

ТЕРМОПОЛЕВАЯ ДИНАМИКА И КОНДЕНСИРОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

В этой книге дается формулировка квантовой теории поля при конечных температурах, позволяющая описывать упорядоченные состояния систем многих тел, в которых может возникать много протяженных топологических объектов разного типа, взаимодействующих с квантами. В этом формализме с единой точки зрения описываются классические, квантовомеханические и квантово-полевые объекты; это достигается благодаря последовательной схеме описания макроскопических объектов, сосуществующих с квантами. В настоящее время системы, в которых сосуществуют микроскопические и макроскопические объекты, привлекают большое внимание физиков, работающих в различных областях. Данная книга ставит своей целью дать читателю ясное представление об этом круге вопросов. Предполагается, что она представит интерес не только для физиков, занимающихся изучением твердого тела, но и для исследователей в других областях, таких, например, как физика высоких энергий и космология, несмотря на то что большинство примеров взято из физики твердого тела. Общая точка зрения, которая проводится в книге, а также краткий обзор ее содержания приведены в гл. 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Введение	9
1.1. Квантовая теория систем многих тел	9
1.2. План книги	15
1.3. Обозначения	17
Глава 2. Квантовая теория систем многих тел	21
2.1. Представление чисел заполнения; операторы рождения и уничтожения	21
2.2. Унитарно неэквивалентные представления	24
2.3. Пространство Фока	25
2.4. Некоторые примеры унитарно неэквивалентных представлений	31
2.5. Представление физических частиц и динамическое отображение	39
2.6. Свободные поля для физических частиц	47
Литература	61
Глава 3. Представление физических частиц, S-матрица и составные частицы	62
3.1. (N, θ) -модель	62
3.2. Представление физических частиц и вычисления по теории возмущений	83
3.3. Представление физических частиц и вариационный принцип	89
3.4. Общий анализ представления физических частиц	90
3.5. Формула редукции и формула Лемана—Симанзика—Циммермана (ЛСЦ)	96

3.6. Спектральные представления двухточечных функций	100
Литература	104
Глава 4. Квантовая теория поля при конечных температурах	106
4.1. Термополевая динамика	106
4.2. Динамическое отображение при конечных температурах, правило подстановки тильды и соотношение Кубо—Мартина—Швингера	122
4.3. Спектральное представление двухточечных функций	131
4.4. Уравнение Бете—Солпитера при конечных температурах	136
Литература	137
Глава 5. Некоторые примеры вычислений в рамках термополевой динамики	138
5.1. Электрон-фононная система	138
5.2. Модель контактного взаимодействия в ферромагнетизме коллективизированных электронов	142
5.3. Модель Гейзенберга в ферромагнетизме локализованных спинов	148
5.4. Сверхпроводимость	159
5.5. Плазменные колебания в нормальных металлах	186
Литература	191
Глава 6. Инвариантность и нётеровский ток	192
6.1. Нётеровский ток и соотношения Уорда—Такахаша	192
6.2. Соотношения Уорда—Такахаша при конечных температурах	198
6.3. Простой пример соотношения Уорда—Такахаша	199
6.4. Пример петлевого разложения; ферромагнетизм зонных электронов	202
Литература	224
Глава 7. Динамическая перестройка симметрии и динамическое отображение	226
7.1. Общее рассмотрение	226
7.2. Фазовая симметрия	240
7.3. Динамическая перестройка спиновой симметрии	243
7.4. Перестройка симметрии и теоремы для низких энергий	249
7.5. Перестройка симметрии и сжатие группы	257
7.6. Инфракрасный эффект голдстоуновских бозонов и параметр порядка	262
7.7. Кристаллы	264
Литература	278
Глава 8. Квантовая электродинамика твердых тел. I. Перестройка калибровочной симметрии и динамическое отображение	288
8.1. Сверхпроводимость	288
8.2. Квантовая электродинамика нормальных металлов	298
Литература	309
Глава 9. Протяженные объекты квантовой природы	310
9.1. Простое рассмотрение	310
9.2. Простой пример	329
9.3. Общее рассмотрение бозонного преобразования	340

9.4. Асимптотическое условие и асимптотический гамильтониан	348
9.5. (sq)-превращение и обобщенная координата	358
Литература	372
Глава 10. Протяженные объекты с топологическими особенностями	374
10.1. Общие соображения	374
10.2. Протяженные объекты в кристаллах	385
10.3. Топологические особенности, связанные с неабелевыми группами симметрии	398
Литература	419
Глава 11. Квантовая электродинамика твердых тел. II.	420
Макроскопические явления	
11.1. Вывод классического уравнения Максвелла	420
11.2. Проводимость и диэлектрическая проницаемость.	425
11.3. Сверхпроводимость	429
11.4. Магнитные сверхпроводники	457
Литература	470
Глава 12. Явления, связанные с граничной поверхностью	473
12.1. Введение	473
12.2. Звуковые волны на поверхности кристалла	474
12.3. Эффект Джозефсона	479
12.4. Поверхностное магнитное поле в сверхпроводниках	487
Литература	493
Глава 13. Заключительные замечания	494
Предметный указатель	497

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабатический множитель 84	— — — однородное 79
<i>Адлера</i> теорема 249	— — — при конечных температурах 136, 137
<i>Андерсона</i> — <i>Сула</i> механизм 459	БКШ модель 159
<i>Андерсона</i> — <i>Хиггса</i> — <i>Киббла</i> механизм 181	Блоховская стенка в магнитных сверхпроводниках 464
Анизотропные сверхпроводники 455	Блоховский член в намагниченности 159
Асимптотическое поле 366	<i>Боголюбова</i> преобразование для бозонов 32, 37, 44
— условие 75, 349	— — — фермионов 36, 44
<i>Бете</i> — <i>Солпитера</i> амплитуда 78	— — с учетом влияния термостата 107, 108, 110, 115, 124
— — уравнение 78, 139	Бозонное поле, сдвиг (трансляция) 37, 38, 45, 241, 247, 249, 312, 341
— — — для магнона 145	— преобразование 312, 342, 420
— — — — (N, θ)-модели 78, 81	— — в квантовой электродинамике
— — — — сверхпроводящего электрона 161	
— — — — составной частицы 80	
— — — — фазона 165, 171	
— — — неоднородное 81	

- — для фононов 384, 386
- — параметры 414
- — при наличии топологических особенностей 374, 383, 399, 414, 473
- — теорема 312, 340, 341 Бозоны 22
- конденсация 38, 239, 310, 329, 343, 376, 386
- характеристическая функция 183, 435
- Брауера* степень 407
- Бриллюэна* функция 153, 462
- Бъянки* тождество 402
- Бюргерса* вектор 384, 389, 391, 393
- Вакансия в решетке 398 Вакуум 25, 28, 39
- зависящий от температуры 108
- устойчивость 77, 95
- Ван Хова* модель 4
- Вершинная функция 100
- Вигнеровское вращение 360, 365, 370
- Вихри в сверхпроводниках 439
- — — взаимодействие 441, 445
- — — инверсия магнитного поля 465
- — — спонтанное образование 466
- — — электроны сердцевины 343, 447
- — — — энергия сердцевины 449, 465
- Внутреннее произведение векторов состояния 26
- — волновых функций 51
- Возвратная сверхпроводимость 459
- Волновой пакет 21, 28, 88, 247
- Входящие поля 9, 76, 93
- Выходящие поля 76, 93
- Гамильтониан в слабом смысле 354, 355
- для гейзенберговских полей 41, 42
- — модели *Ван Хова* 44
- — — *Гейзенберга* 148, 149, 153
- — физических частиц 40
- при наличии протяженных объектов 354, 355
- термостата 107
- Гейзенберга* модель для локализованных спинов 148
- уравнение 41, 45
- — в термополевой динамике 113, 123
- — для коллективизированных электронов 142, 143, 215
- — — модели БКШ 160, 161
- — — — *Гейзенберга* 150, 154
- — — — *Ли* 82
- — — — (N, θ)-модели 62
- — — электромагнитного поля *см.* Гейзенберговские поля 9, 41
- Гельмгольца* свободная энергия 113
- — — в модели БКШ 185
- Гиббса* термодинамический потенциал в магнитных сверхпроводниках 465
- — — смешанного состояния 450
- Гильбертово пространство, сепарабельное 24, 27
- Глубина проникновения 490
- — лондоновская 181, 435
- Голдбергера* — *Треймана* соотношение 253, 255
- Голдстоуна* теорема 10, 143, 230, 238
- Голдстоуновские бозоны 10, 14, 143, 176, 230, 239, 241, 249, 284, 420
- — инфракрасные 262
- — комплексные 261
- квантовые состояния 473
- Голдстоуновского типа модель 241
- Горькова* уравнения 437
- Границы зерен 390
- — плоские 394
- — соотношение непрерывности 394

- — типа кручения 393
- — — наклона 393
- Дайсона* теорема 249
- уравнение 216
- Дайсоновский член в намагниченности 159
- Двумерная особенность 381
- — осциллирующая 474
- — сферическая 396
- Двухточечные функции 100, 144, 187, 201
- — для магнона 158, 207, 213, 221
- — — плазмона 289
- — — плотности заряда 174, 187
- — — — тока 187
- — — фазона 210
- — правила умножения 121
- — при конечных температурах 114—116, 120, 131, 134
- — спектральное представление 101, 131
- Деформация группы 257
- Джозефсона* эффект 479
- — периодическая конфигурация в контакте 282
- Дивизор 49, 56
- для плазмонов 289
- Динамическая матрица колебаний решетки 271
- перестройка симметрии 11, 226, 237, 257
- — — в кристаллах 274
- — — калибровочной 292, 302
- — — $O(n)$ 261
- — — спиновой 143, 243
- — — $SU(2)$ 246, 247
- — — $SU(2) \times SU(2)$ 261
- — — $SU(n)$ 261
- — — трансляционной 324
- — — фазовой 177, 178, 241
- Динамическое отображение 9, 46, 90, 227, 338
- — в кристаллах 274
- — — случае бозонного преобразования 313
- — — — нормального металла 302, 421
- — — — сверхпроводника 176, 178, 242, 291, 293
- — — термополевой динамике 124, 130
- — для модели голдстоуновского типа 242
- — — (N, θ) -модели 63, 71
- — — спиновых операторов 155
- Дисклинация 394
- Дислокация 388
- винтовая 389
- краевая 389
- Диэлектрическая проницаемость 427, 428
- — тензор 426
- Длина когерентности 183
- Древесное приближение 316 «Духи» 282, 300, 420
- Звуковые волны на поверхности кристалла 474
- — — — поля смещений 475
- Импульса оператор для физических частиц 41, 47
- — — — с учетом влияния термостата 107
- Индефинитная метрика 283
- Инстантон 414
- *Полякова* 418
- *т'Хофта* 418
- Калибровка 399
- кулоновская 438, 479
- Калибровочная инвариантность 186
- Калибровочное преобразование 182, 197, 280, 298
- — матрица 400, 418
- условие 286, 299
- Калибровочные поля 416
- — теория 416

- Квант потока 440
- Квантование потока 383, 424, 440
- — в джозефсоновских контактах 485
- — — магнитных сверхпроводниках 465
- Квантовая координата 320, 344, 348, 357
- Квантовомеханические объекты 329, 366
- Киральная SU (2)хSU (2)-симметрия 253
- Классические объекты 329, 366
- Когерентное представление 343
- состояние 38, 312
- Коллективная мода 10
- Константы перенормировки 335
- Координатное пространство и пространство симметрии, взаимное соответствие 420
- Критическая температура сверхпроводников 164
- Критические значения хд 445
- Кубо — Мартина — Швингера* соотношение 128
- Кулоновская калибровка 438, 479
- Кюри* закон 463
- Кюри-вейсовское поведение зонных электронов 224
- Ламе* коэффициент 387
- Лемана — Симанзика — Циммермана* формула 99
- — — в компактной форме 99
- — — при конечных температурах 128
- Ли* модель 82
- Лоренцева «поворота» оператор 355, 357
- Магнетизм и сверхпроводимость, взаимность влияние 458
- Магнитные примеси в сверхпроводниках 458
- — — *Абрикосова — Горькова* теория 459
- — — сверхпроводники 457
- — — антиферромагнитный порядок 460
- — — дипольное взаимодействие 458
- — — обменное взаимодействие 458
- — — — экранировка 463
- — — спин-периодическая фаза 464
- — — фазовая диаграмма 467
- — — энергетическая щель 468
- Магноны 143, 145, 148, 157, 208, 209
- энергетический спектр 158, 214, 220
- Маки* параметры 452
- Маквелла* уравнение, классическое 423, 425, 461
- Максвелловского типа уравнение 423
- — — в сверхпроводниках 429, 433, 436, 438, 440, 479
- — — — анизотропных 456
- — — — магнитных 461
- Матрица приведения к эрмитову виду 50
- Мацубары* формализм для температурных функций *Грина* 11
- Мейсснеровский ток 425
- Мейсснеровское состояние 443
- Минимальное взаимодействие 421
- Модули упругости 277
- Модуль сдвига 387
- Монополь 398, 410, 413
- Марии — Кавабаты* метод 224
- Намагниченность в системе коллективизированных электронов 144, 220
- — — локализованных спинов 152, 159
- — — — приближение среднего поля 153, 462
- Намагничивания кривая в магнитных сверхпроводниках 466
- — — сверхпроводниках II/1 рода

- 445, 451
- Нейтронное рассеяние на спиновых волнах 209
- Нётерский генератор 194, 229
— ток 194, 197
- Низких энергий теорема 249
— — — для магнонов 248, 249, 251
— — — пионов 249, 252
— — — и низкие температуры 256
- Нормальное произведение 46
- (N, θ)-модель 62
- [0]-множество 25
- Обобщенные координаты 325, 358, 369
- Оптические моды 278
- Особенности типа расходимости 347, 374
— топологические 347, 374
- Параметр порядка 262, 400
— — в сверхпроводниках 242, 432
— — условие однозначности 402
- Парастатистика 22
- Перенормировка вакуумного среднего 335
— вершины 334
— волновой функции 333
— константы связи 219
— химического потенциала 142, 143, 159, 220
— энергии 141, 160, 162, 332
- Перестройка симметрии *см.*
Динамическая перестройка симметрии
- Петлевое разложение 202
- Плазменные колебания 181, 186
— — уравнения 190, 287, 424
— — энергия 181, 190
- Плазмой 181, 186, 190, 286, 420
- Плотное множество 27
- Поверхностная сверхпроводимость 468, 492
- Поверхностное магнитное поле в сверхпроводниках 487, 491
- Поверхностные волны 15
— фононы 478
- Подгруппа устойчивости 244, 259
- Подстановка для физических полей 227
- Полярон 141
- Правило сумм 56, 58
- Представление взаимодействия 84
- Причинность 58, 59
- Пространственный сдвиг 47
- Редукции формула 98
- РККИ механизм 459
- Рождения и уничтожения бозонов операторы 22
— — — волновых пакетов операторы 29
— — — операторы, проектирование 60
— — — фермионов операторы 23
— — — физических частиц операторы 47
- Рэлеевская волна 15, 478
- Самосогласованные вычисления 43, 63, 73
- Самосогласованный метод 42
— потенциал 14, 316, 317, 337, 343, 375
— — вихрей в сверхпроводниках 446
— — двумерной особенности 478
— — поверхность кристалла 473
- Сверхпроводники 54, 280 *см. также*
Анизотропные сверхпроводники, Магнитные сверхпроводники
— бесконечная проводимость 429
— влияние кулоновского взаимодействия 179
— I рода 443
— II рода 444
— — — затухание ультразвука 447
— II/1 рода 444
— II/2 рода 444

Свободное движение двух вихрей 372
— — протяженных объектов 366, 381
Связывающие поля 76, 93, 241
Сжатие группы 247, 257
Синус-Гордона модель 340
Синусоидальное спиновое упорядочение 347
Слабые соотношения 42 S-матрица 76, 88, 93, 99
Смешанное состояние 443, 464
Собственная энергия 140, 141
— — коллективизированных электронов 215
— — фотона 186, 295, 305, 433
Солитон 15, 337
Составная частица 43, 71, 73, 76, 82
Спектральное представление 100, 169, 207
— — двухточечных функций 101, 131, 201, 207, 212
— — неприводимой части собственной энергии 140
— — при конечных температурах 131
Спиновая симметрия 204
Спин-периодическая фаза 464, 470
Спиральные спиновые структуры 347
Спонтанное нарушение симметрии 10, 11, 230 *см. также*
Динамическая перестройка симметрии
Стонеровский континуум 221, 222
s—f-взаимодействие 463, 470
— в магнитных сверхпроводниках 459
Термополевая динамика 11, 110
Термополевой дублет 115, 120, 123, 124, 139, 144, 145, 150, 1160, 205
Термостат 106, 107
Тильда операция 110
— — правило подстановки 127, 132
Тонкие пленки, сверхпроводимость

492
Топологические квантовые числа 382, 383, 398, 406, 410, 424
— особенности 13, 347, 374, 375, 377
— — двумерные 381
— — кольцевые 380
— — линейные 378
— — полное условие 377, 379
Топологический заряд 376, 391
— объект 13
— — с неабелевой симметрией 398
Точечная группа 268
Точечные дефекты 396
Трансляционная мода 320, 344
Тройные редкоземельные соединения 459
Унитарно неэквивалентные представления 24, 31, 35, 37, 38
Уорда — *Такахаси* соотношения 43, 192, 195, 198, 228, 232
— — — для спиновой симметрии 205, 206, 212
— — — фазовой симметрии 200
— — — компактная записи 196
— — — обобщение 197
— — — при конечных температурах 198
Упорядочения оператор в термополевой динамике 154, 160, 187
Упорядоченные состояния 10, 11, 14, 143, 163, 227, 239, 310
Упругие постоянные 277
Уравнение для щели в сверхпроводниках 163
— — — обобщение 173
Уравнения свободного поля для физических полей 48
— — — и статистика 59
— — — типа 1 48, 53, 58, 59, 104
— — — типа 2 48, 53, 56, 59, 103
Условие свободной поверхности 395
Фазовое преобразование в модели

- голдстоуневского типа 241
- — — — *Ли* 82
- — — нормальных металлах 298
- — — (N, θ)-модели 64, 70, 71
- — — сверхпроводниках 242, 280, 284
- Фазон 177, 181, 241, 285
- энергия 182
- Фермионы, определение 22
- Ферромагнетизм
 - коллективизированных электронов 142, 204
- Физические кванты 9, 39
- поля 9, 47
- состояния 283, 300
- частицы 9, 39, 45, 47
- — представления 39, 42, 46, 90, 102
- — — в (N, θ)-модели 74
- — — — теории возмущений 83, 85
- — — и вариационный принцип 89
- — — при конечных температурах 109
- Фока* пространство 27, 63
- — расширенное 325, 351
- Фононы 138, 266, 280
- акустические 268, 278
- оптические 278
- уравнение 268, 270, 276
- Франка* формула для большеугловых границ зерен 393
- Фраунгоферова дифракция для джозефсоновского тока 486
- Химический потенциал 113, 149, 220
- — затравочный 159
- — перенормировка 142, 143, 159, 220
- Цепочечное приближение 146, 161, 166, 433, 437
- (с,q)-превращения 358, 364
- Числа заполнения оператор 22, 24, 109
- Чисто калибровочная теория 416
- Энергетическая щель в
 - сверхпроводниках 162
 - — — — магнитных 468
- Энергия конденсации 184, 443
- основного состояния в
 - термополевой динамике 113
- протяженных объектов 344
- сердцевины вихря 448
- — — в магнитных
 - сверхпроводниках 465
- Энтропия 113, 185
- Янга* — *Миллса* теория 416
- Янга* — *Фельдмана* уравнение 311

«Термополевая динамика и конденсированные состояния» — не стандартная книга по квантовой теории твердого тела. Если ее просмотреть, не вникая в содержание, то может показаться, что главное внимание в ней сосредоточено не на физическом смысле, а на математическом выводе формул физики конденсированного состояния. Действительно, формул, уравнений, соотношений непривычно много. Однако нестандартность книги не в этом.

Подход авторов резко отличается от того, к которому мы привыкли. Понимание атомной структуры вещества и главное то обстоятельство, что движение структурных единиц материи (электронов, атомов, молекул) подчиняется законам квантовой механики, предельным случаем которой является классическая механика, не ликвидирует определенной эклектичности, обычно имеющей место при описании твердых тел. Наряду с микроскопическими степенями свободы (которые требуют квантовомеханического описания) феноменологически вводятся макроскопические объекты, априорно описываемые на языке классической механики. Переход от микро- к макроописанию, как правило, остается «за кадром».

Умэдзава, Мацумото и Татики — известные специалисты по квантовой теории поля — сделали попытку построить *последовательную* теорию, последовательную в том смысле, что построение исходит только из существования квантовых частиц, а макроскопические объекты (в частности, имеющие топологические особенности: вихри в He-II, в сверхпроводниках, дислокации, границы кристаллитов и кристалла и т. п.) возникают как результат спонтанного нарушения симметрии и конденсации голдстоуновских бозонов.

Такой подход требует разработки специальной теоретической техники. Этому и посвящена большая часть книги. Отметим, что термин «термополевая динамика» введен авторами (он подробно разъяснен в гл. 4).

Новое изложение квантовой теории твердого тела, добиваясь большой логичности, теряет в наглядности. И к этому нужно быть готовым при чтении книги. Более того, изложение специально формализовано. Главное внимание уделено не выводу конкретных

соотношений (составляющих содержание большинства имеющихся учебников и монографий по квантовой теории твердого тела), а формальным возможностям, содержащимся в квантовополевоом описании. Ударение сделано не на том, *как описать*, а на том, *как должно строиться* описание: чтобы существовал тот или другой объект, описывающие его уравнения должны иметь те или иные свойства. Книга несомненно будет полезна физикам-теоретикам, интересы которых сосредоточены на решении глубоких задач теории многих частиц, в каких бы конкретных условиях эти частицы ни существовали. В этом смысле претензии авторов, выраженные в их предисловии, а также в гл. 1 и 13, не чрезмерны, хотя всякое обобщение, естественно, требует решения новых и, возможно, весьма сложных задач.

Строгая — в смысле использования математического аппарата — «Термополевая динамика» написана сравнительно свободным языком, употребляемым на семинарах и конференциях. Для одного и того же понятия авторы часто используют разные термины, не по всей книге принята одна и та же система единиц. Стремясь сохранить стиль книги, мы не вносили изменений, надеясь, что это не помешает читателю разобраться в содержании оригинальной и нестандартной монографии.

Перевод выполнили: К. И. Кугель (гл. 9—11), Т. Ю. Лисовская (гл. 6—8 и 12, 13) и Ю. Г. Рудой (предисловие и гл. 1—5).

М. И. Каганов

В этой книге дается формулировка квантовой теории поля при конечных температурах, позволяющая описывать упорядоченные состояния систем многих тел, в которых может возникать много протяженных топологических объектов разного типа, взаимодействующих с квантами. В этом формализме с единой точки зрения описываются классические, квантовомеханические и квантово-полевые объекты; это достигается благодаря последовательной схеме описания макроскопических объектов, сосуществующих с квантами. В настоящее время системы, в которых сосуществуют микроскопические и макроскопические объекты, привлекают большое внимание физиков, работающих в различных областях. Данная книга ставит своей целью дать читателю ясное представление об этом круге вопросов. Предполагается, что она представит интерес не только для физиков, занимающихся изучением твердого тела, но и для исследователей в других областях, таких, например, как физика высоких энергий и космология, несмотря на то что большинство примеров взято из физики твердого тела. Общая точка зрения, которая проводится в книге, а также краткий обзор ее содержания приведены в гл. 1.

Авторы хотели бы подчеркнуть, что данная книга является полностью замкнутой в смысле изложения проблем теории многих тел. Предполагается поэтому, что она окажется подходящей и для студентов, обладающих лишь первоначальными знаниями в области квантовой теории поля.

Книга появилась в результате сотрудничества трех авторов. В течение нескольких последних лет каждое лето в Эдмонтоне (Канада) проходили небольшие рабочие совещания по некоторым проблемам физики твердого тела и квантовой теории поля. На этих совещаниях кроме нас присутствовало много физиков из разных стран, причем такие совещания оказывали чрезвычайно стимулирующее влияние и доставляли участникам большое удовольствие; мы надеемся, что так будет и в дальнейшем. Зимой наше сотрудничество продолжалось с помощью дальних средств связи. Культурной программой летних совещаний ведала миссис Тамаэ Умэдзава, чье гостеприимство делало эти совещания чрез-

вычайно приятными. Мы хотим поблагодарить ее за приложенные усилия и посвящаем ей эту книгу.

Финансовую сторону летних совещаний обеспечивали Исследовательский совет по естественным и прикладным наукам Канады, Институт теоретической физики и факультет естественных наук Университета провинции Альберта, а также Министерство образования, науки и культуры Японии. Мы благодарны этим организациям за поддержку.

В ходе подготовки книги мы пользовались помощью и поддержкой ряда своих коллег. В частности, д-р Г. Семенов любезно прочитал всю рукопись и сделал ценные замечания. Многие части книги улучшились благодаря нашим дискуссиям с д-ром Ф. Манчини, д-ром Н. Папастоматиу, д-ром И. Такахаси, д-ром М. Умэдзава и Дж. Уайтхедом. Мы очень благодарны этим коллегам за полезные замечания.

Эдмонтон, 1981

*Х. Мацумото
М. Татики
Х. Умэдзава*

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Квантовая теория систем многих тел

Квантовая теория поля возникла первоначально как аналитический метод описания в физике элементарных частиц. Но в ходе ее развития в ней постепенно начали проявляться черты, делающие ее пригодной для анализа квантовых систем многих тел. Начало этому было положено теорией представления Фока (представления вторичного квантования); именно оно показало, что квантовая теория поля предлагает язык, пригодный для описания квантовой системы, в которой состояния можно классифицировать набором числовых последовательностей. Очевидно, что квантовая система многих тел требует для своего описания такого языка.

Двойственный характер описания. Квантовая теория поля еще больше приблизилась к физике твердого тела, когда ее удалось сформулировать в терминах свободных (входящих) полей. Было показано, что, хотя основные соотношения квантовой теории поля выражаются через так называемые гейзенберговские поля, ее результаты могут быть описаны с помощью понятия входящих полей. Тот факт, что входящие поля свободны, напоминает о так называемых квазичастицах, или квантах, определяющих наблюдаемые явления в физике твердого тела. В этой книге свободные поля, через которые выражаются результаты теории, называются «физическими частицами» или «физическими квантами». Примером физических квантов могут служить фононы, магноны, плазмоны и другие квазичастицы.

Таким образом, язык квантовой теории поля обладает двойственной структурой; основные соотношения теории выражаются через гейзенберговские поля, тогда как наблюдаемые величины описываются с помощью «физических полей». Решить задачу в квантовой теории поля означает найти соответствие между этими двумя описаниями; такое соответствие называется динамическим отображением.

Теория упорядоченных состояний. Серьезное продвижение вперед в квантовой теории поля было достигнуто после того, как удалось полностью осмыслить в рамках этой теории явление спонтанного нарушения симметрии. До 1955 г. в квантовой тео-

рии поля рассматривались только такие решения, для которых все инвариантные преобразования унитарно эквивалентны. Но начиная с 1953 г. появились математические работы, указывающие на то, что в квантовой теории с бесконечным числом степеней свободы канонические преобразования не обязательно должны быть унитарно эквивалентными.

В результате успешного развития теории сверхпроводимости Бардина—Купера—Шриффера квантовая теория поля естественным образом подошла к решению проблем, включающих унитарно неэквивалентные преобразования, поскольку спонтанное нарушение симметрии относится к этой категории явлений. Возникновение упорядоченных состояний в физике твердого тела — результат спонтанного нарушения симметрии, поэтому квантовая теория поля оказалась способной дать теоретическое описание таких состояний. В основе такого описания лежит знаменитая теорема Голдстоуна, которая практически сводится к тому, что существование упорядоченных состояний обеспечивается некоторыми бесщелевыми (не имеющими щели в энергетическом спектре) бозонами, называемыми голдстоуновскими бозонами. Это обстоятельство широко известно специалистам по физике твердого тела, так как оно встречается при изучении различных упорядоченных состояний (фононы в кристаллах, магноны в ферромагнетиках и т. п.). Точнее говоря, коллективная мода, которая служит переносчиком в процессе поддержания упорядоченного состояния, — это голдстоуновская мода. Другими словами, упорядоченное состояние существует благодаря конденсации голдстоуновских бозонов. При спонтанном нарушении симметрии преобразования симметрии упорядоченного состояния регулируют характер конденсации бозонов. Тот факт, что в этом процессе регулирования участвует огромное число конденсированных бозонов, объясняет, почему соответствующее преобразование не является унитарно эквивалентным. В связи с явлением спонтанного нарушения симметрии возникает интересный вопрос. Решение, соответствующее нарушенной симметрии, является также решением исходного уравнения Гейзенберга, которое инвариантно относительно преобразований симметрии, связанных с нарушенной симметрией. Поэтому исходная инвариантность должна каким-то образом сохраниться в этом решении. Вопрос состоит в том, каким образом сохраняется эта инвариантность в процессе нарушения симметрии? При ответе на этот вопрос очень полезной оказывается двойственность языка квантовой теории поля, о которой упоминалось выше. Симметрия отражает инвариантность, но характер этого отражения может изменяться в процессе перехода с одного языка на другой. Наблюдаемый вид симметрии выражается на языке физических квантов и может отличаться от соответствующего выражения на языке гейзенберговских полей. В этом смысле спон-

танное нарушение симметрии (т. е. возникновение упорядоченных состояний) понимается как перестройка симметрии при динамическом отображении. Эту ситуацию можно резюмировать следующим образом:

создание упорядоченных состояний = спонтанному
нарушению симметрии = динамической перестройке
симметрии.

После создания прекрасного формализма для описания упорядоченных состояний квантовая теория поля приобрела еще большую ценность как мощный метод расчета в физике твердого тела.

Квантовая теория поля при конечных температурах. Очевидно, что для успешного исследования проблем физики твердого тела квантовую теорию поля следует переформулировать с учетом тепловых эффектов. Начиная с 1955 г. широкое развитие получили методы, связанные с функциями Грина при конечных температурах. Но формализм, в котором учитывается как временная, так и температурная зависимость, не может полностью использовать преимущества метода *причинных* функций Грина, который позволяет достичь таких больших результатов в обычной квантовой теории поля, о чем свидетельствует диаграммная техника Фейнмана. С другой стороны, известный формализм Мацубары может использовать преимущества диаграммной техники Фейнмана, но с его помощью трудно изучать явления, зависящие от времени. Кроме того, в методе температурных функций Грина не удастся просто использовать многие типы операторных преобразований. Поэтому весьма желательно полностью переформулировать всю структуру квантовой теории поля с учетом тепловых эффектов. Начиная с 1963 г. благодаря развитию аксиоматической теории поля стало ясно, что квантовую теорию свободных полей при конечных температурах можно последовательно сформулировать, если удвоить число степеней свободы. Аксиоматический подход в дальнейшем успешно развивался, и в настоящее время полученные строгие результаты легли в основу статистической механики квантовых систем. Но совсем другое дело — формулировка квантовой теории поля при конечных температурах в форме, удобной для практического использования при вычислениях в физике твердого тела. Теория такого типа сформулирована и носит название термополевой динамики. В ней, в частности, показано, что может быть использован не только формализм причинных функций Грина, но и все методы обычной квантовой теории поля.

Макроскопические объекты в квантовых системах многих тел. При использовании квантовой теории поля для описания упоря-

доченных состояний сразу возникает новая группа вопросов. Поскольку первоначально квантовая теория поля формулировалась для описания физики частиц высокой энергии, она была пригодна лишь для систем микроскопических объектов (квантов). Однако в других разделах физики редко удается найти чисто квантовые упорядоченные состояния без каких-либо протяженных объектов. Например, трудно найти кристаллы без дислокаций, границ зерен или дефектов. В таких кристаллах существует много различных квантовых возбуждений, таких, как фононы и другие кванты. Дислокации — это макроскопические объекты с классическим поведением; они возникают в кристаллах и взаимодействуют с фононами и другими квантами. Коротко можно сказать, что кристалл с дислокациями представляет собой пример системы, в которой микро- и макроскопические объекты сосуществуют и взаимодействуют друг с другом. В физике твердого тела подобная ситуация встречается часто: таковы, например, вихри в сверхпроводниках, магнитные домены в ферромагнетиках и т. п. Обычные макроскопические токи, наблюдаемые в твердых телах, также макроскопические объекты. По существу многие из наблюдаемых в твердых телах явлений отражают макроскопическое поведение квантовых систем многих тел. Таким образом, мы приходим к необходимости описания квантовых систем многих тел, в которых самосогласованно возникают некоторые макроскопические объекты.

Объекты природы принято описывать с помощью структурных, или стратифицированных, понятий. Простейшая классификация такого типа подразделяет объекты по масштабу на космологические, земные и далее на молекулы, атомы и т. д. Затем подчеркивается, что земные объекты состоят из молекул, те в свою очередь из атомов и т. д. При этом явления, принадлежащие различным «стратам», рассматриваются как правило различными физическими теориями. Особое различие проводится между уровнем земных объектов и уровнем молекул. Объекты, принадлежащие уровню молекул (или еще меньшему), обычно называют микроскопическими, а остальные — макроскопическими. Неоднократно указывалось, что динамика микроскопических объектов описывается законами квантовой теории, а динамика макроскопических объектов — законами классической физики. Это привело к постановке вопроса о взаимосвязи квантовой и классической физики. Поскольку большинство измерительных приборов представляют собой макроскопические объекты, обладающие классическим поведением, указанный вопрос открыл путь к изучению самого механизма измерения, и этим занималось много исследователей в течение полувека. Но природа слишком сложна, чтобы ее можно было описать с помощью упомянутой выше простой «линейной» классификации по «стратам». Это становится оче-

видным при беглом взгляде на многие явления, происходящие в упорядоченных состояниях, при которых возникает большое число различных макроскопических объектов, взаимодействующих с квантами.

Итак, мы приходим к фундаментальному вопросу: каким образом макроскопические объекты возникают из микроскопических? В физике твердого тела часто удается проследить эту связь — примером может служить вычисление электропроводности. Это макроскопическая величина, так как она определяется отношением макроскопического тока к макроскопическому электрическому полю. Теория линейного отклика связывает эту макроскопическую величину с определенными эффектами квантовых флуктуаций, которые являются микроскопическими (эта связь осуществляется посредством так называемой флуктуационно-диссипационной теоремы). Но перечисление известных примеров из физики твердого тела не может привести к адекватному ответу на поставленный выше вопрос. Хотелось бы иметь общий математический формализм, позволяющий получать макроскопические результаты на основе микроскопической теории. Кроме того, желательно, чтобы подобный формализм оказался полезным при практическом анализе квантовых систем многих тел с участием макроскопических объектов.

В принципе оказывается возможным обобщить формулировку квантовой теории поля так, чтобы включить в нее макроскопические объекты, возникающие в квантовых системах многих тел. Эта обобщенная формулировка включает в себя теорию линейного отклика и содержит систематические методы для анализа квантовых систем многих тел с протяженными объектами. Согласно этой формулировке, макроскопические объекты в квантовых системах многих тел возникают в результате конденсации бозонов определенного вида.

Топологические объекты. Существует много различных видов макроскопических объектов, обладающих топологическими особенностями. Например, вихри в сверхпроводниках и дислокации в кристаллах несут на себе линейные особенности. Как показано в последующих главах, границы зерен, точечные дефекты в кристаллах, а также джозефсоновские контакты несут поверхностные топологические особенности. Можно доказать, что макроскопические объекты, связанные с топологическими особенностями, могут возникать только в результате конденсации бесщелевых бозонов (т. е. бозонов, минимальная энергия которых равна нулю). Этим объясняется тот факт, что в любом упорядоченном состоянии можно обнаружить различные виды макроскопических объектов, обладающих топологическими особенностями; действительно, как отмечалось выше, упорядоченные состояния поддер-

живаются голдстоуновскими бозонами, не имеющими щели в энергетическом спектре.

Беспорядок в упорядоченных состояниях. Примечательной чертой макроскопических объектов, обладающих топологическими особенностями, является то, что эти объекты проявляют также определенную разупорядоченность, связанную с тем, что на особенностях параметры порядка обращаются в нуль. В результате в упорядоченном состоянии возникают области беспорядка, несмотря на то, что создание самих макроскопических объектов требует наличия определенного порядка. Примером может служить следующая цепочка объектов: молекулярная система—кристалл—дислокации в кристалле—аморфный материал.

Взаимодействие между макроскопическими объектами и квантами. Естественно ожидать, что, поскольку макроскопические объекты возникают в квантовых системах, состояния самих квантов испытывают воздействие со стороны этих объектов. Это воздействие макроскопических объектов может быть описано в терминах потенциала, действующего на кванты. Такой потенциал называют самосогласованным потенциалом. Например, на электроны в окрестности центра вихря в сверхпроводнике воздействует самосогласованный потенциал, создаваемый этим вихрем, в результате чего энергия электронов понижается. В этом состоит природа так называемой энергии твердой сердцевины вихря. Другим примером может служить влияние поверхностей на фононы в кристаллах, в результате чего возникают поверхностные фононы.

Поверхностные явления. Все реальные физические системы обладают конечными размерами. Если граничная поверхность не поддерживается внешними силами, то это происходит самосогласованным образом за счет внутренних взаимодействий. Устойчивость системы означает, что ее граничная поверхность поддерживается за счет определенных дальнедействующих корреляций (или коллективной моды). При различных попытках искусственно изменить форму границы коллективная мода стремится вернуть ее к наиболее предпочтительной форме сразу же после прекращения внешнего воздействия. Иными словами, система выбирает наиболее предпочтительную форму своей границы из бесконечно большого числа возможных. Отсюда ясно, что даже при рассмотрении стационарной системы конечного размера эта система обладает бесконечным числом степеней свободы. Интуитивно ясно, что граничная поверхность системы в упорядоченном состоянии является макроскопическим объектом (обладающим топологической особенностью), который возникает в результате конденсации

голдстоуновских бозонов. Некоторые типы колебаний границы обладают весьма стационарными свойствами и создают своего рода поверхностную волну. Примером может служить рэлеевская волна, представляющая собой поверхностную звуковую волну в кристалле. Аналогично многие типы поверхностных явлений могут быть связаны с поверхностными особенностями.

Другим примером поверхностного эффекта является эффект Джозефсона. Обычно этот эффект описывают на основе микроскопического туннелирования куперовских пар, но его можно также рассматривать как макроскопический ток, который естественным образом индуцируется наличием макроскопической поверхности.

Квантовая теория поля, квантовая механика и классическая теория. Исторически квантовая теория поля возникла в результате квантования классической теории, но в предшествующем изложении использован обратный порядок. А именно, теоретическое описание мы начали с обычной квантовой теории поля для чисто квантовых систем и лишь затем, используя математический формализм конденсации бозонов, перешли к описанию возникновения в квантовой системе макроскопических объектов. В результате мы приходим к теории, которая охватывает квантовополевые, квантовомеханические и классические объекты. Таким образом, исторический цикл развития теории получает интересное завершение: квантовая механика и классическая физика выводятся из квантовой теории поля. Это проливает свет на характер взаимосвязи микроскопических и макроскопических теорий.

Примечательной чертой современной науки является то, что исследователи в разных областях используют сходные понятия и методы. Изучение упорядоченности, нарушения симметрии и макроскопических объектов находится в центре внимания не только в физике твердого тела, но и в физике частиц высоких энергий, астрофизике, химии и биохимии. К этой же группе проблем следует отнести изучение в математике на основе нелинейных уравнений солитонов и квантовых солитонов. Поэтому имеются веские основания считать, что квантовая теория поля окажется полезной для широкого круга научных проблем.

1.2. План книги

В этой книге квантовая теория поля излагается в порядке, определенном в предыдущем разделе. Изложение общих понятий сопровождается многочисленными практическими примерами из физики твердого тела.

В гл. 2 и 3 излагается теория пространства Фока для квантовой системы, состояния которой классифицируются с помощью числовых последовательностей; здесь же описывается двойствен-

ная структура языка квантовой теории поля (гейзенберговские поля и свободные физические кванты). Обсуждаются также так называемые унитарно неэквивалентные представления.

Общий формализм квантовой теории поля при конечных температурах (термополевая динамика) излагается в гл. 4. Согласно построению этой теории, подробно рассматриваются спектральные представления причинных двухточечных функций (причинных корреляционных функций) и их произведений. Эти спектральные представления и правила их умножения служат ключевыми элементами систематизации и упрощения многих практических вычислений для систем при конечных температурах. В гл. 5 термополевая динамика применяется ко многим задачам физики твердого тела. В этой главе ставится две цели: с одной стороны, она знакомит с многими типичными примерами из физики твердого тела, с другой — позволяет проиллюстрировать многие вычислительные приемы термополевой динамики. Если читатель сочтет некоторые из этих примеров слишком трудоемкими и громоздкими, он может отложить их разбор до тех пор, пока не будет уяснена основная идея книги.

При исследовании задач для систем многих тел оказывается, что многие физические свойства определяются некоторыми инвариантными чертами динамики системы. Используя какие-либо приближения при описании свойств системы, следует соблюдать особую осторожность, чтобы не нарушить указанную инвариантность. Поэтому полезно иметь определенные математические соотношения, отражающие инвариантные свойства системы. Такие соотношения действительно существуют и носят название соотношений Уорда—Такахаши (УТ); их описанию для системы при конечных температурах посвящена гл. 6. На основе использования этих соотношений в гл. 7 излагаются общие соображения об упорядоченных состояниях, связанных со спонтанным нарушением симметрии, а также обсуждаются теорема Голдстоуна и динамическая перестройка симметрии. Рассматриваются также некоторые примеры упорядоченных состояний.

В гл. 8 развитая квантовая теория поля применяется к особенно важной проблеме, а именно к квантовой электродинамике в твердых телах, в том числе в нормальных и сверхпроводящих металлах. Это рассмотрение иллюстрирует метод учета калибровочной инвариантности.

Анализ возникновения макроскопических объектов в квантовых системах многих тел начинается в гл. 9. В этой главе дано описание общих черт теории квантовых систем многих тел при наличии макроскопических объектов. Особенно важный случай таких объектов, содержащих топологические особенности, обсуждается в гл. 10. Изложение в этих главах является естественным продолжением и развитием квантовой теории поля, изложенной в пред-

шествующих восьми главах, поскольку возникновение макроскопических объектов с топологическими особенностями обусловлено наличием голдстоуновских бозонов, поддерживающих упорядоченное состояние; сами топологические объекты являются результатом конденсации голдстоуновских бозонов. В гл. 10 изучаются также конкретные примеры: дислокации, границы зерен и дефекты в кристаллах.

В гл. 11 формализм, развитый для макроскопических объектов, применяется к описанию макроскопических явлений, связанных с квантовой электродинамикой в твердых телах. Рассматриваются такие макроскопические величины, как макроскопический ток и поле, электропроводность, диэлектрическая проницаемость и т. п. В качестве одного из результатов получена теория линейного отклика. Подробно рассматривается явление сверхпроводимости и обсуждается его взаимосвязь с магнетизмом.

Глава 12 посвящена описанию явлений, вызванных наличием топологических поверхностных особенностей. Общее рассмотрение дополнено следующими тремя примерами: поверхностная звуковая волна в кристалле, джозефсоновский ток и проникновение внешнего магнитного поля в сверхпроводник.

Вследствие недостатка времени и ограниченности объема книги опущены многие важные и интересные вопросы; некоторые из них кратко упоминаются в последней главе.

1.3. Обозначения

Ниже приведены обозначения, которые используются в этой книге; при использовании других обозначений в тексте будут сделаны соответствующие оговорки.

Для пространственных координат x и времени t мы часто используем четырехмерное обозначение x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$x_\mu = \begin{cases} x_i & (\mu = i; \text{ пространственная координата}), \\ t & (\mu = 0; \text{ временная координата}). \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Четырехмерный волновой вектор k_μ имеет следующий смысл:

$$k_\mu = \begin{cases} k_i & (\mu = i; \text{ волновой вектор}), \\ \omega & (\mu = 0; \text{ частота}). \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Простое обозначение x соответствует четырехмерному вектору x_μ , а полужирный символ (например, \mathbf{x}) — пространственному вектору. Таким образом, запись $f(x)$ обозначает зависимость от x и t .

