangle \langle \gamma_i | \alpha \rangle. \quad (5.4.6)$$

Если бы  $\gamma$ -величины изменялись непрерывно, то вместо (5.4.5) следовало бы писать

$$\Psi_{\alpha}(\beta) = \int \varphi_{\alpha}(\gamma) \chi_{\gamma}(\beta) d\gamma. \quad (5.4.7)$$

Рассмотрим собственную функцию величин некоторого набора в представлении, определяемом величинами того же самого набора. Если величины изменяются дискретно, то, согласно (5.2.5),

$$\Psi_{\alpha_i}(\alpha_j) = \delta_{ij}. \quad (5.4.8)$$

Если же величины изменяются непрерывно, то вместо (5.4.8) будем иметь

$$\Psi_{\alpha'}(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha'). \quad (5.4.9)$$

Здесь  $\delta(\alpha - \alpha')$  — так называемая *дельта-функция Дирака*, представляющая собой обобщение символа Кронекера на непрерывно изменяющиеся величины.

**Дельта-функция Дирака.** Эта функция определяется следующим образом:

$$\delta(\alpha - \alpha') = 0 \text{ при } \alpha \neq \alpha'; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - \alpha') d\alpha = 1. \quad (5.4.10)$$

График функции  $\delta(\alpha - \alpha')$  нарисовать, строго говоря, нельзя: пришлось бы изображать бесконечно узкий и бесконечно высокий пик, «площадь» под которым конечна и равна единице. Одно из важнейших свойств дельта-функции, легко выводимое из (5.4.10), описывается соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \delta(\alpha - \alpha') d\alpha = f(\alpha'), \quad (5.4.11)$$



где  $f(\alpha)$  — любая ограниченная функция, непрерывная в точке  $\alpha = \alpha'$ .

Полезно знать интегральное представление дельта-функции:

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\beta} d\beta. \quad (5.4.12)$$

Чтобы получить (5.4.12), рассмотрим функцию  $\sin(g\alpha)/\pi\alpha$  (рис. 5.2). Независимо от величины параметра  $g$  справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(g\alpha)}{\pi\alpha} d\alpha = 1.$$

Будем увеличивать  $g$ . При этом точки  $A$  на рисунке будут приближаться к  $\alpha = 0$ , а точка  $B$  будет подниматься по оси ординат. В пре-

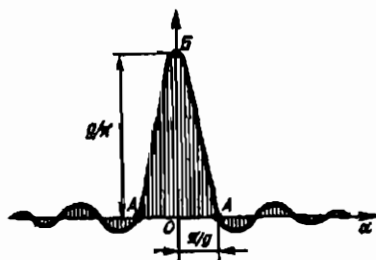


Рис. 5.2

деле при  $g \rightarrow \infty$  получим бесконечно узкий и бесконечно высокий пик, интеграл от которого равен единице. Это и есть дельта-функция. Итак,

$$\delta(\alpha) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(g\alpha)}{\pi\alpha}.$$

Отсюда легко прийти к (5.4.12), если учесть, что

$$\frac{\sin(g\alpha)}{\pi\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-g}^g e^{i\alpha\beta} d\beta.$$

**Ортонормировка волновых функций.** Можно показать (мы этого делать не будем), что

$$\langle f | s \rangle = \langle s | f \rangle^*, \quad (5.4.13)$$

откуда, в частности, следует принцип микроскопической обратимости:

$$|\langle f | s \rangle|^2 = |\langle s | f \rangle|^2. \quad (5.4.14)$$

В соответствии с (5.4.13) представим

$$\Phi_{\beta}(\alpha) = \psi_{\alpha}^*(\beta). \quad (5.4.15)$$

Полагая  $\alpha$ -величины дискретными, а  $\beta$ -величины непрерывно меняющимися, перепишем (5.4.7) в виде

$$\Psi_{\alpha_i}(\alpha_j) = \int \psi_{\alpha_i}(\beta) \Phi_{\beta}(\alpha_j) d\beta. \quad (5.4.16)$$

С учетом (5.4.15) получаем отсюда

$$\Psi_{\alpha_i}(\alpha_j) = \int \psi_{\alpha_i}(\beta) \psi_{\alpha_j}^*(\beta) d\beta.$$

Воспользовавшись соотношением (5.4.8), приходим к условию ортонормировки волновых функций  $\psi_{\alpha_i}(\beta)$ :

$$\int \psi_{\alpha_i}(\beta) \psi_{\alpha_j}^*(\beta) d\beta = \delta_{ij}. \quad (5.4.17)$$

Если  $\alpha$ -величины изменяются непрерывно, то вместо (5.4.8) надо использовать (5.4.9). В этом случае условие ортонормировки волновых функций принимает вид

$$\int \psi_{\alpha}(\beta) \psi_{\alpha'}^*(\beta) d\beta = \delta(\alpha - \alpha'). \quad (5.4.18)$$

## БЕСЕДА

### ФОТОН В ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ (О ВОЛНАХ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ)

**ОППОНЕНТ.** Я понимаю, что обсуждение квантовых представлений очень полезно, поскольку квантовая оптика органически связана с квантовой физикой. И все-таки не слишком ли мы отвлеклись от темы? Не слишком ли затянулся экскурс в область квантовой физики?

**АВТОР.** Идеи, обсуждавшиеся в двух последних главах, важны как для понимания физики фотонов, так и для рассмотрения теоретических основ квантовой оптики, которой посвящена последняя часть книги. Но дело не только в этом. Прделанный экскурс в квантовую физику показал, что интерференционные явления, всегда, казалось бы, связанные с волнами, могут рассматриваться с «корпускулярных позиций». Такой подход к интерференции и дифракции основан на вероятностных представлениях и предполагает использование особых правил работы с вероятностями, а именно сложение амплитуд вероятностей.

**ОППОНЕНТ.** Общеизвестно, что фотонное описание света необходимо при рассмотрении взаимодействия света с веществом. Что же касается распространения световых пучков в пространстве, их интер-

ференции и дифракции, то тут применяют язык световых волн. В одних условиях свет обнаруживает корпускулярные свойства, а в других — волновые. В этом, кстати говоря, и проявляется корпускулярно-волновой дуализм.

**АВТОР.** Такая точка зрения действительно очень распространена. Однако она не вполне корректна. Во-первых, не надо обращаться к дуализму, сопоставляя фотоны и световые волны; он не имеет отношения к световым волнам. Это есть дуализм свойств отдельного фотона, равно как и любого другого микрообъекта. Во-вторых, фотонное описание света, по сути дела, не является дополнительным к волновому. Оно диалектически включает в себя как корпускулярные, так и волновые представления. На языке фотонов можно описать не только процессы взаимодействия света с веществом, но и интерференционные явления. Определенная тонкость состоит в том, что если при описании взаимодействия света с веществом фотонный язык подчас оказывается единственным, то при описании интерференционных явлений наряду с фотонным языком можно пользоваться языком световых волн, который,

кстати, выгодно отличается своей наглядностью. Предпринятый в двух последних главах разговор о физике микрообъектов должен был показать, что фотонные представления не исключают, а, напротив, включают в себя интерференцию и дифракцию света. Центральным моментом в этом разговоре можно считать вопрос о поведении в интерферометре отдельного фотона. Очень важно понимать, что поведение фотона в интерферометре нельзя описать наглядно, используя классические образы корпускул или волн.

**ОППОНЕНТ.** Специфичность поведения микрообъекта, в частности фотона в интерферометре, я вполне осознал. При неразличимости альтернатив, отвечающих прохождению фотона через ту или иную щель интерферометра, возникает квантовая суперпозиция, предполагающая прохождение фотона как бы сразу через обе щели. Наглядно это представить нельзя; математически это отвечает сложению амплитуд вероятностей прохождения через каждую из щелей. Эта квантовая суперпозиция и приводит к интерференционному распределению попаданий фотонов на экран-детекторе. Если условия опыта изменить так, чтобы можно было различить прохождение фотона через ту или иную щель, то квантовая суперпозиция разрушается и соответ-

ственно исчезает интерференционное распределение попаданий фотонов на экране-детекторе.

**АВТОР.** Эта специфика поведения фотонов (и других микрообъектов) принципиально важна. Чтобы познакомить с ней, и был предпринят соответствующий экскурс в область квантовой физики.

**ОППОНЕНТ.** И все же наглядная классическая суперпозиция более понятно объясняет интерференцию, нежели суперпозиция амплитуд вероятностей.

**АВТОР.** Интерференцию классическая суперпозиция объясняет. Но как быть с результатами опыта по «подглядыванию» за поведением микрообъекта в интерферометре? При этом происходит разрушение интерференции. Классическая суперпозиция этого разрушения объяснить не может.

**ОППОНЕНТ.** Неужели невозможно наглядное объяснение указанного явления?

**АВТОР.** Многочисленные попытки найти такое объяснение ни к чему не привели. Проблема «редукции волнового пакета» убедительно показала, что подобное объяснение невозможно принципиально. Надо признать, что классическая наглядная интерпретация микрообъекта исключена; соответственно исключена и классическая интерпретация интерференции, наблю-

даемой в опытах с микрообъектами. С волновыми характеристиками микрообъекта нельзя сопоставлять характеристики реальной волны. В частности, понятие «дебройлевская волна» не связано с какой-либо реальной волной.

ОППОНЕНТ. И дифракция электронов не связана с реальными волнами?

АВТОР. Нет, не связана.

ОППОНЕНТ. Я прихожу к мысли, что с волновыми представлениями следует обращаться осторожно. Как видно, волны бывают слишком разные.

АВТОР. К сожалению, об этом иногда забывают. В представлениях о природе света когда-то господствовала точка зрения, согласно которой свет рассматривался как поток мелких корпускул. Потом победу одержала волновая концепция, причем сначала это были волны в некоей упругой среде, а затем уже электромагнитные волны. В течение столетия волновая концепция безраздельно господствовала в оптике. И вот в начале XX столетия оптикам пришлось снова обратиться к корпускулярной концепции. При этом волновые представления отнюдь не утратили своего значения; они органически вписались в новую физическую картину. Конечно, картина усложнилась. Не обошлось без некоторых «перегибов», проявившихся в том, что термин «волновой» стал слишком часто исполь-

зоваться при рассмотрении микроявлений (отчасти это объясняют слова де Бройля, вынесенные в эпиграф беседы). Все привыкли, что интерференция — типично волновое явление. Поэтому неудивительно, что, когда в опытах с электронами была обнаружена интерференционная картина, все решили, что существуют «электронные волны». А между тем интерференция электронов имеет, как мы теперь знаем, более «тонкое» происхождение: она связана с тем, что вероятностные законы природы не следуют, вообще говоря, правилу сложения вероятностей, но требуют в определенных условиях сложения амплитуд вероятностей.

ОППОНЕНТ. Ранее вы подчеркнули, что волновые характеристики микрообъекта нельзя отождествлять с характеристиками реальных волн. Однако существуют же классические световые волны.

АВТОР. Здесь мы имеем качественно иную ситуацию. Являясь бозонами, фотоны проявляют тенденцию к накоплению в одном и том же состоянии. Возьмем конкретное *ка-* состояние. Пусть в нем находится всего один фотон. Пока никакой классической волны нет. Теперь предположим, что это состояние все полнее заселяется фотонами. При достаточно большом числе фотонов в рассматриваемом состоянии мы и придем к классической

световой волне, причем характеристики волны будут совпадать с характеристиками фотонного состояния. Теперь уже можно говорить о характеристиках волны: ее волновом векторе  $\vec{k}$ , частоте  $\omega$ , поляризации  $\alpha$ . Произошло своеобразное превращение волновых характеристик фотона в характеристики волны. Следует подчеркнуть, что это есть результат накопления фотонов в одном состоянии. Классическая волна возникла как коллективный эффект. В случае же электронов, как и любых других фермионов, подобный коллективный эффект принципиально невозможен, коль скоро фермионы могут заселять состояния только поодиночке. Классические электронные (и

вообще фермионные) волны не существуют в принципе.

**ОППОНЕНТ.** Получается, что классическая суперпозиция может иметь место только в коллективах бозонов?

**АВТОР.** Именно так. Недаром же интерференцию света наблюдали задолго до того, как была открыта интерференция электронов.

**ОППОНЕНТ.** Из всего этого следует, что в природе есть два явления интерференции: классическая, обусловленная сложением волн, и квантовая, обусловленная сложением амплитуд вероятностей.

**АВТОР.** В обычных условиях классическая интерференция (если речь идет о коллективе бозонов) как бы маскирует квантовую интерференцию. Но

*В оптике в течение столетия слишком пренебрегали корпускулярным способом рассмотрения по сравнению с волновым. Не делалась ли в теории вещества обратная ошибка? Не думали ли мы слишком много о картине «частиц» и не пренебрегали ли чрезмерно картиной волн?*

Луи де Бройль

в случае электронов такой маскировки нет.

**ОППОНЕНТ.** Если разговор о волнах в квантовой физике оправдан лишь в отношении бозонных коллективов, то не целесообразно было бы немного поубавить волновой терминологии?

**АВТОР.** Важна в конечном счете не терминология, а понимание того, что именно скрывается за тем или иным термином. Если есть выбор, то, конечно, имеет смысл пользоваться более удачным термином. Именно поэтому мы пользовались термином «амплитуда вероятности», рассматривая физику микрообъектов, и лишь в последний момент ввели более привычный термин «волновая функция». Первый термин с физической точки зрения более удачен, одна-

ко второй, надо признать, употребляется чаще.

В заключение еще раз подчеркнем, что важно, не какие термины применяются, а как они применяются. Допустимо применять к микрообъекту термин «волна»; однако не надо придавать такой «волне» буквальный смысл. Напомним в связи с этим сделанные ранее замечания о неправомерности представления связанного электрона в виде классической волны в некоем резонаторе.

В общем, как сказал Гете,

Нет подходящих соответствий,  
И нет достаточных имен.  
Все дело в сути, а название  
Лишь дым, которым блеск  
сиянья  
Без надобности затемнен.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. Принципиальные вопросы квантовой механики.— М.: Наука 1966.— 160 с.
2. Бор Н. Избранные труды.— М.: Наука, 1971. Т. 2.— 676 с.
3. Гельфер Я. М., Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И. Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике.— М.: Наука, 1975.— 272 с.
4. Дирак П. Принципы квантовой механики / Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1960.— 435 с.
5. Мякишев Г. Я. Динамиче-

- ские и статистические закономерности в физике.— М.: Наука, 1973.— 272 с.
6. Тарасов Л. В. Основы квантовой механики.— М.: Высшая школа, 1978.— 282 с.
7. Тарасов Л. В. Мир, построенный на вероятности.— М.: Просвещение, 1984.— 192 с.
8. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике / Пер. с англ.— М.: УРСС. 2004. Т.8.9.— 528 с.
9. Фок В. А. Начала квантовой механики.— М.: Издательство ЛКИ/URSS. 2007.— 376с.

## ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

### КВАНТОВО- ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

#### ГЛАВА 6 КВАЗИЧАСТИЦЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ И ФОТОНЫ

- § 6.1. Тепловые колебания кристаллической решетки. Фононы 129
- § 6.2. Электроны проводимости и дырки 139
- § 6.3. Твердое тело как газ квазичастиц 146
- § 6.4. Фотоны и квазичастицы 149

#### ГЛАВА 7 ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

- § 7.1. Общие замечания 155
- § 7.2. Внешний фотоэффект 159
- § 7.3. Внутренний фотоэффект (фотопроводимость) 173
- § 7.4. Внутренний фотоэффект 179

#### ГЛАВА 8 ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ

- § 8.1. Виды и физические механизмы люминесценции 182
- § 8.2. Основные характеристики люминесценции 191
- § 8.3. Применения люминесценции 197
- § 8.4. От резонансной флуоресценции к эффекту Мёссбауэра 202

#### ГЛАВА 9 НЕЛИНЕЙНО- ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ И МНОГОФОТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

- § 9.1. Нелинейная оптика: ее сущность и первые шаги 211
- § 9.2. Фотонная структура процессов взаимодействия света с веществом 219
- § 9.3. Явления, основанные на многофотонном поглощении 227
- § 9.4. Преобразование частоты света в нелинейных кристаллах 231



---

---

Квантовая теория света объяснила так много фактов, что она должна  
содержать значительную долю истины.

А. Эйнштейн

С того времени, когда были открыты квантовые свойства света,  
вопрос о линейности оптики сделался спорным.

С. И. Вавилов

---

---

*Используя фотонные представления, рассмотрим в данной части книги три группы явлений взаимодействия света с веществом: фотоэлектрические, люминесцентные, нелинейно-оптические. Для объяснения физики этих явлений фотонные представления оказываются принципиально важными, поэтому указанные явления часто объединяют термином «квантово-оптические».*

## ГЛАВА 6

### КВАЗИЧАСТИЦЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ И ФОТОНЫ

Во многих случаях можно рассматривать взаимодействие фотонов с атомами и молекулами вещества, как если бы последние были свободны или по крайней мере изолированы. Однако в тех случаях, когда квантово-оптические явления происходят в *твердых телах*, необходимо принимать во внимание электронные и другие коллективные движения в кристалле. Этим коллективным движениям сопоставляют своеобразные «кванты», называемые *квазичастицами* или *элементарными возбуждениями*. Кристалл уподобляют газу таких квазичастиц. Квантово-оптические явления в твердых телах рассматривают, исходя из взаимодействия фотонов с указанными квазичастицами.

#### § 6.1. Тепловые колебания кристаллической решетки. Фононы

Кристаллическая решетка; зоны Бриллюэна. В основе представления о кристаллической решетке лежит понятие *решетки Бравэ*, образуемой пересечением трех семейств параллельных и равноотстоящих плоскостей. Точки пересечения называют *узлами* решетки; они определяются векторами  $\vec{n}$ :

$$\vec{n}_{m_1, m_2, m_3} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3, \quad (6.1.1)$$

где  $m_i$  — целые числа, а векторы  $\vec{a}_i$  образуют *элементарную ячейку*. Задание ячейки однозначно определяет решетку. Обратное, однако, неверно — данной решетке соответствует сколь угодно много различных ячеек. Как следует из приведенного выше определения решетки Бравэ, ее ячейку можно выбрать так, чтобы на нее приходился один узел.

Решетка Бравэ воспроизводится последовательными трансляциями узла вдоль векторов  $\vec{a}_i$ . Заметим, что на практике элементарную ячейку обычно выбирают таким образом, чтобы она отражала симметрию, которой обладает данная решетка. Такая ячейка может иметь более одного узла.

Решетка общего типа может быть представлена в виде двух (или более) одинаковых решеток Бравэ, которые вставлены друг в друга и подобно ориентированы. На рис. 6.1 показана двумерная решетка, образованная двумя квадратными решетками Бравэ, взаимное расположение которых

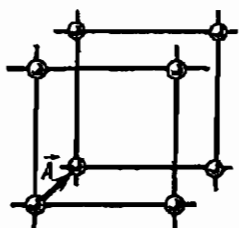


Рис. 6.1

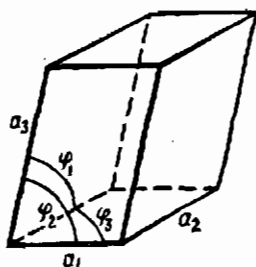


Рис. 6.2

определяется вектором  $\vec{A}$ . Вектор  $\vec{A}$  называют *базисным вектором*, а решетки общего типа — *решетками с базисом*. Такие решетки возникают не только при соответствующей геометрии, но и при наличии атомов разного типа, образующих собственные подрешетки. Решетку с базисом можно воспроизвести посредством тех же трансляций, что и каждую из составляющих ее решеток Бравэ; при этом надо транслировать не один узел, как в случае решетки Бравэ, а несколько узлов — базис, задаваемый совокупностью базисных векторов. Решетка Бравэ, лежащая в основе данной решетки с базисом, определяет трансляционную симметрию этой решетки.

Существует 14 типов решеток Бравэ. Они распределяются по семи кристаллографическим системам. Пусть  $a_1, a_2, a_3$  — длины ребер элементарной ячейки, а  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — углы между ребрами (рис. 6.2). Перечислим системы в порядке возрастания степени симметрии: триклинная ( $a_1 \neq a_2 \neq a_3; \varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3$ ); моноклинная ( $a_1 \neq a_2 \neq a_3; \varphi_1 \neq \varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$ ); ромбическая ( $a_1 \neq a_2 \neq a_3; \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$ ); тригональная ( $a_1 = a_2 = a_3; \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \neq \pi/2$ ); гексагональная ( $a_1 = a_2 \neq a_3; \varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2; \varphi_3 = 2\pi/3$ ); тетрагональная ( $a_1 = a_2 \neq a_3; \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$ ); кубическая ( $a_1 = a_2 = a_3; \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$ ). Тригональные, гексагональные и тетрагональные кристаллы называют в оптике *одноосными*. Они обладают осью симметрии относительно высокого порядка (ось имеет порядок  $n$ , если объект совмещается сам

с собой при повороте вокруг этой оси на угол  $2\pi/n$ ). Тригональные кристаллы имеют ось симметрии 3-го порядка, тетрагональные — 4-го порядка, гексагональные — 6-го порядка.

Введем понятие *обратной решетки*. Она связана только с трансляционной симметрией реальной решетки, но не с ее базисом (если таковой имеется). Пусть одноузловая ячейка решетки Бравэ задана векторами  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ . Обратная решетка определяется в пространстве волновых векторов; ее ячейка задается векторами  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ , которые выражаются через  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) / V_0; \quad \vec{b}_1 = \\ & (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) / V_0; \quad \vec{b}_2 = \\ & = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) / V_0. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

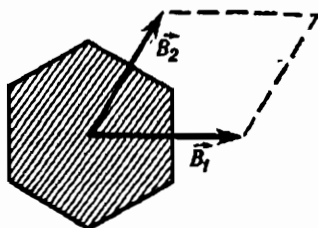


Рис. 6.3

Здесь  $V_0 = \vec{a}_1(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$  — объем ячейки реальной решетки. Произведение объемов ячеек обратной и реальной решеток равно единице.

Вектор узла обратной решетки  $\vec{\tau}$  определяет в реальной решетке семейство параллельных кристаллических плоскостей, перпендикулярных вектору  $\vec{\tau}$  и равноотстоящих друг от друга на расстоянии  $1/\tau$ . Направлению в обратной решетке отвечает плоскость в реальной решетке (и наоборот).

В пространстве волновых векторов (в пространстве обратной решетки) определяется так называемая *зона Бриллюэна*. Ее объем равен объему ячейки обратной решетки, умноженному на  $(2\pi)^3$ . Для построения зоны Бриллюэна удобно сначала умножить все линейные размеры обратной решетки на  $2\pi$ , т. е. перейти к векторам  $\vec{B}_i = 2\pi\vec{b}_i$ , а затем конструировать зону Бриллюэна как ячейку, которая по направлениям векторов  $\vec{B}_i$  имеет размеры  $B_i$  и в которой узел обратной решетки служит центром симметрии. Для пояснения приведен рис. 6.3, где для двумерного случая изображены ячейка обратной решетки и зона Бриллюэна (последняя заштрихована).

Переход от реальных тепловых колебаний решетки к нормальным колебаниям. Атомы кристаллической решетки совершают тепловые колебания относительно положений равновесия — узлов решетки. В идеальной решетке все атомы физически равноправны. В такой структуре взаимосвязанных атомов смещение любого из атомов распространяется по всему коллективу: по кристаллической решетке бежит волна — типичное коллективное движение. Совокупность коллективных движений может быть представлена в виде суперпозиции плоских монохроматических волн (так называемых *нормальных волн*) вида

$$\vec{e}_\alpha(\vec{q}) \exp[-i\Omega_\alpha(\vec{q})t + i\vec{q}\vec{n}].$$

Здесь  $\vec{q}$  — волновой вектор данной нормальной волны,  $\alpha$  — ее поляризация. Нормальная волна определяется заданием  $\vec{q}$  и  $\alpha$ . Величины  $\vec{e}$  и  $\Omega$  — соответственно вектор поляризации и частота. Вектор  $\vec{n}$  фиксирует узлы решетки. Каждой нормальной волне отвечает соответствующий *нормальный осциллятор* (в связи с этим напомним операцию разложения электромагнитного поля на осцилляторы; см. § 2.4).

Итак, представим реальные тепловые смещения  $\vec{\xi}_n$ -го атома решетки в виде суперпозиции нормальных колебаний:

$$\vec{\xi}_n = \sum_\alpha \sum_{\vec{q}} \vec{e}_\alpha(\vec{q}) \exp[-i\Omega_\alpha(\vec{q})t + i\vec{q}\vec{n}]. \quad (6.1.3)$$

Полное число нормальных колебаний равно  $3N$ , где  $N$  — число атомов в кристалле. Индекс  $\alpha$  принимает в случае решетки Бравэ три значения; следовательно, сумма по  $\vec{q}$  содержит  $N$  слагаемых.

Переход к нормальным колебаниям позволяет рассматривать в отношении динамики решетку из  $N$  взаимно связанных колеблющихся атомов как газ из  $3N$  невзаимодействующих гармонических осцилляторов. При этом вся информация о динамике решетки сосредоточивается в функциях  $\vec{e}_\alpha(\vec{q})$  и  $\Omega_\alpha(\vec{q})$ . Особо важную роль играет функция  $\Omega_\alpha(\vec{q})$ . Соотношение

$$\Omega = \Omega_\alpha(\vec{q}) \quad (6.1.4)$$

называют *дисперсионным соотношением* или *законом дисперсии*.

Заметим, что конечное число слагаемых в сумме по  $\vec{q}$  означает *дискретность* и *ограниченность*  $q$ -пространства. Его дискретность есть следствие того, что кристалл имеет конечный объем (налицо аналогия со световой волной в конечном объеме; см. § 2.4). Ограниченность  $q$ -пространства есть следствие дискретности обычного пространства, иначе говоря, дискретности вектора  $\vec{n}$ .

Последнее обстоятельство нуждается в разъяснении. Очевидно, что в решетке не может возникнуть волна, длина которой меньше удвоенного расстояния между соседними атомами;  $\lambda_{\min} = 2a$ . Поэтому  $q_{\max} = 2\pi/\lambda_{\min} = \pi/a$ . Обозначим через  $q_i$  составляющие вектора  $\vec{q}$ ; тогда для кубической решетки получим

$$-\pi/a \leq q_i \leq \pi/a. \quad (6.1.5)$$

Таким образом, волновые векторы ограничены областью  $q$ -пространства, «объем» которой равен  $(2\pi/a)^3$ , или, в общем случае,  $(2\pi)^3/V_0$ , где  $V_0$  — объем ячейки решетки. Эта область и есть зона Бриллюэна.

В согласии с (2.4.3)  $q$ -пространство разбивается на ячейки «объемом»  $\Delta_0 = (2\pi)^3/V$ , где  $V$  — объем кристалла. Поделив «объем» зоны Бриллюэна на  $\Delta_0$ , найдем число векторов  $\vec{q}$ :  $(2\pi)^3/V_0\Delta_0 = V/V_0 = N$ .

Часто рассматривают  $q$ -пространство, «составленное» из многих зон Бриллюэна, полагая при этом, что симметричные точки в двух зонах эквивалентны. Так как эти точки различаются вектором  $2\pi m\vec{\tau}$ , где  $\vec{\tau}$  — вектор обратной решетки,  $m$  — целое число, то отсюда следует, что векторы  $\vec{q}$  и  $\vec{q} + 2\pi m\vec{\tau}$  физически эквивалентны. Следовательно,

$$\vec{e}_\alpha(\vec{q}) = \vec{e}_\alpha(\vec{q} + 2\pi m\vec{\tau}); \quad \Omega_\alpha(\vec{q}) = \Omega_\alpha(\vec{q} + 2\pi m\vec{\tau}). \quad (6.1.6)$$

**Акустические и оптические нормальные колебания.** Перейдем от решетки Бравэ к решетке с  $\mu$  базисными векторами (элементарная ячейка решетки содержит  $\mu$  узлов). Полное число атомов  $N$ , число ячеек  $N_1$ ;  $N_1 = N/\mu$ . Рассматриваемая решетка состоит из  $\mu$  вложенных друг в друга геометрически одинаковых решеток Бравэ.

Теперь индекс поляризации  $\alpha$  принимает не 3, а  $3\mu$  значений; говорят о  $3\mu$  ветвях нормальных колебаний. При этом 3 ветви называются *акустическими*, а остальные  $3\mu - 3$  ветвей — *оптическими*. Наличие оптических вет-

вей — специфика решеток с базисом; в случае решеток Бравэ имеются только акустические ветви.

Рассмотрим  $q \rightarrow 0$ ; таким колебаниям отвечают волны бесконечной длины, возникающие при смещениях как целого подрешеток Бравэ. Акустические колебания связаны с одинаковым смещением всех  $\mu$  подрешеток, а значит, и всей решетки; их частота стремится к нулю. Оптические колебания связаны со смещением подрешеток друг относительно друга — их частота отлична от нуля.

На рис. 6.4 показан характерный вид кривых дисперсии. Приведен случай, когда  $\mu=3$ . Ветви 1, 2, 3 — акустические, остальные — оптические. Значение  $q=\pi/a$  отвечает границе зоны Бриллюэна.

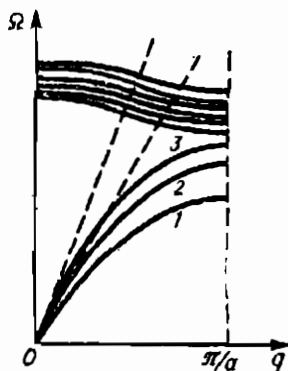


Рис. 6.4

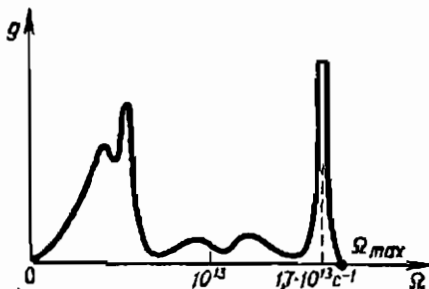


Рис. 6.5

**Спектр частот нормальных колебаний.** Обозначим этот спектр через  $g(\Omega)$ . Величина  $g(\Omega) d\Omega$  есть число нормальных колебаний с частотами от  $\Omega$  до  $\Omega+d\Omega$ . В случае электромагнитного поля соответствующий спектр частот имел универсальный вид, описываемый выражением (2.4.5). Теперь же спектр  $g(\Omega)$  зависит от выбора кристалла и, кроме того, полный интервал частот простирается от нуля до некоторой характерной для данного кристалла частоты  $\Omega_{\max}$ . Спектр  $g(\Omega)$  нормирован на полное число нормальных колебаний:

$$\int_0^{\Omega_{\max}} g(\Omega) d\Omega = 3N. \quad (6.1.7)$$

Энергия решетки  $W$  при температуре  $T$  выражается

через  $g(\Omega)$  следующим образом:

$$W = \int_0^{\Omega_{\max}} \langle E_{\Omega} \rangle g(\Omega) d\Omega, \quad (6.1.8)$$

где  $\langle E_{\Omega} \rangle$  — средняя при температуре  $T$  энергия нормального осциллятора с частотой  $\Omega$ . Энергия  $\langle E_{\Omega} \rangle$  имеет один и тот же вид как для осцилляторов электромагнитного поля, так и для нормальных осцилляторов вещества. Поэтому можно воспользоваться результатом (2.4.27), после чего соотношение (6.1.8) принимает вид

$$W = \int_0^{\Omega_{\max}} \frac{\hbar\Omega}{\exp(\hbar\Omega/(kT)) - 1} g(\Omega) d\Omega. \quad (6.1.9)$$

В качестве примера на рис. 6.5. показан спектр частот для кристалла кремния ( $\mu=2$ ); острый максимум при  $\Omega = 1,7 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$  связан с оптическими колебаниями. В рассматриваемом случае  $\Omega_{\max} = 1,8 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ , что соответствует энергии 0,01 эВ. Эта величина может быть взята в качестве оценки ширины энергетической полосы, отвечающей тепловым колебаниям кристаллической решетки.

Динамическая модель по Дебаю. П. Дебай в 1912 г. предложил простую модель, в которой кристаллическая решетка заменяется *упругим континуумом* (упругой непрерывной изотропной средой), имеющим, однако, конечное число степеней свободы, равное  $3N$ , где  $N$  — число атомов в кристалле. Эта модель неплохо описывает низкочастотные акустические колебания, когда длина нормальной волны много больше межатомных расстояний. Учет конечности числа степеней свободы производят, обрывая спектр на частоте  $\Omega_D$  (ее называют характеристической дебаевской частотой) — такой, чтобы выполнялось условие нормировки (6.1.7). Кривые дисперсии в модели Дебая являются прямыми линиями ( $\Omega \sim q$ ) — см. штриховые прямые на рис. 6.4.

Поскольку в данной модели рассматривается фактически не решетка, а континуум, можно воспользоваться результатом (2.4.5). При этом надо учесть, что скорость продольной упругой волны отличается от скорости двух поперечных волн (соответственно  $v_1$  и  $v_2$ ). В итоге приходим к выражению для спектра частот:

$$g(\Omega) = (V\Omega^2/2\pi^2) (v_1^{-3} + 2v_2^{-3}). \quad (6.1.10)$$



Воспользовавшись далее условием (6.1.7), где  $\Omega_{\max} = \Omega_D$ , находим окончательное выражение для дебаевского спектра частот:

$$g(\Omega) = \begin{cases} 9N\Omega^2/\Omega_D^3, & \Omega \leq \Omega_D; \\ 0, & \Omega > \Omega_D, \end{cases} \quad (6.1.11)$$

где

$$\Omega_D^3 = \frac{18\pi^2 N}{V(v_1^{-3} + 2v_2^{-3})}. \quad (6.1.12)$$

**Фононы.** Рассматривая в § 2.4 квантовые осцилляторы поля светового излучения, мы показали, как можно ввести фотоны. Подходя аналогичным образом к квантовым нормальным осцилляторам, можно ввести кванты новой природы. Если фотоны отражают корпускулярный характер структуры электромагнитных волн, то новые кванты отражают корпускулярный характер структуры упругих волн, связанных с тепловыми колебаниями кристаллической решетки. Эти кванты получили название *фононы*.

Пусть  $\Omega$ ,  $\vec{q}$ ,  $\alpha$  — частота, волновой вектор и поляризация конкретной нормальной волны. Отвечающие этой волне фононы имеют энергию  $\epsilon = \hbar\Omega$ , импульс  $\vec{p} = \hbar\vec{q}$  и поляризацию  $\alpha$ . Закон дисперсии  $\Omega = \Omega_\alpha(\vec{q})$  для нормальных волн превращается теперь в закон дисперсии для фононов. Поэтому кривые, изображенные на рис. 6.4, можно рассматривать как пример кривых дисперсии для фононов. Эти кривые существенно отличаются от закона дисперсии для фотонов (напомним, что для фотонов этот закон имеет вид  $\epsilon = pc$ ). В соответствии с наличием нескольких ветвей нормальных колебаний говорят о различных *фононных ветвях*; в частности, применяются термины «акустические фононы» и «оптические фононы».

Изображенный на рис. 6.5 спектр частот для кремния может служить примером фононного спектра. Он существенно отличается от фотонного спектра, который соответствует (2.4.5).

Фононы могут возбуждаться в одном и том же состоянии в неограниченном числе, причем полное число фононов в системе не является сохраняющейся величиной. Следовательно, с точки зрения статистики фононы являются бозонами, при этом химический потенциал фононного газа равен нулю. В соответствии с (3.4.5) отсюда следует, что равновесный фононный газ описывается функцией  $\nu(\epsilon)$

вида

$$v(\epsilon) = [\exp(\epsilon/kT) - 1]^{-1} \quad (6.1.13)$$

(напомним:  $v(\epsilon)$  — среднее число частиц в состоянии с энергией  $\epsilon$ ). Выражение (6.1.13) совпадает с полученным для фотонов выражением (2.4.29). С учетом (6.1.13) представим полную энергию фононного газа в виде

$$W = \int_0^{\epsilon_{\max}} \frac{\epsilon}{\exp(\epsilon/kT) - 1} G(\epsilon) d\epsilon. \quad (6.1.14)$$

Здесь  $\epsilon_{\max} = \hbar\Omega_{\max}$ ;  $G(\epsilon)$  — фононный спектр для данного кристалла. Он связан со спектром частот  $g(\Omega)$  соотношением  $G(\epsilon) d\epsilon = g(\Omega) d\Omega$ ; следовательно,  $G = g/\hbar$ . Легко видеть, что (6.1.14) совпадает с выражением (6.1.9) для энергии тепловых колебаний решетки.

**Фононы и фотоны.** Фононы во многих отношениях аналогичны фотонам. И те, и другие не имеют электрического заряда и массы покоя. И те, и другие являются бозонами; их химический потенциал равен нулю (напомним совпадение выражений (6.1.13) и (2.4.29)). По аналогии с  $\alpha$ -состояниями фотонов можно рассматривать  $\alpha$ -состояния фононов. Особенно много сходства между фотонами и дебаевскими фононами, т. е. низкочастотными акустическими фононами. Закон дисперсии для таких фононов имеет вид  $\epsilon = pv_1$  либо  $\epsilon = pv_2$ ; их импульс связан с частотой выражением  $p = \hbar\Omega/v_1$  либо  $p = \hbar\Omega/v_2$ ; наконец, спектр зависит от энергии по квадратичному закону ( $G \sim \epsilon^2$ ). Для фотонов справедливы аналогичные соотношения.

Однако между фононами и фотонами существуют принципиальные различия. Они имеют разную физическую природу. Важно иметь в виду, что фононы существуют лишь в кристаллической решетке; бессмысленно пытаться получить лучок фононов, выходящий из кристалла. Импульс фонона квантуется и ограничен пределами зоны Бриллюэна; импульс фотона может принимать, в принципе, любые значения. Энергия фонона имеет предельное значение, характерное для данного кристалла; энергия фотона не имеет предельного значения. У фонона 3  $\mu$  поляризации ( $\mu$  — минимальное число атомов в элементарной ячейке); фотон имеет две поляризации.

Закон дисперсии и спектр фотона универсальны:

$$\epsilon = pc; \quad G(\epsilon) = g(\omega(\epsilon))/\hbar = V\epsilon^2/\pi^2c^3\hbar^3. \quad (6.1.15)$$

Для фононов же как закон дисперсии, так и спектр *зависят*

от кристалла; они являются его «физическим паспортом». Закон дисперсии фонона зависит также от направления его движения в кристалле.

Сопоставим характерные энергии и импульсы фотона и фонона. При длине волны 0,5 мкм энергия фотона равна 2,4 эВ; максимальная же энергия фонона порядка 0,01 эВ. Таким образом, для видимого (и тем более ультрафиолето-

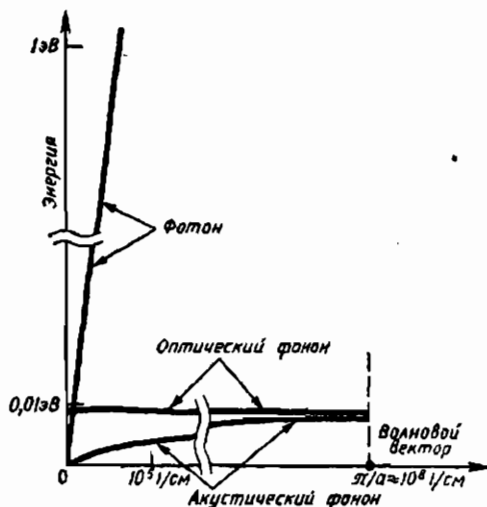


Рис. 6.6

вого) диапазона энергия фотона на несколько порядков больше энергии фонона. Энергии фотона и оптического фонона становятся сопоставимыми лишь в далекой инфракрасной области — при длинах волн порядка 100 мкм (волновой вектор порядка  $10^3 \text{ см}^{-1}$ ). Теперь обратимся к волновым векторам и импульсам. При  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$  волновой вектор фотона составляет примерно  $2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$ . Характерная же величина волнового вектора фонона соответствует размерам зоны Бриллюэна и, значит, равна примерно  $\pi/a \approx 10^8 \text{ см}^{-1}$ . Итак, для ближнего ультрафиолетового, видимого и тем более инфракрасного диапазонов волновой вектор, а следовательно, и импульс фотона много меньше волнового вектора (импульса) фонона. Сказанное иллюстрирует рис. 6.6, где сравниваются кривые дисперсии фотона и фононов. Общий вывод таков: энергия фотона, как правило, много выше энергии фонона, в отношении же их импульсов справедливо противоположное утверждение.

## § 6.2. Электроны проводимости и дырки

О равновесном распределении свободных электронов. Электроны относятся к фермионам и как таковые подчиняются статистике Ферми — Дирака. Рассмотрим равновесный электронный газ, характеризующийся температурой  $T$  и уровнем Ферми  $\epsilon_F$  (уровнем Ферми называют химический потенциал электронного газа). Среднее число электронов в состоянии с энергией  $\epsilon$  описывается выражением (3.4.7):

$$\nu(\epsilon) = \left[ \exp \frac{\epsilon - \epsilon_F(T)}{kT} + 1 \right]^{-1}. \quad (6.2.1)$$

Чтобы получить среднее число электронов  $N(\epsilon)d\epsilon$  в интервале энергий от  $\epsilon$  до  $\epsilon+d\epsilon$ , надо использовать наряду с  $\nu(\epsilon)$  также спектр электронных состояний  $G(\epsilon)$ :

$$N(\epsilon)d\epsilon = \nu(\epsilon)G(\epsilon)d\epsilon. \quad (6.2.2)$$

Найдем  $G(\epsilon)$ , воспользовавшись рассуждениями, приводившимися при выводе формулы (2.4.5); получим

$$G(\epsilon)d\epsilon = 2 \frac{4\pi k^3 dk}{8\pi^3/V}. \quad (6.2.3)$$

Здесь  $k$  — волновой вектор электрона ( $k=p/\hbar$ );  $V$  — объем электронного газа; множитель 2 учитывает число спиновых состояний электрона (в случае фотона такой множитель есть число поляризаций). Далее учтем закон дисперсии для свободного электрона

$$\epsilon = p^2/2m, \quad (6.2.4)$$

согласно которому

$$k = p/\hbar = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar; \quad dk = \sqrt{2m} d\epsilon / 2\hbar \sqrt{\epsilon}. \quad (6.2.5)$$

Подставляя (6.2.5) в (6.2.3), находим

$$G(\epsilon) = 4\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\epsilon}. \quad (6.2.6)$$

На рис. 6.7 приведен вид функции  $\nu(\epsilon)$  для трех различных температур. Кривая  $a$  соответствует  $T=0$ . В этом случае зависимость  $\nu(\epsilon)$  имеет вид ступеньки, обрывающейся при  $\epsilon = \epsilon_F(0)$ . При энергиях  $\epsilon \leq \epsilon_F(0)$  все состояния заняты (в каждом состоянии находится по электрону), а при  $\epsilon > \epsilon_F(0)$  все состояния свободны. Уровень Ферми при абсолютном нуле следующим образом выражается через плот-

ность электронного газа  $n_e$ :

$$\varepsilon_F(0) = (3 n_e / 8\pi)^{2/3} (2\pi\hbar)^2 / 2m; \quad (6.2.7)$$

здесь учтено, что

$$n_e = \frac{1}{V} \int N_{T=0}(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{V} \int_0^{\varepsilon_F(0)} G(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Величину

$$T_F = \varepsilon_F(0)/k \quad (6.2.8)$$

называют *температурой вырождения* электронного газа.

На рис. 6.7 представлены еще две кривые:  $\beta$  — для  $T \ll \ll T_F$  (электронный газ сильно вырожден),  $\delta$  — для  $T \gg T_F$

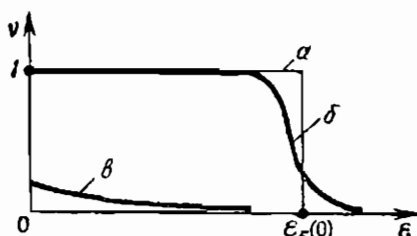


Рис. 6.7

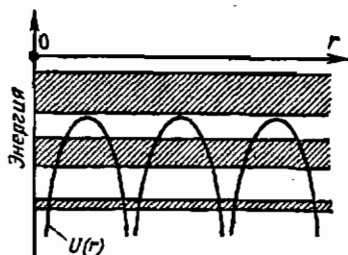


Рис. 6.8

(электронный газ невырожден). В последнем случае уровень Ферми отрицателен, причем его модуль много больше  $kT$ , поэтому соотношение (6.2.1) превращается в классическое распределение:

$$v(\varepsilon) = \exp[\varepsilon_F(T)/kT] \exp(-\varepsilon/kT). \quad (6.2.9)$$

**Одноэлектронное приближение; энергетические зоны.** Мы рассматривали газ свободных электронов. Теперь перейдем к электронам в твердом теле. Условно разобьем эти электроны на две группы: электроны, сильно связанные с атомными ядрами (электроны полностью заполненных оболочек), и электроны, *обобществленные* кристаллом. Первые участвуют вместе с ядрами в тепловых колебаниях решетки. Вторые перемещаются по всему кристаллу. Здесь рассматриваем только обобществленные электроны.

Обобществленные электроны движутся в силовом поле атомов, образующих кристаллическую решетку, и при этом они взаимодействуют друг с другом. Последнее взаимодей-

ствии можно учесть приближенно, рассматривая движение отдельного электрона в некотором поле, *общем* для всего электронного коллектива (его называют *самосогласованным полем*). В результате каждый обобществленный электрон можно представлять себе движущимся независимо от других электронов — в поле, образуемом полем решетки и самосогласованным полем. Это есть так называемое *одноэлектронное приближение*. Оно позволяет рассматривать вместо динамики электронного коллектива динамику отдельного электрона, движущегося во внешнем поле. Это поле периодически; его пространственный период соответствует периоду решетки. Из квантовой теории следует, что энергия электрона, движущегося в периодическом поле, разбивается на чередующиеся зоны разрешенных и запрещенных значений (рис. 6.8; здесь разрешенные энергетические зоны заштрихованы,  $U(r)$  — потенциал периодического поля).

Итак, энергетические состояния электрона, обобществленного кристаллом, имеют *зонную структуру*. Электрон в атоме характеризуется энергетическими уровнями; энергетический спектр свободного электрона непрерывен. Электрон, обобществленный кристаллом, занимает в известном смысле «промежуточное» положение: он «свободен», но лишь в пределах кристалла. Закономерна зонная структура энергетических состояний такого электрона; она является промежуточной между структурой дискретных уровней и непрерывным спектром.

В пределах разрешенной зоны энергия электрона изменяется непрерывно. Однако надо иметь в виду, что в действительности зона «состоит» хотя и из огромного, но все же конечного числа подуровней (оно пропорционально числу атомов в кристаллическом образце); на каждом из них может находиться не более двух электронов, спины которых должны быть антипараллельны. Поэтому можно говорить о степени заполнения зоны электронами. Зона может быть заполнена не целиком, а частично. Каждый подуровень немного размыт; этого достаточно для того, чтобы соседние подуровни перекрывались, в результате чего энергия электрона в пределах зоны изменяется непрерывно.

**Закон дисперсии для обобществленных электронов.** На рис. 6.9 приведен характерный вид кривой дисперсии (закона дисперсии) для обобществленного электрона; для сравнения дан закон дисперсии для свободного электрона. Представленная на рисунке зависимость  $v(p)$  получена для пря-

моугольного одномерного периодического потенциала (так называемая модель Кронига — Пенни). Несмотря на упрощенный характер этой модели, можно наблюдать все основные особенности закона дисперсии обобществленного электрона. Прежде всего отметим, что зависимость  $\varepsilon(p)$  претерпевает разрывы на границе зон Бриллюэна. В результате возникают запрещенные энергетические зоны. Другое важное обстоятельство — *квадратичный* характер кривой дисперсии вблизи краев разрешенных энергетических зон. Иными словами, вблизи краев зон закон дисперсии для обобществленного электрона имеет такой же вид, что и для свободного электрона.

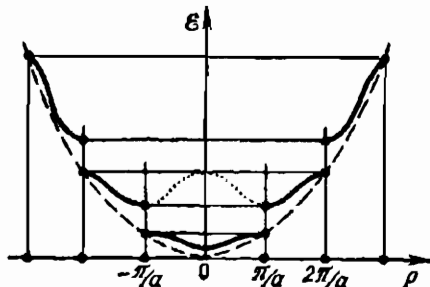


Рис. 6.9

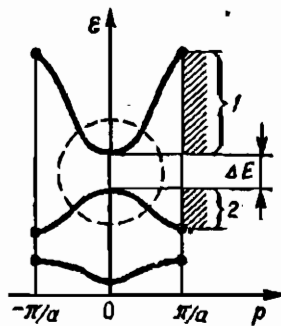


Рис. 6.10

**Эффективная масса; электроны проводимости и дырки.** Ранее отмечалось, что смещения в пространстве волновых векторов на расстояния, кратные  $2\pi/a$ , физически ничего не меняют. Воспользуемся этим и приведем кривые дисперсии для обобществленного электрона к одной (первой) зоне Бриллюэна; тогда вместо рис. 6.9 будем иметь рис. 6.10. На нем штриховкой выделены две разрешенные энергетические зоны: 1 — зона проводимости и 2 — валентная зона. Они разделены запрещенной зоной шириной  $\Delta E$ . В пределах области, выделенной на рисунке штриховой линией, кривые дисперсии как в зоне проводимости, так и в валентной зоне имеют *квадратичный* характер; следовательно, здесь справедлива модель свободных электронов. Правда, масса этих электронов может отличаться от электронной массы; кроме того, обратная кривизна квадратичной кривой в валентной зоне указывает на то, что здесь должна использоваться отрицательная масса. Отрицательности массы можно избежать, если рассматривать в валент-

ной зоне движение не электронов, а частиц с положительным зарядом (равным по модулю заряду электрона), называемых дырками.

Таким образом, коллектив обобществленных электронов вблизи нижнего края зоны проводимости может рассматриваться как газ свободных частиц — так называемых электронов проводимости. Они отличаются от обычных электронов только массой. В отличие от электронной массы массу электрона проводимости называют *эффективной массой*. Коллектив обобществленных электронов вблизи верхнего края валентной зоны рассматривают как газ свободных частиц, называемых дырками.

Мы видим, что для обобществленных электронов можно использовать модель свободных электронов, если учесть эффективную массу и появление в валентной зоне дырок. Поэтому мы и начали данный параграф с вопросов статистики свободных электронов.

Металлы, диэлектрики, полупроводники. Металлы и диэлектрики существенно различаются характером заполнения энергетических зон электронами. На рис. 6.11 заполненным электронным состояниям отвечает двойная штриховка, а свободным — однократная. Случай *а* относится к металлу, *б* — к диэлектрику. В последнем случае свободная зона — это зона проводимости, а полностью заполненная — валентная зона. Хотя обобществленные электроны и перемещаются по кристаллу, однако для электропроводности этого мало; надо, чтобы носители заряда обладали также некоторой свободой перемещения по шкале энергии. Ведь для направленного переноса заряда нужна соответствующая составляющая скорости электронов, что связано с приращением энергии. Ясно, что в полностью заполненной зоне приращение энергии невозможно, поэтому в случае *б* на рисунке мы имеем диэлектрик.

Для металла  $n_e \approx 10^{23} \text{ см}^{-3}$ . Подставляя это число в (6.2.7), получаем  $e_F(0) \approx 1 \text{ эВ}$  и, следовательно,  $T_F \approx 10^4 \text{ К}$ . Значит, для обычных (близких к комнатным) температур  $T \ll T_F$ . Иначе говоря, газ обобществленных электронов в металле сильно вырожден; зависимость  $\nu(e)$  для него описывается кривой *б* на рис. 6.7. Это обстоятельство в сочета-

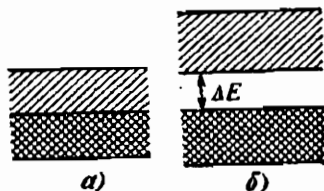


Рис. 6.11



---

нии со спецификой заполнения зоны, показанной на рис. 6.11, а, приводит к тому, что обычно реализуемые изменения температуры не оказывают на электроны в металле сколько-либо заметного воздействия.

Иное дело в случае, изображенном на рис. 6.11, б. Если ширина запрещенной зоны  $\Delta E$  порядка (или менее) нескольких электрон-вольт, то за счет теплового возбуждения часть электронов валентной зоны совершает квантовый переход в зону проводимости; чем выше температура, тем чаще происходят такие переходы. В результате возникают электроны в ранее пустовавшей зоне проводимости; проводящие свойства кристалла радикально изменяются — диэлектрик превращается в полупроводник. Число электронов в зоне проводимости существенно зависит от температуры. Обычно оно таково, что газ электронов проводимости можно считать *невырожденным*; зависимость  $\nu(\epsilon)$  для него описывается кривой  $\nu$  на рис. 6.7. Одновременно с появлением электронов в зоне проводимости возникают свободные состояния в валентной зоне; иначе говоря, возникают дырки. Газ дырок, как и газ электронов проводимости, является обычно невырожденным. Заметим, что понижение температуры не приводит к вырождению этих газов, так как с понижением температуры уменьшается число электронов в зоне проводимости и соответственно дырок в валентной зоне; при абсолютном нуле полупроводник превратится в диэлектрик. В переносе тока в полупроводнике участвуют как электроны проводимости, так и дырки.

Итак, в полупроводнике надо рассматривать два статистических коллектива: газ электронов проводимости и газ дырок. Поскольку электрон проводимости и дырка рождаются одновременно (в паре друг с другом), плотности обоих газов одинаковы. В термодинамическом равновесии уровни Ферми обоих газов совпадают; общий уровень проходит примерно посередине запрещенной зоны. Если принудительно перебрасывать электроны из валентной зоны в зону проводимости (например, облучая полупроводник светом), то можно при данной температуре увеличить плотность газа электронов проводимости и соответственно плотность дырочного газа; при этом полупроводник переходит в неравновесное состояние, уровень Ферми электронов проводимости поднимается, приближаясь к зоне проводимости, а уровень Ферми дырок опускается к валентной зоне. В неравновесном полупроводнике можно создать вырожденные газы электронов проводимости и дырок, должным образом

повысив их плотности. Предоставленный самому себе такой полупроводник придет в равновесие; избыточные (неравновесные) электроны вернутся в валентную зону, при этом произойдет взаимное уничтожение (рекомбинация) электронов проводимости и дырок.