Метрические тензоры $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ определяются соотношениями

$$g^{ii} = -g^{00} = 1, \quad g_{ii} = -g_{00} = 1, \quad (1.3.3)$$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \quad (1.3.4)$$

а векторы с верхними индексами — выражениями

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad k^\mu = g^{\mu\nu} k_\nu. \quad (1.3.5)$$

Везде предполагается суммирование по повторяющимся дважды индексам. Скалярное произведение трехмерных векторов \mathbf{k} и \mathbf{x} обозначается $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$, а четырехмерное скалярное произведение $k \cdot x$ определяется следующим образом:

$$k \cdot x = k_\mu x^\mu = k^\mu x_\mu = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \quad (1.3.6)$$

Оператор дифференцирования ∂^μ определяется как

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{cases} \partial / \partial x_i & (\mu = i), \\ -\partial / \partial t & (\mu = 0); \end{cases} \quad (1.3.7)$$

тогда

$$\partial_\mu \equiv g_{\mu\nu} \partial^\nu = \begin{cases} \partial / \partial x_i & (\mu = i), \\ -\partial / \partial t & (\mu = 0). \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Используется также символ ∇_i :

$$\nabla_i \equiv \partial / \partial x_i; \quad (1.3.9)$$

тогда ∇^2 имеет смысл

$$\nabla^2 = \sum_i \nabla_i \nabla_i. \quad (1.3.10)$$

Функция от оператора дифференцирования $F(\partial)$ определяется своим действием на фурье-образ:

$$F(\partial) \exp\{ik \cdot x\} = F(ik) \exp\{ik \cdot x\}. \quad (1.3.11)$$

Для простоты в дальнейшем множитель i в выражении $F(ik)$ мы опускаем и записываем просто $F(k)$. Таким образом, если функция $g(x)$ имеет фурье-образ, определяемый выражением

$$g(x) = \int d^4k G(k) \exp\{ik \cdot x\}, \quad (1.3.12)$$

то действие на эту функцию оператора $F(\partial)$ дается выражением

$$F(\partial) g(x) = \int d^4k F(k) G(k) \exp\{ik \cdot x\}. \quad (1.3.13)$$

Трехмерная дельта-функция обозначается $\delta(\mathbf{x})$:

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3), \quad (1.3.14)$$

а четырехмерная — $\delta^{(4)}(x)$:

$$\delta^{(4)}(x) \equiv \delta(t) \delta(\mathbf{x}). \quad (1.3.15)$$

Фундаментальные постоянные \hbar , c и другие записываются в явном виде; так, энергия элементарного возбуждения (квази-частицы) E выражается через частоту ω следующим образом:

$$E = \hbar\omega. \quad (1.3.16)$$

Полевая переменная $\psi(x)$ и сопряженный ей импульс $\pi(x)$ удовлетворяют каноническому перестановочному соотношению

$$[\pi(x, t), \psi(y, t)]_{\pm} = -i\hbar\delta(x - y). \quad (1.3.17)$$

Нормировка свободных полей определяется так, чтобы удовлетворялось это соотношение.

Поскольку связь энергии E и частоты ω записывается в виде $\hbar\omega$, обратная температура β определяется соотношением

$$(1/k_B T) E = \beta\omega, \quad (1.3.18)$$

откуда

$$\beta = \hbar/k_B T. \quad (1.3.19)$$

При рассмотрении электромагнетизма выражения для x_0 (1.3.1), k_0 (1.3.2) и ∂^0 (1.3.7) удобно несколько видоизменить, записав их в виде

$$x_0 = ct, \quad k_0 = \frac{1}{c}\omega, \quad \partial^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.3.20)$$

Такие обозначения используются в гл. 8 и 11; при этом нормировка всех полей также изменяется благодаря множителю c . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\chi\partial^{\mu}\chi, \quad (1.3.21)$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}[c^{-2}(\partial\chi/\partial t)^2 - (\nabla\chi)^2]. \quad (1.3.22)$$

Отсюда находим

$$\pi(x) \equiv c^{-1}\partial^0\chi = c^{-2}\partial\chi/\partial t, \quad (1.3.23)$$

что приводит к выражению

$$\left[\chi(\mathbf{x}, t), \frac{\partial\chi}{\partial t}(\mathbf{y}, t)\right] = ic^2\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.3.24)$$

Четырехмерный вектор-потенциал $A_\mu(x)$ определяется соотношениями

$$A_\mu(x) = \begin{cases} A_i(x) & (\mu = i), \\ \varphi(x) & (\mu = 0). \end{cases} \quad (1.3.25)$$

При выводе формул используются рационализованные единицы Хевисайда—Лоренца (система СИ), которые затем переводятся в единицы Гаусса (система СГС) для практических приложений. Тогда ток j_μ в гл. 8 и 11 определяется так, чтобы удовлетворялось уравнение Максвелла

$$-\partial^\nu F_{\nu\mu} = j_\mu, \quad [(1.3.26)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.3.27)$$

Следовательно, j_0 имеет смысл плотности заряда ρ , а ток \mathbf{j} включает множитель c^{-1} по сравнению с обычным определением.

Физические поля обозначаются верхним индексом нуль (например, χ^0 , φ^0 и т. п.).

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ МНОГИХ ТЕЛ

2.1. Представление чисел заполнения; операторы рождения и уничтожения

Классификация одночастичных состояний и волновые пакеты. Рассмотрим систему частиц, для которых одночастичные состояния классифицируются посредством дискретного индекса $i = 1, 2, 3, \dots$. Для выяснения его физического смысла следует напомнить, что, согласно волновой механике, состояние одной частицы описывается волновой функцией $\psi(x)$, которая должна быть нормируемой:

$$\int d^3x |\psi(x)|^2 < \infty. \quad (2.1.1)$$

Таким образом, $\psi(x)$ не может быть плоской волной, а является волновым пакетом. В этой книге термин «волновой пакет» используется для обозначения любой локализованной в пространстве волновой функции. В частности, волновые функции электронов, локализованных вблизи узлов решетки в кристалле, также считаются волновыми пакетами.

Любая нормируемая функция $\psi(x)$ может быть разложена следующим образом:

$$\psi(x) = \sum_i c_i g_i(x), \quad (2.1.2)$$

где функции $g_i(x)$ образуют счетное множество $\{g_i(x); i = 1, 2, \dots\}$ ортонормированных функций:

$$\int d^3x g_i^*(x) g_j(x) = \delta_{ij}. \quad (2.1.3)$$

Хорошо известным примером полного ортонормированного набора $\{g_i\}$ является система волновых функций гармонического осциллятора, классифицируемых посредством главного квантового числа. Коэффициенты разложения c_i в (2.1.2) могут зависеть от времени. Если частица обладает спином, необходим еще один индекс, классифицирующий спиновые состояния. В этом случае предполагается, что индекс i классифицирует как ортонормированные волновые функции, так и спиновые состояния. При этом все одночастичные состояния удается классифицировать дискретным индексом i .

Классификация многочастичных состояний и числовые последовательности. Рассмотрим состояние системы многих тел. Число частиц, занимающих i -е одночастичное состояние, обозначим через n_i . Тогда состояние системы многих тел будет определено, если задать n_i для всех значений i . Такое состояние обозначается $|n_1, n_2, \dots\rangle$; объединяя все такие состояния, образуем множество $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\}$. Если числам n_i разрешено принимать любые неотрицательные целые значения, то частицы называются бозонами. Если же числа n_i могут принимать лишь значения 0 или 1, то частицы называются фермионами. Заметим, что частицы указанных двух типов не являются единственно возможными в рамках квантовой теории поля. Принято говорить, что частицы, отличающиеся от бозонов и фермионов, подчиняются так называемой парастатистике. Но в этой книге мы рассматриваем только бозоны и фермионы.

Операторы уничтожения и рождения для бозонов. Рассмотрим сначала систему бозонов и введем оператор уничтожения α_i и оператор рождения α_i^\dagger с помощью соотношений

$$\alpha_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = n_i^{1/2} |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle, \quad (2.1.4)$$

$$\alpha_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = (n_i + 1)^{1/2} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (2.1.5)$$

соответственно. В пределах множества $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\}$ можно перейти от любого заданного состояния к любому другому с помощью повторного действия операторов рождения и уничтожения.

Из соотношений (2.1.4) и (2.1.5) можно получить в качестве следствия еще одно соотношение

$$N_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = n_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle, \quad (2.1.6)$$

где оператор N_i определяется следующим образом:

$$N_i = \alpha_i^\dagger \alpha_i \text{ (суммирование по } i \text{ нет)}. \quad (2.1.7)$$

Этот оператор называется оператором числа заполнения состояния i ; тогда оператор

$$N = \sum_i N_i \quad (2.1.8)$$

имеет смысл оператора полного числа частиц.

Соотношения (2.1.4) и (2.1.5) приводят также к следующим равенствам:

$$[\alpha_i, \alpha_j^\dagger] |n_1, n_2, \dots\rangle = \delta_{ij} |n_1, n_2, \dots\rangle, \quad (2.1.9)$$

$$[\alpha_i, \alpha_j] |n_1, n_2, \dots\rangle = 0, \quad (2.1.10)$$

$$[\alpha_i^\dagger, \alpha_j^\dagger] |n_1, n_2, \dots\rangle = 0. \quad (2.1.11)$$

Операторы уничтожения и рождения для фермионов. Рассмотрим далее систему фермионов. Операторы уничтожения и рождения для нее вводятся посредством следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \alpha_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle &= \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } n_i = 0, \\ \eta(n_1, \dots, n_{i-1}) |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle & \text{при } n_i = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle &= \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } n_i = 1, \\ \eta(n_1, \dots, n_{i-1}) |n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle & \text{при } n_i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Фазовый множитель $\eta(n_1, \dots, n_{i-1})$ выбирается в виде

$$\eta(n_1, \dots, n_{i-1}) = (-1)^{\sum_{j < i} n_j}. \quad (2.1.14)$$

Такой выбор упрощает операцию $[\alpha_i, \alpha_j^\dagger]_+$, которая определяется соотношением

$$[A, B]_+ = AB + BA. \quad (2.1.15)$$

Действительно, полагая для определенности $i > j$, из (2.1.12) и (2.1.13) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j^\dagger |n_1, \dots, n_j, \dots, n_i, \dots\rangle &= \\ &= \begin{cases} (-1)^{M+1} |n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle & \text{при } n_j = 0, n_i = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

а также

$$\begin{aligned} \alpha_j^\dagger \alpha_i |n_1, \dots, n_j, \dots, n_i, \dots\rangle &= \\ &= \begin{cases} (-1)^M |n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle & \text{при } n_j = 0, n_i = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

где

$$M \equiv \sum_{j \leq l < i} n_l. \quad (2.1.18)$$

Рассмотрев по аналогии случаи $i < j$ и $i = j$, нетрудно получить

$$[\alpha_i, \alpha_j^\dagger]_+ |n_1, n_2, \dots\rangle = \delta_{ij} |n_1, n_2, \dots\rangle, \quad (2.1.19)$$

$$[\alpha_i, \alpha_j]_+ |n_1, n_2, \dots\rangle = 0, \quad (2.1.20)$$

$$[\alpha_i^\dagger, \alpha_j^\dagger]_+ |n_1, n_2, \dots\rangle = 0 \quad (2.1.21)$$

при любых значениях i и j . Оператор

$$N_i = \alpha_i^\dagger \alpha_i \text{ (суммирования по } i \text{ нет)} \quad (2.1.22)$$

называется оператором числа заполнения состояния i ; его действие определяется соотношением

$$N_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = n_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle \quad (2.1.23)$$

Оператор полного числа частиц определяется равенством

$$N = \sum_i N_i. \quad (2.1.24)$$

2.2. Унитарно неэквивалентные представления

Несчетность множества $\{|n_1, \dots\rangle\}$. Существенное свойство множества $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\}$ состоит в его несчетности. Проще всего убедиться в этом в случае системы фермионов, для которой $n_i = 0$ или 1. Используя двоичную систему счисления, рассмотрим набор чисел $\{A = 0, n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}$, в котором $n_i = 0$ или 1. Этот набор чисел заполняет интервал $(0, 1)$ вещественной оси и находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $\{|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle\}$. Отсюда следует, что множество $\{|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle\}$ не является счетным. Этот вывод, очевидно, остается справедливым и для системы бозонов.

Унитарно неэквивалентные представления. Ввиду несчетности множества $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\}$ оно не может быть использовано в качестве базиса сепарабельного¹⁾ гильбертова пространства. Для построения сепарабельного гильбертова пространства с помощью элементов множества $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\}$ следует выбрать счетное подмножество и использовать его в качестве базиса гильбертова пространства. Но существует бесконечно много способов выбора таких счетных подмножеств. Если какие-либо два различных подмножества можно использовать в качестве базиса представлений для операторов $(\alpha_i, \alpha_i^\dagger; i = 1, 2, \dots)$, то эти два представления являются *унитарно неэквивалентными по отношению друг к другу* в том смысле, что вектор одного представления не является суперпозицией базисных векторов другого представления. В этом состоит причина очень глубокого различия между ситуациями в обычной квантовой механике и квантовой теории поля. В квантовой механике, которая является квантовой теорией для

¹⁾ Пространство \mathcal{H} называется сепарабельным, если оно содержит счетный базис $\{\xi_n\}$, такой что любой вектор ξ в \mathcal{H} может быть с произвольной точностью аппроксимирован линейной комбинацией векторов ξ_n (т. е. $\sum_n c_n \xi_n$). Это означает, что для любого ξ из \mathcal{H} и любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{c_n\}$, такая, что $|\xi - \sum_n c_n \xi_n| < \varepsilon$ при произвольном ε .

конечного числа канонических переменных, выбор представлений для этих переменных не вызывает затруднений: все возможные представления унитарно эквивалентны друг другу [1]. Но в случае квантовой теории поля ситуация резко меняется¹⁾, что, как показано в последующих разделах, приводит к далеко идущим следствиям.

2.3. Пространство Фока

[0]-множество и вакуум. На первый взгляд кажется вероятным, что множество $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\}$ излишне велико для описания реальных физических систем. Ведь в конечном итоге во всех экспериментах возбуждается лишь конечное число квантов, хотя это число и может быть сколь угодно велико. Поэтому можно предположить, что для описания физических процессов достаточно следующего подмножества:

$$\{ |0\rangle\text{-множество} = \{ |n_1, n_2, \dots\rangle; \sum n_i \text{ — конечное число} \}. \quad (2.3.1)$$

Это множество содержит состояние, в котором частицы полностью отсутствуют ($n_i = 0$ для всех i); это состояние называется вакуумом и обозначается $|0\rangle$:

$$|0\rangle = |0, 0, \dots\rangle. \quad (2.3.2)$$

С другой стороны, $[0]$ -множество не содержит многих состояний, которые имелись в исходном множестве $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\}$; например, в $[0]$ -множестве отсутствует, очевидно, состояние с $n_i = 1$ для всех i .

Счетность $[0]$ -множества. Докажем, что $[0]$ -множество является счетным. Поскольку сумма $\sum n_i$ конечна, для любого элемента $[0]$ -множества можно найти целое число m , такое, что $n_i = 0$ при $i > m$, причем $n_m \neq 0$. Кроме того, каждому элементу $[0]$ -множества можно поставить в соответствие второе целое число s , такое, что $\sum n_i = s$. Тогда для любого значения целого числа ms имеется конечное число соответствующих элементов $[0]$ -множества, которые поэтому можно упорядочить. Точнее, общий элемент $[0]$ -множества можно представить в виде

$$\xi_a \quad (a = 1, 2, \dots), \quad (2.3.3)$$

где при возрастании a значение ms возрастает или остается неизменным. Таким образом, доказана счетность $[0]$ -множества, которое может быть теперь задано в виде $\{\xi_a; a = 1, 2, \dots\}$.

¹⁾ Проблема унитарно неэквивалентных представлений канонических коммутаторов возникла в модели Ван Хова [2]. Детальный математический анализ этой проблемы впервые дал Фридрихс [3]; дальнейшие результаты были получены Уайтманом и др. [4].

Построение [0]-множества на вакууме. Векторы [0]-множества строятся посредством повторного применения операторов рождения α_i^\dagger к вакуумному состоянию. В случае системы бозонов вектор $|n_1, n_2, \dots\rangle$ записывается в виде

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i (n_i!)^{-1/2} (\alpha_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle, \quad (2.3.4)$$

а в случае системы фермионов — в виде

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \alpha_i^\dagger |0\rangle, \quad (2.3.5)$$

где \prod' означает, что индекс i пробегает только те значения, для которых $n_i = 1$. Кроме того, операторы α_i^\dagger располагаются слева направо в соответствии с возрастанием значения i .

Внутренние произведения. Введем теперь сопряженные векторы $\langle n_1, n_2, \dots|$ и предположим, что определены их внутренние произведения с исходными векторами. Обозначим эти внутренние произведения через $\langle n'_1, n'_2, \dots|n_1, n_2, \dots\rangle$. В частности, вектор, сопряженный вакууму, обозначается $\langle 0|$, и предполагается, что

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (2.3.6)$$

Операции α_i^\dagger и α_i определяются так, что α_i эрмитово сопряжена α_i^\dagger . Тогда из соотношений (2.1.4) и (2.1.5) следует

$$\langle n_1, \dots, n_i, \dots| \alpha_i^\dagger = n_i^{1/2} \langle n_1, \dots, n_i - 1, \dots|, \quad (2.3.7)$$

$$\langle n_1, \dots, n_i, \dots| \alpha_i = (n_i + 1)^{1/2} \langle n_1, \dots, n_i + 1, \dots| \quad (2.3.8)$$

для системы бозонов. Тогда имеем

$$\langle n_1, n_2, \dots| = \langle 0| \prod_i (n_i!)^{-1/2} (\alpha_i)^{n_i}. \quad (2.3.9)$$

Заметим, что в силу соотношений (2.1.4) и (2.3.7) имеем

$$\alpha_i |0\rangle = 0, \quad (2.3.10)$$

$$\langle 0| \alpha_i^\dagger = 0. \quad (2.3.11)$$

Кроме того, из соотношений (2.1.4) и (2.1.5) следует

$$\prod_i (1/n_i!) (\alpha_i)^{n_i} (\alpha_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle = |0\rangle. \quad (2.3.12)$$

Используя соотношения (2.3.10)—(2.3.12), получаем

$$\langle n'_1, n'_2, \dots|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \delta_{n_i n'_i}, \quad (2.3.13)$$

откуда следует, что $[0]$ -множество ортонормированно. Аналогичное свойство может быть доказано и для системы фермионов, для которой

$$\langle n_1, n_2, \dots | = \langle 0 | \prod_i \alpha_i; \quad (2.3.14)$$

заметим, что операторы α_i стоят здесь справа налево в соответствии с возрастанием значения i .

Используя обозначение ξ_a (2.3.3), условие ортонормированности (2.3.13) можно записать просто в виде

$$(\xi_b, \xi_a) = \delta_{ab}. \quad (2.3.15)$$

Рассмотрим далее два вектора

$$\xi = \sum_a c_a \xi_a, \quad \xi' = \sum_a c'_a \xi_a;$$

их внутреннее произведение (ξ, ξ') определяется выражением

$$(\xi, \xi') = \sum_a \sum_b c_a^* c'_b (\xi_a, \xi_b) = \quad (2.3.16)$$

$$= \sum_a \overline{c_a^* c'_a}. \quad (2.3.17)$$

Норма вектора ξ определяется как $(\xi, \xi)^{1/2}$ и обозначается ниже через $|\xi|$.

Пространство Фока. Если определить линейное пространство соотношением

$$\mathcal{H}[\alpha] = \left\{ \xi = \sum_a^\infty c_a \xi_a; \quad \sum_a |c_a|^2 - \text{конечное число} \right\}, \quad (2.3.18)$$

то такое пространство сепарабельно [5]. Это гильбертово пространство называется пространством Фока [6]. Здесь вектор $\xi = \sum_{a=1}^\infty c_a \xi_a$ определяется как предел (при $N \rightarrow \infty$) последовательности векторов $\xi^N = \sum_{a=1}^N c_a \xi_a$, которая является последовательностью Коши, сумма $\sum_{a=1}^\infty |c_a|^2$ конечна. Иными словами, $|\xi_N - \xi_{N'}|^2$ можно сделать меньше любой сколь угодно малой величины ε при выборе достаточно больших значений N и N' . Из выражений (2.3.4) и (2.3.5) следует, что, действуя всеми возможными полиномами по α_i^\dagger на вакуум, получаем множество

$$D = \left\{ \sum_{a=1}^N c_a \xi_a; \quad N - \text{конечное целое число} \right\}, \quad (2.3.19)$$

которое является плотным¹⁾ в $\mathcal{H}[\alpha]$. По этой причине процесс,

¹⁾ Множество D называют плотным в нормированном векторном пространстве \mathcal{H} , если для каждого вектора ξ в \mathcal{H} и любого $\varepsilon > 0$ существует вектор ζ в D , такой, что $|\xi - \zeta| < \varepsilon$. Интуитивно ясно, что D «почти заполняет» \mathcal{H} . Например, множество рациональных чисел плотно во всем множестве вещественных чисел.

используемый при построении $\mathcal{H}[\alpha]$, называют «построением пространства с помощью циклического действия операторов рождения на вакуум». Детальное математическое описание построения гильбертова пространства не входит в задачи этой книги, и мы адресуем читателя к работам [4, 5].

Вакуум в пространстве Фока. Вакуумное состояние $|0\rangle$, очевидно, принадлежит к фоковскому пространству $\mathcal{H}[\alpha]$ и удовлетворяет условию

$$\alpha_i |0\rangle = 0 \text{ для всех } i. \quad (2.3.20)$$

Кроме того, если вектор ξ из $\mathcal{H}[\alpha]$ удовлетворяет условию $\alpha_i \xi = 0$ для всех i , то этот вектор ξ связан с вакуумным состоянием соотношением $\xi = c|0\rangle$, где c — некоторое c -число.

Перестановочные соотношения. Соотношения (2.1.9)—(2.1.11), а также (2.1.19)—(2.1.21) приводят к следующим следствиям:

$$\langle a | [\alpha_i, \alpha_j^\dagger]_{\pm} | b \rangle = \delta_{ij} \langle a | b \rangle, \quad (2.3.21)$$

$$\langle a | [\alpha_i, \alpha_j]_{\pm} | b \rangle = \langle a | [\alpha_i^\dagger, \alpha_j^\dagger]_{\pm} | b \rangle = 0, \quad (2.3.22)$$

где $|a\rangle$ и $|b\rangle$ — любые два вектора, принадлежащие плотному множеству D . Здесь использованы обозначения

$$[A, B]_{\pm} = AB \pm BA; \quad (2.3.23)$$

$[A, B]_-$ и $[A, B]_+$ называются соответственно коммутатором и антикоммутатором операторов A и B . В соотношениях (2.3.21) и (2.3.22) коммутаторы используются в случае системы бозонов, а антикоммутаторы — в случае системы фермионов. Из этих соотношений следует, что $\mathcal{H}[\alpha]$ реализует представление операторов α_i , алгебраические свойства которых определяются соотношениями

$$[\alpha_i, \alpha_j^\dagger]_{\pm} = \delta_{ij}, \quad (2.3.24)$$

$$[\alpha_i, \alpha_j]_{\pm} = [\alpha_i^\dagger, \alpha_j^\dagger]_{\pm} = 0. \quad (2.3.25)$$

Операторы рождения и уничтожения для частицы, описываемой произвольным волновым пакетом. Напомним, что возможность классификации состояний посредством дискретного индекса i обусловлена тем фактом, что в одночастичном состоянии пространственное распределение описывается волновым пакетом, т. е. квадратично интегрируемой функцией в конфигурационном пространстве. Как видно из выражения (2.1.2), подобные волновые пакеты всегда могут быть выражены посредством счетного множества ортонормированных функций $g_i(\mathbf{x})$:

$$(g_i, g_j) \equiv \int d^3x g_i^*(\mathbf{x}) g_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij}. \quad (2.3.26)$$

Тогда внутреннее произведение таких волновых пакетов имеет вид

$$(f, g) = \int d^3x f^*(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}), \quad (2.3.27)$$

$$(f, g) = \sum_i c_i^* d_i, \quad (2.3.28)$$

если $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ выражаются формулами

$$f(\mathbf{x}) = \sum_i c_i g_i(\mathbf{x}), \quad (2.3.29)$$

$$g(\mathbf{x}) = \sum_i d_i g_i(\mathbf{x}). \quad (2.3.30)$$

Ввиду того что одночастичное состояние, связанное с волновым пакетом $g_i(\mathbf{x})$, представляется в фоковском пространстве $\mathcal{H}[\alpha]$ вектором $\alpha_i^\dagger |0\rangle$, вектор состояния, связанный с волновым пакетом $f(\mathbf{x})$, должен представляться некоторой суперпозицией вида $\sum_i c_i \alpha_i^\dagger |0\rangle$. Оператор рождения одной частицы в состоянии, описываемом пространственным распределением $f(\mathbf{x})$, обозначим через α_f^\dagger ; тогда

$$\alpha_f^\dagger = \sum_i c_i \alpha_i^\dagger. \quad (2.3.31)$$

Соответствующий эрмитово сопряженный оператор имеет смысл оператора уничтожения

$$\alpha_f = \sum_i c_i^* \alpha_i. \quad (2.3.32)$$

Тогда в силу условий (2.3.24) и (2.3.25) имеем

$$[\alpha_f, \alpha_g^\dagger]_{\pm} = (f, g), \quad (2.3.33)$$

$$[\alpha_f, \alpha_g]_{\pm} = [\alpha_f^\dagger, \alpha_g^\dagger]_{\pm} = 0. \quad (2.3.34)$$

Представление Фурье. Ввиду того что функции, описывающие волновые пакеты, имеют фурье-образы, удается сформулировать теорию фоковского пространства в терминах представления Фурье. Как будет показано в последующих главах, такая формулировка чрезвычайно полезна в практических приложениях.

Обозначим фурье-образ функции $g_i(\mathbf{x})$ через $g_i(\mathbf{k})$:

$$g_i(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (2.3.35)$$

Тогда условие ортонормировки (2.3.26) принимает вид

$$(g_i, g_j) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g_i^*(\mathbf{k}) g_j(\mathbf{k}) = \delta_{ij}. \quad (2.3.36)$$

Аналогично, вводя фурье-образы функций $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (2.3.37)$$

$$g(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (2.3.38)$$

можно записать их внутреннее произведение в виде

$$(f, g) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f^*(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}), \quad (2.3.39)$$

$$(f, g) = \sum_i c_i^* d_i. \quad (2.3.40)$$

С точки зрения фурье-анализа в качестве «базиса» в пространстве волновых пакетов удобно использовать плоские волны $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$. Но плоские волны не могут описывать пространственное распределение в одночастичных состояниях, поскольку они не являются нормируемыми, а также не образуют счетного множества. Удовлетворить обоим требованиям удастся только путем введения нормировки на δ -функцию, которое осуществляется следующим образом (для простоты мы не рассматриваем спиновые степени свободы).

Введем операторы $\alpha(\mathbf{k})$ с помощью соотношений

$$[\alpha(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{l})]_{\pm} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.3.41)$$

$$[\alpha(\mathbf{k}), \alpha(\mathbf{l})]_{\pm} = [\alpha^\dagger(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{l})]_{\pm} = 0. \quad (2.3.42)$$

Поскольку δ -функция определена только в смысле теории обобщенных функций, приведенные выше соотношения следует понимать в том же смысле, а именно

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^{3/2}} f^*(\mathbf{k}) g(\mathbf{l}) [\alpha(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{l})]_{\pm} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f^*(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}) = (f, g) \quad (2.3.43)$$

и т. д., где $f(\mathbf{k})$ и $g(\mathbf{l})$ — соответствующие пробные функции. Таким образом, мы приходим к необходимости отождествления

$$\alpha_f^\dagger = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k f(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}), \quad (2.3.44)$$

откуда

$$[\alpha_f, \alpha_g^\dagger]_{\pm} = (f, g), \quad (2.3.45)$$

$$[\alpha_f, \alpha_g]_{\pm} = [\alpha_f^\dagger, \alpha_g^\dagger]_{\pm} = 0. \quad (2.3.46)$$

Эти соотношения согласуются с (2.3.33) и (2.3.34); на этом основании α_f^\dagger рассматривается как оператор рождения ча-

стицы с пространственным распределением $f(\mathbf{x})$. Сравнивая выражение (2.3.31) с (2.3.44), окончательно получаем

$$\alpha_i^\dagger = (2\pi)^{-3/2} \int a^3 k g_i(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}). \quad (2.3.47)$$

Это выражение согласуется с исходным определением α_i^\dagger , согласно которому α_i^\dagger является оператором рождения частицы в состоянии, описываемом пространственным распределением $g_i(\mathbf{x})$.

Следует заметить, что операторы $\alpha(\mathbf{k})$ и $\alpha^\dagger(\mathbf{k})$ не определены на векторах фоковского пространства: при действии на векторы фоковского пространства они порождают состояния с бесконечной нормой. Рассмотрим, например, вектор $|\mathbf{k}\rangle \equiv \alpha^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$; соответствующая норма для него определяется внутренним произведением $\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = \delta^{(3)}(0)$, которое бесконечно велико. В этом и состоит нормировка на δ -функцию, о которой упоминалось выше. Поэтому операторы $\alpha(\mathbf{k})$ не реализуются в нашем гильбертовом пространстве; польза от их введения состоит в их связи с фурье-представлением оператора α_i^\dagger , которое дается выражением (2.3.47).

Заключительное замечание. В заключение заметим, что фоковское пространство в этом разделе строилось чисто эмпирически; нам нигде не пришлось говорить о специфике динамического поведения рассматриваемой системы. Последние три раздела можно рассматривать как формулировку языка квантовой теории, на котором можно описывать данную систему. Этот «язык», а точнее фоковское пространство можно, следовательно, использовать во всех случаях, когда мы имеем дело с квантовыми системами, состояния которых описываются последовательностями чисел. Поэтому построенная выше общая схема применима в столь различных областях, как физика твердого тела и физика высоких энергий.

2.4. Некоторые примеры унитарно неэквивалентных представлений

В предыдущих разделах было показано, что, хотя множество всех возможных состояний вида $|n_1, n_2, \dots\rangle$ несчетно, в качестве базиса нашего сепарабельного гильбертова пространства можно использовать $|0\rangle$ -множество. Гильбертово пространство такого вида называется пространством Фока, причем это пространство строилось путем циклического действия оператора α_i^\dagger на вакуум. Поэтому алгебраические соотношения (2.3.24), (2.3.25) сами по себе не могут однозначно определять представления α_i (даже с точностью до унитарной эквивалентности); необходимо еще определить вакуумное состояние. Проблема выбора представления алгебраических соотношений (2.3.24) и (2.3.25) очень сложна.

Преобразование Боголюбова бозонных операторов. Проиллюстрируем унитарно неэквивалентные представления на конкретном примере, рассмотрев два набора бозонных операторов уничтожения $\alpha(\mathbf{k})$ и $\beta(\mathbf{k})$. Следуя соображениям, изложенным в предыдущих трех разделах, построим $[0]$ -множество и соответствующее фоковское пространство, которое обозначим через $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Вакуумное состояние $|0\rangle$ в нем удовлетворяет соотношениям

$$\alpha(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \beta(\mathbf{k})|0\rangle = 0. \quad (2.4.1)$$

Алгебраические свойства операторов $\alpha(\mathbf{k})$ и $\beta(\mathbf{k})$ даются соотношениями

$$[\alpha(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{l})] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.4.2)$$

$$[\beta(\mathbf{k}), \beta^\dagger(\mathbf{l})] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}); \quad (2.4.3)$$

остальные коммутаторы обращаются в нуль.

Введем далее операторы $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$ с помощью следующих соотношений:

$$a(\mathbf{k}) \doteq c_k \alpha(\mathbf{k}) - d_k \beta^\dagger(-\mathbf{k}), \quad (2.4.4)$$

$$b(\mathbf{k}) = c_k \beta(\mathbf{k}) - d_k \alpha^\dagger(-\mathbf{k}). \quad (2.4.5)$$

Здесь численные коэффициенты c и d — вещественные функции \mathbf{k}^2 ; они удовлетворяют соотношению

$$c_k^2 - d_k^2 = 1. \quad (2.4.6)$$

Последнее соотношение гарантирует, что $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$ имеют те же алгебраические свойства, что и $\alpha(\mathbf{k})$ и $\beta(\mathbf{k})$, т. е.

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l})] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.4.7)$$

$$[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.4.8)$$

а все остальные коммутаторы обращаются в нуль. Иными словами, преобразование, определенное равенствами (2.4.4) и (2.4.5), является каноническим; оно носит название преобразования Боголюбова [7].

Следуя соображениям, изложенным в предыдущем разделе, введем операторы волновых пакетов a_i и b_i :

$$a_i^\dagger = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k g_i(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) \text{ и т. д.} \quad (2.4.9)$$

Действие этих операторов на векторы в $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ определено соотношениями (2.4.4) и (2.4.5).

Упростим ситуацию, считая коэффициенты c_k положительными. Тогда в силу (2.4.6) можно положить

$$c_k = \text{ch } \theta_k, \quad d_k = \text{sh } \theta_k. \quad (2.4.10)$$

Введем далее оператор

$$G_-(\theta) = \exp [A(\theta)], \quad (2.4.11)$$

где

$$A(\theta) = \int d^3k \theta_k [\alpha(\mathbf{k}) \beta(-\mathbf{k}) - \beta^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k})], \quad (2.4.12)$$

так что

$$[\alpha(\mathbf{k}), A(\theta)] = -\theta_k \beta^\dagger(-\mathbf{k}), \quad (2.4.13)$$

$$[\beta^\dagger(-\mathbf{k}), A(\theta)] = -\theta_k \alpha(\mathbf{k}). \quad (2.4.14)$$

Повторно применяя эти соотношения, получаем

$$G^{-1}(\theta) \alpha(\mathbf{k}) G(\theta) = \alpha(\mathbf{k}) \operatorname{ch} \theta_k - \beta^\dagger(-\mathbf{k}) \operatorname{sh} \theta_k, \quad (2.4.15)$$

откуда, используя (2.4.4), имеем

$$a(\mathbf{k}) = G^{-1}(\theta) \alpha(\mathbf{k}) G(\theta). \quad (2.4.16)$$

Аналогично можно показать, что

$$b(\mathbf{k}) = G^{-1}(\theta) \beta(\mathbf{k}) G(\theta). \quad (2.4.17)$$

Последние два соотношения позволяют предположить, что преобразование Боголюбова (соотношения (2.4.4) и (2.4.5)) является унитарным. Для более тщательного рассмотрения этого вопроса вычислим матричные элементы $G(\theta)$, начав с вакуумного среднего от $G^{-1}(\theta)$:

$$f_0(\theta) = \langle 0 | G^{-1}(\theta) | 0 \rangle. \quad (2.4.18)$$

Для вычисления этой величины заменим параметр $\theta(\mathbf{k})$ на $\theta(\mathbf{k}) + \varepsilon \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l})$ с произвольным \mathbf{l} . Изменение $f_0(\theta)$ за счет указанного изменения параметра обозначим через $\delta f(\theta; \mathbf{l})$. Тогда функциональная производная определяется равенством

$$\frac{\delta}{\delta \theta_l} f_0(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \delta f(\theta; \mathbf{l}). \quad (2.4.19)$$

Но, согласно (2.4.11), имеем

$$\frac{\delta}{\delta \theta_l} f_0(\theta) = -\langle 0 | \alpha(\mathbf{l}) \beta(-\mathbf{l}) G^{-1}(\theta) | 0 \rangle \quad (2.4.20)$$

или

$$\frac{\delta}{\delta \theta_l} f_0(\theta) = \langle 0 | G^{-1}(\theta) \beta^\dagger(-\mathbf{l}) \alpha^\dagger(\mathbf{l}) | 0 \rangle. \quad (2.4.21)$$

Поскольку $G^{-1}\theta = G(-\theta)$, получаем

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{l}) \beta(-\mathbf{l}) G^{-1}(\theta) &= G^{-1}(\theta) G^{-1}(-\theta) \alpha(\mathbf{l}) \beta(-\mathbf{l}) G(-\theta) = \\ &= G^{-1}(\theta) [\alpha(\mathbf{l}) \operatorname{ch} \theta_l + \beta^\dagger(-\mathbf{l}) \operatorname{sh} \theta_l] [\beta(-\mathbf{l}) \operatorname{ch} \theta_l + \\ &\quad + \alpha^\dagger(\mathbf{l}) \operatorname{sh} \theta_l], \quad (2.4.22) \end{aligned}$$

где использовано соотношение (2.4.15), с заменой θ_h на $-\theta_h$. Тогда из (2.4.20) получаем

$$\frac{\delta}{\delta\theta_l} f_0(\theta) = -\delta^{(3)}(0) \operatorname{sh} \theta_l \operatorname{ch} \theta_l f_0(\theta) - \operatorname{sh}^2 \theta_l \langle 0 | G^{-1}(\theta) \beta^+(-\mathbf{l}) \alpha^+(\mathbf{l}) | 0 \rangle, \quad (2.4.23)$$

а из (2.4.21) находим

$$\frac{\delta}{\delta\theta_l} f_0(\theta) = -\delta^{(3)}(0) \operatorname{th} \theta_l f_0(\theta). \quad (2.4.24)$$

Здесь

$$\delta^{(3)}(0) = \lim_{k \rightarrow 0} \delta(\mathbf{k}). \quad (2.4.25)$$

Поскольку $\delta\theta_h/\delta\theta_l = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l})$, решение уравнения (2.4.24) с начальным условием $f_0(0) = 1$ имеет вид

$$f_0(\theta) = \exp\left(-\delta^{(3)}(0) \int d^3k \ln \operatorname{ch} \theta_k\right). \quad (2.4.26)$$

Величина $A(\theta)$ в (2.4.12) содержит только пары операторов ($\alpha\beta$ и $\beta^+\alpha^+$), поэтому достаточно ограничиться изучением лишь следующих матричных элементов:

$$f_n(\theta; \mathbf{l}) = \langle 0 | [\alpha(\mathbf{l}) \beta(-\mathbf{l})]^n G^{-1}(\theta) | 0 \rangle. \quad (2.4.27)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\theta_l} f_n(\theta; \mathbf{l}) &= -\langle 0 | [\alpha(\mathbf{l}) \beta(-\mathbf{l})]^n [\alpha(\mathbf{l}) \beta(-\mathbf{l}) - \beta^+(-\mathbf{l}) \alpha^+(\mathbf{l})] G^{-1}(\theta) | 0 \rangle = \\ &= -f_{n+1}(\theta; \mathbf{l}) + n^2 [\delta^{(3)}(0)]^2 f_{n-1}(\theta; \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$f_n(\theta; \mathbf{l}) = n! [\delta^{(3)}(0)]^n \exp\left(-\delta^{(3)}(0) \int d^3k \ln \operatorname{ch} \theta_k\right) (\operatorname{th} \theta_l)^n, \quad (2.4.29)$$

откуда следует

$$|0\rangle \equiv G^{-1}(\theta) |0\rangle = \quad (2.4.30)$$

$$= f_0(\theta) \exp\left(\delta^{(3)}(0) \int d^3k \alpha^+(\mathbf{k}) \beta^+(-\mathbf{k}) \operatorname{th} \theta_k\right) |0\rangle, \quad (2.4.31)$$

где $f_0(\theta)$ определено в (2.4.26).

Если учесть теперь тот факт, что величина $\delta^{(3)}(0)$ бесконечна (а следовательно, $f_0(\theta) = 0$), то из (2.4.31) видно, что при разложении $|0\rangle$ по базисным векторам $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ каждый коэффициент разложения обращается в нуль, так что $|0\rangle$ не принадлежит $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Иными словами, $G^{-1}(\theta)$ не отображает $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ на себя.

Заметим, что в силу (2.4.16) имеем

$$a(\mathbf{k}) |0\rangle = 0, \quad b(\mathbf{k}) |0\rangle = 0, \quad (2.4.32)$$

откуда следует, что $|0\rangle\rangle$ — вакуум в отношении действия операторов $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$. Предположим, что строится $\{0\}$ -множество, причем a_i^\dagger и b_i^\dagger — операторы рождения, а $\mathcal{H}[a, b]$ — соответствующее пространство Фока. В этом пространстве Фока имеется вакуумное состояние $|0\rangle\rangle$, удовлетворяющее равенству (2.4.32). Приведенные выше соображения показывают, что этот вакуум $|0\rangle\rangle$ не принадлежит $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Таким образом, $\mathcal{H}[a, b]$ и $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ — два унитарно неэквивалентных представления в том смысле, что в $\mathcal{H}[a, b]$ существует вектор, который нельзя представить в виде суперпозиции базисных векторов $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Фактически в рассматриваемом случае можно показать, что никакой вектор из $\mathcal{H}[a, b]$ не может быть представлен в виде линейной суперпозиции базисных векторов из $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Эта ситуация обычно описывается интуитивным утверждением об ортогональности пространств $\mathcal{H}[a, b]$ и $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$.

Причину этого явления можно уяснить, вспомнив формулу

$$\delta(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (2.4.33)$$

откуда интуитивно ясно, что

$$\delta^{(3)}(0) = (2\pi)^{-3} \times (\text{объем системы}). \quad (2.4.34)$$

На этом основании можно было бы сделать вывод, что в действительности упомянутая выше унитарная неэквивалентность может и не существовать, поскольку каждая система имеет конечные размеры. Но такая точка зрения представляется слишком оптимистичной. При изучении стационарной системы конечных размеров пришлось бы всерьез учитывать влияние ее границ. Как будет показано в последующих главах, существование этой границы обеспечивается благодаря наличию в системе некоторых коллективных мод. Граница ведет себя подобно макроскопическому объекту с поверхностной особенностью, причем такой объект также обладает бесконечным числом степеней свободы. В этом смысле стационарная система с естественной (самоподдерживающейся) границей существенно отличается от системы, искусственно ограниченной «ящиком».

Как указано в разд. 2.2, причина появления многих унитарно неэквивалентных представлений состоит в том, что множество $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\rangle$ является несчетным.

Полученные выше результаты не означают, что мы не можем определить действие операторов a_i и b_i на векторы в $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Действительно, как было показано выше, действие операторов a_i и b_i на векторы в $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ определяется соотношениями (2.4.4) и (2.4.5). То, что мы показали выше, сводится к утверждению, что каноническое преобразование (2.4.4) и (2.4.5) не реализуется с выполнением условия унитарности. Если гильбертово

пространство является пространством Фока $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$, то a_i и b_i не могут быть операторами уничтожения, поскольку в $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ не существует вакуума, связанного с операторами a_i и b_i .

Преобразование Боголюбова фермионных операторов. Случай фермионов может быть исследован аналогичным образом. Рассмотрим два набора фермионных операторов уничтожения $\alpha(\mathbf{k})$ и $\beta(\mathbf{k})$:

$$[\alpha(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{l})]_+ = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.4.35)$$

$$[\beta(\mathbf{k}), \beta^\dagger(\mathbf{l})]_+ = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.4.36)$$

$$[\alpha(\mathbf{k}), \beta(\mathbf{l})]_+ = [\alpha(\mathbf{k}), \beta^\dagger(\mathbf{l})]_+ = 0 \text{ и т. д.} \quad (2.4.37)$$

Повторяя рассуждения предыдущих разделов, построим пространство Фока $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Вакуум в нем удовлетворяет условиям $\alpha(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ и $\beta(\mathbf{k})|0\rangle = 0$. Введем далее операторы $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$ с помощью соотношений

$$a(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k}) \cos \theta_k - \beta^\dagger(-\mathbf{k}) \sin \theta_k, \quad (2.4.38)$$

$$b(\mathbf{k}) = \beta(\mathbf{k}) \cos \theta_k + \alpha^\dagger(-\mathbf{k}) \sin \theta_k, \quad (2.4.39)$$

где θ_k — функция k^2 . Это преобразование называется преобразованием Боголюбова [7]. Легко видеть, что $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$ удовлетворяют тем же алгебраическим соотношениям, что и $\alpha(k)$ и $\beta(k)$:

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l})]_+ = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.4.40)$$

$$[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})]_+ = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.4.41)$$

$$[a(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})]_+ = [a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})]_+ = 0 \text{ и т. д.} \quad (2.4.42)$$

Можно показать, что

$$a(\mathbf{k}) = G^{-1}(\theta) \alpha(\mathbf{k}) G(\theta), \quad (2.4.43)$$

$$b(\mathbf{k}) = G^{-1}(\theta) \beta(\mathbf{k}) G(\theta), \quad (2.4.44)$$

$$\text{где } G(\theta) = \exp[-A(\theta)], \quad (2.4.45)$$

причем

$$A(\theta) = \int d^3k \theta_k [\alpha(\mathbf{k}) \beta(-\mathbf{k}) - \beta^\dagger(-\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k})]. \quad (2.4.46)$$

Вычисление показывает, что

$$|0\rangle \equiv G^{-1}(\theta)|0\rangle = \quad (2.4.47)$$

$$= \bar{f}_0(\theta) \exp\left(\delta^{(3)}(0) \int d^3k \ln \{1 + \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \beta^\dagger(-\mathbf{k}) \operatorname{tg} \theta_k\}\right) |0\rangle. \quad (2.4.48)$$

$$\text{Здесь } \bar{f}_0(\theta) = \exp\left(\delta^{(3)}(0) \int d^3k \ln \cos \theta_k\right), \quad (2.4.49)$$

причем эта величина обращается в нуль ввиду бесконечности $\delta^{(3)}(0)$. Отсюда видно, что, в этом случае (как и в случае бозонов)

представления $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ и $\mathcal{H}[a, b]$ унитарно неэквивалентны друг другу, если только не выполняется условие $\theta_k = 0$ для всех \mathbf{k} . Несмотря на то что (2.4.47) приводит к равенству

$$a(\mathbf{k})|0\rangle\rangle = b(\mathbf{k})|0\rangle\rangle, \quad (2.4.50)$$

вектор $|0\rangle\rangle$ не принадлежит $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Поэтому $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$ не могут считаться операторами уничтожения, если в качестве гильбертова пространства выбрано $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Но действие операторов a_i и b_i на векторы в $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ определяется соотношениями (2.4.38) и (2.4.39).

Сдвиг бозонного поля. В качестве последнего примера рассмотрим набор операторов уничтожения бозонов $\alpha(\mathbf{k})$ и введем операторы $a(\mathbf{k})$ с помощью соотношения

$$a(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k}) + c_k, \quad (2.4.51)$$

где c -число c_k является функцией \mathbf{k} . Такое соотношение также называется преобразованием Боголюбова. Поскольку преобразование (2.4.51) индуцирует сдвиг бозонных операторов на c -число c_k , его часто называют сдвигом поля. Так как c_k является c -числовой функцией, операторы $a(\mathbf{k})$ удовлетворяют бозонным перестановочным соотношениям. Таким образом, сдвиг поля является каноническим преобразованием.

Легко видеть, что

$$a(\mathbf{k}) = G^{-1}(c) \alpha(\mathbf{k}) G(c), \quad (2.4.52)$$

где

$$G(c) = \exp\left(-\int d^3k [c_k^* \alpha(\mathbf{k}) - c_k \alpha^\dagger(\mathbf{k})]\right). \quad (2.4.53)$$

Используя формулу Бейкера—Хаусдорфа

$$e^A e^B = \exp\left\{A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \dots\right\}, \quad (2.4.54)$$

получаем

$$G^{-1}(c) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^3k |c_k|^2\right) \exp\left(-\int d^3k c_k \alpha^\dagger(\mathbf{k})\right) \times \\ \times \exp\left(\int d^3k c_k^* \alpha(\mathbf{k})\right). \quad (2.4.55)$$

Это приводит к соотношению

$$|0\rangle\rangle \equiv G^{-1}(c)|0\rangle = \quad (2.4.56)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^3k |c_k|^2\right) \exp\left(-\int d^3k c_k \alpha^\dagger(\mathbf{k})\right)|0\rangle. \quad (2.4.57)$$

Если имеет место равенство

$$\int d^3k |c_k|^2 = \infty, \quad (2.4.58)$$

представления $\mathcal{H}[\alpha]$ и $\mathcal{H}[a]$ унитарно неэквивалентны друг другу. Хотя вектор $|0\rangle\rangle$ удовлетворяет соотношению $a(\mathbf{k})|0\rangle\rangle = 0$, он не принадлежит $\mathcal{H}[\alpha]$. Поэтому, если мы выбрали в качестве пространства Фока $\mathcal{H}[\alpha]$, оператор $a(\mathbf{k})$ не может быть назван оператором уничтожения. Заметим, что равенство (2.4.58) имеет место, например, при выборе $c_h = c\delta(\mathbf{k})$.

Конденсация бозонов. Рассмотрим структуру состояния $|0\rangle\rangle$. Как видно из (2.4.57), это состояние (по крайней мере формально) соответствует суперпозиции состояний произвольного числа α -бозонов (это утверждение имеет лишь формальный смысл, если выполняется условие (2.4.58)). Можно интуитивно представлять себе состояние $|0\rangle\rangle$ как состояние, в котором конденсируются α -бозоны; подобное явление называется *конденсацией бозонов*. Можно сказать, что сдвиг поля (2.4.51) индуцирует конденсацию бозонов, даже если выполняется условие (2.4.58). Величина

$$\langle 0|a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})|0\rangle = |c_h|^2 \quad (2.4.59)$$

называется числом конденсированных бозонов с импульсом \mathbf{k} .

Интуитивно можно видеть, почему $\mathcal{H}[a]$ является унитарно неэквивалентным $\mathcal{H}[\alpha]$ при $c(\mathbf{k}) = c\delta(\mathbf{k})$. В этом случае пространственное распределение конденсированных бозонов является однородным (т. е. соответствующим $\mathbf{k} = 0$), а полное число конденсированных бозонов равно

$$d^3k |c(k)|^2 = c^2 \delta^{(3)}(0). \quad (2.4.60)$$

Из (2.4.34) видно, что плотность конденсированных бозонов равна

$$d_B \equiv \frac{1}{V} \int d^3k |c(k)|^2 = (2\pi)^{-3} c^2 (V - \text{объем}), \quad (2.4.61)$$

причем эта величина конечна, даже если объем V стремится к бесконечности. Интуитивно ясно, что для возможности создания локально наблюдаемых эффектов при конденсации бозонов плотность конденсированных бозонов d_B должна быть отлична от нуля. Если пространственное распределение конденсированных бозонов однородно, полное число конденсированных бозонов равно Vd_B и становится бесконечным, если бесконечно V . Поскольку векторы в пространстве Фока $\mathcal{H}[\alpha]$ практически не содержат состояний с бесконечным числом α -бозонов, интуитивно понятно, почему состояние $|0\rangle\rangle$ не может принадлежать $\mathcal{H}[\alpha]$.

Следует отметить, что действие $a(\mathbf{k})$ на векторы в $\mathcal{H}[\alpha]$ определяется соотношением (2.4.51), даже если выполняется равенство (2.4.58).

Заметим в заключение, что сдвиг поля вида (2.4.51) индуцирует так называемое когерентное состояние [8].

2.5. Представление физических частиц и динамическое отображение

Пространство Фока для физических частиц. Существование бесконечно большого числа представлений, унитарно не эквивалентных друг другу, приводит к вопросу о правильном выборе одного из них для данного пространства Фока. В квантовой теории в качестве исходного принимается положение, что гильбертово пространство содержит все наблюдаемые состояния. На этом основании мы требуем, чтобы гильбертово пространство было пространством Фока, связанным с частицами, наблюдаемыми

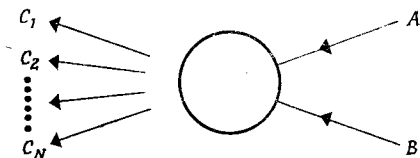


Рис. 2.1.

в эксперименте. Такие частицы носят название физических частиц или физических квантов. Таким образом, мы выбираем пространство Фока, построенное путем циклического действия операторов рождения *физических частиц* (или физических квантов) на физический вакуум, или, короче, мы используем представление физических частиц.

Полная энергия и энергия физических частиц. Чтобы выяснить поведение физических частиц, рассмотрим более детально измерение энергий в реакциях между частицами. В любой подобной реакции имеется некоторое количество сталкивающихся частиц (например, A и B) и определенное количество частиц c_1, \dots, c_N , покидающих область столкновения (рис. 2.1). Полная энергия системы, в которой происходит столкновение, определяется посредством измерения энергий падающих частиц A и B до их вхождения в область столкновения; при этом *полная энергия равна сумме энергий частиц A и B* . Если измерить также энергию частиц c_1, c_2, \dots, c_N после столкновения, то мы обнаружим, что сумма энергий этих частиц равна определенной выше полной энергии. Если мы хотим интерпретировать этот экспериментальный результат как закон сохранения энергии, то энергию следует определить как сумму энергий всех физических частиц, имеющих в данном состоянии. При таком определении неявно подразумевается, что *реакции между частицами происходят без затраты энергии взаимодействия*, что весьма необычно. В гл. 3 будет показано, каким образом такое предположение становится возможным.

В физике твердого тела энергетический спектр физических квантов может быть в принципе определен с помощью некоторых внешних воздействий. При этом измеряемая полная энергия оказывается равной сумме энергий возбужденных квантов. Итак, потребуем, чтобы энергия квантовой системы была равна сумме энергий всех физических частиц.

Свободный гамильтониан и оператор импульса для физических частиц. Пусть $\hbar\omega(\mathbf{k})$ — энергия одной физической частицы с импульсом $\hbar\mathbf{k}$. Тогда сформулированное выше требование означает, что

$$\begin{aligned} H_0 \alpha^\dagger(\mathbf{k}_1) \alpha^\dagger(\mathbf{k}_2) \dots \alpha^\dagger(\mathbf{k}_n) |0\rangle &= \\ &= \left(\hbar \sum_{i=1}^n \omega(\mathbf{k}_i) \right) \alpha^\dagger(\mathbf{k}_1) \alpha^\dagger(\mathbf{k}_2) \dots \alpha^\dagger(\mathbf{k}_n) |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} [H_0, \alpha^\dagger(\mathbf{k}_1)] \alpha^\dagger(\mathbf{k}_2) \dots \alpha^\dagger(\mathbf{k}_n) |0\rangle &= \\ &= \hbar\omega(\mathbf{k}_1) \alpha^\dagger(\mathbf{k}_1) \alpha^\dagger(\mathbf{k}_2) \dots \alpha^\dagger(\mathbf{k}_n) |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Здесь H_0 — оператор, собственные значения которого являются значениями энергии системы. Соотношение (2.5.2) верно для любого n , поэтому очевидно, что

$$[H_0, \alpha^\dagger(\mathbf{k})] = \hbar\omega(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}). \quad (2.5.3)$$

Поскольку энергия является вещественной величиной, H_0 — эрмитов оператор. Следовательно, беря эрмитово сопряжение от (2.5.3), получаем

$$[H_0, \alpha(\mathbf{k})] = -\hbar\omega(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}). \quad (2.5.4)$$

На основе (2.5.3), (2.5.4) и (2.5.1) находим

$$H_0 = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}). \quad (2.5.5)$$

Оператор H_0 называется свободным гамильтонианом физических частиц.

В терминах операторов рождения волновых пакетов α_f^\dagger , определенных равенством (2.3.44), имеем

$$[H_0, \alpha_f^\dagger] = \hbar (2\pi)^{-3/2} \int d^3k \omega(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}). \quad (2.5.6)$$

Действие H_0 на состояния волновых пакетов понимается следующим образом:

$$H_0 \alpha_f^\dagger |0\rangle = \hbar (2\pi)^{-3/2} \int d^3k \omega(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle, \quad (2.5.7)$$

$$H_0 \alpha_f^\dagger \alpha_g^\dagger |0\rangle = \hbar (2\pi)^{-3} \int d^3k \int d^3l [\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{l})] g(\mathbf{l}) f(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{l}) |0\rangle \quad (2.5.8)$$

и т. д. Из соотношения (2.5.8) становится очевидным линейный характер энергии. Поскольку H_0 не содержит членов взаимодействия, частицы, рождаемые посредством оператора $\alpha^\dagger(\mathbf{k})$, называют свободными.

С помощью аналогичных рассуждений можно найти оператор импульса \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \hbar \int d^3k k \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}). \quad (2.5.9)$$

Проведенное выше рассмотрение показывает, что, поскольку все наблюдаемые состояния частиц являются состояниями волновых пакетов, в нашем гильбертовом пространстве отсутствуют собственные состояния операторов H_0 и \mathbf{P} . Наблюдаемая энергия частицы в состоянии $|\alpha_g\rangle \equiv \alpha_g^\dagger|0\rangle$ определяется не каким-либо из собственных значений H_0 , а средним (ожидаемым) значением $\langle \alpha_g | H_0 | \alpha_g \rangle$. Но это обстоятельство не создает никаких трудностей с применением понятия энергии, так как (по крайней мере в принципе) среднее значение можно сделать сколь угодно близким к собственному значению H_0 , выбрав волновой пакет, очень близкий к плоской волне. Аналогичные соображения применимы к понятию импульса.

Гейзенберговские поля и уравнение Гейзенберга. Несмотря на то что наблюдаемые значения энергии системы определяются собственными значениями свободного гамильтониана H_0 , тем не менее если между частицами происходят какие-то реакции, то H_0 не может быть истинным гамильтонианом системы. Поэтому необходимы некоторые фундаментальные величины, определяющие динамику системы. Поскольку рассматривается квантовая система, эти фундаментальные величины являются операторами, действующими в нашем пространственно-временном мире. Обозначим эти операторы $\psi(x)$; они называются обычно гейзенберговскими полями. Тогда динамика системы определяется пространственным и временным изменением гейзенберговских полей.

Изменение полей $\psi(x)$ определяется некоторым уравнением, которое называется уравнением Гейзенберга. При рассмотрении некоторой системы весь теоретический анализ начинается с определения гейзенберговских полей и уравнения Гейзенберга. При этом требуется, чтобы любой оператор, появляющийся при анализе системы, выражался в виде линейной комбинации произведений гейзенберговских полей.

Гамильтониан для уравнения Гейзенберга. Мы требуем, чтобы все пространственно-временные преобразования генерировались некоторыми операторами. В частности, отсюда следует требование существования гамильтониана, генерирующего сдвиг во времени.

Этот гамильтониан обозначается через H . Тогда каноническое уравнение вида $i\hbar(\partial\psi/\partial t) = [\psi, H]$ является уравнением Гейзенберга. Для вычисления входящего в это уравнение коммутатора $[\psi, H]$ необходимо ввести предположение о том, что гейзенберговские поля удовлетворяют одновременным каноническим перестановочным соотношениям.

Представление физических частиц для гейзенберговских полей.

Если приведенные выше соображения объединить с утверждением, что наше гильбертово пространство является пространством Фока свободных физических частиц, то уравнение Гейзенберга должно решаться таким образом, чтобы гейзенберговские поля реализовались в пространстве Фока свободных физических частиц. Иными словами, уравнение Гейзенберга решается таким образом, чтобы гейзенберговские поля выражались через состояния некоторых свободных частиц, т. е. чтобы все матричные элементы $\langle a | \psi(x) | b \rangle$ для векторов $|a\rangle$ и $|b\rangle$, принадлежащих пространству Фока свободных частиц, были определены. Указанные свободные поля рассматриваются далее как свободные физические частицы, а пространство Фока является тогда представлением физических частиц для гейзенберговских полей. Таким образом, пространство Фока $\mathcal{H}[\alpha]$ можно определить, потребовав, чтобы гейзенберговские поля выражались через операторы рождения и уничтожения некоторых свободных частиц, которые являются свободными физическими частицами. В следующей главе будет показано, что это требование приводит к соотношению

$$\langle a | H | b \rangle = \langle a | H_0 | b \rangle + W_0 \langle a | b \rangle, \quad (2.5.10)$$

где W_0 — c -число, а $|a\rangle$ и $|b\rangle$ — векторы в пространстве $\mathcal{H}[\alpha]$, реализующем представление физических частиц. Заметим, что условие (2.5.10) не является столь строгим, как условие $H = H_0 + W_0$, поскольку оно требует, чтобы разбиение $H = H_0 + W_0$ осуществлялось только тогда, когда H реализуется в специальном представлении (а именно в пространстве Фока $\mathcal{H}[\alpha]$). Соотношения между матричными элементами, связанные с конкретным представлением, называются слабыми соотношениями. Поэтому соотношение (2.5.10) является слабым условием, которое можно использовать в качестве критерия для определения $\mathcal{H}[\alpha]$.

Самосогласованный метод. После того как задан гамильтониан H , мы сталкиваемся с дилеммой: хотя вычисление матричных элементов $\langle a | H | b \rangle$ требует знания пространства Фока $\mathcal{H}[\alpha]$, к которому принадлежат векторы $|a\rangle$ и $|b\rangle$, нам ничего не известно относительно физических частиц (а тем самым относительно $\mathcal{H}[\alpha]$) до тех пор, пока не решена вся задача. Причина возникновения этой дилеммы состоит в существовании бесконеч-

ного числа неприводимых представлений, унитарно неэквивалентных друг другу; подобная дилемма не возникает в случае квантовой механики с конечным числом канонических переменных. Эта дилемма относится к числу проблем, которые обычно разрешаются с помощью самосогласованного рассмотрения. В данном случае мы имеем дело с проблемой самосогласования между гамильтонианом H и выбором пространства Фока для физических частиц.

Самосогласованный подход состоит в следующем. Прежде всего с помощью различных физических соображений составляют набор «кандидатов» на роль физических полей, причем эти кандидаты классифицируются с помощью определенных параметров. Затем строят пространство $\mathcal{H}[\alpha]$, а неизвестные параметры определяют с помощью соотношения (2.5.10). Для примера рассмотрим гамильтониан для нуклонного гейзенберговского поля. В качестве начального набора физических частиц выберем изодублетное свободное дираковское поле, которое рассматривается как физический нуклон. Оставляя массу физического нуклона неопределенной, пробуем решить уравнение (2.5.10), используя одновременные канонические перестановочные соотношения. При этом мы обнаруживаем, что соотношение (2.5.10) не удовлетворяется при любом выборе массы физического нуклона. Тогда в набор физических полей вводится новый член, после чего можно убедиться в том, что соотношение (2.5.10) удовлетворяется. Новый член набора оказывается физическим дейтроном, представляющим собой составную частицу. В гл. 3 мы демонстрируем применение самосогласованного метода во всех деталях на примере одной разрешимой модели — так называемой $N\theta$ -модели.

В гл. 6 показано, что использование канонических перестановочных соотношений и так называемых соотношений Уорда—Такахаши во многих случаях значительно упрощает самосогласованные вычисления.

Некоторые простые примеры самосогласованных вычислений. Чтобы получить представление о самосогласованном подходе, рассмотрим гамильтониан, обладающий простой структурой. А именно рассмотрим гамильтониан вида

$$H = \hbar \int d^3k \{ \varepsilon_k \{ a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \} + v_k \{ a(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k}) + b^\dagger(-\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) \} \}, \quad (2.5.11)$$

где $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$ — гейзенберговские операторы, удовлетворяющие бозонным перестановочным соотношениям, ε_k и v_k — положительно определенные функции аргумента k^2 , причем $\varepsilon_k > v_k$. Конкретным примером подобной системы могут служить спиновые волны в антиферромагнетиках [9].

Поскольку гамильтониан (2.5.11) имеет вид, не совпадающий с видом свободного гамильтониана, $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$ не имеют смысла операторов уничтожения физических частиц.

Применяя преобразование Боголюбова (2.4.4) и (2.4.5), где $c_k = \text{ch } \theta_k$, $d_k = \text{sh } \theta_k$, можно записать гамильтониан (2.5.11) в другой форме

$$H = H_0 + W_0, \quad (2.5.12)$$

где

$$H_0 = \hbar \int d^3k \omega_k [\alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) + \beta^\dagger(\mathbf{k}) \beta(\mathbf{k})]; \quad (2.5.13)$$

здесь выбор θ_k произведен в виде

$$\text{ch } 2\theta_k = \frac{\epsilon_k}{(\epsilon_k^2 - v_k^2)^{1/2}}, \quad \text{sh } 2\theta_k = \frac{v_k}{(\epsilon_k^2 - v_k^2)^{1/2}}. \quad (2.5.14)$$

Согласно (2.5.13), операторы $\alpha(\mathbf{k})$ и $\beta(\mathbf{k})$ являются операторами уничтожения физических частиц, и наше гильбертово пространство является пространством Фока $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$. Энергия физической частицы $\hbar\omega_k$ и энергия вакуумного состояния W_0 , как легко найти, имеют вид

$$\omega_k = (\epsilon_k^2 - v_k^2)^{1/2}, \quad (2.5.15)$$

$$W_0 = \hbar \delta^{(3)}(0) \int d^3k (\omega_k - \epsilon_k). \quad (2.5.16)$$

Заметим, что, несмотря на бесконечное значение W_0 , плотность энергии конечна, если конечное значение имеет интеграл в (2.5.16); величина $\delta^{(3)}(0)$ определена выражением (2.4.34).

Если входящие в (2.5.11) операторы $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$ удовлетворяют фермионным соотношениям антикоммутации (2.4.40)–(2.4.42), то преобразование Боголюбова (2.4.38) и (2.4.39), где

$$\cos 2\theta_k = \frac{\epsilon_k}{(\epsilon_k^2 + v_k^2)^{1/2}}, \quad \sin 2\theta_k = -\frac{v_k}{(\epsilon_k^2 + v_k^2)^{1/2}}, \quad (2.5.17)$$

приводит H к виду (2.5.12), причем

$$\omega_k = (\epsilon_k^2 + v_k^2)^{1/2}, \quad (2.5.18)$$

$$W_0 = -\hbar \delta^{(3)}(0) \int d^3k (\omega_k - \epsilon_k). \quad (2.5.19)$$

Заметим, что в рассматриваемом фермионном случае нет необходимости в условии $\epsilon_k > v_k$.

Рассмотрим еще один пример — модель Ван Хова [2]. В этой модели гамильтониан имеет вид

$$H = \hbar \int d^3k [\epsilon_k a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + v_k \{a(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})\}], \quad (2.5.20)$$

где $a(\mathbf{k})$ — бозонные операторы, а c -числа ε_h и ν_h — вещественные функции \mathbf{k}^2 . Переводящее гамильтониан в форму (2.5.12) преобразование Боголюбова есть сдвиг поля (2.4.51), а именно $a(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k}) + c_h$, где $c_h = -\nu_h/\varepsilon_h$. Тогда имеем

$$\omega_h = \varepsilon_h, \quad (2.5.21)$$

$$W_0 = -\hbar\delta^{(3)}(0) \int d^3k (\nu_h^2/\varepsilon_h). \quad (2.5.22)$$

В рассмотренных случаях получено сильное соотношение $H = H_0 + W_0$, а не слабое соотношение вида (2.5.10), т. е. $\langle a | H | b \rangle = \langle a | H_0 | b \rangle + W_0 \langle a | b \rangle$. Это объясняется слишком упрощенным характером моделей: гамильтониан (2.5.11) содержит только билинейные члены, а гамильтониан (2.5.20) — билинейные и линейные.

Динамическое отображение. Обратимся теперь к временной зависимости операторов физических частиц и гейзенберговских операторов. Поскольку H_0 , определяемый выражением (2.5.5), — гамильтониан физических частиц, временная зависимость операторов уничтожения физических частиц имеет вид

$$\alpha(\mathbf{k}, t) = e^{i\bar{H}_0 t} \alpha(\mathbf{k}) e^{-i\bar{H}_0 t} = \quad (2.5.23)$$

$$= \alpha(\mathbf{k}) \exp[-i\omega(\mathbf{k})t]. \quad (2.5.24)$$

Соответственно для эрмитово сопряженного оператора получаем

$$\alpha^\dagger(\mathbf{k}, t) = e^{i\bar{H}_0 t} \alpha^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\bar{H}_0 t} = \quad (2.5.25)$$

$$= \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \exp[i\omega(\mathbf{k})t] \quad (2.5.26)$$

(здесь $\bar{H}_0 \equiv H_0/\hbar$).

С другой стороны, временная зависимость гейзенберговских операторов $a(\mathbf{k}, t)$ определяется уравнением Гейзенберга, или каноническим уравнением движения

$$i\hbar \frac{d}{dt} a(\mathbf{k}, t) = [a(\mathbf{k}, t), H], \quad (2.5.27)$$

так что

$$a(\mathbf{k}, t) = e^{i\bar{H}t} a(\mathbf{k}) e^{-i\bar{H}t}, \quad (2.5.28)$$

где $\bar{H} \equiv H/\hbar$.

В случае бозонов с гамильтонианом (2.5.11) преобразование Боголюбова (2.4.4), (2.4.5) определяет временную зависимость гейзенберговских операторов следующим образом:

$$a(\mathbf{k}, t) = \text{ch } \theta_k e^{-i\omega_k t} \alpha(\mathbf{k}) - \text{sh } \theta_k e^{i\omega_k t} \beta^\dagger(-\mathbf{k}), \quad (2.5.29)$$

$$b(\mathbf{k}, t) = \text{ch } \theta_k e^{-i\omega_k t} \beta(\mathbf{k}) - \text{sh } \theta_k e^{i\omega_k t} \alpha^\dagger(-\mathbf{k}). \quad (2.5.30)$$

В случае фермионов с гамильтонианом (2.5.11) находим

$$a(\mathbf{k}, t) = \cos \theta_R e^{-i\omega_R t} \alpha(\mathbf{k}) - \sin \theta_R e^{i\omega_R t} \beta^\dagger(-\mathbf{k}), \quad (2.5.31)$$

$$b(\mathbf{k}, t) = \cos \theta_R e^{-i\omega_R t} \beta(\mathbf{k}) + \sin \theta_R e^{i\omega_R t} \alpha^\dagger(-\mathbf{k}). \quad (2.5.32)$$

В случае модели Ван Хова (2.5.20) имеем

$$a(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega_R t} \alpha(\mathbf{k}) + c_h. \quad (2.5.33)$$

Соотношения (2.5.29)—(2.5.33) определяют все матричные элементы гейзенберговских операторов, а именно $\langle a | a(\mathbf{k}, t) | b \rangle$ и $\langle a | b(\mathbf{k}, t) | b \rangle$ между векторами в пространстве Фока $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ физических частиц. Например, из (2.5.33) следует

$$\langle a | a(\mathbf{k}, t) | b \rangle = e^{-i\omega_R t} \langle a | \alpha(\mathbf{k}) | b \rangle + c_h \langle a | b \rangle. \quad (2.5.34)$$

Другими словами, соотношения (2.5.29)—(2.5.33) показывают, каким образом гейзенберговские операторы реализуются в представлении физических частиц. Эти соотношения выражают решения уравнения Гейзенберга (2.5.27) в терминах операторов физических частиц $\alpha(\mathbf{k})$ и $\beta(\mathbf{k})$. *Выражение такого рода называется динамическим отображением.* В рассмотренных выше простых примерах динамические отображения линейны [с дополнительными слагаемыми c_h (c -числами) в случае (2.5.33)] и выражаются сильными соотношениями (2.5.29)—(2.5.33). Но в более сложных случаях динамическое отображение содержит произведения высшего порядка по операторам рождения и уничтожения физических частиц и определено только с помощью матричных элементов (*слабые соотношения*). Мы вернемся к этим вопросам ниже. В рассмотренных выше примерах с помощью решений уравнения Гейзенберга, выраженных через операторы свободных полей, удастся естественным образом записать H в виде $H_0 + W_0$. Это иллюстрирует общую ситуацию, в которой решения уравнений Гейзенберга удовлетворяют условию (2.5.10) для представления физических частиц. Заметим, что, вообще говоря, условие $H = H_0 + W_0$ выполняется только в слабом смысле, хотя в рассмотренных выше простых примерах оно выполнялось также и как сильное соотношение.

Нормальное произведение. При появлении в динамическом отображении произведений высших порядков по операторам физических частиц их следует располагать в виде линейных комбинаций так называемых нормальных произведений. Нормальным называется произведение операторов рождения и уничтожения физических частиц $\alpha^\dagger(\mathbf{k})$ и $\alpha(\mathbf{k})$, в котором все операторы рождения располагаются слева от всех операторов уничтожения. Таким образом, все операторы уничтожения в нормальном произведении уничтожают частицы в кет-состоянии, тогда как все опе-

раторы рождения рожают частицы в бра-состоянии. Иными словами, при вычислении матричных элементов нормальных произведений не встречаются спаривания операторов рождения и уничтожения. Если нормальное произведение содержит n операторов рождения и m операторов уничтожения, его матричные элементы соответствуют переходу из состояния с m частицами в состояние с n частицами. Это свойство нормальных произведений делает их всегда удобными при записи динамического отображения.

Резюме. В этом разделе введены следующие понятия: физическая частица, представление физических частиц, динамическое отображение гейзенберговских операторов и нормальное произведение операторов физических частиц.

2.6. Свободные поля для физических частиц

Свободные физические поля. В этом разделе вводится оператор, описывающий пространственно-временное поведение физических частиц. Этот оператор называется оператором свободного физического поля.

Пространственно-временная зависимость операторов рождения и уничтожения. Для построения свободного физического поля рассмотрим пространственную и временную зависимости операторов рождения и уничтожения физических частиц. Временная зависимость описывается выражениями (2.5.24) и (2.5.26):

$$\alpha(\mathbf{k}, t) = \alpha(\mathbf{k}) \exp[-i\omega(\mathbf{k})t], \quad (2.6.1)$$

$$\alpha^\dagger(\mathbf{k}, t) = \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \exp[i\omega(\mathbf{k})t]. \quad (2.6.2)$$

Поскольку оператор импульса \mathbf{P} является генератором пространственных сдвигов, пространственная зависимость операторов рождения и уничтожения определяется следующим образом:

$$\alpha^\dagger(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t) = e^{-i\mathbf{T}\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{T}\mathbf{x}} = \quad (2.6.3)$$

$$= \alpha(\mathbf{k}) \exp[i\{\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t\}], \quad (2.6.4)$$

$$\alpha(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t) = e^{-i\mathbf{T}\mathbf{x}} \alpha^\dagger(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{T}\mathbf{x}} = \quad (2.6.5)$$

$$= \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \exp[-i\{\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t\}], \quad (2.6.6)$$

где $\mathbf{T} \equiv \mathbf{P}/\hbar$. Следует отметить, что оператор уничтожения обладает отрицательной частотой, а оператор рождения — положительной.

Требования, накладываемые на свободные физические поля. Потребуем, чтобы свободное физическое поле являлось линейной комбинацией операторов $\alpha(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t)$ и $\alpha^\dagger(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t)$ с коэффициентами,

не зависящими ни от \mathbf{x} , ни от t . Потребуем, кроме того, чтобы свободные физические поля строились таким образом, чтобы существовала процедура проектирования, позволяющая избавиться от всех операторов рождения или уничтожения. Это требование гарантирует, что *динамические отображения операторов Гейзенберга могут быть выражены через произведения свободных физических полей*, хотя первоначально динамические отображения выражаются через операторы рождения и уничтожения. В конце этого раздела показано, каким образом удовлетворяются эти требования. Если физическая частица обладает спином или другими степенями свободы, то имеется несколько операторов уничтожения, а именно $\alpha^{(r)}(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t)$, $r = 1, 2, \dots$. При наличии одновременно частиц и дырок (или античастиц) можно использовать $\alpha^{(r)}$ для частиц и $\beta^{(r)}$ для дырок.

Уравнения свободного поля для физических полей. Поскольку физическое поле φ^0 является суперпозицией плоских волн (2.6.4) и (2.6.6), оно удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\lambda(\partial) \varphi^0(x) = 0, \quad (2.6.7)$$

где $x = (\mathbf{x}, t)$. Если физическая частица обладает спином или другими степенями свободы, $\varphi^0(x)$ представляется вектором-столбцом:

$$\varphi^0(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_n^0 \end{pmatrix}; \quad (2.6.8)$$

в этом случае $\lambda(\partial)$ является матрицей $n \times n$. Например, для электрона φ^0 — спиновый дублет. В столбце (2.6.8) объединяются обычно только поля, имеющие одинаковый энергетический спектр $\omega(\mathbf{k})$: в дальнейшем мы будем считать это условие выполненным.

Классификация уравнений свободного поля. Уравнение (2.6.7) называется уравнением свободного поля типа 1, если оно может быть сведено к уравнению на собственные значения

$$(i\partial/\partial t - \varepsilon(\nabla)) \varphi^0 = 0, \quad (2.6.9)$$

и уравнением типа 2, если соответствующее уравнение на собственные значения имеет вид

$$(\partial^2/\partial t^2 + \omega^2(\nabla)) \varphi^0 = 0. \quad (2.6.10)$$

Дифференциальные операторы $\varepsilon(\nabla)$ и $\omega(\nabla)$ в уравнениях (2.6.9) и (2.6.10) определены следующим образом:

$$\varepsilon(\nabla) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \varepsilon(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \text{ и т. д.}; \quad (2.6.11)$$

указанное определение дифференциальных операторов используется на протяжении всей книги. Заметим, что в случае уравнения типа 1 энергия $\omega(\mathbf{k})$ дается выражением $|\epsilon(\mathbf{k})|$. Если величина $\epsilon(\mathbf{k})$ неотрицательна, то φ^0 включает только операторы уничтожения. Если $\epsilon(\mathbf{k})$ становится отрицательной в некоторой области значений \mathbf{k} , то φ^0 содержит также операторы рождения. Последнее может возникнуть только в том случае, если φ^0 — фермионное поле. Отрицательные значения $\epsilon(\mathbf{k})$ соответствуют дырочным состояниям фермионов. В случае уравнения типа 2 поле φ^0 содержит как операторы уничтожения, так и операторы рождения, соответствующие каждому значению импульса.

Дивизор. Из уравнений (2.6.9) и (2.6.10) следует, что *должен существовать дифференциальный оператор $d(\partial)$, удовлетворяющий соотношению*

$$d(\partial)\lambda(\partial) = i\frac{\partial}{\partial t} - \epsilon(\nabla) \quad (2.6.12)$$

для уравнения типа 1 и соотношению

$$d(\partial)\lambda(\partial) = -(\partial^2/\partial t^2 + \omega^2(\nabla)) \quad (2.6.13)$$

для уравнения типа 2.

Оператор $d(\partial)$ называется *дивизором*¹⁾ уравнения (2.6.7). Покажем, что с помощью этого оператора можно построить функцию Грина для уравнения (2.6.7). Заметим прежде всего, что в силу (2.6.12) и (2.6.13) $\det[d(\partial)] \det[\lambda(\partial)] \neq 0$, поскольку производные $\partial/\partial t$ и ∇ независимы друг от друга. Таким образом, операторы $\lambda(\partial)$ и $d(\partial)$ не являются сингулярными и потому обладают обратными операторами. Применяя оператор $\lambda^{-1}(\partial)$ к обеим частям равенства (2.6.12) и замечая, что получающаяся в правой части матрица кратна единичной, находим

$$\lambda(\partial)d(\partial) = i\partial/\partial t - \epsilon(\nabla) \quad (2.6.14)$$

для уравнения типа 1. Аналогично для уравнения типа 2 получаем

$$\lambda(\partial)d(\partial) = -(\partial^2/\partial t^2 + \omega^2(\nabla)). \quad (2.6.15)$$

Обозначим далее через $\Delta_G(x)$ функцию Грина любого из уравнений (2.6.12) или (2.6.13):

$$(i\partial/\partial t - \epsilon(\nabla))\Delta_G(x) = \delta(\mathbf{x})\delta(t) \quad (\text{тип 1}), \quad (2.6.16)$$

$$-(\partial^2/\partial t^2 + \omega^2(\nabla))\Delta_G(x) = \delta(\mathbf{x})\delta(t) \quad (\text{тип 2}). \quad (2.6.17)$$

¹⁾ Дивизор для уравнения свободного поля впервые был введен в релятивистской квантовой теории поля [10]. Здесь это понятие обобщается на нерелятивистские случаи.

Отсюда получаем важный результат: функция $d(\partial) \Delta_G(x)$ является функцией Грина для уравнения (2.6.7):

$$\lambda(\partial) d(\partial) \Delta_G(x) = \delta(x) \delta(t). \quad (2.6.18)$$

Матрица приведения к эрмитову виду. Определим функцию $\lambda(p)$ равенством

$$\lambda(p) \exp[i(px - p_0 t)] = \lambda(\partial) \exp[i(px - p_0 t)]; \quad (2.6.19)$$

тогда соотношение $\lambda(p) u = 0$ для вектора u является уравнением на собственные значения, откуда находим $p_0 = \pm \omega(p)$. Поскольку собственные значения $\omega(p)$ вещественны, соотношение $\lambda(p) u = 0$ должно быть эквивалентно уравнению на собственные значения для некоторой эрмитовой матрицы (с собственными значениями $p_0 = \pm \omega(p)$). Тем самым предполагается существование несингулярной матрицы η , приводящей $\eta \lambda(p)$ к эрмитову виду

$$\lambda^\dagger(p) \eta^\dagger = \eta \lambda(p). \quad (2.6.20)$$

Принимая во внимание условие (2.6.19), получаем

$$\lambda^\dagger(-\partial) \eta^\dagger = \eta \lambda(\partial). \quad (2.6.21)$$

Используя затем выражения (2.6.12)—(2.6.15), находим

$$[\eta \lambda(\partial)] [d(\partial) \eta^{-1}] = [d(\partial) \eta^{-1}] [\eta \lambda(\partial)], \quad (2.6.22)$$

откуда, а также из уравнений (2.6.14) или (2.6.15) следует, что $d(p) \eta^{-1}$ также является эрмитовым оператором:

$$(\eta^\dagger)^{-1} d^\dagger(-\partial) = d(\partial) \eta^{-1}, \quad (2.6.23)$$

поскольку $\eta \lambda(p)$ — несингулярная матрица. Матрица η называется *матрицей приведения к эрмитову виду* [10].

С учетом выражения (2.6.21) эрмитово сопряжение уравнения (2.6.7) дает

$$\bar{\varphi}^0(x) \lambda(-\overleftarrow{\partial}) = 0, \quad (2.6.24)$$

где $\overleftarrow{\partial}$ означает, что производные берутся от величин, стоящих слева, а $\bar{\varphi}^0$ определяется следующим образом:

$$\bar{\varphi}^0(x) = \varphi^{0\dagger}(x) \eta. \quad (2.6.25)$$

Заметим, что если $\varphi^0(x)$ — вектор-столбец, то $\bar{\varphi}^0$ должен быть вектор-строкой.

Лагранжиан для свободных физических полей. Величина

$$\mathcal{L}_\varphi^0 = \int d^4x \bar{\varphi}^0(x) \lambda(\partial) \varphi^0(x) \quad (2.6.26)$$

вещественна. Очевидно, что это — лагранжиан для поля φ^0 , так как применение к нему вариационного принципа приводит к уравнению свободного поля (2.6.7).

Внутреннее произведение волновых функций. Предположим, что $\lambda(\partial)$ является полиномом по оператору $\partial/\partial t$ не выше второй степени; тогда $\lambda(\partial)$ можно записать в виде

$$\lambda(\partial) = \lambda^{(0)}(\nabla) + i\lambda^{(1)}(\nabla) (\partial/\partial t) + \lambda^{(2)}(\nabla) (\partial/\partial t)^2. \quad (2.6.27)$$

Введем оператор [10, 11]

$$\overleftrightarrow{\Gamma} = \lambda^{(1)}(\nabla) - i\lambda^{(2)}(\nabla) \overleftrightarrow{\partial/\partial t}, \quad (2.6.28)$$

где использовано обозначение

$$\overleftrightarrow{\partial/\partial t} = \partial/\partial t - \overleftarrow{\partial/\partial t}. \quad (2.6.29)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int d^3x \bar{f}(x) \overleftrightarrow{\Gamma} g(x) &= \int d^3x \bar{f}(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} \right) \lambda^{(1)}(\nabla) g(x) - \\ &- i \int d^3x \bar{f}(x) [(\partial/\partial t)^2 - (\overleftarrow{\partial}/\partial t)^2] \lambda^{(2)}(\nabla) g(x) = \\ &= -i \int d^3x \bar{f}(x) [\lambda(\partial) - \lambda(-\overleftarrow{\partial})] g(x), \end{aligned} \quad (2.6.30)$$

где по пространственным переменным проведено интегрирование по частям. Если $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют уравнению свободного поля (2.6.7) [а тем самым и уравнению (2.6.24)], то выражение (2.6.30) обращается в нуль, а потому величина

$$\int d^3x \bar{f}(x) \overleftrightarrow{\Gamma} g(x) \quad (2.6.31)$$

не зависит от времени. Поэтому указанную величину называют *внутренним произведением* волновых функций $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющих уравнению свободного поля (2.6.7). Следует заметить, что внутреннее произведение вида (2.6.31) не обязательно является положительно определенным. По существу это свойство и не требуется, поскольку внутреннее произведение не имеет прямого отношения к понятию вероятности. Вероятность для физических реакций лишь связана с внутренними произведениями векторов в пространстве Фока.

Полная ортонормированная система решений уравнения свободного поля (2.6.7). Используя приведенное выше определение внутреннего произведения, построим теперь полную ортонормированную систему решений уравнения свободного поля (2.6.7).

Предположим сначала, что уравнение (2.6.7) является уравнением типа 2. Тогда оно обладает решениями как с положительной, так и с отрицательной частотами:

$$u^r(\mathbf{k}, x) = u^r(\mathbf{k}) \exp [i \{ \mathbf{k} \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t \}], \quad (2.6.32)$$

$$v^r(\mathbf{k}, x) = v^r(\mathbf{k}) \exp [-i \{ \mathbf{k} \mathbf{x} - \omega(-\mathbf{k}) t \}]. \quad (2.6.33)$$

Здесь индекс r относится к спиновым или иным степеням свободы.

Используя соотношение (2.6.19), имеем

$$\lambda(k) u^r(\mathbf{k}) = 0 \text{ для } k_0 = \omega(\mathbf{k}), \quad (2.6.34)$$

$$\lambda(-k) v^r(\mathbf{k}) = 0 \text{ для } k_0 = \omega(-\mathbf{k}). \quad (2.6.35)$$

Подставляя в выражение (2.6.31) $u^r(\mathbf{k}, x)$ и $v^r(\mathbf{l}, x)$ вместо $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, легко видеть, что оно представляет собой суперпозицию слагаемых вида $\exp [i \{ \omega(\mathbf{k}) + \omega(-\mathbf{l}) \} t]$. Поскольку выражение (2.6.31) не должно зависеть от времени, отсюда следует, что оно равно нулю. Таким образом, получаем следующую теорему ортогональности:

$$\int d^3x \bar{u}^r(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} v^s(\mathbf{l}, x) = 0, \quad (2.6.36)$$

$$\int d^3x v^s(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} u^r(\mathbf{l}, x) = 0. \quad (2.6.37)$$

Выберем $u^r(\mathbf{k}, x)$ и $v^r(\mathbf{k}, x)$ так, чтобы удовлетворить следующему условию ортонормированности:

$$\int d^3x \bar{u}^r(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} u^s(\mathbf{l}, x) = \hbar \delta_{rs} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (2.6.38)$$

$$\int d^3x \bar{v}^r(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} v^s(\mathbf{l}, x) = -\hbar \rho \delta_{rs} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}); \quad (2.6.39)$$

смысл знакового множителя ρ будет пояснен ниже. Индекс r классифицирует собственные векторы из набора эрмитовых матриц, коммутирующих друг с другом, а также с $\eta \lambda(k)$ (и тем са-

мым с $\overleftrightarrow{\Gamma}$). Таким образом, для всех величин, входящих в (2.6.38), можно выбрать одинаковый знак. Поскольку оператор $\lambda(\partial)$ в уравнении (2.6.7) определен только с точностью до знака, всегда

можно выбрать его знак (а следовательно, и знак $\overleftrightarrow{\Gamma}$) таким образом, чтобы величина (2.6.38) была положительной. Но если знак $\lambda(\partial)$ фиксирован требованием положительности (2.6.38), это еще не означает положительности (2.6.39). По существу вы-

ражение (2.6.39) может иметь любой знак в зависимости от структуры Γ . Именно этим объясняется появление знакового множителя

$$\rho = \pm 1 \quad (2.6.40)$$

в условии (2.6.39).

Используя обозначения

$$\lambda^{(1)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \lambda^{(1)}(\nabla) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \text{ и т. д.,} \quad (2.6.41)$$

введем величину

$$\Gamma(\mathbf{k}, E) = \lambda^{(1)}(\mathbf{k}) - 2E\lambda^{(2)}(\mathbf{k}). \quad (2.6.42)$$

Тогда условия ортонормированности, выражаемые соотношениями (2.6.38) и (2.6.39), примут вид

$$\bar{u}^r(\mathbf{k}) \Gamma[\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})] u^s(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \delta_{rs} \hbar, \quad (2.6.43)$$

$$\bar{v}^r(\mathbf{k}) \Gamma[-\mathbf{k}, -\omega(-\mathbf{k})] v^s(\mathbf{k}) = -(2\pi)^{-3} \rho \delta_{rs} \hbar. \quad (2.6.44)$$

В случае уравнений типа 1 решениям $u^r(\mathbf{k}, x)$ сопоставляются положительные $\varepsilon(\mathbf{k})$, а решениям $v^r(\mathbf{k}, x)$ — отрицательные $\varepsilon(\mathbf{k})$. Условие ортонормированности выражается соотношениями (2.6.43) и (2.6.44).

Структура физического поля. После проведенной подготовки можно определить свободное физическое поле. Свободное физическое поле φ^0 задается выражением

$$\begin{aligned} \varphi^0(x) = \sum_r \int d^3k [u^r(\mathbf{k}) \alpha^r(\mathbf{k}) \exp(i\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t\}) + \\ + v^r(\mathbf{k}) \beta^{r+}(\mathbf{k}) \exp(-i\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega(-\mathbf{k})t\})] \end{aligned} \quad (2.6.45)$$

для уравнений типа 2 и выражением

$$\begin{aligned} \varphi^0(x) = \int d^3k \{ \theta[\varepsilon(\mathbf{k})] u^r(\mathbf{k}) \alpha^r(\mathbf{k}) + \\ + \theta[-\varepsilon(-\mathbf{k})] v^r(-\mathbf{k}) \beta^{r+}(-\mathbf{k}) \} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\varepsilon(\mathbf{k})t} \end{aligned} \quad (2.6.46)$$

для уравнений типа 1. Здесь $\theta(x)$ — разрывная функция («ступенька»): $\theta(x) = 1$ для $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ для $x < 0$. Отрицательные значения $\varepsilon(\mathbf{k})$ могут появляться только в случае фермионов.