**Примесные полупроводники.** Все, что говорилось выше о полупроводнике, относилось к чистым (беспримесным) полупроводникам. Примеси существенным образом воздействуют на картину электронных явлений в полупровод-

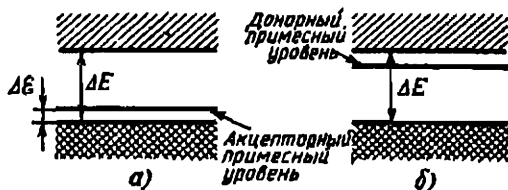


Рис. 6.12

никах. Примеси приводят к появлению дополнительных энергетических уровней (*примесных уровней*) внутри запрещенной зоны. Эти уровни обычно *пространственно локализованы*; попадая на такой уровень, электрон утрачивает способность перемещаться по кристаллу. Уровни, «захватывающие» электроны, часто лежат в нижней части запрещенной зоны, рядом с верхним краем валентной зоны (рис. 6.12, а). Благодаря относительной малости  $\Delta E$  (эта величина обычно порядка 0,01 эВ) электроны валентной зоны за счет теплового возбуждения легко, т. е. уже при низких температурах, переходят на примесный уровень, «оставляя» в валентной зоне дырки. Возможны примесные уровни иной природы; они находятся вблизи нижнего края зоны проводимости (рис. 6.12, б), имеют электроны, которые легко отдают в зону проводимости. Первые примеси называют *акцепторными*, вторые — *донорными*. Соответственно говорят о примесных полупроводниках *p*-типа и *n*-типа.

Если в чистом полупроводнике можно получить вырожденные электронный и дырочный газы лишь за счет значительного нарушения равновесия, то в примесных полупроводниках этого можно достичь и в равновесном состоянии. Равновесный вырожденный газ электронов проводимости может быть реализован в полупроводниках *n*-типа, а равновесный вырожденный газ дырок — в полупровод-

---

никах  $p$ -типа. При этом необходимо обеспечить достаточно высокую концентрацию соответствующих примесей и относительно низкую температуру.

### § 6.3. Твердое тело как газ квазичастиц

**Типы квазичастиц.** Атомная динамика идеального (беспримесного, бездефектного) кристалла описывается коллективными волновыми движениями. С квантовой точки зрения эти движения эквивалентны газу неких частиц, энергия  $\epsilon$  и импульс  $\vec{p}$  которых выражаются через частоту волн и волновой вектор  $\vec{c}$  с помощью известных соотношений  $\epsilon = \hbar\Omega$  и  $\vec{p} = \hbar\vec{q}$ . Частицы, сопоставляемые с коллективными волновыми движениями в кристалле, называют *квазичастицами*. Формально мы получаем квазичастицы, производя квантование волн, распространяющихся по кристаллу. Представление кристалла в виде газа квазичастиц составляет сущность *метода квазичастиц (метода элементарных возбуждений)*. Этот метод является основным в современной теории твердого тела; он позволяет свести крайне сложную динамику огромного коллектива взаимодействующих реальных частиц (атомов кристалла) к относительно простой динамике газа квазичастиц.

Коллективные движения в кристалле имеют разную физическую природу. В соответствии с этим различают разные типы квазичастиц. Их можно разбить на две группы: квазичастицы коллективного происхождения и квазичастицы индивидуального происхождения. В первом случае квазичастицы не имеют, по сути дела, ничего общего с отдельными реальными частицами; появление каждой такой квазичастицы обусловлено движением фактически всего коллектива реальных частиц. Во втором случае квазичастица имеет своим прообразом реальную частицу, характеристики которой изменяются в результате ее обобществления кристаллом.

С тепловыми колебаниями кристаллической решетки связаны нормальные волны. Фактически к ним относятся и звуковые волны. Квантование этих волн приводит к квазичастицам, называемым *фононами* (см. § 6.1). В упорядоченной магнитной структуре, например в ферромагнетике, возникают коллективные движения в виде так называемых спиновых волн; они связаны с распространяющимися по кристаллу изменениями ориентации спиновых моментов

ионов. Квантование спиновых волн приводит к квазичастицам, называемым *магнонами*. Фононы и магноны — примеры квазичастиц коллективного происхождения.

Примером квазичастиц другой группы служат *электроны проводимости* и *дырки* в полупроводниковых кристаллах (см. § 6.2). Каждая такая квазичастица происходит (в одиночестве или в паре с другой квазичастицей) от реального электрона. Здесь налицо соответствие между квазичастицей и ее прообразом — реальной частицей. Однако и в этом случае движение квазичастиц имеет коллективный характер, хотя и не столь очевидный, как в случае фононов. Он проявляется в «размазанности» по пространству волновых функций электрона проводимости и дырки, в невозможности локализации их вблизи какого-либо узла решетки, т. е. в факте обобществления этих квазичастиц всем атомным коллективом, образующим кристалл. Заметим в этой связи, что если рассматривать действительно идеальный кристалл без каких-либо дефектов или примесей и, кроме того, исключить взаимодействие электронов с фононами, то в этом случае электроны проводимости и дырки будут распространяться по кристаллу беспрепятственно, совершенно «не замечая» атомов, сидящих в узлах кристаллической решетки.

С учетом квазичастиц разного типа можно представить энергию кристалла в виде

$$W = \sum_i W_i + \sum_i \sum_j W_{ij}. \quad (6.3.1)$$

Индексы  $i$  и  $j$  фиксируют тип квазичастиц;  $W_i$  — энергия газа квазичастиц  $i$ -го типа,  $W_{ij}$  — энергия взаимодействия квазичастиц  $i$ -го и  $j$ -го типов (в частном случае  $i=j$ ).

При условии относительной слабости теплового возбуждения кристалла (не слишком высокие температуры) коллективные движения в нем могут рассматриваться в первом приближении как невзаимодействующие. В этом случае газ квазичастиц описывается моделью *идеального газа*; иными словами, энергией взаимодействия квазичастиц можно пренебречь. Предположив идеальность газа квазичастиц, представим энергию кристалла в виде

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \int \epsilon v_i(\epsilon) G_i(\epsilon) d\epsilon. \quad (6.3.2)$$

---

Здесь, напоминая,  $\nu_i(\epsilon)$  — среднее число квазичастиц  $i$ -го типа в состоянии с энергией  $\epsilon$ ,  $G_i(\epsilon) d\epsilon$  — число состояний квазичастицы  $i$ -го типа с энергиями от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ . Функцию  $G_i(\epsilon)$  называют *спектром* квазичастиц  $i$ -го типа.

Для равновесного газа квазичастиц функция  $\nu_i(\epsilon)$  имеет универсальный вид, зависящий от характера статистики квазичастиц данного типа (статистика Бозе — Эйнштейна или статистика Ферми — Дирака). Так, для фононов она описывается выражением (6.1.13), а для электронов проводимости и дырок выражением (6.2.1). Что же касается спектра  $G_i(\epsilon)$ , то для квазичастиц индивидуального происхождения (электроны проводимости и дырки) он описывается выражением (6.2.6) с заменой электронной массы на определяемую структурой данного кристалла эффективную массу электрона проводимости или дырки, а для квазичастиц коллективного происхождения (фононы, магноны и другие) он существенно зависит как от типа квазичастиц, так и от конкретной рассматриваемой периодической структуры.

**Квазичастицы и реальные частицы.** В отличие от реальных частиц квазичастицы существуют только в дискретном пространстве, в периодической структуре кристалла. Они существуют постольку, поскольку существует сама структура. Их нельзя «вынуть» из кристалла. С разрушением кристалла они исчезают.

Дискретность пространства квазичастиц приводит к тому, что их импульс принимает физически различные значения лишь в пределах зоны Бриллюэна. Иными словами, импульс квазичастицы определен с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi\hbar\vec{t}$ . Кроме того, пространство квазичастиц ограничено объемом кристалла; это приводит к квантованию импульса. Обо всем этом мы достаточно подробно говорили в § 6.1, обсуждая свойства фононов.

Особенно велики различия между реальными частицами и квазичастицами коллективного происхождения. Для реальных частиц закон дисперсии универсален:  $\epsilon = p^2/2m$  для нерелятивистских частиц,  $\epsilon = pc$  для фотонов. Соответственно универсален и спектр:  $G \sim \sqrt{\epsilon}$  для нерелятивистских частиц,  $G \sim \epsilon^2$  для фотонов. Что же касается квазичастиц коллективного происхождения, то для них закон дисперсии и спектр существенно зависят от свойств того конкретного пространства, в котором эти квазичастицы существуют, т. е. от структурно-динамических особенностей данного кристалла. При этом закон дисперсии квазичастиц оказы-

вается анизотропным — он зависит также и от направления в кристалле.

**Взаимодействия квазичастиц.** Хотя энергией взаимодействия квазичастиц в (6.3.1) можно пренебрегать при не слишком высоких температурах, однако сами взаимодействия квазичастиц имеют принципиальное значение. Они обуславливают ряд физических явлений и, кроме того, приводят к появлению новых типов квазичастиц.

**Фонон-фононное взаимодействие.** Гармонические нормальные колебания соответствуют отсутствию взаимодействия между фонами. Учет ангармоничности колебаний решетки соответствует учету фонон-фононных взаимодействий. Они ответственны, например, за тепловое расширение кристаллов.

**Электрон-фононное взаимодействие.** Рассматривая порознь тепловые колебания кристаллической решетки и движения обобществленных кристаллом электронов, удается корректно описать энергетические состояния твердого тела. Однако при этом из рассмотрения выпадают ряд важных эффектов, обусловленных взаимодействием электронов и фононов. Это взаимодействие проявляется в поглощении или испускании электроном фонона (поглощение приводит, в частности, к затуханию в кристаллах звуковых волн); в рассеянии электрона на фононе, что следует рассматривать как один из основных физических механизмов возникновения электрического сопротивления в кристалле; в обмене фонами, происходящем между парой электронов, что приводит к взаимному притяжению электронов и обуславливает эффект сверхпроводимости.

**Электрон-электронное взаимодействие.** Это взаимодействие может приводить, в частности, к появлению квазичастиц, представляющих для нас особый интерес. Имеются в виду экситоны. Ниже мы поговорим о них подробнее.

## § 6.4. Фотоны и квазичастицы

**Прямые и непрямые междузонные переходы.** В ряде оптических явлений надо учитывать так называемые *непрямые* переходы электронов, в которых наряду с электронами участвуют фононы. Обсудим *прямые* и *непрямые* переходы электрона из валентной зоны в зону проводимости, используя рис. 6.13. На этом рисунке изображены для какого-то направления в некотором кристалле кривые дисперсии электрона для валентной зоны (кривая  $\epsilon'(p)$ ) и зоны проводимости (кривая  $\epsilon''(p)$ ). Энергетический зазор ширины  $\Delta E$  соответствует запрещен-

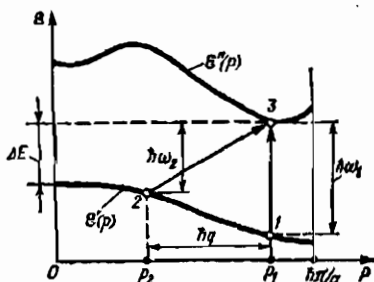


Рис. 6.13

ной зоне. Заметим, что минимум кривой  $\epsilon^*(p)$  может оказаться точно над максимумом кривой  $\epsilon'(p)$  (см. рис. 6.10), но может и не оказаться над ним, как это видно на рис. 6.13.

В рассматриваемых переходах участвуют в общем случае три частицы: фотон, электрон и фонон. Обозначим их энергии соответственно  $\hbar\omega$ ,  $\epsilon$ ,  $\hbar\Omega$ . Под  $\vec{p}$  будем понимать импульс электрона, а под  $\vec{k}$  и  $\vec{q}$  — волновые векторы соответственно фотона и фонона.

Учитывая сделанные ранее замечания об энергиях и импульсах фотонов и фононов, будем пренебрегать энергией фонона и волновым вектором фотона. Иными словами, при рассмотрении законов сохранения энергии и импульса частиц, участвующих в междузонных переходах, будем пренебрегать энергией (но не импульсом!) фонона и импульсом (но не энергией!) фотона.

Прямой переход изображен на рис. 6.13 как переход  $1 \rightarrow 3$ . Законы сохранения энергии и импульса частиц имеют в данном случае вид

$$\epsilon'_1 + \hbar\omega_1 = \epsilon''_3; \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_3, \quad (6.4.1)$$

или, короче,

$$\epsilon'(\vec{p}_1) + \hbar\omega_1 = \epsilon''(\vec{p}_1). \quad (6.4.2)$$

Так как в прямых переходах фононы не участвуют, то эти переходы на рисунках типа рис. 6.10 или 6.13 изображаются вертикальными стрелками. Их называют также переходами без изменения импульса электрона.

Теперь обратимся к непрямому переходу, в котором участвует кроме фотона и электрона один фонон. Этот переход изображен на рис. 6.13 как переход  $2 \rightarrow 3$ . Законы сохранения энергии и импульса частиц имеют в этом случае вид

$$\epsilon'(\vec{p}_2) + \hbar\omega_2 = \epsilon''(\vec{p}_1); \quad \vec{p}_2 + \hbar\vec{q} = \vec{p}_1. \quad (6.4.3)$$

Подчеркнем, что участие фонона обуславливает изменение импульса (но не энергии!) электрона. Поэтому безразлично, каким именно образом участвует в процессе фонон — рождается или уничтожается.

Сопоставляя прямые и непрямые переходы, отметим два момента. Во-первых, в отличие от прямых непрямые переходы изображаются на рисунках типа рис. 6.13 наклонными стрелками. При этом вертикальная составляющая со-

ответствует энергии поглощенного фотона, а горизонтальная — импульсу поглощенного или, напротив, испущенного фотона. Во-вторых, несмотря на то что энергией фотона можно пренебречь, энергии фотонов, участвующих в прямых и не прямых переходах, могут быть существенно разными, что связано с характером поведения кривых дисперсии электрона. Так, на рис. 6.13 хорошо видно, что при прямых переходах энергия фотона заметно больше ширины запрещенной зоны  $\Delta E$ , тогда как при не прямых переходах энергия фотона может быть близка к  $\Delta E$ . Определяющую роль играет здесь характер поведения кривых дисперсии электрона.

Сделанные замечания относились к междузонным переходам, связанным с возбуждением электрона, т. е. с рождением электронно-дырочной пары; при этом фотон поглощается. Обратные процессы (рекомбинация электронно-дырочной пары) также могут идти как через прямые, так и через не прямые переходы.

**Экситоны.** Поглощение фотонов диэлектриками и полупроводниками может приводить к рождению электронно-дырочных пар. При этом возможны две качественно различные ситуации.

1. Энергия фотона достаточно велика, так что родившиеся электрон проводимости и дырка ведут себя в дальнейшем самостоятельно; каждая из этих квазичастиц самостоятельно участвует в переносе электрического заряда. Заметим, что минимальное значение энергии фотона зависит от характера поведения кривых дисперсии электрона, но, во всяком случае, эта энергия должна превышать ширину запрещенной зоны  $\Delta E$ .

2. Энергия фотона недостаточно велика (например, меньше  $\Delta E$ ). Родившиеся электрон и дырка образуют в данном случае связанную пару, характеризующуюся энергией связи

$$E = E' - \hbar\omega, \quad (6.4.4)$$

где  $E'$  — минимальная энергия фотона, при которой электрон и дырка возникают как самостоятельные квазичастицы ( $E' \geq \Delta E$ ). Эту связанную пару называют *экситоном*. Экситон электронейтрален и непосредственно в переносе электрического заряда не участвует. Образование экситонов объясняет наблюдаемое в диэлектриках поглощение света, не приводящее к фотопроводимости (его называют экситонным поглощением).



Энергия связи экситона квантуется (как и энергия любого связанного состояния). Экситон можно рассматривать как своеобразный водородоподобный «атом»; его энергетические уровни описываются выражением типа (3.1.8):

$$E_n = -\mu e^4 / 2\hbar^2 n^2 \epsilon_D^2. \quad (6.4.5)$$

Здесь  $n$  — целое число,  $\epsilon_D$  — диэлектрическая проницаемость кристалла,  $\mu$  — приведенная масса электрона проводимости и дырки:

$$\mu = m_e m_p / (m_e + m_p), \quad (6.4.6)$$

где  $m_e$  и  $m_p$  — эффективная масса электрона проводимости и дырки соответственно.

На рис. 6.14 показаны экситонные уровни энергии (для простоты полагаем, что

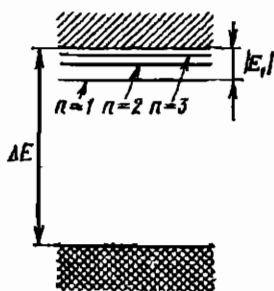


Рис. 6.14

для простоты полагаем, что  $E' = \Delta E$ ). Нижний экситонный уровень ( $n=1$ ) расположен на расстоянии (по шкале энергии)  $|E_1| = \mu e^4 / 2\hbar^2 \epsilon_D^2$  от дна зоны проводимости. Величина  $|E_1|$  есть энергия, которую надо затратить, чтобы разделить находящийся в основном состоянии экситон на электрон проводимости и дырку. При  $\epsilon_D = 5$  и  $\mu = 0,5 m$  ( $m$  — электронная масса) получаем  $|E_1| \approx 0,25$  эВ. При рекомбинации такого экситона освобождается энергия, равная  $\Delta E - |E_1|$ .

Экситон можно рассматривать как «возбужденный электрон», который все время остается вблизи дырки. При определенных условиях, например при столкновении экситона с примесным атомом, возможна рекомбинация экситона (рекомбинация электрона и дырки) и, как следствие, освобождение энергии возбуждения. Энергия освобождается также при переходах экситона из возбужденных состояний ( $n > 1$ ) в основное ( $n = 1$ ). Таким образом, экситоны являются своеобразными «аккумуляторами энергии», способными переносить энергию от одних точек кристалла к другим. Именно это свойство и предопределяет важность участия экситонов в различных процессах.

Степень локализации волновой функции экситона зависит от типа кристалла. Обычно в полупроводнике размеры эк-

ситона существенно больше расстояния между узлами решетки. Однако в молекулярных кристаллах размер экситона может оказаться порядка указанного расстояния — здесь экситон следует рассматривать как возбужденное состояние молекулы, которое переходит от одной молекулы к другой (так называемый экситон Френкеля).

**Экситоны и фононы.** В процессах рождения и уничтожения экситонов могут участвовать фононы. Различают экситоны, родившиеся при прямых и не прямых переходах. При прямом переходе уничтожается фотон, рождается экситон. При не прямом переходе уничтожается фотон, рождается экситон, кроме того, уничтожается или рождается фонон. Законы сохранения энергии и импульса частиц имеют вид: для прямого перехода

$$\hbar\omega = \epsilon_s; \quad \hbar\vec{k} = \vec{p}_s, \quad (6.4.7)$$

для непрямого перехода

$$\hbar\omega + \hbar\Omega = \epsilon_s; \quad \hbar\vec{k} + \hbar\vec{q} = \vec{p}_s, \quad (6.4.8a)$$

или

$$\hbar\omega = \epsilon_s + \hbar\Omega; \quad \hbar\vec{k} = \vec{p}_s + \hbar\vec{q}. \quad (6.4.8б)$$

Здесь  $\hbar\omega$  и  $\hbar\vec{k}$  — энергия и импульс фотона,  $\hbar\Omega$  и  $\vec{q}$  — энергия и волновой вектор фонона,  $\epsilon_s$  и  $\vec{p}_s$  — энергия и импульс экситона. Не следует путать  $\epsilon_s$  с энергией связи экситона  $E$ ; так, в случае прямых переходов  $\epsilon_s = \Delta E - E$ .

Участие фонона мало влияет на энергию экситона (энергией фонона обычно пренебрегают), но зато может существенно увеличить его импульс. Естественно, что уничтожение такого экситона возможно также лишь через не прямой переход — через рождение фотона с одновременным рождением или уничтожением фонона. При этом фонон заберет избыток импульса экситона. Так как не прямые переходы менее вероятны, чем прямые (в них участвует большее число частиц), то отсюда следует, что «не прямые» экситоны имеют более длительное время жизни. Если время жизни «прямых» экситонов порядка  $10^{-8}$  с, то для «не прямых» экситонов оно может достигать  $10^{-3}$  с.

**Взаимодействие фотонов с фононами (рассеяние Манделъштама — Бриллюэна).** В 1926 г. Л. И. Манделъштам предсказал явление изменения частоты световых волн при рассеянии их на упругих волнах в твердых телах и жидкостях. Независимо от него это явление предсказал также фран-

цузский физик Л. Бриллюэн. Через несколько лет предсказанное явление было обнаружено экспериментально.

С квантовой точки зрения *рассеяние Мандельштама — Бриллюэна* представляет собой процесс, в котором происходят уничтожение исходного фотона, рождение нового (рассеянного) фотона и рождение или уничтожение фонона. Обозначим энергию и волновой вектор исходного фотона  $\hbar\omega'$  и  $\vec{k}'$ , рассеянного фотона  $\hbar\omega$  и  $\vec{k}$ , фонона  $\hbar\Omega$  и  $\vec{q}$ . Законы сохранения энергии и импульса для частиц, участвующих в рассматриваемом процессе, имеют вид

$$\hbar\omega' = \hbar\omega + \hbar\Omega; \quad \hbar\vec{k}' = \hbar\vec{k} + \hbar\vec{q}, \quad (6.4.9)$$

или

$$\hbar\omega' + \hbar\Omega = \hbar\omega; \quad \hbar\vec{k}' + \hbar\vec{q} = \hbar\vec{k}. \quad (6.4.10)$$

В первом случае происходит рождение фонона, поэтому частота рассеянного фотона оказывается меньше частоты исходного (*стоксов* компонент рассеяния). Во втором случае фонон уничтожается и частота рассеянного фотона оказывается больше частоты исходного (*антистоксов* компонент рассеяния).

Обратим внимание на определенное сходство рассеяния Мандельштама — Бриллюэна с комбинационным рассеянием света на молекулах. Пусть  $\omega_0$  — частота колебаний молекулы (если молекула двухатомная, то эта частота единственная; молекулы с тремя (и более) атомами характеризуются несколькими колебательными частотами). При рассеянии света частоты  $\omega$  на такой молекуле возможен как переход молекулы на более высокий колебательный уровень, так и переход ее на более низкий колебательный уровень. В первом случае частота рассеянного света равна  $\omega - \omega_0$ , а во втором —  $\omega + \omega_0$ . Соответственно говорят о *стоксовом* и *антистоксовом* компонентах комбинационного рассеяния света.

**Поляритоны.** Как видно из рис. 6.6, фотоны с энергией не выше примерно 0,01 эВ и длинноволновые оптические фононы с волновым вектором порядка  $10^4 \text{ см}^{-1}$  оказываются близкими по своим характеристикам — энергии и модулю импульса. Между такими фононами и фотонами возникает взаимодействие, в результате которого в кристалле рождаются новые квазичастицы — *поляритоны*. Поляритон можно рассматривать как своеобразную «кооперацию» фотона и оптического фонона. Подобная «кооперация» возможна также между фотонами и экситоном; при условии

близости характеристик этих частиц также рождаются поляритоны.

На рис. 6.15 сплошными линиями показана кривая дисперсии поляритона, родившегося в результате взаимодействия фотона и экситона ( $\epsilon_n$  — энергия поляритона,  $p_n$  — значение его импульса). Там же штриховыми линиями изображены кривые дисперсии фотона и экситона. В области низких энергий закон дисперсии для поляритона имеет вид  $\epsilon_n = c p_n / n$ , где  $c$  — скорость света в вакууме,  $n$  — показатель преломления среды. Как и для фотона, закон дисперсии *линеен* (но в отличие от фотона коэффициент пропорциональности равен здесь  $c/n$ , а не  $c$ ). В связи с этим поляритон называют иногда *фотонем в среде*.

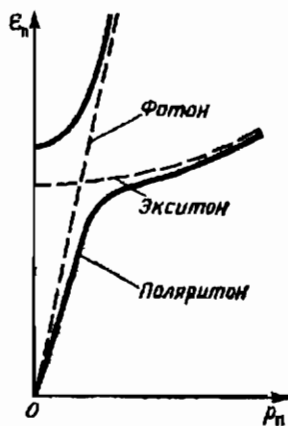


Рис. 6.15

## ГЛАВА 7

### ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

#### § 7.1. Общие замечания

**Два вида фотоэффекта.** Различают *внешний* фотоэффект и *внутренний* фотоэффект.

*Внешним фотоэффектом* или, иначе, *фотоэлектронной эмиссией* называют испускание электронов веществом, происходящее под действием электромагнитного излучения. Длина волны излучения должна находиться в диапазоне значений примерно от  $10^{-6}$  до  $10^{-12}$  м; этот диапазон включает в себя оптическое излучение (без инфракрасной части спектра) и рентгеновское излучение. Энергия фотона в указанном диапазоне изменяется от 1 до  $10^6$  эВ ( $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ). Вещество может находиться в разных агрегатных состояниях — твердом, жидком, газообразном. В последнем случае используют термин «фотоионизация газа». Наиболее интересен в практическом отношении внеш-

---

ний фотоэффект в твердых телах: металлах, полупроводниках, диэлектриках.

Электроны, испускаемые освещаемым твердым телом (фотоэлектроны), можно затем собрать на анод. Фотоэлектроны можно сформировать в направленный пучок, ускорить электрическим полем. Фотоэлектронная эмиссия используется в вакуумных и газонаполненных элементах, в различных электровакуумных приборах, где источником свободных электронов является фотоэмиттер.

При внешнем фотоэффекте электрон, поглотив фотон, покидает вещество, становится свободным. Возможна, однако, иная ситуация, когда, поглотив фотон, электрон остается в веществе, переходя на более высокие энергетические уровни. В этом случае говорят о *внутреннем фотоэффекте*. Он наблюдается в полупроводниках и диэлектриках.

Основные проявления внутреннего фотоэффекта: изменение электропроводимости полупроводника под действием света (явление *фотопроводимости*) и возникновение разности потенциалов между различными участками освещаемого образца (явление *возникновения фотоЭДС*). В соответствии с этими двумя проявлениями внутреннего фотоэффекта различают две большие группы полупроводниковых приборов, преобразующих оптические сигналы в электрические. К первой группе относятся фоторезисторы, ко второй — фотогальванические элементы, фотодиоды и фототриоды. Наблюдаются и иные проявления внутреннего фотоэффекта, например может измениться диэлектрическая проницаемость вещества в результате перехода в возбужденные состояния части атомов или молекул этого вещества (фотодиэлектрический эффект).

**Фотоэффект как один из процессов взаимодействия фотона с электроном.** В основе фотоэффекта (как внешнего, так и внутреннего) лежит элементарный акт поглощения фотона электроном, в результате чего энергия электрона увеличивается. Правда, этот акт не исчерпывает процесса фотоэффекта. Рассматриваемый процесс включает в себя также поведение электрона после того, как произошло поглощение фотона. Существенно, что поглотить фотон электрон может лишь при условии, что первоначально он находится в связанном состоянии (в атоме, молекуле, твердом теле). Поглощение фотона свободным электроном запрещено законами сохранения энергии и импульса.

Покажем это, полагая для простоты, что до поглощения фотона свободный электрон покоился. В данном случае

законы сохранения энергии и импульса взаимодействующих частиц имеют вид

$$\left. \begin{aligned} mc^2 + \hbar\omega &= \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}; \\ \hbar\vec{k} &= \vec{p}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.1)$$

Здесь  $\hbar\omega$  и  $\hbar\vec{k}$  — энергия и импульс фотона;  $\vec{p}$  — импульс электрона после поглощения фотона;  $mc^2$  — энергия покоя электрона. Подставив второе из соотношений (7.1.1) в первое, получим

$$mc^2 + \hbar\omega = \sqrt{(mc^2)^2 + (\hbar kc)^2}.$$

Учитывая, что  $kc = \omega$ , перепишем полученный результат в виде

$$mc^2 + \hbar\omega = \sqrt{(mc^2)^2 + (\hbar\omega)^2}. \quad (7.1.2)$$

Легко видеть, что равенство (7.1.2) не выполняется ни при какой частоте излучения  $\omega$ , отличной от нуля.

Итак, необходимым условием фотоэффекта является *связанность* электрона. Связь электрона в атоме характеризуется энергией ионизации атома, в твердом теле — работой выхода. Для наблюдения внешнего фотоэффекта надо, чтобы энергия фотона была больше энергии ионизации или работы выхода. Однако она не должна становиться чрезмерно большой; при энергиях фотонов, измеряемых десятками и сотнями тысяч электрон-вольт, вероятность фотоэффекта быстро спадает по мере дальнейшего увеличения энергии фотона.

**Фотоэффект, эффект Комптона, рождение электронно-позитронных пар.** Предположим, что через вещество распространяется монохроматический пучок фотонов. Энергию фотонов будем варьировать в широком интервале: от оптического диапазона к рентгеновскому и далее — к  $\gamma$ -излучению. При прохождении через вещество интенсивность фотонного пучка будет уменьшаться за счет различных процессов фотон-электронного взаимодействия, приводящих к поглощению или рассеянию фотонов. Не будем принимать во внимание резонансные процессы взаимодействия излучения с веществом. Тогда остаются три процесса, приводящие к ослаблению фотонного пучка: *фотоэффект* (фотоны поглощаются электронами), *эффект Комптона* (фотоны рассеиваются на электронах), *рождение электронно-позит-*

ронных пар (происходит превращение фотона в электрон и позитрон).

Пусть  $I_0$  — интенсивность исходного фотонного пучка. Его интенсивность после прохождения в веществе расстояния  $z$  описывается формулой

$$I(z) = I_0 e^{-\eta z}, \quad (7.1.3)$$

где  $\eta$  — линейный коэффициент ослабления пучка;  $\eta = \eta_\phi + \eta_k + \eta_n$  ( $\eta_\phi$ ,  $\eta_k$ ,  $\eta_n$  — коэффициенты ослабления пучка, связанные соответственно с фотоэффектом, эффектом Комптона и рождением пар).

Зависимость  $\eta$  от отношения  $\hbar\omega/mc^2$ , где  $\hbar\omega$  — энергия фотона,  $mc^2 = 0,51$  МэВ =

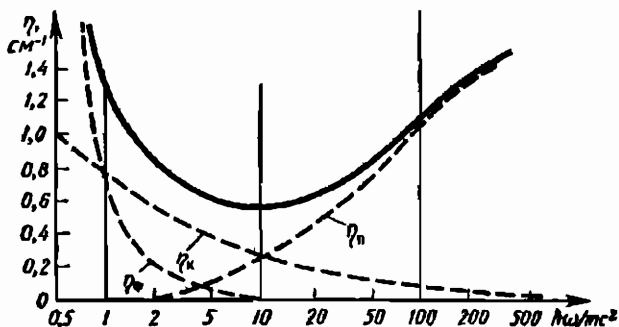


Рис. 7.1

$= 0,88 \cdot 10^{-23}$  Дж), полученная для фотонного пучка, проходящего через свинец, показана на рис. 7.1. Там же штриховыми кривыми представлены зависимости от  $\hbar\omega/mc^2$  для  $\eta_\phi$ ,  $\eta_k$  и  $\eta_n$ . Видно, что при относительно невысоких энергиях фотонов основным процессом, приводящим к ослаблению пучка, является фотоэффект. При более высоких энергиях фотонов (в данном случае при  $1 < \hbar\omega/mc^2 < 10$ ) преобладает эффект Комптона, а при еще более высоких энергиях (при  $\hbar\omega/mc^2 > 10$ ) основным становится эффект рождения электронно-позитронных пар. Последний эффект имеет энергетический порог снизу: ясно, что фотон не может превратиться в электронно-позитронную пару, если его энергия меньше суммы энергий покоя электрона и позитрона. Это означает, что энергия фотона (в данном случае лучше говорить о  $\gamma$ -кванте) должна быть больше 1 МэВ.

## § 7.2. Внешний фотоэффект

**Исследования внешнего фотоэффекта.** Впервые внешний фотоэффект наблюдал в 1887 г. Г. Герц. Он обнаружил, что проскакивание искры между электродами разрядника заметно облегчается, когда электроды освещаются ультрафиолетовым светом. Обстоятельные экспериментальные исследования фотоэффекта выполнили в 1888—1889 гг. А. Г. Столетов и в 1899—1902 гг. немецкий физик Ф. Ленард. Последний показал, что освобождаемые светом отрицательные заряды являются электронами и что их энергия пропорциональна частоте света и не зависит от интенсивности света.

Установка, использовавшаяся в опытах Ленарда, схематически изображена на рис. 2.3 (см. § 2.3). При освещении катода в цепи возникает электрический ток (фототок). Измеряя зависимость силы фототока  $i$  от приложенной к электродам разности потенциалов  $U$ , Ленард получил кривые типа той, которая приведена на рис. 7.2 (каждая такая кривая снимается при неизменной интенсивности света и для определенной частоты). Участок

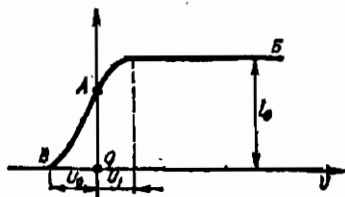


Рис. 7.2

кривой  $AB$  снят при ускоряющем потенциале ( $U > 0$ ), а участок  $AB$  — при замедляющем потенциале ( $U < 0$ ); в последнем случае обычно говорят о задерживающем потенциале. Когда ускоряющее напряжение, постепенно возрастая, достигает значения  $U_1$ , кривая  $i(U)$  выходит на насыщение. При  $U > U_1$  все фотоэлектроны, освобожденные светом из катода, проходят через цепь, поэтому сила тока насыщения  $i_0$  должна рассматриваться в качестве меры фотоэлектрического действия света. Наличие на кривой  $i(U)$  участка  $AB$  связано с тем, что фотоэлектроны обладают некоторой кинетической энергией. При  $U = -U_0$  ни один из фотоэлектронов не попадает на анод; фототок обращается в нуль. Измеряя  $U_0$ , можно определить максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов:  $E_{\max} = eU_0$ .

Закономерности внешнего фотоэффекта были объяснены в 1905 г. Эйнштейном на основе квантовых представлений. Мы уже говорили об этом в § 2.3. Заметим, что в уравнении Эйнштейна (2.3.8) под энергией  $E_\kappa$  следует понимать мак-



---

симальную кинетическую энергию фотоэлектронов  $E_{\max}$ . Это есть энергия электронов, которые покинули катод, не успев передать другим частицам катода часть энергии, полученной от фотона.

В 1913 г. появилась работа А. Ф. Иоффе «Элементарный фотоэлектрический эффект». В опытах, выполненных А. Ф. Иоффе, отрицательно заряженные пылинки цинка, неподвижно «висящие» в электростатическом поле между пластинами конденсатора, подвергались облучению светом ртутной лампы. Под действием света пылинки теряла электроны, ее отрицательный заряд уменьшался; в результате пылинки начинала падать. Чтобы остановить падающую пылинку, надо было соответствующим образом изменить разность потенциалов пластин конденсатора. А. Ф. Иоффе установил, что теряемые пылинками порции заряда всегда кратны некоторому определенному заряду, который, очевидно, и есть заряд электрона.

В 1916 г. американский физик Р. Милликен с высокой точностью измерил зависимость  $U_0(\omega)$  или, иначе, зависимость  $E_{\max}(\omega)$  для ряда металлов. Милликен работал с установкой Ленарда, усложненной применением различных экспериментальных предосторожностей (очистка поверхности фотокатода в вакууме, учет контактных разностей потенциалов, возникающих в аппаратуре, и т. д.). Полученная Милликеном зависимость  $E_{\max}(\omega)$  описывалась почти идеальной прямой линией — в полном соответствии с уравнением Эйнштейна. Наклон этой прямой позволял весьма точно определить значение постоянной Планка.

В 1928 г. внешний фотоэффект исследовали П. И. Лукирский и С. С. Прилежаев. Они усовершенствовали методику измерения  $E_{\max}$ , применив сферический конденсатор. Анодом в их установке служили посеребренные стенки стеклянного сферического баллона; катод в виде небольшого шарика помещался в центре баллона. При такой форме электродов характеристика фототока  $i(U)$  имела более крутой спад в области задерживающего потенциала, что позволяло более точно измерить  $U_0$ . В последующие годы П. И. Лукирский обстоятельно исследовал фотоэлектронную эмиссию с поверхности тонких металлических пленок. В результате этих исследований он создал в 1937 г. сурьмяно-цезиевый фотокатод. В начале 30-х годов были разработаны первые количественные теории внешнего фотоэффекта (И. Е. Тамм и С. П. Шубин; Фаулер). В 1934 г. Л. А. Кубецкий скон-

---

струировал первый в мире многокаскадный фотоэлектронный умножитель.

**Основные закономерности внешнего фотоэффекта.** Экспериментально установлены три основные закономерности внешнего фотоэффекта, справедливые для любого материала фотоэмиттера: 1) количество электронов, испускаемых в единицу времени (сила фототока в режиме насыщения), пропорционально интенсивности света (*закон Столетова*); 2) для каждого вещества при определенном состоянии его поверхности существует «красная граница» спектра излучения  $\omega_0$ , за которой (при  $\omega < \omega_0$ ) фотоэлектронная эмиссия не наблюдается; 3) максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно растет с частотой света и не зависит от его интенсивности (*закон Эйнштейна*).

Все эти закономерности исчерпывающе объясняются на основе фотонных представлений (см. § 2.3).

**Спектральная зависимость фотоэлектронной эмиссии металлов.** Одной из важнейших характеристик фотоэмиттера является его *квантовая эффективность*  $Y$ . Это есть вероятность испускания электрона данным фотоэмиттером при падении на его поверхность одного фотона определенной энергии. Пусть на фотоэмиттер падает в единицу времени  $n$  таких фотонов. Если  $n \gg 1$ , то число электронов  $n_e$ , испускаемых рассматриваемым фотоэмиттером в единицу времени, равно

$$n_e = Yn. \quad (7.2.1)$$

Величину  $Y$  называют также *квантовым выходом* фотоэлектронной эмиссии.

Измеряя квантовый выход  $Y$  для разных значений энергии фотона  $\hbar\omega$ , выявляют для данного фотоэмиттера спектральную зависимость фотоэлектронной эмиссии. На рис. 7.3 в качестве примера приведена зависимость  $Y(\hbar\omega)$  для нескольких металлов — калия, индия, висмута. Рисунок хорошо иллюстрирует закономерности, проявляющиеся в спектральной зависимости фотоэлектронной эмиссии металлов.

Если энергия фотона меньше значения, соответствующего красной границе фотоэффекта  $\omega_0$ , квантовый выход  $Y$  равен нулю (эффект не наблюдается). Когда энергия фотона становится больше указанного значения, возникает фотоэффект; при этом квантовый выход быстро возрастает по мере увеличения  $\hbar\omega$ . При некотором значении энергии фотона  $\hbar\omega$  величина  $Y$  проходит через максимум и начинает за-

тем уменьшаться; при еще более высоких энергиях фотонов может снова наблюдаться рост квантового выхода, но уже относительно медленный. Значения  $\hbar\omega_0$  и  $\hbar\omega_1$  различны для разных металлов. Меньше всего они для щелочных металлов. Величина  $\hbar\omega_1$  для щелочных металлов составляет 3—

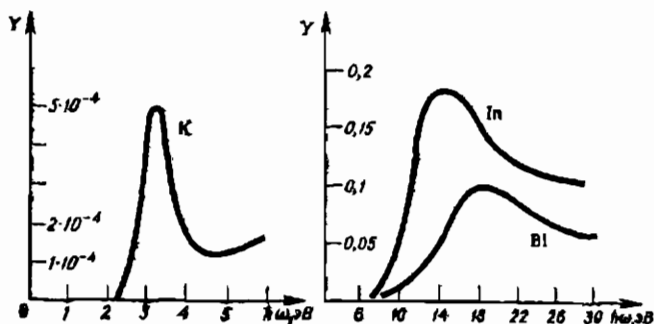


Рис. 7.3

5 эВ, тогда как для большинства остальных металлов  $\hbar\omega_1 \approx 10-20$  эВ. Значение квантового выхода в максимуме кривой  $Y(\hbar\omega)$  оказывается порядка  $10^{-3}$  для щелочных металлов и 0,1 для большинства остальных.

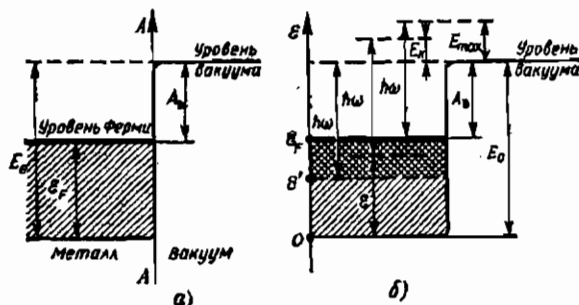


Рис. 7.4

Для объяснения спектральной зависимости фотоэлектронной эмиссии металлов обратимся к энергетической диаграмме на рис 7.4, а. В левой половине рисунка (слева от вертикали AA) представлены энергетические состояния электрона в металле; штриховкой показаны состояния в зоне проводимости, заполненные электронами. В правой половине рисунка показан так называемый «уровень вакуума»;

он соответствует состоянию свободного электрона, выходящего из металла в вакуум с нулевой кинетической энергией. Расстояние  $E_0$  от дна зоны проводимости до «уровня вакуума» может рассматриваться как ширина зоны проводимости. При обычных температурах (близких к комнатной) газ электронов проводимости в металле сильно вырожден, поэтому среднее число электронов в состояниях с разными энергиями описывается кривой  $b$  на рис. 6.6 (см. § 6.2). В этом случае положение уровня Ферми фактически соответствует границе между заполненными и свободными состояниями в зоне проводимости; энергия уровня Ферми  $\epsilon_F$  отсчитывается от дна зоны. Из рис. 7.4, *a* видно, что работа выхода  $A_n$  определяется соотношением

$$A_n = E_0 - \epsilon_F. \quad (7.2.2)$$

Предположим теперь, что на металл падает фотон с энергией  $\hbar\omega$  ( $\hbar\omega > A_n$ ) и поглощается одним из электронов проводимости. Дальнейшая судьба этого электрона в существенной мере зависит от того, в каком энергетическом состоянии он находился до поглощения фотона. Пусть он находился в одном из состояний в пределах полосы между уровнем Ферми и условно выделенным уровнем  $\epsilon'$  (см. рис. 7.4, *b*, где упомянутая полоса состояний показана двойной штриховкой; из рисунка видно, что  $\epsilon_F - \epsilon' = \hbar\omega - A_n$  или, иначе,  $\epsilon' = (\epsilon_F + A_n) - \hbar\omega = E_0 - \hbar\omega$ ). Такой электрон после поглощения фотона может перейти из металла в вакуум. Его кинетическая энергия после выхода из металла определяется соотношением (рис. 7.4, *b*)

$$E_k = \hbar\omega - A_n - (\epsilon_F - \epsilon), \quad (7.2.3)$$

где  $\epsilon$  — энергия электрона в металле, отсчитываемая от дна зоны проводимости. Если  $\epsilon = \epsilon_F$ , то  $E_k = E_{\max} = \hbar\omega - A_n$  (мы приходим к уравнению Эйнштейна для фотоэффекта). Если  $\epsilon = \epsilon'$ , то  $E_k = 0$ . Если же  $\epsilon < \epsilon'$ , то в этом случае поглощение фотона энергии  $\hbar\omega$ , очевидно, не приводит к эмиссии электрона.

Итак, для внешнего фотоэффекта в металле недостаточно выполнения неравенства  $\hbar\omega > A_n$ . Необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\epsilon_F - \epsilon < \hbar\omega - A_n. \quad (7.2.4)$$

Ясно, что чем больше энергия фотона  $\hbar\omega$ , тем для большего числа электронов проводимости будет выполняться усло-

---

вие (7.2.4). С ростом  $\hbar\omega$  увеличивается ширина энергетической полосы, дважды заштрихованной на рис. 7.4, б. Этим и объясняется первоначальное возрастание квантового выхода  $Y$  с увеличением энергии фотона (над порогом внешнего фотоэффекта).

Однако указанное возрастание  $Y$  не может происходить неограниченно. Когда энергия фотона, постепенно увеличиваясь, достигнет значения  $E_0$  для данного металла, наступит своеобразное насыщение — теперь все электроны в зоне проводимости могут, в принципе, участвовать во внешнем фотоэффекте, так что дополнительное увеличение энергии фотона уже не приводит к возрастанию числа электронов, которые могут покинуть металл. В рассматриваемой ситуации зависимость  $Y(\hbar\omega)$  начинает определяться другими факторами, которые и обуславливают некоторое уменьшение  $Y$  по мере дальнейшего роста  $\hbar\omega$ . К таким факторам относится, в частности, изменение с частотой коэффициента отражения света металлом и степени прозрачности металла, а также увеличение с частотой вероятности поглощения фотонов электронами, находящимися на более глубоких энергетических уровнях.

Из сказанного следует, что энергия  $\hbar\omega_1$ , при которой  $Y$  достигает максимума, должна соответствовать энергии  $E_0$ , определяющей ширину зоны проводимости в металле. Именно это и наблюдается на опыте. У щелочных металлов  $E_0 \approx 3-5$  эВ, тогда как у большинства остальных  $E_0 \approx 10-15$  эВ.

**Особенности внешнего фотоэффекта в полупроводниках.** В отличие от металлов полупроводники имеют довольно сложный спектр оптического поглощения. В металле фотоны поглощаются электронами проводимости, совершающими переходы внутри энергетической зоны. Поэтому спектр поглощения металла непрерывен; металлы поглощают излучение любой частоты. В полупроводниках фотоны могут поглощаться электронами валентной зоны (с последующим переходом в зону проводимости или на примесные уровни, находящиеся внутри запрещенной зоны), электронами на примесных уровнях (с переходом в зону проводимости или на другие примесные уровни), электронами проводимости (с последующими внутризонными переходами). Переходам электронов из валентной зоны в зону проводимости отвечает так называемая *полоса собственного поглощения* полупроводника; она характеризуется наиболее высоким коэффициентом поглощения. Частота  $\omega_{гр}$ , соответствующая

ширине запрещенной зоны  $\Delta E$  ( $\hbar\omega_{гр} = \Delta E$ ), определяет границу полосы собственного поглощения данного полупроводника; при  $\omega < \omega_{гр}$  собственное поглощение отсутствует, в результате коэффициент поглощения резко падает, полупроводник становится почти прозрачным. Для фотоэлектронной эмиссии существенно фактически лишь собственное поглощение (*собственный* внешний фотоэффект).

Понятие «работа выхода» принято определять по термоэлектронной эмиссии; работа выхода равна разности энер-

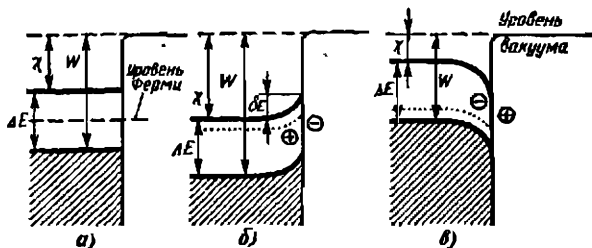


Рис. 7.5

гий «уровня вакуума» и уровня Ферми. В металле уровень Ферми фактически совпадает с наивысшим заполненным энергетическим состоянием в зоне проводимости; поэтому для металла работа выхода есть одновременно и порог внешнего фотоэффекта (наименьшая энергия фотона, при которой наблюдается фотоэлектронная эмиссия в данном металле). В полупроводнике уровень Ферми не совпадает с наивысшим заполненным состоянием (за исключением особого случая, когда полупроводник сильно вырожден, что может наблюдаться при высоких концентрациях примесей и при очень низких температурах). Например, в беспримесном полупроводнике уровень Ферми находится примерно посередине запрещенной зоны (рис. 7.5, а). Поэтому для полупроводников понятия «работа выхода»  $A_v$  и «порог внешнего фотоэффекта»  $W$  различны, что хорошо видно на рисунке. Энергию  $\chi$ , отделяющую дно зоны проводимости полупроводника от «уровня вакуума», называют *энергией электронного средства*. Легко видеть, что

$$W = \chi + \Delta E. \quad (7.2.5)$$

Переходя от металлов к полупроводникам, следует применять в уравнении Эйнштейна вместо работы выхода  $A_v$  порог фотоэффекта  $W$ .

---

Как показал И. Е. Тамм, вблизи поверхности кристаллического образца возникают дополнительные энергетические уровни, обусловленные нарушением трансляционной симметрии кристаллической решетки вследствие ее обрыва (*поверхностные состояния* или, иначе, *уровни Тамма*). В полупроводнике эти состояния локализуются внутри запрещенной зоны. Они могут либо отдавать, либо принимать электроны, в результате чего на поверхности полупроводника образуется заряд того или иного знака, приводящий к изгибу энергетических зон в приповерхностном слое. Если полупроводник содержит донорные примеси (*n*-полупроводник), то в этом случае электроны будут переходить от примесей на поверхностные уровни; в результате поверхность полупроводника зарядится отрицательно, а внутри полупроводника вблизи его поверхности возникнет положительный объемный заряд. Это приводит к *изгибу* зон, показанному на рис. 7.5, б. Изгиб происходит в пределах слоя толщиной обычно не более  $10^{-8}$  м; значительная же часть фотоэлектронов зарождается глубже — на расстояниях примерно до  $10^{-7}$ — $10^{-8}$  м от поверхности. Для таких электронов энергия электронного сродства  $\chi$  и соответственно порог фотоэффекта  $W$  увеличиваются на некоторую величину  $\delta E$  (см. рисунок). Более интересен в практическом отношении случай, когда полупроводник содержит акцепторные примеси (*p*-полупроводник). В нем электроны будут переходить с поверхностных уровней на примеси, поверхность будет заряжаться положительно, изгиб зон будет иметь вид, показанный на рис. 7.5, в. В данном случае благодаря изгибу зон происходит снижение порога внешнего фотоэффекта.

Таким образом, хотя примеси практически и не принимают непосредственного участия в генерировании фотоэлектронов, тем не менее они оказывают заметное влияние на фотоэмиссионные свойства полупроводника — через создание заряда на его поверхности в результате обогащения или, напротив, обеднения электронами поверхностных состояний.

Если на поверхность полупроводника адсорбировать в виде тонкой пленки (толщиной порядка  $10^{-9}$  м) электроположительные атомы, создающие дополнительные поверхностные уровни донорного типа, то можно еще сильнее снизить порог фотоэффекта. Используя сильнолегированный *p*-полупроводник, можно получить в данном случае фото-

эмиттер с нулевым (рис. 7.6, а) и даже отрицательным (рис. 7.6, б) электронным средством.

Говоря о междузонных переходах, мы не принимали во внимание форму кривых дисперсии электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне. Пусть эти кривые имеют вид, показанный на рис. 7.7. Из рисунка видно, что если

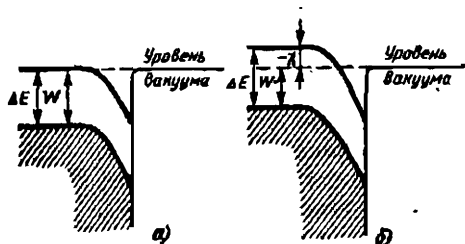


Рис. 7.6

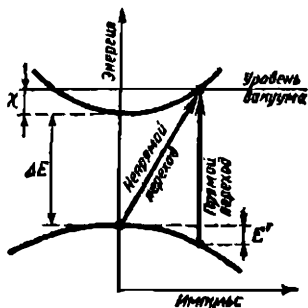


Рис. 7.7

собственный внешний фотоэффект происходит через прямой переход, то его порог равен  $\chi + \Delta E + E'$ , т. е. оказывается выше, чем это следует из (7.2.5). Чтобы порог был равен  $\chi + \Delta E$ , необходим непрямой переход. На рис. 7.8 приведена в качестве примера зависимость  $Y(\hbar\omega)$  для кремния, легированного донорными (*n*-Si) и акцепторными (*p*-Si) примесями. Штриховые кривые получены без учета непрямых переходов, а сплошные — с учетом как прямых, так и непрямых переходов. Так как вероятность непрямого перехода много меньше, чем прямого (ведь в непрямом переходе участвует еще одна частица — фонон), то поэтому вклад непрямых переходов оказывается существенным лишь вблизи порога. Заметим, что рис. 7.8 иллюстрирует влияние на квантовый выход не только непрямых переходов, но и поверхностных состояний. Из рисунка видно, что порог фотоэффекта по прямым переходам для

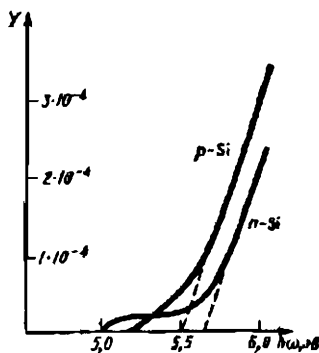


Рис. 7.8

поэтому вклад непрямых переходов оказывается существенным лишь вблизи порога. Заметим, что рис. 7.8 иллюстрирует влияние на квантовый выход не только непрямых переходов, но и поверхностных состояний. Из рисунка видно, что порог фотоэффекта по прямым переходам для



---

$p$ -Si ниже, чем для  $n$ -Si, и что при одной и той же энергии фотона квантовый выход для  $p$ -Si выше, чем для  $n$ -Si.

**Чем определяется вероятность внешнего фотоэффекта?** Все приведенные выше замечания носят сугубо качественный характер. Они объясняют в общих чертах закономерности фотоэлектронной эмиссии, но, разумеется, не позволяют оценить вероятность процесса, его квантовый выход. Для этого пришлось бы обратиться к квантовой электродинамике и квантовой теории твердого тела и рассмотреть весьма сложную задачу, требующую учета многих факторов.

Прежде всего надо найти вероятность того, что фотон данной энергии проникнет на определенное расстояние в глубь тела и поглотится там электроном, который совершит при этом переход из некоторого начального энергетического состояния в некоторое конечное состояние. Короче говоря, надо найти вероятность зарождения фотоэлектрона на определенном расстоянии от поверхности и в определенном энергетическом состоянии. Конечно, следует рассматривать только те состояния родившегося фотоэлектрона, энергия которых находится над «уровнем вакуума»; при данной энергии фотона это накладывает ограничения на выбор начальных состояний электрона, вступающего во взаимодействие с фотоном (в этой связи напомним дважды заштрихованную полосу состояний на рис. 7.4, б).

Итак, допустим, что фотоэлектрон с нужной энергией зародился. До сих пор мы полагали, что этого достаточно для того, чтобы он вышел из тела в вакуум, т. е. чтобы состоялся акт фотоэлектронной эмиссии. Однако даже при самом упрощенном подходе нам потребовалось бы учесть в данном случае вероятность зародившемуся фотоэлектрону иметь импульс, направленный в сторону к поверхности. Можно считать, что в любой момент времени половина обобществленных электронов движется, приближаясь к поверхности, а половина — удаляясь от нее, поэтому упомянутая вероятность равна  $1/2$ .

В действительности же ситуация оказывается значительно сложнее. На своем пути от места зарождения до поверхности тела фотоэлектрон может испытать столкновения с другими электронами, фононами, примесными атомами. Эти столкновения могут существенно изменить как энергию, так и импульс фотоэлектрона. На пути к поверхности он может настолько сильно растратить полученную от фотона энергию, что уже не сможет перейти из тела в вакуум. Заметим в этой связи, что в соотношении (7.2.3)

---

для кинетической энергии электрона после его выхода из металла не учитывалась возможность такого растрачивания энергии. С учетом этой возможности следует заменить в (7.2.3) знак равенства на знак неравенства:

$$E_k < \hbar\omega - A_v - (e_F - e).$$

Нетрудно представить себе, насколько сложным оказывается расчет квантового выхода фотоэффекта. Во-первых, надо найти вероятность зарождения фотоэлектрона в определенном состоянии и на определенном расстоянии от поверхности. Во-вторых, надо найти вероятность того, что указанный фотоэлектрон достигнет поверхности и при этом будет иметь энергию над «уровнем вакуума». В-третьих, надо обе вероятности перемножить и затем проинтегрировать по соответствующим начальным состояниям электрона, а также по расстоянию от места поглощения фотона до поверхности тела. Тогда мы и получим значение квантового выхода для данной энергии фотона. При решении этой задачи надо знать структуру электронных состояний и распределение электронов по состояниям, фононный спектр, характер примесей и их распределение.

Рассматриваемая задача становится еще более сложной, если существенно увеличить частоту или интенсивность света. До сих пор мы полагали (хотя это и не оговаривалось), что при поглощении одного фотона может появиться не более одного фотоэлектрона и что один электрон может поглотить не более одного фотона. Иными словами, мы рассматривали одноэлектронный и однофотонный внешний фотоэффект. Однако при достаточно большой частоте света возможно испускание телом двух (и более) электронов, приходящихся на один поглощенный фотон (*многоэлектронный* фотоэффект). Поглотив фотон большой энергии, электрон может передать часть энергии другим электронам и тем самым обеспечить их участие в фотоэмиссии; в результате и наблюдается многоэлектронный фотоэффект. При достаточно высокой интенсивности света возможно поглощение электроном сразу двух (и более) фотонов; это есть *многофотонный* фотоэффект. О многофотонных процессах мы поговорим в гл. 9.

**Средняя глубина выхода фотоэлектронов.** Для внешнего фотоэффекта одинаково важно как получение электроном от фотона энергии, превышающей пороговую, так и сохранение полученной энергии при движении электрона к поверхности тела. О первой стороне фотоэффекта мы уже говорили; остановимся теперь на его второй стороне.

Будем фиксировать расстояния от точки зарождения до

---

поверхности для разных фотоэлектронов, которые в конечном счете покинули фотоэмиттер. Усреднив эти расстояния по большому числу фотоэлектронов, получим величину, называемую *средней глубиной выхода* фотоэлектронов (обозначим ее  $H$ ). Она зависит не только от свойств материала данного фотоэмиттера, но и от энергии фотона.

Излучение в видимой и ближней ультрафиолетовой областях спектра проникает в металл на глубину всего  $10^{-8}$  м. Средняя глубина выхода фотоэлектронов для металлов оказывается еще меньше:  $(1 \div 5) \cdot 10^{-9}$  м. Потери энергии фотоэлектрона в металле обусловлены прежде всего его столкновениями с электронами проводимости. Чем больше энергия фотоэлектрона (а значит, и энергия фотона), тем больше вероятность электрон-электронного столкновения и больше средняя потеря энергии фотоэлектрона при каждом столкновении. Поэтому наблюдается уменьшение  $H$  с ростом энергии фотона. Например, в барии при повышении энергии фотона от 3 до 5 эВ происходит уменьшение  $H$  с  $5 \cdot 10^{-9}$  до  $2 \cdot 10^{-9}$  м. Заметную роль в металлах играют также электрон-фононные столкновения.

В полупроводниках надо учитывать электрон-фононные и электрон-примесные столкновения, однако решающую роль играют столкновения фотоэлектрона с электронами валентной зоны. Специфика этих столкновений состоит в том, что валентному электрону должна передаваться сразу большая порция энергии — не менее ширины запрещенной зоны  $\Delta E$ . При этом валентный электрон переходит в зону проводимости, рождается пара: электрон проводимости и дырка. Рассматриваемый процесс называют *ударной ионизацией*; энергия, передаваемая фотоэлектроном валентному электрону, называется энергией ударной ионизации. Одного акта ударной ионизации может оказаться достаточно для того, чтобы фотоэлектрон утратил возможность участвовать в фотоэмиссии.

Предположим, что полупроводниковый фотоэмиттер имеет энергетическую диаграмму, показанную на рис. 7.9, а. Здесь через  $E_i$  обозначена энергия ударной ионизации ( $E_i \geq \Delta E$ ), штриховой прямой показан порог ударной ионизации;  $\chi$  — энергия электронного сродства. В рассматриваемом случае  $\chi > E_i$  ( $\chi > \Delta E$ ). Чтобы не участвовать в столкновении с валентным электроном, зародившийся фотоэлектрон должен был бы иметь энергию ниже порога ударной ионизации, но тогда, как легко видеть, он оказался бы ниже «уровня вакуума». Если же фотоэлектрон имеет энергию

выше «уровня вакуума», то он оказывается выше порога ударной ионизации. Такой электрон может испытать столкновение с валентным электроном; при этом рождается электронно-дырочная пара, а фотоэлектрон оказывается ниже «уровня вакуума» (именно эта ситуация и отражена на рис. 7.9, а). Естественно, что в рассматриваемом фотоэммиттере средняя глубина выхода фотоэлектронов крайне мала. Она составляет всего  $10^{-9}$  м, что соответствует длине сво-

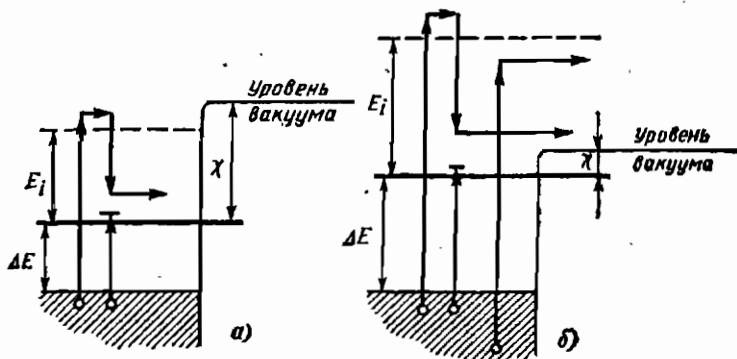


Рис. 7.9

бодного пробега при учете электрон-электронных столкновений.

Предположим теперь, что фотоэммиттер имеет энергетическую диаграмму, показанную на рис. 7.9, б. Здесь

$$\chi < E_i; \quad \chi < \Delta E. \quad (7.2.6)$$

Чем меньше энергия электронного средства по сравнению с энергией ударной ионизации, а следовательно, и с шириной запрещенной зоны, тем, во-первых, выше над «уровнем вакуума» остается фотоэлектрон после столкновения с валентным электроном и, во-вторых, больше фотоэлектронов могут иметь энергию выше «уровня вакуума», но ниже порога ударной ионизации. На рисунке показаны два фотоэлектрона — один испытывает столкновение с валентным электроном, энергия другого ниже порога ударной ионизации; легко видеть, что оба фотоэлектрона могут участвовать в фотоэмиссии. Фотоэммиттеры, для которых выполняется условие (7.2.6), имеют  $H \approx 10^{-8} \div 10^{-7}$  м; здесь  $H$  определяется электрон-фононными и электрон-примесными столкновениями. Квантовый выход в максимуме превышает 0,1. Он может увеличиться еще больше за счет размножения фотоэлектро-

нов путем ударной ионизации (многоэлектронный фотоэффект).

Наибольших значений средняя глубина выхода фотоэлектронов достигает в фотоэмиттерах с отрицательным электронным средством. Здесь  $H$  соответствует длине диффузии электронов проводимости, т. е. характерному расстоянию, которое проходит электрон до того, как произойдет его рекомбинация с дыркой. В таких фотоэмиттерах  $H$  превышает микронметр ( $H \approx (1 \div 5) \cdot 10^{-6}$  м).

**Эффективные и неэффективные фотоэмиттеры.** Для большинства металлов характерна большая работа выхода (больше 5 эВ), вследствие чего они оказываются нефоточувствительными в видимой области спектра. Относительно низкую работу выхода имеют только щелочные металлы, однако у них крайне низок квантовый выход даже в максимуме кривой  $Y(\hbar\omega)$ ; он составляет всего  $10^{-4}$ — $10^{-3}$  (напомним рис. 7.3). Поэтому чистые металлы практически не используются в качестве фотоэмиттеров в электровакуумных приборах.

Эффективные фотоэмиттеры в видимой и ближней ультрафиолетовой областях спектра созданы на основе полупроводниковых материалов, которые обладают следующими свойствами: а) имеют высокий коэффициент поглощения излучения в интересующей области спектра, б) являются  $p$ -полупроводниками (имеют благоприятный изгиб зон вблизи поверхности), в) характеризуются низким электронным средством (выполняется условие (7.2.6)). Укажем некоторые эффективные фотоэмиттеры, имеющие широкое практическое применение.

*Сурьмяно-цезиевый фотоэмиттер.* При прогревании сурьмы в парах цезия образуется химическое соединение  $Cs_3Sb$ , обладающее свойствами полупроводника. Небольшой дефицит цезия в кристаллической решетке превращает данный полупроводник в полупроводник  $p$ -типа. Его характеристики:  $\chi = 0,4$  эВ,  $\Delta E = 1,6$  эВ,  $Y_{\max} = 0,3$ .

*Многощелочный фотоэмиттер.* При обработке сурьмы парами натрия и калия, а затем цезия образуется соединение  $(Na,K)Sb-Cs$ . Оно является  $p$ -полупроводником; его характеристики:  $\chi = 0,55$  эВ,  $\Delta E = 1,0$  эВ,  $Y_{\max} = 0,4$ .

*Бищелочные фотоэмиттеры.* Приведем характеристики двух из них:

$$(K_2Cs)Sb: \chi = 0,4 \text{ эВ}, \Delta E = 1,4 \text{ эВ}, Y_{\max} = 0,35;$$

$$(Rb_2Cs)Sb: \chi = 0,2 \text{ эВ}, \Delta E = 1,45 \text{ эВ}, Y_{\max} = 0,3.$$

Спектральные зависимости квантового выхода для фотоэммитеров на  $\text{Cs}_3\text{Sb}$  и  $(\text{Na}_2\text{K})\text{Sb}-\text{Cs}$  приведены на рис. 7.10, а. Там же приведены кривые  $Y(\hbar\omega)$  для некоторых неэффективных полупроводниковых фотоэммитеров ( $\text{Cs}_3\text{Bi}$ ,  $\text{GaAs}$ ,  $\text{Ge}$ ).

Среди неэффективных фотоэммитеров мы привели, в частности, арсенид галлия ( $\text{GaAs}$ ). Однако этот фотоэммитер (сильнолегированный  $p$ -полупроводник) можно сделать эффективным, если нанести на его поверхность тонкую пленку

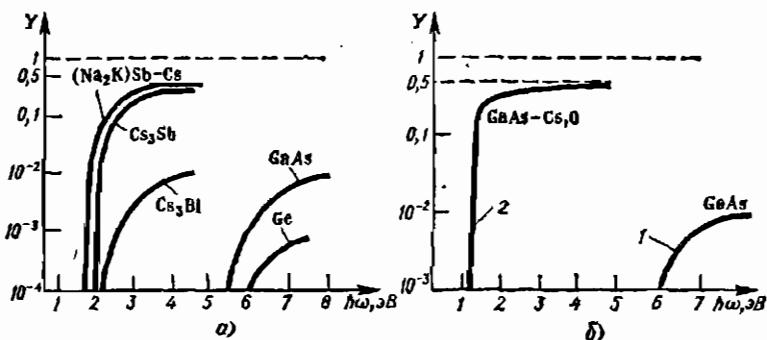


Рис. 7.10

цезия и кислорода. При этом реализуется отрицательное электронное сродство ( $\chi = -0,3$  эВ), что приводит к существенному снижению порога и повышению максимального квантового выхода. Это хорошо видно на рис. 7.10, б, где сопоставляются зависимости  $Y(\hbar\omega)$  для арсенида галлия без цезиево-кислородной пленки (кривая 1) и с такой пленкой (кривая 2). Заметим, что весьма крутой фронт кривой 2 связан с большой глубиной выхода фотоэлектронов.

### § 7.3. Внутренний фотоэффект (фотопроводимость)

Поглощение света полупроводниками и диэлектриками может приводить к рождению различных квазичастиц — электронов проводимости, дырок, экситонов, фононов и др. Все эти процессы можно рассматривать как внутренний фотоэффект. Однако обычно, говоря о внутреннем фотоэффекте, имеют в виду фоторождение лишь носителей заряда — электронов проводимости и дырок. При этом выделяют две группы явлений: *фотопроводимость* и *возникновение фотоЭДС*.

В 1873 г. У. Смит обнаружил, что сопротивление селена изменяется при освещении. Так была открыта фотопроводимость (фоторезистивный эффект). В 1875 г. был создан первый селеновый фотоэлемент, в котором использовалось это явление. Физическая природа фотопроводимости долгое время оставалась неясной. Для ее объяснения потребовались представления квантовой оптики и квантовой теории полупроводников и диэлектриков.

**Равновесная проводимость полупроводника.** В отсутствие освещения проводимость полупроводника описывается выражением

$$\sigma_0 = e(\mu_n n_0 + \mu_p p_0), \quad (7.3.1)$$

где  $e$  — абсолютное значение заряда электрона,  $\mu_n$  и  $\mu_p$  — подвижности соответственно электрона проводимости и дырки, а  $n_0$  и  $p_0$  — их концентрации. Напомним, что подвижность носителя заряда определяется отношением его дрейфовой скорости к напряженности внешнего электрического поля. Дрейфовая скорость есть средняя скорость направленного перемещения заряда под действием поля, какую он приобретает на длине свободного пробега. Обычно  $\mu_n > \mu_p$ . Подвижность слабо меняется с температурой и не зависит от напряженности поля, по крайней мере для не слишком сильных полей (пока дрейфовая скорость много меньше средней скорости теплового движения).

Концентрации носителей  $n_0$  и  $p_0$  называют равновесными; они устанавливаются при наличии термодинамического равновесия. В таком полупроводнике скорость теплового генерации носителей заряда (генерации за счет теплового возбуждения) равна скорости их рекомбинации. Поэтому  $n_0$  и  $p_0$  остаются постоянными при неизменной температуре. В собственном беспримесном полупроводнике  $n_0 = p_0$ ; носители генерируются и рекомбинируют парами. В примесных полупроводниках с донорными примесями ( $n$ -полупроводниках)  $n_0 > p_0$ , а в полупроводниках с акцепторными примесями ( $p$ -полупроводниках)  $n_0 < p_0$ ; здесь наряду с парными процессами происходят также одиночные процессы генерации и рекомбинации носителей. Определяемая выражением (7.3.1) проводимость  $\sigma_0$  называется равновесной. Она обуславливает электрический ток, возникающий в неосвещенном полупроводнике при приложении к нему разности потенциалов (так называемый темновой ток).

Время жизни носителей заряда. Обозначим через  $\nu$ , скорость рекомбинации носителей определенного типа, на-

пример электронов проводимости (аналогичные рассуждения будут применимы к дыркам). Скорость рекомбинации пропорциональна концентрации носителей  $n$  и концентрации рекомбинирующих центров  $N_r$ ,

$$v_r = \gamma N_r n, \quad (7.3.2)$$

где  $\gamma$  — коэффициент рекомбинации рассматриваемых носителей. Входящая в (7.3.2) концентрация носителей  $n$  может быть как равновесной, так и неравновесной. Соответственно говорят о равновесной или неравновесной скорости рекомбинации.

Рекомбинация идет в основном через примесные состояния, поэтому  $N_r$  в (7.3.2) описывает концентрацию соответствующих примесных центров и дефектов решетки.

На рис. 7.11, а показан характерный процесс рекомбинации через примесный уровень. Здесь: 1 — дно зоны проводимости, 2 — вершина валентной зоны, 3 — примесный уровень. Стрелками показан захват на примесный уровень электрона проводимости и дырки.

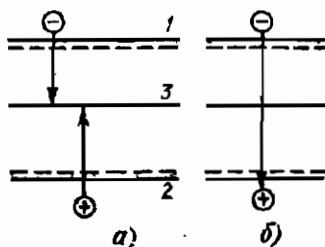


Рис. 7.11

Штриховыми прямыми обозначены донорный и акцепторный примесные уровни; они непосредственно в рекомбинации не участвуют.

Прямая рекомбинация электрона и дырки (рис. 7.11, б) менее вероятна по сравнению с рекомбинацией через примесный уровень, так как требует одновременного выполнения законов сохранения энергии и импульса рекомбинирующих частиц. Она проявляется лишь в очень чистых полупроводниках. В этом случае роль центров рекомбинации играют дырки и, следовательно,  $N_r = p$ , или (с учетом того, что в таких полупроводниках  $p = n$ )  $N_r = n$ . Рекомбинацию через примеси называют линейной ( $v_r \sim n$ ), а прямую рекомбинацию электрона и дырки — квадратичной ( $v_r \sim n^2$ ).

Величина  $\tau$ , определяемая выражением

$$1/\tau = \gamma N_r, \quad (7.3.3)$$

называется *временем жизни* носителя заряда (в данном случае электрона проводимости). Подставляя (7.3.3) в (7.3.2), получаем

$$v_r = n/\tau. \quad (7.3.4)$$



Чем больше скорость рекомбинации, тем меньше время жизни носителя. При линейной рекомбинации  $\tau$  не зависит от температуры. При квадратичной же  $\tau \sim 1/n$  и, следовательно, зависит от температуры.

Специально вводя примеси (соответствующего состава и соответствующей концентрации), можно управлять временем жизни носителей заряда. Как будет показано ниже, тем самым можно существенно воздействовать на фотопроявляющие свойства полупроводника.

**Квантовый выход внутреннего фотоэффекта.** Предположим теперь, что полупроводник освещается монохроматическим светом, частота которого выше пороговой частоты для внутреннего фотоэффекта. Последняя определяется шириной запрещенной зоны в собственных полупроводниках и энергией ионизации донорных или акцепторных примесей в примесных полупроводниках.

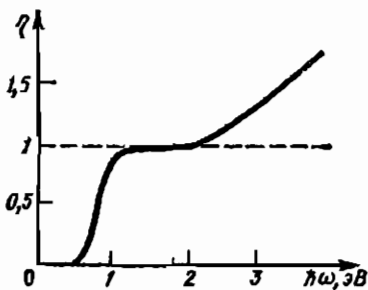


Рис. 7.12

При поглощении фотонов электронами валентной зоны или примесных уровней будут происходить соответствующие квантовые переходы, приводящие к образованию дополнительных (неравновесных) носителей заряда, которые и обуславливают фотопроводимость.

Важной характеристикой полупроводникового материала является *квантовый выход* внутреннего фотоэффекта — число оптически генерируемых носителей заряда, приходящееся на один поглощенный фотон. Обозначим это число  $\eta$ . Различают квантовый выход для электронов проводимости ( $\eta_n$ ) и дырок ( $\eta_p$ ). В беспримесном полупроводнике  $\eta_n = \eta_p$ .

На рис. 7.12 показана зависимость  $\eta(\hbar\omega)$  для беспримесного германия. Когда энергия фотона, возрастая, достигает ширины запрещенной зоны, начинается генерация носителей заряда. Достаточно быстро величина  $\eta$  достигает значения, близкого к единице. Когда энергия фотона в 2—3 раза превысит ширину запрещенной зоны, начинается дальнейший рост квантового выхода за счет генерации дополнительных носителей путем ударной ионизации; при этом  $\eta$  оказывается больше единицы. Конкурирующими

процессами, препятствующими возрастанию квантового выхода, являются процессы поглощения фотонов, приводящие к возбуждению электронов проводимости, рождению экситонов и фононов. При наличии в полупроводнике соответствующих центров часть падающих на полупроводник фотонов будет участвовать в процессах фотолюминесценции.

Предположим, что в единице объема полупроводника поглощаются в единицу времени  $N$  фотонов энергии  $\hbar\omega$ . Величина

$$G = \eta(\hbar\omega) N \quad (7.3.5)$$

есть скорость световой генерации носителей заряда (число носителей заряда данного знака, генерируемых в единице объема полупроводника в единицу времени).

**Основное характеристическое соотношение для фотопроводимости.** Пусть  $\Delta n$  и  $\Delta p$  — концентрации неравновесных электронов проводимости и дырок, обусловленные поглощением света в полупроводнике. Выражение для проводимости полупроводника запишем теперь в следующем виде:

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma, \quad (7.3.6)$$

где  $\Delta\sigma = e(\mu_n\Delta n + \mu_p\Delta p)$ .

Полная проводимость  $\sigma$  есть сумма равновесной проводимости  $\sigma_0$  и фотопроводимости  $\Delta\sigma$ . Выражение (7.3.6) можно, очевидно, записать и в таком виде:

$$\sigma = e(\mu_n n + \mu_p p), \quad (7.3.7)$$

где  $n = n_0 + \Delta n$ ,  $p = p_0 + \Delta p$ .

С целью максимального упрощения задачи будем полагать, что световое излучение поглощается равномерно во всем объеме полупроводника и, следовательно, отсутствует диффузия неравновесных носителей заряда от одних участков полупроводника к другим. Кроме того, примем, что плотность светового потока не меняется во времени, так что можно рассматривать стационарную ситуацию. В данных условиях справедливо равенство

$$g + \eta N = n/\tau, \quad (7.3.8)$$

означающее, что сумма скоростей тепловой ( $g$ ) и световой ( $\eta N$ ) генерации носителей равна скорости рекомбинации этих носителей. Так как  $n = n_0 + \Delta n$  и  $g = n_0/\tau$ , преобразуем

(7.3.8) к виду  $\eta N = \Delta n / \tau$ , откуда получаем

$$\Delta n = \eta N \tau. \quad (7.3.9)$$

Это соотношение называют *основным характеристическим соотношением* для фотопроводимости. Строго говоря, таких соотношений два: одно — для электронов проводимости, а другое — для дырок:

$$\Delta n = \eta_n N \tau_n; \quad \Delta p = \eta_p N \tau_p. \quad (7.3.9a)$$

Физический смысл полученных соотношений вполне очевиден. Число дополнительных носителей заряда, обусловленных поглощением света в полупроводнике, тем больше, чем больше поглощается фотонов, чем выше квантовый выход данного полупроводника и чем дольше «живет» носитель в рассматриваемом полупроводнике.

**Фоточувствительность полупроводников.** Эта величина определяется как отношение фотопроводимости к плотности светового потока, падающего на полупроводник:

$$\xi = \Delta \sigma / S. \quad (7.3.10)$$

Выразим плотность светового потока  $S$  через число фотонов  $N$ , поглощаемых в единице объема полупроводника в единицу времени. Число фотонов, падающих в единицу времени на единичную поверхность, есть  $S / \hbar \omega$ . Из них не отразятся от поверхности  $S(1-R) / \hbar \omega$  фотонов, где  $R$  — коэффициент отражения света. Умножив  $S(1-R) / \hbar \omega$  на  $\alpha$ , где  $\alpha$  — линейный коэффициент оптического поглощения (он имеет размерность обратной длины), мы и получим величину  $N$ . Таким образом,  $N = S(1-R)\alpha / \hbar \omega$  и, следовательно,

$$S = N \hbar \omega / (1-R)\alpha. \quad (7.3.11)$$

Подставляя (7.3.11) в (7.3.10), получаем

$$\xi = \frac{\Delta \sigma}{N \hbar \omega} (1-R)\alpha. \quad (7.3.12)$$

С учетом (7.3.6) и (7.3.9a) находим отсюда

$$\xi = \frac{e(1-R)\alpha}{\hbar \omega} (\mu_n \eta_n \tau_n + \mu_p \eta_p \tau_p). \quad (7.3.13)$$

Основной параметр, определяющий фотопроводимость полупроводника, — время жизни носителей. Для управления этим параметром применяют различные типы примесей,

их концентрацию варьируют в широких пределах — от  $10^{17}$  до  $10^{26}$  м<sup>-3</sup>. Для различных полупроводников время жизни носителей имеет значение от  $10^{-13}$  с до десятков и сотен секунд. Фоточувствительность полупроводника считается достаточно высокой, если  $\tau \geq 10^{-4}$  с. Примеры таких полупроводников: сульфид и селенид кадмия (CdS, CdSe), для которых  $\tau \approx 10^{-3} \div 10^{-2}$  с, сульфиды свинца и таллия (PbS, Tl<sub>2</sub>S), для которых  $\tau \approx 10^{-5} \div 10^{-3}$  с.

**Подвижная фотопроводимость.** При поглощении фотонов с относительно низкой энергией может появиться фотопроводимость, связанная с переходами электронов в пределах зоны проводимости. При таких переходах число носителей не изменяется, но зато изменяется их подвижность. В этом случае световая «добавка» к проводимости имеет вид

$$\Delta\sigma = e\Delta\mu_n n_p, \quad (7.3.14)$$

где  $\Delta\mu_n$  — изменение подвижности электрона проводимости, обусловленное поглощением фотона. Фотопроводимость, определяемую выражением (7.3.14), называют *подвижной*. В отличие от нее фотопроводимость, связанную с изменением концентрации носителей, называют *концентрационной*. Подвижная фотопроводимость используется в специальных приемниках инфракрасного излучения.

## § 7.4. Внутренний фотоэффект

Если генерируемые светом электроны и дырки оказываются пространственно разделенными, возникает разность потенциалов между участками полупроводника. Внутренний фотоэффект, проявляющийся в возникновении фотоЭДС, называют также *фотогальваническим* (или *фотовольтаическим*) эффектом. Возможны различные виды этого эффекта. Остановимся на трех из них: 1) возникновение *вентильной* (барьерной) фотоЭДС в *p-n*-переходе, 2) возникновение диффузионной фотоЭДС (*эффект Дембера*), 3) возникновение фотоЭДС при освещении полупроводника, помещенного в магнитное поле (*фотомагнетозлектрический эффект*, или *эффект Кикоина — Носкова*).

**Фотоэффект на *p-n*-переходе.** Рассмотрим контакт *p*-полупроводника и *n*-полупроводника (*p-n*-переход). В области контакта происходит изгиб энергетических зон, приводящий к их взаимному смещению. Это показано на рис. 7.13, а, где штриховой прямой изображен уровень

Ферми (в термодинамическом равновесии положение уровня Ферми в  $p$ -области совпадает с его положением в  $n$ -области), 1 — дно зоны проводимости, 2 — вершина валентной зоны. Основными носителями заряда в  $p$ -области являются дырки; их концентрация много больше концентрации электронов проводимости. В  $n$ -области наблюдается обратная картина; там основными носителями являются электроны проводимости. Диффузии электронов проводимости из области с высокой их концентрацией ( $n$ -области) в область с низкой концентрацией (в  $p$ -область) препятствует потен-

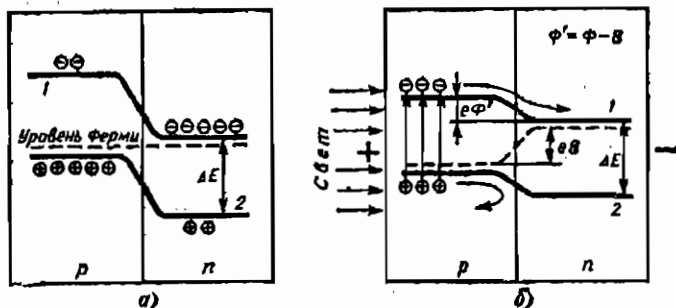


Рис. 7.13

циальный барьер высотой  $e\Phi$ ;  $\Phi$  — контактная разность потенциалов. Аналогичное замечание можно сделать относительно диффузии дырок из  $p$ -области в  $n$ -область. Иными словами, контактная разность потенциалов в  $p$ - $n$ -переходе препятствует уходу основных носителей из «своей» области. В то же время она способствует уходу в другую область неосновных носителей (но этому уходу препятствует более высокая концентрация соответствующих носителей в той области, куда они могли бы уйти).

Предположим теперь, что на  $p$ -полупроводник с наружной стороны падает поток фотонов (рис. 7.13, б). Энергия фотонов превышает ширину запрещенной зоны. Фотоны генерируют электроны проводимости и дырки, которые, возникнув, начинают диффундировать через  $p$ -область по направлению к  $p$ - $n$ -переходу. Электроны проводимости являются для  $p$ -области неосновными носителями, поэтому внутреннее поле в  $p$ - $n$ -переходе «втягивает» их в  $n$ -область. Что же касается дырок, то они являются для  $p$ -области основными носителями, поэтому поле в  $p$ - $n$ -переходе задержит их и возвратит обратно в  $p$ -область. В результате происхо-

дит пространственное разделение оптически генерированных электронов и дырок; *p*-полупроводник приобретает положительный, а *n*-полупроводник — отрицательный заряд, что эквивалентно возникновению ЭДС. При этом уровни Ферми в *p*-области и *n*-области смещаются друг относительно друга на  $e\mathcal{E}$ , где  $\mathcal{E}$  — фотоЭДС; контактная разность потенциалов уменьшается на  $\mathcal{E}$  (рис. 7.13, б).

**Солнечные элементы.** Явление возникновения фотоЭДС в *p-n*-переходе используется на практике для создания *солнечных элементов*, превращающих энергию излучения Солнца в электрическую энергию. Из солнечных элементов собирают солнечные батареи, применяемые в качестве источников питания различных наземных и космических объектов.

На рис. 7.14 схематически изображен солнечный элемент, включенный в электрическую цепь. Большое практическое применение находят солнечные элементы на основе кремния (точнее говоря, на основе контакта *p-Si* и *n-Si*); КПД этих элементов достигает 15 %. Применяются также элементы на основе арсенида галлия (GaAs). Имея несколько более низкий КПД, они в то же время характеризуются большей стойкостью к радиационным повреждениям.

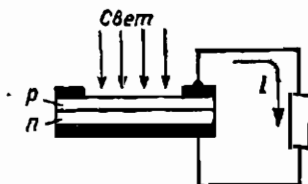


Рис. 7.14

**Эффект Дембера.** Рассматриваемый эффект был открыт немецким физиком Х. Дембером в 1931 г.

Предположим, что полупроводник освещается неоднородно. Это можно реализовать разными способами. Можно, например, освещать один участок поверхности и не освещать других участков. Если полупроводник достаточно сильно поглощает свет, то неоднородность освещения возникает даже при одинаковой по всей поверхности плотности падающего светового потока; в этом случае приповерхностный слой полупроводника будет сильнее освещен, чем его глубинные слои.

Во всех случаях в более освещенных участках полупроводника возникнет больше пар электронов и дырок, чем в менее освещенных или вообще не освещенных. Электроны и дырки начнут диффундировать от участков с более высокой концентрацией к участкам с меньшей концентрацией (в сильно поглощающем полупроводнике они будут диф-

фундировать от освещенной поверхности в глубь полупроводника). Коэффициент диффузии  $D$  носителя заряда выражается через его подвижность  $\mu$  следующим образом:  $D = \mu kT/e$ , где  $T$  — температура полупроводника,  $k$  — постоянная Больцмана. Так как  $\mu_n > \mu_p$ , то  $D_n > D_p$ . Различие в коэффициентах диффузии электронов и дырок приведет к тому, что электроны скорее продиффундируют из более освещенных участков в менее освещенные. В результате произойдет пространственное разделение оптически генерируемых электронов и дырок — возникнет фотоЭДС. Правда, эта фотоЭДС оказывается незначительной, поэтому эффект Дембера не имеет практического применения.

**Фотомангнетический эффект (эффект Кикоина — Носкова).** Этот эффект обнаружен в 1934 г. советскими физиками И. К. Кикоиным и М. М. Носковым. Сущность эффекта поясняет рис. 7.15.

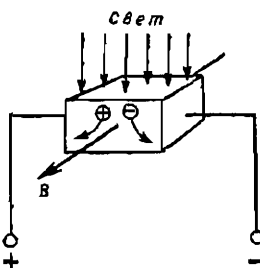


Рис. 7.15

Достаточно сильно поглощающий полупроводник, облучаемый светом, помещается в магнитное поле, направление которого перпендикулярно световому потоку. Если бы не было магнитного поля, то оптически генерируемые элект-

роны и дырки диффундировали бы в глубь полупроводника и мы имели бы эффект Дембера. Магнитное поле отклоняет электроны и дырки в разные стороны и тем самым пространственно разделяет их в направлении, перпендикулярном направлениям света и поля. Возникает ЭДС, которая может достигать нескольких десятков вольт. Приемники на основе данного эффекта применяют для приема инфракрасного излучения.

## ГЛАВА 8

### ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ

#### § 8.1. Виды и физические механизмы люминесценции

**Люминесцентное излучение.** Под этим термином понимают излучение, которое, во-первых, представляет собой избыток над тепловым излучением и, во-вторых, характеризует-

---

ся длительностью, значительно превышающей период световых колебаний. Первая часть данного определения указывает на отличие люминесценции от свечения нагретых тел. *Люминофоры* (люминесцирующие вещества) светятся без нагревания; недаром люминесцентное свечение часто называют «холодным светом». Световое излучение возникает в данном случае не за счет энергии теплового движения частиц вещества, а за счет энергии специальных источников возбуждения, например в результате воздействия на вещество светом, электронным пучком, продуктами радиоактивного распада, внешним электрическим полем и т. д. Существенно, что по прекращении возбуждения люминесцентное свечение не прекращается тотчас же, а продолжается еще некоторое время (существенно превышающее период световых колебаний). Это принципиальное обстоятельство отражено во второй части приведенного выше определения; оно позволяет отличать люминесценцию от свечения тел при отражении или рассеянии падающего на них света, от тормозного излучения заряженных частиц, от излучения Вавилова — Черенкова, а также от излучения, возникающего в результате нелинейно-оптических процессов (генерация оптических гармоник, параметрическая генерация света, параметрическое рассеяние света).

В отличие от всех перечисленных излучений люминесцентное излучение является «собственным излучением» вещества; оно обладает известной «самостоятельностью» по отношению к возбуждающим факторам. Это проявляется не только в том, что люминесцентное излучение можно наблюдать в течение более или менее длительного времени после того, как возбуждение прекратилось. Спектральный состав излучения определяется прежде всего свойствами данного люминофора и может оставаться постоянным при изменении тех или иных характеристик возбуждающих факторов. Например, при возбуждении светом спектр люминесценции во многих случаях сохраняется при изменении (в определенных пределах) частоты фотонов в исходном световом пучке.

Люминесценция возникает в результате квантовых переходов атомов, ионов, молекул из возбужденных состояний в основное или в менее возбужденные состояния. Эти атомы, ионы, молекулы принято называть *центрами люминесценции* или, иначе, люминесцентными частицами. Элементарный процесс люминесценции имеет два этапа. На первом происходит возбуждение центра люминесценции, на вто-



---

ром — его высвечивание при переходе из возбужденного состояния в основное или менее возбужденное. Энергия рождающегося на заключительном этапе фотона равна, очевидно, разности энергий состояний, между которыми произошел соответствующий квантовый переход. Таким образом, центр люминесценции использует энергию возбуждения, преобразуя ее в энергию собственного излучения. В этом смысле каждый центр люминесценции может рассматриваться как самостоятельный источник света. Пути поступления энергии возбуждения к центрам люминесценции могут быть различными; это предопределяет разнообразие физических механизмов элементарных процессов люминесценции и длительность этих процессов.

**Классификация по способу возбуждения.** Существуют различные способы возбуждения люминофоров. В соответствии с этими способами различают несколько видов люминесценции.

**Фотолюминесценция** — люминесценция, возникающая при возбуждении светом видимого и ультрафиолетового диапазонов частот (*фотовозбуждение*). На практике фотовозбуждение используется для получения люминесценции жидких растворов, стекол, твердых диэлектриков и полупроводников. При этом роль центров люминесценции играют специально вводимые в основное вещество ионы или молекулы. Так, например, в твердые диэлектрики и стекла вводят в виде небольших примесей ионы неодима ( $Nd^{3+}$ ) и других редкоземельных элементов. В жидкие растворители вводят, в частности, молекулы органических красителей.

Широкое практическое применение находят неорганические кристаллические люминофоры, называемые *кристаллофосфорами* или, проще, *фосфорами* (не надо путать с химическим элементом фосфором!). Они используются, например, в светящихся циферблатах часов. Кристаллофосфоры синтезируют, прокаливая специально приготовленные смеси, включающие в себя основное вещество и примеси активаторов, играющих роль центров люминесценции. Все кристаллофосфоры относятся к диэлектрикам или полупроводникам.

Первые наблюдения фотолюминесценции кристаллофосфоров были зафиксированы в начале XVII в. Один из жителей итальянского города Болонья, увлекавшийся алхимией, нашел однажды кусок тяжелого шпата и прокалил его в горне, надеясь выделить золото или серебро. Надежды его не оправдались, но зато камень приобрел удивительное свойство: когда его переносили из освещен-

ного солнцем места в темное помещение, он светился. Так были открыты знаменитые «болонские камни», долгое время рассматривавшиеся как одна из «загадок природы».

*Катодолюминесценция* — люминесценция при возбуждении люминофора электронным пучком. В вакуумной трубке сфокусированный пучок электронов с катода ускоряется электрическим полем и направляется на экран, представляющий собой тонкий слой люминофора на прозрачной подложке. Энергия электронов порядка  $10^3$ — $10^5$  эВ. В результате электронной бомбардировки происходит ионизация атомов вещества люминофора; каждый электрон может ионизовать сотни и тысячи атомов. Катодолюминесценция широко применяется в вакуумной электронике (свечение экранов телевизоров, осциллографов, различных электронно-оптических преобразователей).

*Электролюминесценция* — люминесценция, возбуждаемая электрическим полем. Возбуждение центров люминесценции происходит в данном случае в результате возникновения в люминофоре электрического разряда. В качестве примера отметим свечение газового разряда в газоразрядных трубках, а также свечение слоя твердого люминофора, находящегося между двумя параллельными пластинками-электродами, к которым приложено электрическое напряжение. Свечение твердых веществ в электрическом поле впервые наблюдал О. В. Лосев в 1923 г. на карбиде кремния (SiC).

*Радиолюминесценция* — люминесценция, возбуждаемая продуктами радиоактивного распада ( $\alpha$ -частицами, быстрыми электронами,  $\gamma$ -квантами), а также различными ядерными излучениями, например пучками нейтронов или протонов. Катодолюминесценция может рассматриваться как частный случай радиолюминесценции.

*Хемилюминесценция* — люминесценция, сопровождающая химические реакции. Она возникает в тех случаях, когда один из реагентов оказывается в возбужденном состоянии. Частным случаем хемилюминесценции является *биолюминесценция* (свечение гниющего дерева, некоторых насекомых, морских животных и др.); она связана с реакциями окисления особого вещества белкового происхождения, выделяемого светящимися организмами.

*Триболлюминесценция* — люминесценция, наблюдаемая при растирании, раздавливании или раскалывании кристаллов. Во многих случаях триболлюминесценция представляет собой фотолюминесценцию, возбуждаемую ультра-

---

фиолетовым излучением разряда, который возникает в местах разлома кристалла, у трущихся поверхностей.

**Спонтанное и вынужденное испускание света (излучение люминесценции и лазерное излучение).** Люминесцентное излучение образуется в результате спонтанных переходов центров люминесценции из возбужденных состояний в невозбужденные (или менее возбужденные). Иначе говоря, заключительный этап люминесценции связан с процессами *спонтанного испускания света*.

Как известно, наряду со спонтанными переходами частиц вещества возможны вынужденные переходы (переходы, инициированные излучением). Процессы вынужденного испускания будут преобладать над встречными процессами резонансного поглощения, если обеспечена инверсия заселенностей уровней частиц (если верхние уровни заселены более плотно, чем нижние); в этом случае генерируется вынужденное излучение. По своим свойствам, например по степени монохроматичности и направленности, вынужденное излучение существенно отличается от спонтанного (люминесцентного). Оно обладает более высокой когерентностью, нежели люминесцентное излучение.

Однако следует иметь в виду, что вынужденное излучение рождается в результате тех же самых квантовых переходов в веществе, которые порождают люминесцентное излучение. Более того, последнее играет роль «затравки», инициирующей процессы, приводящие в лазерах к генерации вынужденного излучения. Недаром люминесцентные свойства вещества, и прежде всего его спектр люминесценции, имеют решающее значение при выборе активной среды лазера.

Лазерное излучение возникает как результат огромного числа взаимно согласованных актов вынужденного испускания света, происходящих в центрах люминесценции активной среды (в данном случае термин «центр люминесценции» заменяют термином «активный центр»). В основе генерации различных типов лазеров лежат разные виды люминесценции. Так, в лазерах на диэлектрических кристаллах, стеклах, растворах органических красителей используется фотолюминесценция (лазеры с оптической накачкой). Существуют полупроводниковые лазеры на основе катодолюминесценции (лазеры с электронным возбуждением) и на основе электролюминесценции (инжекционные лазеры). Электролюминесценция в газовом разряде обуславливает работу широкого класса лазеров, называемых газовыми.

Хемилюминесценция используется в химических лазерах.

**Элементарные процессы в центрах люминесценции.** Рассмотрим процессы, происходящие в центрах люминесценции, слабо взаимодействующих с окружающей средой. Это могут быть атомы или молекулы в газовой смеси, молекулы в жидком растворе, примесные ионы в твердом теле. В последнем случае речь идет об ионах с недостоенными внутренними электронными оболочками, например  $3d$ - или  $4d$ -оболочками (переходные металлы),  $4f$ -оболочкой (редкоземельные элементы). Электроны этих оболочек как бы

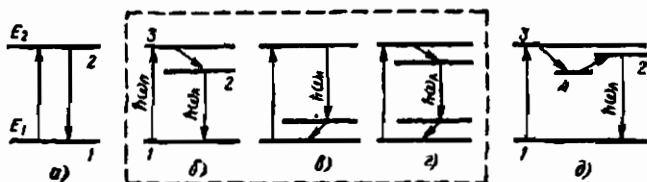


Рис. 8.1

«экранированы» внешними заполненными оболочками от кристаллической решетки. Поэтому указанные электроны характеризуются узкими энергетическими уровнями, обуславливающими систему узких спектральных линий, похожих на спектральные линии в газе.

На рис. 8.1, а показаны квантовые переходы центра люминесценции, отвечающие наиболее простому физическому механизму люминесценции. При возбуждении центр переходит с уровня 1 на уровень 2, а при обратном переходе рождается фотон (возникает люминесцентное свечение). Частота излучения люминесценции соответствует разности энергий возбуждения и основного уровня:  $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ . Это есть *резонансная люминесценция*.

Рис. 8.1, б иллюстрирует другой механизм люминесценции. При возбуждении центр люминесценции совершает переход  $1 \rightarrow 3$ . Затем он безызлучательно переходит на уровень 2, передавая энергию другим частицам или расходуя ее на рождение фононов. Испускание света происходит на переходе  $2 \rightarrow 1$ . Это есть *спонтанная люминесценция* (название не вполне удачное, поскольку любая люминесценция связана, как мы уже отмечали, со спонтанным испусканием света).

Применяя к фотолюминесценции показанную на рис. 8.1, б схему переходов, заключаем, что частота  $\omega_1$

---

люминесцентного свечения меньше частоты поглощаемого света  $\omega_n (\omega_n = (E_2 - E_1)/\hbar; \omega_n = (E_3 - E_1)/\hbar)$ . Рассматриваемая схема объясняет установленное еще в 1852 г. *правило Стокса*, согласно которому максимум спектра люминесценции сдвинут в сторону длинных волн по отношению к максимуму спектра поглощения.

Спонтанная люминесценция может описываться различными схемами переходов. Наряду со схемой, показанной на рис. 8.1, б, могут быть реализованы схемы, показанные на рис. 8.1, в, г. Все они согласуются с правилом Стокса. Заметим, что четырехуровневая схема, представленная на рис. 8.1, г, широко используется для осуществления лазерной генерации. В этой схеме достаточно легко реализуется инверсная заселенность уровней 1 и 2.

На рис. 8.1, д показана схема переходов в случае *метастабильной люминесценции*; ее называют также *стимулированной люминесценцией*. Прежде чем перейти на уровень высвечивания 2, центр люминесценции оказывается на промежуточном уровне 4. Этот уровень *метастабилен* — время жизни на нем весьма велико (в атомных масштабах); например, оно может быть порядка  $10^{-8}$  — 1 с. Для перехода с уровня 4 на уровень 2 центр люминесценции должен получить дополнительную энергию. Это может быть энергия теплового движения или инфракрасного излучения от дополнительного источника света. Она обеспечивает переход центра на уровень 2, с которого тот переходит на уровень 1, высвечивая фотон. Таким образом, люминесценция оказывается в данном случае как бы стимулированной сообщением центру дополнительной энергии; отсюда и термин «стимулированная люминесценция». Надо заметить, что этот термин не очень удачен, поскольку «стимулированный» означает «вынужденный», в то же время переход 2→1 является, как всегда при люминесценции, спонтанным.

**Элементарные процессы в кристаллофосфорах.** Значительно более сложна картина процессов, происходящих в кристаллофосфорах. Общее представление о ней можно получить, обратившись к рис. 8.2. Здесь  $E_1$  — вершина валентной зоны,  $E_2$  — дно зоны проводимости,  $\Delta E$  — ширина запрещенной зоны,  $E_3$  и  $E_3'$  — соответственно основной и возбужденный уровни примесного иона-активатора (здесь для простоты рассматриваются только два уровня; в общем случае примесный ион имеет большее число уровней),  $E_4$  — один из экситонных уровней,  $E_5$  — уровень примеси, играющей роль «ловушки» для электронов про-

водимости. Цифрами на рисунке обозначены различные переходы. Заметим, что уровни ионов-активаторов, равно как и примесей-ловушек, пространственно локализованы: обобществленный кристаллом электрон, попав на один из этих уровней, локализуется в пространстве (он захватывается соответствующим примесным центром). Что же касается экситонного уровня  $E_A$ , то он не локализован в пространстве, поскольку связан с перемещающимся по кристаллу экситоном.

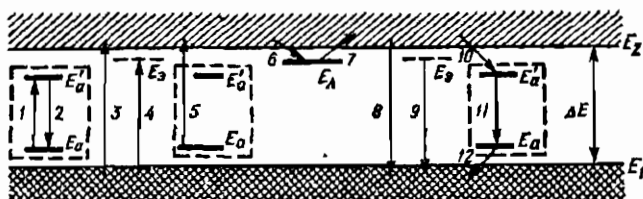


Рис. 8.2

В наиболее простом случае люминесценция описывается переходами 1 и 2. Здесь как возбуждение, так и высвечивание происходят в одной и той же точке пространства — в одном и том же ионе-активаторе. Подобные ситуации мы уже рассматривали.

Более интересны ситуации, когда энергия возбуждения поглощается в *одном месте* кристалла, а высвечивание происходит в *другом месте*. В случае фотолюминесценции это означает, что фотон излучения накачки поглощается в одном месте кристалла, а фотон люминесцентного излучения рождается в другом месте. Передача энергии возбуждения от одного места к другому осуществляется с помощью либо электронов проводимости и дырок, либо экситонов, которые представляют собой, как уже отмечалось, связанные электронно-дырочные пары. Поэтому подобные ситуации должны быть связаны с рождением либо электронов проводимости и дырок, либо экситонов. Соответствующие переходы (обусловленные поглощением энергии возбуждения) обозначены на рис. 8.2 цифрами 3, 4, 5. Переход 3 есть переход электрона из валентной зоны в зону проводимости; при этом рождаются электрон проводимости и дырка. Переход 4 связан с рождением экситона. Переход 5 есть переход электрона с основного уровня иона-активатора в зону проводимости; при этом рождается электрон проводимости.

Перемещаясь по кристаллу, электроны проводимости, дырки и экситоны тем самым переносят по нему энергию возбуждения. Рассмотрим переходы, связанные с высвечиванием этой энергии (в виде фотона люминесцентного излучения). Во-первых, это может быть междузонный переход 8 (рис. 8.2). Во-вторых, это может быть переход, связанный с рекомбинацией электрона и дырки, образующих экситон, — переход 9. Рекомбинация экситона происходит, например, при его столкновении с примесным центром. Наконец, это может быть переход 11, происходящий в каком-либо примесном ионе-активаторе; он сопровождается безызлучательными переходами 10 и 12. Все три рассмотренных процесса высвечивания связаны с одновременным уничтожением электрона в зоне проводимости и дырки в валентной зоне; иными словами, все они связаны с электронно-дырочной рекомбинацией. В связи с этим используют термин *рекомбинационная люминесценция*.

В процессе своего перемещения по кристаллу электрон проводимости может быть «захвачен» на уровень  $E_x$  (переход 6 на рис. 8.2). На этом уровне он может находиться достаточно долго, а затем может возвратиться (за счет, например, теплового возбуждения) обратно в зону проводимости — переход 7. Наличие в кристаллофосфоре подобных «ловушек» электронов, естественно, существенно увеличивает длительность люминесцентного свечения. Заметим, что длительность люминесценции связана не только с «ловушками», но и с рядом других факторов. Например, она связана с временем жизни экситонов. Напомним, что «непрямой» экситон живет значительно дольше, чем «прямой» (см. § 6.4).

**Флуоресценция и фосфоресценция.** Для ранних работ по люминесценции характерно ее разделение на флуоресценцию и фосфоресценцию. Под *флуоресценцией* понимали люминесценцию, которая наблюдалась практически лишь во время действия возбуждения, а под *фосфоресценцией* — люминесценцию, наблюдавшуюся в течение некоторого времени также и после прекращения возбуждения.

В настоящее время такое разделение люминесценции представляется условным. Ведь во всех случаях люминесцентное свечение не прекращается тотчас же после прекращения возбуждения. При этом длительность свечения варьируется в очень широких пределах — от  $10^{-8}$  с до секунд и даже часов. Если попробовать рассматривать флуоресценцию как быстро затухающую люминесценцию, а фосфорес-

ценцию — как длительную люминесценцию, то возникает трудность в определении временной границы, которая позволила бы разграничить эти два вида люминесценции.

В современной литературе флуоресценцию обычно связывают с люминесценцией, происходящей в центрах, слабо связанных с окружающей средой; используются термины «резонансная флуоресценция», «спонтанная флуоресценция». Фосфоресценцию же связывают с люминесценцией кристаллофосфоров («рекомбинационная фосфоресценция»).

## § 8.2. Основные характеристики люминесценции

**Спектральные характеристики.** Каждый люминофор характеризуется своим, присущим только ему спектром люминесценции. В случае фотолюминесценции необходимо учитывать также спектр поглощения. Оба спектра отражают структуру энергетических состояний данного люминофора (точнее говоря, его центров люминесценции).

В качестве примера рассмотрим спектры поглощения и люминесценции иона неодима ( $Nd^{3+}$ ), введенного как примесь в кристалл иттриево-алюминиевого граната ( $Y_3Al_5O_{12}$ ). Гранат, активированный неодимом, широко применяется в качестве активной среды в твердотельных лазерах. Схема энергетических состояний иона неодима в гранате дана на рис. 8.3. Эти состояния изображены для простоты в виде

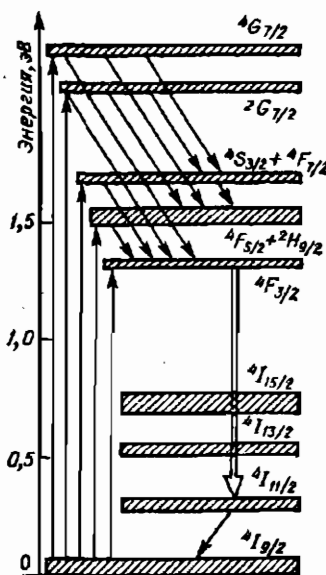


Рис. 8.3

энергетических полос. В действительности же каждой полосе отвечают несколько энергетических уровней. Они образуются в результате расщепления соответствующего атомного термина иона неодима на ряд уровней под действием поля кристаллической решетки граната (эффект Штарка в поле решетки). Используемые на рисунке обозначения



энергетических полос — это принятые в спектроскопии обозначения соответствующих атомных термов.

При фотовозбуждении ионы неодима совершают квантовые переходы из основного состояния (атомный терм  ${}^4I_{9/2}$ ) в состояния, которым отвечают термы  ${}^4G_{7/2}$ ,  ${}^2G_{7/2}$ ,  ${}^4S_{3/2} + {}^4F_{7/2}$ ,  ${}^4F_{5/2} + {}^2H_{5/2}$ ,  ${}^4F_{3/2}$ . Этим пяти переходам соответствуют пять «полос» в спектре поглощения иона неодима в гранате, представленном на рис. 8.4, а; указанные «полосы» обозначены цифрами от 1 до 5. Тонкая структура

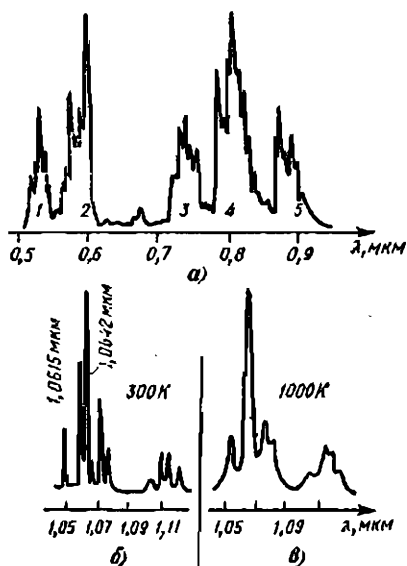


Рис. 8.4

«полос» отражает тот факт, что каждый терм расщеплен в данном случае на несколько энергетических уровней. Косыми стрелками показаны на рис. 8.3 безызлучательные переходы, связанные с рождением фононов. В результате этих переходов ионы неодима переходят в состояние  ${}^4F_{3/2}$ . Переходя затем на уровни, соответствующие термам  ${}^4I_{11/2}$ ,  ${}^4I_{9/2}$ ,  ${}^4I_{13/2}$ ,  ${}^4I_{15/2}$ , ионы неодима высвечиваются. На рис. 8.3 показан (двойная стрелка) лишь переход  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ ; на этом переходе высвечивается основная доля энергии (60%). Спектр люминесценции для рассматриваемого перехода, полученный при температуре кристалла 300 К, дан на рис. 8.4, б. Он содержит семь линий, из которых наиболее интенсивны линии 1,0615 и 1,0642 мкм. Спектральные линии относительно узки, их ширина составляет примерно  $10^{-3}$  мкм. Узость линий связана с упомянутым ранее эффектом «экранировки» электронов недостроенной оболочки иона неодима, совершающих излучательные переходы. Если кристалл граната нагревать, то указанный эффект будет становиться все менее выраженным; кроме того, происходит некоторый сдвиг энергетических уровней. В результате будет наблюдаться уширение и взаимное перекрытие спектральных линий. Это можно видеть на рис. 8.4, в,

где приведен спектр люминесценции для перехода  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ , полученный при 1000 К.