Некоторые примеры уравнений свободного поля. Приведем некоторые примеры, иллюстрирующие изложенные выше общие соображения. Простой пример уравнения типа 2 дается оператором вида

$$\lambda(\partial) = -\partial^2/\partial t^2 - \omega^2(\nabla). \quad (2.6.47)$$

В этом случае имеем

$$\eta = 1, \quad d(\partial) = 1, \quad (2.6.48)$$

$$\overleftrightarrow{\Gamma} = i (\overleftrightarrow{\partial}/\partial t), \quad (2.6.49)$$

$$\Gamma(\mathbf{k}, E) = 2E, \quad (2.6.50)$$

$$\rho = 1. \quad (2.6.51)$$

Тогда из (2.6.43) и (2.6.44) следует

$$u(\mathbf{k}) = v(-\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} [2\omega(\mathbf{k})]^{-1/2} \hbar^{1/2}, \quad (2.6.52)$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \int d^3k \left(\frac{\alpha(\mathbf{k})}{[2\omega(\mathbf{k})]^{1/2}} e^{i[\mathbf{k}x - \omega(\mathbf{k})t]} + \right. \\ \left. + \frac{\beta^\dagger(\mathbf{k})}{[2\omega(-\mathbf{k})]^{1/2}} e^{-i[\mathbf{k}x - \omega(-\mathbf{k})t]} \right). \end{aligned} \quad (2.6.53)$$

Более сложный пример представляет собой уравнение свободного поля физических электронов в сверхпроводниках [12]:

$$\lambda(\partial) = i \frac{\partial}{\partial t} \tau_3 + i \Delta \tau_2 - \varepsilon(\nabla^2). \quad (2.6.54)$$

Это уравнение типа 2, хотя оно включает лишь производную по времени первого порядка. В уравнении (2.6.54) Δ — постоянная, а τ — матрицы Паули размерности 2×2 :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.6.55)$$

так что поле φ^0 является дублетом.

Легко показать, что

$$\eta = \tau_3, \quad (2.6.56)$$

$$d(\partial) = i \frac{\partial}{\partial t} \tau_3 + i \Delta \tau_2 + \varepsilon(\nabla^2), \quad (2.6.57)$$

$$d(\partial) \lambda(\partial) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2(\nabla) \right), \quad (2.6.58)$$

$$\omega(\mathbf{k}) = (\varepsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}, \quad (2.6.59)$$

$$\overleftrightarrow{\Gamma} = \tau_3, \quad (2.6.60)$$

$$\Gamma(\mathbf{k}, E) = \tau_3. \quad (2.6.61)$$

Здесь величина ε_k определяется соотношением $\varepsilon_k \exp(i\mathbf{k}x) = \varepsilon(\nabla^2) \exp(i\mathbf{k}x)$. Из условий (2.6.43) и (2.6.44) находим

$$u^\dagger(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \hbar, \quad (2.6.62)$$

$$v^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) = -(2\pi)^{-3} \rho \hbar. \quad (2.6.63)$$

Поскольку величина $v^\dagger v$ положительно определена, получаем

$$\rho = -1. \quad (2.6.64)$$

Стандартный метод построения волновых функций $u(\mathbf{k}, x)$ и $v(\mathbf{k}, x)$ состоит в использовании дивизора согласно соотношениям

$$u(\mathbf{k}, x) = d(\partial) \eta^{-1} \omega \exp \{i [\mathbf{k}x - \omega(\mathbf{k}) t]\}, \quad (2.6.65)$$

$$v(\mathbf{k}, x) = d(\partial) \eta^{-1} \tilde{\omega} \exp \{-i [\mathbf{k}x - \omega(-\mathbf{k}) t]\}. \quad (2.6.66)$$

Здесь ω и $\tilde{\omega}$ — вектор-столбцы, определяемые условиями (2.6.62) и (2.6.63). Из выражения (2.6.15) видно, что эти волновые функции удовлетворяют уравнению $\lambda(\partial) \varphi^0 = 0$. В выражениях (2.6.65) и (2.6.66) вместо $d(\partial)$ использован оператор $d(\partial) \eta^{-1}$, поскольку последний является эрмитовым [ср. с (2.6.23)]. Используя выражения (2.6.56) и (2.6.57), находим

$$u(\mathbf{k}) = [\omega - \Delta\tau_1 + \varepsilon_k \tau_3] \omega, \quad (2.6.67)$$

$$v(\mathbf{k}) = [-\omega - \Delta\tau_1 + \varepsilon_k \tau_3] \tilde{\omega}, \quad (2.6.68)$$

где $\omega \equiv \omega(\mathbf{k}) = \omega(-\mathbf{k})$.

Очевидно, что

$$u^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) = v^\dagger(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) = 0; \quad (2.6.69)$$

из выражений (2.6.67) и (2.6.68) находим

$$u^\dagger(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) = 2\omega\omega^\dagger [\omega - \Delta\tau_1 + \varepsilon_k \tau_3] \omega, \quad (2.6.70)$$

$$v^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) = -2\omega\tilde{\omega}^\dagger [-\omega - \Delta\tau_1 + \varepsilon_k \tau_3] \tilde{\omega}. \quad (2.6.71)$$

В дальнейшем можно применить любой выбор ω и $\tilde{\omega}$ при условии их линейной независимости; поэтому используем простейший выбор

$$\omega = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\omega} = \tilde{c} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6.72)$$

Тогда из (2.6.70) и (2.6.71) получим

$$u^\dagger(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) = 2\omega c^2 (\omega + \varepsilon_k), \quad v^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) = 2\omega \tilde{c}^2 (\omega + \varepsilon_k).$$

Сравнивая эти соотношения с (2.6.62) и (2.6.63), находим $c = \tilde{c} = [(2\pi)^3 2\omega (\omega + \varepsilon_k)]^{-1/2} \hbar^{1/2}$. Поэтому имеем

$$u(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \begin{pmatrix} \cos \theta_k \\ -\sin \theta_k \end{pmatrix}, \quad (2.6.73)$$

$$v(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \begin{pmatrix} \sin \theta_k \\ \cos \theta_k \end{pmatrix}, \quad (2.6.74)$$

где

$$\cos \theta_k = [(\omega + \varepsilon_k)/2\omega]^{1/2}, \quad (2.6.75)$$

$$\sin \theta_k = \Delta/[2\omega (\omega + \varepsilon_k)]^{1/2} = [(\omega - \varepsilon_k)/2\omega]^{1/2}. \quad (2.6.76)$$

Свободное поле дается выражением

$$\varphi^0(x) = \int d^3k [u(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} + v(\mathbf{k}) \beta^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}]. \quad (2.6.77)$$

Приведем простой пример уравнения типа 1:

$$\lambda(\partial) = i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{2m} \nabla^2, \quad (2.6.78)$$

откуда

$$\eta = 1, \quad d(\partial) = 1, \quad (2.6.79)$$

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar}{2m} k^2, \quad (2.6.80)$$

$$\overleftrightarrow{\Gamma} = 1, \quad \Gamma(\mathbf{k}, E) = 1. \quad (2.6.81)$$

Тогда условие нормировки принимает вид

$$u^\dagger(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \hbar, \quad (2.6.82)$$

откуда

$$u(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2}, \quad (2.6.83)$$

$$\varphi^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \int d^3k \alpha(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \varepsilon t)}. \quad (2.6.84)$$

Здесь ε обозначает $\varepsilon(\mathbf{k})$.

Правило сумм. Вернемся к уравнению для свободного поля общего вида (2.6.7) и введем важное правило сумм. Рассмотрим сначала уравнения типа 2; полученные результаты нетрудно будет модифицировать применительно к уравнениям типа 1.

Введем две функции

$$\Delta^\pm(x) = \mp i (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2\omega(\pm\mathbf{k})} \exp\{\pm i[\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\pm\mathbf{k})t]\}, \quad (2.6.85)$$

обладающие следующими интересными свойствами:

$$\Delta^+(-x) = -\Delta^-(x), \quad (2.6.86)$$

$$\delta(t) \frac{\partial}{\partial t} \Delta^\pm(x) = -\frac{1}{2} \delta(\mathbf{x}) \delta(t), \quad (2.6.87)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2(\nabla) \right) \Delta^\pm(x) = 0. \quad (2.6.88)$$

Объединяя последнее свойство с выражением (2.6.15), получаем

$$\lambda(\partial) d(\partial) \Delta^\pm(x) = 0, \quad (2.6.89)$$

Обозначив размерность матрицы $\lambda(\partial)$ через n , рассмотрим произвольный постоянный вектор

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}. \quad (2.6.90)$$

Тогда векторы

$$\varphi^\pm(x - x') = d(\partial) \Delta^\pm(x - x') \omega \quad (2.6.91)$$

являются решениями уравнения поля $\lambda(\partial) \varphi^\pm = 0$. Разложим их по ортонормированным решениям $u^r(\mathbf{k}, x)$ и $v^r(\mathbf{k}, x)$, которые даются выражениями (2.6.32) и (2.6.33). Поскольку поле φ^+ (или φ^-) содержит только отрицательные (или положительные) частоты, имеем

$$d(\partial) \Delta^+(x - x') \omega = \sum_r \int d^3 k c_r^+(\mathbf{k}, x') u^r(\mathbf{k}, x), \quad (2.6.92)$$

$$d(\partial) \Delta^-(x - x') \omega = \sum_r \int d^3 k c_r^-(\mathbf{k}, x') v^r(\mathbf{k}, x). \quad (2.6.93)$$

Учитывая условия ортонормированности (2.6.38) и (2.6.39), можно определить коэффициенты $c_r^\pm(\mathbf{k}, x')$ следующим образом:

$$\hbar c_r^+(\mathbf{k}, x') = \int d^3 x \bar{u}^r(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} d(\partial) \Delta^+(x - x') \omega, \quad (2.6.94)$$

$$\hbar c_r^-(\mathbf{k}, x') = -\rho \int d^3 x \bar{v}^r(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} d(\partial) \Delta^-(x - x') \omega. \quad (2.6.95)$$

Подставляя затем выражения (2.6.85) в (2.6.94), получаем

$$\hbar c_r^+(\mathbf{k}, x') = -i \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} \{ \bar{u}^r(\mathbf{k}, x') \Gamma(\mathbf{k}, k_0) d(k) \omega \}_{k_0 = \omega(\mathbf{k})}. \quad (2.6.96)$$

С другой стороны, из выражений (2.6.27) и (2.6.42) следует

$$\Gamma(\mathbf{k}, k_0) = \frac{\partial}{\partial k_0} \lambda(k), \quad (2.6.97)$$

откуда, применяя соотношение $\lambda(k) d(k) = k_0^2 - \omega^2(\mathbf{k})$, получаем

$$\Gamma(\mathbf{k}, k_0) d(k) + \lambda(k) \frac{\partial}{\partial k_0} d(k) = 2k_0. \quad (2.6.98)$$

Таким образом, имеем

$$[\bar{u}^r(\mathbf{k}, x') \Gamma(\mathbf{k}, k_0) d(k)]_{k_0 = \omega(\mathbf{k})} = 2\omega(\mathbf{k}) \bar{u}^r(\mathbf{k}, x'), \quad (2.6.99)$$

так что из выражения (2.6.96) следует

$$\hbar c_r^+(\mathbf{k}, x') = -i\bar{u}^r(\mathbf{k}, x') \omega. \quad (2.6.100)$$

Аналогично находим

$$\hbar c_r^-(\mathbf{k}, x') = i\rho\bar{v}^r(\mathbf{k}, x') \omega. \quad (2.6.101)$$

Окончательно выражения (2.6.92) и (2.6.93) приводят к следующему правилу сумм:

$$\sum_r \int d^3k u^r(\mathbf{k}, x) \bar{u}^r(\mathbf{k}, x') = i\hbar d(\partial) \Delta^+(x - x'), \quad (2.6.102)$$

$$\sum_r \int d^3k v^r(\mathbf{k}, x) \bar{v}^r(\mathbf{k}, x') = -i\rho\hbar d(\partial) \Delta^-(x - x'). \quad (2.6.103)$$

Для уравнений типа 1 с положительными значениями $\epsilon(\mathbf{k}) [= \omega(\mathbf{k})]$ можно доказать правило сумм (2.6.102) при условии, что $\Delta^+(x)$ определена следующим образом:

$$\Delta^+(x) = -i(2\pi)^{-3} \int d^3k e^{i(\mathbf{k}x - \omega t)}. \quad (2.6.104)$$

Из этого определения следует

$$\delta(t) \Delta^+(x) = -i\delta(\mathbf{x}) \delta(t), \quad (2.6.105)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \omega(\nabla)\right) \Delta^+(x) = 0. \quad (2.6.106)$$

В случае уравнений типа 1 вместо соотношения (2.6.98) получаем

$$\Gamma(\mathbf{k}, k_0) d(k) + \lambda(k) \frac{\partial}{\partial k_0} d(k) = 1. \quad (2.6.107)$$

Перестановочные соотношения и статистика. Поскольку φ^0 имеет вид (2.6.45) для уравнений типа 2 или (2.6.46) для уравнений типа 1, правила сумм (2.6.102) и (2.6.103) приводят к следующим перестановочным соотношениям:

$$[\varphi_j^0(x), \bar{\varphi}_k^0(y)]_{\pm} = i\hbar d_{jk}(\partial) [\Delta^+(x - y) + \rho\rho' \Delta^-(x - y)]. \quad (2.6.108)$$

Здесь обозначение $[\]_{\pm}$ для коммутатора (антикоммутатора) относится соответственно к бозонным (фермионным) полям, а

$$\rho' = \begin{cases} 0 & \text{для уравнений типа 1 с положительным } \epsilon(\mathbf{k}), \\ +1 & \text{для уравнений типа 2 бозонного поля,} \\ -1 & \text{для уравнений типа 2 фермионного поля.} \end{cases} \quad (2.6.109)$$

Введем теперь требование причинности, согласно которому операторы F_i , соответствующие наблюдаемым величинам, должны

коммутировать друг с другом, если они относятся к различным точкам пространства в один и тот же момент времени, так что

$$[F_i(\mathbf{x}, t), F_j(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (2.6.110)$$

Поскольку все наблюдаемые, связанные с фермионными полями, являются функционалами от билинейных комбинаций фермионных полей, требование причинности для них выполняется тогда и только тогда, когда

$$[\varphi_j^0(\mathbf{x}), \bar{\varphi}_k^0(\mathbf{y})]_{\pm} \delta(t_x - t_y) = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (2.6.111)$$

Для уравнения типа 1 ($\rho' = 0$) из соотношений (2.6.108) и (2.6.105) ясно, что требование причинности выполняется автоматически.

Для уравнений типа 2 из (2.6.85) имеем

$$\Delta^+(x - y) + \Delta^-(x - y) = 0 \quad \text{при } t_x = t_y, \quad (2.6.112)$$

$$\Delta^+(x - y) - \Delta^-(x - y) = -i(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{\omega(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad \text{при } t_x = t_y. \quad (2.6.113)$$

Тогда из требования причинности следует

$$\rho\rho' = 1, \quad (2.6.114)$$

где учтено соотношение (2.6.108).

Если ввести функцию

$$\Delta(x - y) = \Delta^+(x - y) + \Delta^-(x - y), \quad (2.6.115)$$

то перестановочные соотношения для свободного поля примут вид

$$[\varphi^0(\mathbf{x}), \bar{\varphi}^0(\mathbf{y})]_{\pm} = i\hbar d(\partial) \Delta(x - y) \quad (2.6.116)$$

для уравнений типа 2 и

$$[\varphi^0(\mathbf{x}), \bar{\varphi}^0(\mathbf{y})]_{\pm} = i\hbar d(\partial) \Delta^+(x - y) \quad (2.6.117)$$

для уравнений типа 1.

Вернемся теперь к условию (2.6.114), из которого с учетом (2.6.109) следует вывод

$$\rho = \begin{cases} +1 & \text{для бозонных полей,} \\ -1 & \text{для фермионных полей.} \end{cases} \quad (2.6.118)$$

Таким образом, мы приходим к неожиданному результату: *требование причинности однозначно определяет статистику частиц, описываемых полевыми уравнениями типа 2.* Действительно, в силу требования причинности $\rho = \rho'$, причем уравнение поля определяет величину ρ , тогда как статистика определяется величи-

ной ρ' . В случае релятивистского полевого уравнения соотношение (2.6.118) является условием, которое приводит к хорошо известным соотношениям между спином и статистикой [13].

Канонически сопряженная величина для φ^0 . В случае, описываемом уравнением (2.6.47), т. е.

$$\lambda(\partial) = -\partial^2/\partial t^2 - \omega^2(\nabla), \quad (2.6.119)$$

согласно (2.6.51), имеем $\rho = 1$, и, следовательно, поле φ^0 должно быть бозонным полем. В этом случае $d(\partial) = 1$ и $\eta = 1$ согласно (2.6.48); следовательно, из соотношения (2.6.116) имеем

$$[\varphi^0(x), \varphi^{0+}(y)] = i\hbar\Delta(x-y). \quad (2.6.120)$$

Поскольку (2.6.87) принимает вид

$$\delta(t) \frac{\partial}{\partial t} \Delta(x) = -\delta(x) \delta(t), \quad (2.6.121)$$

соотношение (2.6.120) дает

$$[\varphi^0(x), \dot{\varphi}^{0+}(y)] = i\hbar\delta(x-y) \quad \text{при } t_x = t_y, \quad (2.6.122)$$

где $\dot{\varphi}^{0+} \equiv (\partial/\partial t)\varphi^{0+}$. Отсюда видно, что величины φ^0 и $\dot{\varphi}^{0+}$ канонически сопряжены друг другу. Это утверждение согласуется со структурой лагранжиана \mathcal{L}_φ^0 в (2.6.26).

Для примера, описываемого соотношением (2.6.54), когда

$$\lambda(\partial) = i \frac{\partial}{\partial t} \tau_3 + i\Delta\tau_2 - \varepsilon(\nabla^2), \quad (2.6.123)$$

имеем $\rho = -1$ в соответствии с (2.6.64), откуда следует, что φ^0 — фермионное поле. В этом случае из (2.6.116) имеем

$$[\varphi^0(x), \bar{\varphi}^0(y)]_+ = i\hbar \left(i \frac{\partial}{\partial t} \tau_3 + i\Delta\tau_2 + \varepsilon(\nabla^2) \right) \Delta(x-y), \quad (2.6.124)$$

где $\bar{\varphi}^0 = \varphi^{0+}\tau_3$. Из этого антикоммутиационного соотношения получаем

$$[\varphi^0(x), \varphi^{0+}(y)]_+ = \hbar\delta(x-y) I \quad \text{при } t_x = t_y, \quad (2.6.125)$$

где I — единичная матрица размерности 2×2 . Таким образом, φ^0 и φ^{0+} образуют пару канонически сопряженных полей, что согласуется со структурой лагранжиана \mathcal{L}_φ^0 .

Проектирование операторов рождения и уничтожения. Закончим этот раздел тем, что продемонстрируем возможность проектирования операторов уничтожения или рождения, при котором они полностью исключаются из свободного поля φ^0 . В начале этого раздела мы потребовали существования соотношений, связывающих операторы уничтожения и рождения со свободным физиче-

ским полем φ^0 . Это требование гарантирует, что динамическое отображение, выражающееся через операторы уничтожения и рождения, может быть выражено также через физические поля. Покажем теперь, каким образом можно связать $\alpha^r(\mathbf{k})$ и $\beta^{r+}(\mathbf{k})$ с $\varphi^0(x)$. Если свободное поле φ^0 задано в виде (2.6.45), методом проектирования можно исключить операторы рождения и уничтожения с помощью формул

$$\hbar\alpha^r(\mathbf{k}) = \int d^3x \bar{u}^r(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} \varphi^0(x), \quad (2.6.126)$$

$$\hbar\beta^{r+}(\mathbf{k}) = -\rho \int d^3x \bar{v}^r(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} \varphi^0(x). \quad (2.6.127)$$

Эти формулы непосредственно следуют из (2.6.45) при учете соотношений ортонормированности (2.6.36)—(2.6.39). Обобщение этого рассуждения на случай уравнения (2.6.46) представляется очевидным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *von Neumann J.*, Math. Ann., **104**, 570 (1931).
2. *van Hove L.*, Physica, **18**, 145 (1952).
3. *Friedrichs K. O.*, Mathematical aspects of the quantum theory of fields, Interscience, New York, 1953.
4. *Wightman A. S.*, *Schwinger S. S.*, Phys. Rev., **98**, 812 (1955).
Gårding L., *Wightman A. S.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **40**, 617; 622 (1954).
5. *Dunford N.*, *Schwartz J. T.*, Linear operators I, II, Interscience, New York, 1963. [Имеется перевод: *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. I. Общая теория. — М.: Мир, 1962; т. II. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.];
von Neumann J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932. [Имеется перевод: *Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.]
6. *Fock V.*, Zs. Phys., **75**, 622 (1932).
7. *Боголюбов Н. Н.*, ЖЭТФ, **34**, 73 (1958).
8. *Glauber R. J.*, Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).
9. *Anderson P. W.*, Phys. Rev., **83**, 1260 (1951); **86**, 694 (1952);
Kubo R., Phys. Rev., **87**, 568 (1952).
10. *Takahashi Y.*, *Umezawa H.*, Nucl. Phys., **51**, 193 (1964);
Aurilia A., *Umezawa H.*, Phys. Rev., **182**, 1682 (1969).
11. *DeFazio B.*, *Hammer C. L.*, J. Math. Phys., **17**, 267 (1976).
12. *Nambu Y.*, Phys. Rev., **117**, 648 (1960);
Элиашберг Г. М., ЖЭТФ, **38**, 966 (1960).
13. *Pauli W.*, Phys. Rev., **58** 716 (1940).

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ, S-МАТРИЦА И СОСТАВНЫЕ ЧАСТИЦЫ

3.1. (N, θ) -модель

Введение. В гл. 2 введены некоторые фундаментальные понятия и методы, требуемые для построения квантовополевого формализма при описании систем многих частиц. В данной главе такой формализм представлен в наиболее общей форме. В качестве подготовительного материала в этом разделе исследуется точно решаемая модель, чтобы с ее помощью проиллюстрировать построение представления физических частиц, S-матрицу и понятие составных частиц.

(N, θ) -модель. Эта модель определяется двумя гейзенберговскими полями $N(x)$ и $\theta(x)$, уравнения Гейзенберга для которых имеют вид

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2)\right) N(x) = \lambda \int d^4y \int d^4z \bar{\alpha}(x-y) \bar{\alpha}(x-z) \theta^+(y) N(x) \theta(z), \quad (3.1.1a)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \mu(\nabla^2)\right) \theta(x) = \lambda \int d^4y \int d^4z \bar{\alpha}(x-y) \bar{\alpha}(y-z) N^+(y) N(y) \theta(z). \quad (3.1.1b)$$

Предполагается, что $N(x)$ — фермионное поле, удовлетворяющее антикоммутационному соотношению

$$[N(x), N^+(y)]_+ \delta(t_x - t_y) = \hbar \delta^{(4)}(x - y), \quad (3.1.2a)$$

а $\theta(x)$ — бозонное поле, удовлетворяющее коммутационному соотношению

$$[\theta(x), \theta^+(y)] \delta(t_x - t_y) = \hbar \delta^{(4)}(x - y). \quad (3.1.2b)$$

Здесь $\delta^{(4)}(x)$ обозначает $\delta(t_x) \delta(\mathbf{x})$; принято также, что

$$[N(x), \theta(y)] \delta(t_x - t_y) = [N(x), \theta^+(y)] \delta(t_x - t_y) = 0, \quad (3.1.2в)$$

а функция $\bar{\alpha}(x-y)$ имеет вид

$$\bar{\alpha}(x-y) = \alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \delta(t_x - t_y). \quad (3.1.3)$$

Упростим далее модель, предположив, что $\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ является функцией только от $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$; функция $\bar{\alpha}$ играет роль обрезающего множителя в области больших импульсов.

Канонические уравнения

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} N(x) = [N(x), H], \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \theta(x) = [\theta(x), H] \quad (3.1.4)$$

выполняются, если гамильтониан имеет вид

$$H = \int d^3x (N^\dagger(x) \varepsilon(\nabla^2) N(x) + \theta^\dagger(x) \mu(\nabla^2) \theta(x) + \\ + \lambda \int d^4y \int d^4z \bar{\alpha}(x-y) \bar{\alpha}(x-z) N^\dagger(x) N(x) \theta^\dagger(y) \theta(z)). \quad (3.1.5)$$

Заметим, что гамильтониан и уравнения Гейзенберга (3.1.1а), (3.1.1б) инвариантны относительно двух независимых преобразований фазы:

$$\text{преобразования фазы } N : N(x) \rightarrow e^{i\alpha_1} N(x), \quad (3.1.6a)$$

$$\text{преобразования фазы } \theta : \theta(x) \rightarrow e^{i\alpha_2} \theta(x). \quad (3.1.6b)$$

Самосогласованное вычисление. Для проведения самосогласованного вычисления, кратко описанного в разд. 2.5, необходим начальный набор свободных полей в качестве «кандидатов в физические поля», с которыми связано построение физического пространства Фока. Рассмотрим в качестве пробного следующий набор: свободное фермионное поле $N^0(x)$ и свободное бозонное поле $\theta^0(x)$. Энергии этих полей (остающиеся пока неизвестными) обозначим $m(\mathbf{k})$ и $\omega(\mathbf{k})$. Запишем фурье-представления этих полей в виде

$$N^0(x) = \frac{\hbar^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k N(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{x} - im(\mathbf{k})t], \quad (3.1.7a)$$

$$\theta^0(x) = \frac{\hbar^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \theta(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t]. \quad (3.1.7b)$$

Здесь $N(\mathbf{k})$ и $\theta(\mathbf{k})$ — операторы уничтожения квантов N^0 и θ^0 соответственно, так что

$$[N(\mathbf{k}), N^\dagger(\mathbf{l})]_+ = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (3.1.8a)$$

$$[\theta(\mathbf{k}), \theta^\dagger(\mathbf{l})] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}). \quad (3.1.8b)$$

Эти соотношения приводят к каноническим перестановочным соотношениям для свободных полей

$$[N^0(x), N^{0\dagger}(y)]_+ \delta(t_x - t_y) = \hbar \delta^{(4)}(x - y), \quad (3.1.9a)$$

$$[\theta^0(x), \theta^{0\dagger}(y)] \delta(t_x - t_y) = \hbar \delta^{(4)}(x - y). \quad (3.1.9b)$$

Гильбертовым пространством является в данном случае пространство Фока, связанное со свободными полями N^0 и θ^0 .

Наша задача состоит в вычислении матричных элементов гейзенберговских полей. Полученные результаты приведут к определенным выражениям для $N(x)$ и $\theta(x)$ через нормальные произведения свободных физических полей. Эти выражения и будут представлять собой динамическое отображение, введенное в гл. 2,

разд. 5. Чтобы избежать какого-либо приближения, рассмотрим частное решение уравнений Гейзенберга (3.1.1а), (3.1.1б), при котором преобразование фазы поля N индуцируется соотношением

$$N^0(x) \rightarrow e^{i\alpha_1} N^0(x), \quad \theta^0(x) \rightarrow \theta^0(x) \quad (3.1.10a)$$

посредством динамического отображения $N(x)$, а преобразование фазы поля θ — соответственно соотношением

$$\theta^0(x) \rightarrow e^{i\alpha_2} \theta^0(x), \quad N^0(x) \rightarrow N^0(x). \quad (3.1.10б)$$

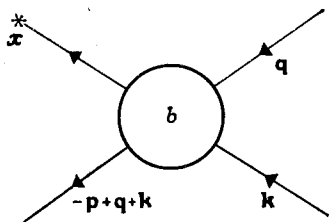
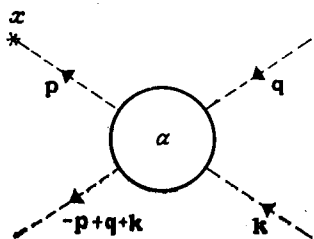
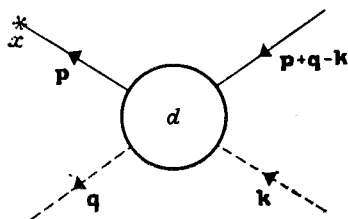
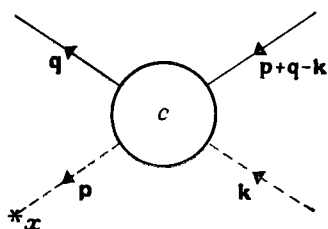


Рис. 3.1.

Рис. 3.2.

Тогда динамические отображения имеют вид (рис. 3.1 и 3.2)

$$\begin{aligned} \theta(x) = & Z_1^{1/2} \theta^0(x) + \\ & + \hbar^{1/2} \int d^3p \int d^3q \int d^3k N^+(q) N(p+q-k) \theta(k) c(q, p; p+q-k, k) \times \\ & \times \exp[i p x - i \{m(p+q-k) - m(q) + \omega(k)\} t] + \\ & + \hbar^{1/2} \int d^3p \int d^3q \int d^3k \theta^+(-p+q+k) \theta(q) \theta(k) a(p, -p+q+k; q, k) \times \\ & \times \exp[i p x - i \{\omega(k) + \omega(q) - \omega(q+k-p)\} t] + \dots, \quad (3.1.11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(x) = & Z_2^{1/2} N^0(x) + \\ & + \hbar^{1/2} \int d^3p \int d^3q \int d^3k \theta^+(q) N_1^+(p+q-k) \theta(k) d(p, q; p+q-k, k) \times \\ & \times \exp[i p x - i \{\omega(k) + m(p+q-k) - \omega(q)\} t] + \\ & + \hbar^{1/2} \int d^3p \int d^3q \int d^3k N^+(-p+q+k) N(q) N(k) b(p, -p+q+k; q, k) \times \\ & \times \exp[i p x - i \{m(k) + m(q) - m(q+k-p)\} t] + \dots \quad (3.1.11б) \end{aligned}$$

Здесь многоточиями обозначены нормальные произведения более высокого порядка, каждое из которых содержит более двух операторов уничтожения и более одного оператора рождения. Импульсы в функциях c и d упорядочены согласно правилу $c(N, \theta; N, \theta)$ и т. д.

Из выражений (3.1.11a), (3.1.11б) и (3.1.7a), (3.1.7б) находим

$$\theta(x)|0\rangle = 0, \quad (3.1.12a)$$

$$\theta^+(x)|0\rangle = Z_1^{1/2}\theta^{0+}(x)|0\rangle, \quad (3.1.13a)$$

$$N(x)|0\rangle = 0, \quad (3.1.12б)$$

$$N^+(x)|0\rangle = Z_2^{1/2}N^{0+}(x)|0\rangle, \quad (3.1.13б)$$

где $|0\rangle$ — вакуумное состояние. Из этих выражений с учетом (3.1.9a), (3.1.9б) следует

$$\langle 0 | [\theta(x), \theta^+(y)] | 0 \rangle \delta(t_x - t_y) = Z_1 \hbar \delta^{(4)}(x - y),$$

$$\langle 0 | [N(x), N^+(y)]_+ | 0 \rangle \delta(t_x - t_y) = Z_2 \hbar \delta^{(4)}(x - y).$$

Нормировочные множители Z_1 и Z_2 определяются с помощью соотношений (3.1.2a) и (3.1.2б) следующим образом:

$$Z_1 = Z_2 = 1. \quad (3.1.14)$$

Учитывая соотношения (3.1.12a), (3.1.12б) и (3.1.13a), (3.1.13б), из уравнений Гейзенберга (3.1.1a), (3.1.1б) находим

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2)\right) \langle 0 | N^0(x) = 0, \quad (3.1.15a)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \mu(\nabla^2)\right) \langle 0 | \theta^0(x) = 0, \quad (3.1.15б)$$

что приводит к следующему определению энергий $m(\mathbf{k})$ и $\omega(\mathbf{k})$:

$$m(\mathbf{k}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad \omega(\mathbf{k}) = \mu_{\mathbf{k}}, \quad (3.1.16)$$

где величины $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ и $\mu_{\mathbf{k}}$ определены соотношениями

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \varepsilon(\nabla^2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \text{ и т. д.} \quad (3.1.17)$$

Выражения (3.1.16) предполагают отсутствие собственных энергий.

Введем обозначения

$$|\theta(\mathbf{k})\rangle = \theta^+(\mathbf{k})|0\rangle, \quad |\theta(\mathbf{k})\theta(\mathbf{l})\rangle = \theta^+(\mathbf{k})\theta^+(\mathbf{l})|0\rangle \text{ и т. д.} \quad (3.1.18)$$

Вычисляя матричные элементы вида $\langle \theta(\mathbf{k}) | (3.1.16) | \theta(\mathbf{p})\theta(\mathbf{q}) \rangle$ и $\langle N(\mathbf{k}) | (3.1.1a) | N(\mathbf{p})N(\mathbf{q}) \rangle$, получаем

$$a(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = b(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0. \quad (3.1.19)$$

Вычислим далее $\langle N(\mathbf{q}-\mathbf{p}) | (3.1.16) | N(\mathbf{q}-\mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) \rangle$ при $\mathbf{p} \neq \mathbf{k}$.
Получаем

$$\begin{aligned} & [\omega(\mathbf{p}) - \omega(\mathbf{k}) - m(\mathbf{q}-\mathbf{k}) + m(\mathbf{q}-\mathbf{p})] c(\mathbf{q}-\mathbf{p}, \mathbf{p}; \mathbf{q}-\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \\ & = -\frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \alpha_p \alpha_k - \lambda \hbar \alpha_p \int d^3 l \alpha_l c(\mathbf{q}-\mathbf{l}, \mathbf{l}; \mathbf{q}-\mathbf{k}, \mathbf{k}), \quad (3.1.20) \end{aligned}$$

где α_k — фурье-образ функции

$$\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \alpha_k \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]. \quad (3.1.21)$$

Рассмотрим временную зависимость второго слагаемого в правой части уравнения (3.1.11а) и положим $c(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}, \mathbf{k})$ равным фурье-образу запаздывающей функции; тогда из (3.1.20) получим

$$\begin{aligned} c(\mathbf{q}-\mathbf{p}, \mathbf{p}; \mathbf{q}-\mathbf{k}, \mathbf{k}) &= \lambda \alpha_p [\omega(\mathbf{k}) + m(\mathbf{q}-\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q}-\mathbf{p}) + i\varepsilon]^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{\alpha_k}{(2\pi)^{3/2}} \hbar \int d^3 l \alpha_l c(\mathbf{q}-\mathbf{l}, \mathbf{l}; \mathbf{q}-\mathbf{k}, \mathbf{k}) \right), \quad (3.1.22) \end{aligned}$$

где $\varepsilon \rightarrow +0$. Отсюда находим

$$\begin{aligned} c(\mathbf{q}-\mathbf{p}, \mathbf{p}; \mathbf{q}-\mathbf{k}, \mathbf{k}) &= \frac{\lambda \alpha_p \alpha_k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{1 - \lambda I(\mathbf{q}, \mathbf{k})} \times \\ & \times \frac{1}{\omega(\mathbf{k}) + m(\mathbf{q}-\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q}-\mathbf{p}) + i\varepsilon}, \quad (3.1.23) \end{aligned}$$

где

$$I(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = \hbar \int d^3 p \alpha_p^2 [\omega(\mathbf{k}) + m(\mathbf{q}-\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q}-\mathbf{p}) + i\varepsilon]^{-1}. \quad (3.1.24)$$

Аналогичное вычисление для $\langle \theta(\mathbf{p}) | (3.1.1а) | N(\mathbf{q}-\mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) \rangle$ приводит к равенству

$$d(\mathbf{q}-\mathbf{p}, \mathbf{p}; \mathbf{q}-\mathbf{k}, \mathbf{k}) = c(\mathbf{q}-\mathbf{p}, \mathbf{p}; \mathbf{q}-\mathbf{k}, \mathbf{k}), \quad (3.1.25)$$

что можно усмотреть также из рис. 3.1 и 3.2.

Канонические соотношения. Рассмотрим канонические перестановочные соотношения. Для простоты ограничимся лишь состояниями, в которых имеется не более двух частиц. Рассмотрим сначала $[N(\mathbf{x}), \theta(\mathbf{y})] \delta(t_x - t_y)$. Поскольку выражение (3.1.10а) индуцирует преобразование фазы поля N , а (3.1.10б) — поля θ , оператор $[N(\mathbf{x}), \theta(\mathbf{y})]$ уничтожает один квант N^0 и один квант θ^0 . Следовательно, достаточно вычислить лишь матричный элемент

$\langle 0 | [N(x), \theta(y)] | N, \theta \rangle$. Динамические отображения, определяемые равенствами (3.1.11a) и (3.1.11б), дают

$$\begin{aligned} & \langle 0 | [N(x), \theta(y)] | N(1-k)\theta(k) \rangle \delta(t_x - t_y) = \\ & = \frac{\hbar^2}{(2\pi)^{3/2}} e^{i1y} \int d^3p \exp\{i\mathbf{p}(x-y)\} \exp[-i\{m(1-k) + \omega(k)\}t_x] \times \\ & \quad \times [c(p, 1-p; 1-k, k) - d(p, 1-p; 1-k, k)] \times \\ & \quad \times \delta(t_x - t_y) = 0, \quad (3.1.26) \end{aligned}$$

что согласуется с каноническим соотношением $[N(x), \theta(y)] \times \delta(t_x - t_y) = 0$.

Аналогично находим

$$\begin{aligned} & \langle N(1+k) | [N^+(x), \theta(y)] | \theta(k) \rangle \delta(t_x - t_y) = \\ & = -\delta(t_x - t_y) \int d^3p \left[\frac{\hbar^2}{(2\pi)^{3/2}} \{c(1+k, p; 1+p, k) + \right. \\ & \quad \left. + d^*(1+p, k; 1+k, p)\} + A(1+k, p; 1+p, k) \right] \times \\ & \quad \times \exp\{-i1x - ip(x-y)\} \exp[i\{m(1+k) - \omega(k)\}t_x], \quad (3.1.27) \end{aligned}$$

$$\text{где } A(1+k, p; 1+p, k) \equiv \hbar^3 \int d^3q c(1+k, p; 1+k + p - q, q) d^*(1+p, k; 1+k + p - q, q) = \quad (3.1.28)$$

$$= \hbar^3 \int d^3q c(1+k, p; 1+k + p - q, q) c^*(1+p, k; 1+k + p - q, q). \quad (3.1.29)$$

Чтобы упростить запись, введем обозначения

$$F(q, k) = \hbar\lambda\alpha_k^2 \frac{1}{1 - \lambda I(q, k)}, \quad (3.1.30)$$

$$\xi_q(1) = \omega(q) + m(1 - q). \quad (3.1.31)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} A(1+k, p; 1+p, k) &= \hbar\alpha_p\alpha_k \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \alpha_q^{-2} |F(1+p+k, q)|^2 \times \\ & \quad \times [\xi_q(1+p+k) - \xi_p(1+p+k) + i\varepsilon]^{-1} [\xi_q(1+p+k) - \\ & \quad - \xi_k(1+p+k) - i\varepsilon]^{-1}. \quad (3.1.32) \end{aligned}$$

С другой стороны, из (3.1.30) следует

$$F(q, k) - F^*(q, k) = -2i\pi |F(q, k)|^2 Z(q, k), \quad (3.1.33)$$

где $Z(q, k)$ определено соотношением

$$\alpha_k^2 Z(q, k) = \int d^3p \alpha_p^2 \delta[\xi_k(q) - \xi_p(q)]. \quad (3.1.34)$$

Поскольку $\xi_p(q)$ зависит только от p^2 и $(p-q)^2$, можно записать

$$\alpha_p^2 d^3p = N[|q|, \cos\theta, \xi_p(q)] d\xi_p(q) d\cos\theta d\phi/2\pi, \quad (3.1.35)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{q} и \mathbf{p} , N — некоторая функция. Тогда из (3.1.34) следует

$$\alpha_k^2 Z(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = \int d \cos \theta N [|\mathbf{q}|, \cos \theta, \xi_k(\mathbf{q})]; \quad (3.1.36)$$

заметим, что, согласно (3.1.34), величина $Z(\mathbf{q}, \mathbf{k})$ положительна.

Учитывая соотношение (3.1.33), можно переписать (3.1.32) в следующем виде:

$$A(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) =$$

$$= y(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\alpha_q^2 Z(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{q})} \times \\ \times \{F(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{q}) - F^*(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{q})\} \left(\frac{1}{\xi_q - \xi_k - i\epsilon} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\xi_q - \xi_p + i\epsilon} \right), \quad (3.1.37)$$

где

$$a(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) = -\frac{\alpha_p \alpha_k \hbar}{2\pi i} \frac{1}{\xi_k - \xi_p + i\epsilon}; \quad (3.1.38)$$

здесь и в дальнейшем используется сокращенное обозначение ξ_q вместо $\xi_q(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k})$.

Используя формулу

$$\frac{1}{\omega + i\epsilon} - \frac{1}{\omega - i\epsilon} = -2\pi i \delta(\omega) \quad (3.1.39)$$

и учитывая равенства (3.1.24), (3.1.30) и (3.1.34), перепишем выражение (3.1.37) в следующем виде:

$$A(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(2\pi)^3} a(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) \alpha_k^{-2} F(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{k}) - \\ - 2\pi i \frac{1}{(2\pi)^3} a(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) \alpha_p^{-2} F^*(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p}) + \\ + a(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{F(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{q})}{\alpha_q^2 Z(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{q})} \times \\ \times \left(\frac{1}{\xi_q - \xi_k + i\epsilon} - \frac{1}{\xi_q - \xi_p + i\epsilon} \right) - \\ - a(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{F^*(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{q})}{\alpha_q^2 Z(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{q})} \times \\ \times \left(\frac{1}{\xi_q - \xi_k - i\epsilon} - \frac{1}{\xi_q - \xi_p - i\epsilon} \right). \quad (3.1.40)$$

Заметим, что первое и второе слагаемые равны соответственно $[-\hbar^2/(2\pi)^{3/2}] c(l+k, p; l+p, k)$ и $[-\hbar^2(2\pi)^{3/2}] d^*(l+p, k; l+k, p)$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{(2\pi)^{3/2}} [c(l+k, p; l+p, k) + d^*(l+p, k; l+k, p)] + \\ & + A(l+k, p; l+p, k) = \\ & = i \frac{\alpha_p \alpha_k \hbar^2}{2\pi} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{Z(l+p+k, q)} \frac{\lambda}{1-\lambda I(l+p+k, q)} \times \right. \\ & \left. \times [\xi_q - \xi_k + i\varepsilon]^{-1} [\xi_q - \xi_p + i\varepsilon]^{-1} - \text{компл. сопр.} \right) \quad (3.1.41) \end{aligned}$$

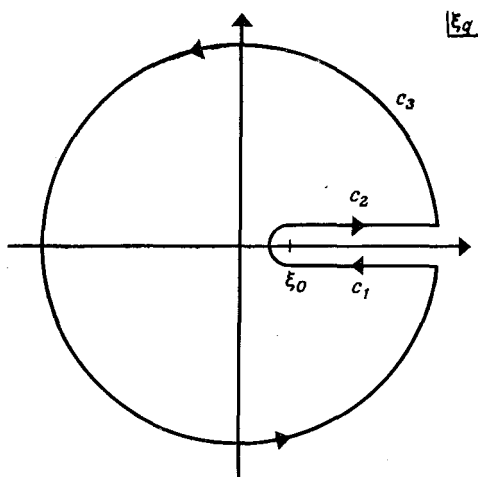


Рис. 3.3.

Это выражение определяет правую часть равенства (3.1.27). Выберем ξ_q в качестве одной из переменных интегрирования, и пусть ξ_0 является граничным значением, с которого начинается горизонтальный разрез в этой плоскости. Тогда выражение (3.1.41) приобретает смысл контурного интеграла, контуром для которого является $c_1 + c_2$ (c_1 — обход снизу вещественной полуоси от ∞ до ξ_0 , а c_2 — обход той же полуоси сверху от ξ_0 до ∞). Поскольку интеграл по бесконечности удаленной части контура c_3 равен нулю, контур интегрирования в плоскости ξ может быть преобразован в замкнутый контур $c_1 + c_2 + c_3$ (рис. 3.3).

Если функция $[1 - \lambda I(l+p+k, q)]^{-1}$ не имеет особенностей внутри замкнутого контура c , интеграл в (3.1.41) равен нулю, и равенство (3.1.27) становится каноническим перестановочным соотношением. Но так бывает не всегда. Чтобы убедиться в этом,

используем соотношение (3.1.24), записанное в виде

$$I(l + p + k, q) = \hbar \int d^3 r \alpha_r^2 [\xi_q - \xi_r + i\varepsilon]^{-1}, \quad (3.1.42)$$

и примем, что константа связи λ допускает одно значение ζ , при котором

$$1 = \lambda \hbar \int d^3 r \alpha_r^2 [\zeta - \xi_r]^{-1}, \quad \zeta < \xi_0. \quad (3.1.43)$$

Заметим, что величина ζ зависит от полного импульса $l + k + p$, т. е. $\zeta = \zeta(l + k + p)$. Условие (3.1.43) удовлетворяется, например, если ξ_r является возрастающей функцией r^2 , λ отрицательна и $|\lambda|$ достаточно велико. Физический смысл двух последних условий состоит в том, что (N, θ) -взаимодействие является притягивающим и достаточно сильным.

Равенства (3.1.42) и (3.1.43) приводят к соотношению

$$1 - \lambda I(l + p + k, q) = \lambda \hbar (\xi_q - \zeta) \int d^3 r \alpha_r^2 [\xi_q - \xi_r + i\varepsilon]^{-1} [\zeta - \xi_r]^{-1}, \quad (3.1.44)$$

откуда видно, что вклад в интегрирование в (3.1.41) дает лишь полюсная особенность при $\xi_q = \zeta$. Тогда можно записать

$$\frac{\lambda \hbar}{1 - \lambda I(l + p + k, q)} = \frac{B(l + p + k)}{\xi_q - \zeta} + \eta(l + p + k, q), \quad (3.1.45)$$

где $\eta(l + p + k, q)$ не содержит полюсной особенности. Тогда из (3.1.44) находим

$$B(l + p + k) = \left(\int d^3 r \frac{\alpha_r^2}{(\zeta - \xi_r)^2} \right)^{-1}; \quad (3.1.46)$$

отметим, что величина $B(l + p + k)$ положительна.

Учитывая равенства (3.1.35) и (3.1.36), из (3.1.41) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{(2\pi)^{3/2}} [c(l + k, p; l + p, k) + d^*(l + p, k; l + k, p)] + \\ & + A(l + k, p; l + p, k) = - \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \frac{\alpha_p \alpha_k B(l + p + k)}{(\zeta - \xi_k)(\zeta - \xi_p)}. \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

Это соотношение вместе с (3.1.27) указывает на нарушение второго канонического соотношения в (3.1.2в).

Составные частицы. Для исправления этой ситуации изменим первоначальный набор свободных физических полей, введя в него новое фермионное поле $V^0(x)$. Изменим условия (3.1.10а), (3.1.10б) следующим образом: преобразование поля N индуцируется соотношениями

$$N^0(x) \rightarrow e^{i\alpha_1} N^0(x), \quad V^0(x) \rightarrow e^{i\alpha_1} V^0(x), \quad \theta^0(x) \rightarrow \theta^0(x), \quad (3.1.48a)$$

а преобразование поля θ — соотношениями

$$\theta^0(x) \rightarrow e^{i\alpha_2}\theta^0(x), \quad V^0(x) \rightarrow e^{i\alpha_2}V^0(x), \quad N^0(x) \rightarrow N^0(x). \quad (3.1.48б)$$

Такое предположение мотивировано тем, что V^0 представляет собой «составную частицу» из N и θ .

В этом случае динамические отображения (3.1.11а), (3.1.11б) также изменятся (рис. 3.4) и примут вид

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \theta^0(x) + \hbar^{3/2} \int d^3p \int d^3q \int d^3k N^+(\mathbf{q}) N(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) \times \\ & \times c(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) \exp [i\mathbf{p}x - i\{m(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) - \\ & - m(\mathbf{q}) + \omega(\mathbf{k})\}t] + \hbar \int d^3p \int d^3l g(\mathbf{l}, \mathbf{p}; \mathbf{p} + \\ & + \mathbf{l}) N^+(\mathbf{l}) V(\mathbf{p} + \mathbf{l}) \exp [i\mathbf{p}x - i\{M(\mathbf{p} + \mathbf{l}) - \\ & - m(\mathbf{l})\}t] + \dots, \quad (3.1.49а) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(x) = & N^0(x) + \hbar^{3/2} \int d^3p \int d^3q \int d^3k \theta^+(\mathbf{q}) N(\mathbf{p} + \\ & + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) d(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) \exp [i\mathbf{p}x - \\ & - i\{\omega(\mathbf{k}) + m(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{q})\}t] + \\ & + \hbar \int d^3p \int d^3l h(\mathbf{p}, \mathbf{l}; \mathbf{p} + \mathbf{l}) \theta^+(\mathbf{l}) V(\mathbf{p} + \\ & + \mathbf{l}) \exp [i\mathbf{p}x - i\{M(\mathbf{p} + \mathbf{l}) - \\ & - \omega(\mathbf{l})\}t] + \dots \quad (3.1.49б) \end{aligned}$$

Здесь многоточиями обозначены нормальные произведения более высокого порядка, $V(\mathbf{k})$ — оператор уничтожения кванта V^0 с импульсом \mathbf{k} и энергией $M(\mathbf{k})$. При написании выражений (3.1.49а), (3.1.49б) использовался тот факт, что соотношения (3.1.14), (3.1.19), (3.1.23) и (3.1.25) сохранили прежний вид, несмотря на наличие поля V^0 .

Вычисляя матричные элементы $\langle N(\mathbf{l}) | (3.1.16) | V(\mathbf{p} + \mathbf{l}) \rangle$ и $\langle \theta(\mathbf{l}) | (3.1.1а) | V(\mathbf{p} + \mathbf{l}) \rangle$, находим

$$g(\mathbf{l}, \mathbf{p}; \mathbf{p} + \mathbf{l}) = \frac{\hbar \lambda \alpha_p}{M(\mathbf{p} + \mathbf{l}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{l})} \int d^3k \alpha_h g(\mathbf{p} + \mathbf{l} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p} + \mathbf{l}), \quad (3.1.50а)$$

$$h(\mathbf{l}, \mathbf{p}; \mathbf{p} + \mathbf{l}) = g(\mathbf{l}, \mathbf{p}; \mathbf{p} + \mathbf{l}). \quad (3.1.50б)$$

Вводя далее величину

$$\beta(\mathbf{p} + \mathbf{l}) = \lambda \int d^3k \alpha_h g(\mathbf{p} + \mathbf{l} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p} + \mathbf{l}), \quad (3.1.51)$$

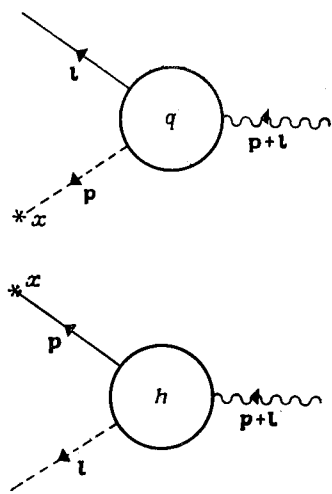


Рис. 3.4.

из (3.1.50а) получим

$$g(l, \mathbf{p}; \mathbf{p} + \mathbf{l}) = \frac{\hbar \alpha_p \beta (\mathbf{p} + \mathbf{l})}{M(\mathbf{p} + \mathbf{l}) - \omega(\mathbf{p}) - m(l)}. \quad (3.1.52)$$

Подставляя последний результат в (3.1.50а), получаем

$$1 = \lambda \hbar \int d^3 k \alpha_k^2 [M(\mathbf{p} + \mathbf{l}) - \xi_k(\mathbf{p} + \mathbf{l})]^{-1}, \quad (3.1.53)$$

или в другой форме

$$1 = \lambda \hbar \int d^3 r \alpha_r^2 [M(\mathbf{p} + \mathbf{l} + \mathbf{k}) - \xi_r]^{-1}. \quad (3.1.54)$$

Сравнивая (3.1.54) с (3.1.43), находим, что $M(\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{l})$ — собственное значение ζ , определяемое уравнением (3.1.43), т. е.

$$M(\mathbf{p} + \mathbf{l} + \mathbf{k}) = \zeta. \quad (3.1.55)$$

Иными словами, энергия $M(\mathbf{p} + \mathbf{l} + \mathbf{k})$ кванта V^0 совпадает с величиной полюсной особенности функции $[1 - \lambda I(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{q})]^{-1}$.

Нормировочный множитель $\beta(\mathbf{p} + \mathbf{l})$ в (3.1.52) остается неопределенным. Наличие частицы V^0 изменяет соотношение (3.1.27) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle N(\mathbf{l} + \mathbf{k}) | [N^+(x), \theta(y)] | \theta(\mathbf{k}) \rangle \delta(t_x - t_y) = \\ = -\delta(t_x - t_y) \int d^3 p \left(\frac{\hbar^2}{(2\pi)^{3/2}} \{c(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) + \right. \\ \left. + d^*(\mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}; \mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p})\} + A(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}) + \right. \\ \left. + \hbar^2 g(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}) h^*(\mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}; \mathbf{l} + \mathbf{p} + \right. \\ \left. + \mathbf{k}) \right) \exp\{-i\mathbf{l}\mathbf{x} - i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\} \exp[i\{m(\mathbf{l} + \\ + \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k})\} t_x]. \quad (3.1.56) \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} g(\mathbf{l} + \mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{l} + \mathbf{k} + \mathbf{p}) h^*(\mathbf{l} + \mathbf{p}, \mathbf{k}; \mathbf{l} + \mathbf{k} + \mathbf{p}) = \\ = \frac{\hbar^2 \alpha_p \alpha_k |\beta(\mathbf{p} + \mathbf{l} + \mathbf{k})|^2}{[M(\mathbf{p} + \mathbf{l} + \mathbf{k}) - \xi_p] [M(\mathbf{p} + \mathbf{l} + \mathbf{k}) - \xi_k]}, \quad (3.1.57) \end{aligned}$$

и принимая во внимание (3.1.47), находим

$$\langle N(\mathbf{l} + \mathbf{k}) | [N^+(x), \theta(y)] | \theta(\mathbf{k}) \rangle \delta(t_x - t_y) = 0, \quad (3.1.58)$$

если выбрать $\beta(\mathbf{p} + \mathbf{l} + \mathbf{k})$ следующим образом:

$$|\beta(\mathbf{p} + \mathbf{l} + \mathbf{k})|^2 = \frac{\hbar^{-3}}{(2\pi)^3} B(\mathbf{l} + \mathbf{p} + \mathbf{k}). \quad (3.1.59)$$

Таким образом, каноническое соотношение $[N^+(x), \theta(y)] \delta(t_x - t_y) = 0$ восстанавливается благодаря наличию частицы V^0 .

Из определений (3.1.59) и (3.1.52) следует

$$g(l, \mathbf{p}; \mathbf{p} + l) = \frac{\hbar^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\alpha_p B^{1/2} (\mathbf{p} + l)}{M(\mathbf{p} + l) - \omega(\mathbf{p}) - m(l)}. \quad (3.1.60)$$

Вычисляя матричные элементы других канонических коммутаторов (или антикоммутаторов), можно показать, что выполняются все канонические перестановочные соотношения (3.1.2а)—(3.1.2в). Указанное вычисление ограничено подпространством гильбертова пространства, в которое входят состояния $|0\rangle, |\theta\rangle, |N\rangle, |\theta, N\rangle, |N, N\rangle, |\theta, \theta\rangle, |V\rangle$ и их линейные комбинации; ниже это подпространство будет обозначаться \mathcal{S}_s .

Используя равенства (3.1.13б) и (3.1.49а), можно показать, что

$$\begin{aligned} \hbar g(l, \mathbf{p}; \mathbf{p} + l) \exp[i\mathbf{p}\mathbf{x} - i\{M(\mathbf{p} + l) - m(l)\}t] = \\ = \langle N(l) | \theta(x) | V(\mathbf{p} + l) \rangle = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \hbar^{1/2}} e^{im(l)t} \int d^3y e^{-i\mathbf{1}y} \langle 0 | N(y, t) \theta(\mathbf{x}, t) | V(\mathbf{p} + l) \rangle. \end{aligned} \quad (3.1.61)$$

Отсюда ясно, что динамическое отображение $N(x) \theta(x)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} N(x) \theta(x) = \frac{\hbar^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3l d^3p g(l, \mathbf{p}; \mathbf{p} + l) V(\mathbf{p} + l) \times \\ \times \exp[i(\mathbf{p} + l)\mathbf{x} - iM(\mathbf{p} + l)t] + \dots \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

Здесь многоточие обозначает нормальные произведения более высокого порядка. Согласно этому соотношению, $V(\mathbf{p} + l)$ является одним из слагаемых в линейной суперпозиции при динамическом отображении гейзенберговского оператора $N(x) \theta(x)$. В этом случае мы заключаем, что V^0 -квант — *составная частица*, состоящая из N и θ . Приведенные выше соображения показывают, каким образом *составная частица вводится в процессе самосогласованного вычисления* [1]. Примечательно, что канонические перестановочные соотношения играют решающую роль в вопросе о наличии составных частиц.

Гамильтониан. Используя динамические отображения (3.1.49а), (3.1.49б), можно вычислить матричные элементы гамильтониана H , определяемого выражением (3.1.5). Применяя уравнение Гейзенберга (3.1.16), можно записать H в виде

$$H = \int d^3x \left(N^\dagger(x) \varepsilon(\nabla^2) N(x) + i\theta^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial t} \theta(x) \right). \quad (3.1.63)$$

Из соотношений (3.1.49а), (3.1.49б) и (3.1.16) имеем

$$\begin{aligned} \langle V(\mathbf{k}) | i \int d^3x \theta^+(x) \frac{\partial}{\partial t} \theta(x) | V(\mathbf{l}) \rangle = \\ = (2\pi)^3 \hbar^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \int d^3p \{M(\mathbf{k}) - m(\mathbf{k} - \mathbf{p})\} |g(\mathbf{k} - \mathbf{p}, \mathbf{p}; \mathbf{k})|^2, \end{aligned} \quad (3.1.64)$$

$$\begin{aligned} \langle V(\mathbf{k}) | \int d^3x N^+(x) \varepsilon(\nabla^2) N(x) | V(\mathbf{l}) \rangle = \\ = (2\pi)^3 \hbar^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \int d^3p m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) |g(\mathbf{k} - \mathbf{p}, \mathbf{p}; \mathbf{k})|^2, \end{aligned} \quad (3.1.65)$$

где учтено также равенство (3.1.50б). Используя далее (3.1.46), получаем

$$\begin{aligned} \langle V(\mathbf{k}) | H | V(\mathbf{l}) \rangle = \\ = \hbar M(\mathbf{k}) B(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \int d^3p \frac{\alpha_p}{[M(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{k} - \mathbf{p})]^2} = \end{aligned} \quad (3.1.66)$$

$$= \hbar M(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}). \quad (3.1.67)$$

Таким образом, имеем

$$\langle V(\mathbf{k}) | H | V(\mathbf{l}) \rangle = \langle V(\mathbf{k}) | H_0 | V(\mathbf{l}) \rangle, \quad (3.1.68)$$

где H_0 — свободный гамильтониан физических полей:

$$\begin{aligned} H_0 = \hbar \int d^3k [\omega(\mathbf{k}) \theta^+(\mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) + m(\mathbf{k}) N^+(\mathbf{k}) N(\mathbf{k}) + \\ + M(\mathbf{k}) V^+(\mathbf{k}) V^+(\mathbf{k}) V(\mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (3.1.69)$$

Из этого вычисления видно, *каким образом естественно возникает свободный гамильтониан для составных частиц.*

Аналогичное вычисление показывает, что

$$\langle a | H | b \rangle = \langle a | H_0 | b \rangle. \quad (3.1.70)$$

Используя динамические отображения (3.1.49а), (3.1.49б), можно подтвердить равенство (3.1.70) для состояний $|a\rangle$ и $|b\rangle$, принадлежащих подпространству \mathcal{S}_s . Та же задача для всего пространства становится весьма громоздкой. Но приведенные выше соображения показывают, каким образом выполняется условие реализации представления физических частиц (2.5.10).

Асимптотическое условие. Обратимся теперь к анализу асимптотического условия. С этой целью получим из динамических отображений (3.1.49а), (3.1.49б) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle a | \theta_g(t) | b \rangle &\equiv \frac{\hbar^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k g(\mathbf{k}) \int d^3x \exp\{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega(\mathbf{k})t\} \langle a | \theta(x) | b \rangle = \\ &= \langle a | \int d^3k g(\mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) | b \rangle + \dots, \end{aligned} \quad (3.1.71a)$$

$$\begin{aligned} \langle a | N_g(t) | b \rangle &\equiv \frac{\hbar^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k g(\mathbf{k}) \int d^3x \exp\{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + \\ &+ im(\mathbf{k})t\} \langle a | N(x) | b \rangle = \langle a | \int d^3k g(\mathbf{k}) N(\mathbf{k}) | b \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.1.71б)$$

Здесь $g(\mathbf{k})$ — квадратично-интегрируемая функция, $|a\rangle$, $|b\rangle$ — состояния, принадлежащие физическому пространству Фока \mathcal{F} . При выводе соотношений (3.1.71а), (3.1.71б) учитывались равенства (3.1.7а), (3.1.7б), дающие фурье-разложение свободных полей.

Как видно из (3.1.23), слагаемые, представленные многочленами, имеют вид

$$\int dE f(E) \frac{1}{E - E_0 - i\varepsilon} e^{i(E - E_0)t}. \quad (3.1.72)$$

Функция «размазывания» $f(E)$ возникает благодаря тому, что состояния $|a\rangle$ и $|b\rangle$ являются волновыми пакетами. При интегрировании в (3.1.72) используются следующие формулы:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{E - E_0 - i\varepsilon} e^{i(E - E_0)t} = 0, \quad (3.1.73a)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{E - E_0 - i\varepsilon} e^{i(E - E_0)t} = 2\pi i \delta(E - E_0). \quad (3.1.73б)$$

Определим теперь поля $\theta^{\text{in}}(\mathbf{k})$ и $\theta^{\text{out}}(\mathbf{k})$:

$$\langle a | \int d^3k g(\mathbf{k}) \theta^{\text{in}}(\mathbf{k}) | b \rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle a | \theta_g(t) | b \rangle, \quad (3.1.74a)$$

$$\langle a | \int d^3k g(\mathbf{k}) \theta^{\text{out}}(\mathbf{k}) | b \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle a | \theta_g(t) | b \rangle. \quad (3.1.74б)$$

Тогда из равенства (3.1.73а) видно, что $\theta^{\text{in}}(\mathbf{k})$ дается соотношением

$$\theta^{\text{in}}(\mathbf{k}) = \theta(\mathbf{k}), \quad (3.1.75)$$

так что $\theta^{\text{in}}(\mathbf{k})$ является оператором уничтожения для поля θ^0 . Это обусловлено выбором $c(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{k})$ и других коэффициентов разложения в динамических отображениях в виде запаздывающих функций [см. (3.1.23)].

С другой стороны, из (3.1.74б) вместе с (3.1.73б) и (3.1.49а) следует

$$\theta^{\text{out}}(\mathbf{p}) = \theta(\mathbf{p}) - 2\pi i (2\pi)^{3/2} \hbar \int d^3q \int d^3k N^+(\mathbf{q}) N(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) \bar{c}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) + \dots, \quad (3.1.76)$$

где

$$\bar{c}(\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{p}; \mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{\lambda \alpha_p \alpha_k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{1 - \lambda I(\mathbf{q}, \mathbf{k})} \times \\ \times \delta[\omega(\mathbf{k}) + m(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q} - \mathbf{p})]. \quad (3.1.77)$$

Каждое слагаемое, обозначенное многоточием в (3.1.76), содержит δ -функцию, что обуславливает сохранение энергии для соответствующего матричного элемента. Например, из (3.1.76) и (3.1.77) имеем

$$\langle N(\mathbf{q} - \mathbf{l}) | \theta^{\text{out}}(\mathbf{p}) | N(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{l}) (\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \\ - 2\pi i \frac{\alpha_p \alpha_k}{\alpha_k^2} F(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \delta\{\omega(\mathbf{k}) + m(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q} - \mathbf{p})\}). \quad (3.1.78)$$

Входящее поле $\theta^{\text{in}}(x)$ определяется как свободное поле $\theta^0(x)$, а выходящее поле $\theta^{\text{out}}(x)$ — как свободное поле

$$\theta^{\text{out}}(x) = \frac{\hbar^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \theta^{\text{out}}(\mathbf{k}) \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t\}. \quad (3.1.79)$$

Приведенное рассуждение показывает, каким образом с помощью гейзенберговского поля $\theta(x)$ устанавливается связь между θ^{in} и θ^{out} .

Вообще говоря, если динамическое отображение гейзенберговского оператора [например, $\psi(x)$] содержит только одно линейное по полю слагаемое (например, φ^0), то $\psi(x)$ осуществляет связь между полями φ^{in} и φ^{out} . Таким образом, $N^{\text{in}}(x)$ и $N^{\text{out}}(x)$ получаются с помощью предельных переходов при $t \rightarrow \pm \infty$ поля $N_g(t)$ в (3.1.71б); иными словами, гейзенберговское поле $N(x)$ является связующим между $N^{\text{in}}(x)$ и $N^{\text{out}}(x)$. Аналогично из (3.1.62) видно, что гейзенберговский оператор $N(x) \theta(x)$ является связующим полем между $V^{\text{in}}(x)$ и $V^{\text{out}}(x)$. Тем самым иллюстрируется возможность связи входящего и выходящего полей составной частицы с помощью произведения гейзенберговских полей.

S-матрица. Введем теперь S-матрицу, определив ее равенствами

$$\theta^{\text{out}}(x) = S^{-1} \theta^{\text{in}}(x) S, \quad N^{\text{out}}(x) = S^{-1} N^{\text{in}}(x) S, \quad V^{\text{out}}(x) = S^{-1} V^{\text{in}}(x) S. \quad (3.1.80)$$

Будем искать матрицу S, предполагая ее унитарной.

В соответствии с равенствами (3.1.74б) и (3.1.48б) преобразование фазы $\theta^{\text{in}} \rightarrow e^{i\alpha_2}\theta^{\text{in}}$ и $V^{\text{in}} \rightarrow e^{i\alpha_2}V^{\text{in}}$ индуцирует преобразование $\theta^{\text{out}} \rightarrow e^{\alpha_2}\theta^{\text{out}}$, $V^{\text{out}} \rightarrow e^{i\alpha_2}V^{\text{out}}$, если учесть, что $N(x)\theta(x)$ является связующим полем между V^{in} и V^{out} . Аналогично можно показать, что преобразование фазы $N^{\text{in}} \rightarrow e^{i\alpha_1}N^{\text{in}}$ и $V^{\text{in}} \rightarrow e^{i\alpha_1}V^{\text{in}}$ индуцирует $N^{\text{out}} \rightarrow e^{i\alpha_1}N^{\text{out}}$, $V^{\text{out}} \rightarrow e^{i\alpha_1}V^{\text{out}}$. Отсюда можно заключить, что матрица S инвариантна относительно преобразования $\theta^{\text{in}} \rightarrow e^{i\alpha_1}\theta^{\text{in}}$, $N^{\text{in}} \rightarrow e^{i\alpha_2}N^{\text{in}}$, $V^{\text{in}} \rightarrow e^{i\alpha_1}e^{i\alpha_2}V^{\text{in}}$. Это означает, что если выразить S с помощью линейной комбинации нормальных произведений свободных физических полей (θ^{in} , N^{in} , V^{in}), то каждый член в $(S - 1)$ содержит операторы уничтожения и операторы рождения парами. Поэтому имеем

$$S | 0 \rangle = | 0 \rangle. \quad (3.1.81)$$

Далее из (3.1.13а) вместе с (3.1.14) следует

$$\theta^{\text{out}+}(x) | 0 \rangle = \theta^{\text{in}+}(x) | 0 \rangle, \quad (3.1.82a)$$

$$N^{\text{out}+}(x) | 0 \rangle = N^{\text{in}+}(x) | 0 \rangle. \quad (3.1.82б)$$

Трансформационные свойства, определяемые равенствами (3.1.48а), (3.1.48б), приводят к следующему выводу: каждое слагаемое более высокого порядка, представленное многоточием в динамическом отображении $N(x)\theta(x)$ в (3.1.62), содержит как операторы уничтожения, так и операторы рождения. Таким образом, мы видим, что при вычислении $N^+(x)\theta^+(x) | 0 \rangle$ дает вклад только первый член (линейный по V) в правой части (3.1.62). Тогда, учитывая, что V^{out} является выходящим асимптотическим пределом произведения $N(x)\theta(x)$, имеем

$$V^{\text{out}+}(x) | 0 \rangle = V^{\text{in}+}(x) | 0 \rangle. \quad (3.1.82в)$$

Из соотношений (3.1.82а)—(3.1.82в) следует

$$S | \theta(\mathbf{k}) \rangle = | \theta(\mathbf{k}) \rangle, \quad (3.1.83a)$$

$$S | N(\mathbf{k}) \rangle = | N(\mathbf{k}) \rangle, \quad (3.1.83б)$$

$$S | V(\mathbf{k}) \rangle = | V(\mathbf{k}) \rangle, \quad (3.1.83в)$$

где учтено равенство (3.1.80). Из соотношения (3.1.81) следует устойчивость вакуумного состояния, а из соотношений (3.1.83а)—(3.1.83в) — устойчивость одночастичных состояний.

Используя равенства (3.1.80) и (3.1.83), можно с помощью (3.1.78) получить матричный элемент S -матрицы:

$$\langle N(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \theta(\mathbf{l}) | S | N(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{l}) (\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \\ - 2\pi i \frac{\alpha_p}{\alpha_h} F(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \delta[\omega(\mathbf{k}) + m(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q} - \mathbf{p})]). \quad (3.1.84)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \langle N(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \theta(l) | S^+ S | N(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \theta(k) \rangle = & \delta(\mathbf{p} - l) [\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \\ & - 2\pi i \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_k} F(\mathbf{q}, \mathbf{k}) - \frac{\alpha_k}{\alpha_p} F^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + 2\pi i F(\mathbf{q}, \mathbf{k}) Z(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \frac{\alpha_k}{\alpha_p} F^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right)] \times \\ & \times \delta[\omega(k) + m(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q} - \mathbf{p})], \quad (3.1.85) \end{aligned}$$

где использовано равенство (3.1.34). Так как соотношения (3.1.30) и (3.1.24) дают

$$\left(\frac{\alpha_p}{\alpha_k} F(\mathbf{q}, \mathbf{k}) - \frac{\alpha_k}{\alpha_p} F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) \delta[\omega(k) + m(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q} - \mathbf{p})] = 0, \quad (3.1.86)$$

то равенства (3.1.85) и (3.1.33) приводят к соотношению

$$\langle N(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \theta(l) | S^+ S | N(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \theta(k) \rangle = \delta(\mathbf{p} - l) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (3.1.87)$$

Таким способом легко убедиться, что

$$\langle a | S^+ S | b \rangle = \langle a | b \rangle \quad (3.1.88)$$

для $|a\rangle$ и $|b\rangle$, принадлежащих подпространству \mathcal{S}_s . Это оправдывает сделанное предположение об унитарности матрицы S . Для случая, когда $|a\rangle$ и $|b\rangle$ принадлежат всему пространству \mathcal{S} , доказательство свойства (3.1.88) весьма громоздко.

Уравнение Бете—Солпитера. Общепринятый подход к изучению составных частиц основан на использовании уравнения Бете—Солпитера [2]. Амплитуда Бете—Солпитера для частицы V определяется выражением

$$\begin{aligned} G(x, y; \mathbf{k}) \equiv \langle 0 | T [N(x), \theta(y)] | V(\mathbf{k}) \rangle = \\ = \theta(t_x - t_y) \langle 0 | N(x) \theta(y) | V(\mathbf{k}) \rangle + \\ + \theta(t_y - t_x) \langle 0 | \theta(y) N(x) | V(\mathbf{k}) \rangle. \quad (3.1.89) \end{aligned}$$

В силу уравнения Гейзенберга (3.1.1a) имеем для $G(x, y; \mathbf{k})$

$$\begin{aligned} (i\partial/\partial t_x - \varepsilon(\nabla_x^2)) G(x, y; \mathbf{k}) = \\ = \lambda \int d^4\xi \int d^4\zeta \bar{\alpha}(x - \xi) \bar{\alpha}(x - \xi) \langle 0 | T [\theta^+(\xi) N(x) \theta(\zeta), \theta(y)] | V(\mathbf{k}) \rangle, \quad (3.1.90) \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\langle N(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \theta(\mathbf{l}) | S^+ S | N(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{l}) [\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - 2\pi i \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_h} F(\mathbf{q}, \mathbf{k}) - \frac{\alpha_h}{\alpha_p} F^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + 2\pi i F(\mathbf{q}, \mathbf{k}) Z(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \frac{\alpha_h}{\alpha_p} F^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right)] \times \\ \times \delta[\omega(\mathbf{k}) + m(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q} - \mathbf{p})], \quad (3.1.85)$$

где использовано равенство (3.1.34). Так как соотношения (3.1.30) и (3.1.24) дают

$$\left(\frac{\alpha_p}{\alpha_h} F(\mathbf{q}, \mathbf{k}) - \frac{\alpha_h}{\alpha_p} F^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) \delta[\omega(\mathbf{k}) + m(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - m(\mathbf{q} - \mathbf{p})] = 0, \quad (3.1.86)$$

то равенства (3.1.85) и (3.1.33) приводят к соотношению

$$\langle N(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \theta(\mathbf{l}) | S^+ S | N(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \theta(\mathbf{k}) \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{l}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (3.1.87)$$

Таким способом легко убедиться, что

$$\langle a | S^+ S | b \rangle = \langle a | b \rangle \quad (3.1.88)$$

для $|a\rangle$ и $|b\rangle$, принадлежащих подпространству \mathcal{S}_s . Это оправдывает сделанное предположение об унитарности матрицы S . Для случая, когда $|a\rangle$ и $|b\rangle$ принадлежат всему пространству \mathcal{S} , доказательство свойства (3.1.88) весьма громоздко.

Уравнение Бете—Солпитера. Общепринятый подход к изучению составных частиц основан на использовании уравнения Бете—Солпитера [2]. Амплитуда Бете—Солпитера для частицы V определяется выражением

$$G(x, y; \mathbf{k}) \equiv \langle 0 | T [N(x), \theta(y)] | V(\mathbf{k}) \rangle = \\ = \theta(t_x - t_y) \langle 0 | N(x) \theta(y) | V(\mathbf{k}) \rangle + \\ + \theta(t_y - t_x) \langle 0 | \theta(y) N(x) | V(\mathbf{k}) \rangle. \quad (3.1.89)$$

В силу уравнения Гейзенберга (3.1.1а) имеем для $G(x, y; \mathbf{k})$

$$(i\partial/\partial t_x - \varepsilon(\nabla_x^2)) G(x, y; \mathbf{k}) = \\ = \lambda \int d^4\xi \int d^4\zeta \bar{\alpha}(x - \xi) \bar{\alpha}(x - \xi) \langle 0 | T [\theta^+(\xi) N(x) \theta(\zeta), \theta(y)] | V(\mathbf{k}) \rangle, \quad (3.1.90)$$

где использован тот факт, что $[N(x), \theta(y)] = 0$ при $t_x = t_y$. Уравнение Гейзенберга (3.1.1б), где $\bar{\alpha}(x - \xi) = \alpha(x - \xi) \delta(t_x - t_\xi)$, приводит теперь к уравнению

$$(i\partial/\partial t_y - \mu(\nabla_y^2)) (i\partial/\partial t_x - \varepsilon(\nabla_x^2)) G(x, y; \mathbf{k}) = \\ = i\lambda \int d^4\xi \int d^4\zeta \bar{\alpha}(x - \xi) \bar{\alpha}(x - \zeta) \langle 0 | [\theta(y), \theta^+(\xi) N(x) \theta(\zeta)] | V(\mathbf{k}) \rangle \times \\ \times \delta(t_x - t_y) + \lambda^2 \int d^4\xi d^4\xi' d^4\zeta' \bar{\alpha}(x - \xi) \bar{\alpha}(x - \zeta) \bar{\alpha}(y - \xi') \times \\ \times \bar{\alpha}(y - \zeta') \langle 0 | T [\theta^+(\xi) N(x) \theta(\zeta), N^+(\xi') N(\xi') \theta(\zeta')] | V(\mathbf{k}) \rangle = \\ = i\lambda \hbar \bar{\alpha}(x - y) \int d^4\zeta \bar{\alpha}(x - \zeta) G(x, \zeta; \mathbf{k}). \quad (3.1.91)$$

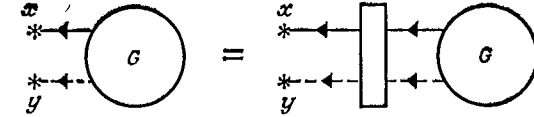


Рис. 3.5.

Здесь использованы свойства $\langle 0 | N^+ = \langle 0 | \theta^+ = 0$, а также равенство

$$\langle 0 | T [N(x), \theta(\zeta)] | V(\mathbf{k}) \rangle = \langle 0 | N(x) \theta(\zeta) | V(\mathbf{k}) \rangle \quad \text{для } t_x = t_\zeta. \quad (3.1.92)$$

Уравнение (3.1.91) можно записать в интегральной форме:

$$G(x, y; \mathbf{k}) = -i\lambda \hbar \int d^4\xi d^4\zeta d^4z S(x - \xi) \Delta(y - \zeta) \bar{\alpha} \times \\ \times (\xi - \zeta) \bar{\alpha}(\xi - z) G(\xi, z; \mathbf{k}). \quad (3.1.93)$$

Это так называемое однородное уравнение Бете—Солпитера (рис. 3.5). Здесь Δ и S — функции Грина:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \mu(\nabla^2) \right) \Delta(x) = i\delta^{(4)}(x), \quad (3.1.94a)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \right) S(x) = i\delta^{(4)}(x). \quad (3.1.94b)$$

В уравнении (3.1.93) нет неоднородного члена, так как

$$\langle 0 | T [N^0(x), \theta^0(y)] | V(\mathbf{k}) \rangle = 0.$$

Введем теперь функцию

$$G(x; \mathbf{k}) = \int d^4y \bar{\alpha}(x - y) G(x, y; \mathbf{k}). \quad (3.1.95)$$

Тогда уравнение (3.1.93) принимает вид

$$G(x; \mathbf{k}) = \int d^4\xi Q(x - \xi) G(\xi; \mathbf{k}), \quad (3.1.96)$$

где ядро

$$Q(x - \xi) = -i\lambda\hbar S(x - \xi) \int d^4y d^4\zeta \bar{\alpha}(x - y) \Delta(y - \zeta) \bar{\alpha}(\xi - \zeta). \quad (3.1.97)$$

Фурье-образ ядра $\bar{Q}(k)$, определяющий его разложение Фурье

$$Q(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \bar{Q}(k) e^{ikx}, \quad (3.1.98)$$

имеет вид

$$\bar{Q}(k) = \frac{i\lambda\hbar}{2\pi} \int d^4l \frac{1}{k_0 - l_0 - m(\mathbf{k} - \mathbf{l}) + i\varepsilon} \frac{\alpha_l^2}{l_0 - \omega(\mathbf{l}) + i\varepsilon} = \quad (3.1.99)$$

$$= \lambda\hbar \int d^3l \frac{\alpha_l^2}{k_0 - \omega(\mathbf{l}) - m(\mathbf{k} - \mathbf{l}) + i\varepsilon}. \quad (3.1.100)$$

Поскольку функция $G(x, \mathbf{k})$ является матричным элементом между состояниями $|0\rangle$ и $|V(\mathbf{k})\rangle$, она имеет вид

$$G(x; \mathbf{k}) = \bar{G}(k) \exp\{ikx - iM(\mathbf{k})t\}, \quad (3.1.101)$$

где $M(\mathbf{k})$ — энергия кванта V^0 . Тогда в силу уравнений (3.1.96) и (3.1.100) получаем

$$\left(1 - \lambda\hbar \int d^3l \frac{\alpha_l^2}{M(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{l}) - m(\mathbf{k} - \mathbf{l})}\right) \bar{G}(k) = 0. \quad (3.1.102)$$

Последнее означает, что $M(\mathbf{k})$ является собственным значением уравнения

$$1 - \lambda\hbar \int d^3l \frac{\alpha_l^2}{M(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{l}) - m(\mathbf{k} - \mathbf{l})} = 0. \quad (3.1.103)$$

Тем самым воспроизводится результат, полученный при анализе уравнения (3.1.53), и иллюстрируется возможность определения энергии связанного состояния с помощью уравнения Бете—Солпитера.

Если использовать (3.1.95) и (3.1.101), то уравнение (3.1.93) при $x = y$ дает

$$\langle 0 | N(x) \theta(x) | V(\mathbf{k}) \rangle = -i\lambda\hbar \int d^4\xi d^4\zeta \exp\{ik\xi - iM(\mathbf{k})t_\xi\} S(x - \xi) \Delta(x - \zeta) \bar{\alpha}(\xi - \zeta) \bar{G}(k). \quad (3.1.104)$$

С другой стороны, в силу (3.1.62) имеем

$$\langle 0 | N(x) \theta(x) | V(\mathbf{k}) \rangle = \frac{\hbar^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}} \exp\{ikx - iM(\mathbf{k})t\} \int d^3l g(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \mathbf{l}; \mathbf{k}). \quad (3.1.105)$$

Легко показать, что уравнение (3.1.104) переходит в (3.1.105) при использовании (3.1.62). Неопределенный нормировочный множитель $\beta(\mathbf{k})$ (а следовательно, и $\bar{G}(\mathbf{k})$) определяется, как было показано выше, каноническим перестановочным соотношением. Другой способ определения нормировочного множителя $\beta(\mathbf{k})$ состоит в использовании матричного элемента $\langle 0 | T [N(x) \theta(x), N^+(y) \theta^+(y)] | 0 \rangle$. Поскольку согласно (3.1.12а), $\theta(x) | 0 \rangle = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [N(x) \theta(x), N^+(y) \theta^+(y)] | 0 \rangle &= \\ &= \theta(t_x - t_y) \langle 0 | N(x) \theta(x) N^+(y) \theta^+(y) | 0 \rangle = \\ &= \theta(t_x - t_y) \int d^3k \langle 0 | N(x) \theta(x) | V(\mathbf{k}) \rangle \times \\ &\quad \times \langle V(\mathbf{k}) | N^+(y) \theta^+(y) | 0 \rangle + \dots, \quad (3.1.106) \end{aligned}$$

где многоточия обозначают слагаемые, содержащие все промежуточные состояния, отличные от состояний с одной V^0 -частицей. Из уравнения (3.1.106) находим

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [N(x) \theta(x), N^+(y) \theta^+(y)] | 0 \rangle &= \\ &= \theta(t_x - t_y) \int d^3k \exp \{ ik(x - y) - iM(\mathbf{k})(t_x - \\ &\quad - t_y) \} |\langle 0 | N(0) \theta(0) | V(\mathbf{k}) \rangle|^2 + \dots \quad (3.1.107) \end{aligned}$$

С другой стороны, вводя функцию

$$G(x, y; z) = \langle 0 | T [N(x), \theta(y), \theta^+(z) N^+(z)] | 0 \rangle \equiv \quad (3.1.108)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \theta(t_x - t_y) \theta(t_y - t_z) \langle 0 | N(x) \theta(y) \theta^+(z) N^+(z) | 0 \rangle + \\ &+ \theta(t_y - t_x) \theta(t_x - t_z) \langle 0 | \theta(y) N(x) \theta^+(z) N^+(z) | 0 \rangle + \\ &+ \theta(t_x - t_z) \theta(t_z - t_y) \langle 0 | N(x) \theta^+(z) N^+(z) \theta(y) | 0 \rangle - \\ &- \theta(t_y - t_z) \theta(t_z - t_x) \langle 0 | \theta(y) \theta^+(z) N^+(z) N(x) | 0 \rangle - \\ &- \theta(t_z - t_x) \theta(t_x - t_y) \langle 0 | \theta^+(z) N^+(z) N(x) \theta(y) | 0 \rangle - \\ &- \theta(t_z - t_y) \theta(t_y - t_x) \langle 0 | \theta^+(z) N^+(z) \theta(y) N(x) | 0 \rangle \quad (3.1.109) \end{aligned}$$

и повторяя выкладки, которые привели к уравнению (3.1.93), получаем неоднородное уравнение Бете—Солпитера (рис. 3.6)

$$\begin{aligned} G(x, y; \eta) &= S(x - \eta) \Delta(y - \eta) - i\lambda\hbar \int d^4\xi d^4\zeta d^4z S(x - \xi) \times \\ &\quad \times \Delta(y - \zeta) \bar{\alpha}(\xi - \zeta) \bar{\alpha}(\xi - z) G(\xi, z; \eta). \quad (3.1.110) \end{aligned}$$

Решая это уравнение, находим функцию $G(x, y; z)$, которая при $x = y$ определяет матричный элемент

$$\langle 0 | T [N(x) \theta(x), N^+(z) \theta^+(z)] | 0 \rangle.$$

Сравнивая этот результат с (3.1.107), можно найти матричный элемент $\langle 0 | N(0) \theta(0) | V(\mathbf{k}) \rangle$. Полученный таким способом ре-

зультат не только согласуется с выражением (3.1.105) при $x = 0$, но и определяет также нормировочный множитель $\beta(\mathbf{k})$, который оказывается равным аналогичному множителю в (3.1.59).

Составные и элементарные частицы. Закончим этот раздел замечанием о связи между составными и элементарными частицами. С этой целью введем модель Ли [3], в которой имеются три гейзенберговских поля $N(x)$, $\theta(x)$ и $V(x)$. Поля $N(x)$ и $V(x)$ удовлетворяют каноническим антикоммутиационным соотношениям

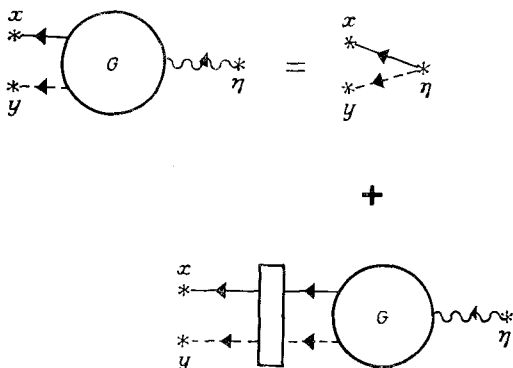


Рис. 3.6.

для фермионов, а $\theta(x)$ — каноническим перестановочным соотношением для бозонного поля. Уравнения Гейзенберга имеют вид

$$(i\partial/\partial t - \varepsilon(\nabla^2)) N(x) = g \int d^4y \bar{a}(x-y) \theta^\dagger(y) V(x), \quad (3.1.111a)$$

$$(i\partial/\partial t - \mu(\nabla^2)) \theta(x) = g \int d^4y \bar{a}(x-y) N^\dagger(y) V(x), \quad (3.1.111б)$$

$$(i\partial/\partial t - M_0(\nabla^2)) V(x) = g \int d^4y \bar{a}(x-y) N(y) \theta(y). \quad (3.1.111в)$$

Эти уравнения могут быть решены аналогично тому, как это делается в (N, θ) -модели. Уравнения Гейзенберга (3.1.111a) — (3.1.111в) инвариантны относительно преобразований фазы:

$$N(x) \rightarrow e^{i\alpha_1} N(x), \quad \theta(x) \rightarrow e^{i\alpha_2} \theta(x), \quad V(x) \rightarrow e^{i\alpha_1 + i\alpha_2} V(x). \quad (3.1.112)$$

Предполагая, что существуют три физических поля $N^0(x)$, $\theta^0(x)$ и $V^0(x)$, решим уравнения Гейзенберга (3.1.111a) — (3.1.111в) при условии, что преобразование фазы (3.1.112) индуцируется следующим преобразованием:

$$N^0(x) \rightarrow e^{i\alpha_1} N^0(x), \quad \theta^0(x) \rightarrow e^{i\alpha_2} \theta^0(x), \quad V^0(x) \rightarrow e^{i\alpha_1 + i\alpha_2} V^0(x). \quad (3.1.113)$$

Тогда динамические отображения для $N(x)$ и $\theta(x)$ имеют вид соответственно (3.1.49а) и (3.1.49б), тогда как динамическое отображение для $V(x)$ дается выражением

$$V(x) = Z_3(q) V^0(x) + \dots \quad (3.1.114)$$

В результате вычисления приходим к следующему соотношению для $Z_3(q)$:

$$Z_3(q) \left(1 + \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\alpha_k^2}{[\omega(k) + m(q-k) - M(q)]^2} \right) = 1. \quad (3.1.115)$$

Введем теперь перенормированную константу связи $g_r(q)$ с помощью соотношения

$$g_r^2(q) = Z_3(q) g^2. \quad (3.1.116)$$

Тогда из (3.1.115) имеем

$$Z_3(q) = 1 - \frac{1}{(2\pi)^3} g_r^2(q) \int d^3k \frac{\alpha_k^2}{[\omega(k) + m(q-k) - M(q)]^2}. \quad (3.1.117)$$

Предполагая величину g_r^2 отличной от нуля, рассмотрим предел $Z_3(q) \rightarrow 0$. При этом (3.1.117) переходит в (3.1.46) с перенормированной константой связи

$$\frac{1}{(2\pi)^3} g_r^2(q) = B(q). \quad (3.1.118)$$

Кроме того, как было показано, S -матрица, выраженная через перенормированную константу связи, согласуется с S -матрицей для (N, θ) -модели, если положить $Z_3(q) = 0$ и использовать связь (3.1.118). Таким образом, составная частица оказывается специальным случаем элементарной частицы [4]; этот специальный случай соответствует условию $Z_3 = 0$.