В качестве еще одного примера рассмотрим спектры поглощения и люминесценции молекулы красителя родамина 6G. Молекулярные оптические спектры обусловлены значительно более сложной картиной переходов, нежели спектры атомов или ионов. В этом случае начальное и конечное состояния представляют собой не отдельные электронные уровни, а совокупности колебательных и вращательных уровней, каждая из которых соответствует определенному электронному состоянию молекулы. Чем сложнее молекула, тем богаче указанная совокупность колебательно-вращательных состояний, тем плотнее расположены уровни в этой совокупности. Все это объясняет, почему спектры поглощения и люминесценции молекул красителей обычно не обнаруживают тонкой структуры и характеризуются большой шириной (порядка 0,1 мкм). Вид этих спектров для молекулы родамина 6G приведен на рис. 8.5, а (1 — спектр поглощения, 2 — спектр люминесценции). Рисунок хорошо иллюстрирует правило Стокса.

На рис. 8.5, а, как и на рис. 8.4, по вертикали отложена интенсивность света (поглощенного или испущенного). Если же рассматривать не саму интенсивность, а интенсивность,

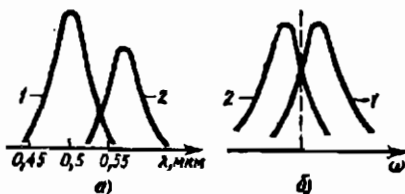


Рис. 8.5

деленную на частоту, и, кроме того, перейти от шкалы длин волн к шкале частот, то вместо рис. 8.5, а будем иметь рис. 8.5, б. Любопытно, что теперь спектры поглощения и люминесценции оказываются зеркально-симметричными. *Правило зеркальной симметрии* спектров поглощения и люминесценции выполняется для многих молекул; в нем отражается сходство структур колебательно-вращательных уровней для возбужденного и невозбужденного электронных состояний молекулы. Это правило было установлено В. Л. Левшиным.

**Выход люминесценции.** Энергетическим выходом люминесценции называется отношение энергии люминесцентного излучения к энергии возбуждения, поглощенной люминофором. Для фотолюминесценции вводят также понятие *квантового выхода*, определяемого как отношение числа

испущенных фотонов люминесцентного излучения к числу поглощенных фотонов возбуждающего излучения.

Пусть  $B_s$  и  $B_k$  — соответственно энергетический и квантовый выходы люминесценции, а  $N_n$  и  $N_x$  — числа поглощенных и испущенных в единицу времени фотонов. Для простоты будем полагать, что излучения возбуждения и люминесценции монохроматичны; их частоты равны  $\omega_n$  и  $\omega_x$  соответственно. В этом случае легко установить связь между  $B_s$  и  $B_k$ :

$$B_s = \frac{N_x \hbar \omega_x}{N_n \hbar \omega_n} = B_k \frac{\omega_x}{\omega_n}. \quad (8.2.1)$$

**Тушение люминесценции.** Под этим термином понимают уменьшение выхода люминесценции, обусловленное различными факторами, приводящими к относительному возрастанию вероятности безызлучательных переходов центров люминесценции (по сравнению с вероятностью излучательных переходов). Тушение люминесценции может наблюдаться при добавлении в люминофор специальных примесей — центров тушения. Энергия возбуждения передается от центров люминесценции к центрам тушения, которые затем переходят в основное состояние за счет безызлучательных переходов. Интересно, что тушение люминесценции наблюдается и при достаточно сильном повышении концентрации самих центров люминесценции; в этом случае говорят о *концентрационном тушении*.

Возьмем, например, водный раствор родамина 6G; центры люминесценции — молекулы родамина. Поставим кювету с этим раствором на пути сине-голубого светового пучка ( $\lambda = 0,45 \div 0,35$  мкм) и будем наблюдать люминесценцию, постепенно увеличивая концентрацию молекул родамина в растворе. Сначала по мере роста концентрации центров люминесценции возрастает интенсивность люминесцентного свечения. При этом уменьшится глубина проникновения возбуждающего светового пучка внутрь раствора; свечение будет прижиматься к стенке кюветы со стороны падения светового пучка. При некоторой концентрации молекул родамина возбуждающий свет полностью поглощается в тонком поверхностном слое раствора. Дальнейшее повышение концентрации молекул приводит к тому, что свечение этого слоя начинает ослабевать — возникает концентрационное тушение люминесценции.

Эффект концентрационного тушения объясняется образованием в растворе комплексов из двух (и более) молекул

родамина; чем больше концентрация молекул в растворе, тем чаще образуются такие комплексы. Для комплексов более вероятны безызлучательные переходы, нежели переходы, порождающие люминесцентное свечение. Существенно, что комплексы могут поглощать энергию возбуждения тех молекул, которые остались одиночными и как таковые сохранили способность к высвечиванию. Передавая комплексам свою энергию возбуждения, эти молекулы тем самым переходят в невозбужденное состояние без высвечивания.

**Кривая термовысвечивания.** Как уже отмечалось, на люминесценцию кристаллофосфоров существенно влияет на-

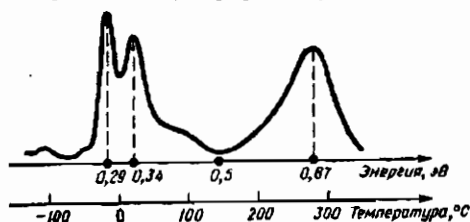


Рис. 8.6

личие «ловушек» для электронов проводимости. В схеме на рис. 8.2 такая «ловушка» представлена локальным уровнем  $E_L$ . Электрон, попавший на этот уровень, может вернуться в зону проводимости, например, за счет энергии теплового возбуждения. Чем глубже лежит уровень (чем больше разность  $E_F - E_L$ ), тем больше энергия теплового возбуждения, требуемая для освобождения электрона; иначе говоря, тем сильнее требуется нагревать кристаллофосфор.

Обычно кристаллофосфор имеет не один, а несколько уровней «ловушек»; они находятся на разных расстояниях от дна зоны проводимости. По мере нагревания кристалла сначала будут освобождаться электроны из «ловушек» вблизи дна зоны проводимости, а затем уже из более глубоко расположенных «ловушек». В результате интенсивность люминесцентного свечения будет изменяться по мере увеличения температуры кристаллофосфора. На *кривой термовысвечивания*, отражающей зависимость интенсивности люминесценции от температуры, обнаруживается ряд максимумов, каждый из которых соответствует определенной группе «ловушек».

В качестве примера на рис. 8.6 показана кривая термовысвечивания кристаллофосфора на основе сульфида каль-

ция (CaS), активированного висмутом. На рисунке приведены две оси абсцисс: по одной откладываются значения температуры кристалла, а по другой — соответствующие значения энергии, отвечающие расстоянию от уровня «ловушки» до дна зоны проводимости. В данном случае «ловушки» располагаются на расстояниях 0,29, 0,34 и 0,67 эВ ниже дна зоны проводимости.

**Кинетика люминесценции.** Зависимость интенсивности люминесцентного свечения от времени (в частности, закон затухания люминесценции после прекращения возбуждения), а также зависимость интенсивности свечения от интенсивности возбуждения, температуры люминофора, концентрации тех или иных примесей — все это связано с кинетикой люминесценции. Она в значительной мере зависит от характера элементарных процессов, обуславливающих люминесценцию в конкретном люминофоре. На кинетику люминесценции существенно влияют факторы, приводящие к ее тушению или, напротив, к стимулированию.

Более проста кинетика резонансной и спонтанной люминесценции. Кинетика стимулированной люминесценции зависит от свойств метастабильного уровня и механизма стимулирования. Наиболее сложна кинетика рекомбинационной люминесценции в кристаллофосфорах, где обычно имеются электронные «ловушки» разных видов, характеризующиеся различной глубиной энергетических уровней. Эта кинетика определяется зависящими от температуры вероятностями различных процессов рекомбинации, а также процессов захвата и освобождения электронов различными «ловушками». Применяя старую терминологию, можно сказать, что кинетика фосфоресценции существенно более сложна, чем кинетика флуоресценции.

Затухание резонансной и спонтанной люминесценции (при условии, что  $B_k \approx 1$ ) происходит по экспоненциальному закону:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (8.2.2)$$

Здесь  $\tau$  — время жизни уровня высвечивания,

$$\tau = 1/A, \quad (8.2.3)$$

где  $A$  — коэффициент Эйнштейна для спонтанного испускания.

Если  $B_k < 1$ , т. е. если люминесценция подверглась тушению, то экспоненциальный закон (8.2.2) будет справедлив лишь в частном случае, когда вероятность тушения во-

стоянна. При этом

$$\tau = 1/(A + Q), \quad (8.2.4)$$

где  $Q$  — отнесенная к единице времени вероятность безызлучательного перехода с уровня высвечивания на основной уровень (вероятность  $Q$  обусловлена тушением люминесценции; ее можно назвать вероятностью тушения). Квантовый выход люминесценции в данном случае

$$B_k = A/(A + Q). \quad (8.2.5)$$

В случае рекомбинационной люминесценции закон затухания часто приближенно описывают формулой Беккереля:

$$I(t) = I_0/(1 + pt)^\alpha \quad (8.2.6)$$

(гиперболический закон затухания), где  $p$  — некоторая константа, а число  $\alpha$  принимает значение от 1 до 2.

### § 8.3. Применения люминесценции

**Светотехнические применения.** Прежде всего отметим *газосветные лампы*, в которых используется электрический разряд в газовой смеси. Образующиеся в разряде быстрые электроны возбуждают при столкновениях атомы или ионы газовой смеси, играющие роль центров люминесценции; свечение газосветных ламп — это свечение электролюминесценции. Газосветные лампы применяют для декоративного освещения, в светящихся рекламах, а также для различных научно-технических и медицинских целей. Лампы с неоновым наполнением дают оранжевое свечение, наполненные гелием — желтое свечение, наполненные аргоном — синее свечение. Газовый разряд в парах ртути порождает ультрафиолетовое излучение (с длинами волн 0,18 и 0,25 мкм), оказывающее сильное биологическое действие; оно используется, например, для уничтожения бактерий, для загара.

Наиболее важны в практическом отношении *люминесцентные лампы дневного света*, в которых происходит двухступенчатое преобразование электрической энергии в световое излучение. Трубка люминесцентной лампы содержит пары ртути; стенки трубки покрыты слоем специального люминофора. Сначала за счет электрического разряда в трубке возбуждаются атомы ртути. Затем ультрафиолетовое излучение атомов ртути поглощается люминофором на

---

стемках трубки, который, высвечиваясь, дает видимый свет. Люминесцентные лампы в несколько раз экономичнее ламп накаливания. Кроме того, они позволяют за счет подбора люминофоров получать свет желательного спектрального состава; в частности, можно получать свет, близкий к дневному. Сегодня люминесцентные лампы широко применяются для освещения улиц, общественных зданий, промышленных предприятий, транспорта и т. д.

Касаясь других светотехнических применений люминесценции, укажем электролюминесцентные сигнальные устройства на основе люминесцентных конденсаторов (например, в светящихся табло), дневные люминесцентные краски, люминесцентные красители-отбеливатели.

**Люминофоры в качестве детекторов невидимых излучений.** Существует много излучений, которые не воспринимаются глазом человека: инфракрасное и ультрафиолетовое оптические излучения, рентгеновское излучение, различные корпускулярные излучения (пучки электронов, протонов, нейтронов и т. д.). Наиболее распространенный способ детектирования всех этих невидимых излучений — наблюдение вызванного ими люминесцентного свечения, которое попадает в видимую область спектра.

Как известно, частота люминесцентного свечения меньше частоты возбуждающего излучения. Поэтому вполне понятно применение люминофоров для детектирования ультрафиолетовых лучей: они возбуждают люминофор, который затем высвечивается в видимой области спектра. Но люминофоры могут с успехом детектировать также и инфракрасное излучение. Для этой цели используют вещества со стимулированной люминесценцией. Детектируемое инфракрасное излучение играет роль стимулятора, обеспечивающего переход центра люминесценции с метастабильного уровня на уровень высвечивания (см. рис. 8.1, *д*). В кристаллофосфорах инфракрасное излучение может способствовать освобождению электронов из «ловушек» и тем самым стимулировать люминесценцию. В отдельных случаях инфракрасное излучение может инициировать переходы, при которых энергия возбуждения передается центрам тушения; тогда наблюдается не усиление, а, наоборот, ослабление люминесценции кристаллофосфора.

Люминесценция сыграла важную роль в открытии рентгеновских лучей и явления радиоактивного распада. При рентгеноскопии объекта на пути прошедшего сквозь него рентгеновского пучка помещают специальный экран, люми-

несцирующий под действием рентгеновского излучения. При рентгенографии объекта изображение, появляющееся на люминесцентном экране, фиксируют на фотографической пластинке или пленке. Люминесцентные детекторы широко используются также для регистрации различных корпускулярных излучений. Попадая на такой детектор, частица излучения вызывает множество актов ионизации; при этом возникает вспышка свечения — сцинтилляция. В люминесцентном методе регистрации частиц применяют кристалл-сцинтиллятор и фотоэлектронный умножитель. Сцинтилляция, вызванная частицей, поступает на вход фотоэлектронного умножителя и преобразуется в достаточно интенсивный электрический сигнал. Заметим, что кристаллы-сцинтилляторы должны иметь очень малое время затухания люминесценции (порядка  $10^{-6}$ — $10^{-7}$  с), чтобы сигнал от одной частицы не перекрывался с сигналом от предыдущей.

**Люминесценция в электронно-лучевых трубках.** Принципиально важной и необходимой частью любой электронно-лучевой трубки является экран, люми-

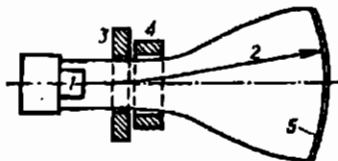


Рис. 8.7

несцирующий при попадании на него электронного пучка (явление катодолюминесценции). Простейшая электронно-лучевая трубка схематически изображена на рис. 8.7. Здесь: 1 — электронная пушка, 2 — пучок электронов, 3 и 4 — устройство для его фокусировки и отклонения, 5 — люминесцентный экран. Для люминесцентных экранов применяют кристаллофосфоры с большой яркостью свечения, стойкостью по отношению к бомбардировке электронами, достаточно высоким пространственным разрешением. Используются экраны как с большой длительностью послесвечения, так и с быстрым затуханием люминесценции — в зависимости от решаемых технических задач.

Остановимся особо на люминесцентных экранах цветных телевизоров. Экраны с черно-белым изображением покрыты по всему полю одинаковыми кристалликами. На экранах с цветным изображением поле строго разделено на маленькие равносторонние треугольники. В вершинах каждого треугольника находятся (в виде мозаики) кристаллики трех разных кристаллофосфоров, один из которых высвечивается красным светом, другой — синим, третий —



зеленым. Размеры кристалликов и расстояния между ними порядка 0,1 мм. Экран возбуждается не одним, а тремя независимыми электронными пучками. Благодаря специальной маске с отверстиями каждый из пучков проходит при сканировании экрана только по кристалликам определенной цветности. Высвечивание трех соседних кристалликов разной цветности воспринимается глазом как одна светящаяся «точка»; ее цвет определяется соотношением яркости свечения разных кристалликов, которая, в свою очередь, зависит от интенсивности соответствующих электронных пучков в данный момент времени.

**Электронно-оптический преобразователь.** Рассмотрим электровакуумный прибор, в котором используются сразу два квантово-оптических явления: фотоэлектронная эмиссия и катодолюминесценция. Речь идет об *электронно-оптическом преобразователе* (ЭОП) — приборе, предназначенном для преобразования невидимого глазом изображения объекта (в инфракрасных, ультрафиолетовых или рентгеновских лучах) в видимое изображение, а также для усиления яркости изображения.

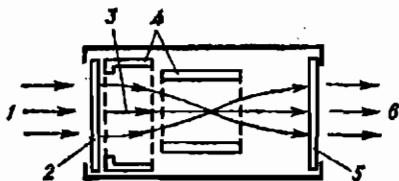


Рис. 8.8

Упрощенная схема ЭОП показана на рис. 8.8. Излучение 1 от объекта падает на фотокатод 2; на поверхности фотокатода формируется изображение объекта (например, в инфракрасных лучах).

Из фотокатода вылетают электроны, возникает электронный поток 3. Величина фотоэмиссии с различных участков поверхности фотокатода изменяется в соответствии с распределением яркости изображения, спроецированного на эту поверхность; фотокатод преобразует исходное оптическое (в данном случае инфракрасное) изображение объекта в электронное. На пути от фотокатода к люминесцентному экрану 5 фотоэлектроны ускоряются электрическим полем. Электронные линзы 4 проецируют электронное изображение на люминесцентный экран. Вследствие катодолюминесценции на внешней стороне экрана образуется световое изображение объекта в видимой области спектра; световой сигнал 6 поступает от экрана к наблюдателю. Выходное световое изображение отличается от входного тем, что оно попадает в область видимого изображения, а также более высокой яркостью.

Показанный на рис. 8.8 ЭОП является однокаскадным. Существуют многокаскадные ЭОП, состоящие из нескольких последовательных ступеней (каскадов), на каждой из которых происходит увеличение яркости светового изображения. В современных многокаскадных ЭОП коэффициент преобразования (отношение плотности выходного светового потока к плотности входного светового потока) достигает  $10^6$  и более. ЭОП позволяет регистрировать сцинтилляции даже от одного фотона, попадающего на входной фотокатод; тем самым оказывается возможным счет *отдельных фотонов* в световых пучках малой интенсивности.

**Люминесцентный анализ.** Люминесценция широко используется для анализа состава и чистоты веществ, для обнаружения и распознавания различных примесей и загрязнений. Люминесцентный анализ основан на том, что каждое вещество имеет свой спектр люминесценции. Исследуемое вещество возбуждают и затем изучают спектральный состав его люминесцентного излучения.

Люминесцентный анализ обладает рядом важных достоинств, которые во многих случаях делают этот метод более предпочтительным по сравнению с другими методами анализа и, в частности, по сравнению с химическим анализом. Во-первых, люминесцентный метод анализа характеризуется очень высокой чувствительностью; для проведения анализа достаточно иметь ничтожное количество вещества, например всего лишь  $10^{-6}$  г и даже меньше. Во-вторых, в процессе люминесцентного анализа исследуемое вещество полностью сохраняется, что позволяет многократно проводить анализ на одном и том же образце, анализировать уникальные образцы. В-третьих, люминесцентный анализ осуществляется очень быстро: посылается возбуждающий световой сигнал и регистрируется при помощи спектрометра или спектрографа спектр люминесценции. Это позволяет проводить динамический анализ, т. е. отслеживать изменение состава вещества с течением времени. В-четвертых, люминесцентный анализ может выполняться на расстоянии. Так, посылая лазерный луч определенной длины волны в исследуемую область атмосферы и принимая поступающее из этой области люминесцентное излучение, можно изучать характер и степень загрязнения атмосферы в данном месте.

С помощью лазерного луча можно, например, проводить динамический анализ загрязнений атмосферы вблизи выходных отверстий заводских труб или в области, через кото-

---

рую только что пролетел реактивный лайнер. Можно поместить лазер на самолете, который низко летит над морем, и сканировать лазерным лучом водную поверхность. Исследуя спектр люминесцентных световых откликов, поступающих от освещаемых участков поверхности моря (луч скользит по поверхности и в разные моменты времени освещает разные участки), можно делать заключение о наличии на воде нефтяной пленки, а также о размерах и форме площади, покрытой этой пленкой.

#### § 8.4. От резонансной флуоресценции к эффекту Мёссбауэра

**Резонансная флуоресценция и резонансное поглощение.** Рассматривая в § 8.1 различные физические механизмы люминесценции, мы отмечали, в частности, резонансную флуоресценцию (см. рис. 8.1, а). Для возбуждения резонансной флуоресценции атомов данного типа естественно использовать излучение, испускаемое такими же атомами. Американский физик Р. Вуд открыл в 1904 г. резонансную флуоресценцию, облучая пары натрия светом от натриевого источника, соответствующим желтой линии натрия; он обнаружил, что пары начинают светиться, испуская излучение той же частоты.

Будем рассматривать совокупность атомов определенного типа, полагая для простоты, что они имеют только два энергетических уровня (нижний  $E_1$  и верхний  $E_2$ ). При переходе атома с уровня  $E_2$  на уровень  $E_1$  рождается фотон с энергией  $\hbar\omega$ . Этот фотон может быть поглощен другим атомом, который при этом перейдет с уровня  $E_1$  на уровень  $E_2$ . Возвращаясь затем на уровень  $E_1$ , рассматриваемый атом испустит фотон люминесценции.

Испускание фотона одним атомом и последующее его поглощение другим атомом того же типа составляют сущность процесса, называемого *резонансным поглощением*. Поглощение фотона атомом и последующее испускание этим атомом нового фотона на том же самом переходе составляют сущность *резонансной флуоресценции*. Очевидно, что оба резонансных процесса органически связаны друг с другом.

На рис. 8.9 схематично показано, чем различаются эксперименты по резонансному поглощению и резонансной флуоресценции. Здесь 1 — возбужденные атомы рассматриваемого типа (источник света); 2 — исходный пучок фотонов известной интенсивности; 3 — невозбужденные ато-

мы данного типа (поглощающее вещество); 4 — пучок фотонов, прошедших через 3, не испытав поглощения; 5 — фотоны, испущенные атомами 3 в результате люминесценции. В эксперименте по резонансному поглощению измеряют интенсивность светового пучка 4. В экспериментах по резонансной флуоресценции измеряется интенсивность люминесцентного излучения 5.

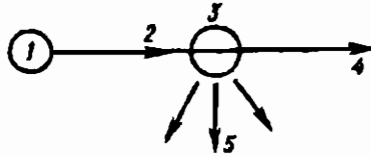


Рис. 8.9

**Резонансные процессы и отдача атома.** Итак, пусть имеется совокупность двухуровневых атомов с энергией перехода  $E_2 - E_1$ . До сих пор мы считали, что энергия  $\hbar\omega$  фотона, испущенного или поглощенного на данном переходе, точно равна энергии перехода:

$$\hbar\omega = E_2 - E_1. \quad (8.4.1)$$

Напомним, что именно это и утверждает правило частот Бора (3.1.11).

Отметим, однако, что соотношение (8.4.1) не является точным. Испущенный атомом фотон уносит не только энергию, но и импульс, вследствие чего атом испытывает отдачу. Предположим, что рассматривается свободный атом, который до испускания фотона покоился. Обозначим через  $\hbar\omega_n$  и  $\vec{p}$  энергию и импульс испущенного фотона;  $p = \hbar\omega_n/c$ . Согласно закону сохранения импульса, атом приобретает импульс  $\vec{P}$ , равный по модулю импульсу фотона, но направленный в противоположную сторону;  $\vec{P} = -\vec{p}$ . Импульс  $\vec{P}$  определяет энергию отдачи атома:

$$W = \frac{P^2}{2M} = \frac{p^2}{2M} = \frac{(\hbar\omega_n/c)^2}{2M} = \frac{(\hbar\omega_n)^2}{2Mc^2}, \quad (8.4.2)$$

где  $M$  — масса атома. Энергия отдачи черпается за счет энергии перехода  $E_2 - E_1$ :

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_n + W, \quad (8.4.3)$$

или с учетом (8.4.2)

$$\hbar\omega_n \left( 1 + \frac{\hbar\omega_n}{2Mc^2} \right) = E_2 - E_1. \quad (8.4.4)$$

Для видимого света  $\hbar\omega_n \approx 1$  эВ ( $\omega \approx 10^{15}$  с<sup>-1</sup>). Величину  $Mc^2$  положим равной  $10^9$  МэВ, что отвечает атомным массам

порядка 100. В этом случае  $\hbar\omega_n/2Mc^2 \approx 10^{-5} \ll 1$ . Легко сообразить, что неравенство  $\hbar\omega_n/2Mc^2 \ll 1$  выполняется для всех атомов (включая легкие), если частота  $\omega$  не превышает верхней границы оптического диапазона, которую приближенно можно принять равной  $10^{17} \text{ с}^{-1}$  ( $\lambda \approx 0,01 \text{ мкм}$ ). Именно это обстоятельство и позволяет пользоваться в атомной физике правилом частот Бора.

Но может ли малость слагаемого  $\hbar\omega_n/2Mc^2$  в (8.4.4) служить успокаивающим фактором при рассмотрении обсуждаемых в данном параграфе резонансных процессов? Атом

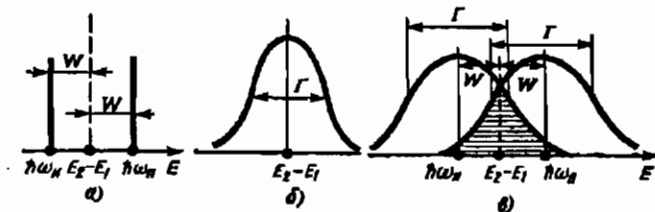


Рис. 8.10

приобретает импульс и соответствующую энергию не только при испускании, но и при поглощении фотона. В последнем случае энергия, приобретаемая атомом (будем условно называть ее по-прежнему энергией отдачи), есть

$$W' = (\hbar\omega_n)^2/2Mc^2, \quad (8.4.5)$$

где  $\hbar\omega_n$  — энергия поглощаемого фотона. Энергия фотона расходуется на энергию перехода  $E_2 - E_1$  и энергию атома  $W'$ :

$$\hbar\omega_n = (E_2 - E_1) + W'. \quad (8.4.6)$$

Учитывая, что  $\hbar\omega_n/2Mc^2 \ll 1$ , воспользуемся вместо (8.4.4) соотношением (8.4.1) и перепишем (8.4.2) и (8.4.5) в виде

$$W = W' = (E_2 - E_1)^2/2Mc^2. \quad (8.4.7)$$

Далее рассмотрим (8.4.3) и (8.4.6) (с учетом (8.4.7)). Из этих соотношений получаем, что для свободных атомов энергии испущенного и поглощенного на рассматриваемом переходе фотонов не совпадают; они *сдвинуты* друг относительно друга на удвоенную энергию отдачи атома:

$$\hbar\omega_n - \hbar\omega_n = 2W \quad (8.4.8)$$

(рис. 8.10, а). Напрашивается вывод, что испущенный одним атомом фотон не может быть поглощен на таком же

переходе в другом атоме и, следовательно, резонансное поглощение на свободных атомах невозможно.

Однако такой вывод был бы неверным. Дело в том, что переход между уровнями  $E_1$  и  $E_2$ , как и любой другой переход, характеризуется не строго определенной энергией  $E_2 - E_1$ , а спектром энергий, или, иначе говоря, *спектральной линией* некоторой ширины  $\Gamma$  (рис. 8.10, б; как видно из рисунка, ширина линии измеряется на половине ее высоты). Ширина линии обусловлена несколькими причинами, из которых укажем лишь две основных. Первая связана с тем, что атом «живет» на возбужденном уровне  $E_2$  конечное время  $\tau$ ; поэтому, согласно соотношению неопределенностей (4.1.3), энергия уровня имеет неопределенность порядка  $\hbar/\tau$ . Эта неопределенность обуславливает *естественную* ширину спектральной линии:

$$\Gamma_1 \approx \hbar/\tau. \quad (8.4.9)$$

Вторая причина связана с тем, что в действительности атомы не покоятся (до испускания или поглощения фотона), а все время находятся в тепловом движении. Это приводит к эффекту Доплера, обуславливающему *доплеровскую* ширину спектральной линии:

$$\Gamma_2 \approx (E_2 - E_1) \sqrt{kT/Mc^2}, \quad (8.4.10)$$

где  $T$  — температура газа атомов,  $k$  — постоянная Больцмана. Результирующая ширина линии

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots \quad (8.4.11)$$

Таким образом, вместо дискретных энергий  $\hbar\omega_n$  и  $\hbar\omega_n$  надо рассматривать спектральные линии поглощения и испускания, характеризующиеся некоторой шириной  $\Gamma$ ; при этом  $\hbar\omega_n$  и  $\hbar\omega_n$  фиксируют максимумы указанных линий (рис. 8.10, в). В резонансном поглощении будут участвовать фотоны, энергия которых попадает в интервал, соответствующий области перекрытия линий испускания и поглощения (на рис. 8.10, в эта область заштрихована).

Теперь возникает вопрос, насколько сильно перекрываются линии испускания и поглощения, когда энергия перехода соответствует энергии фотона видимого света. Полагая  $E_2 - E_1 = 1$  эВ и  $Mc^2 = 10^9$  эВ, получаем из (8.4.7), что  $W = 5 \cdot 10^{-12}$  эВ. Время жизни атома в возбужденном состоянии порядка  $10^{-8}$  с; согласно (8.4.9), отсюда следует, что  $\Gamma_1 \approx 10^{-7}$  эВ. Таким образом, даже без учета доплеровского слагаемого ширины спектральной линии оказывается

---

на много порядков больше энергии отдачи атома. Фактически линии испускания и поглощения накладываются друг на друга.

Значит, учет отдачи атомов при испускании и поглощении фотонов оказывается несущественным не только для правила частот, но и для резонансных процессов. Зачем же в таком случае весь этот разговор? — может заметить читатель. Очевидно, — ответим мы, — что оценка роли эффекта отдачи при испускании или поглощении атомом фотона необходима в любом случае. Эта оценка показала, что в *атомной спектроскопии* данным эффектом можно пренебречь. Однако, как мы убедимся ниже, он становится весьма важным в *ядерной спектроскопии*.

Резонансные процессы на переходах между уровнями атомных ядер. У атомных ядер, как и у атомов, имеются уровни энергии. На переходах между уровнями испускаются и поглощаются кванты излучения с энергиями примерно от 10 кэВ до 1 МэВ ( $\omega \approx 10^{16} - 10^{22} \text{ с}^{-1}$ ); это есть кванты  $\gamma$ -излучения или, проще,  $\gamma$ -кванты. Казалось бы, что для  $\gamma$ -квантов должны наблюдаться процессы ядерного резонансного поглощения и ядерной резонансной флуоресценции, аналогичные соответствующим процессам в атомной спектроскопии. Однако наблюдать ядерные резонансные процессы долго не удавалось. Это объясняется обсуждавшимся выше эффектом отдачи частицы (в данном случае атомного ядра) при испускании и поглощении кванта излучения ( $\gamma$ -кванта).

Энергия и импульс  $\gamma$ -кванта во много раз больше, чем у фотона видимого света; соответственно во много раз больше и энергия отдачи  $W$ . При  $\hbar\omega = 100 \text{ кэВ}$  получаем (для  $Mc^2 = 10^6 \text{ МэВ}$ ), что  $W \approx 0,1 \text{ эВ}$ . Время жизни атомных ядер на возбужденных уровнях порядка  $10^{-10} - 10^{-8} \text{ с}$ ; следовательно, естественная ширина спектральных линий составляет примерно  $10^{-9} - 10^{-7} \text{ эВ}$ . Основную роль играет в данном случае, однако, не естественная, а доплеровская ширина; при комнатных температурах она оказывается порядка 0,1 эВ, т. е. того же порядка, что и энергия отдачи  $W$ .

Итак, для сравнительно мягкого  $\gamma$ -излучения ( $\hbar\omega \approx 100 \text{ кэВ}$ ) относительный сдвиг линий испускания и поглощения оказывается соизмеримым с шириной самих линий. При более высоких значениях энергии перехода (для более жесткого  $\gamma$ -излучения) относительный сдвиг линий может стать заметно больше ширины линий; ведь

энергия отдачи пропорциональна  $(E_2 - E_1)^2$ , тогда как доплеровская ширина линии пропорциональна  $E_2 - E_1$  (см. (8.4.7) и (8.4.10)).

Чтобы обеспечить более благоприятные условия для наблюдения резонансного поглощения  $\gamma$ -излучения или ядерной резонансной флуоресценции, предпринимались специальные меры, направленные либо на увеличение доплеровской ширины линий, либо на уменьшение величины  $W$ . В первом случае вещество нагревали. Во втором заставляли источник  $\gamma$ -излучения быстро двигаться (со скоростью порядка сотен метров в секунду) по направлению к поглощающему веществу; радиоактивное вещество помещали на ободу быстро вращающегося диска (рис. 8.11). Так поступали до 1958 г.

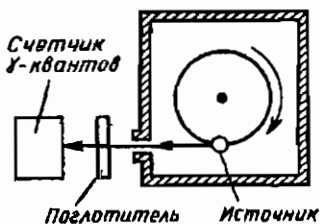


Рис. 8.11

**Открытие Мёссбауэра.** В 1958 г. появилась статья молодого немецкого физика Рудольфа Мёссбауэра «Резонансное поглощение  $\gamma$ -излучения в  $^{101}\text{Ir}$ ». В статье сообщалось об открытии, за которое позднее, в 1961 г., Мёссбауэр был удостоен Нобелевской премии.

Мёссбауэр изучал ядерное резонансное поглощение  $\gamma$ -излучения в изотопе иридия с массовым числом 191 ( $^{191}\text{Ir}$ ). В данном случае энергия перехода составляла 129 кэВ, доплеровская ширина спектральной линии при комнатной температуре была равна 0,1 эВ, что совпадало с величиной относительного сдвига линий испускания и поглощения. Желая уменьшить резонансное поглощение, Мёссбауэр охладил источник  $\gamma$ -излучения и поглотитель до 88 К. К своему удивлению он обнаружил, что резонансное поглощение при этом не только не уменьшилось, но, напротив, существенно усилилось. Усиление резонансного поглощения наблюдалось при неподвижных источнике и поглотителе; оно исчезало, когда источник начинал двигаться относительно поглотителя со скоростью, равной всего нескольким сантиметрам в секунду.

Исследования Мёссбауэра показали, что спектры испускания и поглощения  $\gamma$ -излучения имеют для охлажденного вещества вид, представленный на рис. 8.12. Каждый спектр состоит из узкой интенсивной линии (ее называют теперь



мёссбауэровской линией) и широкой линии меньшей интенсивности. Мёссбауэровские линии испускания и поглощения практически совпадают друг с другом; широкие же линии смещены друг относительно друга на удвоенную энергию отдачи атомного ядра. С повышением температуры вещества интенсивность мёссбауэровских линий падает (при этом их ширина не меняется), тогда как интенсивность широких линий, а также их ширина возрастают.

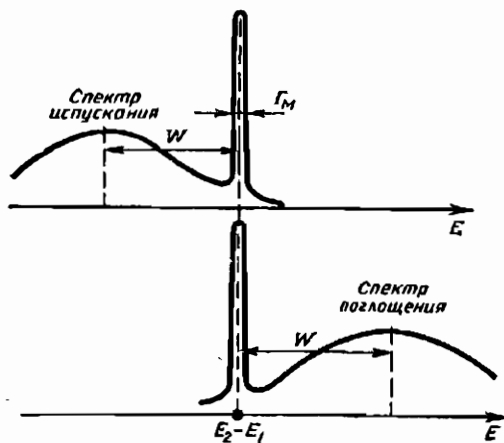


Рис. 8.12

Ширина мёссбауэровской линии  $\Gamma_M$  равна естественной ширине спектральной линии для рассматриваемого перехода в данном атомном ядре. Она составляет примерно  $10^{-5}$ — $10^{-6}$  эВ, что на несколько порядков меньше ширины широкой линии (последняя ширина есть доплеровская ширина). Например, для исследованного Мёссбауэром перехода в иридии  $\Gamma_M = 5 \cdot 10^{-6}$  эВ. Узостью мёссбауэровских линий и объясняется тот факт, что уже при скорости источника, равной всего нескольким сантиметрам в секунду, резонансное поглощение  $\gamma$ -излучения практически полностью прекращается. Такой скорости достаточно для того, чтобы мёссбауэровские линии испускания и поглощения, сместившись друг относительно друга, перестали взаимно перекрываться.

Наличие в спектрах испускания и поглощения совпадающих друг с другом мёссбауэровских линий указывает на то, что возможно испускание и поглощение  $\gamma$ -квантов, при котором энергия отдачи равна нулю. При уменьшении

температуры вещества доля таких  $\gamma$ -квантов возрастает. Открытое Мёссбауэром ядерное резонансное поглощение  $\gamma$ -квантов без отдачи получило название *эффекта Мёссбауэра*.

Эффект Мёссбауэра наблюдался на многих ядрах. Интересен этот эффект на ядрах изотопа железа  $^{56}\text{Fe}$  (энергия перехода 14,4 кэВ). В этом случае мёссбауэровская линия четко реализуется уже при комнатной температуре (и даже при температурах до 1000°C), так что надобность в охлаждении вещества в данном случае отпадает. Кроме того, ширина указанной мёссбауэровской линии особенно мала; она составляет всего  $5 \cdot 10^{-6}$  эВ.

**Физика эффекта Мёссбауэра.** Все приведенные выше оценки для энергии отдачи  $W$  делались в предположении, что атомы (атомные ядра) являются свободными. Однако в действительности они обычно связаны в кристаллической решетке (испускающее и поглощающее кванты излучения вещество, как правило, находится в твердой фазе). Это обстоятельство несущественно в атомной спектроскопии, где энергия отдачи очень мала ( $W \approx 10^{-11}$  эВ) и ширина спектральных линий заведомо превышает ее на несколько порядков. В случае же ядерных резонансных процессов, в которых участвуют  $\gamma$ -кванты, указанное обстоятельство оказывается существенным.

Итак, предположим, что находящееся в кристаллической решетке атомное ядро испускает  $\gamma$ -кванты. Импульс отдачи будет, очевидно, таким же, как и в случае свободного ядра, однако теперь он передается кристаллу как целому. Энергия перехода может в принципе разделиться между испущенным  $\gamma$ -квантом, колебаниями кристаллической решетки, ядром, испустившим  $\gamma$ -квант, и кристаллом как целым. Две последние возможности следует сразу же исключить. Ведь для того, чтобы ядро могло, испытав отдачу, покинуть свое место в решетке, требуется энергия порядка по крайней мере 10 эВ, а энергия отдачи не превышает десятых долей электрон-вольта. Что же касается энергии отдачи кристалла как целого, то она, очевидно, ничтожно мала, так что ею можно заведомо пренебречь. Таким образом, энергия перехода распределяется в действительности лишь между энергией  $\gamma$ -кванта и энергией фононов. При этом существует вероятность того, что в некоторых случаях переход будет происходить *без рождения фононов*, т. е. без изменения колебательного состояния решетки. Именно такие переходы обуславливают появление мёссбауэровской спектральной линии.

Заметим, что в переходах, сопровождающихся рождением фононов, будут возбуждаться фононы с энергиями, близкими к максимальной энергии  $\hbar\Omega_{\max}$  фононного спектра данного кристалла. Длина волны таких фононов минимальна; она равна удвоенному межатомному расстоянию (в этом случае соседние атомные ядра движутся в противофазе; см. § 6.1). Последнее как раз и наблюдается, когда ядро, испустившее  $\gamma$ -квант, приобретает всю энергию отдачи и ударяет в соседнее ядро. Для возбуждения колебаний, соответствующих более длинным волнам (иначе говоря, для рождения фононов с энергиями меньше  $\hbar\Omega_{\max}$ ), надо, чтобы испускание  $\gamma$ -кванта приводило в движение сразу несколько атомных ядер, что маловероятно. Таким образом, в ядерном резонансном поглощении могут участвовать практически лишь фононы с энергиями, близкими к  $\hbar\Omega_{\max}$ . Чем ниже температура кристалла, тем меньше в нем таких фононов и, следовательно, тем вероятнее мёссбауэровское резонансное поглощение (поглощение, при котором колебательное состояние кристаллической решетки не изменяется).

**Эффект Мёссбауэра и обнаружение гравитационного смещения частоты фотонов.** Область применений эффекта Мёссбауэра весьма обширна. Он широко используется в *ядерной физике* и *физике твердого тела*. В частности, этот эффект позволяет измерять времена жизни возбужденных состояний атомных ядер и выявлять фононные спектры кристаллов. Мы не будем останавливаться на всех этих применениях, а рассмотрим лишь применение, имеющее непосредственное отношение к физике фотона, — для обнаружения *гравитационного смещения частоты фотона*.

Согласно общей теории относительности, энергия фотона (а значит, и его частота) должна изменяться при подъеме или, напротив, при падении фотона в поле земного тяготения. Предположим, что фотон летит вертикально вверх в гравитационном поле Земли, характеризуемом ускорением  $g$ , и проходит путь длиной  $l$ . Его энергия должна при этом уменьшиться на величину  $mgl$ , где масса  $m$  есть энергия фотона  $\hbar\omega$ , деленная на квадрат скорости света:  $m = \hbar\omega/c^2$ . Следовательно, энергия фотона в конце пути должна быть равна

$$\hbar\omega' = \hbar\omega - \frac{\hbar\omega}{c^2} gl = \hbar\omega \left( 1 - \frac{gl}{c^2} \right). \quad (8.4.12)$$

Отсюда видно, что относительное изменение (смещение)

частоты фотона составит

$$\Delta\omega/\omega = (\omega - \omega')/\omega = gl/c^2. \quad (8.4.13)$$

При движении фотона вверх (когда источник света внизу, а детектор сверху) должно наблюдаться *красное* смещение частоты фотона, а при движении вниз (источник сверху, детектор внизу) – *фиолетовое* смещение.

Гравитационное смещение частоты фотонов экспериментально обнаружили американские физики Р. Паунд и Г. Ребка в 1959 г., воспользовавшись эффектом Мёссбауэра. Они поместили источник  $\gamma$ -квантов ( $^{57}\text{Fe}$ ) и поглотитель на вертикальной прямой на расстоянии 21 м один от другого. Согласно (8.4.13), относительное изменение частоты фотона при прохождении такого расстояния равно всего  $2 \cdot 10^{-16}$ . Оно обуславливает незначительное относительное смещение мёссбауэровских линий испускания и поглощения, которое можно обнаружить в эксперименте по небольшому ослаблению резонансного поглощения. Смещение составило всего 1 % от ширины мёссбауэровской линии (в  $^{57}\text{Fe}$  она равна  $5 \cdot 10^{-9}$  эВ); этого оказалось достаточно для уверенного обнаружения эффекта. Полученный результат составил  $0,99 \pm 0,05$  от предсказанного теорией.

## ГЛАВА 9

### НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ И МНОГОФОТОН- НЫЕ ПРОЦЕССЫ

#### § 9.1. Нелинейная оптика: ее сущность и первые шаги

**Оптика линейная и нелинейная; нелинейно-оптические явления.** Световые пучки в вакууме или в воздухе проходят одна сквозь другую, не оказывая друг на друга какого-либо воздействия. В этом проявляется *принцип суперпозиции* световых волн, из которого следует *линейность* уравнений классической оптики. На фотонном языке суперпозиция световых волн означает, что фотоны непосредственно друг с другом не взаимодействуют.

Предположим теперь, что свет распространяется не в воздухе, а в плотной прозрачной среде, например в жидкости или в диэлектрическом кристалле. Сохраняется ли в этом случае принцип суперпозиции световых волн? Классическая оптика отвечала на этот вопрос утвердительно. **Ведь источники света, с какими она имела дело, генериро-**

вали световые поля напряженностью не выше примерно  $10^8$  В/м, что на несколько порядков ниже напряженностей внутриатомных и внутримолекулярных полей ( $10^9$ — $10^{12}$  В/м). Ясно, что при таком соотношении сил световая волна не в состоянии сколь-либо заметно повлиять на внутриатомные поля; в этих условиях физические характеристики среды (диэлектрическая восприимчивость, показатель преломления, коэффициент поглощения света и др.) не зависят от интенсивности света, проходящего сквозь среду. Постоянство характеристик среды обуславливает линейность уравнений классической оптики и в рассматриваемом случае.

С появлением лазеров, генерирующих мощное когерентное излучение, ситуация изменилась. Лазеры позволяют получать световые поля напряженностью до  $10^9$ — $10^{10}$  В/м. Теперь напряженность поля световой волны уже сопоставима с напряженностью полей в атомах и молекулах. А это означает, что при прохождении такой световой волны сквозь вещество его физические характеристики изменяются — они обнаруживают зависимость от напряженности светового поля, а следовательно, от интенсивности света. В результате приходится иметь дело уже с *нелинейными* уравнениями.

Рассмотрим, например, диэлектрическую восприимчивость среды  $\alpha$ . Она связывает напряженность  $E$  светового поля (внешнее воздействие на среду) с поляризацией среды  $P$  (с откликом на внешнее воздействие):

$$P = \alpha E. \quad (9.1.1)$$

Уравнения типа (9.1.1), устанавливающие связь между каким-либо внешним воздействием на среду и откликом среды на это воздействие, называют *материальными уравнениями*. Если параметры среды не зависят от интенсивности внешнего воздействия, материальные уравнения оказываются линейными. Так, уравнение (9.1.1) является линейным по отношению к  $E$ , если диэлектрическая восприимчивость среды  $\alpha$  не зависит от напряженности  $E$  поля световой волны. Такая ситуация как раз и имела место в долазерной оптике, в связи с чем эту оптику можно было бы назвать «линейной оптикой».

При прохождении сквозь среду интенсивного лазерного пучка восприимчивость  $\alpha$  уже не может считаться постоянным параметром; теперь ее надо рассматривать как функцию от напряженности поля световой волны. Представим

эту функцию в виде суммы быстро убывающих слагаемых:

$$\alpha(E) = \kappa + \chi E + \theta E^2 + \dots, \quad (9.1.2)$$

где  $\kappa$ ,  $\chi$ ,  $\theta$ , ... — параметры среды, характеризующие ее поляризуемость. Материальное уравнение (9.1.1) становится теперь нелинейным:

$$P = \alpha(E) E = \kappa E + \chi E^2 + \theta E^3 + \dots \quad (9.1.3)$$

Иными словами, отклик среды на внешнее воздействие (в данном случае на поле световой волны) оказывается *нелинейным*. Отсюда и происходят термины «нелинейная оптика», «нелинейная среда», «нелинейная поляризация среды». Последний термин применяют к слагаемым  $\chi E^2$  и  $\theta E^3$  в (9.1.3);  $\chi$  и  $\theta$  называют *нелинейными восприимчивостями*.

В общем случае под «нелинейной средой» в оптике понимают среду, физические характеристики которой обнаруживают зависимость от интенсивности проходящего сквозь нее света. Одна и та же среда ведет себя как «линейная среда», когда через нее проходит относительно слабый световой пучок, и становится «нелинейной» при прохождении света достаточно высокой интенсивности. В нелинейной оптике рассматриваются *обратимые* изменения характеристик среды: по прекращении облучения вещества светом его характеристики возвращаются к прежним значениям.

Явления, связанные с обратимыми изменениями физических свойств среды под действием проходящего сквозь среду интенсивного света, называют *нелинейно-оптическими*. Выше мы говорили об изменении под действием света такой характеристики среды, как ее диэлектрическая восприимчивость. С этим связаны, в частности, явления генерации оптических гармоник, параметрического рассеяния света, параметрической генерации света — явления, прекрасно демонстрирующие нарушение принципа суперпозиции световых волн в среде (позднее мы поговорим о них подробнее). Нелинейно-оптические явления могут быть обусловлены изменением под действием света не только восприимчивости, но и других физических характеристик, например степени прозрачности (коэффициента поглощения) вещества.

Уточнения, касающиеся квадратично- и кубично-нелинейных сред. Уравнения (9.1.1)—(9.1.3) записаны в весьма упрощенном виде — без учета векторной природы поляри-

зации среды и напряженности поля, а также анизотропии свойств кристалла. Так как уравнение (9.1.3) — одно из основных уравнений в нелинейной оптике, то необходимо сделать некоторые уточнения.

Вследствие анизотропии кристалла направление отклика (вектора поляризации  $\vec{P}$ ) не совпадает, вообще говоря, с направлением внешнего воздействия (вектора напряженности  $\vec{E}$ ). Поэтому уравнение (9.1.1) следует записывать в виде

$$P_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} E_k, \quad (9.1.1a)$$

где индексы  $i$  и  $k$  фиксируют различные составляющие векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  и тензора  $\alpha$  (значения 1, 2, 3 этих индексов отвечают соответственно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -й составляющим). Из (9.1.1a) видно, что восприимчивость  $\alpha$  есть тензор второго ранга.

Соответствующим образом должны быть переписаны также уравнения (9.1.2) и (9.1.3):

$$\alpha_{ik}(\vec{E}) = \chi_{ik} + \sum_{l=1}^3 \chi_{ikl} E_l + \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \theta_{iklm} E_l E_m + \dots, \quad (9.1.2a)$$

$$\begin{aligned} P_i &= P_i^{\text{лин}} + P_i^{\text{кв}} + P_i^{\text{куб}} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^3 \chi_{ik} E_k + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \chi_{ikl} E_k E_l + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \theta_{iklm} E_k E_l E_m + \dots \end{aligned} \quad (9.1.3a)$$

Здесь индексы  $l$  и  $m$  играют такую же роль, что и индексы  $i$  и  $k$ . Нелинейные восприимчивости  $\chi$  и  $\theta$  являются тензорами соответственно третьего и четвертого ранга;  $\vec{P}^{\text{лин}}$  — вектор линейной поляризации,  $\vec{P}^{\text{кв}}$  и  $\vec{P}^{\text{куб}}$  — векторы нелинейной поляризации (соответственно квадратичной и кубической).

Все эти уточнения сделаны отнюдь не из любви к длинным формулам. Дело в том, что они приводят к важному качественному выводу. Допустим, что рассматривается не кристалл, а изотропная среда — жидкость. Выполним преобразование координат, состоящее в изменении направления сразу всех координатных осей ( $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow -z$ ). При преобразовании координат составляющие тензора преобразуются как произведения соответствующих координат. Например,  $\gamma_{111}$  преобразуется как произведе-

ние  $\chi_{yy}$ ,  $\chi_{zz}$  — как произведение  $yyz$  и т. д. При преобразовании  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow -z$  все составляющие тензора  $\chi$  должны изменить знак, так как им соответствуют произведения нечетного числа координат:  $\chi_{ikl} \rightarrow -\chi_{ikl}$ . С другой стороны, вследствие изотропности среды восприимчивость  $\chi$  не может изменяться при изменении направления координатных осей и, следовательно,  $-\chi_{ikl} = \chi_{ikl}$ . Значит,  $\chi_{ikl} = 0$ . Таким образом, мы видим, что в жидкостях (а также в кристаллах, обладающих центром симметрии) квадратичная нелинейная поляризация отсутствует вследствие симметрии. Нелинейность таких сред определяется в первом приближении кубической восприимчивостью; эти среды называют *кубично-нелинейными*. Для изотропной кубично-нелинейной среды уравнение (9.1.3) принимает вид

$$\vec{P} = \kappa \vec{E} + \theta E^2 \vec{E}. \quad (9.1.36)$$

Если используется кристалл с квадратичной восприимчивостью, то основной вклад в нелинейную поляризацию будет вносить квадратичная поляризация, поэтому такие кристаллы относят к *квадратично-нелинейным* средам. Для них имеем

$$P_i = \sum_{k=1}^3 \kappa_{ik} E_k + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \chi_{ikl} E_k E_l. \quad (9.1.3в)$$

В дальнейшем мы вернемся, простоты ради, к упрощенной форме записи уравнений. При этом будем иметь в виду сделанные уточнения и, используя, например, соотношение  $\chi E^2$ , будем помнить, что в действительности подразумевается соотношение  $\sum_k \sum_l \chi_{ikl} E_k E_l$ .

**Первый нелинейно-оптический эксперимент — просветление среды.** С. И. Вавилов еще в 20-х годах высказывал мысль, что квантовая природа света должна обуславливать нарушение принципа суперпозиции световых волн в среде и приводить к нелинейно-оптическим явлениям. Совместно с В. Л. Левшиным он осуществил в 1925 г. первый нелинейно-оптический эксперимент — наблюдал просветление уранового стекла под действием света конденсированной искры. В эксперименте было зафиксировано *уменьшение коэффициента поглощения* стекла на 1,5 % при точности измерений  $\pm 0,3$  %.

Физическое объяснение полученных в данном эксперименте результатов можно найти в книге С. И. Вавилова



«Микроструктура света» (1950): «Чем большее число молекул находится в возбужденном состоянии при распространении света в среде, т. е. чем больше световая мощность, тем заметнее должна уменьшаться доля поглощаемой энергии, так как возбужденные молекулы до своего возвращения в нормальное состояние перестают поглощать свет прежним образом. Поглощение должно, таким образом, зависеть от мощности светового потока. Очевидно, что отклонение от линейности будет тем заметнее, чем больше

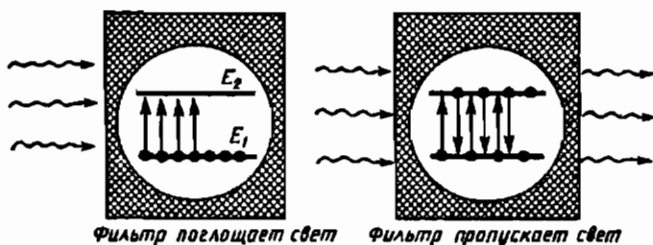


Рис. 9.1

средняя длительность возбужденных состояний». Заметим, что в случае с урановым стеклом длительность возбужденного состояния молекул, поглощающих свет, составляла 0,3 мс.

Наблюдавшееся Вавиловым и Левшиным нелинейно-оптическое явление называют *явлением просветления среды*. Сегодня известен целый ряд сред, в которых это явление находит практическое применение; их называют *просветляющимися фильтрами*. Принцип действия такого фильтра поясняет рис. 9.1. В исходном состоянии фильтра все поглощающие центры находятся на нижнем энергетическом уровне (на уровне  $E_1$ ); коэффициент поглощения фильтра максимален. При облучении фильтра фотонами с энергией  $\hbar\omega = E_2 - E_1$  происходят переходы поглощающих центров с уровня  $E_1$  на уровень  $E_2$  (одновременно фотоны инициируют обратные переходы, однако при более высокой заселенности нижнего энергетического уровня число таких переходов в единицу времени будет меньше числа переходов  $E_1 \rightarrow E_2$ ). Когда на обоих уровнях окажется одинаковое число центров, фильтр полностью просветлится; его коэффициент поглощения обратится в нуль. Падающие на такой фильтр фотоны будут инициировать одинаковые числа переходов как вверх, так и вниз; в результате интенсивность света, проходящего сквозь фильтр, не будет меняться.

Просветляющиеся фильтры широко применяются в современной лазерной технике. Помещая такой фильтр внутрь резонатора лазера, можно управлять режимом генерации — получать мощные световые импульсы длительностью порядка  $10^{-9}$ — $10^{-8}$  с (их называют «гигантскими импульсами») или последовательности сверхмощных световых импульсов, характеризующихся длительностью всего  $10^{-12}$  с и частотой следования 0,1—1 ГГц («пикосекундные импульсы»). В качестве просветляющихся фильтров в лазерах используют, например, растворы органических красителей — полиметиновых и цианиновых (фталоцианина и криптоцианина).

**Возникновение нелинейной оптики.** Как подчеркивал Вавилов, «нелинейность» среды должна наблюдаться не только в отношении поглощения света. «В общем случае, — писал он, — должна наблюдаться зависимость от световой мощности, т. е. нарушение суперпозиции, и в других оптических свойствах среды». В связи с этим Вавилов предсказывал падение постулата спектральной неизменности монохроматического света, составляющего фундамент ньютоновской оптики. Недаром он в одной из своих работ приводил, подвергая сомнению, следующие строки из написанной в 1758 г. поэмы Дюлара:

Но что же? Сих лучей тончайшее строенье!  
Не в силах изменить людское ухищренье!  
Вотще старания! Луч красный иль иной,  
Усилья одолев, цвет сохраняет свой.

Вавилов много размышлял о возможных исследованиях *нелинейных явлений в оптике*, связанных, в частности, с изменением частоты света. Его исключительная научная интуиция, умение видеть на много лет вперед в полной мере проявились в книге «Микроструктура света». В этой монографии сформулированы основные идеи и намечены пути развития нового направления в оптике, которому Вавилов дал название «нелинейная оптика».

С появлением лазера произошло второе (по сути дела, фактическое) рождение нелинейной оптики. Идеи Вавилова были развиты и воплощены в жизнь его учениками и последователями. Большой вклад в развитие нелинейной оптики внесли советские физики Р. В. Хохлов и С. А. Ахманов. Они установили в 1962 г. условия, при которых различные нелинейно-оптические явления (в частности, *удвоение частоты света*) должны протекать достаточно эффективно, выдвинули и обосновали идею *параметрической генерации*

света. Одновременно исследования по нелинейной оптике развернулись за рубежом. В 1961 г. американский физик П. Франкен впервые в мире наблюдал удвоение частоты излучения рубинового лазера в кристалле кварца

Удвоение частоты света (генерация второй оптической гармоники). Схема опыта Франкена показана на рис. 9.2. Излучение рубинового лазера 1 проходит сквозь кристалл 2 и затем анализируется спектрографом 3. На фотопластинке 4 регистрировались два пятна: яркое пятно А от красно-

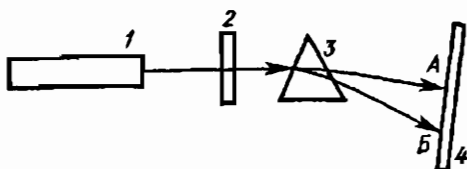


Рис. 9.2

го луча рубинового лазера ( $\lambda=0,694$  мкм) и слабенькое пятнышко Б от излучения с удвоенной частотой ( $\lambda=0,347$  мкм). Возникновение этого излучения (второй оптической гармоники) есть следствие нарушения суперпозиции световых волн, распространяющихся в кварце; излучение частоты  $2\omega$  можно рассматривать как результат взаимодействия двух световых волн частоты  $\omega$  в квадратично-нелинейной среде.

Покажем возможность данного эффекта в самых общих чертах (подробности и уточнения см. в § 9.4). Подставим выражение для напряженности световой волны

$$E = E_0 \cos [\omega (t - z/v)] \quad (9.1.4)$$

( $E_0$  — амплитуда волны,  $v$  — скорость ее распространения в среде,  $z$  — координата, вдоль которой распространяется волна) в выражение для нелинейной квадратичной поляризации  $\chi E^2$ . Воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением  $\cos^2\beta = (1 + \cos 2\beta)/2$ , мы обнаружим в получившемся выражении для нелинейной поляризации среды слагаемое  $(\chi E_0^2/2)\cos[2\omega(t - z/v)]$ . Это означает, что в среде распространяется волна поляризации с частотой  $2\omega$ , причем в таком же направлении и с такой же скоростью, что и исходная световая волна. Волну поляризации можно рассматривать как своеобразную «излучающую антенну», бегущую по среде со скоростью  $v$ . При определенных условиях эта «антенна» может переизлучать новую световую

волну. Частота переизлученной световой волны равна частоте волны поляризации, т. е. равна  $2\omega$ . Переизлученная световая волна и есть вторая оптическая гармоника. Напряженность ее поля можно записать в виде

$$E' = E_1 \cos [2\omega (t - z/v')], \quad (9.1.5)$$

где  $v'$  — скорость второй гармоники в данной среде.

Предвидим вопрос, который может возникнуть у читателя. Ну что ж, — может сказать он, — генерация второй гармоники действительно демонстрирует нарушение суперпозиции световых волн в среде. Однако при чем же здесь квантовая оптика? Какую роль играют в подобных явлениях фотонные представления?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо ввести понятие фотонной кратности элементарного процесса взаимодействия излучения с веществом и рассмотреть наряду с однофотонными также многофотонные процессы.

## § 9.2. Фотонная структура процессов взаимодействия света с веществом

Оптические переходы различной фотонной кратности. С процессами взаимодействия света с веществом сопоставляют определенные квантовые переходы частиц вещества (атомов, ионов, молекул). Эти переходы называют *оптическими*, так как каждый из них сопровождается рождением или уничтожением, а возможно, одновременно и рождением, и уничтожением некоторого числа фотонов. Наряду с оптическими существуют также *неоптические* переходы; они происходят без участия фотонов, например при столкновениях частиц.

Если в оптическом переходе участвует один фотон, то такой переход (такой процесс взаимодействия излучения с веществом) называют *однофотонным*. Однофотонный переход сопровождается либо рождением (испусканием), либо уничтожением (поглощением) фотона, причем испускание фотона может быть либо спонтанным, либо вынужденным. До сих пор мы имели дело только с однофотонными переходами (однофотонными процессами). Они определяют свойства теплового излучения и оптические спектры вещества, лежат в основе как фотоэлектрических, так и люминесцентных явлений. С однофотонными процессами связано и нелинейно-оптическое явление просветления среды.

---

Теперь обратимся к *многофотонным переходам (многофотонным процессам)*, так как именно они являются основой многих нелинейно-оптических явлений. Переход или процесс называют многофотонным, если в нем участвуют два фотона или более. Различают двухфотонные, трехфотонные, четырехфотонные и т. д. переходы (процессы).

Процесс кратности  $n$  ( $n$ -фотонный процесс) можно рассматривать в общем случае как процесс, в котором  $m$  фотонов рождается и  $n-m$  фотонов уничтожается. Изменяя число  $m$  от нуля до  $n$ , можно рассмотреть совокупность различных  $n$ -фотонных процессов.

Подчеркнем, что детализированное рассмотрение  $n$ -фотонного процесса во времени принципиально невозможно. Нельзя, например, считать, что сначала рождаются  $m$  фотонов, а потом уже уничтожаются  $n-m$  фотонов (или наоборот). Иными словами,  $n$ -фотонный процесс следует рассматривать как *единый процесс*, протекающий во времени единым образом и *не допускающий деления на отдельные временные этапы*. В этом состоит отличие  $n$ -фотонного процесса от последовательности из  $n$  однофотонных процессов.

При уничтожении фотонов происходит поглощение излучения частицами веществами (квантовыми системами), при рождении фотонов происходит испускание излучения. Испускание может быть спонтанным или вынужденным. Таким образом,  $n$ -фотонный процесс представляет собой в общем случае сочетание вынужденных процессов (испускания и поглощения) с процессами спонтанного испускания.

Вероятность многофотонных процессов быстро уменьшается по мере увеличения кратности процесса (при заданной интенсивности излучения). Отношение вероятности  $n$ -фотонного вынужденного процесса к вероятности  $(n-1)$ -фотонного процесса по порядку величины равно  $(E/E_a)^n$ , где  $E$  — напряженность поля исходной световой волны,  $E_a$  — напряженность внутриатомных полей. Для нелазерных источников света  $E \ll E_a$ , поэтому до создания лазеров можно было наблюдать только однофотонные процессы испускания и поглощения света и двухфотонные процессы рассеяния света. Изучение многофотонных процессов стало возможным лишь благодаря использованию достаточно мощных лазеров, для которых  $E \approx E_a$ . Как уже отмечалось, под действием излучения таких лазеров среда становится «нелинейной», начинают наблюдаться различные нелинейно-оптические явления. Естественно, что изучение много-

фотонных процессов оказывается органически связанным с изучением таких явлений.

Многофотонные процессы и виртуальные переходы. На рис. 9.3, а изображены два однофотонных перехода: сначала поглощается один фотон с энергией  $\hbar\omega$  и микросистема переходит с уровня 1 на уровень 2, затем поглощается другой фотон и микросистема переходит с уровня 2 на уровень 3. Теперь предположим, что уровень 2 отсутствует и микросистема совершает переход  $1 \rightarrow 3$ , поглотив

сразу два фотона с энергией  $\hbar\omega$ . Такой переход (двухфотонный переход) изображен на рис. 9.3, б, где штриховой прямой показан виртуальный уровень.

Что такое «виртуальный уровень»? Прежде всего подчеркнем, что он не имеет ничего общего с обычным (реальным) энергетическим уровнем. Двухфотонный переход принципиально нельзя разбить во времени на два этапа; следовательно, принципиально невозможно обнаружить микросистему на виртуальном уровне (в противном случае можно было бы выделить два этапа: до обнаружения и после обнаружения). Виртуальный уровень представляется, таким образом, как бы несуществующим. Его положение на энергетической шкале может быть произвольным; он может располагаться в области запрещенных значений энергии микросистемы.

Впрочем, не имеет смысла обсуждать здесь степень реальности (или нереальности) виртуальных уровней. Главное состоит в том, что реально существуют как однофотонные, так и многофотонные переходы. И если для представления однофотонных переходов достаточно обычных (реальных) уровней, то для представления многофотонных переходов этого недостаточно и приходится обращаться к специфическому понятию — виртуальным уровням.

Итак, при рассмотрении многофотонных процессов используют переходы через виртуальные уровни — виртуальные переходы. Специфика виртуальных уровней проявляется, в частности, в том, что по отношению к отдельным виртуальным переходам не надо применять условие сохранения

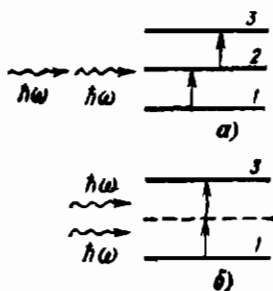


Рис. 9.3

энергии. Следует помнить, что нельзя измерить энергию микросистемы в виртуальном состоянии и что виртуальный уровень может рассматриваться лишь как промежуточное «звено»; надо рассматривать весь переход в целом и применять условие сохранения энергии для начального и конечного реальных состояний.

**Двухфотонные процессы.** Переходя к рассмотрению многофотонных процессов различной кратности, будем, для

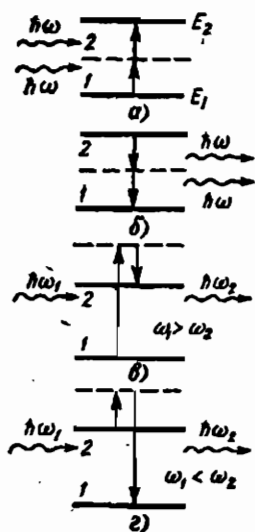


Рис. 9.4

простоты, подразумевать под микросистемой связанный электрон, взаимодействующий с излучением. При этом будем всякий раз указывать, какой переход совершает электрон и какие переходы происходят в поле излучения.

Начнем с двухфотонных процессов. На рис. 9.4 изображены четыре двухфотонных процесса. Процесс на рис. 9.4, а — *двухфотонное поглощение*: электрон переходит с уровня 1 на уровень 2; переходы в поле излучения — уничтожаются два фотона. При этом

$$2\hbar\omega = E_2 - E_1. \quad (9.2.1)$$

Здесь и ниже штриховыми прямыми обозначены виртуальные уровни, а сплошными прямыми — реальные уровни.

Процесс на рис. 9.4, б — *двухфотонное испускание*: электрон переходит с уровня 2 на уровень 1; переходы в поле излучения — рождаются два фотона с энергией  $\hbar\omega$ , определяемой соотношением (9.2.1).

Процесс на рис. 9.4, в — *комбинационное рассеяние (стоксов компонент)*: электрон переходит с уровня 1 на уровень 2; переходы в поле излучения — уничтожается фотон с энергией  $\hbar\omega_1$ , (при этом  $\hbar\omega_1 > E_2 - E_1$ ), рождается фотон с энергией  $\hbar\omega_2$ . Согласно условию сохранения энергии,

$$\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 = E_2 - E_1. \quad (9.2.2)$$

В рассматриваемом здесь процессе рассеяния частота света уменьшается.

Процесс на рис. 9.4, *г* — комбинационное рассеяние (антискотсов компонент): электрон переходит с уровня 2 на уровень 1; переходы в поле излучения — уничтожается фотон с энергией  $\hbar\omega_1$ , рождается фотон с энергией  $\hbar\omega_2$  (при этом  $\hbar\omega_2 > E_2 - E_1$ ). Согласно условию сохранения энергии,

$$\hbar\omega_2 - \hbar\omega_1 = E_2 - E_1. \quad (9.2.3)$$

В рассматриваемом здесь процессе рассеяния частота света увеличивается.

Если процессы поглощения и испускания света являются в первом порядке однофотонными (двухфотонные процессы поглощения и испускания света значительно менее вероятны; это процессы второго порядка малости), то процессы рассеяния света являются в первом порядке двухфотонными. Подчеркнем, что рассеяние света в квантовой теории описывается как процесс, при котором происходит уничтожение фотонов (соответствующих излучению до рассеяния) и рождение других фотонов (соответствующих излучению после рассеяния). Наконец, отметим, что здесь и всюду ниже переходы в поле излучения, связанные с рождением фотонов, могут быть как спонтанными, так и вынужденными. В связи с этим можно, например, говорить как о спонтанном, так и о вынужденном комбинационном рассеянии света. В случае вынужденного рассеяния энергия фотонов, стимулирующих процесс, строго определяется энергией  $\hbar\omega_1$  фотонов до рассеяния и разностью энергетических уровней электрона  $E_2 - E_1$ . Конкретно: энергия стимулирующих фотонов равна  $\hbar\omega_1 - (E_2 - E_1)$  в случае на рис. 9.4, *в* и  $\hbar\omega_1 + (E_2 - E_1)$  в случае на рис. 9.4, *г* (что следует непосредственно из соотношений (9.2.1) и (9.2.2)).

**Трехфотонные процессы.** На рис. 9.5 изображены шесть различных трехфотонных процессов. Процесс на рис. 9.5, *а* — трехфотонное поглощение: электрон переходит с уровня 1 на уровень 2; переходы в поле излучения — уничтожаются три фотона с энергиями  $\hbar\omega$ . Согласно условию сохранения энергии,

$$3\hbar\omega = E_2 - E_1. \quad (9.2.4)$$

Процесс на рис. 9.5, *б* — трехфотонное испускание: электрон переходит с уровня 2 на уровень 1; переходы



в поле излучения — рождаются три фотона с энергиями  $\hbar\omega$ , определяемыми соотношением (9.2.4).

Процесс на рис. 9.5, в — трехфотонный процесс, при котором рассеяние на электроне излучений с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  приводит к появлению излучения на частоте  $\omega_3$ .

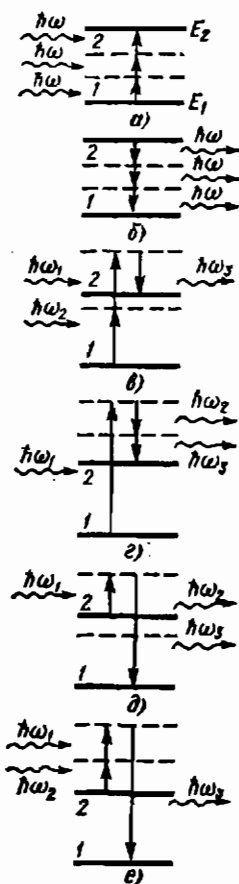


Рис. 9.5

$$\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3 = E_2 - E_1. \quad (9.2.6)$$

Если  $\omega_2 = \omega_3$ , то получаем трехфотонный процесс комбинационного рассеяния (стоксов компонент).

Процессы на рис. 9.5, д, е аналогичны процессам на рис. 9.5, г, в соответственно, с тем отличием, что

Электрон переходит с уровня 1 на уровень 2; переходы в поле излучения — уничтожаются два фотона с энергиями  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  и рождается один фотон с энергией  $\hbar\omega_3$ . Согласно условию сохранения энергии,

$$\begin{aligned} \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 - \hbar\omega_3 &= \\ &= E_2 - E_1. \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Если  $\omega_2 = \omega_1$ , то получаем трехфотонный процесс комбинационного рассеяния: стоксов компонент при  $\omega_1 > \omega_3$  и антистоксов компонент при  $\omega_1 < \omega_3$ .

Процесс на рис. 9.5, г — трехфотонный процесс, при котором рассеяние на электроне излучения с частотой  $\omega_1$  приводит к появлению излучений с частотами  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Электрон переходит с уровня 1 на уровень 2; переходы в поле излучения — уничтожается один фотон с энергией  $\hbar\omega_1$  и рождаются два фотона с энергиями  $\hbar\omega_2$  и  $\hbar\omega_3$ . Согласно условию сохранения энергии,

здесь происходят переходы электрона с уровня 2 на уровень 1.

**Когерентные многофотонные процессы.** Следует отдельно отметить так называемые *когерентные* многофотонные процессы. В этих процессах состояние микросистемы не изменяется, переходы происходят только в поле излучения.

На рис. 9.6 изображен когерентный двухфотонный процесс. Поскольку состояние электрона не изменяется, на рисунке показан только один энергетический уровень (уровень 1).

Переходы в поле излучения состоят в том, что один фотон уничтожается и один фотон рождается. Энергии обоих фотонов одинаковы; фотоны могут различаться по другим параметрам (направлению импульса, поляризации).

Рассмотренный процесс есть процесс *упругого (рэлеевского) рассеяния* света. Подчеркнем его двухфотонную структуру. Нельзя полагать, будто при упругом рассеянии просто меняется направление импульса фотона; здесь уничтожается фотон с одним направлением импульса и рождается фотон с другим направлением импульса.

На рис. 9.7 изображены два когерентных трехфотонных процесса. Процесс на рис. 9.7, а: удвоение частоты, или, иными словами, *генерация второй гармоники* — преобразование исходного монохроматического излучения с частотой  $\omega$  в излучение с частотой  $\omega' = 2\omega$ ; переходы в поле излучения — уничтожаются два фотона с энергией  $\hbar\omega$  и импульсами  $\hbar\vec{k}_1$  и  $\hbar\vec{k}_2$  (импульсы фотонов одинаковы по модулю, но могут различаться по направлению), рождается фотон с энергией  $\hbar\omega'$  и импульсом  $\hbar\vec{k}'$ . Согласно условию сохранения энергии,

$$2\hbar\omega = \hbar\omega'. \quad (9.2.7)$$

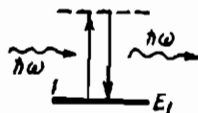


Рис. 9.6

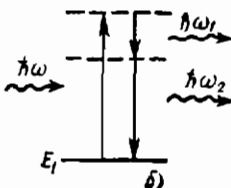
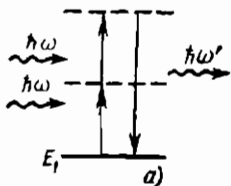


Рис. 9.7

При этом выполняется также условие сохранения импульса для фотонов:

$$\hbar\vec{k}_1 + \hbar\vec{k}_2 = \hbar\vec{k}'. \quad (9.2.8)$$

Процесс на рис. 9.7, б: *параметрическое рассеяние света* — преобразование излучения с частотой  $\omega$  в излучение с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ , при определенных условиях этот процесс превращается в процесс параметрической генерации света (см. § 9.4); переходы в поле излучения — уничтожается фотон с энергией  $\hbar\omega$ , рождаются два фотона с энергиями  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$ . Согласно условию сохранения энергии,

$$\hbar\omega = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2. \quad (9.2.9)$$

Выполняется также условие сохранения импульса для фотонов:

$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}_1 + \hbar\vec{k}_2. \quad (9.2.10)$$

Подчеркнем, что в случае когерентных процессов состояние микросистемы не меняется; структура ее энергетических уровней оказывается несущественной. В связи с этим может возникнуть предположение, что при рассмотрении когерентных процессов микросистема вообще не играет никакой роли. Но это не так. В отсутствие вещества невозможно ни «расщепление» исходного фотона на два новых, ни «соединение» двух исходных фотонов в один новый; как уже отмечалось, фотоны друг с другом непосредственно не взаимодействуют. Процесс «расщепления» одного фотона на два новых есть в действительности процесс уничтожения исходного фотона (который поглощается веществом) и рождения новых фотонов (которые испускаются веществом). Тонкость заключается в том, что оба этих процесса должны рассматриваться не последовательно, а единым образом (в отличие, например, от фотолюминесценции). Неудивительно, что вероятности когерентных процессов оказываются зависящими от свойств среды.

**Процессы взаимодействия света с веществом в различных порядках.** Выше отмечалось, то поглощение и испускание света веществом являются однофотонными процессами в первом порядке и двухфотонными во втором. Продолжая эту мысль, можно сказать, что поглощение и испускание света являются в третьем порядке трехфотонными процессами, в четвертом — четырехфотонными и т. д. Рассеяние света в первом порядке есть двухфотонный процесс, во

втором — трехфотонный, в третьем — четырехфотонный и т. д. Генерация второй гармоники в первом порядке есть трехфотонный процесс, во втором порядке — четырехфотонный и т. д. Повышение порядка данного процесса взаимодействия света с веществом соответствует увеличению его фотонной кратности. Любой процесс взаимодействия рассматривают прежде всего в *первом порядке* — когда его фотонная кратность является *наименьшей*, а вероятность *наибольшей*.

### § 9.3. Явления, основанные на многофотонном поглощении

**Многофотонное возбуждение и многофотонная ионизация атомов.** В 1962 г. в США было осуществлено двухфотонное возбуждение атомов цезия, а в 1964 г. в СССР — семифотонная ионизация атомов ксенона.

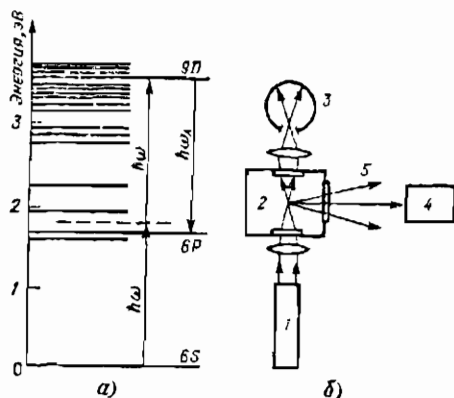


Рис. 9.8

На рис. 9.8, а двумя стрелками показаны два виртуальных перехода атома цезия из состояния  $6S$  в состояние  $9D$ , происходящие при поглощении двух фотонов излучения рубинового лазера (энергия каждого фотона  $h\nu = 1,8$  эВ). Отдельной стрелкой показан однофотонный переход  $9D \rightarrow 6P$ , на котором рождается фотон люминесцентного излучения с энергией  $h\nu_{\text{л}} = 1,9$  эВ, позволяющий зарегистрировать акт двухфотонного возбуждения. Экспериментальная установка схематически изображена на рис. 9.8, б. Здесь 1 — рубиновый лазер, 2 — камера с парами цезия, 3 — калориметр, 4 — ФЭУ, регистрирующий

излучение люминесценции 5. Температуру рубинового активного элемента плавно изменяли, что приводило к плавному изменению частоты генерации лазера. Это позволяло настраивать и расстраивать резонанс, отвечающий наилучшему совпадению суммарной энергии двух фотонов и разности энергий состояний  $9D$  и  $6S$  атома цезия. Возникновение излучения люминесценции резко зависело от частоты лазерного излучения. Кроме того, важную роль играли интенсивность лазерного излучения и плотность

паров цезия в камере (вероятность двухфотонных переходов растет с увеличением интенсивности света, а число этих переходов в единице объема прямо пропорционально плотности паров цезия).

На рис. 9.9, а показаны семь виртуальных переходов, отвечающие семифотонной ионизации атома ксенона излучением рубинового лазера. Энергия ионизации атома в семь раз превышает в данном случае энергию фотона лазерного излучения. Схема опыта по наблюдению этого явления

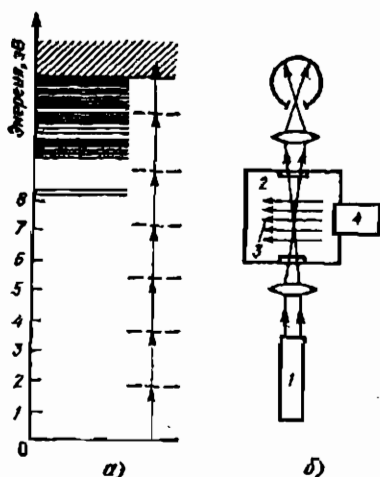


Рис. 9.9

приведена на рис. 9.9, б. Излучение лазера 1 фокусируется в объем камеры 2, содержащей пары ксенона. Внутри камеры создается электрическое поле 3, которое «вытягивает» образующиеся ионы к электронному умножителю 4. Сам факт регистрации ионов ксенона служил доказательством того, что семифотонная ионизация действительно происходила.

Явления многофотонного возбуждения и многофотонной ионизации атомов достаточно широко используются в настоящее время для исследования высоковозбужденных состояний атомов, а также для изучения возмущений спектров атомов в интенсивном световом поле. Возник даже специальный термин «многофотонная ионизационная спектроскопия».

**Многофотонный внешний фотоэффект.** К явлению многофотонной ионизации атомов тесно примыкает многофотон-

ный внешний фотоэффект. При достаточно высокой интенсивности излучения возможно рождение фотоэлектрона вследствие поглощения не одного, а сразу нескольких фотонов. Предположим, что в элементарном акте поглощаются  $n$  фотонов с энергией  $\hbar\omega$ . В этом случае вместо соотношения (7.2.3) будем иметь

$$E_{\kappa} = n\hbar\omega - A_{\kappa} - (\epsilon_F - e). \quad (9.3.1)$$

При  $e = \epsilon_F$  получаем отсюда « $n$ -фотонный аналог» уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$E_{\max} = n\hbar\omega - A_{\kappa}. \quad (9.3.2)$$

Теперь фотоэффект может наблюдаться за красной границей, определяемой соотношением (2.3.9), т. е. при частотах меньше  $\omega_0 = A_{\kappa}/\hbar$ . Нижняя частотная граница фотоэффекта определяется теперь частотой

$$\omega' = A_{\kappa}/n\hbar = \omega_0/n. \quad (9.3.3)$$

Для того чтобы наблюдать многофотонный внешний фотоэффект, недостаточно иметь излучение высокой интенсивности. Нужно также, чтобы рассматриваемый эффект не маскировался эффектом термоэлектронной эмиссии, для которой красная граница, очевидно, не существует. Чтобы уменьшить нагревание фотокатода при облучении его интенсивным светом и тем самым «подавить» термоэлектронную эмиссию, применяют сверхкороткие лазерные импульсы длительностью  $10^{-12}$ — $10^{-11}$  с и скользкое освещение поверхности фотокатода (угол падения больше  $80^\circ$ ). В этом случае удается надежно зарегистрировать фотоэлектроны далеко за красной границей  $\omega_0$  (например, до частоты  $\omega_0/5$ ).

Впервые многофотонный (двухфотонный) внешний фотоэффект наблюдался в 1964 г. в натрии. Упрощенная схема экспериментальной установки показана на рис. 9.10, а. Здесь 1 — лазер, генерирующий сверхкороткие импульсы; 2 — светофильтр, устраняющий излучение лампы накачки; 3 — делитель светового пучка; 4 — ФЭУ, регистрирующий импульс лазерного излучения; 5 — вакуумная камера, внутри которой находятся фотокатод и детектор фотоэлектронов (нередко используют фотокатод ФЭУ). На рис. 9.10, б сопоставляются осциллограммы лазерного импульса (кривая А) и импульса тока эмиссии (кривая Б). Доказательством фотоэлектронной (а не термоэлектронной) природы тока эмиссии служил тот факт, что длительность

импульса тока эмиссии не превышала длительности лазерного импульса.

Многофотонный внешний фотоэффект применяется для исследования зонной структуры металлов и диэлектриков, свойств их поверхностей. Вероятность многофотонного фотоэффекта зависит от степени когерентности излучения. Это позволяет применять данный эффект для изучения когерентных свойств оптического излучения.

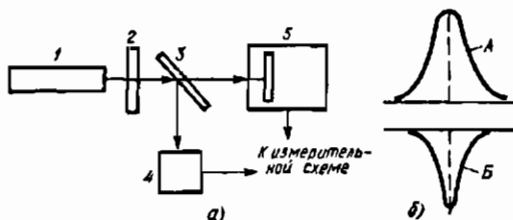


Рис. 9.10

**Явление затемнения среды.** Это нелинейно-оптическое явление, предполагающее обратимое затемнение первоначально прозрачной среды при облучении ее интенсивным светом, представляет собой не что иное, как многофотонный внутренний фотоэффект. Рассмотрим это явление в приложении к практически важной задаче — растягиванию во времени лазерного импульса. Существуют способы, позволяющие получать лазерные импульсы длительностью, например,  $10^{-8}$  с («гигантские импульсы»). Однако для некоторых задач нужны более длительные импульсы — длительностью  $10^{-7}$ — $10^{-6}$  с. В подобных случаях можно использовать лазер, генерирующий «гигантские импульсы», но при этом принять меры для растягивания таких импульсов во времени (надо реализовать *отрицательную обратную связь*).

Предположим, что управление потерями в резонаторе лазера осуществляется следующим образом: когда мощность генерируемого излучения нарастает, потери увеличиваются, а когда мощность излучения начинает спадать, потери уменьшаются. Это и есть отрицательная обратная связь. Она оказывает тормозящее воздействие на развитие процессов вынужденного испускания в активном элементе лазера; в результате процесс формирования выходного светового импульса затягивается во времени, длительность импульса увеличивается, его максимальная мощность уменьшается.

Отрицательную обратную связь можно реализовать, в частности, используя многофотонный внутренний фотоэффект — *двухфотонное поглощение* света в полупроводнике. Внутри резонатора лазера помещают пластинку полупроводника, у которого ширина запрещенной зоны  $\Delta E$  удовлетворяет условию

$$\hbar\omega < \Delta E < 2\hbar\omega, \quad (9.3.4)$$

где  $\omega$  — частота лазерного излучения. Например, для твердотельных лазеров, активированных неодимом, условие (9.3.4) выполняется при использовании арсенида галлия (GaAs) или селенида кадмия (CdSe). При относительно небольших интенсивностях излучение частоты  $\omega$  проходит сквозь полупроводниковую пластинку, не поглощаясь, поскольку энергия фотона  $\hbar\omega$  недостаточна для того, чтобы обеспечить переход электрона из валентной зоны в зону проводимости. Однако с увеличением интенсивности излучения растет вероятность того, что электрон в валентной зоне поглотит сразу два фотона и, приобретя энергию  $2\hbar\omega$ , совершит переход в зону проводимости. Таким образом, с ростом интенсивности излучения возрастают (за счет двухфотонного поглощения) потери, вносимые в резонатор полупроводниковой пластинкой; наблюдается явление *затемнения* полупроводника.

#### § 9.4. Преобразование частоты света в нелинейных кристаллах

**Условие волнового синхронизма для генерации второй гармоники.** В § 9.1 отмечалось, что при определенных условиях волна нелинейной поляризации частоты  $2\omega$ , возникающая при распространении в квадратично-нелинейной среде световой волны частоты  $\omega$ , может переизлучить световую волну на частоте  $2\omega$  — вторую оптическую гармонику. Каковы же эти условия?

Волна нелинейной поляризации распространяется по среде со скоростью, равной скорости исходной световой волны:

$$v = c/n(\omega), \quad (9.4.1)$$

где  $n(\omega)$  — показатель преломления среды на частоте  $\omega$  (т. е. на частоте исходной световой волны). Переизлученная световая волна частоте  $2\omega$  имеет скорость

$$v' = c/n(2\omega). \quad (9.4.2)$$



Для эффективной передачи энергии от первой волны ко второй надо, чтобы их скорости совпадали. В соответствии с (9.4.1) и (9.4.2) это означает, что должно выполняться условие

$$n(\omega) = n(2\omega). \quad (9.4.3)$$

К условию (9.4.3) можно прийти, используя фотонные представления, а конкретнее — соотношение (9.2.8). Перейдем в (9.2.8) от импульсов фотонов к волновым векторам  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_2$ ,  $\vec{k}'$  соответствующих световых волн (как отмечалось в беседе, приведенной в гл. 5, для этого необходимо, чтобы каждая из таких волн характеризовалась высокой степенью когерентности). Вторая гармоника (световая волна с частотой  $2\omega$  и волновым вектором  $\vec{k}'$ ) возникает в результате взаимодействия двух исходных световых волн, имеющих волновые векторы  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$  и одинаковую частоту  $\omega$ ; при этом выполняется условие

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}'. \quad (9.4.4)$$

Совпадение частот исходных световых волн означает, что их волновые векторы совпадают по модулю ( $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| \equiv k$ ), поскольку

$$k = \omega n(\omega)/c. \quad (9.4.5)$$

Для простоты будем полагать, что волновые векторы исходных световых волн совпадают также и по направлению и, значит, возникновение второй гармоники можно рассматривать как результат взаимодействия исходной световой волны частоты  $\omega$  самой с собой. В этом случае соотношение (9.4.4) упрощается (в частности, оно утрачивает векторный характер):

$$2k = k'. \quad (9.4.6)$$

Используя (9.4.5), перепишем (9.4.6) в виде

$$2 \frac{\omega n(\omega)}{c} = \frac{2\omega n(2\omega)}{c},$$

откуда немедленно получаем (9.4.3).

Условие (9.4.4), согласующееся с условием сохранения импульса фотонов (9.2.8), называют *условием волнового синхронизма* для генерации второй гармоники. В общем случае оно имеет векторный характер (векторный синхро-

низм) и предполагает, что через нелинейную среду посылаются под некоторым углом друг к другу две световые волны частоты  $\omega$ . В частном случае через нелинейную среду посылают одну световую волну частоты  $\omega$ , и тогда используется скалярное условие синхронизма (скалярный синхронизм) — см. соотношение (9.4.6) или эквивалентное ему соотношение (9.4.3).

**Практическая реализация синхронизма в случае генерации второй гармоники.** Для простоты ограничимся скалярным синхронизмом, рассматривая условие синхронизма (9.4.3). Каким образом можно выполнить это условие на практике? Оказывается, что это можно сделать, если использовать специфику прохождения света через *анизотропные среды* — кристаллы.

Будем рассматривать одноосные кристаллы (точнее, отрицательные одноосные кристаллы). Напомним, что в одноосном кристалле существует особое направление, называемое *оптической осью*; оптические свойства кристалла одинаковы для всех направлений, составляющих с этой осью один и тот же угол. Плоскость, проходящую через оптическую ось и направление волнового вектора световой волны, называют плоскостью главного сечения. Попадая в кристалл, световая волна превращается в две волны: *обыкновенную* и *необыкновенную*. Первая линейно поляризована перпендикулярно плоскости главного сечения, а вторая линейно поляризована в этой плоскости. Показатель преломления для обыкновенной волны не зависит от направления ее волнового вектора; обозначим этот показатель преломления  $n^o$  (индекс *o* есть начальная буква английского слова ordinary — *обыкновенный*). У необыкновенной волны показатель преломления зависит от угла  $\theta$  между направлением волнового вектора и *оптической осью* кристалла; обозначим его через  $n^e(\theta)$  (индекс *e* есть начальная буква слова extraordinary — *необыкновенный*). Графически зависимость  $n^e(\theta)$  имеет вид эллипса (рис. 9.11, а); здесь  $OA$  — оптическая ось кристалла, длина отрезка  $OA_1$  есть значение  $n^e(\theta)$  для угла  $\theta$ . Там же изображена окружность радиуса  $n^o$  (для обыкновенной волны). Видно, что в направлении оптической оси показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн совпадают:  $n^e(0) = n^o$ . В направлении же, перпендикулярном оптической оси ( $\theta = 90^\circ$ ), показатели преломления указанных волн различаются наиболее сильно.

Предположим, что рассматриваются две частоты:  $\omega$  и

2 $\omega$ . Кривые для показателей преломления волн частоты  $\omega$  (обыкновенной и необыкновенной) показаны на рис. 9.11, б сплошными линиями, а для волн частоты  $2\omega$  — штриховыми линиями. Видно, что с увеличением частоты света показатель преломления растет. Из рисунка видно также, что существуют направления (например, направление  $OB$ ), вдоль которых выполняется условие волного синхронизма:  $n^o(\omega) = n^e(2\omega)$ . Направление  $OB$  называют направлением синхронизма, а угол  $\theta_c$  — углом синхронизма.

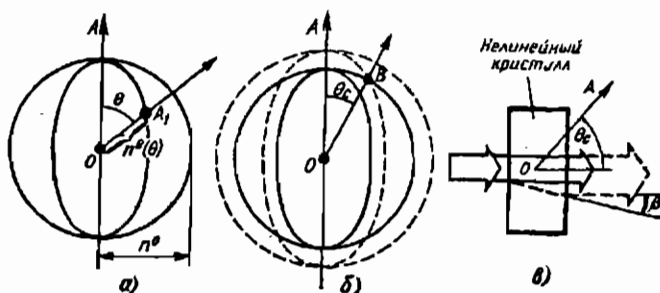


Рис. 9.11

Итак, в направлении синхронизма показатель преломления для обыкновенной световой волны частоты  $\omega$  равен показателю преломления для необыкновенной волны частоты  $2\omega$ .

Теперь нетрудно понять, как на практике осуществляют генерацию второй гармоники. Для этого берут подходящий кристалл и вырезают образец так, чтобы падающий на него нормально лазерный пучок частоты  $\omega$  образовывал угол синхронизма  $\theta_c$  с оптической осью кристалла  $OA$  (рис. 9.11, в). При этом надо позаботиться о поляризации падающего светового пучка: он должен быть линейно поляризован перпендикулярно плоскости главного сечения (перпендикулярно плоскости рисунка), с тем чтобы сыграть в кристалле роль обыкновенной световой волны. Вот, собственно говоря, и все. В нелинейном кристалле возникает световая волна частоты  $2\omega$ , линейно поляризованная в плоскости главного сечения.

Световой пучок второй гармоники показан на рис. 9.11, в штриховыми линиями. Двулучепреломление приводит к некоторому сносу этого пучка в поперечном направлении, характеризуемому углом  $\beta$ , который называют углом анизотропии. Заметим, что, несмотря на указанный снос, волновой вектор второй гармоники направлен так же,

как и волновой вектор исходной световой волны, — вдоль прямой  $OB$ . Снос приводит к уменьшению эффективности преобразования излучения во вторую гармонику. Он отсутствует ( $\beta=0$ ) при так называемом 90-градусном синхронизме, когда  $\theta_c=90^\circ$ .

Как научно-техническое направление генерация оптических гармоник (второй гармоники, третьей, четвертой и др.) развивается уже более 25 лет. Налажено промышленное производство многих типов генераторов оптических гармоник, позволяющих преобразовывать во вторую гармонику до 20—50 % мощности исходной световой волны. Эти генераторы работают, используя излучение лазеров на иттриево-алюминиевом гранате с неодимом. В качестве кристаллов с нелинейной поляризацией применяются кристаллы дигидрофосфата калия ( $KH_2PO_4$ ), называемые условно кристаллами KDP, дигидрофосфата аммония ( $NH_4H_2PO_4$ ), называемые кристаллами ADP, ниобата лития ( $LiNbO_3$ ), ниобата бария-натрия ( $Ba_2NaNb_5O_{16}$ ) и др. Их обычно называют нелинейными кристаллами.

Генерация оптических гармоник эффективно осуществляется только для лазерного излучения. Здесь важна уже подчеркивавшаяся выше когерентность излучения, так как именно благодаря ей возможна сильная концентрация световой мощности в определенном направлении в пространстве и с определенной частотой. Обратим внимание в связи с этим на то, что условие синхронизма относится всякий раз к определенной частоте и определенным направлениям распространения света в данном кристалле.

**Параметрическое рассеяние света.** Пусть когерентная световая волна (*волна накачки*), имеющая частоту  $\omega$  и волновой вектор  $\vec{k}$ , распространяется в нелинейном кристалле. В кристалле всегда присутствуют флуктуации поля в виде слабых хаотических сигналов. Благодаря взаимодействию этих сигналов с волной накачки могут переизлучаться новые световые волны. Они рождаются парами; их частоты и волновые векторы будем обозначать соответственно  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$ . Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  составляют в сумме частоту волны накачки:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega, \quad (9.4.7)$$

а волновые векторы взаимодействующих трех световых волн удовлетворяют условию волнового синхронизма:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}. \quad (9.4.8)$$

Рассматриваемое явление называют *параметрическим рассеянием* света (или, менее удачно, *параметрической люминесценцией*). Световые волны, возникающие при параметрическом рассеянии, распространяются под некоторыми углами к направлению распространения волны накачки, определяемыми условием синхронизма (9.4.8). На рис. 9.12 эти углы обозначены как  $\varphi_1$  (для волны частоты  $\omega_1$ ) и  $\varphi_2$  (для частоты  $\omega_2$ ). Если смотреть навстречу синему лазерному лучу, проходящему сквозь нелинейный кристалл ниобата

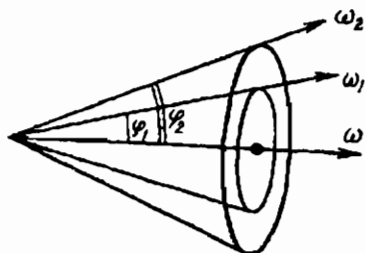


Рис. 9.12

та лития, то можно четко видеть зелено-желто-красные кольца вокруг лазерного луча. Эти радужные кольца и есть результат параметрического рассеяния света. Для колец характерны плавные переходы от одних цветовых оттенков к другим (как в обычной радуге), поскольку частота  $\omega_1$  может изменяться от  $\omega$

до сколь угодно малых значений; соответственно изменится и частота  $\omega_2$ , равная разности  $\omega - \omega_1$ .

**Параметрический генератор света.** Поместив нелинейный кристалл в оптический резонатор, можно превратить параметрическое рассеяние в *параметрическую генерацию света*. Будем рассматривать скалярный синхронизм — когда волновые векторы (как волны накачки, так и обеих переизлученных световых волн) направлены вдоль одной прямой; эта прямая есть ось резонатора. Ориентируем нелинейный кристалл внутри резонатора таким образом, чтобы направление синхронизма для некоторой конкретной пары частот  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega - \omega_1$  совпадало с осью резонатора, и введем в резонатор вдоль его оси интенсивную когерентную световую волну накачки частоты  $\omega$ . Для выполнения условия синхронизма надо позаботиться о поляризации волны накачки. Возможна ситуация, когда волна накачки и одна из переизлученных волн — необыкновенные, а другая переизлученная волна — обыкновенная.

Итак, посылая когерентную световую волну определенной частоты  $\omega$  и определенной поляризации в данный нелинейный кристалл, ориентированный определенным образом внутри оптического резонатора, можно получить за счет энергии исходной волны две новых световых волны

с определенными частотами ( $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ ) и определенными поляризациями. При параметрическом рассеянии «расщепление» фотона накачки  $\hbar\omega$  на фотоны  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  происходит спонтанным образом: испускание фотонов  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  является *спонтанным*. Поэтому при параметрическом рассеянии в выходном излучении представлены *всевозможные* частоты в пределах от 0 до  $\omega$  (точнее говоря, всевозможные пары частот  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ ). При параметрической генерации резонатор всякий раз «выделяет» *определенную* пару частот  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega - \omega_1$  и тем самым делает вынужденным процесс «расщепления» фотона накачки  $\hbar\omega$  именно на фотоны  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$ ; испускание этих фотонов является *вынужденным*.

В параметрическом генераторе света предусматривают возможность плавного изменения «выделенных» частот  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ , что позволяет плавно перестраивать частоту генерируемых световых волн. Это осуществляется с помощью устройства, позволяющего последовательно подстраивать под направление оси резонатора направления синхронизма, отвечающие парам частот  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega - \omega_1$  при разных значениях  $\omega_1$ . Можно, например, просто слегка поворачивать нелинейный кристалл, плавно изменяя угол между оптической осью кристалла и осью резонатора. При каждом значении этого угла будет генерироваться именно та комбинация частот  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ , для которой направление синхронизма совпадает с осью резонатора.

Существуют разные оптические схемы параметрических генераторов света. Одна из них показана на рис. 9.13, а. Оба зеркала резонатора (1 и 2) прозрачны на частоте накачки  $\omega$ . Для более низких частот зеркало 1 является полностью отражающим, а зеркало 2 характеризуется некоторым коэффициентом пропускания. Существуют параметрические генераторы света, где генерируется только одна световая волна, например волна на частоте  $\omega_1$ . Чтобы

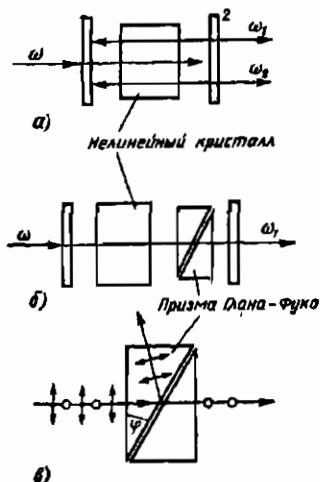


Рис. 9.13

предотвратить генерацию на частоте  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ , специально повышают потери на этой частоте. Если поляризации волн на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  различны, можно воспользоваться поляризационной призмой Глана — Фуко (рис. 9.13, б). Призма Глана — Фуко пропускает сквозь себя волну на частоте  $\omega_1$  и отклоняет волну на частоте  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ . Впрочем, до отклонения дело не доходит: волна частоты  $\omega_2$  просто не генерируется.

Призма Глана — Фуко образована двумя призмами из кальцита ( $\text{CaCO}_3$ ), отделенными друг от друга узким воздушным зазором (рис. 9.13, в). Оптические оси обеих призм перпендикулярны плоскости рисунка; угол  $\varphi$  равен  $38,5^\circ$ . Сквозь призму проходит, не отклоняясь, световая волна, линейно поляризованная перпендикулярно плоскости рисунка (поляризация показана кружочками). Волна же, поляризованная в плоскости рисунка (поляризация показана стрелками), претерпевает отражение на границе кристалла и воздушного зазора.

#### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аут И., Генцов Д., Герман. Фотоэлектрические явления / Пер. с нем. — М.: Мир, 1980. — 210 с.
2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Параметрические усилители и генераторы света // УФН. 1966. Т. 88, вып. 3. С. 439—460.
3. Вавилов В. С. Действие излучений на полупроводники. — М.: Физматгиз, 1963. — 264 с.
4. Вавилов С. И. Собрание сочинений. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 2. — 350 с.
5. Делоне Н. Б. Многофотонная ионизация атомов // Природа. 1976. № 4. С. 14—26.
6. Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В. Прикладная нелинейная оптика. — М.: Радио и связь, 1982. — 352 с.
7. Елифанов Г. И. Физика твердого тела. — М.: Высшая школа, 1977. — 288 с.
8. Казанов М. И. Электроны, фононы, магноны. — М.: Наука, 1979. — 192 с.
9. Клышко Д. Н. Фотоны и нелинейная оптика. — М.: Наука, 1980. — 255 с.
10. Ландсберг Г. С. Оптика. — М.: Наука, 1976. — 926 с.
11. Левшин В. Л., Левшин Л. В. Люминесценция и ее применения. — М.: Наука, 1972. — 210 с.
12. Панков Ж. Оптические процессы в полупроводниках. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1973. — 456 с.
13. Соболева Н. А., Меламид А. Е. Фотоэлектронные приборы. — М.: Высшая школа, 1974. — 376 с.
14. Фраунфельдер Г. Эффект Мёссбауэра / Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1964. — 120 с.
15. Фэн Г. Фотон-электронное взаимодействие в кристаллах. Пер. с англ. — М.: Мир, 1969. — 128 с.

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
КВАНТОВОЙ ОПТИКИ**

**ГЛАВА 10**  
**ВЕРОЯТНОСТИ**  
**ОПТИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДОВ**  
§ 10.1. Квантовые переходы  
в нестационарной теории  
возмущений 241  
§ 10.2. Квантовые переходы  
под влиянием гармонического  
возмущения 245  
§ 10.3. Оператор  
взаимодействия электрона  
с полем световой волны.  
Операторы рождения  
и уничтожения фотонов 250  
§ 10.4. Матричные  
элементы оператора  
взаимодействия электрона  
с полем световой волны 257  
**ГЛАВА 11**  
**ОДНОФОТОННЫЕ**  
**ПРОЦЕССЫ**  
§ 11.1. Вероятности  
однофотонных процессов 261  
§ 11.2. Дипольные переходы  
264  
§ 11.3. Квадрупольные и маг-  
нитно-дипольные переходы 270  
**ГЛАВА 12**  
**НЕКОТОРЫЕ**  
**МНОГОФОТОННЫЕ**  
**ПРОЦЕССЫ И ПРОЦЕССЫ**  
**С УЧАСТИЕМ ФОНОНОВ**  
§ 12.1. Двухфотонные процессы  
(рассеяние света) 275  
§ 12.2. Пример когерентного  
трехфотонного процесса 280  
§ 12.3. Процессы  
с участием фононов 284  
**ГЛАВА 13**  
**КОГЕРЕНТНОСТЬ СВЕТА**  
**В КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ**  
Б е с е д а. Небольшой  
предварительный диалог 287  
§ 13.1. Интерференционные  
опыты. Когерентность  
первого и более  
высоких порядков 289  
§ 13.2. Флуктуации  
числа фотонов 293  
§ 13.3. Состояния  
квантованного поля излучения  
299



---

---

**Только квантовая теория дает полную и логически  
стройную картину полевых явлений.**

**Р. Г л а у б е р**

---

---

*Переходя к рассмотрению теоретических основ квантовой оптики, остановимся на двух группах вопросов. Первая включает в себя вопросы, связанные с расчетом вероятностей оптических переходов (одnofотонных и многофотонных). Вторая связана с рассмотрением когерентности света в квантовой оптике. Здесь дается, в частности, краткий анализ различных состояний квантованного поля излучения.*

## ГЛАВА 10

### ВЕРОЯТНОСТИ ОПТИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДОВ

#### § 10.1. Квантовые переходы в нестационарной теории возмущений

Предположим, что под влиянием некоего внешнего фактора (некоего возмущения) микрообъект совершает квантовый переход из одного состояния в другое. Во многих случаях вероятности переходов могут быть найдены с использованием нестационарной теории возмущений.

**Квантовые переходы и принцип суперпозиции состояний.** Пусть начальное и конечное состояния микрообъекта являются стационарными. Начальное состояние (будем фиксировать его индексом  $n$ ) описывается волновой функцией

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar), \quad (10.1.1)$$

где  $E_n$  — энергия рассматриваемого стационарного состояния, а через  $x$  обозначена, краткости ради, совокупность пространственных координат микрообъекта. Функция  $\Psi_n$  удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n = \hat{H} \Psi_n \quad (10.1.2)$$

(будем называть его «невозмущенным» уравнением).

Внешние факторы, обуславливающие квантовые переходы микрообъекта, могут иметь различную физическую природу. В частности, это может быть взаимодействие микрообъекта с электромагнитным излучением. В аппарате квантовой теории указанный фактор «выступает» как некий оператор взаимодействия, который надо добавить к «невозмущенному» гамильтониану  $\hat{H}$ ; будем обозначать эту «добавку»  $\hat{H}'$ . С учетом возмущения  $\hat{H}'$  уравнение Шредингера

принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi_n = (\hat{H} + \hat{H}'(t)) \Phi_n. \quad (10.1.3)$$

Это уравнение называют «возмущенным» уравнением. Его решения  $\Phi_n$  уже не являются стационарными состояниями, так что индекс  $n$  не фиксирует здесь уровня энергии, а лишь указывает на предысторию: данное возмущенное состояние «произошло» из  $n$ -го невозмущенного состояния.

Существенно, что состояние  $\Phi_n$  является *суперпозиционным* (см. § 5.2):

$$\Phi_n(x, t) = \sum_k a_{nk}(t) \Psi_k(x, t). \quad (10.1.4)$$

Если в некий момент  $t$  «включить» соответствующий детектор, то суперпозиция (10.1.4) разрушится и микробъект будет обнаружен в одном из стационарных состояний, например в состоянии  $\Psi_m$ . Это и означает, что произошел квантовый переход микробъекта из состояния  $\Psi_n$  в состояние  $\Psi_m$ ; вероятность перехода есть  $|a_{nm}|^2$ .

Фактически все это уже знакомо читателю — приведенные только что замечания согласуются с замечаниями, сделанными по поводу соотношения (5.2.2), которое, по сути дела, эквивалентно соотношению (10.1.4).

Итак, вероятность перехода есть квадрат модуля соответствующей амплитуды перехода:

$$W_{nm}(t) = |a_{nm}(t)|^2. \quad (10.1.5)$$

Эта амплитуда является одним из коэффициентов в суперпозиции (10.1.4), которая представляет собой разложение возмущенного состояния  $\Phi_n$  по невозмущенным.

**Переход к энергетическому представлению.** Чтобы найти вероятность  $W_{nm}$ , надо, во-первых, решить уравнение (10.1.3), а во-вторых, найти коэффициенты разложения полученных решений по состояниям типа (10.1.1). Более удобно, однако, пойти по другому пути.

Предварительно заметим, что согласно (5.4.5) коэффициенты  $a_{nk}$  суперпозиции (10.1.4) могут рассматриваться как волновая функция, описывающая возмущенное состояние, но только не в координатном представлении (в координатном представлении это делает функция  $\Phi_n$ ), а в представлении набора тех физических величин, по отношению к которым функции  $\Psi_k$  являются собственными функциями.

Так как функции  $\Psi_k$  являются собственными функциями гамильтониана, то назовем это представление *энергетическим*.

Упомянутый выше другой путь состоит в том, чтобы сначала перевести данное в координатном представлении «возмущенное» уравнение (10.1.3) в энергетическое представление. Тем самым будет получено новое уравнение — «возмущенное» уравнение Шредингера в энергетическом представлении. Решения этого уравнения и будут представлять собой искомые амплитуды переходов.

Выполняя намеченную программу, подставим (10.1.4) в (10.1.3) и учтем при этом (10.1.2). Получим

$$i\hbar \sum_k \frac{da_{nk}}{dt} \Psi_k = \sum_k a_{nk} \hat{H}'(t) \Psi_k. \quad (10.1.6)$$

Умножим обе части (10.1.6) слева на  $\Psi_m^*$  и проинтегрируем по координатам:

$$i\hbar \sum_k \frac{da_{nk}}{dt} \int \Psi_m^* \Psi_k dx = \sum_k a_{nk} \int \Psi_m^* \hat{H}'(t) \Psi_k dx.$$

Учитывая ортонормированность стационарных состояний (см. § 5.4), перепишем последнее выражение в виде

$$i\hbar \frac{da_{nm}}{dt} = \sum_k a_{nk} \int \Psi_m^* \hat{H}'(t) \Psi_k dx. \quad (10.1.7)$$

Далее представим

$$\begin{aligned} \int \Psi_m^* \hat{H}' \Psi_k dx &= e^{i\omega_{mk}t} \int \psi_m^* \hat{H}' \psi_k dx = \\ &= \exp(i\omega_{mk}t) \langle m | \hat{H}' | k \rangle, \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

где  $\omega_{mk} = (E_m - E_k)/\hbar$ . Величина  $\langle m | \hat{H}' | k \rangle = \int \psi_m^* \hat{H}' \psi_k dx$  называется *матричным элементом оператора возмущения*. С учетом (10.1.8) перепишем (10.1.7) в окончательном виде:

$$\frac{da_{nm}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_k a_{nk} \langle m | \hat{H}'(t) | k \rangle \exp(i\omega_{mk}t). \quad (10.1.9)$$

Итак, мы получили «возмущенное» уравнение Шредингера в энергетическом представлении. Фактически (10.1.9) есть не одно уравнение, а система уравнений. Подчеркнем, что эта система удобнее, нежели уравнение (10.1.3), поскольку, решая ее, мы сразу определяем амплитуды переходов  $a_{nm}$ . Весьма существенно, что в процессе решения системы (10.1.9) можно обычно пользоваться *методом возмущений*.