Для выяснения физического смысла этого результата полезно рассмотреть задачу о нейтроне n , протоне p и дейтроне d . Появление физического нейтрона, физического протона и физического дейтрона в эксперименте может стать поводом для введения гейзенберговских полей n , p и d . Из приведенных выше соотношений ясно, что если перенормирующий множитель для d обращается в нуль, то дейтрон — действительно составная частица. При этом можно формулировать теорию с помощью только двух гейзенберговских полей n и p [5].

3.2. Представление физических частиц и вычисления по теории возмущений

Введение. Точно решаемая модель, рассмотренная в разд. 3.1, иллюстрирует, как выполняется условие реализации представления физических частиц. Показано в явном виде, что гамильто-

ниан может быть в слабом смысле равен свободному гамильтониану физических частиц даже при наличии реакций между частицами (т. е. при $S \neq 1$). С другой стороны, в соответствии с обычной формулировкой разложений в ряд по теории возмущений S -матрица вычисляется на основе гамильтониана взаимодействия. Отсюда возникает интересная задача: проанализировать, каким образом обычная теория возмущений согласуется с условием для представления физических частиц. Эта задача рассматривается в данном разделе.

Адиабатический множитель. Вычисления по теории возмущений обычно проводятся с помощью введения так называемого *представления взаимодействия* [6]¹⁾. Для его построения необходимо заменить гамильтониан взаимодействия $h(t)$ на $h(t) \exp(-\varepsilon|t|)$ (адиабатическое включение взаимодействия). К этому приходится прибегать, поскольку часто не существует унитарного преобразования между представлением Гейзенберга и представлением взаимодействия, если не введен адиабатический множитель $\exp(-\varepsilon|t|)$. Величину $h(t) \exp(-\varepsilon|t|)$ мы будем обозначать через $h_\varepsilon(t)$.

Начнем с краткого изложения теории представления взаимодействия. Каждому оператору $A(t)$ в представлении Гейзенберга соответствует оператор $A_{\text{int}}(t)$ в представлении взаимодействия, связанный с $A(t)$ унитарным преобразованием

$$A(x) = u^{-1}(t) A_{\text{int}}(x) u(t), \quad (3.2.1)$$

где t обозначает t_x . Унитарный оператор $u(t)$ выбирается так, чтобы выполнялось соотношение

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A_{\text{int}}(x) = [A_{\text{int}}(x), H_0], \quad (3.2.2)$$

где H_0 — свободный гамильтониан физического свободного поля φ^0 :

$$H_0 = \int d^3k \omega(k) \alpha^\dagger(k) \alpha(k). \quad (3.2.3)$$

При выполнении условия (3.2.2) гамильтониан взаимодействия $h_\varepsilon(t)$ определяется посредством временной зависимости $u(t)$ следующим образом:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u(t) = h_\varepsilon(t) u(t). \quad (3.2.4)$$

Тогда из определения (3.2.1) получаем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A(x) = u^{-1}(t) [A_{\text{int}}(x), H_0 + h_\varepsilon(t)] u(t). \quad (3.2.5)$$

¹⁾ Подробное описание представления взаимодействия дано в учебниках, цитированных в работе [6].

С другой стороны, если H — гамильтониан в представлении Гейзенберга, то

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A(x) = [A(x), H]. \quad (3.2.6)$$

Уравнение (3.2.5) должно переходить в (3.2.6) в пределе $\varepsilon \rightarrow +0$; поэтому получаем

$$H = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{u^{-1}(t) [H_0 + h_\varepsilon(t) + W_0] u(t)\}, \quad (3.2.7)$$

где W_0 — c -число. Поскольку $\omega(\mathbf{k})$ — энергия физического кванта, $h_\varepsilon(t)$ не должно приводить к появлению какого-либо сдвига энергии (т. е. собственной энергии). Иными словами, $h_\varepsilon(t)$ содержит контрчлен собственной энергии. Согласно (3.2.7), $h(t)$ — оператор в представлении взаимодействия. Поэтому его зависимость от времени определяется уравнением (3.2.2). Другими словами, производная по времени от $h(t)$ появляется за счет действия H_0 .

Представление физических частиц. Докажем теперь соотношение

$$\{u^{-1}(t) [H_0 + W_0 + h_\varepsilon(t)] u(t)\}_{t=0} = H_0 + Q + W_0, \quad (3.2.8)$$

справедливое для малых ε , где Q — оператор со следующим свойством:

$$\langle a | Q | b \rangle = 0(\varepsilon). \quad (3.2.9)$$

Символом $0(\varepsilon)$ обозначаются величины порядка ε . Состояния $|a\rangle$ и $|b\rangle$ являются состояниями волновых пакетов физических частиц.

Для вывода соотношения (3.2.8) вспомним, что физическое поле $\varphi^0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H_0, \varphi^0], \quad (3.2.10)$$

а производная по времени от $h(t)$ определяется действием H_0 :

$$\frac{i}{\hbar} [H_0, h_\varepsilon(t)] = \exp(-\varepsilon |t|) \frac{dh(t)}{dt}. \quad (3.2.11)$$

Из (3.2.11) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{u^{-1}(t) [H_0, h_\varepsilon(t)] u(t)\} &= \\ &= u^{-1}(t) \left\{ -\frac{i}{\hbar} [H_0, h_\varepsilon(t)] + \frac{d}{dt} h_\varepsilon(t) \right\} u(t) = \\ &= \left(\frac{d}{dt} \exp(-\varepsilon |t|) \right) u^{-1}(t) h(t) u(t). \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Поскольку при $t \rightarrow -\infty$ имеем $u(t) \rightarrow 1$ и $h_\varepsilon(t) \rightarrow 0$, выражение (3.2.12) дает

$$\begin{aligned} \{u^{-1}(t) [H_0, h_\varepsilon(t)] u(t)\}_{t=0} &= H_0 + \int_{-\infty}^0 dt' u^{-1}(t') h(t') u(t') \frac{d}{dt'} e^{\varepsilon t'} = \\ &= H_0 + \varepsilon \int_{-\infty}^0 dt' u^{-1}(t') h_\varepsilon(t') u(t') = \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$= H_0 + \varepsilon \int_{-\infty}^0 dt' h_\varepsilon(t') + \dots \quad (3.2.14)$$

При получении (3.2.14) из (3.2.13) использовано соотношение

$$u(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' h_\varepsilon(t') u(t'), \quad (3.2.15)$$

которое может быть получено из (3.2.4). Второе слагаемое в (3.2.13) представляет собой оператор Q из (3.2.8). В линейном приближении теории возмущений Q совпадает со вторым слагаемым в (3.2.14).

Для вычисления этого слагаемого заметим, что при $t < 0$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \langle W | h_\varepsilon(t) | W' \rangle &= e^{\varepsilon t} \langle W | \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) h(0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) | W' \rangle = \\ &= \langle W | h(0) | W' \rangle e^{\varepsilon t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (W - W') t\right), \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

где $|W\rangle$ и $|W'\rangle$ — собственные состояния H_0 :

$$H_0 |W\rangle = W |W\rangle \text{ и т. п.}$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \langle W | \int_{-\infty}^0 dt' h_\varepsilon(t') | W' \rangle = \langle W | h(0) | W' \rangle \delta_{W, W'}, \quad (3.2.17)$$

где использовано соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{W - W' - i\hbar\varepsilon} = -\frac{1}{i\hbar} \delta_{W, W'}. \quad (3.2.18)$$

Исследуем подробнее соотношение (3.2.17), предполагая, что рассматриваемая система ограничена «ящиком» объема V . Тогда импульсы физических частиц имеют дискретные значения, а операторы уничтожения физических частиц нормированы соотношением

$$[\alpha(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{l})] = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}. \quad (3.2.19)$$

Множитель $V/(2\pi)^3$ обеспечивает стремление правой части (3.2.19) к $\delta(k-l)$ в пределе $V \rightarrow \infty$. Величина в (3.2.17) представляет собой матричный элемент Q в первом приближении. Для изучения структуры этой величины рассмотрим, например, член вида $\alpha^+ \alpha^+ \alpha \alpha$, входящий в Q :

$$V \frac{(2\pi)^{12}}{V^4} \sum_k \sum_l \sum_p Q(k, l, p) \alpha^+(k) \alpha^+(l) \alpha(p) \alpha(k+l-p); \quad (3.2.20)$$

здесь учтено, что каждый оператор α или α^+ в $\varphi^0(x)$ содержит множитель $(2\pi)^3/V$, равный объему ячейки в импульсном пространстве:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_k \int \rightarrow d^3k.$$

Множитель V в числителе выражения (3.2.20) обусловлен интегрированием по пространству в гамильтониане. Напомним, что, поскольку вектор k имеет три компоненты, суммирование в (3.2.20) проводится по девяти переменным $(k_i, l_i, p_i, i = 1, 2, 3)$. Но только восемь из них независимы друг от друга, поскольку, согласно (3.2.17), величина $Q(k, l, p)$ обращается в нуль, если не выполнено условие

$$\omega(k) + \omega(l) = \omega(p) + \omega(k+l-p). \quad (3.2.21)$$

Учитывая далее, что $V = L^3$, мы видим, что все матричные элементы оператора (3.2.20) — величины порядка $1/L$ при больших L . Заметим, что при конечных ϵ закон сохранения энергии (3.2.21) нарушается на величину порядка $0(\epsilon)$. Поэтому матричные элементы (3.2.20) порядка $0(\epsilon)$ в пределе $L \rightarrow \infty$. Используя те же аргументы, можно доказать, что матричные элементы всех нормальных произведений, входящих в Q (кроме члена вида $\alpha^+ \alpha$ и постоянного численного слагаемого), — величины порядка $0(\epsilon)$. Поскольку оператор $\alpha^+(k) \alpha(k)$, очевидно, сохраняет энергию любого состояния, закон сохранения энергии не накладывает никаких ограничений на матричные элементы этого оператора. Отсюда следует, что матричные элементы оператора $\alpha^+ \alpha$ остаются конечными при предельных переходах $V \rightarrow \infty$ и $\epsilon \rightarrow +0$. Но оператор $\alpha^+ \alpha$ вносит вклад в собственную энергию, и, поскольку собственная энергия уже входит в H_0 , оператор Q не содержит члена $\alpha^+ \alpha$. Кроме того, оператор Q не содержит никакой численной константы, поскольку W_0 — полная энергия основного состояния. Таким образом, доказаны соотношения (3.2.8) и (3.2.9). Ситуация не изменится, если рассмотреть также члены более высокого порядка в разложении по теории возмущений (3.2.13), поскольку каждый матричный элемент более высокого порядка,

входящий в Q , содержит такой же множитель $\delta_{\mathcal{W}, \mathcal{W}'}$, как и член первого порядка в (3.2.17).

Из выражения (3.2.7) вместе с (3.2.8) и (3.2.9) следует, что гамильтониан H в слабом смысле совпадает со свободным гамильтонианом $H_0 + W_0$; оператор Q не дает вклада ни в один матричный элемент оператора H в пределе $\varepsilon \rightarrow +0$.

Реакции между частицами. Вычислим теперь S -матрицу, используя оператор Q в качестве взаимодействия. В низшем порядке теории возмущений имеем

$$S = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-\varepsilon |t|) Q. \quad (3.2.22)$$

Отсюда видно, что $(S - 1)$ не исчезает даже в пределе $\varepsilon \rightarrow +0$, хотя Q порядка ε ; тем самым становится ясно, почему реакции между частицами все же возможны, несмотря на то, что гамильтониан H равен $H_0 + W_0$ в слабом смысле. Хотя взаимодействие между асимптотическими частицами в каждый момент времени практически пренебрежимо мало, оно действует в течение бесконечно долгого времени и приводит, таким образом, к конечному наблюдаемому эффекту рассеяния.

Приведенные выше соображения показывают, что условия (3.2.8) и (3.2.9) для представления физических частиц выполняются только в пределе $V \rightarrow \infty$. Это можно понять интуитивно следующим образом. Рассмотрим две частицы, которые взаимодействуют друг с другом, когда расстояние между ними становится меньше радиуса взаимодействия. Вероятность нахождения двух частиц в пределах радиуса взаимодействия становится тем меньше, чем сильнее возрастают размеры соответствующих этим частицам волновых пакетов. Взаимодействие полностью исчезает, когда два волновых пакета приобретают бесконечную протяженность. Но последнее возможно лишь при условии, что объем V бесконечен.

Это рассуждение показывает, что существование представления физических частиц основано на естественном расплывании волновых пакетов частиц. Как будет показано в гл. 10, систему конечного объема можно рассматривать, начав с предельного случая системы, не имеющей границ. Иными словами, мы сначала изучим систему бесконечного объема с помощью представления физических частиц, а затем создадим замкнутую поверхностную особенность, разделяющую систему на две части, расположенные внутри и снаружи поверхностной особенности. Подобная особенность ведет себя как макроскопический поверхностный объект, который индуцирует самосогласованный потенциал (гл. 9 и 10).

Этот потенциал воздействует на волновые функции физических частиц. Рассматривая лишь область внутри поверхности, можно изучать систему, приближенно ограниченную областью конечного размера.

3.3. Представление физических частиц и вариационный принцип

Рассмотрим набор параметризованных операторов уничтожения $\{\alpha(\mathbf{k}, \theta)\}$, где θ — параметр. Связанное с этими операторами (при определенном значении θ) пространство Фока обозначим $\mathcal{S}(\theta)$. Принимая, что гейзенберговское поле $\psi(x)$ реализуется в пространстве Фока $\mathcal{S}(\theta)$, определим

$$W_0(\theta) = \langle 0, \theta | H | 0, \theta \rangle, \quad (3.3.1)$$

где H — гамильтониан гейзенберговского поля, а $|0, \theta\rangle$ — вакуумное состояние в $\mathcal{S}(\theta)$, причем

$$\alpha(\mathbf{k}, \theta) | 0, \theta \rangle = 0,$$

можно доказать, что представление физических частиц соответствует минимальному значению $W_0(\theta)$.

Пусть θ_0 — значение параметра, соответствующего представлению физических частиц:

$$H = \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}, \theta_0) \alpha(\mathbf{k}, \theta_0) + W_0(\theta_0). \quad (3.3.2)$$

Перейдем теперь к близкому пространству Фока $\mathcal{S}(\theta_0 + d\theta)$, для которого соответствующие операторы уничтожения имеют вид

$$\alpha(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta) = \alpha(\mathbf{k}, \theta_0) + \delta\alpha(\mathbf{k}). \quad (3.3.3)$$

Здесь $\delta\alpha(\mathbf{k})$ — линейная комбинация нормальных произведений, состоящих из $\alpha(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta)$ и $\alpha^\dagger(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta)$. Каждый член с нормальным произведением в $\delta\alpha(\mathbf{k})$ содержит численный коэффициент порядка $\delta\theta$. Действие $\alpha(\mathbf{k}, \theta_0)$ на векторы в пространстве $\mathcal{S}(\theta_0 + \delta\theta)$ определено выражением (3.3.3), поскольку $\alpha(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta)$ — оператор уничтожения в пространстве $\mathcal{S}(\theta_0 + \delta\theta)$. Так как нас интересуют только члены первого порядка по $\delta\theta$, $\alpha(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta)$ и $\alpha^\dagger(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta)$ в $\delta\alpha(\mathbf{k})$ можно заменить просто на $\alpha(\mathbf{k}, \theta_0)$ и $\alpha^\dagger(\mathbf{k}, \theta_0)$. Тогда действие оператора $\alpha(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta)$ на векторы в представлении физических частиц $\mathcal{S}(\theta_0)$ также определяется выражением (3.3.3). Таким образом, (3.3.3) хорошо определено в обоих представлениях $\mathcal{S}(\theta_0)$ и $\mathcal{S}(\theta_0 + \delta\theta)$.

Используя (3.3.2) и (3.3.3), имеем

$$H = \int d^3k \omega(\mathbf{k}) [\alpha^\dagger(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta) \alpha(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta) - \alpha^\dagger(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta) \delta\alpha(\mathbf{k}) - \delta\alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta)] + W_0(\theta_0) + O(\delta\theta^2). \quad (3.3.4)$$

Последнее слагаемое $0(\delta\theta^2)$ имеет вид $\delta\alpha^+(\mathbf{k})\delta\alpha(\mathbf{k})$ и потому положительно. Далее, поскольку

$$\langle 0, \theta_0 + \delta\theta | \alpha^+(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta) = 0, \quad \alpha(\mathbf{k}, \theta_0 + \delta\theta) | 0, \theta_0 + \delta\theta \rangle = 0,$$

из (3.3.4) следует

$$\langle 0, \theta_0 + \delta\theta | H | 0, \theta_0 + \delta\theta \rangle = W_0(\theta_0) + 0(\delta\theta^2), \quad (3.3.5)$$

а это означает, что $W_0(\theta_0)$ — минимальное значение.

Этот результат обнаруживает тесную связь между самосогласованным и вариационным методами в квантовой теории поля.

3.4. Общий анализ представления физических частиц

Динамическое отображение. Рассмотрим гейзенберговское поле $\psi(x)$, гамильтониан которого H . Примем, что уравнение Гейзенберга и одновременные канонические перестановочные соотношения приводят к реализации $\psi(x)$ в пространстве Фока \mathcal{F} , связанном со свободным физическим полем $\varphi^0(x)$. Иными словами, мы считаем, что получено динамическое отображение

$$\psi(x) = \psi(x; \varphi^0). \quad (3.4.1)$$

Это отображение представляется в виде линейной комбинации нормальных произведений полей φ^0 :

$$\psi(x) = \chi + Z^{1/2}\varphi^0(x) +$$

$$+ \int d^4\xi \int d^4\zeta F(x - \xi, x - \zeta) : \varphi^0(\xi) \varphi^0(\zeta) : + \dots \quad (3.4.2)$$

Здесь χ — численная константа, а перенормирующий множитель Z может содержать пространственные производные. Постоянная χ равна нулю в том случае, если поле ψ фермионное. Соотношение (3.4.2) является слабым в том смысле, что знак равенства означает равенство матричных элементов между векторами в \mathcal{F} . Поскольку ψ определяется слабым соотношением (3.4.2), уравнение Гейзенберга и канонические одновременные перестановочные соотношения также должны рассматриваться в слабом смысле. Для того чтобы знать «рецепт» прочтения уравнения Гейзенберга, содержащего некоторые произведения полей ψ , необходимо определить произведения $\psi(x; \varphi^0)$. Они неявно использовались в разд. 3.1, а именно правило для произведений гласит, что прежде всего вычисляются произведения нормальных произведений φ^0 , причем они представляются в виде линейных комбинаций нормальных произведений. Интегрирование по пространству и времени следует выполнять только после надлежащего вычисления произведений нормальных произведений. При записи разложения (3.4.2) предполагалось, что трансляционная симметрия феномено-

логически не нарушена (иными словами, основное состояние $|0\rangle$ трансляционно инвариантно). В гл. 7 показано, каким образом можно феноменологически нарушить трансляционную симметрию.

Интегрирования по времени (dt_ξ , dt_ζ и т. д.) в (3.4.2) распространяются от $-\infty$ до ∞ . Существенно, что состояния $|a\rangle$ и $|b\rangle$ в $\langle a | \psi(x) | b \rangle$ являются не плоскими волнами, а волновыми пакетами. Если бы эти состояния были плоскими волнами, интегрирование по времени в (3.4.2) сводилось бы к интегрированию монохроматических осциллирующих функций и никогда не приводило бы к конечным результатам; сходимость обеспечивается только благодаря тому, что используются состояния волновых пакетов. В этом случае области бесконечно удаленного прошлого или будущего не вносят вкладов в интеграл, и поэтому допустимо интегрирование по частям.

Связь между H и H_0 . Покажем теперь, что гамильтониан системы H в слабом смысле равен свободному гамильтониану H_0 для φ^0 (с точностью до численного W_0 , когда существует динамическое отображение, выражаемое равенством (3.4.1)). Для упрощения ситуации предположим, что ψ и φ^0 вещественны. Обобщение рассмотрения на случай комплексных полей производится непосредственно. Свободный гамильтониан для φ^0 имеет вид

$$H_0 = \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}). \quad (3.4.3)$$

Соотношение

$$[H_0, \varphi^0(x)] = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^0(x) \quad (3.4.4)$$

приводит к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} \langle a | [H_0, \psi(x)] | b \rangle &= Z^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} \langle a | \varphi^0(x) | b \rangle + \\ &+ \int d^4\xi \int d^4\zeta F(x - \xi, x - \zeta) \left(\frac{\partial}{\partial t_\xi} + \frac{\partial}{\partial t_\zeta} \right) \langle a | : \varphi^0(\xi) \varphi^0(\zeta) : | b \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Применяя далее интегрирование по частям, получаем

$$\langle a | [H_0, \psi(x)] | b \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \langle a | \psi(x) | b \rangle. \quad (3.4.6)$$

Сравнивая (3.4.6) с соотношением

$$\langle a | [H, \psi(x)] | b \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \langle a | \psi(x) | b \rangle, \quad (3.4.7)$$

находим

$$\langle a | [H_0, \psi(x)] | b \rangle = \langle a | [H, \psi(x)] | b \rangle. \quad (3.4.8)$$

Это вычисление можно обобщить следующим образом:

$$\langle a | [H_0, \text{произведение } \psi] | b \rangle = \langle a | [H, \text{произведение } \psi] | b \rangle. \quad (3.4.9)$$

Пусть \mathcal{S} — неприводимое представление набора операторов, состоящего из всех произведений ψ ; тогда равенство (3.4.9) означает, что H в слабом смысле равен $H_0 + W_0$, где W_0 — c -число. Таким образом, \mathcal{S} является представлением физических частиц.

Другой способ получения соотношения (3.4.6) состоит в вычислении фурье-образа матричных элементов в правой части равенства (3.4.2). Имеем, например,

$$\langle \alpha_i | \psi(x) | \alpha_j \rangle = 2\hbar \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \bar{F}[-k, \omega(k); 1, \omega(l)] \times \\ \times u^*(k) f_i^*(k) u(l) f_j(l) \exp\{i(l-k)x + i[\omega(k) - \omega(l)]t\} \quad (3.4.10)$$

при $i \neq j$, где $|\alpha_i\rangle$ и $|\alpha_j\rangle$ — состояния волновых пакетов:

$$|\alpha_i\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} f_i(k) \alpha^+(k) |0\rangle, \quad (3.4.11)$$

а $u(k)$ — волновая функция в выражении

$$\varphi^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \{u(k) \alpha(k) \exp[ikx - i\omega(k)t] + \\ + u^*(k) \alpha^+(k) \exp[-ikx + i\omega(k)t]\}. \quad (3.4.12)$$

Величина $\bar{F}(k, k_0; 1, l_0)$ в (3.4.10) — фурье-образ от $F(x - \xi, x - \zeta)$:

$$F(x - \xi, x - \zeta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \bar{F}(k, k_0; 1, l_0) \exp[ik(x - \xi) + il(x - \zeta)]. \quad (3.4.13)$$

Зависимость от времени слагаемого в (3.4.10) явно указывает на выполнение равенства (3.4.6), поскольку $\omega(k)$ и $\omega(l)$ — собственные значения H_0 в бра- и кет-состояниях соответственно.

Асимптотический предел и \mathcal{S} -матрица. Запишем уравнение свободного поля для φ^0 в виде (2.6.7), а именно

$$\lambda(\partial) \varphi^0(x) = 0. \quad (3.4.14)$$

Тогда действие оператора $\overleftrightarrow{\Gamma}$, определенного выражением (2.6.28), приводит к (2.6.126):

$$\alpha(k) = \frac{1}{\hbar} \int d^3x \bar{u}(k) \exp[-ikx + i\omega(k)t] \overleftrightarrow{\Gamma} \varphi^0(x). \quad (3.4.15)$$

Если φ^0 вещественно, то $\bar{u} = u^*$. Введем оператор

$$a(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\hbar} \int d^3x \bar{u}(\mathbf{k}) \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega(\mathbf{k})t] \overleftrightarrow{\Gamma} Z^{-1/2} [\psi(\mathbf{x}) - \chi] \quad (3.4.16a)$$

и построим

$$\psi_g(t) = \int d^3k g(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}, t), \quad (3.4.16b)$$

где $g(\mathbf{k})$ — квадратично-интегрируемая функция. Определим далее величины $\alpha^{\text{in}}(\mathbf{k})$ и $\alpha^{\text{out}}(\mathbf{k})$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle a | \psi_g(t) | b \rangle = \langle a | \int d^3k g(\mathbf{k}) \alpha^{\text{out}}(\mathbf{k}) | b \rangle, \quad (3.4.17)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle a | \psi_g(t) | b \rangle = \langle a | \int d^3k g(\mathbf{k}) \alpha^{\text{in}}(\mathbf{k}) | b \rangle. \quad (3.4.18)$$

Существование этих пределов основано на использовании состояний волновых пакетов. Осциллирующие компоненты, входящие в $[\psi(\mathbf{x}) - \chi]$ и не находящиеся в фазе с волновой функцией свободной частицы, исчезают в пределах $t \rightarrow \pm\infty$. В результате входящее и выходящее поля обладают той же энергией, что и свободное поле φ^0 .

Оператор $\rho \equiv Z^{-1/2} (\psi - \chi)$ называют связывающим полем для α^{in} и α^{out} .

До сих пор мы принимали, что поле φ^0 имеет смысл для всех физических свободных полей $\{\varphi_i^0; i = 1, 2, \dots\}$. Если существует матрица S , удовлетворяющая соотношению

$$\alpha_i^{\text{out}}(\mathbf{k}) = S^{-1} \alpha_i^{\text{in}}(\mathbf{k}) S \quad \text{для всех } i, \quad (3.4.19)$$

то ее называют S -матрицей.

Между элементами набора гейзенберговских полей $\{\psi\}$ и элементами набора физических полей $\{\varphi^0\}$ не обязательно должно существовать взаимно-однозначное соответствие. Предположим, что существуют физические поля, которые не могут быть представлены в виде линейного слагаемого в динамическом отображении любого из полей $\{\psi\}$. Тогда можно утверждать, что эти физические частицы составные, и искать такое произведение ψ , для которого линейный член в динамическом отображении давал бы искомое составное физическое поле. Если для образования такого произведения необходимо по крайней мере n полей ψ , то соответствующая составная частица называется n -частичным связанным состоянием. Указанное произведение полей ψ (из которого следует вычесть его вакуумное среднее значение) действует как связывающее поле для составной частицы в том смысле, что входящее и выходящее поля для составной частицы получаются как асимпто-

тические пределы этого произведения. При этом асимптотические пределы определяются так же, как в выражениях (3.4.17) и (3.4.18).

Примем теперь, что коэффициенты разложения в динамическом отображении (3.4.2) являются запаздывающими функциями, так что

$$F(x - \xi, x - \zeta) = \theta(t_x - t_\xi) \theta(t_x - t_\zeta) \widehat{F}(x - \xi, x - \zeta); \quad (3.4.20)$$

в этом случае $\varphi^{\text{in}}(x) = \varphi^0(x)$ [т. е. $\alpha^{\text{in}}(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k})$].

Поскольку предельный переход ($t \rightarrow \infty$) в (3.4.17) приводит к исчезновению всех осцилляций в $a(\mathbf{k}, t)$, не совпадающих по фазе с физическим полем, имеем

$$\alpha^{\text{out}}(\mathbf{k}) = \alpha^{\text{in}}(\mathbf{k}) + \dots, \quad (3.4.21)$$

где многоточием обозначены нормальные произведения более высоких порядков, содержащие как α^{in} , так и $\alpha^{\text{in}\dagger}$. В выражение (3.4.21) не входит численное слагаемое, поскольку, согласно (3.4.16), динамическое отображение $a(\mathbf{k}, t)$ не содержит c -числа.

Устойчивость вакуума. Вспомним теперь, что частота, соответствующая матричному элементу $\langle \alpha(\mathbf{l}) | \psi(\mathbf{x}) | \alpha(\mathbf{p}) \alpha(\mathbf{q}) \rangle$, согласно (3.4.6), равна переданной энергии $[\omega(\mathbf{p}) + \omega(\mathbf{q}) - \omega(\mathbf{l})]$. Поскольку при переходе к пределу ($t \rightarrow \infty$) в (3.4.17) остаются только волны с частотой $\omega(\mathbf{k})$, очевидно, что

$$\begin{aligned} \langle a(\mathbf{l}) | \alpha^{\text{out}}(\mathbf{k}) | \alpha(\mathbf{p}) \alpha(\mathbf{q}) \rangle &\sim \delta(\mathbf{l} + \mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \\ &\times \delta[\omega(\mathbf{l}) + \omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{p}) - \omega(\mathbf{q})], \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

так что данный матричный элемент сохраняет энергию и импульс. Аналогично можно показать, что вообще все матричные элементы $\alpha^{\text{out}}(\mathbf{k})$ сохраняют энергию и импульс.

Таким образом, имеем

$$\langle a | \alpha^{\text{out}}(\mathbf{k}) | 0 \rangle = 0 \quad (3.4.23)$$

для любого состояния $|a\rangle$; при этом подразумевается, что если одночастичная энергия $\omega(\mathbf{k})$ обращается в нуль при некотором дискретном значении \mathbf{k} , то его вклад в состояние волнового пакета имеет нулевую меру. В этом случае

$$\langle \alpha(\mathbf{k}) S | 0 \rangle = 0, \quad (3.4.24)$$

где использовано определение (3.4.19) с $\alpha^{\text{in}}(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k})$. Поскольку соотношение (3.4.24) выполняется при любом \mathbf{k} , очевидно, что состояние $S | 0 \rangle$ является вакуумным: $S | 0 \rangle = c | 0 \rangle$, $|c| = 1$. Здесь и всюду ниже оператор S предполагается унитарным. Это предположение означает, что полная вероятность частице вступить в реакцию равна единице.

Без потери общности фазу S можно выбрать так, что $c = 1$. Тогда имеем

$$S|0\rangle = |0\rangle. \quad (3.4.25)$$

Это соотношение называется условием устойчивости вакуума.

Устойчивость одночастичных состояний. Рассуждение, аналогичное приведенному к (3.4.22), указывает, что матричный элемент $\langle a | \alpha^{\text{out}}(\mathbf{k}) | \alpha(\mathbf{p}) \rangle$ пропорционален $\delta[\omega(\mathbf{p}) - \omega(\mathbf{k}) - \dots]$, где многоточие обозначает энергии частиц в состоянии $|a\rangle$.

Если энергия одного кванта никогда не превышает порога многоквантовых энергий, т. е. если

$$\omega(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \leq \omega(\mathbf{k}_1) + \dots + \omega(\mathbf{k}_n), \quad n \geq 2, \quad (3.4.26)$$

то, применяя те же рассуждения, которые привели к (3.4.23), получаем

$$\langle a | \alpha^{\text{out}}(\mathbf{k}) | \alpha(\mathbf{p}) \rangle = 0 \quad \text{для } |a\rangle \neq |0\rangle. \quad (3.4.27)$$

Здесь существенно заметить, что $|a\rangle$ — состояние волнового пакета, так что вклад состояний, удовлетворяющих знаку равенства в (3.4.26), пренебрежимо мал (имеет нулевую меру). Из уравнения (3.4.27) следует

$$\alpha^{\text{out}}(\mathbf{k}) | \alpha(\mathbf{p}) \rangle = c \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) | 0 \rangle.$$

Поскольку в динамическом отображении α^{out} вклад в $\langle 0 | \alpha^{\text{out}} | \alpha \rangle$ дает только линейный член, которым является α^{in} , находим, что $c = 1$. Поэтому имеем

$$\alpha(\mathbf{k}) S | \alpha(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) S | 0 \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) | 0 \rangle,$$

где использовано определение (3.4.19). Получаем далее

$$S | \alpha(\mathbf{p}) \rangle = | \alpha(\mathbf{p}) \rangle + c | 0 \rangle,$$

где c — c -число; отсюда, используя (3.4.25), находим

$$c = \langle 0 | S | \alpha(\mathbf{p}) \rangle - \langle 0 | \alpha(\mathbf{p}) \rangle = 0.$$

Окончательно приходим к соотношению

$$S | \alpha(\mathbf{p}) \rangle = | \alpha(\mathbf{p}) \rangle, \quad (3.4.28)$$

которое указывает на устойчивость одночастичного состояния. Заметим, что устойчивость основана на выполнении условия (3.4.26).

Комплексные поля. В приведенных выше рассуждениях предполагалось, что ψ и φ^0 — вещественные поля. Очевидно, однако, что все полученные результаты остаются в силе, даже если ψ

и φ^0 — комплексные. В этом случае равенства (3.4.3) и (3.4.12) заменяются соответственно на

$$H_0 = \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \{ \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) + \beta^\dagger(\mathbf{k}) \beta(\mathbf{k}) \}, \quad (3.4.29)$$

$$\varphi^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^2k \{ u(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) \exp[ikx - i\omega(\mathbf{k})t] + v(\mathbf{k}) \beta^\dagger(\mathbf{k}) \exp[-ikx + i\omega(\mathbf{k})t] \}. \quad (3.4.30)$$

Здесь $\beta(\mathbf{k})$ — оператор уничтожения античастицы (или дырки). Для построения входящего и выходящего полей в дополнение к $\psi_g(t)$ из (3.4.16) требуется оператор

$$\bar{\psi}_g(t) = -\frac{\rho}{\hbar} \int d^3k g(\mathbf{k}) \int d^3x Z^{-1/2} [\bar{\psi}(x) - \chi^*] \overleftrightarrow{\Gamma} v(\mathbf{k}) \times \times \exp[-ikx + i\omega(\mathbf{k})t], \quad (3.4.31)$$

где $\rho = -1$, если φ^0 — фермионное поле и уравнение для него (3.4.14) относится к типу 2; в остальных случаях $\rho = 1$. Чтобы понять, с какой целью вводится $\bar{\psi}_g(t)$ с помощью (3.4.31), полезно напомнить выражение (2.6.127), откуда имеем

$$\beta(\mathbf{k}) = -\frac{\rho}{\hbar} \int d^3x \bar{\varphi}^0(x) \overleftrightarrow{\Gamma} v(\mathbf{k}) \exp[-ikx + i\omega(\mathbf{k})t]. \quad (3.4.32)$$

Входящий оператор $\beta^{\text{in}}(\mathbf{k})$ и выходящий оператор $\beta^{\text{out}}(\mathbf{k})$ получаются соответственно переходом к пределу ($t \rightarrow -\infty$) или ($t \rightarrow \infty$) в матричных элементах $\bar{\psi}_g(t)$ — в полной аналогии с получением α^{in} и α^{out} .

3.5. Формула редукции и формула Лемана—Симанзика—Циммермана (ЛСЦ)

Формула редукции. В этом разделе мы введем общее выражение для динамического отображения вида (3.4.2), выбирая операторы входящего поля для свободного физического поля φ^0 , т. е.

$$\alpha^{\text{in}}(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k}), \quad \beta^{\text{in}}(\mathbf{k}) = \beta(\mathbf{k}). \quad (3.5.1)$$

Прежде всего получим так называемую формулу редукции [7]. Рассмотрим матричный элемент

$$\langle \alpha(\mathbf{k}), a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle, \quad (3.5.2)$$

где S — S -матрица, которая предполагается унитарной, а символ $|\alpha(\mathbf{k}), a\rangle$ обозначает

$$|\alpha(\mathbf{k}), a\rangle = \alpha^\dagger(\mathbf{k}) |a\rangle = S \alpha^{\text{out}}(\mathbf{k}) S^{-1} |a\rangle. \quad (3.5.3)$$

Состояния $|a\rangle$ и $|b\rangle$ принадлежат пространству Фока \mathcal{S} , связанному с физическими частицами. Операторы $F_i(x_i)$ состоят из гейзенберговских полей ψ .

Из (3.4.17) имеем

$$\begin{aligned} & \int d^3kg(k) \langle \alpha(k), a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle = \\ & = \int d^3kg(k) \langle a | S\alpha^{\text{out}}(k) T [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle = \\ & = \frac{1}{\hbar} \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \bar{u}(k, x) \overset{\leftrightarrow}{\Gamma} \langle a | ST [\phi(x) F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle, \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

где t обозначает t_x , $\phi(x)$ — связывающее поле для φ^{in} и φ^{out} :

$$\phi(x) = Z^{-1/2} [\psi(x) - \chi], \quad (3.5.5)$$

а $\bar{u}(k, x) = \bar{u}(k) \exp[-ikx + i\omega(k)t]$. При получении (3.5.4) использовано соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T [\phi(x) F_1(x_1) \dots] = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x) T [F_1(x_1) \dots].$$

Для упрощения обозначений опустим в дальнейшем интегрирование по импульсам $d^3kg(k)$. Из (3.5.4) находим

$$\begin{aligned} & \langle \alpha(k), a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle = \\ & = \frac{1}{\hbar} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x \bar{u}(k, x) \overset{\leftrightarrow}{\Gamma} \langle a | ST [\phi(x) F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle + \\ & \quad + \varepsilon \langle a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] \alpha(k) | b \rangle, \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

где $\varepsilon = +1$ (-1), когда необходимо четное (нечетное) число перестановок фермионных полей при переходе от $\alpha(k) F_1 \dots F_n$ к $F_1 \dots F_n \alpha(k)$.

Используя соотношение (2.6.30), т. е.

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \bar{f}(x) \overset{\leftrightarrow}{\Gamma} g(x) = -i \int d^3x \bar{f}(x) [\lambda(\partial) - \lambda(-\bar{\partial})] g(x), \quad (3.5.7)$$

можно переписать (3.5.6) в виде

$$\begin{aligned} & \langle \alpha(k), a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle = \\ & = -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \bar{u}(k, x) \lambda(\partial) \langle a | ST [\phi(x) F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle + \\ & \quad + \varepsilon \langle a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] \alpha(k) | b \rangle, \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

где учтено, что $\bar{u}(k, x) \lambda(-\bar{\partial}) = 0$. Второе слагаемое в правой части (3.5.8) описывает реакцию, в которой квант, порождаемый $\alpha(k)$, вообще не взаимодействует с остальными квантами; иначе говоря, этот квант не связан с другими. Пусть $\langle a | A | b \rangle_c$ обозначает матричный элемент A для перехода $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$, явля-

ющегося «одночастично связанным» (т. е. нет частиц, не связанных с другими). Тогда из (3.5.8) находим

$$\begin{aligned} \langle \alpha(\mathbf{k}), a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle_c = \\ = -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \bar{u}(\mathbf{k}, x) \lambda(\partial) \langle a | ST [\phi(x) F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle_c. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Это одна из так называемых формул редукции, с помощью которой квант $\alpha(\mathbf{k})$ исключается из бра-состояния.

Аналогично можно получить следующие формулы редукции:

$$\begin{aligned} \langle a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | \beta(\mathbf{k}), b \rangle_c = \\ = -\frac{i}{\hbar} \rho \int d^4x \bar{v}(\mathbf{k}, x) \lambda(\partial) \langle a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n) \phi(x)] | b \rangle_c, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

$$\begin{aligned} \langle \beta(\mathbf{k}), a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle_c = \\ = -\frac{i}{\hbar} \rho \int d^4x \langle a | ST [\bar{\phi}(x) F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | b \rangle_c \lambda(-\overleftarrow{\partial}) v(\mathbf{k}, x), \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

$$\begin{aligned} \langle a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n)] | \alpha(\mathbf{k}), b \rangle_c = \\ = -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \langle a | ST [F_1(x_1) \dots F_n(x_n) \bar{\phi}(x)] | b \rangle_c \lambda(-\overleftarrow{\partial}) u(\mathbf{k}, x) \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Здесь $v(\mathbf{k}, x) = v(\mathbf{k}) \exp[-ik \cdot x + i\omega(\mathbf{k})t]$, $\bar{\phi} = \phi^\dagger \eta$, а η — матрица приведения к эрмитову виду. При получении последних соотношений использовалась формула (3.4.31).

Формула ЛСЦ. Выберем далее в качестве $F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$ поле $\psi(x)$. Применяя повторно формулы редукции (3.5.9) — (3.5.12), можно исключить все частицы в бра- и кет-состояниях. В результате получим следующее динамическое отображение для $S\psi(x)$:

$$\begin{aligned} S\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n+m} \int d^4x_1 \dots d^4x_n d^4y_1 \dots d^4y_m \times \\ \times : [\bar{\varphi}^0(x_1) \lambda(\partial_x^1)] \dots [\bar{\varphi}^0(x_n) \lambda(\partial_x^n)] \times \\ \times \langle 0 | T [\psi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \bar{\phi}(y_1) \dots \bar{\phi}(y_m)] | 0 \rangle_c \times \\ \times [\lambda(-\overleftarrow{\partial}_y^1) \varphi^0(y_1)] \dots [\lambda(-\overleftarrow{\partial}_y^m) \varphi^0(y_m)] :. \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Эта формула носит название формулы Лемана—Симанзика—Циммермана (ЛСЦ). Ее можно записать в компактной форме

$$S\psi(x) = : \left\langle T \left[\psi(x) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4\xi \{ \bar{J}^0(\xi) \phi(\xi) + \bar{\phi}(\xi) J^0(\xi) \} \right) \right] \right\rangle_c :. \quad (3.5.14)$$

Здесь угловые скобки обозначают взятие вакуумного среднего значения от T -произведения гейзенберговских полей ψ , ϕ и $\bar{\phi}$, а символ нормального произведения $: \langle \rangle_c :$ обозначает нормальное произведение физических свободных полей ϕ^0 и $\bar{\phi}^0$, которые связаны с J^0 и \bar{J}^0 следующим образом:

$$\bar{J}^0(x) = \bar{\phi}^0(x) \lambda(\partial), \quad (3.5.15)$$

$$J^0(x) = \lambda(-\overleftarrow{\partial}) \phi^0(x); \quad (3.5.16)$$

при этом $\bar{J}^0 = J^{0+}\eta$.

Заметим, что индекс c в (3.5.13) можно опустить, после того как матричные элементы полностью переведены в форму вакуумных средних значений. Но мы сохраняем индекс c для напоминания о том, что в функцию Грина (3.5.13) дают вклад только одночастично связанные диаграммы. Вклад, содержащий одночастично несвязанную часть, всегда пропорционален величине

$$\int d^4x d^4y \bar{\phi}^0(x) \lambda(\partial_x) \langle 0 | T[\phi(x) \bar{\phi}(y)] | 0 \rangle \lambda(-\overleftarrow{\partial}_y) \phi^0(y),$$

которая равна нулю.

Заменяя $\psi(x)$ на единицу, получаем динамическое отображение S -матрицы:

$$S = : \left\langle T \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4\xi \{ \bar{J}^0(\xi) \phi(\xi) + \bar{\phi}(\xi) J^0(\xi) \} \right) \right] \right\rangle_c :. \quad (3.5.17)$$

Если $0_H(x)$ — гейзенберговский оператор, состоящий из $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, то динамическое отображение $S_{0_H}(x)$ имеет вид

$$S_{0_H}(x) = : \left\langle T \left[0_H(x) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4\xi \{ \bar{J}^0(\xi) \phi(\xi) + \bar{\phi}(\xi) J^0(\xi) \} \right) \right] \right\rangle_c :. \quad (3.5.18)$$

Можно написать

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n) \bar{\phi}(y_1) \dots \bar{\phi}(y_m)] | 0 \rangle_c = \\ & = \int d^4\xi_1 \dots d^4\xi_n d^4\zeta_1 \dots d^4\zeta_m G^0(x_1 - \xi_1) \dots G^0(x_n - \xi_n) \times \\ & \times f(\xi_1 \dots \xi_n; \zeta_1 \dots \zeta_m) G^0(\zeta_1 - y_1) \dots G^0(\zeta_m - y_m), \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

где функция $G^0(x - y)$ определена с помощью равенства

$$G^0(x - y) = \langle 0 | T [\varphi^0(x) \bar{\varphi}^0(y)] | 0 \rangle. \quad (3.5.20)$$

Функция $f(\xi_1 \dots \xi_n; \zeta_1 \dots \zeta_m)$ называется вершинной функцией.