**Применение метода возмущений к вычислению вероятности переходов.** Малость возмущения означает, что функция  $\Phi_n$  может быть представлена в виде

$$\Phi_n = \Psi_n + \Lambda_n, \quad (10.1.10)$$

где  $\Lambda_n$  — малая добавка к невозмущенной функции  $\Psi_n$ . В соответствии с (10.1.10) представим

$$a_{nk} = \delta_{nk} + a_{nk}^{(1)} + a_{nk}^{(2)} + a_{nk}^{(3)} + \dots, \quad (10.1.11)$$

где  $\delta_{nk} = 1$ , если  $n=k$ , и  $\delta_{nk} = 0$ , если  $n \neq k$ . Легко видеть, что

$$\Lambda_n = \sum_k (a_{nk}^{(1)} + a_{nk}^{(2)} + a_{nk}^{(3)} + \dots) \Psi_k.$$

Согласно (10.1.11), малая добавка  $\Lambda_n$  разбивается, в свою очередь, на добавки разного порядка малости:  $a_{nk}^{(1)}$  имеют тот же порядок малости, что и возмущение,  $a_{nk}^{(2)}$  квадратичны по возмущению и т. д. Подставляя (10.1.11) в (10.1.9), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_{nm}^{(1)} + \frac{d}{dt} a_{nm}^{(2)} + \frac{d}{dt} a_{nm}^{(3)} + \dots = \\ = -\frac{i}{\hbar} \sum_k (\delta_{nk} + a_{nk}^{(1)} + a_{nk}^{(2)} + \dots) \langle m | \hat{H}' | k \rangle e^{i\omega_{mk}t}. \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

Перепишем (10.1.12), сохранив члены только первого порядка малости по возмущению:

$$\frac{d}{dt} a_{nm}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \langle m | \hat{H}' | n \rangle \exp(i\omega_{mn}t). \quad (10.1.13)$$

Это есть приближенное уравнение для амплитуд  $a_{nm}$ , полученное в *первом приближении* метода возмущений.

Если окажется, что  $\langle m | \hat{H}' | n \rangle = 0$ , то надо использовать приближенное уравнение для амплитуд во *втором приближении* метода возмущений. Оно выводится из (10.1.12) при сохранении членов второго порядка малости по возмущению:

$$\frac{d}{dt} a_{nm}^{(2)} = -\frac{i}{\hbar} \sum_k a_{nk}^{(1)} \langle m | \hat{H}' | k \rangle \exp(i\omega_{mk}t). \quad (10.1.14)$$

Аналогично, в *третьем приближении* метода возмущений получаем

$$\frac{d}{dt} a_{nm}^{(3)} = -\frac{i}{\hbar} \sum_k a_{nk}^{(2)} \langle m | \hat{H}' | k \rangle \exp(i\omega_{mk}t) \quad (10.1.15)$$

и т. д.

Зная в том или ином приближении метода возмущений амплитуды переходов, можно найти в соответствующем приближении вероятности переходов. В первом приближении получаем из (10.1.13) для момента времени  $t=\tau$

$$a_{nm}^{(1)}(\tau) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\tau} \langle m | \hat{H}'(t) | n \rangle \exp(i\omega_{mn}t) dt. \quad (10.1.16)$$

Отсюда находим выражение для вероятности перехода:

$$W_{nm}^{(1)}(\tau) = |a_{nm}^{(1)}(\tau)|^2 = \left| \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\tau} \langle m | \hat{H}'(t) | n \rangle \exp(i\omega_{mn}t) dt \right|^2. \quad (10.1.17)$$

Во втором приближении метода возмущений получаем, исходя из (10.1.14),

$$W_{nm}^{(2)}(\tau) = |a_{nm}^{(2)}(\tau)|^2 = \left| \frac{1}{\hbar^2} \sum_k \int_{-\infty}^{\tau} a_{nk}^{(1)}(t) \langle m | \hat{H}'(t) | k \rangle \exp(i\omega_{mk}t) dt \right|^2 \quad (10.1.18)$$

и т. д.

Отметим, что результат (10.1.18) описывает интерференцию амплитуд вероятностей переходов (см. § 5.1). Результирующая амплитуда перехода является суммой амплитуд переходов через различные промежуточные состояния. Невозможность обнаружения микрообъекта в том или ином промежуточном состоянии обуславливает неразличимость альтернатив и позволяет говорить о промежуточных состояниях как о виртуальных.

## § 10.2. Квантовые переходы под влиянием гармонического возмущения

**Вероятность перехода в первом приближении метода возмущений.** Возмущающим фактором для оптических переходов является световая волна. Рассмотрим поэтому гармоническое возмущение, частота  $\omega$  которого соответствует частоте световой волны. Пусть возмущение «включается» в момент  $t=0$  и «выключается» в момент  $t=\tau$ . Найдем вероятность  $W_{nm}^{(1)}(\tau)$  того, что по истечении времени  $\tau$  микрообъект, находившийся первоначально в  $n$ -м состоянии, окажется в  $m$ -м состоянии.

Заметим, что такая постановка задачи страдает определенной искусственностью. Следовало бы учитывать дей-

ствии возмущения в течение достаточно длительного времени и при этом рассматривать вероятность перехода  $n \rightarrow m$ , отнесенную к единице времени. Мы обсудим сначала случай, когда возмущение действует конечное время  $\tau$ , а затем потребуем, чтобы  $\tau \rightarrow \infty$ .

Итак, рассмотрим оператор возмущения

$$\hat{H}'(t) = \begin{cases} \hat{h}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}), & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t < 0; t > \tau, \end{cases} \quad (10.2.1)$$

где оператор  $\hat{h}$  от времени не зависит. Ограничиваясь первым приближением метода возмущений, подставим (10.2.1) в (10.1.16); получим

$$a_{nm}^{(1)}(\tau) = -\frac{i}{\hbar} \langle m | \hat{h} | n \rangle \int_0^{\tau} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) e^{i\omega_{mn}t} dt. \quad (10.2.2)$$

Интегрируя, приходим к результату:

$$a_{nm}^{(1)}(\tau) = -\frac{\langle m | \hat{h} | n \rangle}{\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega_{mn} - \omega)\tau} - 1}{\omega_{mn} - \omega} + \frac{e^{i(\omega_{mn} + \omega)\tau} - 1}{\omega_{mn} + \omega} \right]. \quad (10.2.3)$$

Из (10.2.3) видно, что вероятность перехода возрастает, когда

$$\begin{aligned} \omega &\approx \omega_{mn} \quad (E_m \approx E_n + \hbar\omega) \text{ или} \\ \omega &\approx -\omega_{mn} \quad (E_m \approx E_n - \hbar\omega). \end{aligned}$$

В первом случае микрообъект переходит на более высокие уровни, во втором — на более низкие.

Будем рассматривать переходы на более высокие уровни и ограничимся первым слагаемым в квадратных скобках в (10.2.3):

$$a_{nm}^{(1)}(\tau) = -\frac{i}{\hbar} \langle m | \hat{h} | n \rangle \frac{\exp[i(\omega_{mn} - \omega)\tau] - 1}{\omega_{mn} - \omega}. \quad (10.2.4)$$

В итоге получим следующее выражение для вероятности перехода:

$$\begin{aligned} W_{nm}^{(1)}(\tau) &= \frac{1}{\hbar^2} |\langle m | \hat{h} | n \rangle|^2 \left| \frac{\exp[i(\omega_{mn} - \omega)\tau] - 1}{\omega_{mn} - \omega} \right|^2 = \\ &= \frac{\pi\tau}{\hbar^2} |\langle m | \hat{h} | n \rangle|^2 f(\alpha, \tau), \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

где

$$f(\alpha, \tau) = \frac{\sin^2(\alpha\tau)}{\pi\alpha^2\tau}, \quad (10.2.6)$$

$$\alpha = (\omega_{mn} - \omega)/2. \quad (10.2.7)$$

Зависимость  $f(\alpha)$  показана на рис. 10.1. Видно, что функция  $f$  существенна лишь вблизи  $\alpha=0$  — в пределах области шириной приблизительно  $1/\tau$  ( $\Delta\alpha \approx 1/\tau$ ). Это означает, что энергия конечных состояний, в которые вероятен переход под влиянием рассматриваемого гармонического возмущения, лежит в интервале значений  $\Delta E_m$  вблизи  $E_m$ , где  $\Delta E_m \approx \hbar \Delta\alpha \approx \hbar/\tau$ .

Данные замечания имеют смысл, очевидно, лишь тогда, когда состояния в интервале  $\Delta E_m$  действительно существуют. Прежде всего они имеют смысл, когда рассматриваются переходы из дискретного в непрерывный спектр. Однако они могут относиться и к переходам в дискретном спектре, если учесть, что всякий реальный энергетический уровень (в частности, конечный уровень  $E_m$ ) «размыт», т. е. имеет некоторую эффективную ширину  $\Delta$ . В этом случае необходимо, чтобы выполнялось соотношение  $\tau/\hbar \ll \Delta$ .

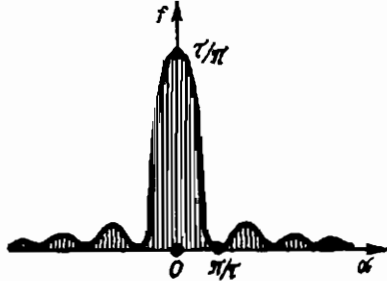


Рис. 10.1

Золотая формула Ферми. Заметим, что при любом значении  $\tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \tau) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\alpha\tau)}{\pi\alpha^2\tau} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = 1. \quad (10.2.8)$$

Из рис. 10.1 видно, что при  $\tau \rightarrow \infty$  центральный пик функции неограниченно возрастает, а его ширина стремится к нулю. В сочетании с (10.2.8) это означает, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\alpha, \tau) = \delta(\alpha), \quad (10.2.9)$$

где  $\delta(\alpha)$  — дельта-функция Дирака (см. § 5.4).

Поделим  $W_{nm}^{(1)}(\tau)$  на  $\tau$  (переходя тем самым к рассмотрению вероятности, отнесенной к единице времени) и рассмотрим предел при  $\tau \rightarrow \infty$ :

$$\tilde{w}_{nm}^{(1)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [W_{nm}^{(1)}(\tau)/\tau] = \frac{\pi}{\hbar^2} |\langle m | \hat{h} | n \rangle|^2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\alpha, \tau).$$

С учетом (10.2.9) и (10.2.7) находим

$$\tilde{w}_{nm}^{(1)} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | \hat{h} | n \rangle|^2 \delta(E_m - E_n - \hbar\omega). \quad (10.2.10)$$



Это есть отнесенная к единице времени вероятность перехода из  $n$ -го состояния в состояние со строго определенной энергией  $E_m$ . Строгая определенность конечной энергии связана, очевидно, с тем, что мы рассмотрели формальный предельный переход при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Обозначим через  $d\omega_{nm}^{(1)}$  отнесенную к единице времени вероятность перехода из  $n$ -го состояния в какое-либо из состояний, приходящихся на интервал значений энергии от  $E_m$  до  $E_m + dE_m$ . Очевидно, что

$$d\omega_{nm}^{(1)} = \tilde{\omega}_{nm}^{(1)} G(E_m) dE_m, \quad (10.2.11)$$

где  $G(E_m)dE_m$  — число состояний в интервале  $E_m \div E_m + dE_m$ . Функция  $G$  называется *спектром* или, иначе, *плотностью состояний* данного микрообъекта (она уже встречалась в гл. 6).

Чтобы получить полную вероятность перехода микрообъекта с уровня  $E_n$  в непрерывный спектр или на «размытый» конечный уровень (т. е. ту вероятность, с какой имеем дело в эксперименте), надо проинтегрировать (10.2.11) по  $E_m$ :

$$\begin{aligned} \omega_{nm}^{(1)} &= \int \tilde{\omega}_{nm}^{(1)} G(E_m) dE_m = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | \hat{H} | n \rangle|^2 \int G(E_m) \delta(E_m - E_n - \hbar\omega) dE_m. \end{aligned} \quad (10.2.12)$$

Согласно (5.4.11), получаем отсюда

$$\omega_{nm}^{(1)} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | \hat{H} | n \rangle|^2 G(E_n + \hbar\omega). \quad (10.2.13)$$

Это и есть знаменитая «золотая формула Ферми». Согласно этой формуле, отнесенная к единице времени вероятность перехода в первом приближении метода возмущений определяется произведением квадрата модуля матричного элемента оператора возмущения на плотность (спектр) конечных состояний микрообъекта (микросистемы).

Если конечные состояния — состояния свободного электрона, то спектр  $G$  описывается соотношением (6.2.6). Если конечные состояния — состояния микросистемы, состоящей из испущенного фотона и перешедшего на определенный уровень электрона, то  $G$  характеризует спектр состояний фотона и описывается соотношением (6.1.15). Если конечные состояния отвечают «размытому» уровню

микрообъекта, то вид  $G$  соответствует форме спектральной линии для данного уровня.

**О применимости метода возмущений.** Пусть конечное состояние (как и начальное) является дискретным, т. е. характеризуется определенной энергией  $E_m$ , и частота гармонического возмущения удовлетворяет условию  $\omega = (E_m - E_n)/\hbar$  (случай резонанса). В этом случае  $\alpha = 0$  и, следовательно,  $f(\alpha, \tau) = \tau/\hbar$ . Учитывая это, получаем из (10.2.5)

$$\omega_{nm}^{(1)} = \frac{\tau}{\hbar^2} | \langle m | \hat{h} | n \rangle |^2. \quad (10.2.14)$$

Вероятность перехода (10.2.14) растет с увеличением  $\tau$  и при достаточно больших  $\tau$  может стать сколь угодно большой. Однако применение метода возмущений требует малости величины  $|a_{im}^{(1)}|^2$ , а следовательно, и вероятности перехода. Отсюда следует, что указанный резонансный случай не может рассматриваться в рамках метода возмущений; подобные задачи должны решаться точно.

Вопрос о применимости метода возмущений утрачивает остроту если вместо дискретного конечного уровня рассматривать непрерывный спектр или достаточно размытый уровень. В этом случае физически реально рассмотрение вероятности уже не перехода  $n \rightarrow m$  (поскольку бессмысленно ставить вопрос о вероятности «попадания» в какое-то одно определенное энергетическое состояние из непрерывной совокупности состояний), а перехода  $n \rightarrow (m + m + \Delta m)$ . Иными словами, теперь рассматривается вероятность перехода в некоторый интервал  $\Delta m$  конечных состояний. В связи с этим для применимости метода возмущений требуется обеспечить малость не величины  $|a_{nm}^{(1)}|^2$ , а интеграла от указанной величины, взятого по рассматриваемому интервалу конечных состояний:

$$\int_m^{m+\Delta m} |a_{mn}^{(1)}|^2 dm \ll 1. \quad (10.2.15)$$

Входящая в (10.2.5) функция  $f(\alpha, \tau)$  обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \tau) d\alpha = 1. \quad \text{Как видно на рис. 10.1, это точное соотношение}$$

может быть заменено приближенным:  $\int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} f(\alpha, \tau) d\alpha \approx 1$ . Отсюда

следует, что если размытие  $\Delta m$  конечных состояний таково, что соответствующая этому размытию неопределенность  $\Delta\alpha$  оказывается не меньше  $\pi/\tau$ , то условие (10.2.15) применимости метода возмущений может быть хорошо выполнено (разумеется, при малости матричного элемента  $\langle m | \hat{h} | n \rangle$ ).

Возвращаясь в связи со сделанными замечаниями к выражениям, полученным ранее, подчеркнем, что прямой физический смысл имеет не формула (10.2.10), содержащая  $\delta$ -функцию, а формула (10.2.13), полученная из (10.2.10) интегрированием по конечным состояниям.

Вероятность перехода во втором и третьем приближениях метода возмущений. Используя установленные выше выражения для  $\frac{d}{dt} a_{nm}^{(2)}$  и  $\frac{d}{dt} a_{nm}^{(3)}$ , можно получить для гармонического возмущения вероятности переходов во втором и третьем приближениях метода возмущений. Для простоты опустим соответствующие выкладки и ограничимся окончательными результатами.

Отнесенная к единице времени вероятность перехода во втором приближении метода возмущений имеет вид

$$w_{nm}^{(2)} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_k \frac{\langle m | \hat{h} | k \rangle \langle k | \hat{h} | n \rangle}{E_n - E_k} \right|^2 G(E_m), \quad (10.2.16)$$

а в третьем приближении метода возмущений — вид

$$w_{nm}^{(3)} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_k \sum_{k'} \frac{\langle m | \hat{h} | k' \rangle \langle k' | \hat{h} | k \rangle \langle k | \hat{h} | n \rangle}{(E_n - E_{k'}) (E_n - E_k)} \right|^2 G(E_m). \quad (10.2.17)$$

Отметим еще раз, что входящие в (10.2.16) и (10.2.17) суммы по  $k$  и  $k'$  соответствуют суммированию по промежуточным виртуальным состояниям микросистемы.

### § 10.3. Оператор взаимодействия электрона с полем световой волны. Операторы рождения и уничтожения фотонов

Выражение оператора взаимодействия через оператор векторного потенциала поля излучения. Будем рассматривать систему *связанный электрон плюс излучение*. В отсутствие взаимодействия между электроном и излучением система описывается «невозмущенным» гамильтонианом:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U + \hat{H}_\nu, \quad (10.3.1)$$

где  $\hat{p}^2/(2m) + U$  — гамильтониан электрона,  $\hat{H}_\nu$  — гамильтониан излучения. При наличии взаимодействия между электроном и излучением система описывается «возмущенным» гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U + \hat{H}_\nu, \quad (10.3.2)$$

где  $\vec{A}$  — оператор векторного потенциала поля излучения (в координатном представлении  $\hat{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r})$ ). Результат

(10.3.2) следует из классической теории поля, где показывается, что взаимодействие заряда с электромагнитным полем можно учесть, произведя замену:  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ . Мы используем здесь классический результат, применяя вместо динамических переменных соответствующие операторы. Заметим, что потенциалы поля выбраны так, чтобы выполнялись известные условия калибровки:  $\text{div } \vec{A} = 0$ ,  $\varphi = 0$  ( $\varphi$  — скалярный потенциал поля).

Далее представим гамильтониан  $\hat{H}$  в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}', \quad (10.3.3)$$

где  $\hat{H}'$  — оператор взаимодействия, играющий роль возмущения. Сравнивая (10.3.1), (10.3.2) и (10.3.3), находим

$$\hat{H}' = -\frac{e}{2mc} [(\vec{p}\vec{A}) + (\vec{A}\vec{p})] + \frac{e^2}{2mc^2} A^2. \quad (10.3.4)$$

Это выражение можно упростить, если учесть, что  $\vec{p}\vec{A}(\vec{r}) - \vec{A}(\vec{r})\vec{p} = -i\hbar \text{div } \vec{A}$ . Воспользовавшись тем, что  $\text{div } \vec{A} = 0$ , получаем

$$\hat{H}' = -\frac{e}{mc} (\vec{p}\vec{A}) + \frac{e^2}{2mc^2} A^2. \quad (10.3.5)$$

Подчеркнем, что оператор (10.3.5) «отвечает» за все процессы поглощения и испускания (спонтанного и вынужденного) фотонов электроном.

**Операторы рождения и уничтожения фотонов.** Существует два принципиально разных подхода к рассмотрению поведения во времени микрообъектов и микросистем. В первом подходе изучают изменение во времени состояний конкретного микрообъекта; аргументами волновой функции служат характеристики микрообъекта, например его координаты. Во втором подходе изучают изменение во времени числа микрообъектов в том или ином состоянии; аргументами волновой функции служат числа заполнения микрообъектами конкретных состояний. Для поля излучения первый подход заведомо не годится: при взаимодействии излучения с веществом фотоны рождаются и уничтожаются, поэтому нельзя «выделить» какой-то фотон и следить за изменением его состояний с течением времени. В применении

к излучению используют второй подход. Его называют *методом вторичного квантования*.

Основная переменная в методе вторичного квантования — число фотонов в  $\vec{k}\alpha$ -состоянии (т. е. в состоянии с определенным импульсом  $\hbar\vec{k}$  и поляризацией  $\alpha$  фотона; см. § 3.4). Обозначим указанное число  $N_{\vec{k}\alpha}$ . О числах  $N_{\vec{k}\alpha}$  говорят как о *числах заполнения* соответствующих фотонных состояний. Далее введем волновую функцию  $\varphi(N_{\vec{k}\alpha}, t)$ ; квадрат ее модуля дает вероятность того, что в момент  $t$  в  $\vec{k}\alpha$ -состоянии будут обнаружены  $N_{\vec{k}\alpha}$  фотонов.

На функцию  $\varphi(N_{\vec{k}\alpha}, t)$  действуют специфические операторы  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^-$  и  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+$ . Оператор  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^-$  — *оператор уничтожения* одного фотона в  $\vec{k}\alpha$ -состоянии; оператор  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+$  — *оператор рождения* фотона в  $\vec{k}\alpha$ -состоянии. Это означает, что оператор  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^-$ , действуя на функцию  $\varphi(N_{\vec{k}\alpha})$ , превращает ее в функцию  $\varphi(N_{\vec{k}\alpha}-1)$ , а оператор  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+$  превращает  $\varphi(N_{\vec{k}\alpha})$  в  $\varphi(N_{\vec{k}\alpha}+1)$ . Указанные превращения выражаются следующими соотношениями:

$$\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^- \varphi(N_{\vec{k}\alpha}, t) = \sqrt{N_{\vec{k}\alpha}} \varphi(N_{\vec{k}\alpha} - 1, t); \quad (10.3.6a)$$

$$\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+ \varphi(N_{\vec{k}\alpha}, t) = \sqrt{N_{\vec{k}\alpha} + 1} \varphi(N_{\vec{k}\alpha} + 1, t). \quad (10.3.6b)$$

Эти соотношения можно переписать, переходя к матричным элементам операторов  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^-$  и  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+$ :

$$\langle N_{\vec{k}\alpha} - 1 | \hat{c}_{\vec{k}\alpha}^- | N_{\vec{k}\alpha} \rangle = \sqrt{N_{\vec{k}\alpha}}; \quad (10.3.7a)$$

$$\langle N_{\vec{k}\alpha} + 1 | \hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+ | N_{\vec{k}\alpha} \rangle = \sqrt{N_{\vec{k}\alpha} + 1}. \quad (10.3.7b)$$

Теперь становится понятным смысл  $\sqrt{N_{\vec{k}\alpha}}$  и  $\sqrt{N_{\vec{k}\alpha}+1}$ . При рассмотрении вероятностей переходов (в данном случае речь идет о переходах в поле излучения, связанных с рождением и уничтожением фотонов) надо использовать квадрат модуля соответствующих матричных элементов; при этом  $\sqrt{N_{\vec{k}\alpha}}$  превращается в  $N_{\vec{k}\alpha}$ , а  $\sqrt{N_{\vec{k}\alpha}+1}$  — в  $(N_{\vec{k}\alpha}+1)$ .

Таким образом, вероятность поглощения фотона в  $\vec{k}\alpha$ -состоянии пропорциональна числу  $N_{\vec{k}\alpha}$  фотонов, имеющих в этом состоянии. Вероятность же испускания фотона в  $\vec{k}\alpha$ -состоянии распадается на сумму двух вероятностей (соответствующую сумме  $N_{\vec{k}\alpha} + 1$ ); одна из вероятностей пропорциональна  $N_{\vec{k}\alpha}$  и описывает *вынужденное* испускание фотона в  $\vec{k}\alpha$ -состоянии, тогда как другая вероятность описывает *спонтанное* испускание фотона в рассматриваемом состоянии.

В § 2.4 были введены дискретные канонические переменные поля  $Q_{\vec{k}\alpha}$  и  $P_{\vec{k}\alpha}$ . Энергия поля  $\mathcal{W}$  выражалась через эти переменные при помощи соотношения (2.4.16):

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\vec{k}} (P_{\vec{k}\alpha}^2 + \omega^2 Q_{\vec{k}\alpha}^2).$$

При квантовании поля канонические переменные  $Q$  и  $P$  заменяют соответствующими операторами  $\hat{Q}$  и  $\hat{P}$ . При этом, согласно (2.4.16), гамильтониан поля излучения  $\hat{H}_\gamma$  может быть представлен в виде

$$\hat{H}_\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} (\hat{P}_{\vec{k}\alpha}^2 + \omega^2 \hat{Q}_{\vec{k}\alpha}^2). \quad (10.3.8)$$

Операторы  $\hat{P}_{\vec{k}\alpha}$  и  $\hat{Q}_{\vec{k}\alpha}$  подчиняются известному перестановочному соотношению для операторов импульса и координаты:

$$\hat{P}_{\vec{k}\alpha} \hat{Q}_{\vec{k}\alpha} - \hat{Q}_{\vec{k}\alpha} \hat{P}_{\vec{k}\alpha} = -i\hbar. \quad (10.3.9)$$

Как и операторы  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}$  и  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+$ , эти операторы действуют на функции  $\varphi(N_{\vec{k}\alpha}, t)$ . Связь между операторами  $\hat{P}_{\vec{k}\alpha}$ ,  $\hat{Q}_{\vec{k}\alpha}$  и  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}$ ,  $\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+$  описывается выражениями

$$\left. \begin{aligned} \hat{c}_{\vec{k}\alpha} &= (\omega \hat{Q}_{\vec{k}\alpha} + i \hat{P}_{\vec{k}\alpha}) / \sqrt{2\hbar\omega}; \\ \hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+ &= (\omega \hat{Q}_{\vec{k}\alpha} - i \hat{P}_{\vec{k}\alpha}) / \sqrt{2\hbar\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.10)$$

Из (10.3.10) следует (индексы  $\vec{k}\alpha$  временно опустим)

$$\left. \begin{aligned} \hat{c} \hat{c}^+ &= (\omega^2 \hat{Q}^2 - i\omega \hat{Q} \hat{P} + i\omega \hat{P} \hat{Q} + \hat{P}^2) / 2\hbar\omega; \\ \hat{c}^+ \hat{c} &= (\omega^2 \hat{Q}^2 + i\omega \hat{Q} \hat{P} - i\omega \hat{P} \hat{Q} + \hat{P}^2) / 2\hbar\omega. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.11)$$

Вычитая второе выражение в (10.3.11) из первого, находим

$$\hat{c}\hat{c}^+ - \hat{c}^+\hat{c} = i(\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P})/\hbar.$$

Используя (10.3.9), получаем отсюда перестановочное соотношение для операторов рождения и уничтожения фотонов:

$$\hat{c}_{k\alpha} \hat{c}_{k\alpha}^+ - \hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha} = 1. \quad (10.3.12)$$

Выражение гамильтониана поля излучения через операторы рождения и уничтожения фотонов. Складывая друг с другом выражения (10.3.11), находим

$$\hat{c}_{k\alpha} \hat{c}_{k\alpha}^+ + \hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha} = (\hat{P}_{k\alpha}^2 + \omega^2 \hat{Q}_{k\alpha}^2)/\hbar\omega.$$

Используя (10.3.8), получаем отсюда

$$\hat{H}_V = \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{c}_{k\alpha} \hat{c}_{k\alpha}^+ + \hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha}). \quad (10.3.13)$$

С учетом (10.3.12) последний результат принимает вид

$$\hat{H}_V = \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega \left( \hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (10.3.14)$$

Это и есть искомое выражение для гамильтониана поля излучения.

Полезно показать, что полученное выражение согласуется с соотношением (3.4.15), представляющим энергию поля как сумму энергий фотонов, «населяющих» это поле. Запишем  $\hat{H}_V$  в виде суммы

$$\hat{H}_V = \sum_{\alpha} \sum_{\vec{k}} \hat{H}_{k\alpha},$$

где

$$\hat{H}_{k\alpha} = \hbar\omega \left( \hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (10.3.15)$$

есть гамильтониан поля, состоящего из  $k\alpha$ -фотонов. Подействуем оператором  $\hat{H}_{k\alpha}$  на функцию  $\varphi(N_{k\alpha})$ . Согласно (10.3.6а),

$$\hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha} \varphi(N_{k\alpha}) = \hat{c}_{k\alpha}^+ [\sqrt{N_{k\alpha}} \varphi(N_{k\alpha} - 1)] = \sqrt{N_{k\alpha}} \hat{c}_{k\alpha}^+ \varphi(N_{k\alpha} - 1).$$

Далее используем (10.3.6 б), заменив  $N_{k\alpha}$  на  $N_{k\alpha} - 1$ ; получим

$\hat{c}_{k\alpha}^+ \varphi(N_{k\alpha} - 1) = \sqrt{N_{k\alpha}} \varphi(N_{k\alpha})$ . Таким образом,

$$\hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha} \varphi(N_{k\alpha}) = N_{k\alpha} \varphi(N_{k\alpha}) \quad (10.3.16)$$

и, следовательно,

$$\hat{H}_{k\alpha} \varphi(N_{k\alpha}) = \hbar\omega \left( N_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right) \varphi(N_{k\alpha}). \quad (10.3.17)$$

Мы убеждаемся, что собственные значения гамильтониана  $\hat{H}_{k\alpha}$  выражаются через энергию линейных гармонических  $k\alpha$ -осцилляторов. С точностью до энергии нулевых колебаний энергия поля действительно есть сумма энергий «населяющих» это поле фотонов.

**Векторный потенциал поля излучения и операторы рождения и уничтожения фотонов.** В § 2.4 на примере задачи о равновесном тепловом излучении был продемонстрирован переход световые волны  $\rightarrow$  квантовые осцилляторы  $\rightarrow$  фотоны. В общем виде этот переход рассматривается на основе метода вторичного квантования с использованием операторов рождения и уничтожения фотонов. Фактически мы уже провели это рассмотрение. Чтобы завершить его, остается выразить оператор векторного потенциала светового поля  $\vec{A}$  через операторы  $\hat{c}_{k\alpha}^+$  и  $\hat{c}_{k\alpha}$ . Перепишем (2.4.12) в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega Q_{k\alpha} &= \omega \sqrt{V/4\pi c^2} (a_{k\alpha} + a_{k\alpha}^*); \\ iP_{k\alpha} &= \omega \sqrt{V/4\pi c^2} (a_{k\alpha} - a_{k\alpha}^*). \end{aligned} \right\} \quad (10.3.18)$$

Складывая оба эти выражения, находим

$$\omega Q_{k\alpha} + iP_{k\alpha} = a_{k\alpha} \omega \sqrt{V/\pi c^2}. \quad (10.3.19)$$

Вычитая второе выражение в (10.3.18) из первого, находим

$$\omega Q_{k\alpha} - iP_{k\alpha} = a_{k\alpha}^* \omega \sqrt{V/\pi c^2}. \quad (10.3.20)$$

Используя (10.3.19), (10.3.20) и (10.3.10) и переходя от классических переменных к операторам, получаем

$$\hat{a}_{k\alpha} = \sqrt{2\pi\hbar c^2/V\omega} \hat{c}_{k\alpha}; \quad (10.3.21a)$$

$$\hat{a}_{k\alpha}^* = \sqrt{2\pi\hbar c^2/V\omega} \hat{c}_{k\alpha}^+. \quad (10.3.21b)$$

Чтобы выразить оператор векторного потенциала  $\vec{A}$  через операторы рождения и уничтожения фотонов, восполь-



зуются разложением (2.4.6) и соотношениями (10.3.21).  
В результате получим

$$\vec{A} = \sum_{\xi} (\hat{c}_{\xi} \vec{A}_{\xi} + \hat{c}_{\xi}^{\dagger} \vec{A}_{\xi}^{\dagger}). \quad (10.3.22)$$

Здесь (и в дальнейшем) индекс  $\xi$  заменяет совокупность индексов  $\vec{k}$  и  $\alpha$ , т. е. фиксирует определенное фотонное состояние (определенную плоскую монохроматическую волну);

$$\vec{A}_{\xi} = \vec{e}_{\xi} \sqrt{2\pi\hbar c^3/V\omega_{\xi}} \exp(i\vec{k}_{\xi}\vec{r}), \quad (10.3.23)$$

$\vec{e}_{\xi}$  — единичный вектор поляризации  $\xi$ -й волны.

Обратим внимание на то, что в (10.3.23) отсутствует временной множитель (который специально оговаривался в (2.4.6)). Это не должно вызывать удивления, так как ниже будут использоваться полученные в § 10.2 формулы для переходов под действием гармонического возмущения. В этих формулах зависимость гамильтониана от времени *уже учтена*, так что остается вычислить не зависящие от времени матричные элементы  $\langle m|\hat{h}|n\rangle$ . В связи с этим подчеркнем, что, подставляя (10.3.22) и (10.3.23) в (10.3.5), мы теперь получаем не сам оператор  $\hat{H}'$ , а лишь его не зависящую от времени часть  $\hat{h}$ .

Выражение оператора взаимодействия через операторы рождения и уничтожения фотонов. В соответствии с (10.3.5) запишем

$$\left. \begin{aligned} \hat{h} &= \hat{h}_1 + \hat{h}_2, \\ \text{где } \hat{h}_1 &= -\frac{e}{mc} (\vec{p}\vec{A}), \quad \hat{h}_2 = \frac{e^2}{2mc^2} A^2. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.24)$$

С учетом (10.3.22) получаем отсюда

$$\hat{h}_1 = -\frac{e}{mc} \sum_{\xi} [\hat{c}_{\xi} (\vec{p}\vec{A}_{\xi}) + \hat{c}_{\xi}^{\dagger} (\vec{p}\vec{A}_{\xi}^{\dagger})], \quad (10.3.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_2 &= \frac{e^2}{2mc^2} \left[ \sum_{\xi} (\hat{c}_{\xi} \vec{A}_{\xi} + \hat{c}_{\xi}^{\dagger} \vec{A}_{\xi}^{\dagger}) \right] \left[ \sum_{\xi'} (\hat{c}_{\xi'} \vec{A}_{\xi'} + \hat{c}_{\xi'}^{\dagger} \vec{A}_{\xi'}^{\dagger}) \right] = \\ &= \frac{e^2}{2mc^2} \sum_{\xi} \sum_{\xi'} [\hat{c}_{\xi} \hat{c}_{\xi'} \vec{A}_{\xi} \vec{A}_{\xi'} + \\ &+ \hat{c}_{\xi} \hat{c}_{\xi'}^{\dagger} \vec{A}_{\xi} \vec{A}_{\xi'}^{\dagger} + \hat{c}_{\xi}^{\dagger} \hat{c}_{\xi'} \vec{A}_{\xi}^{\dagger} \vec{A}_{\xi'} + \hat{c}_{\xi}^{\dagger} \hat{c}_{\xi'}^{\dagger} \vec{A}_{\xi}^{\dagger} \vec{A}_{\xi'}^{\dagger}]. \end{aligned} \quad (10.3.26)$$

Чтобы более четко выделить операторы уничтожения и

рождения фотонов, перепишем (10.3.25) и (10.3.26) в виде

$$\hat{h}_1 = \sum_{\xi} (\alpha_{\xi} \hat{c}_{\xi} + \alpha_{\xi}^* \hat{c}_{\xi}^{\dagger}), \quad (10.3.27)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_2 = & \sum_{\xi} \sum_{\xi'} (\beta_{\xi\xi'} \hat{c}_{\xi} \hat{c}_{\xi'} + \\ & + \gamma_{\xi\xi'} \hat{c}_{\xi} \hat{c}_{\xi'}^{\dagger} + \beta_{\xi\xi'}^* \hat{c}_{\xi}^{\dagger} \hat{c}_{\xi'}^{\dagger} + \gamma_{\xi\xi'}^* \hat{c}_{\xi}^{\dagger} \hat{c}_{\xi'}). \end{aligned} \quad (10.3.28)$$

Смысл обозначений  $\alpha_{\xi}$ ,  $\beta_{\xi\xi'}$  и  $\gamma_{\xi\xi'}$  виден из сравнения последних выражений с (10.3.25) и (10.3.26).

#### § 10.4. Матричные элементы оператора взаимодействия электрона с полем световой волны

**Структура матричных элементов оператора взаимодействия.** В выражения для вероятностей переходов, рассмотренные в § 10.2, входит матричный элемент оператора взаимодействия  $\langle m | \hat{h} | n \rangle$ , где  $n$  обозначает начальное, а  $m$  — конечное состояния системы. Так как рассматриваемая здесь система включает в себя связанный электрон и излучение, то указанные индексы  $n$  и  $m$  должны фиксировать как состояния электрона, так и состояния поля излучения. Последние будем фиксировать, определяя последовательность чисел заполнения различных фотонных состояний:  $N_1, N_2, \dots, N_{\xi}, \dots$  (сокращенно  $\{N_{\xi}\}$ ). Таким образом, вместо  $\langle m | \hat{h} | n \rangle$  будем теперь писать

$$\langle 2, \{N_{\xi}\} | \hat{h} | 1, \{N_{\xi}\} \rangle, \quad (10.4.1)$$

где 1 и 2 — индексы соответственно начального и конечного состояний электрона;  $\{N_{\xi}\}$  и  $\{N_{\xi}\}$  — последовательности чисел заполнения фотонных состояний, описывающих соответственно начальное и конечное состояния поля излучения. С учетом сделанных замечаний запишем матричные элементы операторов  $\hat{h}_1$  и  $\hat{h}_2$  в виде

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{h}_1 | n \rangle = & \\ = \langle \{N_{\xi}'\} | \sum_{\xi} (\langle 2 | \alpha_{\xi} | 1 \rangle \hat{c}_{\xi} + \langle 2 | \alpha_{\xi}^* | 1 \rangle \hat{c}_{\xi}^{\dagger}) | \{N_{\xi}\} \rangle; \end{aligned} \quad (10.4.2)$$

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{h}_2 | n \rangle = & \langle \{N_{\xi}'\} | \sum_{\xi} \sum_{\xi'} \langle 2 | \beta_{\xi\xi'} | 1 \rangle \hat{c}_{\xi} \hat{c}_{\xi'} + \\ & + \langle 2 | \gamma_{\xi\xi'} | 1 \rangle \hat{c}_{\xi} \hat{c}_{\xi'}^{\dagger} + \langle 2 | \beta_{\xi\xi'}^* | 1 \rangle \hat{c}_{\xi}^{\dagger} \hat{c}_{\xi'}^{\dagger} + \\ & + \langle 2 | \gamma_{\xi\xi'}^* | 1 \rangle \hat{c}_{\xi}^{\dagger} \hat{c}_{\xi'} \rangle | \{N_{\xi}\} \rangle. \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

Здесь выделены электронные матричные элементы. Заметим, что, например,

$$\langle 2 | \alpha_{\xi} | 1 \rangle = \int \psi_2^* \alpha_{\xi} \psi_1 dx, \quad (10.4.4)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — волновые функции соответственно начального и конечного состояний электрона; интегрирование производится по координатам электрона. В дальнейшем для упрощения записи будем обозначать электронные матричные элементы следующим образом:

$$\langle 2 | \alpha_{\xi} | 1 \rangle = (\alpha_{\xi})_{21}. \quad (10.4.5)$$

**Фотонные матричные элементы.** Перейдем к рассмотрению фотонных матричных элементов, определяемых операторами уничтожения и рождения фотонов и функциями заполнения фотонных состояний. Воспользуемся соотношением (10.3.7). Тогда для оператора  $\hat{c}_{\xi}$  можем записать

$$\begin{aligned} & \langle \{N_{\xi}'\} | \hat{c}_{\xi} | \{N_{\xi}\} \rangle = \\ & = \langle N_1, \dots, N_{\xi}-1, \dots | \hat{c}_{\xi} | N_1, \dots, N_{\xi}, \dots \rangle = \sqrt{N_{\xi}}. \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

Это означает, что отличные от нуля матричные элементы оператора  $\hat{c}_{\xi}$  соответствуют переходам в поле излучения, при которых уменьшается на единицу число фотонов в  $\xi$ -м состоянии (уничтожается один фотон в  $\xi$ -м состоянии).

Для оператора  $\hat{c}_{\xi}^+$  можем записать

$$\begin{aligned} & \langle \{N_{\xi}'\} | \hat{c}_{\xi}^+ | \{N_{\xi}\} \rangle = \\ & = \langle N_1, \dots, N_{\xi}+1, \dots | \hat{c}_{\xi}^+ | N_1, \dots, N_{\xi}, \dots \rangle = \\ & = \sqrt{N_{\xi}+1}. \end{aligned} \quad (10.4.7)$$

Это означает, что отличные от нуля матричные элементы оператора  $\hat{c}_{\xi}^+$  соответствуют переходам в поле излучения, при которых увеличивается на единицу число фотонов в  $\xi$ -м состоянии (рождается один фотон в  $\xi$ -м состоянии).

Еще раз обратим внимание читателя на наличие в рассматриваемом выражении корня  $\sqrt{N_{\xi}+1}$ . Он приводит к тому, что вероятность перехода с рождением  $\xi$ -го фотона разбивается на два слагаемых, одно из которых отвечает вынужденному испусканию, а другое — спонтанному.

В выражении (10.4.3) входят четыре произведения операторов рождения и уничтожения фотонов. Рассмотрим матричные элементы для этих произведений.

Для произведения  $\hat{c}_\xi \hat{c}_{\xi'}$ , (здесь и ниже  $\xi \neq \xi'$ )

$$\begin{aligned} \langle \{N'_\xi\} | \hat{c}_\xi \hat{c}_{\xi'} | \{N_\xi\} \rangle &= \langle N_1, \dots, N_\xi - 1, \dots, N_{\xi'} - 1, \dots \\ \dots | \hat{c}_\xi \hat{c}_{\xi'} | N_1, \dots, N_\xi, \dots, N_{\xi'}, \dots \rangle &= \sqrt{N_\xi N_{\xi'}}. \end{aligned} \quad (10.4.8)$$

Отличные от нуля матричные элементы оператора  $\hat{c}_\xi \hat{c}_{\xi'}$  соответствуют переходам в поле излучения, при которых уничтожается один фотон в  $\xi$ -м состоянии и один фотон в  $\xi'$ -м состоянии.

Для произведения  $\hat{c}_\xi^+ \hat{c}_{\xi'}^+$

$$\begin{aligned} \langle \{N'_\xi\} | \hat{c}_\xi^+ \hat{c}_{\xi'}^+ | \{N_\xi\} \rangle &= \langle N_1, \dots, N_\xi + 1, \dots, N_{\xi'} + 1, \dots \\ \dots | \hat{c}_\xi^+ \hat{c}_{\xi'}^+ | N_1, \dots, N_\xi, \dots, N_{\xi'}, \dots \rangle &= \\ &= \sqrt{(N_\xi + 1)(N_{\xi'} + 1)}. \end{aligned} \quad (10.4.9)$$

Отличные от нуля матричные элементы оператора  $\hat{c}_\xi^+ \hat{c}_{\xi'}$  соответствуют переходам в поле излучения, при которых рождается один фотон в  $\xi$ -м состоянии и один фотон в  $\xi'$ -м состоянии.

Для произведения  $\hat{c}_\xi \hat{c}_{\xi'}^+$

$$\begin{aligned} \langle \{N'_\xi\} | \hat{c}_\xi \hat{c}_{\xi'}^+ | \{N_\xi\} \rangle &= \langle N_1, \dots, N_\xi - 1, \dots, \\ \dots, N_{\xi'} + 1, \dots | \hat{c}_\xi \hat{c}_{\xi'}^+ | N_1, \dots, N_\xi, \dots, N_{\xi'}, \dots \rangle &= \\ &= \sqrt{N_\xi (N_{\xi'} + 1)}. \end{aligned} \quad (10.4.10)$$

Отличные от нуля матричные элементы оператора  $\hat{c}_\xi^+ \hat{c}_{\xi'}$  соответствуют рождению фотона в  $\xi'$ -м состоянии и уничтожению фотона в  $\xi$ -м состоянии. Аналогичные замечания можно сделать о матричных элементах оператора  $\hat{c}_\xi^+ \hat{c}_{\xi'}$ .

С учетом (10.4.8) — (10.4.10) и (10.4.5) перепишем матричные элементы обеих составляющих оператора взаимодействия (выражения (10.4.2) и (10.4.3) в виде

$$\langle m | \hat{h}_1 | n \rangle = \sum_{\xi} [\sqrt{N_\xi} (\alpha_{\xi})_{21} + \sqrt{N_\xi + 1} (\alpha_{\xi}^*)_{21}], \quad (10.4.11)$$

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{h}_2 | n \rangle &= \\ &= \sum_{\xi} \sum_{\xi'} [\sqrt{N_\xi N_{\xi'}} (\beta_{\xi\xi'}^*)_{21} + \sqrt{N_\xi (N_{\xi'} + 1)} (\gamma_{\xi\xi'})_{21} + \\ &+ \sqrt{(N_\xi + 1) (N_{\xi'} + 1)} (\beta_{\xi\xi'}^*)_{21} + \sqrt{(N_\xi + 1) N_{\xi'}} (\gamma_{\xi\xi'}^*)_{21}]. \end{aligned} \quad (10.4.12)$$

Из соотношений (10.4.11) и (10.4.12) видно, что для расчета матричных элементов операторов  $\hat{h}_1$  и  $\hat{h}_2$  необходимо располагать, во-первых, информацией об электроне в виде

электронных матричных элементов  $(\alpha_{\xi})_{st}$ ,  $(\beta_{\xi\xi'})_{st}$ ,  $(\gamma_{\xi\xi'})_{st}$  и, во-вторых, информацией о поле излучения в виде чисел заполнения  $N_{\xi}$ .

Оператор взаимодействия и процессы различной фотонной кратности. Подводя итоги проведенному рассмотрению, отметим, что матричные элементы оператора  $\hat{h}_1$ , представляющего собой линейную суперпозицию операторов  $\hat{c}_{\xi}$  и  $\hat{c}_{\xi}^{\dagger}$ , отличны от нуля только для однофотонных переходов в поле излучения. Это означает, что оператор взаимодействия  $\hat{h}_1$  описывает:

а) в первом приближении метода возмущений — однофотонные процессы; это есть поглощение и испускание света в первом порядке (напомним замечания в конце § 9.2);

б) во втором приближении метода возмущений — двухфотонные процессы; это есть поглощение и испускание света во втором порядке (двухфотонное поглощение и испускание), рассеяние света в первом порядке;

в) в третьем приближении метода возмущений — трехфотонные процессы; это есть поглощение и испускание света в третьем порядке (трехфотонное поглощение и трехфотонное испускание), рассеяние света во втором порядке, параметрическая генерация света и генерация гармоник в первом порядке и т. д.

Матричные элементы оператора  $\hat{h}_2$ , представляющего суперпозицию произведений операторов  $\hat{c}_{\xi}$  и  $\hat{c}_{\xi}^{\dagger}$ , отличны от нуля только для двухфотонных переходов в поле излучения. Это означает, что оператор взаимодействия  $\hat{h}_2$  описывает:

а) в первом приближении метода возмущений — двухфотонные процессы (поглощение и испускание света во втором порядке, рассеяние света в первом порядке);

б) во втором приближении метода возмущений — четырехфотонные процессы (поглощение и испускание света в четвертом порядке, рассеяние света в третьем порядке, параметрическую генерацию света и генерацию гармоник во втором порядке) и т. д.

При рассмотрении, например, поглощения и испускания света в первом порядке следует использовать только оператор  $\hat{h}_1$ . Однако если поглощение и испускание света в первом порядке запрещено, то следует обратиться к двухфотонным процессам и тогда при рассмотрении поглощения и испускания света надо использовать оба оператора:  $\hat{h}_1$  и  $\hat{h}_2$ . При рассмотрении рассеяния света в первом порядке

следует использовать оператор  $\hat{h}_1$  во втором приближении метода возмущений и оператор  $\hat{h}_2$  в первом приближении метода возмущений.

## ГЛАВА 11

### ОДНОФОТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

#### § 11.1. Вероятности однофотонных процессов

**Поглощение света.** Рассмотрим отнесенную к единице времени вероятность однофотонного процесса, при котором связанный электрон поглощает фотон в  $\xi$ -м состоянии, характеризующемся энергией  $\hbar\omega$ , волновым вектором  $\vec{k}$  и вектором поляризации  $\vec{e}$ , и переходит из состояния  $\psi_1$  с энергией  $E_1$  в состояние  $\psi_2$  с энергией  $E_2$ . Матричный элемент такого процесса описывается слагаемым  $\sqrt{N_\xi(\alpha_\xi)}_{21}$  из выражения (10.4.11). В соответствии с (10.3.23) и (10.3.24) указанное слагаемое может быть представлено в виде

$$\langle m | \hat{h} | n \rangle = -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}} \sqrt{N} ((\vec{p} \vec{e}) e^{i\vec{k}\vec{r}})_{21}, \quad (11.1.1)$$

где

$$((\vec{p} \vec{e}) e^{i\vec{k}\vec{r}})_{21} = \int \psi_2^*(\vec{r}) (\vec{p} \vec{e}) e^{i\vec{k}\vec{r}} \psi_1(\vec{r}) dV \quad (11.1.2)$$

(интегрирование выполняется по пространственным координатам электрона).

Однофотонные процессы рассматриваются в первом приближении метода возмущений. Поэтому для искомой вероятности надо использовать выражение (10.2.13), в котором матричный элемент определяется выражением (11.1.1). При этом надо сделать несколько замечаний относительно входящей в (10.2.13) функции  $G$ . Во-первых, в рассматриваемом случае непрерывному спектру принадлежит не конечное, а начальное состояние системы. Оно обладает энергией  $E_1 + \hbar\omega$ ; энергия фотона изменяется непрерывно. Соотношение (6.1.15) может быть здесь использовано, но при условии, что  $G$  есть плотность не конечных, а начальных состояний системы. Во-вторых, задание векторов  $\vec{e}$  и  $\vec{k}$  означает, что речь идет о поглощении поляризованного и направленного излучения. Предполагая, что излучение имеет определенную поляризацию и распростра-

няется в пределах телесного угла  $d\Omega$ , следует умножить определяемую соотношением (6.1.15) величину  $V e^2 / \pi^2 c^2 \hbar^3 = V \omega^3 / \pi^2 c^3 \hbar$  на  $d\Omega / 8\pi$ . При этом вместо  $G$  будем употреблять  $dG$ . Итак, в рассматриваемом случае

$$dG = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3 \hbar} \frac{d\Omega}{8\pi}. \quad (11.1.3)$$

Используя (10.2.13), получаем с учетом (11.1.1) и (11.1.3) следующее выражение для вероятности однофотонного поглощения:

$$dw_n = \frac{e^2 \omega}{2\pi \hbar c^3 m^2} N \left| \left( (\vec{p} e) e^{i\vec{k}\vec{r}} \right)_{21} \right|^2 d\Omega. \quad (11.1.4)$$

**Испускание света.** Рассмотрение вероятности однофотонного процесса с испусканием  $\xi$ -фотона выполняется аналогичным образом. При этом используется слагаемое  $\sqrt{N_\xi + 1} (\alpha_\xi^*)_{21}$  из (10.4.11). Правда, если по-прежнему связывать индекс 1 с состоянием  $\psi_1$ ,  $E_1$ , а индекс 2 — с состоянием  $\psi_2$ ,  $E_2 (E_2 > E_1)$ , то надо вместо  $(\alpha^*)_{21}$  писать  $(\alpha^*)_{12}$ , поскольку при испускании света происходит переход  $2 \rightarrow 1$ . Упомянутое слагаемое запишем в виде

$$\langle m | \hat{h} | n \rangle = -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega}} \sqrt{N + 1} \left( (\vec{p} e) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right)_{12}. \quad (11.1.5)$$

Используя (10.2.13), (11.1.5) и (11.1.3), находим следующее выражение для вероятности однофотонного испускания:

$$dw_n = \frac{e^2 \omega}{2\pi \hbar c^3 m^2} (N + 1) \left| \left( (\vec{p} e) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right)_{12} \right|^2 d\Omega. \quad (11.1.6)$$

Легко видеть, что в полном соответствии с замечаниями, сделанными ранее, вероятность распадается на два слагаемых: вероятность спонтанного испускания

$$dw_{cн} = \frac{e^2 \omega}{2\pi \hbar c^3 m^2} \left| \left( (\vec{p} e) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right)_{12} \right|^2 d\Omega; \quad (11.1.7)$$

вероятность вынужденного испускания

$$dw_{вн} = \frac{e^2 \omega N}{2\pi \hbar c^3 m^2} \left| \left( (\vec{p} e) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right)_{12} \right|^2 d\Omega. \quad (11.1.8)$$

**Вероятность вынужденных процессов и интенсивность падающего излучения.** Полезно выразить входящую в полученные вероятности величину  $N$  через интенсивность па-

дающего излучения. Пусть  $I(\omega)d\omega d\Omega$  — интенсивность поляризованного падающего излучения, приходящаяся на интервал частот  $d\omega$  и интервал телесного угла  $d\Omega$ . Число осцилляторов в указанных интервалах  $\omega^3 V d\omega d\Omega / (2\pi c)^3$ . Умножив  $N$  на это число и поделив на объем  $V$ , получим количество фотонов в единице объема падающего излучения:

$$d^3N = N\omega^3 d\omega d\Omega / (2\pi c)^3. \quad (11.1.9)$$

Умножая  $dN$  на  $\hbar\omega$ , находим энергию  $\rho(\omega)$  единицы объема падающего излучения. Последующее умножение на  $c$  приводит к выражению для плотности светового потока, т. е. для интенсивности падающего излучения (см. (1.3.9))

$$I(\omega) d\omega d\Omega = c\hbar\omega \frac{N\omega^3}{(2\pi c)^3} d\omega d\Omega.$$

Таким образом, отнесенная к единице телесного угла и единичному частотному интервалу интенсивность падающего излучения определяется соотношением

$$I(\omega) = \rho(\omega) c = \frac{N\hbar\omega^3}{(2\pi)^3 c^3}. \quad (11.1.10)$$

Используя (11.1.10), перепишем выражения для вероятностей вынужденных однофотонных процессов: для поглощения

$$dw_{\Pi} = \frac{I(\omega)}{c} \left( \frac{2\pi e}{\hbar\omega m} \right)^2 \left| \langle (\vec{p} \vec{e}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \rangle_{21} \right|^2 d\Omega, \quad (11.1.11)$$

для вынужденного испускания

$$dw_{\text{вн}} = \frac{I(\omega)}{c} \left( \frac{2\pi e}{\hbar\omega m} \right)^2 \left| \langle (\vec{p} \vec{e}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \rangle_{12} \right|^2 d\Omega. \quad (11.1.12)$$

Поделив (11.1.7) на (11.1.12), получим

$$\frac{dw_{\text{сп}}}{dw_{\text{вн}}} = \frac{c}{I(\omega)} \frac{\hbar\omega^3}{(2\pi c)^3}. \quad (11.1.13)$$

Этот результат согласуется с результатами, приводившимися в § 3.2. Используя (3.2.2), (3.2.4), (3.2.12), получим

$$\frac{w_{\text{сп}}}{w_{\text{вн}}} = \frac{1}{\rho(\omega)} \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{c}{I(\omega)} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}. \quad (11.1.14)$$

Результаты (11.1.14) и (11.1.13) совпадают друг с другом с точностью до множителя  $1/8\pi$ . Отсутствие этого множителя



в (11.1.14) объясняется тем, что в § 3.2 рассматривалась плотность неполяризованного и ненаправленного излучения.

## § 11.2. Дипольные переходы

**Дипольное приближение.** Как уже отмечалось, оптическое излучение принято рассматривать (в широком смысле) в диапазоне длин волн примерно от 0,01 до 100 мкм. Линейные размеры атома составляют примерно  $10^{-4}$ — $10^{-3}$  мкм. Таким образом, для всех длин волн  $\lambda$  в оптическом диапазоне выполняется неравенство

$$\lambda \gg a, \quad (11.2.1)$$

где  $a$  — линейные размеры атомной системы, в которую входит взаимодействующий с излучением электрон.

Неравенство (11.2.1) существенно упрощает входящие в выражения для вероятностей однофотонных процессов матричные элементы:

$$M_{21} = ((\vec{p}e) e^{i\vec{k}\vec{r}})_{21}; \quad M_{12} = ((\vec{p}e) e^{-i\vec{k}\vec{r}})_{12}. \quad (11.2.2)$$

Так как  $r \ll a$ , то можно полагать (в соответствии с (11.2.1)), что

$$\vec{k}\vec{r} \ll 1. \quad (11.2.3)$$

Учитывая это, разложим входящий в (11.2.2) множитель  $\exp(\pm i\vec{k}\vec{r})$  в степенной ряд и ограничимся начальными членами разложения:

$$\exp(\pm i\vec{k}\vec{r}) = 1 \pm i\vec{k}\vec{r} \mp \dots \quad (11.2.4)$$

В первом приближении можно сохранить в разложении (11.2.4) только единицу:

$$\exp(\pm i\vec{k}\vec{r}) \approx 1. \quad (11.2.5)$$

Это и есть так называемое *дипольное приближение*.

Матричные элементы (11.2.2) принимают в дипольном приближении вид

$$M_{21} = (\vec{p})_{21} \vec{e}; \quad M_{12} = (\vec{p})_{12} \vec{e}. \quad (11.2.6)$$

Можно показать, что

$$(\vec{p})_{21} = -im\omega (\vec{d})_{21}/e, \quad (11.2.7)$$

где  $\vec{d}$  — электрический дипольный момент электрона (здесь, как и везде в тексте,  $e$  есть абсолютное значение заряда электрона):

$$\vec{d} = -e\vec{r}, \quad (\vec{d})_{21} = -e(\vec{r})_{21}. \quad (11.2.8)$$

Чтобы получить (11.2.7), сначала представим

$$\begin{aligned} (\vec{r}(t))_{21} &= \int \Psi_2^*(\vec{r}, t) \vec{r} \Psi_1(\vec{r}, t) dV = \\ &= \exp[i(E_2 - E_1)t/\hbar] \int \psi_2^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_1(\vec{r}) dV = e^{i\omega t} (\vec{r})_{21}. \end{aligned} \quad (11.2.9)$$

Аналогично,

$$(\hat{p}(t))_{21} = e^{i\omega t} (\hat{p})_{21}. \quad (11.2.10)$$

Далее воспользуемся операторным равенством  $\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{\hat{p}(t)}{m}$ ,

которое в матричной форме имеет вид  $\frac{d}{dt} (\vec{r}(t))_{21} = (\hat{p}(t))_{21}$ .

Подставляя сюда (11.2.9) и (11.2.10), находим  $i\omega \exp(i\omega t) \times (\vec{r})_{21} = \exp(i\omega t) (\hat{p})_{21}/m$ . Отсюда с учетом (11.2.8) немедленно следует результат (11.2.7).

**Вероятности однофотонных процессов в дипольном приближении.** Исходя из (11.2.5) и используя (11.2.7), преобразуем (11.1.4) к виду

$$dw_n^D = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} N |(\vec{d})_{21} \vec{e}|^2 d\Omega. \quad (11.2.11)$$

Это есть вероятность однофотонного поглощения в дипольном приближении. Вероятность однофотонного испускания в данном приближении описывается выражением

$$dw_n^D = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} (N+1) |(\vec{d})_{12} \vec{e}|^2 d\Omega. \quad (11.2.12)$$

В дипольном приближении вероятности однофотонных процессов определяются матричными элементами электрического дипольного момента электрона. По этой причине рассматриваемое приближение называют *дипольным*, а рассчитанные в этом приближении переходы в системе электрон + поле излучения — *дипольными переходами*.

Обозначим через  $\beta$  угол между векторами  $\vec{d}$  и  $\vec{e}$ . Кроме того, воспользуемся для вынужденных процессов выраже-

ниями (11.1.11) и (11.1.12), включающими интенсивность падающего излучения  $I(\omega)$ . Тогда, исходя из (11.2.11) и (11.2.12), можем записать следующие выражения для вероятностей процессов:

для поглощения

$$d\omega_{\text{п}}^D = \frac{I(\omega)}{c} \left( \frac{2\pi}{\hbar} \right)^2 |(\vec{d})_{21}|^2 \cos^2 \beta \, d\Omega, \quad (11.2.13)$$

для спонтанного испускания

$$d\omega_{\text{сп}}^D = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} |(\vec{d})_{12}|^2 \cos^2 \beta \, d\Omega, \quad (11.2.14)$$

для вынужденного испускания

$$d\omega_{\text{ви}}^D = \frac{I(\omega)}{c} \left( \frac{2\pi}{\hbar} \right)^2 |(\vec{d})_{12}|^2 \cos^2 \beta \, d\Omega. \quad (11.2.15)$$

**Спонтанное испускание в дипольном приближении.** Фотоны, рождающиеся в спонтанных процессах, имеют различные поляризации и направления движения. Поэтому для

получения экспериментально измеряемой вероятности спонтанного испускания  $\omega_{\text{сп}}^D$  необходимо результат (11.2.14) просуммировать по поляризациям и проинтегрировать по углам.

Для пояснения указанных операций воспользуемся рис. 11.1. Векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , отвечающие двум независимым линейным поляризациям излучения, выбраны так, чтобы один из

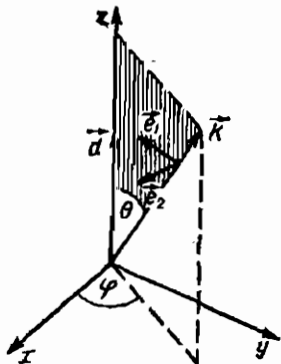


Рис. 11.1

них ( $\vec{e}_1$ ) находился в плоскости векторов  $\vec{d}$  и  $\vec{k}$  (эта плоскость на рисунке заштрихована). В этом случае  $\cos^2 \beta_1 = \sin^2 \theta$ ,  $\cos^2 \beta_2 = 0$ . В результате суммирование по поляризациям становится тривиальной операцией:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \cos^2 \beta_{\alpha} = \sin^2 \theta. \quad (11.2.16)$$

Остается выполнить интегрирование по всем направлениям распространения излучения, после чего получаем

$$\omega_{\text{сп}}^D = \frac{\omega^3 |\vec{d}_{12}|^2}{2\pi\hbar c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\vec{d}_{12}|^2. \quad (11.2.17)$$

Выражение (11.2.17) описывает в дипольном приближении коэффициент Эйнштейна для спонтанного испускания (поскольку  $\omega_{\text{сп}} = A_{21}$ ):

$$A_{21}^D = 4\omega^3 |\vec{d}_{12}|^2 / 3\hbar c^3. \quad (11.2.18)$$

Используя (11.2.18), (3.2.9) и (3.2.12), можно получить в дипольном приближении коэффициенты Эйнштейна также для процессов поглощения и вынужденного испускания.

Величина

$$\tau^D = \frac{1}{\omega_{\text{сп}}^D} = \frac{1}{A_{21}^D} \quad (11.2.19)$$

может рассматриваться как время жизни атома в возбужденном состоянии по отношению к дипольному спонтанному испусканию. Используя (11.2.17), представим

$$\tau^D = 3\hbar c^3 / 4\omega^3 |\vec{d}_{12}|^2. \quad (11.2.20)$$

Для количественной оценки  $\tau^D$  примем  $\omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  (что соответствует длине волны  $\lambda = 1 \text{ мкм}$ ),  $|\vec{d}_{12}| \approx ea$ , т. е.  $|\vec{d}_{12}| \approx 10^{-17} \text{ СГС}$ . В результате получим  $\tau^D \approx 10^{-8} \text{ с}$ .

Полученная оценка весьма приближенна. Однако она позволяет сделать важное заключение: в атомных масштабах, где за единицу времени принимается условно период вращения электрона по боровской орбите, равный примерно  $10^{-15} \text{ с}$ , время  $\tau^D$  является очень большим. Это позволяет рассматривать процессы перехода микросистемы из возбужденного состояния в основное (или менее возбужденное) независимо от предыстории, т. е. независимо от предшествующих процессов возбуждения.

**Правила отбора для дипольных переходов.** Может оказаться, что для состояний  $\psi_1$  и  $\psi_2$  электрона матричный элемент  $(\vec{d})_{21}$  равен нулю. В этом случае говорят, что диполь-

ный переход между указанными состояниями запрещен. Существуют правила, указывающие, когда дипольные переходы разрешены. Их называют *правилами отбора*.

Напомним, что состояние электрона в атоме задается четырьмя квантовыми числами: *главным квантовым числом*  $n$ , *орбитальным числом*  $l$ , *магнитным числом*  $m$  и *спиновым числом*  $s$ . Обозначим:  $\Delta n = n' - n$ ,  $\Delta l = l' - l$ ,  $\Delta m = m' - m$ ,  $\Delta s = s' - s$ . Условимся квантовое число без штриха связывать с начальным, а число со штрихом — с конечным состоянием электрона. Правила отбора для дипольных переходов имеют следующий вид:

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = 0, \pm 1, \quad \Delta s = 0. \quad (11.2.21)$$

Они означают, что дипольные переходы разрешены лишь между такими состояниями электрона в атоме, которые отличаются друг от друга на единицу по орбитальному числу, отличаются на единицу или вообще не отличаются по магнитному числу, не отличаются по спиновому числу. Что касается главного квантового числа, то по нему состояния могут не отличаться или отличаться как угодно.

Чтобы получить правила отбора по орбитальному и магнитному квантовым числам, надо рассмотреть зависимость волновой функции электрона в атоме  $\psi(r, \theta, \varphi)$  только от угловых координат  $\theta$  и  $\varphi$ . Эта зависимость имеет для всех атомов универсальный характер:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) P_l^m(\cos \varphi) e^{im\varphi}, \quad (11.2.22)$$

Здесь  $P_l^m(\cos \theta)$  — присоединенные функции Лежандра. Конкретный тип атомов отражается на виде функции  $R_{nl}(r)$ ; она несущественна при установлении правил отбора.

Исходя из (11.2.22), запишем

$$(\vec{d})_{21} = -e \int \int \int \psi_{n'l'm'}^* \vec{r} \psi_{nlm} r^3 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \quad (11.2.23)$$

Рассматривая составляющие вектора  $(\vec{d})_{21}$ , удобно использовать в данном случае не декартовы компоненты вектора  $\vec{r}$ , а так называемые *циклические компоненты*:

$$\begin{aligned} \xi &= x + iy = r \sin \theta e^{i\varphi}, \\ \eta &= x - iy = r \sin \theta e^{-i\varphi}, \quad z = r \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.2.24)$$

Итак, будем рассматривать вместо векторного соотношения (11.2.23)

три скалярных:

$$(d)_{21}^{\xi} = \Phi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta P_{l'}^{m'}(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) d\theta \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} e^{i\varphi} d\varphi; \quad (11.2.25a)$$

$$(d)_{21}^{\eta} = \Phi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta P_{l'}^{m'}(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) d\theta \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} e^{-i\varphi} d\varphi; \quad (11.2.25b)$$

$$(d)_{21}^z = \Phi \int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta P_{l'}^{m'}(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) d\theta \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi \quad (11.2.25в)$$

$$\left( \text{здесь } \Phi = -e \int_0^{\infty} R_{n'l'}(r) R_{nl}(r) r^2 dr \right).$$

Интеграл  $\int_0^{2\pi} e^{i(m-m'+1)\varphi} d\varphi$  не равен нулю при  $m-m'+1=0$ ,

т. е. при  $\Delta m=1$ . Соответственно  $\int_0^{2\pi} e^{i(m-m'-1)\varphi} d\varphi \neq 0$  при  $\Delta m=-1$ , а

$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi \neq 0$  при  $\Delta m=0$ . Значит, необходимым условием отличия от нуля составляющей  $(d)_{21}^{\xi}$  является условие  $\Delta m=1$ , а составляющих  $(d)_{21}^{\eta}$  и  $(d)_{21}^z$  — соответственно  $\Delta m=-1$  и  $\Delta m=0$ . Указанные условия необходимые, но еще не достаточные; надо учесть также интегралы по углу  $\theta$ .

Рассмотрим сначала интеграл  $\int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta P_{l'}^{m'}(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) d\theta$ ,

входящий в выражение для  $(d)_{21}^{\xi}$ . Мы выяснили, что эта составляющая вектора  $(\vec{d})_{21}$  отлична от нуля лишь при  $\Delta m=0$ , поэтому примем  $m'=m$ . Кроме того, положим  $\cos \theta=u$ . В результате рассматриваемый интеграл преобразуется к виду  $F_1 = \int_{-1}^1 P_{l'}^m(u) P_l^m(u) u du$ ,

Вспользуемся далее рекуррентным соотношением

$$(2l+1) u P_l^m(u) = (l+m) P_{l-1}^m + (l-m+1) P_{l+1}^m. \quad (11.2.26)$$

С учетом (11.2.26) перепишем  $F_1$  в виде

$$F_1 = \frac{1}{2l+1} \left[ (l+m) \int_{-1}^1 P_{l'}^m(u) P_{l-1}^m(u) du + (l-m+1) \int_{-1}^1 P_{l'}^m(u) P_{l+1}^m(u) du \right]. \quad (11.2.27)$$

Принимая во внимание ортогональность присоединенных функций

Лежандра  $\left( \int_{-1}^1 P_{l'}^m(u) P_{l''}^m(u) du = 0 \text{ при } l' \neq l'' \right)$ , заключаем, исходя

из (11.2.27), что  $F_1 \neq 0$  либо когда  $l' = l-1$  ( $\Delta l = 1$ ), либо когда  $l' = l+1$  ( $\Delta l = -1$ ).

Теперь рассмотрим интеграл  $\int_0^\pi \sin^2 \theta P_{l'}^{m'}(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) d\theta$  в выражении (11.2.25а). В этом выражении имеет смысл учитывать лишь  $m' = m+1$ . Учитывая это и полагая  $\cos \theta = u$ , преобразуем рассматриваемый интеграл к виду

$$F_1 = \int_{-1}^1 P_{l'}^{m+1}(u) P_l^m(u) \sqrt{1-u^2} du.$$

Вспользуемся рекуррентным соотношением

$$(2l+1) \sqrt{1-u^2} P_l^m(u) = P_{l+1}^{m+1} - P_{l-1}^{m+1}. \quad (11.2.28)$$

С учетом (11.2.28) перепишем  $F_1$  в виде

$$F_1 = \frac{1}{2l+1} \left[ \int_{-1}^1 P_{l'}^{m+1}(u) P_{l+1}^{m+1}(u) du - \int_{-1}^1 P_{l'}^{m+1}(u) P_{l-1}^{m+1}(u) du \right]. \quad (11.2.29)$$

Принимая во внимание ортогональность присоединенных функций Лежандра, заключаем, исходя из (11.2.29), что  $F_1 \neq 0$  либо когда  $\Delta l = 1$ , либо когда  $\Delta l = -1$ .

К такому же выводу придем, рассмотрев интеграл по углу  $\theta$  в (11.2.25 б) (при этом имеет смысл учитывать лишь  $m' = m-1$ ). Таким образом,  $(d)_{21}^E \neq 0$  при  $\Delta l = \pm 1$ ,  $\Delta m = 1$ ;  $(d)_{21}^N \neq 0$  при  $\Delta l = \pm 1$ ,  $\Delta m = -1$ ;  $(d)_{21}^Z \neq 0$  при  $\Delta l = \pm 1$ ,  $\Delta m = 0$ . Дипольный переход разрешен, если хотя бы одна из составляющих вектора  $(\vec{d})_{21}$  не равна нулю. Следовательно, как мы убедились, правила отбора для дипольных переходов требуют, чтобы орбитальное число изменилось при переходе на единицу, а магнитное число либо изменилось на единицу, либо оставалось прежним.

### § 11.3. Квадрупольные и магнитно-дипольные переходы

**Матричные элементы для квадрупольных и магнитно-дипольных переходов.** Если дипольные-переходы запрещены, то для вычисления вероятностей однофотонных процессов надо воспользоваться следующим после единицы членом в разложении (11.2.4), т. е. членом  $\pm i \vec{k} \vec{r}$ . Это означает, что входящие в выражение для вероятностей однофотонных процессов матричные элементы берутся теперь (для поглощения)

в виде

$$M_{21} = i (\hat{L})_{21} \vec{e}, \quad (11.3.1)$$

где  $(\hat{L})_{21} = (\vec{p} \vec{k} \vec{r})_{21}$ .

Матричный элемент  $(\hat{L})_{21}$  может быть записан так:

$$(\hat{L})_{21} = \frac{m\omega}{e} (\vec{j} \times \hat{\mu})_{21} - \frac{im\omega}{e} (\vec{k} Q)_{21}. \quad (11.3.2)$$

Здесь  $\hat{\mu}$  — оператор магнитного дипольного момента электрона,  $\vec{j}$  — единичный вектор в направлении распространения излучения,  $Q$  — тензор 2-го ранга, описывающий электрический квадрупольный момент электрона. Первое слагаемое в правой части (11.3.2) определяет *магнитно-дипольные*, а второе — *квадрупольные* переходы (в отличие от магнитно-дипольных переходов, рассматривавшиеся в § 11.2, называют электрическими дипольными).

Напомним выражения для магнитно-дипольного и электрического квадрупольного моментов электрона:

$$\hat{\mu} = e (\vec{p} \times \vec{r}) / 2mc, \quad (11.3.3)$$

$$Q = -\frac{e}{2} \begin{Bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{Bmatrix}. \quad (11.3.4)$$

Чтобы получить (11.3.2), представим оператор  $\hat{L}$  в виде

$$\hat{L} = m \frac{d\vec{r}}{dt} (\vec{k} \vec{r}). \quad (11.3.5)$$

Затем используем известную из векторной алгебры формулу

$$-(\vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{b})) = (\vec{a} \vec{c}) \vec{b} - \vec{c} (\vec{a} \vec{b}), \quad (11.3.6)$$

где положим  $\vec{a} = \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{r}$ ,  $\vec{c} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Напомним, что операторы  $\vec{r}$  и

$\frac{d\vec{r}}{dt}$  не коммутируют, поэтому формула (11.3.6) записана так, чтобы

вектор  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  находился слева от вектора  $\vec{r}$ , как и в (11.3.5). Итак,

(11.3.6) принимает вид

$$-\left( \vec{k} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \right) \right) = \left( \vec{k} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \vec{r} - \frac{d\vec{r}}{dt} (\vec{k} \vec{r}). \quad (11.3.7)$$



Далее воспользуемся соотношением

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} (\vec{k} \vec{r})) = \frac{d\vec{r}}{dt} (\vec{k} \vec{r}) + \left( \vec{k} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \vec{r}. \quad (11.3.8)$$

Выразим  $\left( \vec{k} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \vec{r}$  из (11.3.8) и, подставив результат в (11.3.7) получим

$$\hat{L} = \frac{m}{2} \left( \vec{k} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \right) \right) + \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r} (\vec{k} \vec{r})). \quad (11.3.9)$$

Переходя от  $\hat{L}$  к матричному элементу  $(\hat{L})_{\alpha\beta}$  и учитывая при этом, что  $\left( \frac{d}{dt} \hat{I} \right)_{\alpha\beta} = i\omega (\hat{I})_{\alpha\beta}$ , получаем из (11.3.9)

$$(\hat{L})_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\vec{k} \times (\vec{p} \times \vec{r}))_{\alpha\beta} + \frac{im\omega}{2} (\vec{r} (\vec{k} \vec{r}))_{\alpha\beta}. \quad (11.3.10)$$

Используя (11.3.3), (11.3.4) и 11.3.10), приходим к искомому результату (11.3.2).

**Правила отбора для квадрупольных переходов.** Электрический дипольный момент электрона связан с его координатой линейно (см. (11.2.8)), а квадрупольный момент — по квадратичному закону (см. (11.3.4)). Это позволяет легко установить правила отбора для квадрупольных переходов, коль скоро известны правила отбора для электрических дипольных переходов.

Рассмотрим, например, матричный элемент

$$(xy)_{l'l} = \sum_{l''} (x)_{l'l''} (y)_{l''l}. \quad (11.3.11)$$

Из правил отбора для дипольных переходов следует, что  $(x)_{l'l''} \neq 0$ , если  $l' = l'' \pm 1$ , а  $(y)_{l''l} \neq 0$ , если  $l'' = l \pm 1$ . Следовательно,  $(xy)_{l'l} \neq 0$ , если  $l' - l'' = \pm 1$  и  $l'' - l = \pm 1$ . Складывая эти два равенства, получаем  $l' - l = 0, \pm 2$  ( $\Delta l = 0, \pm 2$ ).

Аналогично рассматриваем отбор по магнитному числу  $m$ . Из правил отбора для дипольных переходов следует, что  $(x)_{m'm} \neq 0$ , если  $m' = m \pm 1$  или  $m' = m$ , а  $(y)_{m''m} \neq 0$ , если  $m'' = m \pm 1$  или  $m'' = m$ . Следовательно,  $(xy)_{m'm} = \sum_{m''} (x)_{m'm''} \times (y)_{m''m} \neq 0$ , если  $m' - m'' = 0, \pm 1$  и  $m'' - m = 0, \pm 1$ . Складывая эти два равенства, получаем  $m' - m = 0, \pm 1, \pm 2$  ( $\Delta m = 0, \pm 1, \pm 2$ ).

Итак, правила отбора по орбитальному и магнитному квантовым числам имеют для квадрупольных переходов

следующий вид:

$$\Delta l = 0, \pm 2; \quad \Delta m = 0, \pm 1, \pm 2. \quad (11.3.12)$$

Что касается магнитно-дипольных переходов, то правила отбора для них мы дадим без вывода:

$$\Delta l = 0; \quad \Delta m = \pm 1. \quad (11.3.13)$$

На рис. 11.2 изображены несколько энергетических уровней электрона в атоме (для  $l=0, 1, 2$ ). Толстыми стрелками показаны переходы (с испусканием фотона), разре-

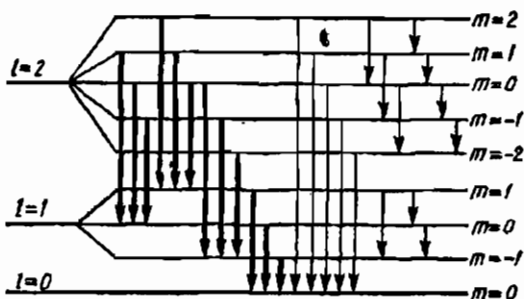


Рис. 11.2

шенные в дипольном приближении, а тонкими — переходы, запрещенные в дипольном, но разрешенные в квадрупольном приближении.

**Сопоставление вероятностей переходов разного типа.** Пусть  $\omega^D$ ,  $\omega^M$ ,  $\omega^Q$  — отнесенные к единице времени вероятности какого-либо однофотонного процесса для дипольных, магнитно-дипольных и квадрупольных переходов соответственно. Оценим отношения этих вероятностей. На основании полученных выше результатов (см. (11.2.7) и (11.3.2)) заключаем

$$\frac{\omega^M}{\omega^D} = \frac{|m\omega (\vec{j} \times \vec{\mu})_{21}|^2}{|(\vec{p})_{21}|^2} = \frac{|(\vec{j} \times \vec{\mu})_{21}|^2}{|(\vec{d})_{21}|^2}, \quad (11.3.14)$$

$$\frac{\omega^Q}{\omega^D} = \frac{|m\omega (\vec{k}Q)_{21}|^2}{|(\vec{p})_{21}|^2} = \frac{|(\vec{k}Q)_{21}|^2}{|(\vec{d})_{21}|^2}. \quad (11.3.15)$$

Будем приближенно полагать:

$$|(\vec{d})_{21}|^2 \approx e^2 a^2, \quad (11.3.16)$$

$$|(\vec{j} \times \vec{\mu})_{21}|^2 \approx \left(\frac{e}{mc}\right)^2 (\rho a)^2 \approx e^2 a^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2, \quad (11.3.17)$$

где  $v$  — скорость электрона на орбите в боровской модели атома,

$$|(\vec{k}Q)_{21}|^2 \approx k^2 e^2 a^4 \approx e^2 a^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2. \quad (11.3.18)$$

С учетом (11.3.16) — (11.3.18) получаем из (11.3.14) и (11.3.15)

$$\omega^M / \omega^D \approx (v/c)^2 \approx 10^{-4}, \quad (11.3.19)$$

$$\omega^Q / \omega^D \approx (a/\lambda)^2 \approx 10^{-6}. \quad (11.3.20)$$

Последняя оценка получена в предположении, что  $\lambda = 1$  мкм,  $a = 10^{-7}$  см; вероятность квадрупольных переходов быстро уменьшается с увеличением длины волны излучения. Несмотря на приближенный характер результатов (11.3.19) и (11.3.20), следует заключить, что если дипольные переходы не запрещены, можно уверенно пренебрегать переходами более высоких порядков.

Ранее было оценено время жизни  $\tau^D$  электрона в возбужденном состоянии по отношению к дипольному спонтанному испусканию. Исходя из (11.3.19) и (11.3.20) можно получить оценку для времен жизни: по отношению к магнитно-дипольному спонтанному испусканию  $\tau^M \approx 10^{-4}$  с; по отношению к квадрупольному спонтанному испусканию  $\tau^Q \approx 10^{-6}$  с. В связи с этим магнитно-дипольные и квадрупольные переходы могут быть названы медленными переходами. Если дипольные переходы с некоторого уровня запрещены, то такой уровень является «долгоживущим»; его называют метастабильным.

**Правила отбора и сохранение момента импульса.** Правилам отбора для дипольных и квадрупольных переходов может быть придан простой физический смысл. Если считать, что при дипольном испускании фотон уносит с собой момент импульса, равный единице (в единицах  $\hbar$ ), а при квадрупольном — момент, равный двум, то правила отбора приобретают смысл условия сохранения момента импульса системы электрон + фотон.

Можно ли, однако, говорить об определенном моменте импульса фотона, коль скоро все рассмотрение проводится на основе фотонных  $k\alpha$ -состояний, т. е. состояний с определенным импульсом фотона? Ведь состояние фотона с определенным импульсом есть суперпозиция состояний с разными моментами импульса (назовем эту суперпозицию  $k\alpha$ -суперпозицией). Чтобы разобраться в данной си-

туации, следует обратиться к разложению (11.2.4). В некотором смысле это разложение как раз и соответствует разложению  $\vec{k}\alpha$ -состояния по состояниям с разными моментами импульса фотона. Если, в частности, сохранить в (11.2.4) только единицу, то это будет отвечать сохранению в  $\vec{k}\alpha$ -суперпозиции только состояния с моментом импульса фотона, равным единице. Если в (11.2.4) сохранить также член  $\vec{k}r$ , то в  $\vec{k}\alpha$ -суперпозиции появится еще одно состояние — с моментом, равным двум. При сохранении в (11.2.4) последующих членов разложения в  $\vec{k}\alpha$ -суперпозиции появятся состояния с более высокими моментами импульса. Дипольное приближение соответствует ситуации, когда в  $\vec{k}\alpha$ -суперпозиции можно пренебречь вкладом всех состояний, кроме состояния с моментом импульса фотона, равным единице.

## ГЛАВА 12

### НЕКОТОРЫЕ МНОГОФОТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОЦЕССЫ С УЧАСТИЕМ ФОНОНОВ

#### § 12.1. Двухфотонные процессы (рассеяние света)

**Общие замечания.** Как отмечалось в § 10.4, рассеяние света в первом порядке описывается двухфотонными процессами. При рассмотрении рассеяния света надо использовать оба оператора взаимодействия:  $\hat{h}_2$  — в первом приближении метода возмущений и  $\hat{h}_1$  — во втором приближении. Исходя из (10.2.13) и (10.2.16), представим вероятность рассеяния света в виде

$$dw_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{h}_2 | n \rangle + \sum_k \frac{\langle m | \hat{h}_1 | k \rangle \langle k | \hat{h}_1 | n \rangle}{W_n - W_k} \right|^2 dG, \quad (12.1.1)$$

где  $dG$  определяется соотношением (11.1.3). Отметим, что  $W_i$  есть энергия всей рассматриваемой здесь квантовой системы, т. е. энергия электрона и фотонов, участвующих в переходах (не следует путать энергию системы  $W_i$  с энергией электрона  $E_i$ ). Из (12.1.1) видно, что оператор  $\hat{h}_1$  описывает рассеяние света как переходы через промежуточные виртуальные состояния, а оператор  $\hat{h}_2$  — как прямые переходы.

Пусть при рассеянии света на связанном электроне происходит уничтожение фотона в состоянии  $\xi=1$  (частота  $\omega_1$ ,

волновой вектор  $\vec{k}_1$ , вектор поляризации  $\vec{e}_1$ ) и рождение фотона в состоянии  $\xi=2$  ( $\omega_2, \vec{k}_2, \vec{e}_2$ ); при этом электрон переходит из состояния  $\psi_1, E_1$  в состояние  $\psi_2, E_2$ . Условие сохранения энергии имеет вид

$$E_1 + \hbar\omega_1 = E_2 + \hbar\omega_2. \quad (12.1.2)$$

Плотность конечных состояний (см. (11.1.3))

$$dG = V\omega_2^2 d\Omega / (2\pi c)^3 \hbar, \quad (12.1.3)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла для направления импульса родившегося фотона. Предположим далее, что в начальном состоянии в поле излучения имелось  $N_1$  фотонов в состоянии  $\xi=1$  и  $N_2$  фотонов в состоянии  $\xi=2$ . В конечном состоянии эти числа заполнения будут равны соответственно  $N_1-1$  и  $N_2+1$ .

Отметим две возможные ситуации: а)  $E_1 = E_2$  и, следовательно,  $\omega_1 = \omega_2$ : состояние электрона и частота излучения не изменяются (*когерентное*, или *рэлеевское*, рассеяние света); б)  $E_1 \neq E_2$  и, следовательно,  $\omega_1 \neq \omega_2$ : состояние электрона и частота излучения изменяются (*комбинационное* рассеяние света).

Матричный элемент для прямых переходов. При применении оператора  $\hat{h}_2$  надо воспользоваться вторым и четвертым слагаемыми в квадратных скобках правой части (10.4.12). В результате получим

$$\langle m | \hat{h}_2 | n \rangle = \sqrt{N_1(N_2+1)} [(\gamma_{12})_{21} + (\gamma_{21}^*)_{21}]. \quad (12.1.4)$$

Так как  $\gamma_{12} = \gamma_{21}^*$ , то

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{h}_2 | n \rangle &= 2\sqrt{N_1(N_2+1)} (\gamma_{12})_{21} = \\ &= \frac{e^2}{mc^2} \sqrt{N_1(N_2+1)} \int \psi_2^* \vec{A}_1 \vec{A}_2^* \psi_1 dV. \end{aligned} \quad (12.1.5)$$

Подставляя (10.3.23) в (12.1.5), находим

$$\langle m | \hat{h}_2 | n \rangle = \frac{2\pi\hbar e^2 (\vec{e}_1 \vec{e}_2)}{mV \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \sqrt{N_1(N_2+1)} \int \psi_2^* e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r}} \psi_1 dV. \quad (12.1.6)$$

Будем полагать, что

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r} \ll 1; \quad \exp[i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r}] \approx 1. \quad (12.1.7)$$

Это отвечает *дипольному приближению*, уже применявшемуся при рассмотрении однофотонных процессов. Исполни-

зую (12.1.7), получаем

$$\int \psi_2^* \exp [i (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r}] \psi_1 dV \approx \int \psi_2^* \psi_1 dV = \delta_{12}. \quad (12.1.8)$$

Подставляя (12.1.8) в (12.1.6) и вводя вместо  $\langle m | \hat{h}_2 | n \rangle$  обозначение  $\eta_{n1}$ , запишем

$$\eta_{21} = \frac{2\pi\hbar e^2 (\vec{e}_1 \vec{e}_2)}{mV \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \sqrt{N_1 (N_2 + 1)} \delta_{12}. \quad (12.1.9)$$

Если при рассеянии света состояние электрона не меняется ( $\psi_1 = \psi_2$ ), то  $\delta_{12} = 1$ . В противном случае  $\delta_{12} = 0$ . Иными словами, матричный элемент  $\eta_{n1}$ , определяемый оператором взаимодействия  $\hat{h}_2$ , описывает только когерентные двухфотонные процессы (рэлеевское рассеяние света).

**Матричный элемент для переходов через промежуточные состояния.** Используя (10.4.11), запишем матричный элемент, определяемый оператором  $\hat{h}_1$ , в виде

$$\begin{aligned} x_{21} = & \sum_k \sum_{\xi} \sum_{\xi'} [ \sqrt{N_{\xi}} (\alpha_{\xi})_{2k} + \\ & + \sqrt{N_{\xi} + 1} (\alpha_{\xi}^*)_{2k} ] [ \sqrt{N_{\xi'}} (\alpha_{\xi'})_{k1} + \\ & + \sqrt{N_{\xi'} + 1} (\alpha_{\xi'}^*)_{k1} ] (W_{\xi} - W_k)^{-1}. \end{aligned} \quad (12.1.10)$$

В двойной сумме  $\sum_{\xi} \sum_{\xi'}$ , входящей в (12.1.10), надо сох-

ранить всего два слагаемых:

$\sqrt{N_2 + 1} (\alpha_2^*)_{2k} \sqrt{N_1} (\alpha_1)_{k1}$  — при переходе из начального состояния в промежуточное уничтожается фотон в состоянии  $\xi = 1$ , при переходе из промежуточного состояния в конечное рождается фотон в состоянии  $\xi = 2$ ; в этом случае

$$W_1 = E_1 + \hbar\omega_1; \quad W_k = E_k, \quad (12.1.11)$$

где  $E_k$  — энергия промежуточного электронного состояния;

$\sqrt{N_1} (\alpha_1)_{2k} \sqrt{N_2 + 1} (\alpha_2^*)_{k1}$  — при переходе из начального состояния в промежуточное рождается фотон в состоянии  $\xi = 2$ , при переходе из промежуточного состояния в конечное уничтожается фотон в состоянии  $\xi = 1$ ; в этом случае

$$W_1 = E_1 + \hbar\omega_1; \quad W_k = E_k + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2. \quad (12.1.12)$$

Альтернатива, когда сначала рождается фотон, а потом уничтожается фотон, может показаться неестественной; однако ее надо учитывать наряду с естественной альтернативой, когда сначала уничтожается фотон, а потом рождает-

ся фотон. Напомним, что двухфотонный процесс принципиально нельзя разбить на два временных этапа, так что обе указанные альтернативы являются *физически неразличимыми*. Поэтому в (12.1.10) и рассматривается интерференция амплитуд вероятностей обеих альтернатив (в соответствии с идеями, обсуждавшимися в § 5.1 и 9.2).

Напомним также, что условие сохранения энергии применимо лишь к начальному и конечному состояниям. Для отдельных же переходов через промежуточные состояния условие сохранения энергии неприменимо, поскольку эти состояния являются виртуальными. Иными словами,  $W_1 = W_2$ , но  $W_1 \neq W_k$ , равно как и  $W_2 \neq W_k$ .

Учитывая сделанные замечания и используя (12.1.11) и (12.1.12), получаем для  $\kappa_{21}$  следующее выражение:

$$\kappa_{21} = \sqrt{N_1(N_2 + 1)} \sum_k \left[ \frac{(\alpha_2^*)_{2k}(\alpha_1)_{k1}}{E_1 - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\alpha_1)_{2k}(\alpha_2^*)_{k1}}{E_1 - E_k - \hbar\omega_2} \right]. \quad (12.1.13)$$

Далее учтем, что, согласно (10.3.23) и (10.3.25),

$$\alpha_i = -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_i}} (\vec{p}_i \vec{e}_i) e^{i\vec{k}_i \vec{r}}; \quad i = 1, 2. \quad (12.1.14)$$

В соответствии с (12.1.7) положим  $\exp(i\vec{k}_i \vec{r}) = 1$ , после чего матричный элемент  $\kappa_{21}$  примет вид

$$\begin{aligned} \kappa_{21} &= \frac{2\pi\hbar e^2 \sqrt{N_1(N_2 + 1)}}{Vm^2 \sqrt{\omega_1\omega_2}} \times \\ &\times \sum_k \left[ \frac{(\vec{p}_2 \vec{e}_2)_{2k} (\vec{p}_1 \vec{e}_1)_{k1}}{E_1 - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\vec{p}_1 \vec{e}_1)_{2k} (\vec{p}_2 \vec{e}_2)_{k1}}{E_1 - E_k - \hbar\omega_2} \right]. \end{aligned} \quad (12.1.15)$$

Эта формула описывает как когерентное, так и комбинационное рассеяние света.

**Дифференциальное сечение рассеяния света.** Подставляя (12.1.3), (12.1.9) и (12.1.15) в (12.1.1), получаем следующее выражение для отнесенной к единице времени вероятности рассеяния света:

$$d\omega = r_0^2 \frac{c\omega_0}{V\omega_0} N_1(N_2 + 1) |M_{21}|^2 d\Omega, \quad (12.1.16)$$

где

$$M_{21} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2) \delta_{12} + \frac{1}{m} \sum_k \left[ \frac{(\vec{p}_2 \vec{e}_2)_{2k} (\vec{p}_1 \vec{e}_1)_{k1}}{E_1 - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\vec{p}_1 \vec{e}_1)_{2k} (\vec{p}_2 \vec{e}_2)_{k1}}{E_1 - E_k - \hbar\omega_2} \right], \quad (12.1.17)$$

$r_0 = e^2/mc^3 = 2,8 \cdot 10^{-18}$  м — так называемый классический радиус электрона.

Для получения дифференциального сечения процесса  $d\sigma$  надо разделить вероятность процесса  $dw$  на плотность потока падающих фотонов, равную  $N_1 c/V$ . Используя (12.1.16), находим

$$d\sigma = dw \frac{V}{N_1 c} = r_0^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} (N_2 + 1) |M_{21}|^2 d\Omega. \quad (12.1.18)$$

Сечение  $d\sigma$  разбивается на два слагаемых: сечение вынужденного рассеяния

$$d\sigma_b = r_0^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} N_2 |M_{21}|^2 d\Omega, \quad (12.1.19)$$

сечение спонтанного рассеяния

$$d\sigma_c = r_0^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} |M_{21}|^2 d\Omega. \quad (12.1.20)$$

Матричный элемент  $M_{21}$ , определяемый соотношением (12.1.17), может быть приведен путем несложных, хотя и громоздких, выкладок к более симметричному виду (при этом матричные элементы  $(\hat{p})_{ik}$  должны быть выражены через матричные элементы  $(\hat{r})_{ik}$  в соответствии с (11.2.7)):

$$M_{21} = m\omega_1\omega_2 \sum_k \left[ \frac{(\vec{r} \vec{e}_2)_{2k} (\vec{r} \vec{e}_1)_{k1}}{E_1 - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\vec{r} \vec{e}_1)_{2k} (\vec{r} \vec{e}_2)_{k1}}{E_1 - E_k - \hbar\omega_2} \right]. \quad (12.1.21)$$

Подставляя (12.1.21) в (12.1.18), получаем

$$d\sigma = r_0^2 m^2 \omega_1 \omega_2^3 (N_2 + 1) \times \left| \sum_k \left[ \frac{(\vec{r} \vec{e}_2)_{2k} (\vec{r} \vec{e}_1)_{k1}}{E_1 - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\vec{r} \vec{e}_1)_{2k} (\vec{r} \vec{e}_2)_{k1}}{E_1 - E_k - \hbar\omega_2} \right] \right|^2 d\Omega. \quad (12.1.22)$$

Когерентное рассеяние и комбинационное рассеяние. Если  $\psi_1 = \psi_2$  и соответственно  $\omega_1 = \omega_2$ , то выражение (12.1.18) дает дифференциальное сечение когерентного рассеяния света (так называемая дисперсионная формула):

$$d\sigma = r_0^2 (N_2 + 1) \left| \cos \theta + \frac{1}{m} \sum_k \left[ \frac{(\vec{p} \vec{e}_2)_{ik} (\vec{p} \vec{e}_1)_{k1}}{E_1 - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\vec{p} \vec{e}_1)_{ik} (\vec{p} \vec{e}_2)_{k1}}{E_1 - E_k - \hbar\omega_1} \right] \right|^2 d\Omega, \quad (12.1.23)$$



где  $\theta$  — угол между векторами поляризации падающего и рассеянного излучений. Вклад в когерентное рассеяние дают как прямые переходы, так и переходы через промежуточные состояния. Используя принцип соответствия, можно получить из (12.1.23) классическое сечение рассеяния света. В частности, если энергия падающего фотона много больше энергии связи электрона, но при этом продолжает выполняться условие  $\lambda \gg a$  ( $a$  — линейные размеры атомной системы), то тогда соотношение (12.1.23) упрощается (поскольку в этом случае  $\hbar\omega_1 \gg E_1 - E_k$ ):

$$d\sigma = r_0^2 (N_s + 1) \cos^2 \theta d\Omega. \quad (12.1.24)$$

Этот результат соответствует классической формуле рассеяния света на свободном электроны.

Если  $\psi_1 \neq \psi_s$  и соответственно  $\omega_1 \neq \omega_s$ , то выражение (12.1.18) дает дифференциальное сечение комбинационного рассеяния света:

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega_s}{\omega_1} (N_s + 1) \times \\ \times \left| \frac{1}{m} \sum_k \left[ \frac{(\vec{p} e_2)_{2k} (\vec{p} e_1)_{k1}}{E_1 - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\vec{p} e_1)_{2k} (\vec{p} e_2)_{k1}}{E_1 - E_k - \hbar\omega_s} \right] \right|^2 d\Omega. \quad (12.1.25)$$

Вклад в комбинационное рассеяние дают только переходы через промежуточные состояния. Комбинационное рассеяние — принципиально квантовый эффект; оно не имеет аналога в классической теории рассеяния света.

## § 12.2. Пример когерентного трехфотонного процесса (параметрическая генерация света)

**Общие замечания.** Параметрическая генерация света (как и параметрическое рассеяние света) в первом порядке описывается когерентными трехфотонными процессами; при рассмотрении этих процессов следует использовать оператор взаимодействия  $\hat{H}_I$  в третьем приближении метода возмущений. Предположим, что рассматривается процесс, в котором уничтожается фотон в состоянии  $\xi=1$  ( $\omega_1, \vec{k}_1, \vec{e}_1$ ) и рождаются два фотона — один в состоянии  $\xi=2$  ( $\omega_2, \vec{k}_2, \vec{e}_2$ ), другой в состоянии  $\xi=3$  ( $\omega_3, \vec{k}_3, \vec{e}_3$ ). Этому процессу отвечает переход в поле излучения:

$$\{N_1, N_2, N_3\} \rightarrow \{N_1 - 1, N_2 + 1, N_3 + 1\}.$$

Так как процесс является когерентным и, следовательно, начальное и конечное состояния электрона одинаковы ( $\psi_1$ , энергия  $E_1$ ), то условие сохранения энергии должно полностью определяться переходами в поле излучения

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3. \quad (12.2.1)$$

В соответствии с (10.2.17) и (10.4.11) представим дифференциальную вероятность параметрической генерации света в виде

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_k \sum_n \Phi_{kn} \right|^2 dG. \quad (12.2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_{kn} = & \sum_{\xi} \sum_{\xi'} \sum_{\xi''} [V\overline{N_{\xi}} (\alpha_{\xi})_{ik} + V\overline{N_{\xi} + 1} (\alpha_{\xi}^*)_{ik}] \times \\ & \times [V\overline{N_{\xi'}} (\alpha_{\xi'})_{kn} + V\overline{N_{\xi'} + 1} (\alpha_{\xi'}^*)_{kn}] [V\overline{N_{\xi''}} (\alpha_{\xi''})_{ni} + \\ & + V\overline{N_{\xi''} + 1} (\alpha_{\xi''}^*)_{ni}] (W_1 - W_k)^{-1} (W_1 - W_n)^{-1}. \end{aligned} \quad (12.2.3)$$

При этом

$$W_1 = E_1 + \hbar\omega_1. \quad (12.2.4)$$

Структура матричного элемента для когерентного трехфотонного процесса. В тройной сумме (12.2.3) надо сохранить лишь шесть слагаемых. Они отвечают таким последовательностям процессов (здесь фотон в состоянии  $\xi = i$  обозначается через  $\gamma_i$ ):

- а) уничтожается  $\gamma_1$  — рождается  $\gamma_2$  — рождается  $\gamma_3$ ,
- б) уничтожается  $\gamma_1$  — рождается  $\gamma_3$  — рождается  $\gamma_2$ ,
- в) рождается  $\gamma_2$  — уничтожается  $\gamma_1$  — рождается  $\gamma_3$ ,
- г) рождается  $\gamma_3$  — уничтожается  $\gamma_1$  — рождается  $\gamma_2$ ,
- д) рождается  $\gamma_3$  — рождается  $\gamma_3$  — уничтожается  $\gamma_1$ ,
- е) рождается  $\gamma_3$  — рождается  $\gamma_2$  — уничтожается  $\gamma_1$ .

Последовательность процессов а) представлена в (12.2.3) слагаемым

$$\Phi^a = V\overline{N_2 + 1} (\alpha_2^*)_{ik} V\overline{N_3 + 1} (\alpha_3^*)_{kn} V\overline{N_1} (\alpha_1)_{ni}. \quad (12.2.5)$$

При этом

$$W_n = E_n; W_k = E_k + \hbar\omega_2. \quad (12.2.6)$$

Последовательность процессов б) представлена в (12.2.3) слагаемым

$$\Phi^b = V\overline{N_2 + 1} (\alpha_2^*)_{ik} V\overline{N_3 + 1} (\alpha_3^*)_{kn} V\overline{N_1} (\alpha_1)_{ni}. \quad (12.2.7)$$

При этом

$$W_n = E_n; W_k = E_k + \hbar\omega_3. \quad (12.2.8)$$

Последовательность в) представлена в (12.2.3) слагаемым

$$\Phi^b = \sqrt{N_2 + 1} (\alpha_3^*)_{1k} \sqrt{N_1} (\alpha_1)_{kn} \sqrt{N_2 + 1} (\alpha_3^*)_{n1}. \quad (12.2.9)$$

При этом

$$W_n = E_n + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2; \quad W_k = E_k + \hbar\omega_2. \quad (12.2.10)$$

Последовательность г) представлена в (12.2.3) слагаемым

$$\Phi^r = \sqrt{N_2 + 1} (\alpha_2^*)_{1k} \sqrt{N_1} (\alpha_1)_{kn} \sqrt{N_2 + 1} (\alpha_3^*)_{n1}. \quad (12.2.11)$$

При этом

$$W_n = E_n + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2; \quad W_k = E_k + \hbar\omega_2. \quad (12.2.12)$$

Последовательность д) представлена в (12.2.3) слагаемым

$$\Phi^a = \sqrt{N_1} (\alpha_1)_{1k} \sqrt{N_2 + 1} (\alpha_3^*)_{kn} \sqrt{N_2 + 1} (\alpha_2^*)_{n1}. \quad (12.2.13)$$

При этом

$$W_n = E_n + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2; \quad W_k = E_k + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3. \quad (12.2.14)$$

Последовательность е) представлена в (12.2.3) слагаемым

$$\Phi^e = \sqrt{N_1} (\alpha_1)_{1k} \sqrt{N_2 + 1} (\alpha_2^*)_{kn} \sqrt{N_2 + 1} (\alpha_3^*)_{n1}. \quad (12.2.15)$$

При этом

$$W_n = E_n + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2; \quad W_k = E_k + \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3. \quad (12.2.16)$$

В результате получаем следующее выражение для матричного элемента  $\Phi_{kn}$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{kn} = & \sqrt{N_1 (N_2 + 1) (N_2 + 1)} \times \\ & \times \left[ \frac{(\alpha_3^*)_{1k} (\alpha_2^*)_{kn} (\alpha_1)_{n1}}{(E_1 - E_k + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2) (E_1 - E_n + \hbar\omega_1)} + \right. \\ & + \frac{(\alpha_2^*)_{1k} (\alpha_3^*)_{kn} (\alpha_1)_{n1}}{(E_1 - E_k + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2) (E_1 - E_n + \hbar\omega_1)} + \\ & + \frac{(\alpha_3^*)_{1k} (\alpha_1)_{kn} (\alpha_2^*)_{n1}}{(E_1 - E_k + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2) (E_1 - E_n - \hbar\omega_2)} + \\ & + \frac{(\alpha_2^*)_{1k} (\alpha_1)_{kn} (\alpha_3^*)_{n1}}{(E_1 - E_k + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2) (E_1 - E_n - \hbar\omega_2)} + \\ & + \frac{(\alpha_1)_{1k} (\alpha_3^*)_{kn} (\alpha_2^*)_{n1}}{(E_1 - E_k - \hbar\omega_2 - \hbar\omega_2) (E_1 - E_n - \hbar\omega_2)} + \\ & \left. + \frac{(\alpha_1)_{1k} (\alpha_2^*)_{kn} (\alpha_3^*)_{n1}}{(E_1 - E_k - \hbar\omega_2 - \hbar\omega_2) (E_1 - E_n - \hbar\omega_2)} \right]. \quad (12.2.17) \end{aligned}$$

Важно подчеркнуть, что рассматриваемый здесь переход в поле излучения, связанный с уничтожением одного фотона

и рождением двух фотонов, является единым процессом, не допускающим разделения на отдельные последовательные этапы (здесь имеет место трехфотонный процесс, а не три следующие друг за другом однофотонных процесса!). Поэтому шесть рассмотренных выше альтернатив являются физически неразличимыми. Рождаются ли сначала два фотона, а потом уничтожается один фотон (альтернативы д и е), или, наоборот, уничтожается ли сначала фотон, а потом рождаются два фотона (альтернативы а и б), — все эти альтернативы физически равноправны. Принципиально нельзя утверждать, какая из них реализуется в действительности. Здесь мы встречаемся с яркой иллюстрацией идей, изложенных в § 5.1. Физическая неразличимость шести возможных альтернатив требует сложения не вероятностей, отвечающих им, а амплитуд вероятностей. Соотношение (12.2.17) как раз и описывает интерференцию амплитуд вероятностей рассматриваемых альтернатив.

Заметим, что суммой (12.2.17) не исчерпывается в данном случае вопрос об интерференции амплитуд. Прежде чем переходить к вероятности процесса, надо выполнить еще одно суммирование — просуммировать  $\Phi_{kn}$  по промежуточным виртуальным  $k$ - и  $n$ -состояниям. Иначе говоря, надо сначала получить  $\sum_k \sum_n \Phi_{kn}$ , а уже затем переходить к квадрату модуля (см. (12.2.2)).

**Вероятность параметрической генерации света.** Будем полагать, что имеются два потока фотонов — в состоянии  $\xi=1$  (излучение накачки) и в состоянии  $\xi=2$  (излучение сигнала), причем  $N_1 \gg N_2$ . Фотоны же в состоянии  $\xi=3$  первоначально отсутствуют ( $N_3=0$ ). В этом случае вероятность (12.2.2) может быть записана в виде

$$d\omega = \frac{2\pi}{\hbar} N_1 (N_2 + 1) \left| \sum_k \sum_n [\dots] \right|^2 \frac{V\omega_3^2}{(2\pi c)^3 \hbar} d\Omega_3. \quad (12.2.18)$$

Здесь [...] — выражение в квадратных скобках из (12.2.17);  $d\Omega_3$  — интервал телесного угла, в пределах которого направлен импульс фотона  $\gamma_3$ . Выражение (12.2.18) описывает вероятность процесса, в котором при взаимодействии с электроном двух излучений (интенсивного излучения накачки  $N_1$  и излучения сигнала  $N_2$ ) рождается излучение на частоте  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ . Чем выше интенсивность излучения накачки, тем больше вероятность процесса ( $d\omega \sim N_1$ ). Что же касается излучения сигнала, то оно может быть относительно слабым ( $d\omega \sim (N_2 + 1)$ ); присутствие этого излучения

важно лишь с точки зрения «регулирования» процесса (при наличии фотонов с частотой  $\omega_2$  будут рождаться фотоны именно с частотой  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ ).

### § 12.3. Процессы с участием фононов

Вещество и излучение в квантовой оптике. Многие задачи взаимодействия излучения с веществом рассматриваются в рамках полуклассического подхода — когда вещество описывают квантовомеханически, а излучение представляют в виде классических световых волн. Более последователен подход, при котором как вещество, так и излучение описываются квантово-механически. В этом случае и излучение, и вещество рассматривают как *единую* квантовую систему, описываемую гамильтонианом:

$$\hat{H} = \hat{H}_\gamma + \hat{H}_b + \hat{H}_{\gamma b}, \quad (12.3.1)$$

где  $\hat{H}_\gamma$  — гамильтониан свободного излучения,  $\hat{H}_b$  — гамильтониан вещества в отсутствие излучения,  $\hat{H}_{\gamma b}$  — оператор взаимодействия излучения с веществом. Для кристалла гамильтониан  $\hat{H}_b$  можно записать (в наиболее простом случае) в виде

$$\hat{H}_b = \hat{H}_L + \hat{H}_e + \hat{H}_{eL}, \quad (12.3.2)$$

где  $\hat{H}_L$  — гамильтониан кристаллической решетки («фононный» гамильтониан),  $\hat{H}_e$  — «электронный» гамильтониан,  $\hat{H}_{eL}$  — оператор взаимодействия электронов с фононами. Входящий в (12.3.1) оператор  $\hat{H}_{\gamma b}$  разбивается на два слагаемых:

$$\hat{H}_{\gamma b} = \hat{H}_{\gamma e} + \hat{H}_{\gamma L}, \quad (12.3.3)$$

из которых первое отвечает за взаимодействие фотонов с электронами, а второе — за взаимодействие фотонов с фононами.