Динамическое отображение S -матрицы выражается через вершины следующим образом:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int d^4x_1 \dots d^4x_n d^4y_1 \dots d^4y_m : \bar{\varphi}^0(x_1) \dots \bar{\varphi}^0(x_n) \times \\ \times f(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_m) \varphi^0(y_1) \dots \varphi^0(y_m) :. \quad (3.5.21)$$

Структура функции $G^0(x - y)$ рассматривается в следующем разделе.

3.6. Спектральные представления двухточечных функций

Многоточечные функции. В предыдущем разделе показано, что динамическое отображение любого оператора может быть получено с помощью формулы редукции ЛСЦ, если известны асимптотические поля. Формула ЛСЦ выражается через вакуумные средние значения T -произведений гейзенберговских операторов. Функцию $G_c^{AB\dots C}(x_1 x_2 \dots x_n)$, определенную соотношением

$$G_c^{AB\dots C}(x_1 \dots x_n) = \langle 0 | T [A(x_1) B(x_2) \dots C(x_n)] | 0 \rangle, \quad (3.6.1)$$

назовем причинной n -точечной функцией. Задача построения динамического отображения сводится к вычислению таких функций. В этом разделе рассматривается общая структура причинной двухточечной функции; вводятся также запаздывающая и опережающая двухточечные функции.

Причинная, запаздывающая и опережающая двухточечные функции определяются соответственно выражениями

$$G_c^{AB}(x - y) = \langle 0 | T [A(x), B(y)] | 0 \rangle = \quad (3.6.2)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \langle 0 | A(x) B(y) | 0 \rangle \pm \\ \pm \theta(t_y - t_x) \langle 0 | B(y) A(x) | 0 \rangle, \quad (3.6.3)$$

$$G_r^{AB}(x - y) = \theta(t_x - t_y) \langle 0 | [A(x), B(y)]_{\pm} | 0 \rangle, \quad (3.6.4)$$

$$G_a^{AB}(x - y) = -\theta(t_y - t_x) \langle 0 | [A(x), B(y)]_{\pm} | 0 \rangle. \quad (3.6.5)$$

Знак перед ступенчатой функцией $\theta(t_y - t_x)$ в (3.6.3) должен выбираться так, чтобы знак $+$ соответствовал случаю бозоноподобных операторов A и B , а знак $-$ — случаю ферминоподобных операторов A и B . Здесь под бозоноподобными (ферминоподобными) операторами понимаются операторы, представля-

ющие собой произведения четного (нечетного) числа фермионных полей и некоторого числа бозонных полей. В выражениях (3.6.4) и (3.6.5) коммутаторы выбираются для случая бозоноподобных A и B , а антикоммутаторы — для случая фермионоподобных A и B .

Спектральные представления двухточечных функций. Фурье-образ причинной двухточечной функции определяется выражением

$$G_c^{AB}(x-y) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4k \exp[ik(x-y)] G_c^{AB}(k) \text{ и т. д.} \quad (3.6.6)$$

Применение формулы

$$\theta(t_x - t_y) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega + i\delta} \exp[-i\omega(t_x - t_y)] \quad (3.6.7)$$

приводит к выражению

$$G_c^{AB}(k) = \int_0^{\infty} d\omega \left(\frac{\sigma^{AB}(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega + i\delta} - \rho \frac{\sigma^{AB}(\omega, -\mathbf{k})}{k_0 + \omega - i\delta} \right), \quad (3.6.8)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\sigma^{AB}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^3}{\hbar} \sum_n \langle 0 | A(0) | n \rangle \langle n | B(0) | 0 \rangle \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_n) \delta(\omega - E_n), \quad (3.6.9)$$

$$\rho = \begin{cases} +1 & \text{для бозоноподобных } A \text{ и } B, \\ -1 & \text{для фермионоподобных } A \text{ и } B. \end{cases} \quad (3.6.10)$$

Здесь $|n\rangle$ обозначает элементы из полного набора собственных векторов энергии и импульса. Соответствующие собственные значения энергии и импульса обозначаются через E_n и \mathbf{k}_n . Вводя обозначение

$$\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \theta(\omega) \sigma^{AB}(\omega, \mathbf{k}) - \rho \theta(-\omega) \sigma^{BA}(-\omega, -\mathbf{k}), \quad (3.6.11)$$

можно записать (3.6.8) в виде

$$G_c^{AB}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sigma(\omega, \mathbf{k}) \left(\frac{\theta(\omega)}{k_0 - \omega + i\delta} + \frac{\theta(-\omega)}{k_0 - \omega - i\delta} \right). \quad (3.6.12)$$

Выражения (3.6.8) и (3.6.12) называют спектральными представлениями причинной двухточечной функции [8].

Если в суммировании в выражении (3.6.9) принимают участие определенные одночастичные состояния с энергией $\omega(\mathbf{k})$, величина σ^{AB} принимает вид

$$\sigma^{AB}(\omega, \mathbf{k}) = Z^{AB}(\mathbf{k}) \delta[\omega - \omega(\mathbf{k})] + \bar{\sigma}^{AB}(\omega, \mathbf{k}). \quad (3.6.13)$$

Здесь Z^{AB} определяется вкладом, обусловленным одночастичными состояниями, а $\bar{\sigma}^{AB}$ — многочастичными состояниями. В послед-

нем слагаемом область изменения ω для данного \mathbf{k} представляет собой некоторый континуум, поскольку энергия многочастичных состояний даже при точном указании импульса \mathbf{k} не определена однозначно. Поэтому слагаемое, содержащее Z^{AB} , дает вклад в правую часть (3.6.8) за счет однополюсных сингулярностей в плоскости k_0 , тогда как слагаемое с $\bar{\sigma}^{AB}$ создает линию разреза вдоль вещественной оси k_0 . Это результат применения представления физических частиц: если бы причинная двухточечная функция имела особенности, отличные от простого полюса или линии разреза вдоль вещественной оси, это означало бы, что гейзенберговские операторы не имеют реализации в представлении физических частиц.

Выражение (3.6.9) показывает, что

$$\langle 0 | A(x) B(y) | 0 \rangle = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d\omega \sigma^{AB}(\omega, \mathbf{k}) \exp[ik(x-y) - it\omega(t_x - t_y)], \quad (3.6.14)$$

$$\langle 0 | [A(x), B(y)]_{\pm} | 0 \rangle_{t_x=t_y} = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3k \exp[ik(x-y)] \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sigma(\omega, \mathbf{k}). \quad (3.6.15)$$

Здесь коммутатор (антикоммутатор) применяется для бозоноподобных (фермионоподобных) полей A и B .

Если B оказывается канонически сопряженным A , то имеем

$$[A(x), B(y)]_{\pm} \delta(t_x - t_y) = \hbar \delta^{(4)}(x - y), \quad (3.6.16)$$

что вместе с (3.6.15) приводит к правилу сумм

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sigma(\omega, \mathbf{k}) = 1. \quad (3.6.17)$$

С другой стороны, если $B = A^\dagger$, то (3.6.9) приводится к виду

$$\sigma^{AB}(\omega, \mathbf{k}) \geq 0, \quad (3.6.18)$$

откуда, учитывая (3.6.13), получаем

$$Z^{AB}(\mathbf{k}) \geq 0, \quad \bar{\sigma}^{AB}(\omega, \mathbf{k}) \geq 0. \quad (3.6.19)$$

Если $B = A^\dagger$, причем A — фермионоподобный оператор, то из (3.6.11) находим

$$\sigma(\omega, \mathbf{k}) \geq 0. \quad (3.6.20)$$

Таким образом, если A^\dagger — оператор, канонически сопряженный фермионоподобному полю A , то (3.6.17) и (3.6.20) выполняются одновременно, так что $1 \geq Z^{AA^\dagger}(\mathbf{k}) \geq 0$.

В качестве другого примера предположим, что $A(x)$ — бозонное поле, $B = (\partial/\partial t) A^\dagger(x)$ и B канонически сопряжено с A^\dagger ,

В этом случае в силу (3.6.9) приходим к выводу, что знак величины $\sigma^{AB}(\omega, \mathbf{k})$ совпадает со знаком ω . Тогда из выражения (3.6.11) следует (3.6.20), откуда получаем $1 \geq Z^{AB}(\mathbf{k}) \geq 0$.

Обратимся теперь к запаздывающей и опережающей двухточечным функциям. Фурье-образ этих функций записывается так же, как (3.6.6) для G_c . Вычисления приводят к следующим спектральным представлениям:

$$G_r^{AB}(k) = \int d\omega \frac{\sigma(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega + i\delta}, \quad (3.6.21)$$

$$G_a^{AB}(k) = \int d\omega \frac{\sigma(\omega, \mathbf{k})}{k_0 - \omega + i\delta}. \quad (3.6.22)$$

Возвращаясь к причинной функции, предположим, что имеет место случай, когда физическое поле φ^0 можно представить как линейное слагаемое в динамическом отображении $A(x)$, а линейным слагаемым в динамическом отображении $B(x)$ является $\bar{\varphi}^0 = \varphi^{0+\eta}$:

$$A(x) = Z^A(\nabla) \varphi^0(x) + \dots, \quad (3.6.23)$$

$$B(x) = Z^B(\nabla) \bar{\varphi}^0(x) + \dots. \quad (3.6.24)$$

В этих выражениях многоточия обозначают нормальные произведения более высоких порядков. Тогда имеем

$$G_c^{AB}(x-y) = Z^A(\nabla_x) Z^B(\nabla_y) G_c^0(x-y) + \dots, \quad (3.6.25)$$

где многоточие обозначает вклады многочастичных состояний, а $G_c^0(x-y)$ — двухточечная функция физического поля:

$$G_c^0(x-y) = \langle 0 | T [\varphi^0(x), \bar{\varphi}^0(y)] | 0 \rangle = \quad (3.6.26)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \langle 0 | \varphi^0(x) \bar{\varphi}^0(y) | 0 \rangle \pm \\ \pm \theta(t_y - t_x) \langle 0 | \bar{\varphi}^0(y) \varphi^0(x) | 0 \rangle. \quad (3.6.27)$$

Причинная двухточечная функция физического поля. Правила сумм (2.6.102) и (2.6.103) дают

$$\langle 0 | \varphi^0(x) \bar{\varphi}^0(y) | 0 \rangle = i\hbar d(\partial) \Delta^+(x-y), \quad (3.6.28)$$

$$\langle 0 | \bar{\varphi}^0(y) \varphi^0(x) | 0 \rangle = -i\rho\hbar d(\partial) \Delta^-(x-y). \quad (3.6.29)$$

Здесь принято, что $\varphi^0(x)$ удовлетворяет уравнению свободного поля типа 2. Используя (2.6.86), получаем

$$G_c^0(x-y) = i\hbar [\theta(t_x - t_y) d(\partial) \Delta^+(x-y) - \\ - \theta(t_y - t_x) d(\partial) \Delta^-(x-y)] = i\hbar d(\partial) \Delta_c(x-y) + \\ + i\hbar [\theta(t_x - t_y), d(\partial)] \Delta(x-y), \quad (3.6.30)$$

где использовано соотношение $\theta(t) = 1 - \theta(-t)$. Функция $\Delta(x)$ определена в (2.6.115), а $\Delta_c(x)$ определена выражением

$$\Delta_c(x) = \theta(t) \Delta^+(x) - \theta(-t) \Delta^-(x). \quad (3.6.31)$$

Из выражений (2.6.87), (2.6.88) и (2.6.112) находим

$$(-\partial^2/\partial t^2 - \omega^2(\nabla)) \Delta_c(x) = \delta^{(4)}(x), \quad (3.6.32)$$

откуда следует, что $\Delta_c(x)$ — причинная функция Грина для оператора $[-(\partial/\partial t)^2 - \omega^2]$. Вводя уравнение для φ^0

$$\lambda(\partial) \varphi^0 = 0, \quad (3.6.33)$$

учтем, что причинная функция Грина для него дается, согласно (2.6.18), действием оператора $d(\partial) \Delta_c(x)$. Если производная по времени в $d(\partial)$ первого порядка, выражение (3.6.30) принимает вид

$$G_c^0(x-y) = i\hbar d(\partial) \Delta_c(x-y), \quad (3.6.34)$$

где учтено (2.6.112). В этом случае $G_c^0(x)$ — причинная функция Грина.

Для уравнения типа 1 с положительными $\epsilon(\mathbf{k})$ выражение (3.6.27) дает

$$G_c^0(x-y) = i\hbar \theta(t_x - t_y) d(\partial) \Delta^+(x-y), \quad (3.6.35)$$

где Δ^+ определяется выражением (2.6.104). Используя (2.6.105) и (2.6.106), получаем

$$[i\partial/\partial t - \epsilon(\nabla)] \Delta_c(x) = \delta^{(4)}(x), \quad (3.6.36)$$

если $\Delta_c(x)$ определено соотношением

$$\Delta_c(x) = \theta(t) \Delta^+(x). \quad (3.6.37)$$

В силу (3.6.35) имеем

$$G_c^0(x-y) = i\hbar d(\partial) \Delta_c(x-y) + i\hbar [\theta(t_x - t_y), d(\partial)] \Delta^+(x-y). \quad (3.6.38)$$

Если $d(\partial)$ не содержит производной по времени, то

$$G_c^0(x-y) = i\hbar d(\partial) \Delta_c(x-y); \quad (3.6.39)$$

согласно (2.6.18), это функция Грина для уравнения свободного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rest J., Srinivasan V., Umezawa H.*, Phys. Rev., **D3**, 1890 (1971).
2. *Nambu Y.*, Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **5**, 614 (1950);
Salpeter E. E., Bethe H. S., Phys. Rev., **84**, 1232 (1951);
Gell-Mann M., Low F. E., Phys. Rev., **84**, 350 (1951).
3. *Lee T. D.*, Phys. Rev. **95**, 1329 (1954).
4. *Vaughan M. T., Aaron R., Amado R. D.*, Phys. Rev., **124**, 1258 (1961).

5. *Ezawa H., Kikkawa K., Umezawa H.*, Nuovo Cim., **23**, 751 (1962);
Ezawa H., Muta T., Umezawa H., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **29**, 877 (1963).
6. *Tomonaga S.*, Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **1**, 27 (1946);
Schwinger J., Phys. Rev., **74**, 1439 (1948);
Umezawa H., Quantum field theory, North-Holland, Amsterdam and Interscience, New York, 1956. [Имеется перевод: Умэдзава Х. Квантовая теория поля. — М.: ИЛ, 1958.];
Боголюбов Н. Н., Ширков Л. В. Введение в теорию квантованных полей. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1976;
Schweber S. S., An introduction to relativistic quantum field theory, Harper and Row, London, 1961. [Имеется перевод: Швэббер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.];
Lurie D., Particles and fields, Interscience, New York, 1969;
Nishijima K., Fields and particles, W. A. Benjamin, New York, 1969;
Roman P., Introduction to quantum field theory, Wiley, New York, 1969;
Takahashi Y., An introduction to field quantization, Pergamon, Oxford, 1969.
7. *Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W.*, Nuovo Cim., **6**, 319 (1957).
8. *Umezawa H., Kamefuchi S.*, Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **6**, 543 (1951);
Kallen G., Helv. Phys. Acta, **25**, 417 (1952);
Lehmann H., Nuovo Cim., **11**, 342 (1954).

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

4.1. Термополевая динамика

Квантовые возбуждения при конечных температурах. До сих пор рассматривались только изолированные квантовые системы. В действительности, однако, большинство систем не изолированы, а погружены в «тепловой резервуар» (термостат). Поскольку система взаимодействует с термостатом, на процессы возбуждения и релаксации влияет обмен энергией между системой и термостатом. Для определения абсолютной температуры T используем символ

$$\beta = \frac{\hbar}{k_B T}, \quad (4.1.1)$$

где k_B — постоянная Больцмана. Если в системе уничтожается квант энергии $\omega(\mathbf{k}, \beta)$, то этот процесс можно рассматривать как результат действия оператора $\alpha(\mathbf{k})$, удовлетворяющего известным перестановочным соотношениям

$$[\alpha(\mathbf{k}), \alpha^\dagger(\mathbf{l})]_{\pm} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}). \quad (4.1.2)$$

Тогда гамильтониан системы H равен (в слабом смысле) свободному гамильтониану (с точностью до численного слагаемого W_0):

$$\langle a | H | b \rangle = \langle a | H_0 | b \rangle + W_0 \langle a | b \rangle, \quad (4.1.3)$$

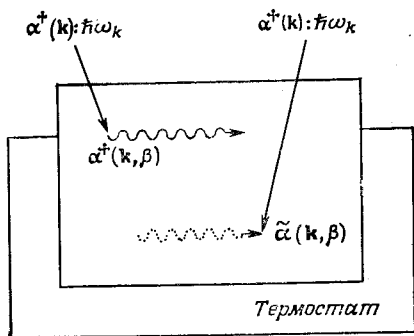
$$H_0 = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}, \beta) \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}). \quad (4.1.4)$$

До сих пор рассуждения в точности совпадают со случаем изолированной системы. Однако влияние температуры проявляется в структуре оператора $\alpha(\mathbf{k})$. Наличие термостата приводит к существованию некоторого числа возбужденных квантов. Поэтому поглощение энергии системой происходит двумя способами: либо за счет возбуждения дополнительного числа квантов, либо за счет заполнения свободных мест в пространстве частиц — уничтожения дырок, существующих благодаря термостату. Если имеет место второй процесс, то говорят, что уничтожается $\bar{\alpha}$ -квант (дырка) с отрицательной энергией $[-\hbar\omega(\mathbf{k})]$ и отрицательным импульсом $(-\hbar\mathbf{k})$. Возбуждение дополнительного кванта описывается с помощью некоторого оператора рождения $\alpha^\dagger(\mathbf{k}, \beta)$, а уничтожение $\bar{\alpha}$ -кванта — с помощью оператора $\bar{\alpha}(\mathbf{k}, \beta)$

(рис. 4.1). Поскольку оператор $\alpha(\mathbf{k})$ выполняет две независимые операции, он должен представляться в виде линейной комбинации операторов $\alpha(\mathbf{k}, \beta)$ и $\tilde{\alpha}^+(\mathbf{k}, \beta)$:

$$\alpha(\mathbf{k}) = c(\mathbf{k}, \beta) \alpha(\mathbf{k}, \beta) + d(\mathbf{k}, \beta) \tilde{\alpha}^+(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.1.5)$$

где $c(\mathbf{k}, \beta)$ и $d(\mathbf{k}, \beta)$ — некоторые численные функции \mathbf{k} и β . Поскольку фазовые множители этих функций могут быть включены в соответствующие фазовые множители операторов $\alpha(\mathbf{k}, \beta)$ и $\tilde{\alpha}^+(\mathbf{k}, \beta)$, функции $c(\mathbf{k}, \beta)$ и $d(\mathbf{k}, \beta)$ можно считать вещественными. Выбранное нами гильбертово пространство является пространством Фока, связанным с операторами уничтожения $\{\alpha(\mathbf{k}, \beta), \tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta)\}$; это пространство обозначим $\mathcal{F}(\alpha(\beta), \tilde{\alpha}(\beta))$. Ниже мы обсудим эквивалентность построенной таким способом квантовой теории поля и статистической теории ансамблей Гиббса.



Гамильтониан и импульс с учетом влияния термостата. Поскольку оператор $\alpha^+(\mathbf{k}, \beta)$ рождает квант с энергией $\hbar\omega(\mathbf{k}, \beta)$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$, а оператор $\tilde{\alpha}^+(\mathbf{k}, \beta)$ — квант с энергией $[-\hbar\omega(\mathbf{k}, \beta)]$ и импульсом $(-\hbar\mathbf{k})$, гамильтониан и импульс полной системы с учетом влияния термостата должны быть равны в слабом смысле следующим величинам:

$$\hat{H} = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}, \beta) [\alpha^+(\mathbf{k}, \beta) \alpha(\mathbf{k}, \beta) - \tilde{\alpha}^+(\mathbf{k}, \beta) \tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta)], \quad (4.1.6)$$

$$\hat{P}_i = \hbar \int d^3k k_i [\alpha^+(\mathbf{k}, \beta) \alpha(\mathbf{k}, \beta) - \tilde{\alpha}^+(\mathbf{k}, \beta) \tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta)]. \quad (4.1.7)$$

Преобразование Боголюбова. Поскольку операторы $\{\alpha(\mathbf{k})\}$, $\{\alpha(\mathbf{k}, \beta)\}$ и $\{\tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta)\}$ удовлетворяют уже известным перестановочным соотношениям, преобразование (4.1.5) должно быть каноническим, а следовательно, оно является преобразованием Бого-

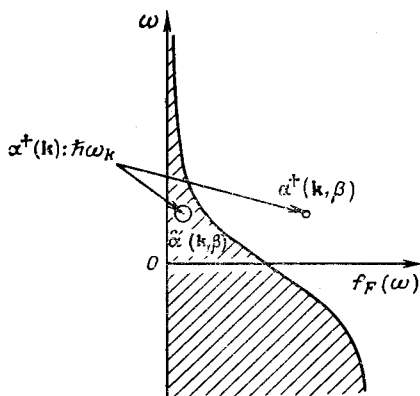


Рис. 4.1.

любова (гл. 2). Отсюда вытекает требование, чтобы выполнялось условие $c^2(\mathbf{k}, \beta) - \rho d^2(\mathbf{k}, \beta) = 1$ ($\rho = +1$ для бозонов, $\rho = -1$ для фермионов); удобно ввести оператор $\tilde{\alpha}(\mathbf{k})$, определив его равенством

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{k}) = c(\mathbf{k}, \beta) \alpha(\mathbf{k}, \beta) + \rho d(\mathbf{k}, \beta) \alpha^\dagger(\mathbf{k}, \beta). \quad (4.1.8)$$

Преобразования (4.1.5) и (4.1.8) удобно записать в следующей форме:

$$\alpha(\mathbf{k}) = \text{ch } \theta_k \alpha(\mathbf{k}, \beta) + \text{sh } \theta_k \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.1.9a)$$

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{k}) = \text{ch } \theta_k \tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) + \text{sh } \theta_k \alpha^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \quad (4.1.9б)$$

для бозонов и

$$\alpha(\mathbf{k}) = \cos \theta_k \alpha(\mathbf{k}, \beta) + \sin \theta_k \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.1.10a)$$

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{k}) = \cos \theta_k \tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) - \sin \theta_k \alpha^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \quad (4.1.10б)$$

для фермионов. Здесь параметр θ_k является функцией \mathbf{k} и β , которая будет определена ниже. Обратные преобразования имеют вид

$$\alpha(\mathbf{k}, \beta) = \alpha(\mathbf{k}) \text{ch } \theta_k - \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) \text{sh } \theta_k, \quad (4.1.11a)$$

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) = \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) \text{ch } \theta_k - \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \text{sh } \theta_k \quad (4.1.11б)$$

для бозонов и

$$\alpha(\mathbf{k}, \beta) = \alpha(\mathbf{k}) \cos \theta_k - \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) \sin \theta_k, \quad (4.1.12a)$$

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) = \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) \cos \theta_k + \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \sin \theta_k \quad (4.1.12б)$$

для фермионов. В дальнейшем наборы операторов $\{\alpha(\mathbf{k}, \beta)\}$ и $\{\tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta)\}$ сокращенно обозначаются $\alpha(\beta)$ и $\tilde{\alpha}(\beta)$ соответственно. Заметим, что \hat{H}_0 сохраняет вид свободного гамильтониана, даже если его выразить через операторы $\alpha(\mathbf{k})$ и $\tilde{\alpha}(\mathbf{k})$:

$$\hat{H}_0 = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}, \beta) [\alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) - \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\alpha}(\mathbf{k})], \quad (4.1.13)$$

поскольку комбинация $[\alpha^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \alpha(\mathbf{k}, \beta) - \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta)]$ инвариантна относительно преобразования Боголюбова. Аналогично имеем

$$\hat{P}_i = \hbar \int d^3k k_i [\alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) - \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\alpha}(\mathbf{k})]. \quad (4.1.14)$$

Вакуум, зависящий от температуры. Основным состоянием при конечной температуре является состояние $|0, \beta\rangle$, для которого имеют место следующие равенства:

$$\alpha(\mathbf{k}, \beta) |0, \beta\rangle = 0, \quad (4.1.15)$$

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) |0, \beta\rangle = 0. \quad (4.1.16)$$

Представление физических частиц ¹⁾ при температуре T дается с помощью $\mathcal{G} [\alpha (\beta), \tilde{\alpha} (\beta)]$.

Определение параметров θ_k . Определим теперь параметры θ_k , вычислив среднее по основному состоянию от оператора числа частиц. Как указано в начале этого раздела, оператор $\alpha^\dagger (\mathbf{k})$ описывает возбуждение в системе. Поэтому оператор числа квантов в системе имеет вид

$$N (\mathbf{k}) = \alpha^\dagger (\mathbf{k}) \alpha (\mathbf{k}). \quad (4.1.17)$$

Следовательно, согласно (4.1.9) и (4.1.10), среднее значение плотности числа частиц равно

$$n (\mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^3}{V} \langle 0, \beta | N (\mathbf{k}) | 0, \beta \rangle = \quad (4.1.18)$$

$$= \text{sh}^2 \theta_k \quad \text{для бозонов}, \quad (4.1.19)$$

$$n (\mathbf{k}) = \text{sin}^2 \theta_k \quad \text{для фермионов}. \quad (4.1.20)$$

Здесь $V \equiv (2\pi)^3 \delta^{(3)} (0)$ — объем системы (см. в этой связи равенство (2.4.34)). Сравнивая этот результат с хорошо известными формулами для плотности числа частиц в статистической механике, находим

$$\text{sh}^2 \theta_k = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \quad \text{для бозонов}, \quad (4.1.21)$$

$$\text{sin}^2 \theta_k = \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1} \quad \text{для фермионов}, \quad (4.1.22)$$

где ω обозначает $\omega (\mathbf{k}, \beta)$. Эти соотношения представляют собой аксиому, определяющую температуру системы в состоянии теплового равновесия. По существу они предполагают, что среднее значение по вакуумному состоянию от оператора числа частиц равно среднему значению по каноническому ансамблю от числа

¹⁾ Теоретики, занимающиеся аксиоматической теорией поля [1], полагали, что для построения квантовой теории поля при конечной температуре понадобится удвоить число степеней свободы. Изложение в настоящей книге направлено на создание формализма для взаимодействующих полей, удобного для практического использования. В простейшей форме подобный формализм изложен в последней главе обзора [2]. Более точная формулировка предложена в работе [3] и названа термополевой динамикой. Детальный анализ аналитических свойств причинных функций Грина дан в работе [4]. Именно этот анализ дает возможность полностью использовать преимущества теоретико-полевого подхода, основанного на применении причинных функций Грина. Практические вычисления значительно упрощаются при использовании таких причинных функций. Взаимосвязь между аксиоматическим подходом и термополевой динамикой анализируется в последней из статей [1].

Формулировка, основанная на так называемых температурных функциях Грина, получила широкое развитие [5]. Существует много учебников [6], в которых излагается этот формализм, поэтому мы не описываем его здесь.

частиц. Это утверждение можно без труда обобщить на любой оператор, состоящий из α и α^\dagger , например $A(\alpha, \alpha^\dagger)$. А именно, вакуумное среднее значение от такого оператора $\langle 0, \beta | A(\alpha, \alpha^\dagger) | 0, \beta \rangle$ равно среднему значению по ансамблю от $A(\alpha, \alpha^\dagger)$. Таким образом, статистическая механика квантовой системы многих частиц становится квантовой теорией поля, реализованной в зависящем от температуры пространстве Фока $\mathcal{S}[\alpha(\beta), \bar{\alpha}(\beta)]$. Соответствующий формализм носит название термополевой динамики.

В дальнейшем используются обозначения

$$f_B(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (4.1.23)$$

$$f_F(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1}. \quad (4.1.24)$$

Заметим, что преобразования Боголюбова (4.1.9) и (4.1.10) принимают вид

$$\alpha(\mathbf{k}) = [1 + f_B(\omega)]^{1/2} \alpha(\mathbf{k}, \beta) + \sigma [f_B(\omega)]^{1/2} \bar{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.1.25a)$$

$$\bar{\alpha}(\mathbf{k}) = [1 + f_B(\omega)]^{1/2} \bar{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) + \sigma [f_B(\omega)]^{1/2} \alpha^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \quad (4.1.25б)$$

для бозонов и

$$\alpha(\mathbf{k}) = [1 - f_F(\omega)]^{1/2} \alpha(\mathbf{k}, \beta) + \sigma [f_F(\omega)]^{1/2} \bar{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.1.26a)$$

$$\bar{\alpha}(\mathbf{k}) = [1 - f_F(\omega)]^{1/2} \bar{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) - \sigma [f_F(\omega)]^{1/2} \alpha^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \quad (4.1.26б)$$

для фермионов; при этом сохраняется произвол в выборе значения $\sigma = +1$ или $\sigma = -1$.

Поскольку $\alpha(\mathbf{k}, \beta) | 0, \beta \rangle = 0$, из выражений (4.1.11) и (4.1.12) следует

$$\alpha(\mathbf{k}) | 0, \beta \rangle = \begin{cases} \text{th } \theta_k \bar{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) | 0, \beta \rangle & \text{для бозонов,} \\ \text{tg } \theta_k \bar{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) | 0, \beta \rangle & \text{для фермионов.} \end{cases} \quad (4.1.27)$$

Из этих соотношений видно, что добавление кванта $\bar{\alpha}(\mathbf{k})$ к основному состоянию $| 0, \beta \rangle$ эквивалентно исключению кванта $\alpha(\mathbf{k})$; в этом смысле квант $\bar{\alpha}(\mathbf{k})$ ведет себя подобно дырке кванта $\alpha(\mathbf{k})$.

Операция тильда. Сформулируем теперь правило, связывающее операторы с тильдой с операторами без тильды. Рассмотрим сначала свободное поле (см. (2.6.45))

$$\varphi^0(x) = \int d^3k [u^r(\mathbf{k}, x) \alpha^r(\mathbf{k}) + v^r(\mathbf{k}, x) \beta^{r\dagger}(\mathbf{k})], \quad (4.1.28)$$

удовлетворяющее уравнению типа 2

$$\lambda(\partial) \varphi^0(x) = 0. \quad (4.1.29)$$

Поскольку «операция тильда» заменяет \mathbf{k} и $\omega(\mathbf{k})$ на $-\mathbf{k}$ и $-\omega(\mathbf{k})$ соответственно, определим поле

$$\tilde{\varphi}^0(x) = \int d^3k [u^{r*}(\mathbf{k}, x) \tilde{\alpha}^r(\mathbf{k}) + v^{r*}(\mathbf{k}, x) \tilde{\beta}^{r\dagger}(\mathbf{k})], \quad (4.1.30)$$

удовлетворяющее уравнению

$$\lambda^*(\partial) \tilde{\varphi}^0(x) = 0. \quad (4.1.31)$$

Операторы u^r и v^r имеют произвольные фазовые множители, поэтому выражение (4.1.30) приводит к следующему правилу для операции тильда:

$$\widetilde{c\tilde{\varphi}^0} = c^* \tilde{\varphi}^0 = (c\tilde{\varphi}^{0*})^*, \quad (4.1.32)$$

где c — c -число. Сравнивая уравнения (4.1.29) и (4.1.31), мы видим, что правило (4.1.32) сохраняет силу, даже если c является дифференциальным оператором $c(\partial)$:

$$\widetilde{c(\partial)\tilde{\varphi}^0} = c^*(\partial) \tilde{\varphi}^0 = [c(\partial) \tilde{\varphi}^{0*}]^*. \quad (4.1.33)$$

Согласно преобразованиям (4.1.25) и (4.1.26), получаем правило

$$\tilde{\tilde{\alpha}}(k) = \rho_F \alpha(\mathbf{k}), \quad \tilde{\tilde{\alpha}}(\mathbf{k}, \beta) = \rho_F \alpha(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.1.34)$$

если потребовать, чтобы операция тильда, примененная к $\alpha(\mathbf{k}, \beta)$, не зависела от β . Здесь ρ_F — знаковый множитель:

$$\rho_F = \begin{cases} +1 & \text{для бозонов,} \\ -1 & \text{для фермионов.} \end{cases} \quad (4.1.35)$$

Принимая во внимание выражения (4.1.33) и (4.1.34), общее правило для операции тильда можно сформулировать следующим образом:

$$\widetilde{\tilde{0}_1 \tilde{0}_2} = \tilde{0}_1 \tilde{0}_2, \quad (4.1.36)$$

$$\widetilde{c_1 \tilde{0}_1 + c_2 \tilde{0}_2} = c_1^* \tilde{0}_1 + c_2^* \tilde{0}_2, \quad (4.1.37)$$

$$\tilde{\tilde{0}} = \rho_F 0, \quad (4.1.38)$$

где

$$\rho_F = \begin{cases} +1 & \text{для бозоноподобных операторов,} \\ -1 & \text{для фермионоподобных операторов.} \end{cases} \quad (4.1.39)$$

Оператор называется фермионоподобным (бозоноподобным), если он представляется в виде линейной комбинации слагаемых, каждое из которых содержит нечетное (четное) число фермионных полей.

Пусть $H_0 [\varphi^0]$ — свободный гамильтониан для φ^0 :

$$H_0 [\varphi^0] = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}) [\alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) + \beta^\dagger(\mathbf{k}) \beta(\mathbf{k})]; \quad (4.1.40)$$

здесь и в дальнейшем мы опускаем спиновый индекс r . Операция тильда дает

$$\tilde{H}_0 = H_0^* [\tilde{\varphi}^{0*}] = \quad (4.1.41)$$

$$= \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}) [\tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) + \tilde{\beta}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\beta}(\mathbf{k})], \quad (4.1.42)$$

где последнее соотношение получено путем операции тильда, примененной к выражению (4.1.40).

В силу выражений (4.1.28) и (4.1.30) имеем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi^0(x) = [\varphi^0(x), H_0], \quad (4.1.43)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}^0(x) = -[\tilde{\varphi}^0(x), \tilde{H}_0]. \quad (4.1.44)$$

Полученные уравнения являются самосогласованными в том смысле, что применение операции тильда к обеим частям уравнения (4.1.43) приводит к уравнению (4.1.44). Согласно (4.1.44), гамильтониан для поля $\tilde{\varphi}^0$ равен $(-\tilde{H}_0)$, так что полный гамильтониан равен

$$\hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0. \quad (4.1.45)$$

Как показано выше, это выражение можно записать в виде

$$\hat{H}_0 = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}) [\alpha^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \alpha(\mathbf{k}, \beta) + \beta^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \beta(\mathbf{k}, \beta) - \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) - \tilde{\beta}^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \tilde{\beta}(\mathbf{k}, \beta)]. \quad (4.1.46)$$

Здесь операторы уничтожения $\beta(\mathbf{k}, \beta)$ и $\tilde{\beta}(\mathbf{k}, \beta)$ связаны с $\beta(\mathbf{k})$ и $\tilde{\beta}(\mathbf{k})$ преобразованием Боголюбова, имеющим вид (4.1.25) и (4.1.26). Несмотря на то что энергия кванта зависит от температуры, она здесь и ниже обозначается просто $\omega(\mathbf{k})$.

В случае уравнения типа 1 все приведенные выше рассуждения сохраняют силу, если просто игнорировать величины v^r ; $\beta(\mathbf{k})$, $\tilde{\beta}(\mathbf{k})$, $\beta(\mathbf{k}, \beta)$ и $\tilde{\beta}(\mathbf{k}, \beta)$.

Операция тильда и уравнение Гейзенберга. Обратимся теперь к уравнению Гейзенберга. Пусть $H[\psi]$ — гамильтониан системы, состоящей из взаимодействующего гейзенберговского поля ψ . Тогда оператор \hat{H} получается из H посредством операции тильда:

$$\hat{H} = H^* [\tilde{\psi}^*]. \quad (4.1.47)$$

Полный гамильтониан \hat{H} дается выражением

$$\hat{H} = H - \tilde{H}. \quad (4.1.48)$$

Каноническое уравнение движения

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = [\psi, H] \quad (4.1.49)$$

приводит к уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = -[\tilde{\psi}, \tilde{H}]; \quad (4.1.50)$$

отсюда следует, что \hat{H} является гамильтонианом полей ψ и $\tilde{\psi}$. Потребуем, чтобы гамильтониан \hat{H} был в слабом смысле равен \hat{H}_0 в (4.1.46). Зависимость $\omega(\mathbf{k})$ от температуры проявляется через собственную энергию, обусловленную взаимодействиями. Это иллюстрируется примерами в гл. 5. Заметим, что энергия основного состояния системы дается не выражением $\langle 0, \beta | \hat{H} | 0, \beta \rangle$, а выражением $\langle 0, \beta | H | 0, \beta \rangle$. Согласно (4.1.3), H в слабом смысле равен H^0 (с точностью до постоянного численного слагаемого W_0). Конкретный вывод соотношения (4.1.3) дается в следующем разделе.

Если $\mathcal{L}[\psi]$ — лагранжиан, который с помощью канонического формализма приводит к гамильтониану H , то $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^*[\tilde{\psi}^*]$ — лагранжиан, который приводит к \tilde{H} . Полный лагранжиан равен $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}$.

Если система содержит большое, но определенное число исходных частиц (описываемых гейзенберговским полем ψ), то \mathcal{L} имеет вид $\mathcal{L} = \mathcal{L}_s + \mu N$, где μ — химический потенциал, а N — оператор числа исходных частиц. Таким образом, гамильтониан H также содержит слагаемое с химическим потенциалом ($-\mu N$), поэтому наблюдаемая зависящая от температуры энергия $\omega(\mathbf{k})$ зависит от химического потенциала.

Свободная энергия Гельмгольца имеет вид

$$F = \langle 0, \beta | H | 0, \beta \rangle - \frac{1}{\beta} S, \quad (4.1.51)$$

где S — энтропия:

$$S = -\hbar V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{ f_A(\omega) \log f_A(\omega) - [\rho_A + f_A(\omega)] \times \\ \times \log [1 + \rho_A f_A(\omega)] \}. \quad (4.1.52)$$

Здесь $V = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$ — объем системы, ω обозначает $\omega(\mathbf{k})$, а функции f_A и ρ_A имеют вид

$$f_A = \begin{cases} f_B & \text{для бозонов,} \\ f_F & \text{для фермионов,} \end{cases} \quad (4.1.53)$$

$$\rho_A = \begin{cases} 1 & \text{для бозонов,} \\ -1 & \text{для фермионов.} \end{cases} \quad (4.1.54)$$

Примеры свободных полей и двухточечных функций для них. Рассмотрим некоторые простые примеры свободных полей при конечных температурах. Пусть свободное поле φ^0 удовлетворяет уравнению $\hat{\lambda}(\partial)\varphi^0 = 0$, в котором $\hat{\lambda}(\partial)$ имеет вид

$$\hat{\lambda}(\partial) = i \frac{\partial}{\partial t} - \omega(\nabla). \quad (4.1.55)$$

Имеем тогда

$$\mathcal{L} = \int d^4x \varphi^{0\dagger} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \omega(\nabla) \right) \varphi^0, \quad (4.1.56)$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \int d^4x \tilde{\varphi}^{0\dagger} \left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \omega(-\nabla) \right) \tilde{\varphi}^0, \quad (4.1.57)$$

где учтено соотношение $\omega^*(\nabla) = \omega(-\nabla)$. Соответствующие гамильтонианы имеют вид

$$H = \int d^3x \varphi^{0\dagger} \omega(\nabla) \varphi^0, \quad (4.1.58)$$

$$\tilde{H} = \int d^3x \tilde{\varphi}^{0\dagger} \omega(-\nabla) \tilde{\varphi}^0, \quad (4.1.59)$$

а операторы поля

$$\varphi^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \int d^3k \alpha(\mathbf{k}) \exp[ikx - i\omega(\mathbf{k})t], \quad (4.1.60)$$

$$\tilde{\varphi}^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \int d^3k \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) \exp[-ikx + i\omega(\mathbf{k})t]. \quad (4.1.61)$$

Тогда из (4.1.58) и (4.1.59) следует

$$H = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}), \quad (4.1.62)$$

$$\tilde{H} = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\alpha}(\mathbf{k}). \quad (4.1.63)$$

Операторы $\alpha(\mathbf{k})$ и $\tilde{\alpha}(\mathbf{k})$ связаны с $\alpha(\mathbf{k}, \beta)$ и $\tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta)$ преобразованием Боголюбова (4.1.25), (4.1.26). Все приведенные выше соотношения справедливы как для бозонов, так и для фермионов. Энергия $\omega(\mathbf{k})$ для бозонов положительно определена, а для фермионов она может становиться отрицательной при определенных

значениях \mathbf{k} . Но даже в последнем случае выражения (4.1.60) и (4.1.61) сохраняют силы, как это видно из следующих соображений. Поставив в соответствие оператор уничтожения положительной частоте, а оператор рождения — отрицательной, имеем

$$\varphi^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \int d^3k \{a(\mathbf{k}) \theta[\omega(\mathbf{k})] + b^\dagger(\mathbf{k}) \theta[-\omega(\mathbf{k})]\} \exp[-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}]. \quad (4.1.64)$$

Операторы $a(\mathbf{k})$ и $b^\dagger(\mathbf{k})$ связаны с $a(\mathbf{k}, \beta)$ и $b(\mathbf{k}, \beta)$ преобразованием Боголюбова

$$a(\mathbf{k}) = \{1 - f_F[\omega(\mathbf{k})]\}^{1/2} a(\mathbf{k}, \beta) + \{f_F[\omega(\mathbf{k})]\}^{1/2} \tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.1.65a)$$

$$b^\dagger(\mathbf{k}) = \{1 - f_F[-\omega(\mathbf{k})]\}^{1/2} b^\dagger(\mathbf{k}, \beta) - \{f_F[-\omega(\mathbf{k})]\}^{1/2} \tilde{b}(\mathbf{k}, \beta). \quad (4.1.65b)$$

Заметим, что в (4.1.65b) использовано значение $\sigma = -1$, причем этот выбор играет существенную роль в нижеследующем выводе выражений (4.1.60) и (4.1.61). Поскольку $f_F[\omega(\mathbf{k})] = 1 - f_F[-\omega(\mathbf{k})]$, имеем

$$a(\mathbf{k}) \theta[\omega(\mathbf{k})] + b^\dagger(\mathbf{k}) \theta[-\omega(\mathbf{k})] = \{1 - f_F[\omega(\mathbf{k})]\}^{1/2} \{a(\mathbf{k}, \beta) \theta[\omega(\mathbf{k})] - \tilde{b}(\mathbf{k}, \beta) \theta[-\omega(\mathbf{k})]\} + \{f_F[\omega(\mathbf{k})]\}^{1/2} \{\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \theta[\omega(\mathbf{k})] + b^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \theta[-\omega(\mathbf{k})]\}. \quad (4.1.66)$$

Далее, так как оператор в первой (второй) фигурной скобке содержит только операторы уничтожения (рождения), можно определить $\alpha(\mathbf{k}, \beta)$ и $\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}, \beta)$ следующим образом:

$$\alpha(\mathbf{k}, \beta) = a(\mathbf{k}, \beta) \theta[\omega(\mathbf{k})] - \tilde{b}(\mathbf{k}, \beta) \theta[-\omega(\mathbf{k})], \quad (4.1.67a)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}, \beta) = \tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \theta[\omega(\mathbf{k})] + b^\dagger(\mathbf{k}, \beta) \theta[-\omega(\mathbf{k})]. \quad (4.1.67b)$$

В этом случае выражение (4.1.64) принимает вид (4.1.60), а применяя к нему операцию тильда, получим (4.1.61).