**Фотоны и фононы; фононный гамильтониан.** Выше мы рассматривали гамильтониан  $\hat{H}_\gamma$  (см. (10.3.14)) и оператор фотон-электронного взаимодействия  $\hat{H}_{\gamma e}$  (см. (10.3.5), где этот оператор обозначался как  $\hat{H}'$ ); теперь рассмотрим фононный гамильтониан  $\hat{H}_L$ . При этом воспользуемся отмечавшейся в § 6.1 аналогией между фононами и фотонами, которая позволяет применить к фононам аппарат вторичного квантования, использовавшийся для фотонов. Вместо осцилляторов поля излучения теперь следует использовать нормальные осцилляторы, отвечающие нормальным колебаниям кристаллической решетки.

Пусть  $\hat{C}_\xi$  и  $\hat{C}_\xi^+$  — соответственно операторы уничтожения и рождения фонона в  $\xi$ -м состоянии. Оператор  $\hat{u}$  смещения  $\vec{r}$ -го колеблющегося иона решетки, имеющего массу  $M$ , может быть представлен в виде

$$\hat{u} = \sum_{\xi} (\hat{C}_\xi \vec{u}_\xi + \hat{C}_\xi^+ \vec{u}_\xi^*), \quad (12.3.4)$$

где

$$\vec{u}_\xi = \vec{e}_\xi \sqrt{\frac{\hbar}{2MN_1\Omega_\xi}} \exp(-i\Omega_\xi t + i\vec{q}_\xi \vec{r}), \quad (12.3.5)$$

Соотношение (12.3.4) аналогично соотношению (10.3.22) для оператора векторного потенциала поля световой волны, а соотношение (12.3.5) соответствует соотношению (10.3.23). Фононные матричные элементы имеют такой же вид, как и фотонные матричные элементы (10.4.6) — (10.4.10). По аналогии с (10.3.14), гамильтониан кристаллической решетки может быть представлен в виде

$$\hat{H}_L = \sum_{\alpha} \sum_{\vec{q}} \hbar \Omega \left( \hat{c}_{q\alpha}^+ \hat{c}_{q\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (12.3.6)$$

Матричные элементы для прямых междузонных переходов. В § 6.4 обсуждались прямые и непрямые переходы между валентной зоной и зоной проводимости в полупроводниках и диэлектриках. Эти переходы иллюстрировал рис. 6.13. Матричный элемент изображенного на этом рисунке прямого перехода  $l \rightarrow \beta$  запишем в виде

$$\begin{aligned} < 3 | \hat{H}_{\gamma e} | 1 > = \\ = < \epsilon_{\beta}^{\vec{q}_1}, \vec{q}_1; N_{\xi}, \dots, N_{\xi} - 1, \dots | \hat{H}_{\gamma e} | \epsilon_l^{\vec{q}_1}, \vec{q}_1; N_{\xi}, \dots, N_{\xi}, \dots >. \end{aligned} \quad (12.3.7)$$

Здесь начальное и конечное состояния системы электрон + поле излучения определяются заданием квантовых чисел, описывающих состояние электрона, а также чисел заполнения фотонных состояний (в данном случае индексом  $\xi$  отмечено одно из фотонных состояний с энергией  $\hbar \omega_{\xi} = \epsilon_{\xi} - \epsilon_l$ ). Если в переходе участвуют также и фононы, то надо указать дополнительно числа заполнения фононных состояний. В дальнейшем полный набор квантовых чисел, определяющий некоторое  $m$ -е состояние рассматриваемой системы, будем обозначать для краткости как  $R_m$ , а энергетические состояния системы — как  $W_m$ .

Оператор электрон-фотонного взаимодействия  $\hat{H}_{\gamma e}$  определяется выражениями (10.3.5), (10.3.22), (10.3.23). Относя взаимодействие к одному электрону и пренебрегая вкладом слагаемого, пропорционального  $A^2$ , запишем  $\hat{H}_{\gamma e}$  в сокращенном виде:

$$\hat{H}_{\gamma e} = \sum_{\xi} (b_{\xi} \hat{c}_{\xi} + b_{\xi}^* \hat{c}_{\xi}^+), \quad (12.3.8)$$

где  $\hat{c}_{\xi}$  и  $\hat{c}_{\xi}^+$  — операторы соответственно уничтожения и рождения фотона в  $\xi$ -м состоянии, а смысл операторов  $b_{\xi}$ , включающих в себя операторы координат и импульса электрона, можно уяснить, сопоставляя (12.3.8) с (10.3.5) и (10.3.22). Если рассматриваются переходы с возбуждением электрона, то в (12.3.8) следует сохранить лишь члены, содержащие оператор уничтожения фотона:

$$\hat{H}_{\gamma e} = \sum_{\xi} b_{\xi} \hat{c}_{\xi}. \quad (12.3.9)$$

Таким образом, матричный элемент (12.3.7) прямого возбуждения электрона может быть представлен в виде

$$< 3 | \hat{H}_{\gamma e} | 1 > = < R_{\beta} | \sum_{\xi} b_{\xi} \hat{c}_{\xi} | R_l >. \quad (12.3.10)$$

Матричные элементы для непрямых междузонных переходов. При рассмотрении *непрямых* междузонных переходов надо учесть

оператор взаимодействия электрона с фононами  $\hat{H}_{eL}$  и указать числа заполнения фононных состояний. Используя аналогию между фотонами и фотонами, представим оператор  $\hat{H}_{eL}$  в виде, аналогичном виду (12.3.8):

$$\hat{H}_{eL} = \sum_{\xi} (B_{\xi} \hat{C}_{\xi} + B_{\xi}^* \hat{C}_{\xi}^+), \quad (12.3.11)$$

где  $\hat{C}_{\xi}$  и  $\hat{C}_{\xi}^+$  — операторы соответственно уничтожения и рождения фонона в  $\xi$ -м состоянии, а  $B_{\xi}$  — некоторые операторы, определяемые характером электрон-фононного взаимодействия в данном кристалле (отыскание вида этих операторов для различных моделей кристаллов выходит за рамки книги).

Непрямой переход происходит через промежуточные (виртуальные) состояния. При этом возможны две физически неразличимые альтернативы.

а) При переходе из начального  $n$ -го состояния в промежуточное  $k$ -е состояние уничтожается фотон в некотором состоянии  $\xi=1$ ; при переходе из промежуточного в конечное  $m$ -е состояние уничтожается или рождается фотон в некотором состоянии  $\xi=2$ . Матричный элемент перехода имеет вид

$$\langle R_m | B_2 \hat{C}_2 + B_2^* \hat{C}_2^+ | R_k \rangle \langle R_k | b_1 \hat{C}_1 | R_n \rangle, \quad (12.3.12)$$

б) При переходе из начального в промежуточное состояние уничтожается или рождается фотон в состоянии  $\xi=2$ ; при переходе из промежуточного в конечное состояние уничтожается фотон в состоянии  $\xi=1$ . Матричный элемент перехода имеет вид

$$\langle R_m | b_1 \hat{C}_1 | R_k \rangle \langle R_k | B_2 \hat{C}_2 + B_2^* \hat{C}_2^+ | R_n \rangle. \quad (12.3.13)$$

Напомним еще раз, что переход через виртуальное состояние не допускает разделения во времени на отдельные этапы, а должен рассматриваться как единый процесс.

**Квантовая теория рассеяния света и не прямые междузонные переходы.** Предположим для определенности, что в не прямом переходе фотон рождается. Тогда альтернативам (12.3.12) и (12.3.13) отвечают соответственно матричные элементы

$$\langle R_m | B_2^* \hat{C}_2^+ | R_k \rangle \langle R_k | b_1 \hat{C}_1 | R_n \rangle, \quad (12.3.14)$$

$$\langle R_m | b_1 \hat{C}_1 | R_k \rangle \langle R_k | B_2 \hat{C}_2 | R_n \rangle. \quad (12.3.15)$$

Чтобы перейти от матричных элементов (12.3.14) и (12.3.15) к вероятности процесса, воспользуемся аналогией между рассеянием света когда, один фотон уничтожается и один фотон рождается, и не прямым переходом, в котором один фотон уничтожается и один фотон рождается. В случае рассеяния света надо использовать матричный элемент, определяемый оператором  $\hat{h}_1$  (см. § 12.1).

Существует аналогия между матричным элементом (12.3.14) и матричным элементом  $\sqrt{N_2+1} (\alpha_2^*)_{2k} \sqrt{N_1} (\alpha_1)_{k1}$ , при этом вместо (12.1.11) следует рассматривать

$$\mathcal{W}_n = e_n + \hbar \omega_1; \quad \mathcal{W}_k = e_k. \quad (12.3.16)$$

Существует аналогия также между (12.3.15) и матричным элементом  $\sqrt{N_1} (\alpha_1)_{2k} \sqrt{N_2+1} (\alpha_2^*)_{k1}$ ; при этом вместо (12.1.12) следует рассматривать

$$\mathcal{W}_n = e_n + \hbar \omega_1; \quad \mathcal{W}_k = e_k + \hbar \omega_1 + \hbar \Omega_2. \quad (12.3.17)$$

Указанная аналогия позволяет с учетом (10.2.16), (12.3.14) — (12.3.17) записать следующее выражение для вероятности рассматриваемого перехода:

$$\omega_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_k \left[ \frac{\langle R_m | B_1^* \hat{C}_2^+ | R_k \rangle \langle R_k | b_1 \hat{C}_1 | R_n \rangle}{e_n - e_k + \hbar \omega_1} + \frac{\langle R_m | b_1 \hat{C}_1 | R_k \rangle \langle R_k | B_2^* \hat{C}_2^+ | R_n \rangle}{e_n - e_k - \hbar \Omega_2} \right] \right|^2 G(W_m). \quad (12.3.18)$$

Сравните этот результат, например, с (12.1.13).

Итак, фотон-фононная аналогия позволяет единым образом рассматривать процесс рассеяния света, в котором участвуют два фотона, и не прямой переход, в котором участвуют один фотон и один фонон. Так как состояние электрона изменяется, то следует говорить об аналогии именно с комбинационным рассеянием света.

Результат (12.3.18) указывает на тот факт, что в отличие от прямых неярких междузонных переходов рассматриваются во втором приближении метода возмущений. Следовательно, вероятность непрямого перехода меньше вероятности прямого перехода. Непрямые переходы существенны тогда, когда прямые переходы невозможны (запрещены), например при достаточно низких энергиях фотонов.

## ГЛАВА 13

### КОГЕРЕНТНОСТЬ СВЕТА В КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ

#### БЕСЕДА

#### НЕБОЛЬШОЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ДИАЛОГ

**ЧИТАТЕЛЬ.** Когерентность света характеризует его способность к интерференции. Чем выше степень когерентности, тем контрастнее картина интерференционных полос, наблюдаемая в известном опыте Юнга. Казалось бы, подобные вопросы должны рассматриваться в рамках не квантовой, а волновой оптики.

**АВТОР.** Рамки волновой оптики оказываются в данном случае узкими. Оставаясь в них, вы не сможете проанализировать понятие «степень когерентности». Для этого вам надо будет рассматривать структуру излучения, его ста-

тистические свойства. В конечном счете вам придется обратиться к квантованию поля излучения.

**ЧИТАТЕЛЬ.** Припоминаю, что в § 3.4 шел разговор о связи степени когерентности света с избирательностью фотонных состояний.

**АВТОР.** Там этот разговор носил сугубо качественный, предварительный характер. Более серьезно мы обсуждали подобные вопросы во второй части книги и даже посвятили им специальную беседу под названием «Фотон в интерферометре (о волнах в квантовой физике)».



---

**ЧИТАТЕЛЬ.** По-видимому, вы хотели напомнить, что интерференцию можно описывать не только на языке волн, но и на языке фотонов?

**АВТОР.** Речь шла не только об этом. Подчеркивалось, например, что квантовая физика позволяет рассматривать как возникновение, так и разрушение интерференции, что, с точки зрения квантовой физики, интерференционные явления могут выходить за рамки волновых представлений. Теперь же мы пойдем еще дальше — убедимся, что для объяснения некоторых интерференционных опытов фотонные представления становятся необходимыми. В связи с этим мы поговорим о флуктуациях числа фотонов в световых пуч-

ках, о корреляциях этих флуктуаций; коснемся проблемы счета фотонов. Более того, обсуждая когерентные свойства света, покажем, что квантовая оптика, строго говоря, не ограничивается фотонными представлениями, что квантовое описание излучения использует наряду с фотонными и другие состояния поля.

Все эти вопросы активно разрабатываются в современной научной литературе, посвященной квантовой оптике. Учитывая их сложность, мы коснемся их лишь в общих чертах. Подробнее об этом можно прочитать, например, в монографиях [3, 4, 7, 8] из списка рекомендуемой литературы, приведенного в конце данной части.

**§ 13.1. Интерференционные опыты. Когерентность первого и более высоких порядков**

В *интерференционных опытах* исследуется взаимная корреляция (взаимная когерентность) световых колебаний в различных пространственно-временных точках поля. В простейшем случае рассматриваются только две точки поля. Этот случай отвечает классическому интерференционному опыту Юнга.

**Опыт Юнга.** Функция когерентности первого порядка. Схема опыта показана на рис. 13.1. Свет от источника *A* проходит через щели *1* и *2* и регистрируется в точке *3*

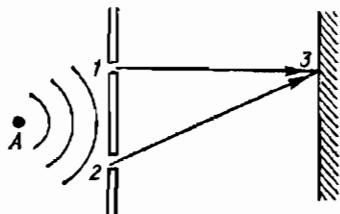


Рис. 13.1

экрана-детектора. Для простоты будем полагать, что свет линейно поляризован, поэтому можно рассматривать одну составляющую вектора напряженности светового поля. Обозначим через  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  напряженности поля соответственно в точках *1*, *2*, *3*. Пусть  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — промежутки времени, за которые свет доходит до точки *3* соответственно от щелей *1* и *2*. Тогда поле в точке *3* в момент *t* можно представить как

$$E_3(t) = E_1(t - \theta_1) + E_2(t - \theta_2). \quad (13.1.1)$$

Интенсивность света *I* в точке *3* получается при усреднении произведения  $E_3^* E_3$  по времени наблюдения. Произведение  $E_3^* E_3$  претерпевает как регулярные, так и случайные изменения во времени; последние характеризуют статистические свойства светового поля и определяют в конечном счете степень его когерентности. Обозначая усреднение с помощью скобок  $\langle \dots \rangle$ , запишем

$$I = \langle E_1(t - \theta_1) + E_2(t - \theta_2) \rangle^* [E_1(t - \theta_1) + E_2(t - \theta_2)]. \quad (13.1.2)$$

Обозначим

$$I_i = \langle E_i^*(t - \theta_i) E_i(t - \theta_i) \rangle = \langle E_i^*(t) E_i(t) \rangle, \quad i = 1, 2. \quad (13.1.3)$$

Здесь  $I_1$  — интенсивность в точке 3 при закрытой щели 2, а  $I_2$  — при закрытой щели 1. На результат усреднения смещение начала отсчета времени не влияет. Обозначив  $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$  и сместив начало отсчета, представим

$$\begin{aligned} & \langle E_1(t - \theta_1) E_2^*(t - \theta_2) + E_1^*(t - \theta_1) E_2(t - \theta_2) \rangle = \\ & = \langle E_1(t + \theta) E_2^*(t) + E_1^*(t + \theta) E_2(t) \rangle = \\ & = 2\text{Re} \{ \langle E_1(t + \theta) E_2^*(t) \rangle \}. \end{aligned} \quad (13.1.4)$$

Используя (13.1.3) и (13.1.4), перепишем (13.1.2) в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2\text{Re} \{ \langle E_1(t + \theta) E_2^*(t) \rangle \}. \quad (13.1.5)$$

Эффект корреляции световых колебаний описывает в (13.1.5) последнее слагаемое. Функцию

$$\gamma^{(1)} = \langle E_1(t + \theta) E_2^*(t) \rangle / \sqrt{I_1 I_2} \quad (13.1.6)$$

называют *функцией когерентности первого порядка*. Ее модуль изменяется от 0 до 1;  $|\gamma^{(1)}| = 0$  отвечает отсутствию интерференции,  $|\gamma^{(1)}| = 1$  соответствует полной когерентности. Промежуточные ситуации, когда  $0 < |\gamma^{(1)}| < 1$ , отвечают *частичной когерентности*.

Функция когерентности первого порядка и контраст интерференционных полос. Пусть  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  — интенсивности в центрах соответственно светлой и темной полос вблизи рассматриваемой точки экрана-детектора. Контраст полос вблизи данной точки определяется отношением  $\kappa = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$ . Измерив  $\kappa$ , можно определить  $|\gamma^{(1)}|$ . Представим  $\text{Re} \{ \gamma \} = |\gamma| \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — аргумент комплексной величины  $\gamma^{(1)}$ . Тогда (13.1.5) можно записать в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma^{(1)}| \cos \varphi. \quad (13.1.7)$$

При  $\cos \varphi = 1$  получаем отсюда  $I = I_{\max}$ , а при  $\cos \varphi = -1$  получаем  $I = I_{\min}$ . В результате находим

$$|\gamma^{(1)}| = \frac{\kappa}{2} (\sqrt{I_1 I_2} + \sqrt{I_2 I_1}). \quad (13.1.8)$$

Интерференционный опыт Юнга (имеющий дело с функцией когерентности первого порядка) хорошо анализируется в рамках классической оптики; его результаты могут быть объяснены без использования фотонных представлений. В то же время эти результаты можно объяснить и на языке фотонов, рассматривая интерференцию квантово-механических амплитуд вероятностей для физически неразличимых альтернатив (об этом мы подробно говорили в гл. 5).

**Опыт Брауна — Твисса. Интерферометр интенсивностей.** Теперь обратимся к интерференционному опыту иного типа — опыту, выполненному Х. Брауном и Р. Твиссом в середине 50-х годов. В этом опыте в отличие от опыта Юнга флуктуации интенсивности света (флуктуации числа фотонов в световых пучках) непосредственно определяют получаемый результат.

Экспериментальная установка, использованная в опыте Брауна — Твисса, может быть названа *интерферометром интенсивности*. Ее схема показана на рис. 13.2. Световой пучок 1 расщепляется полупрозрачным зеркалом 2; каждый из вторичных пучков попадает в свой ФЭУ (3 или 4); сигналы от ФЭУ поступают в коррелятор 6, который сначала перемножает, а затем усредняет интенсивности  $I_1$  и  $I_2$  вторичных световых пучков, т. е. измеряет величину  $\langle I_1 I_2 \rangle = \langle E_1^* E_2^* E_2 E_1 \rangle$  (тогда как в опыте Юнга имеют дело с  $\langle E_1 E_2^* \rangle$ ). Существенно, что интерферометр имеет устройство 5, осуществляющее временную задержку одного из световых сигналов. Таким образом, интерферометр позволяет измерить величину

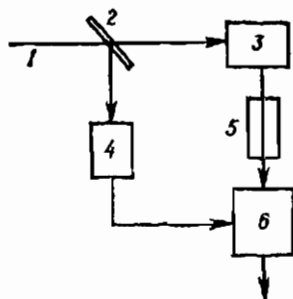


Рис. 13.2

$$\gamma^{(2)} = \frac{\langle I_1(t+\theta) I_2(t) \rangle}{I_1 I_2} = \frac{\langle E_1^*(t+\theta) E_2^*(t) E_2(t) E_1(t+\theta) \rangle}{I_1 I_2}$$

(13.1.9)

как функцию от времени задержки  $\theta$ . Функцию  $\gamma^{(2)}$  называют *функцией когерентности второго порядка*.

Эксперимент показал, что величина  $\langle I_1(t+\theta) I_2(t) \rangle$  или, иначе говоря,  $\langle n_1(t+\theta) n_2(t) \rangle$ , где  $n_1$  и  $n_2$  — плотности фотонов во вторичных световых пучках, обнаруживает ярко выраженный всплеск при  $\theta=0$  (рис 13.3, а). Этот всплеск указывает на то, что фотоны обнаруживают тенденцию приходить в интерферометр не поодиночке, а коррелированными парами (эффект *группировки фотонов*). В свою очередь, это указывает на то, что флуктуации чисел фотонов *взаимно коррелируют*.

В 1966 г. Ф. Арекки, Е. Гатти, А. Сона повторили интерференционный опыт Брауна — Твисса для лазерного пучка, отличающегося высокой степенью когерентности, и для светового пучка с достаточно хаотической структурой поля. Результаты этого опыта представлены на рис. 13.3, б (кривая 1 — для пучка с неупорядоченной структурой поля, кривая 2 — для лазерного пучка). Хорошо видно, что эффект группировки фотонов наблюдается только для неупорядоченного света, тогда как для когерентного света этот

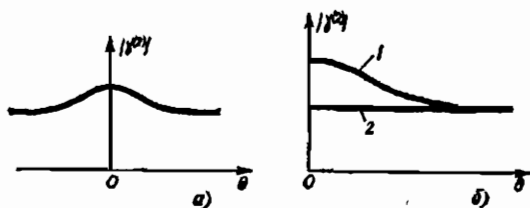


Рис. 13.3

эффект отсутствует (а значит, отсутствует и корреляция флуктуаций чисел фотонов).

Таким образом, эффект фотонной группировки оказывается связанным со степенью когерентности световых пучков. Мы вернемся к этому обстоятельству в § 13.2.

Когерентности различных порядков. Как уже отмечалось, в интерференционных опытах типа опыта Юнга проявляется корреляция световых колебаний в *двух* пространственно-временных точках. Пусть это будут точки  $(\vec{r}_1, t_1)$  и  $(\vec{r}_2, t_2)$ . Тогда функцию когерентности первого порядка  $\gamma^{(1)}$  можно записать в виде

$$\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = \frac{\langle \vec{E}^*(\vec{r}_1, t_1) \vec{E}(\vec{r}_2, t_2) \rangle}{[\langle |\vec{E}(\vec{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |\vec{E}(\vec{r}_2, t_2)|^2 \rangle]^{1/2}}. \quad (13.1.10)$$

Когерентность *первого порядка* определяет величину интерференционных эффектов в большинстве классических интерференционных опытов.

Более «тонкими» (выявляющими флуктуации интенсивности) являются интерференционные опыты, имеющие дело с когерентностью *второго порядка*. В них исследуется корреляция световых колебаний в *четырёх* пространственно-временных точках. В общем случае функцию когерентно-

сти второго порядка  $\gamma^{(2)}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2; \vec{r}_3, t_3; \vec{r}_4, t_4) = \\ = \frac{\langle \vec{E}^*(\vec{r}_1, t_1) \vec{E}^*(\vec{r}_2, t_2) \vec{E}(\vec{r}_3, t_3) \vec{E}(\vec{r}_4, t_4) \rangle}{[ \langle |\vec{E}(\vec{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |\vec{E}(\vec{r}_2, t_2)|^2 \rangle \langle |\vec{E}(\vec{r}_3, t_3)|^2 \rangle \langle |\vec{E}(\vec{r}_4, t_4)|^2 \rangle ]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (13.1.11)$$

К таким интерференционным опытам относится, по сути дела, и опыт Брауна — Твисса; в нем изучается частный случай функции когерентности второго порядка:

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2; \vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) = \\ = \frac{\langle E^*(\vec{r}_1, t_1) E^*(\vec{r}_2, t_2) E(\vec{r}_2, t_2) E(\vec{r}_1, t_1) \rangle}{\langle |E(\vec{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |E(\vec{r}_2, t_2)|^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (13.1.12)$$

В принципе возможен интерференционный опыт, исследующий когерентность  $n$ -го порядка. Для этого надо каким-либо образом обеспечить одновременную регистрацию  $n$  световых пучков. Соответствующая функция когерентности может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \gamma^{(n)}(\vec{r}_1, t_1; \dots; \vec{r}_n, t_n; \vec{r}_{n+1}, t_{n+1}; \dots; \vec{r}_{2n}, t_{2n}) = \\ = \frac{\langle \vec{E}^*(\vec{r}_1, t_1) \dots \vec{E}^*(\vec{r}_n, t_n) \vec{E}(\vec{r}_{n+1}, t_{n+1}) \dots \vec{E}(\vec{r}_{2n}, t_{2n}) \rangle}{[ \langle |\vec{E}(\vec{r}_1, t_1)|^2 \rangle \dots \langle |\vec{E}(\vec{r}_{2n}, t_{2n})|^2 \rangle ]^{1/2}}. \end{aligned}$$

(13.1.13)

Исследования интерференции интенсивностей и когерентности второго и более высоких порядков существенно расширили область классических интерференционных проблем. Эти исследования стали возможны благодаря развитию в последние десятилетия техники *счета фотонов* (техники *фотоотсчетов*); о ней будет рассказано в § 13.2. Они привели к возникновению нового метода измерения когерентных свойств света, называемого *спектроскопией флуктуаций интенсивности*.

## § 13.2. Флуктуации числа фотонов

**Некоторые общие соотношения.** Пусть  $n$  — число фотонов в некотором состоянии, характеризующемся энергией  $\hbar\omega$ ;  $\langle n \rangle$  — среднее число фотонов в рассматриваемом состоянии. Усреднение подразумевается либо по многим одинако-

вым состояниям для какого-то момента времени, либо для одного состояния по многим моментам времени (рассматриваются стационарные внешние условия). Флуктуации числа фотонов описываются *средним квадратичным отклонением*, или *дисперсией*:

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle (\langle n \rangle - n)^2 \rangle. \quad (13.2.1)$$

Так как  $(\langle n \rangle - n)^2 = \langle n \rangle^2 - 2n\langle n \rangle + n^2$ , то, следовательно,

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle^2 - 2\langle n \rangle \langle n \rangle + \langle n^2 \rangle = \langle n \rangle^2 - \langle n^2 \rangle. \quad (13.2.2)$$

Обозначим через  $w_n$  вероятность того, что в данном состоянии будет обнаружено  $n$  фотонов. Зная  $w_n$ , можно найти  $\langle n \rangle$  и  $\langle n^2 \rangle$ , а значит, и  $\langle \Delta n^2 \rangle$ :

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n w_n; \quad (13.2.3)$$

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n. \quad (13.2.4)$$

Разобьем мысленно световой пучок на два; введем обозначения для составляющих пучков:  $\langle n_1 \rangle$ ,  $\langle \Delta n_1^2 \rangle$ ;  $\langle n_2 \rangle$ ,  $\langle \Delta n_2^2 \rangle$ . Для суперпозиции пучков (т. е. для исходного пучка) будем использовать обозначения  $\langle n \rangle$ ,  $\langle \Delta n^2 \rangle$ . Очевидно, что

$$\langle n \rangle = \langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle. \quad (13.2.5)$$

Далее заметим, что

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle (\Delta n_1 + \Delta n_2)^2 \rangle = \langle \Delta n_1^2 \rangle + \langle \Delta n_2^2 \rangle + 2\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle. \quad (13.2.6)$$

Если окажется, что  $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = \langle \Delta n_1 \rangle \langle \Delta n_2 \rangle$  и, следовательно,

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = 0, \quad (13.2.7)$$

то это означает, что флуктуации числа фотонов в пучке *не коррелируют* друг с другом (фотоны в одной части пучка распределены независимо от фотонов в другой его части). Если же

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle \neq 0, \quad (13.2.8)$$

то говорят о *наличии корреляции* флуктуаций числа фотонов.

**Флуктуации в равновесном фотонном газе.** Для равновесного фотонного газа, имеющего температуру  $T$ , вероятность  $\omega_n$  описывается выражением (см. (2.4.22))

$$\omega_n = \frac{\exp(-\hbar\omega n/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega n/kT)} = e^{-\hbar\omega n/kT} (1 - e^{-\hbar\omega/kT}). \quad (13.2.9)$$

В свое время при рассмотрении формулы Планка мы получили выражение для  $\langle n \rangle$  (см. (2.4.29), где вместо  $\langle n \rangle$  использовалось обозначение  $\nu_\omega$ ):

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (13.2.10)$$

Из (13.2.10) следует, что

$$\exp(-\hbar\omega/kT) = \langle n \rangle / (1 + \langle n \rangle). \quad (13.2.11)$$

Подставляя (13.2.11) в (13.2.9), находим

$$\omega_n = \langle n \rangle^n / (1 + \langle n \rangle)^{n+1}. \quad (13.2.12)$$

Используя (13.2.4) и (13.2.9), получаем (с учетом (13.2.10))

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \omega_n = (1 - e^{-\hbar\omega/kT}) \frac{d^2}{d(\hbar\omega/kT)^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega n/kT} = \\ &= [\exp(\hbar\omega/kT) + 1] / [\exp(\hbar\omega/kT) - 1]^2 = \\ &= \langle n \rangle + 2 \langle n \rangle^2. \end{aligned} \quad (13.2.13)$$

Подставляя (13.2.13) в (13.2.2), приходим к очень важному результату для равновесного фотонного газа:

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2. \quad (13.2.14)$$

**Об удачной догадке Планка.** В § 2.2 отмечалась в высшей степени удачная поправка к теории Вина, которую догадался ввести Планк. В результате этой догадки и появилась знаменитая формула Планка. Напомним, что Планк предложил использовать вместо соотношения  $\langle \Delta E^2 \rangle \sim \langle E \rangle$  соотношение

$$\langle \Delta E^2 \rangle \sim (\langle E \rangle + a \langle E \rangle^2) \quad (13.2.15)$$

(см. (2.2.2) — (2.2.4)). Здесь  $\langle E \rangle$  — средняя энергия линейного гармонического осциллятора. Если мы предста-



вм  $\langle E \rangle = \hbar\omega \langle n \rangle$ , то (13.2.15) преобразуется к виду

$$\langle \Delta n^2 \rangle \sim (\langle n \rangle + a\hbar\omega \langle n \rangle^2), \quad (13.2.16)$$

который совпадает с (13.2.14) (с учетом, что  $a=1/\hbar\omega$ ).

Мы видим, таким образом, что, добавив слагаемое  $a\langle E \rangle^2$  в (13.2.15), Планк тем самым предугадал правильный вид принципиального соотношения (13.2.14) для равновесного фотонного газа. Напомним, что это происходило тогда, когда о фотонах еще и речи не было; более того, Планк имел в виду не осцилляторы поля излучения, а осцилляторы вещества (вибраторы Герца).

**Тепловой и квантовый шум в равновесном фотонном газе.** Флуктуации числа фотонов обуславливают шум, который при приеме оптического излучения принято называть внешним (в отличие от внутреннего шума, обусловленного приемной аппаратурой). В соответствии с наличием двух слагаемых в правой части (13.2.14) различают так называемый *квантовый шум* (слагаемое  $\langle n \rangle$ ) и *тепловой шум* (слагаемое  $\langle n \rangle^2$ ). Умножив величину  $\sqrt{\langle \Delta n^2 \rangle}$  на  $\hbar\omega$ , получим энергию шума, приходящуюся на одно квантовое состояние:

$$W_{\text{ш}} = \hbar\omega \sqrt{\langle n \rangle + \langle n \rangle^2}. \quad (13.2.17)$$

Сопоставим два случая: отвечающий радиодиапазону ( $\hbar\omega \ll kT$ ) и отвечающий оптическому диапазону ( $\hbar\omega \gg kT$ ).

Для радиодиапазона из (13.2.10) получаем

$$\langle n \rangle \approx kT/\hbar\omega \gg 1; \quad (13.2.18)$$

следовательно,

$$\langle n \rangle^2 \gg \langle n \rangle. \quad (13.2.19)$$

Таким образом,

$$W_{\text{ш}} \approx \hbar\omega \langle n \rangle \approx kT. \quad (13.2.20)$$

В этом случае из-за «малости» кванта излучения в одном состоянии всегда много квантов; поле рассматривается классически; квантовые шумы несущественны, основную роль играют тепловые шумы.

В случае оптического диапазона из (13.2.10) получаем

$$\langle n \rangle \approx \exp(-\hbar\omega/kT) \ll 1; \quad (13.2.21)$$

следовательно,

$$\langle n \rangle^2 \ll \langle n \rangle. \quad (13.2.22)$$

Таким образом,

$$W_{\text{ш}} \approx \hbar\omega \sqrt{\langle n \rangle} \approx \hbar\omega \exp(-\hbar\omega/2kT). \quad (13.2.23)$$

В этом случае один квант приходится на много состояний; поле рассматривается квантово-механически; тепловые шумы несущественны, основную роль играют квантовые шумы.

**Вероятность заселения фотонных состояний в лазерном пучке; счет фотонов.** Чтобы получить вероятность  $\omega_n$  для

различных (неравновесных) световых пучков, например лазерных пучков, применяют экспериментальный метод, называемый *счетом фотонов*. Поясним сущность этого метода.

Исследуемый световой пучок направляют на фотоэмиттер, играющий роль фотодетектора. Он соединен соответствующей электронной схемой со счетчиком, который регистрирует (считает) число фотонов, вызывающих фотоэлектронную эмиссию в фотодетекторе. Фотодетектор снабжен затвором, позволяющим контролировать промежутки времени, в течение которого свет падает на фотодетектор. Предположим, что затвор открывается на время  $\tau$  и счетчик фиксирует число  $m$  фотонов, сосчитанных за этот промежуток времени. Затем затвор снова открывается

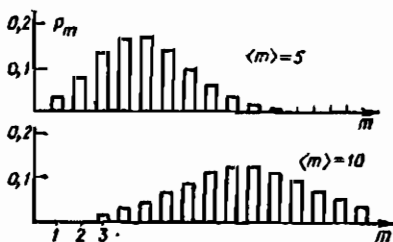


Рис. 13.4

на время  $\tau$  и операция счета фотонов повторяется. Это делается многократно, при этом всякий раз затвор открывается на один и тот же промежуток времени  $\tau$  и всякий раз фиксируется число сосчитанных фотонов. В результате определяют вероятность  $P_m$  отсчета  $m$  фотонов за время наблюдения  $\tau$ . Эта вероятность содержит информацию о статистических свойствах светового пучка.

На рис. 13.4 приведены в качестве примера два конкретных вида  $P_m$ , полученные для одномодовых лазерных пучков постоянной интенсивности. Верхнее распределение соответствует пучку, для которого среднее число фотоотсчетов за время наблюдения  $\tau$  равно 5 ( $\langle m \rangle = 5$ ); для нижнего распределения  $\langle m \rangle = 10$ . Оба распределения имеют, как оказалось, форму *распределения Пуассона*:

$$P_m(\tau) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle}. \quad (13.2.24)$$

Распределение  $P_m(\tau)$  отражает вероятность заселения фотонных состояний в исследуемом пучке. Таким образом, эксперименты с фотоотсчетами показали, что для одномодового лазерного излучения вероятность  $w_n$  имеет пуассоновский вид:

$$w_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (13.2.25)$$

Этот экспериментальный результат согласуется с теорией. Как показал Т. Глаубер, идеальный одномодовый лазер при значительном превышении над порогом генерирует излучение в состоянии, называемом *когерентным*; в этом состоянии фотоны действительно распределены по Пуассону (см. § 13.3). Поле в таком состоянии ближе всего к классической синусоидальной волне. Существенный вывод квантовой оптики состоит в том, что даже в идеальной световой волне имеют место флуктуации чисел фотонов.

Сравнивая (3.2.12) и (3.2.25), заключаем, что вероятности  $w_n$  для равновесного излучения и для одномодового лазерного пучка *существенно различны*.

Флуктуации числа фотонов в одномодовом лазерном пучке. Используя (13.2.25) и (13.2.4), представим

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (13.2.26)$$

С учетом того, что  $n^2 = n + n(n-1)$ , перепишем (13.2.26) в виде

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{(n-2)!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (13.2.27)$$

Первая сумма есть  $\sum n w_n = \langle n \rangle$ . Во второй сумме введем индекс суммирования  $m = n - 2$ , после чего она примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^{m+2}}{m!} e^{-\langle n \rangle} &= \langle n \rangle^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^m}{m!} e^{-\langle n \rangle} = \\ &= \langle n \rangle^2 \sum_{m=0}^{\infty} w_m = \langle n \rangle^2. \end{aligned}$$

Учитывая полученные результаты, преобразуем (13.2.27) к виду

$$\langle n^2 \rangle = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2. \quad (13.2.28)$$

Флуктуации числа фотонов описываются величиной  $\langle \Delta n^2 \rangle$ , которая, согласно (13.2.2), есть  $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ . Исходя из (13.2.28), заключаем, что для лазерного пучка

$$\boxed{\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle}. \quad (13.2.29)$$

Напомним, что в случае равновесного излучения величина  $\langle \Delta n^2 \rangle$  состояла из двух слагаемых:  $\langle n \rangle$  и  $\langle n \rangle^2$

(см. (13.2.14)). Подчеркнем, что слагаемое  $\langle n \rangle^2$  как раз и отвечает за эффект группировки фотонов.

**Корреляция флуктуаций числа фотонов; объяснение результатов эксперимента по интерференции интенсивностей.** Рассмотрим сначала *равновесный* фотонный газ. Используя (13.2.14) и (13.2.5), представим

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2 \rangle &= \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 = (\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle) + \\ &+ (\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle)^2 = \langle n_1 \rangle + \langle n_1 \rangle^2 + \langle n_2 \rangle + \\ &= \langle n_2 \rangle^2 + 2 \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle = \langle \Delta n_1^2 \rangle + \langle \Delta n_2^2 \rangle + \\ &+ 2 \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая (13.2.6), заключаем отсюда, что

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle \neq 0. \quad (13.2.30)$$

Таким образом, в равновесном фотонном газе налицо корреляция флуктуаций числа фотонов. Можно сделать вывод, что в световых пучках с достаточно хаотической структурой также существует корреляция флуктуаций числа фотонов. Этим и объясняется вид кривой 1 на рис. 13.3, б, отражающий эффект группировки фотонов. Напомним, что группировку фотонов можно рассматривать как следствие корреляций флуктуаций числа фотонов в пучке.

Теперь обратимся к *одномодовому лазерному пучку*. Используя (13.2.29) и (13.2.5), представим  $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle = \langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle = \langle \Delta n_1^2 \rangle + \langle \Delta n_2^2 \rangle$ . Учитывая (13.2.6), заключаем отсюда, что

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = 0. \quad (13.2.31)$$

Следовательно, в лазерном пучке флуктуации числа фотонов не коррелируют друг с другом. Поэтому эффект группировки фотонов в данном случае не проявляется, что и отражает кривая 2 на рис. 13.3, б.

### § 13.3. Состояния квантованного поля излучения

**Фотонные состояния (состояния с определенным числом фотонов).** До сих пор мы рассматривали только такие состояния квантованного поля, которые характеризуются определенным числом фотонов. Напомним, что к этим состояниям мы приходим, производя разложение поля на квантово-механические линейные гармонические осцилляторы. Указанные состояния мы описывали в § 10.3 волновыми функциями  $\varphi(N_{\alpha}^{\pm})$ . В настоящем параграфе целесо-

образно несколько упростить обозначения, поэтому здесь мы будем обозначать фотонные состояния как  $|n\rangle$ , где  $n$  — число фотонов в данном состоянии (мы возвращаемся к обозначениям состояний микрообъектов, использовавшимся в § 5.2).

Соотношения (10.3.15) и (10.3.17) позволяют ввести в рассмотрение оператор числа фотонов:

$$\hat{n} = \hat{c}^+ \hat{c}. \quad (13.3.1)$$

Состояния  $|n\rangle$  являются собственными функциями этого оператора:

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (13.3.2)$$

(заметим, что (13.3.2) есть, по сути дела, немного измененный «вариант» соотношения (10.3.17)).

Используя упрощенные обозначения, перепишем (10.3.6a) и (10.3.6b) в виде

$$\hat{c} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle; \quad (13.3.3a)$$

$$\hat{c}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (13.3.3b)$$

**Состояния поля с определенным числом фотонов и состояния с определенной фазой.** В состояниях квантованного поля с определенным числом фотонов фаза поля оказывается совершенно неопределенной. Напротив, в состояниях с определенной фазой является совершенно неопределенным число фотонов. Не будем показывать здесь, как описываются состояния с определенной фазой. Ограничимся тем, что попробуем продемонстрировать различие между двумя рассматриваемыми типами состояний поля при помощи графического представления изменения амплитуды поля со временем в некоторой фиксированной точке для моды поля с конкретной частотой  $\omega$ . Это представление дано на рис. 13.5, к которому следует относиться с известной осторожностью (как к любой попытке графически «изобразить» квантово-механическое состояние).

Рис. 13.5, а изображает состояние с определенным числом фотонов. Для всех изображенных здесь волн-синусоид одинакова амплитуда, зато различна фаза. Строго говоря, синусоиды на рисунке должны были бы образовывать континуум в виде горизонтальной полосы. Учитывая, что энергия поля выражается через квадрат его амплитуды, и принимая во внимание (10.3.17), заключаем, что амплитуда  $E_0$  на ри-

сунке должна быть пропорциональна  $\sqrt{\hbar\omega(n+1/2)}$ , где  $n$  — число фотонов в рассматриваемом состоянии.

Состояние с определенной фазой изображает рис. 13.5, б. В этом случае поле оказывается суперпозицией бесконечного числа волн с различными амплитудами (отвечающими разным значениям  $n$ ), но с одной и той же частотой и фазой. Из рисунка можно заключить, что средняя энергия рассматриваемого состояния оказывается бесконечной. Отсюда следует, что состояния с определенной фазой не могут быть реализованы в эксперименте. Эти состояния должны рассматриваться лишь как один из предельных случаев.

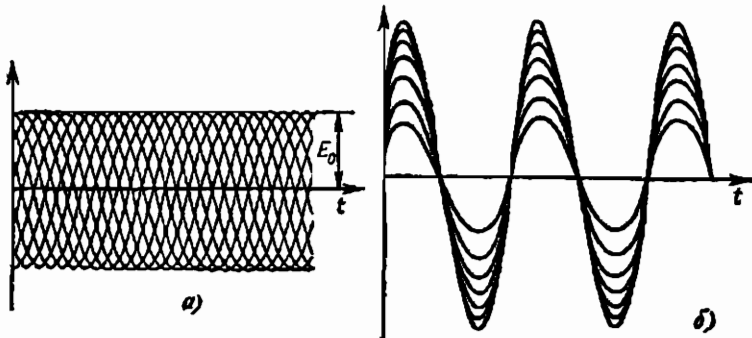


Рис. 13.5

**Когерентные состояния (состояния Глаубера).** При рассмотрении излучения с высокой степенью когерентности используют *когерентные состояния*, для которых как число фотонов, так и фаза поля характеризуются *конечными* неопределенностями. Когерентные состояния были исследованы Р. Глаубером, поэтому их часто называют *состояниями Глаубера*.

Обозначим когерентные состояния как  $|\alpha\rangle$ . Они определяются как собственные состояния оператора уничтожения фотона  $\hat{c}$ :

$$\hat{c}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle; \quad (13.3.4)$$

комплексные числа  $\alpha$  являются собственными значениями оператора  $\hat{c}$ . В соответствии с квантово-механическим принципом суперпозиции состояние  $|\alpha\rangle$  может быть разложено, например, по фотонным состояниям  $|n\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{an} |n\rangle. \quad (13.3.5)$$

Коэффициенты разложения  $\Phi_{\alpha n}$  имеют вид

$$\Phi_{\alpha n} = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (13.3.6)$$

так что

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (13.3.7)$$

Используя (13.3.7), покажем, что состояния  $|\alpha\rangle$  действительно являются собственными состояниями оператора уничтожения  $\hat{c}$ . Подействуем на обе части равенства (13.3.7) оператором  $\hat{c}$ :

$$\hat{c}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{c}|n\rangle. \quad (13.3.8)$$

Согласно (13.3.3а),  $\hat{c}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ . Следовательно,

$$\hat{c}|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle. \quad (13.3.9)$$

Обозначим  $n-1=m$ , после чего (13.3.9) преобразуется к виду

$$\hat{c}|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^{m+1}}{\sqrt{m!}} |m\rangle. \quad (13.3.10)$$

Вынесем  $\alpha$  за знак суммы, после чего правая часть равенства (13.3.10) преобразуется к виду  $\alpha \sum_m e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle$ , что, согласно (13.3.7), есть  $\alpha|\alpha\rangle$ . В итоге соотношение (13.3.10) принимает вид  $\hat{c}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , что и требовалось показать.

Квадрат модуля коэффициента  $\Phi_{\alpha n}$  в суперпозиции (13.3.5) есть вероятность обнаружить  $n$  фотонов в состоянии  $|\alpha\rangle$ . В соответствии с обозначениями, использовавшимися в § 5.2, обозначим эту вероятность как  $|\langle\alpha|n\rangle|^2$ . Согласно (13.3.6),

$$|\langle\alpha|n\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (13.3.11)$$

Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = 1. \quad (13.3.12)$$

Среднее число фотонов  $\langle n \rangle_{\alpha}$  в состоянии  $|\alpha\rangle$  есть

$$\langle n \rangle_{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} n |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{(n-1)!}. \quad (13.3.13)$$

Обозначив  $n-1=m$ , перепишем (13.3.13) в виде

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_{\alpha} &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m+2}}{m!} = |\alpha|^2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!} = \\ &= |\alpha|^2. \end{aligned} \quad (13.3.14)$$

Учитывая (13.3.14), перепишем выражение для вероятности обнаружения  $n$  фотонов в состоянии  $|\alpha\rangle$  в виде

$$|\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{\langle n \rangle_{\alpha}^n}{n!} e^{-\langle n \rangle_{\alpha}}. \quad (13.3.15)$$

Легко видеть полное сходство (13.3.15) с соотношением (13.2.25), относящимся к однофотонному лазерному пучку.

#### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1980.— 550 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики / Пер. с англ.— М.: Наука, 1970.— 856 с.
3. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики / Пер. с англ.— М.: Мир, 1970.— 428 с.
4. Кляшко Д. Н. Фотоны и нелинейная оптика.— М.: Наука, 1980.— 255 с.
5. Курикса А. А. Квантовая оптика и оптическая локация.— М.: Советское радио, 1973.— 180 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Наука, 1974.— 752 с.
7. Лоудон Р. Квантовая теория света / Пер. с англ.— М.: Мир, 1976.— 488 с.
8. Перина Я. Когерентность света / Пер. с англ.— М.: Мир, 1974.— 368 с.



---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

- Предисловие 3**  
**Вводная беседа. О важности исследования физической природы света 7**

### **ЧАСТЬ ПЕРВАЯ** **РАЗВИТИЕ ФОТОННЫХ** **ПРЕДСТАВЛЕНИЙ 15**

- Глава 1. Пролог 17**  
**Глава 2. Рождение 36**  
**Глава 3. Становление 60**

Рекомендуемая литература 86

### **ЧАСТЬ ВТОРАЯ** **ФИЗИКА МИКРООБЪЕКТОВ 87**

- Глава 4. Сюрпризы квантовой физики 89**  
**Глава 5. Вероятность в квантовой физике 100**

Рекомендуемая литература 126

### **ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ** **КВАНТОВО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ 127**

- Глава 6. Квазичастицы в твердых телах и фотонх 129**  
**Глава 7. Фотоэлектрические явления 155**  
**Глава 8. Люминесценция 182**  
**Глава 9. Нелинейно-оптические явления и многофотонные процессы 211**

Рекомендуемая литература 238

### **ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ** **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ** **КВАНТОВОЙ ОПТИКИ 239**

- Глава 10. Вероятности оптических переходов 241**  
**Глава 11. Однофотонные процессы 261**  
**Глава 12. Некоторые многофотонные процессы и процессы с участием фононов 275**  
**Глава 13. Когерентность света в квантовой оптике 287**

Рекомендуемая литература 303

## Представляем Вам наши лучшие книги:



URSS

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

*Пенроуз Р.* **НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ.** О компьютерах, мышлении и законах физики. Пер. с англ.

*Хакен Г.* **Информация и самоорганизация.** Пер. с англ.

*Арнальд В. И.* **Теория катастроф.**

*Климонтович Ю. Л.* **Турбулентное движение и структура хаоса.**

*Малинецкий Г. Г.* **Математические основы синергетики.**

*Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* **Нелинейная динамика и хаос: основные понятия.**

*Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В.* **Нелинейная динамика.**

*Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* **Синергетика и прогнозы будущего.**

*Малинецкий Г. Г. (ред.)* **Будущее России в зеркале синергетики.**

*Безручко Б. П. и др.* **Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях.**

*Данилов Ю. А.* **Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение.**

*Трубецков Д. И.* **Введение в синергетику. В 2 кн.: Колебания и волны; Хаос и структуры.**

*Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* **Основания синергетики. Кн. 1, 2.**

*Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* **Синергетика: нелинейность времени и ландшафты коэволюции.**

*Редько В. Г.* **Эволюция, нейронные сети, интеллект.**

*Чернавский Д. С.* **Синергетика и информация (динамическая теория информации).**

*Баранцев Р. Г.* **Синергетика в современном естествознании.**

*Баранцев Р. Г. и др.* **Асимптотическая математика и синергетика.**

*Луц А. К., Фролова Ю. В.* **Математические методы в социологии.**

*Турчин П. В.* **Историческая динамика. На пути к теоретической истории.**

*Котов Ю. Б.* **Новые математические подходы к задачам медицинской диагностики.**

*Гельфанд И. М. и др.* **Очерки о совместной работе математиков и врачей.**

*Пригожин И.* **Неравновесная статистическая механика.**

*Пригожин И.* **От существующего к возникающему.**

*Пригожин И., Стенгерс И.* **Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени.**

*Пригожин И., Стенгерс И.* **Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.**

*Пригожин И., Николис Г.* **Познание сложного. Введение.**

*Пригожин И., Гленсдорф П.* **Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.**

*Сыздалев И. П.* **Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов.**

**Тел./факс:**

**(499) 135-42-46,**

**(499) 135-42-16,**

**E-mail:**

**URSS@URSS.ru**

**http://URSS.ru**

**Наши книги можно приобрести в магазинах:**

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мысницкая, 6. Тел. (495) 625-2457)

«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)

«Молодая гвардия» (м. Подольная, ул. Б. Подольная, 28. Тел. (495) 238-5661, 790-8878)

«Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6619)

«Дом книги на Ладужской» (м. Бауманская, ул. Ладужская, 8, стр. 1. Тел. 267-9902)

«Гнозис» (м. Университет, 1-й г-н. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (495) 938-4715)

«У Нелтавра» (РГУ) (м. Новослободская, ул. Чапаева, 15. Тел. (499) 973-4301)

«СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 811-3954)

## Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



URSS

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

- Тарасов Л. В. Основы квантовой механики.*  
*Тарасов Л. В., Тарасова А. Н. Беседы о преломлении света.*  
*Тарасов Л. В. Вселенная: В просторы космоса.*  
*Тарасов Л. В. В глубины вещества: Живые клетки, молекулы, атомы.*  
*Тарасов Л. В. Земля — спокойная планета: Атмосфера, гидросфера, литосфера.*  
*Килин С. Я. Квантовая оптика: поля и их детектирование.*  
*Саржевский А. М. Оптика. Полный курс.*  
*Майкельсон А. А. Исследование по оптике.*  
*Шепелев А. В. Оптика. Готовимся к экзаменам, зачетам, коллоквиумам.*  
*Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред.*  
*Русинов М. М. и др. Вычислительная оптика: Справочник.*  
*Шутов А. М. Методы оптической астроволяриметрии.*  
*Стрэтт (Рэлей) Дж. В. Волновая теория света.*  
*Гончаренко А. М., Карпенко В. А. Основы теории оптических волноводов.*  
*Гончаренко А. М. Гауссовы пучки света.*  
*Харкевич А. А. Спектры и анализ.*  
*Кемпфер Ф. Основные положения квантовой механики.*  
*Мотт Н., Сведдон И. Волновая механика и ее применения.*  
*Бройль Л. де. Введение в волновую механику.*  
*Фок В. А. Начала квантовой механики.*  
*Фок В. А. Квантовая физика и строение материи.*  
*Фок В. А. Работы по квантовой теории поля.*  
*Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике. Ч. 1, 2.*  
*Горбачевич А. К. Квантовая механика в общей теории относительности.*  
*Вильф Ф. Ж. Логическая структура квантовой механики.*  
*Ван дер Варден Б. Л. Метод теории групп в квантовой механике.*  
*Бауэр Э. Введение в теорию групп и ее приложения к квантовой физике.*  
*Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. Применение теории групп в квантовой механике.*  
*Стояновский А. В. Введение в математические принципы квантовой теории поля.*  
*Бриллюэн Л. Квантовая статистика.*  
*Хинчи А. Я. Математические основания квантовой статистики.*  
*Хван М. П. Неустоявшая Вселенная: от Большого взрыва до ускоренного расширения, от кварков до суперструн.*

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:  
 тел./факс (499) 135-42-16, 135-42-46  
 или электронной почтой URSS@URSS.ru  
 Полный каталог изданий представлен  
 в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Научная и учебная  
литература

## Об авторе



**Лев  
Васильевич  
ТАРАСОВ**

Родился в 1934 году. Окончил Московский инженерно-физический институт в 1958 г. по специальности «Теоретическая ядерная физика». Кандидат физико-математических наук (1968), доцент (1969), профессор (1983). В 1989–1992 гг. — заведующий кафедрой методики преподавания предметов естественно-математического цикла в Московском институте повышения квалификации работников образования; в 1992–1998 гг. — заведующий кафедрой физики в Московском государственном открытом педагогическом университете. В 1994 г. награжден значком «Отличник народного просвещения» за разработку новой модели общеобразовательной школы «Экология и диалектика» и научное руководство межгосударственным педагогическим экспериментом по практической обработке этой модели.

## Книги Л. В. Тарасова в нашем издательстве:

- Математический анализ: беседы об основных понятиях
- Геометрия окружающего мира. В 2 ч.
- Основы квантовой механики
- Физические основы квантовой электроники
- Лазеры: действительность и надежды
- Физика лазеров
- Беседы о преломлении света (в соавт. с Тарасовой А. Н.)
- Современная физика и общеобразовательная школа
- Неслучайная случайность: книга для любознательных школьников
- Вселенная: в просторы космоса. Книга для школьников... и не только
- В глубины вещества: живые клетки, молекулы, атомы. Книга для школьников... и не только
- Земля — беспокойная планета: атмосфера, гидросфера, литосфера. Книга для школьников... и не только
- Жизнь на Земле: зарождение и эволюция
- Противостояние или взаимодействие? Введение во всеобщую историю

5508 ID 64971

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА



Тел./факс: 7 (499) 135-42-16  
Тел./факс: 7 (499) 135-42-46



URSS

E-mail:  
URSS@URSS.ru  
Каталог изданий  
в Интернете:  
<http://URSS.ru>