Уточним теперь модель, предположив, что φ^0 — фермионное поле. Для упрощения обозначений введем для термополевого дублета символ

$$\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \tilde{\varphi}^{0\dagger} \end{pmatrix}. \quad (4.1.68)$$

Причинная двухточечная функция определена следующим образом:

$$S_c^{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0, \beta | T[\varphi^\alpha(x) \varphi^{\beta\dagger}(y)] | 0, \beta \rangle = \quad (4.1.69)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \langle 0, \beta | \varphi^\alpha(x) \varphi^{\beta\dagger}(y) | 0, \beta \rangle - \theta(t_y - t_x) \langle 0, \beta | \varphi^{\beta\dagger}(y) \varphi^\alpha(x) | 0, \beta \rangle; \quad (4.1.70)$$

импульсное представление для нее имеет вид

$$S_c^{\alpha\beta}(x-y) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4k \exp[ik(x-y) - ik_0(t_x - t_y)] S_c^{\alpha\beta}(k). \quad (4.1.71)$$

Тогда получаем

$$[S_c^{\alpha\beta}(k)] = \begin{pmatrix} \frac{c^2(\omega)}{k_0 - \omega + i\delta} + \frac{d^2(\omega)}{k_0 - \omega - i\delta}, & \frac{-c(\omega)d(\omega)}{k_0 - \omega + i\delta} + \frac{c(\omega)d(\omega)}{k_0 - \omega - i\delta} \\ \frac{-c(\omega)d(\omega)}{k_0 - \omega + i\delta} + \frac{c(\omega)d(\omega)}{k_0 - \omega - i\delta}, & \frac{d^2(\omega)}{k_0 - \omega + i\delta} + \frac{c^2(\omega)}{k_0 - \omega - i\delta} \end{pmatrix}, \quad (4.1.72)$$

где $\omega \equiv \omega(\mathbf{k})$, δ — положительная бесконечно малая величина,

$$c(\omega) = [1 - f_F(\omega)]^{1/2}, \quad d(\omega) = [f_F(\omega)]^{1/2}. \quad (4.1.73)$$

Примечательно, что выражение (4.1.72) можно записать в следующей простой форме:

$$S_c(k) = U(\omega) \begin{pmatrix} \frac{1}{k_0 - \omega + i\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_0 - \omega - i\delta} \end{pmatrix} U^\dagger(\omega) = \quad (4.1.74)$$

$$= U(\omega) [k_0 - \omega + i\delta\tau]^{-1} U^\dagger(\omega). \quad (4.1.75)$$

Здесь $U(\omega)$ — унитарная матрица

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} c(\omega) & d(\omega) \\ -d(\omega) & c(\omega) \end{pmatrix}, \quad (4.1.76)$$

а матрица τ определена выражением

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.77)$$

Возможность записи $S_c(k)$ в простом виде (4.1.75) делает эту причинную функцию очень полезной в практических вычислениях по методу термополевой динамики.

Запаздывающая двухточечная функция $S_r(x-y)$ и опережающая двухточечная функция $S_a(x-y)$ определяются следующим образом:

$$S_r^{\alpha\beta}(x-y) = \theta(t_x - t_y) \langle 0, \beta | [\varphi^\alpha(x), \varphi^{\beta\dagger}(y)]_+ | 0, \beta \rangle, \quad (4.1.78)$$

$$S_a^{\alpha\beta}(x-y) = -\theta(t_y - t_x) \langle 0, \beta | [\varphi^\alpha(x), \varphi^{\beta\dagger}(y)]_+ | 0, \beta \rangle. \quad (4.1.79)$$

Фурье-образы этих функций определяются с помощью соотношений, аналогичных (4.1.71), и имеют вид

$$S_r^{\alpha\beta}(k) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{k_0 - \omega + i\delta}, \quad (4.1.80)$$

$$S_a^{\alpha\beta}(k) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{k_0 - \omega - i\delta}. \quad (4.1.81)$$

Рассмотрим теперь бозонное поле φ^0 , для которого оператор $\lambda(\partial)$ задан выражением (4.1.55); здесь вновь используется дублетное обозначение (4.1.68). Причинная двухточечная функция имеет вид

$$\Delta_c^{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0, \beta | T[\varphi^\alpha(x), \varphi^{\beta+}(y)] | 0, \beta \rangle = \quad (4.1.82)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \langle 0, \beta | \varphi^\alpha(x) \varphi^{\beta+}(y) | 0, \beta \rangle + \\ + \theta(t_y - t_x) \langle 0, \beta | \varphi^{\beta+}(y) \varphi^\alpha(x) | 0, \beta \rangle, \quad (4.1.83)$$

а ее фурье-разложение

$$\Delta_c^{\alpha\beta}(x-y) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4k \exp[ik(x-y) - ik_0(t_x - t_y)] \Delta_c^{\alpha\beta}(k). \quad (4.1.84)$$

Используя выражения (4.1.60) и (4.1.61) и учитывая преобразование Боголюбова, определяемое равенствами (4.1.25) и (4.1.26), найдем

$$(\Delta_c^{\alpha\beta}(k)) = \left(\begin{array}{cc} \frac{c_B^2(\omega)}{k_0 - \omega + i\delta} - \frac{d_B^2(\omega)}{k_0 - \omega - i\delta}, & \frac{c_B(\omega) d_B(\omega)}{k_0 - \omega + i\delta} - \frac{c_B(\omega) d_B(\omega)}{k_0 - \omega - i\delta} \\ \frac{c_B(\omega) d_B(\omega)}{k_0 - \omega + i\delta} - \frac{c_B(\omega) d_B(\omega)}{k_0 - \omega - i\delta}, & \frac{d_B^2(\omega)}{k_0 - \omega + i\delta} - \frac{c_B^2(\omega)}{k_0 - \omega - i\delta} \end{array} \right) = \quad (4.1.85a)$$

$$= U_B(\omega) \tau [k_0 - \omega + i\delta\tau]^{-1} U_B(\omega), \quad (4.1.85b)$$

где $\omega = \omega(\mathbf{k})$, а

$$U_B(\omega) = \begin{pmatrix} c_B(\omega) & d_B(\omega) \\ d_B(\omega) & c_B(\omega) \end{pmatrix}, \quad (4.1.86)$$

причем

$$c_B(\omega) = [1 + f_B(\omega)]^{1/2}, \quad d_B(\omega) = [f_B(\omega)]^{1/2}. \quad (4.1.87)$$

Заметим, что матрица U_B не унитарна, но удовлетворяет соотношению

$$U_B \tau U_B = \tau. \quad (4.1.88)$$

Запаздывающая и опережающая двухточечные функции Δ_r и Δ_a определяются равенствами

$$\Delta_r^{\alpha\beta}(x-y) = \theta(t_x - t_y) \langle 0, \beta | [\varphi^\alpha(x), \varphi^{\beta+}(y)] | 0, \beta \rangle, \quad (4.1.89)$$

$$\Delta_a^{\alpha\beta}(x-y) = -\theta(t_y - t_x) \langle 0, \beta | [\varphi^\alpha(x), \varphi^{\beta+}(y)] | 0, \beta \rangle, \quad (4.1.90)$$

а их фурье-образы имеют вид

$$\Delta_r^{\alpha\beta}(k) = \frac{\tau^{\alpha\beta}}{k_0 - \omega + i\delta}, \quad (4.1.91)$$

$$\Delta_a^{\alpha\beta}(k) = \frac{\tau^{\alpha\beta}}{k_0 - \omega - i\delta}. \quad (4.1.92)$$

Рассмотрим теперь несколько более сложный случай

$$\lambda(-\partial) = -[(\partial/\partial t)^2 + \omega^2(\nabla)]. \quad (4.1.93)$$

Как указано непосредственно после выражения (2.6.119), поле φ^0 должно быть бозонным полем. Если предположить, что φ^0 — вещественное поле ($\varphi^{0+} = \varphi^0$), то в силу (2.6.53), где $\beta(k) = \alpha(k)$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \int \frac{d^3k}{(2\omega)^{1/2}} \{ \alpha(k) \exp[i(kx - \omega t)] + \\ + \alpha^+(k) \exp[-i(kx - \omega t)] \}, \end{aligned} \quad (4.1.94)$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \int \frac{d^3k}{(2\omega)^{1/2}} \{ \tilde{\alpha}(k) \exp[-i(kx - \omega t)] + \\ + \tilde{\alpha}^+(k) \exp[i(kx - \omega t)] \}. \end{aligned} \quad (4.1.95)$$

Операторы $\alpha(k)$ и $\tilde{\alpha}(k)$ связаны с операторами физических частиц $\alpha(k, \beta)$ и $\tilde{\alpha}(k, \beta)$ преобразованием Боголюбова (4.1.25а), (4.1.25б). Причинная, запаздывающая и опережающая двухточечные функции определены равенствами (4.1.83), (4.1.89) и (4.1.90) соответственно. Фурье-образы этих функций имеют вид

$$\Delta_c(k) = U_B(\omega) \tau [k_0^2 + (\omega - i\delta\tau)^2]^{-1} U_B(\omega), \quad (4.1.96)$$

$$\Delta_r^{\alpha\beta}(k) = \frac{\tau^{\alpha\beta}}{(k_0 + i\delta)^2 - \omega^2}, \quad (4.1.97)$$

$$\Delta_a^{\alpha\beta}(k) = \frac{\tau^{\alpha\beta}}{(k_0 - i\delta)^2 - \omega^2}. \quad (4.1.98)$$

Спектральные представления двухточечных функций для взаимодействующих полей приведены в следующем разделе.

Рассмотрим последний пример, для которого

$$\lambda(\partial) = i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \tau_3 + \Delta \tau_1. \quad (4.1.99)$$

Поскольку имеет место равенство (см. (2.6.54))

$$\lambda(\partial) = \tau_3 \left(i \frac{\partial}{\partial t} \tau_3 - \varepsilon(\nabla^2) + i \Delta \tau_2 \right),$$

свободное поле φ^0 определяется выражением (2.6.77)

$$\begin{aligned} \varphi^0(x) = \int d^3k \{ u(\mathbf{k}) \alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) \exp [i(\mathbf{kx} - \omega t)] + \\ + v(\mathbf{k}) \alpha_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{k}) \exp [-i(\mathbf{kx} - \omega t)] \}. \end{aligned} \quad (4.1.100)$$

Согласно соображениям, высказанным после формулы (2.6.123), φ^0 — фермионное поле. В (4.1.100) использованы обозначения $\alpha_{\uparrow}(\mathbf{k})$ и $\alpha_{\downarrow}(\mathbf{k})$ вместо $\alpha(\mathbf{k})$ и $\beta(\mathbf{k})$ соответственно, так как β используется для обозначения отношения $\hbar/k_B T$. Указанные операторы удовлетворяют фермионным антикоммутиационным соотношениям. Волновые функции $u(\mathbf{k})$ и $v(\mathbf{k})$ приведены в (2.6.73) и (2.6.74):

$$u(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \begin{pmatrix} \cos \theta_k \\ -\sin \theta_k \end{pmatrix}, \quad (4.1.101)$$

$$v(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \hbar^{1/2} \begin{pmatrix} \sin \theta_k \\ \cos \theta_k \end{pmatrix}, \quad (4.1.102)$$

где

$$\cos \theta_k = [(\omega + \varepsilon_k)/2\omega]^{1/2}, \quad (4.1.103)$$

$$\sin \theta_k = [(\omega - \varepsilon_k)/2\omega]^{1/2}, \quad (4.1.104)$$

$$\omega \equiv \omega(\mathbf{k}) = (\varepsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}. \quad (4.1.105)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^0(x) = \int d^3k \{ u(\mathbf{k}) \bar{\alpha}_{\uparrow}(\mathbf{k}) \exp [-i(\mathbf{kx} - \omega t)] + \\ + v(\mathbf{k}) \bar{\alpha}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{k}) \exp [i(\mathbf{kx} - \omega t)] \}. \end{aligned} \quad (4.1.106)$$

Операторы $\alpha_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k})$ и $\bar{\alpha}_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k})$ связаны с операторами физических частиц $\alpha_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k}, \beta)$ и $\bar{\alpha}_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k}, \beta)$ преобразованием Боголюбова. А именно

$$\alpha_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k}) = [1 - f_F(\omega)]^{1/2} \alpha_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k}, \beta) \pm [f_F(\omega)]^{1/2} \bar{\alpha}_{\uparrow, \downarrow}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.1.107)$$

$$\bar{\alpha}_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k}) = [1 - f_F(\omega)]^{1/2} \bar{\alpha}_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k}, \beta) \mp [f_F(\omega)]^{1/2} \alpha_{\uparrow, \downarrow}^{\dagger}(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.1.108)$$

где верхний (нижний) знак соответствует случаю спина вверх (вниз).

Согласно (2.6.56) и (2.6.57), имеем $\eta = 1$ и

$$d(\partial) = i \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon (\nabla^2) \tau_3 - \Delta \tau_1. \quad (4.1.109)$$

Таким образом, правила сумм (2.6.102) и (2.6.103) вместе с выражением (2.6.85) дают

$$(2\pi)^3 u_a(\mathbf{k}) u_b(\mathbf{k}) = \left(\frac{\omega + \varepsilon_k \tau_3 - \Delta \tau_1}{2\omega} \right)_{ab}, \quad (4.1.110)$$

$$(2\pi)^3 v_a(\mathbf{k}) v_b(\mathbf{k}) = \left(\frac{\omega - \varepsilon_k \tau_3 + \Delta \tau_1}{2\omega} \right)_{ab}, \quad (4.1.111)$$

где $a = 1$ или 2 и $b = 1$ или 2 .

Используем вновь обозначение термополевого дублета (4.1.68):

$$\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \tilde{\varphi}^{0\dagger} \end{pmatrix}. \quad (4.1.112)$$

Заметим, что это по существу четырехкомпонентный вектор-столбец, так как φ^0 — вектор-дублет. В дальнейшем будем обозначать φ^1 и φ^2 через φ^α , $\alpha = 1, 2$. Причинная, запаздывающая и опережающая двухточечные функции определены выражениями (4.1.70), (4.1.78) и (4.1.79) соответственно. В результате вычисления находим

$$S_c^{\alpha\beta}(k) = \frac{\omega + \varepsilon_k \tau_3 - \Delta \tau_1}{2\omega} [U(\omega)(k_0 - \omega + i\delta\tau)^{-1} U^\dagger(\omega)]_{\alpha\beta} + \\ + \frac{\omega - \varepsilon_k \tau_3 + \Delta \tau_1}{2\omega} [U(-\omega)(k_0 + \omega + i\delta\tau)^{-1} U^\dagger(-\omega)]_{\alpha\beta}, \quad (4.1.113)$$

где $U(\omega)$ приведено в (4.1.76), ω обозначает $\omega(\mathbf{k})$.

Определение причинной, запаздывающей и опережающей двухточечных функций дано в (4.1.70), (4.1.78) и (4.1.79) для фермионов и в (4.1.83), (4.1.89) и (4.1.90) для бозонов. Применяя эти определения к приведенным выше примерам, получаем уравнения для функций Грина

$$\lambda(\partial) S^{\alpha\beta}(x-y) = i\hbar \delta^{(4)}(x-y) \delta^{\alpha\beta}, \quad (4.1.114)$$

$$\lambda(\partial) \Delta^{\alpha\beta}(x-y) = i\hbar \delta^{(4)}(x-y) \tau^{\alpha\beta}; \quad (4.1.115)$$

здесь S обозначает S_c , S_r , S_a , а Δ — Δ_c , Δ_r , Δ_a .

Канонические коммутаторы также слегка видоизменяются в обозначениях термополевого дублета и имеют для бозонов и фермионов соответственно следующий вид:

$$[\pi^\alpha(x), \varphi^\beta(y)]_{t_x=t_y} = -i\hbar \tau^{\alpha\beta} \delta(x-y), \quad (4.1.116)$$

$$[\pi^\alpha(x), \varphi^\beta(y)]_{+t_x=t_y} = -i\hbar \delta^{\alpha\beta} \delta(x-y); \quad (4.1.117)$$

здесь $\pi^\alpha(x)$ — величина, канонически сопряженная с $\varphi^\alpha(x)$.

Правила умножения для двухточечных функций. При практических вычислениях часто встречаются замкнутые петлевые диаграммы, соответствующие произведениям двухточечных функций. Ниже приводятся выражения для подобных величин.

Начнем с произведения бозонных двухточечных функций, описываемых выражением (4.1.85). Имеем

$$\int \frac{dl_0}{2\pi} \left[U_B(\kappa_+) \tau \left(l_0 + \frac{k_0}{2} - \kappa_+ + i\delta\tau \right)^{-1} U_B(\kappa_+) \right]_{\alpha\beta} \times \\ \times \left[U_B(\kappa_-) \tau \left(l_0 - \frac{k_0}{2} \mp (\kappa_- - i\delta\tau) \right)^{-1} U_B(\kappa_-) \right]_{\alpha\beta} = \\ = i \int d\kappa \sigma(\kappa; \kappa_+, \kappa_-) [U_B(\kappa) \tau \{k_0 - \kappa + i\delta\tau\}^{-1} U_B(\kappa)]_{\alpha\beta}, \quad (4.1.118)$$

где

$$\sigma(\kappa; \kappa_+, \kappa_-) = \delta(\kappa - \kappa_+ \pm \kappa_-) [f_B(\kappa_+) - f_B(\pm\kappa_-)]. \quad (4.1.119)$$

Вывод последней формулы требует вычисления каждого матричного элемента. Например, компонента (1, 1) матрицы σ вычисляется следующим образом:

$$\int \frac{dl_0}{2\pi} \left(\frac{c_B^2(\kappa_+)}{l_0 + \frac{k_0}{2} - \kappa_+ + i\delta} - \frac{d_B^2(\kappa_+)}{l_0 + \frac{k_0}{2} - \kappa_+ - i\delta} \right) \times \\ \times \left(\frac{c_B^2(\kappa_-)}{l_0 - \frac{k_0}{2} - \kappa_- + i\delta} - \frac{d_B^2(\kappa_-)}{l_0 - \frac{k_0}{2} - \kappa_- - i\delta} \right) = \\ = (-i) \left(\frac{c_B^2(\kappa_+) d_B^2(\kappa_-)}{k_0 - \kappa_+ + \kappa_- + i\delta} - \frac{d_B^2(\kappa_+) c_B^2(\kappa_-)}{k_0 - \kappa_+ + \kappa_- - i\delta} \right) = \\ = (-i) \int d\kappa \delta(\kappa - \kappa_+ + \kappa_-) \frac{(e^{\beta\kappa} - 1) e^{\beta\kappa_-}}{(e^{\beta\kappa_+} - 1) (e^{\beta\kappa_-} - 1)} \times \\ \times \left(\frac{c_B^2(\kappa)}{k_0 - \kappa + i\delta} - \frac{d_B^2(\kappa)}{k_0 - \kappa - i\delta} \right).$$

При этом действительно для $\sigma(\kappa; \kappa_+, \kappa_-)$ получается выражение (4.1.119). Случай нижнего знака в (4.1.119) легко получить, если учесть соотношение $c_B^2(\kappa) = -d_B^2(-\kappa)$.

Формула для произведения фермионных двухточечных функций имеет вид

$$\epsilon^{\alpha\beta} \int \frac{dl_0}{2\pi} \left[U(\kappa_+) \left(l_0 + \frac{k_0}{2} - \kappa_+ + i\delta\tau \right)^{-1} U^+(\kappa_+) \right]_{\alpha\beta} \times \\ \times \left[U(\kappa_-) \left(l_0 - \frac{k_0}{2} - \kappa_- + i\delta\tau \right)^{-1} U^+(\kappa_-) \right]_{\alpha\beta} = \\ = i \int d\kappa \sigma(\kappa; \kappa_+, \kappa_-) [U_B(\kappa) \tau \{k_0 - \kappa + i\delta\tau\}^{-1} U_B(\kappa)]_{\alpha\beta}, \quad (4.1.120)$$

где $\varepsilon^\alpha = \tau^{\alpha\alpha}$ и

$$\sigma(\kappa; \kappa_+, \kappa_-) = -\delta(\kappa - \kappa_+ + \kappa_-) [f_F(\kappa_+) - f_F(\kappa_-)]. \quad (4.1.121)$$

С другой стороны, формула для фермионной двухточечной функции, состоящей из фермионной и бозонной двухточечных функций, записывается в виде

$$\begin{aligned} & \int \frac{dl_0}{2\pi} [U(\kappa_1) \{k_0 - l_0 - \kappa_1 + i\delta\tau\}^{-1} U^+(\kappa_1)]_{\alpha\beta} \times \\ & \quad \times [U_B(\kappa_2) \tau \{l_0 \mp (\kappa_2 - i\delta\tau)\}^{-1} U_B(\kappa_2)]_{\alpha\beta} = \\ & = i \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \sigma(\kappa; \kappa_1, \kappa_2) [U(\kappa) \{k_0 - \kappa \mp i\delta\tau\}^{-1} U^+(\kappa)]_{\alpha\beta}, \quad (4.1.122) \end{aligned}$$

где

$$\sigma(\kappa; \kappa_1, \kappa_2) = -\delta(\kappa - \kappa_1 \mp \kappa_2) [f_B(\pm\kappa_2) \mp 1 - f_F(\kappa_1)], \quad (4.1.123)$$

если бозонная двухточечная функция имеет вид (4.1.85). Если же бозонная двухточечная функция имеет вид (4.1.96), то формула записывается в виде

$$\begin{aligned} & \int \frac{dl_0}{2\pi} [U(\kappa_1) \{k_0 - l_0 - \kappa_1 + i\delta\tau\}^{-1} U^+(\kappa_1)]_{\alpha\beta} \times \\ & \quad \times [U_B(\kappa_2) \tau \{l_0^2 - (\kappa_2 - i\delta\tau)^2\}^{-1} U_B(\kappa_2)]_{\alpha\beta} = \\ & = i \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \sigma(\kappa; \kappa_1, \kappa_2) [U(\kappa) \{k_0 - \kappa \mp i\delta\tau\}^{-1} U^+(\kappa)]_{\alpha\beta}, \quad (4.1.124) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma(\kappa; \kappa_1, \kappa_2) = & -\frac{1}{2\kappa_2} [\delta(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2) \{f_B(\kappa_2) + 1 - f_F(\kappa_1)\} - \\ & - \delta(\kappa - \kappa_1 + \kappa_2) \{f_B(-\kappa_2) + 1 - f_F(\kappa_1)\}]. \quad (4.1.125) \end{aligned}$$

4.2. Динамическое отображение при конечных температурах, правило подстановки тильды и соотношение Кубо — Мартина — Швингера

В гл. 3 введены общее понятие динамического отображения и представление физических частиц для изолированной системы. В этом разделе дается обобщение указанных понятий на случай учета влияния температуры.

Уравнение Гейзенберга при конечных температурах. Согласно сказанному в разд. 4.1, имеется не только гейзенберговское поле

$\psi(x)$, но и сопряженное ему (в смысле операции тильда) поле $\tilde{\psi}(x)$. Уравнения Гейзенберга имеют вид

$$\Lambda(\partial)\psi(x) = F[\psi], \quad (4.2.1)$$

$$\Lambda^*(\partial)\tilde{\psi}(x) = F^*[\tilde{\psi}^*]. \quad (4.2.2)$$

Заметим, что $F^*[\tilde{\psi}^*]$ получается из $F[\psi]$ посредством операции тильда. Как показано в примерах разд. 4.1, двухточечные функции имеют сравнительно простой вид при использовании обозначений термополевых дублетов. Здесь дается обобщение этих обозначений.

Для любого оператора F определим термополевой дублет с помощью соотношения

$$F^\alpha = \begin{cases} F & \text{для } \alpha = 1, \\ \tilde{F}^\dagger & \text{для } \alpha = 2. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Если F — функция других операторов, например $AB \dots C$:

$$F = aAB \dots C, \quad (4.2.4)$$

где a — численный коэффициент, то F^α , согласно определению (4.2.3), задано выражением

$$F^\alpha = aP_\alpha(A^\alpha B^\alpha \dots C^\alpha); \quad (4.2.5)$$

здесь P_α — оператор упорядочения, определенный соотношением

$$P_\alpha(A^\alpha B^\alpha \dots C^\alpha) = \begin{cases} A^1 B^1 \dots C^1 & \text{для } \alpha = 1, \\ C^2 \dots B^2 A^2 & \text{для } \alpha = 2. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Используя дублетные обозначения, уравнение Гейзенберга можно привести к виду

$$\Lambda(\partial)\psi^\alpha(x) = P_\alpha F[\psi^\alpha(x)]. \quad (4.2.7)$$

Если ψ описывает электронное поле, то оно является спиновым дублетом. Вообще говоря, если исходный оператор Гейзенберга $\psi(x)$ выражается с помощью вектор-столбца, термополевой дублет имеет вид

$$\psi^\alpha(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{для } \alpha = 1, \\ \tilde{\psi}^\dagger(x)^t & \text{для } \alpha = 2. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Здесь верхний индекс t обозначает операцию транспонирования вектора. Если $\psi(x)$ преобразуется под действием преобразования симметрии согласно

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x), \quad (4.2.9)$$

то, как видно из определения (4.2.8), $\psi^\alpha(x)$ преобразуется аналогично:

$$\psi^\alpha(x) \rightarrow U\psi^\alpha(x), \quad (4.2.10)$$

Это свойство, характерное для термополевых мультиплетов, может упростить вычисления.

Динамическое отображение при конечных температурах.

Пусть φ^0 и $\tilde{\varphi}^0$ — свободное физическое поле и тильда-сопряженное поле соответственно. Уравнения для этих полей имеют вид

$$\lambda (\partial) \varphi^0 = 0, \quad (4.2.11)$$

$$\lambda^* (\partial) \tilde{\varphi}^0 = 0. \quad (4.2.12)$$

Если температура отлична от нуля, многие квантовые моды становятся неустойчивыми. Во многих случаях эти квантовые моды рассматриваются приближенно как физические кванты. Неустойчивость, обусловленная влиянием температуры, учитывается посредством структуры соответствующих двухточечных функций резонансного типа.

Следуя рассуждениям гл. 3, запишем динамическое отображение в терминах некоторых свободных полей. Поскольку два уравнения (4.2.1) и (4.2.2) не связаны друг с другом, можно выбрать φ^0 и $\tilde{\varphi}^0$ так, чтобы ψ содержала только φ^0 , а $\tilde{\psi}$ — только $\tilde{\varphi}^0$. Влияние температуры проявляется лишь в том, что $\alpha(\mathbf{k})$ и $\tilde{\alpha}(\mathbf{k})$ перестают быть операторами уничтожения; они выражаются через операторы уничтожения $\alpha(\mathbf{k}, \beta)$ и $\tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta)$ согласно формулам (4.1.25) и (4.1.26):

$$\alpha(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k}, \beta) g^{1/2}(\mathbf{k}, \beta) + \sigma \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}, \beta) f^{1/2}(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.2.13)$$

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{k}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) g^{1/2}(\mathbf{k}, \beta) + \sigma \alpha^\dagger(\mathbf{k}, \beta) f^{1/2}(\mathbf{k}, \beta), \quad (4.2.14)$$

где $\rho = 1$ для бозонов и $\rho = -1$ для фермионов. Функции $g(\mathbf{k}, \beta)$ и $f(\mathbf{k}, \beta)$ определены следующим образом:

$$g(\mathbf{k}, \beta) = e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} / (e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - \rho), \quad (4.2.15)$$

$$f(\mathbf{k}, \beta) = 1 / (e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - \rho). \quad (4.2.16)$$

Заметим, что $\omega_{\mathbf{k}}$ обозначает $\omega(\mathbf{k})$, а

$$g(\mathbf{k}, \beta) / f(\mathbf{k}, \beta) = e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (4.2.17)$$

Хотя поле ψ не содержит поля $\tilde{\varphi}^0$, а $\tilde{\psi}$ — поля φ^0 , имеем

$$\langle 0, \beta | \tilde{\psi}^\dagger \psi | 0, \beta \rangle \neq 0, \quad (4.2.18)$$

поскольку

$$\langle 0, \beta | \tilde{\varphi}^{0\dagger} \varphi^0 | 0, \beta \rangle \neq 0. \quad (4.2.19)$$

Именно по этой причине многие физические величины, содержащие энергию $\omega(\mathbf{k})$, зависят от температуры.

Динамическое отображение для ψ можно записать в виде

$$\psi(x) = \sum_{n,m} \int dk_1 \dots dk_n dq_1 \dots dq_m F(x; k_1 \dots k_n; q_1 \dots q_m) \times \\ \times \alpha^+(k_1) \dots \alpha^+(k_n) \alpha(q_1) \dots \alpha(q_m). \quad (4.2.20)$$

Тогда операция тильда дает

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{n,m} \int dk_1 \dots dk_n dq_1 \dots dq_m F^*(x; k_1 \dots k_n; q_1 \dots q_m) \times \\ \times \tilde{\alpha}^+(k_1) \dots \tilde{\alpha}^+(k_n) \tilde{\alpha}(q_1) \dots \tilde{\alpha}(q_m). \quad (4.2.21)$$

Из выражений (4.2.20) и (4.2.21) следует, что H и \tilde{H} равны в слабом смысле H_0 и \tilde{H}_0 соответственно (см. разд. 3.4). Таким образом, полный гамильтониан $\hat{H} = H - \tilde{H}$ равен в слабом смысле $\hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0$. Операторы $\alpha(k)$ и $\tilde{\alpha}(k)$ связаны с физическими операторами $\alpha(k, \beta)$ и $\tilde{\alpha}(k, \beta)$ посредством преобразования Боголюбова.

Правило подстановки тильды. Обратимся теперь к соотношению (4.1.27), согласно которому

$$\alpha(k)|0, \beta\rangle = \sigma \exp(\beta\omega_k/2) \tilde{\alpha}^+(k)|0, \beta\rangle. \quad (4.2.22)$$

При его выводе учтено, что $\alpha(k, \beta)|0, \beta\rangle = 0$. Кроме того, соотношение $\tilde{\alpha}(k, \beta)|0, \beta\rangle = 0$ приводит к равенству

$$\alpha^+(k)|0, \beta\rangle = \sigma\tau \exp(-\beta\omega_k/2) \tilde{\alpha}(k)|0, \beta\rangle. \quad (4.2.23)$$

Повторное применение (4.2.22) и (4.2.23) приводит к выражению

$$\psi(x)|0, \beta\rangle = \varepsilon \exp\left(\frac{\beta}{2}(H_0 - \tilde{H}_0)\right) \tilde{\psi}^+(x)|0, \beta\rangle, \quad (4.2.24)$$

где

$$H_0 = \int d^3k \omega_k \alpha^+(k) \alpha(k), \quad (4.2.25)$$

$$\tilde{H}_0 = \int d^3k \omega_k \tilde{\alpha}^+(k) \tilde{\alpha}(k), \quad (4.2.26)$$

ε — знаковый множитель.

Знаковый множитель ε определяется следующим образом. Рассмотрим сначала оператор $\alpha^+(k_1) \dots \alpha^+(k_n) \alpha(q_1) \dots \alpha(q_m)$, где $\alpha(I)$ — фермионный оператор. Число перестановок фермионных операторов в этом произведении равно

$$n_F = \frac{1}{2}(n+m)(n+m-1). \quad (4.2.27)$$

Предположим, что среди операторов $\alpha^+(k_1) \dots \alpha^+(k_n)$ имеется ν фермионов с $\sigma = -1$ и $(n - \nu)$ фермионов с $\sigma = +1$, а среди операторов $\alpha(q_1) \dots \alpha(q_m)$ имеется μ фермионов с $\sigma = -1$ и

$(m - \mu)$ фермионов с $\sigma = +1$. С учетом соотношений (4.2.22) и (4.2.23) получаем дополнительный знаковый множитель от операторов α с $\sigma = -1$ и от операторов α^\dagger с $\sigma = +1$. Таким образом, знаковый множитель ε принимает вид

$$\varepsilon = (-1)^{n_F} (-1)^{n-v} (-1)^\mu = (-1)^{n_F+n} (-1)^{\mu-v}. \quad (4.2.28)$$

Поскольку

$$n_F + n = \frac{1}{2} (n - m) (n - m + 1) + 2nm,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (n - m) (n - m + 1) + (\mu - v) &= \\ &= \frac{1}{2} [n - m + 2(\mu - v)] [n - m + 2(\mu - v) + 1] - \\ &\quad - 2(n - m)(\mu - v) - 2(\mu - v)^2, \end{aligned}$$

имеем

$$\varepsilon = (-1)^{1/2 \{ (n-v) - (m-\mu) + \mu - v \} \{ (n-v) - (m-\mu) + \mu - v + 1 \}}. \quad (4.2.29)$$

Тогда (4.2.24) можно записать в виде

$$\exp\left(\frac{\beta}{2} \tilde{H}_0\right) \psi(x) |0, \beta\rangle = (-1)^{(F+1) F/2} \exp\left(\frac{\beta}{2} H_0\right) \tilde{\psi}^\dagger(x) |0, \beta\rangle. \quad (4.2.30)$$

Здесь F — оператор числа фермионов, определенный выражением

$$F = \int d^3k \sigma [\alpha^\dagger(\mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) - \tilde{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{\alpha}(\mathbf{k})]. \quad (4.2.31)$$

Если имеется еще несколько типов фермионных и бозонных полей, то σ -множители для них можно определить, пользуясь правилом сохранения полного числа фермионов. Для этого примем, что, как для обычных фермионов, $\sigma = +1$ для частиц и $\sigma = -1$ для дырок. Здесь под частицей (фермионом) понимается квант, связанный с волновой функцией $u^r(\mathbf{k})$ в (2.6.45) и (2.6.46), а под дыркой — квант, связанный с $v^r(\mathbf{k})$. В случае модели свободного поля (4.1.55) фермион с отрицательным значением $\omega(\mathbf{k})$ является дыркой, и, следовательно, в (4.1.65б) использовалось значение $\sigma = -1$. В случае модели (4.1.99) выражение (4.1.100) показывает, что дыркой является фермион со спином вниз. Поэтому значение $\sigma = -1$ в (4.1.107) и (4.1.108) приписывается фермиону со спином вниз. (Если фермиону со спином вниз приписать значение $\sigma = +1$, выражение для причинной двухточечной функции станет более громоздким; U и U^\dagger поменяются местами во втором члене выражения (4.1.113), а не в первом. При этом правила умножения причинных двухточечных функций усложнятся.) Что касается элементарных бозонов, то мы можем всегда использовать значение $\sigma = +1$. Если рассматриваются также составные частицы

(бозоны или фермионы), значение σ определяется формулой

$$\sigma = (-1)^{F(F+1)/2},$$

где F — число всех фермионов, входящих в составные частицы. Пусть n_i — число фермионов в i -й частице. Тогда полное число фермионов дается выражением

$$F = \int d^3k \sum_i n_i [\alpha_i^\dagger(\mathbf{k}) \alpha_i(\mathbf{k}) - \tilde{a}_i^\dagger(\mathbf{k}) \tilde{a}_i(\mathbf{k})]. \quad (4.2.32)$$

Заметим, что F , H_0 и \tilde{H}_0 коммутируют друг с другом и, кроме того, $F|0, \beta\rangle = 0$.

Соотношение (4.2.30) допускает следующее обобщение:

$$\exp\left(\frac{\beta}{2}\tilde{H}_0\right) O_H(x)|0, \beta\rangle = (-1)^{(F+1)F/2} \exp\left(\frac{\beta}{2}H_0\right) \tilde{O}_H^\dagger(x)|0, \beta\rangle, \quad (4.2.33)$$

где $O_H(x)$ — произвольный оператор Гейзенберга, состоящий из операторов ψ .

Применяя к (4.2.33) операцию эрмитова сопряжения, получаем

$$\langle 0, \beta | O_H(x) \exp\left(\frac{\beta}{2}\tilde{H}_0\right) = \langle 0, \beta | \tilde{O}_H^\dagger(x) \exp\left(\frac{\beta}{2}H_0\right) (-1)^{(F+1)F/2}, \quad (4.2.34)$$

где вместо O_H стоит O_H^\dagger . Соотношения (4.2.33) и (4.2.34) выражают правило подстановки тильды.

Соотношение Кубо—Мартина—Швингера. Рассмотрим два оператора $A(t)$ и $B(t)$, являющиеся произведениями гейзенберговских полей в момент времени t . Число фермионов, сопоставляемое с оператором $A(t)$ или $B(t)$, обозначается n_A или n_B соответственно. Поскольку полный гамильтониан $\hat{H} \equiv H - \tilde{H}$ в слабом смысле равен гамильтониану $\hat{H}_0 \equiv H_0 - \tilde{H}_0$, при вычислении матричных элементов $A(t)$ и $B(t)$ можно использовать формулу

$$A(t) = \exp[i\hat{H}_0(t-t')] A(t') \exp[-i\hat{H}_0(t-t')] \text{ и т. д.} \quad (4.2.35)$$

Поскольку число фермионов в \tilde{A} равно $(-n_A)$, а также учитывая, что $\hat{H}|0, \beta\rangle = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | A(t) B(t') | 0, \beta \rangle &= (-1)^{(n_A-1)n_A} \times \\ &\times \langle 0, \beta | \tilde{A}^\dagger\left(t + \frac{1}{2}i\beta\right) B(t') | 0, \beta \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Заметим, что \tilde{A} содержит только $\tilde{\varphi}^0$, тогда как $B(t)$ — только φ^0 . Поэтому перестановка операторов $\tilde{A}^\dagger(t + 1/2i\beta)$ и $B(t')$ приводит

к появлению только знакового множителя $(-1)^{n_A n_B}$. Таким образом, получаем

$$\langle 0, \beta | A(t) B(t') | 0, \beta \rangle = (-1)^{(n_A-1) n_A/2} (-1)^{n_A n_B} \times \\ \times \langle 0, \beta | B(t') \tilde{A}^+ \left(t + \frac{1}{2} i\beta \right) | 0, \beta \rangle. \quad (4.2.37)$$

Использование (4.2.33) приводит к соотношению

$$\langle 0, \beta | A(t) B(t') | 0, \beta \rangle = \\ = (-1)^{(n_A-1) n_A/2} (-1)^{n_A n_B} (-1)^{(n_A+1) n_A/2} \times \\ \times \langle 0, \beta | B(t') A(t + i\beta) | 0, \beta \rangle = \\ = (-1)^{n_A (n_A + n_B)} \langle 0, \beta | B(t') A(t + i\beta) | 0, \beta \rangle = \\ = \langle 0, \beta | B(t') A(t + i\beta) | 0, \beta \rangle, \quad (4.2.38)$$

которое обычно называют соотношением Кубо—Мартини—Швингера [7]. Выше везде учитывался тот факт, что вакуумное среднее значение (4.2.38) обращается в нуль при $n_A \neq -n_B$.

Пусть $|n, \tilde{m}\rangle$ — вектор состояния, который строится посредством n -кратного действия циклической операции $\alpha^+(\beta)$ и m -кратного действия циклической операции $\tilde{\alpha}^+(\beta)$ на $|0, \beta\rangle$. Тогда операция тильда приводит к соотношению

$$\langle n, \tilde{m} | \psi(x) | n', \tilde{m}' \rangle = \langle \tilde{n}, \tilde{m} | \tilde{\psi}(x) | \tilde{n}', \tilde{m}' \rangle^* = \\ = (-1)^{n_m - n_{m'}} \langle \tilde{n}, m | \tilde{\psi}(x) | \tilde{n}', m' \rangle^*, \quad (4.2.39)$$

где n_m — число фермионов в состоянии $|\tilde{m}\rangle$. При получении (4.2.39) использовано выражение (4.1.34) для повторной операции тильда.

Соотношения (4.2.33), (4.2.34) и (4.2.39) используются ниже при выводе спектрального представления для двухточечных функций.

Обобщение формулы ЛСЦ на случай конечных температур. Обобщим теперь формулы (3.5.13) и (3.5.14) на случай конечных температур. Рассмотрим сначала вещественное бозонное поле ψ . В этом случае φ^0 имеет вид

$$\varphi^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k [u(\mathbf{k}, x) \alpha(\mathbf{k}) + u^*(\mathbf{k}, x) \alpha^+(\mathbf{k})], \quad (4.2.40)$$

$$\text{где} \quad u(\mathbf{k}, x) = u(\mathbf{k}) \exp [i\mathbf{k}x - i\omega(\mathbf{k})t]; \quad (4.2.41)$$

кроме того, $\lambda^*(\partial) = \lambda(\partial)$.

Поскольку

$$\alpha(\mathbf{k}, \beta) = g^{1/2}(\mathbf{k}, \beta) \alpha(\mathbf{k}) - \sigma f^{1/2}(\mathbf{k}, \beta) \bar{\alpha}^\dagger(\mathbf{k}), \quad (4.2.42)$$

$$\alpha(\mathbf{k}, \beta) = g^{1/2}(\mathbf{k}, \beta) \bar{\alpha}(\mathbf{k}) - \sigma f^{1/2}(\mathbf{k}, \beta) \alpha^\dagger(\mathbf{k}), \quad (4.2.43)$$

имеем

$$\alpha(\mathbf{k}, \beta) = \frac{1}{\hbar} \int d^3x u^*(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} \{g^{1/2}(\partial, \beta) \varphi^0(x) - \sigma f^{1/2}(\partial, \beta) \bar{\varphi}^0(x)\}, \quad (4.2.44)$$

$$\bar{\alpha}(\mathbf{k}, \beta) = -\frac{1}{\hbar} \int d^3x u(\mathbf{k}, x) \overleftrightarrow{\Gamma} \{g^{1/2}(\partial, \beta) \bar{\varphi}^0(x) - \sigma f^{1/2}(\partial, \beta) \varphi^0(x)\}, \quad (4.2.45)$$

где $g(\partial, \beta)$ и $f(\partial, \beta)$ определены следующим образом:

$$g(\partial, \beta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = g(\mathbf{k}, \beta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \text{ и т. д.} \quad (4.2.46)$$

Заметим, что в выражении (4.2.45) использовано $(-\overleftrightarrow{\Gamma})$ вместо $\overleftrightarrow{\Gamma}$, поскольку полный лагранжиан равен $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}$.

Из (4.2.44) и (4.2.45) следует, что величина

$$\psi(x, \beta) \equiv g^{1/2}(\partial, \beta) \{\psi(x) - \chi\} - \sigma f^{1/2}(\partial, \beta) \{\tilde{\psi}(x) - \chi\} \quad (4.2.47)$$

является связующим полем для $\alpha^{\text{in}}(\mathbf{k}, \beta)$ и $\alpha^{\text{out}}(\mathbf{k}, \beta)$, а величина

$$\tilde{\psi}(x, \beta) \equiv g^{1/2}(\partial, \beta) \{\tilde{\psi}(x) - \chi\} - \sigma f^{1/2}(\partial, \beta) \{\psi(x) - \chi\} \quad (4.2.48)$$

— связующее поле для $\bar{\alpha}^{\text{in}}(\mathbf{k}, \beta)$ и $\bar{\alpha}^{\text{out}}(\mathbf{k}, \beta)$; здесь

$$\chi = \langle 0, \beta | \psi | 0, \beta \rangle = \langle 0, \beta | \tilde{\psi} | 0, \beta \rangle.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int d^3x \{\varphi^0(x, \beta) \overleftrightarrow{\Gamma} \psi(x, \beta) - \bar{\varphi}^0(x, \beta) \overleftrightarrow{\Gamma} \tilde{\psi}(x, \beta)\} = \\ & = \int d^3x \{\varphi^0(x) \overleftrightarrow{\Gamma} [\psi(x) - \chi] - \bar{\varphi}^0(x) \overleftrightarrow{\Gamma} [\tilde{\psi}(x) - \chi]\}, \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

если определить $\varphi^0(x, \beta)$ и $\bar{\varphi}^0(x, \beta)$ равенствами

$$\varphi^0(x, \beta) = g^{1/2}(\partial, \beta) \varphi^0(x) - \sigma f^{1/2}(\partial, \beta) \bar{\varphi}^0(x), \quad (4.2.50)$$

$$\bar{\varphi}^0(x, \beta) = g^{1/2}(\partial, \beta) \bar{\varphi}^0(x) - \sigma f^{1/2}(\partial, \beta) \varphi^0(x). \quad (4.2.51)$$

Величина $\varphi^0(x, \beta)$ (или $\bar{\varphi}^0(x, \beta)$) — физическое поле, соответствующее $\psi(x, \beta)$ (или $\tilde{\psi}(x, \beta)$). При выводе (4.2.49) использовано соотношение

$$g(\partial, \beta) - f(\partial, \beta) = 1 \quad \text{для бозонов.} \quad (4.2.52)$$

Применяя далее соотношение (4.2.49) и следуя выводу (3.5.14), получаем динамические отображения

$$S\psi(x) = : \left\langle T \left[\psi(x) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} (\mathcal{L}_J^0 - \hat{\mathcal{L}}_J^0) \right) \right] \right\rangle_c, \quad (4.2.53)$$

$$S\tilde{\psi}(x) = : \left\langle T \left[\tilde{\psi}(x) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} (\mathcal{L}_J^0 - \tilde{\mathcal{L}}_J^0) \right) \right] \right\rangle_c, \quad (4.2.54)$$

где

$$S = : \left\langle T \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} (\mathcal{L}_J^0 - \tilde{\mathcal{L}}_J^0) \right) \right] \right\rangle_c. \quad (4.2.55)$$

Здесь

$$\mathcal{L}_J^0 = \int d^4\xi J^0(\xi) \phi(\xi), \quad (4.2.56)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_J^0 = \int d^4\xi \tilde{J}^0(\xi) \tilde{\phi}(\xi), \quad (4.2.57)$$

где

$$J^0(\xi) = \varphi^0 \lambda(\partial), \quad (4.2.58)$$

$$\tilde{J}^0(\xi) = \tilde{\varphi}^0 \lambda^*(\partial), \quad (4.2.59)$$

$$\phi(\xi) = Z^{-1/2} [\psi(\xi) - \chi], \quad (4.2.60)$$

$$\tilde{\phi}(\xi) = Z^{-1/2} [\tilde{\psi}(\xi) - \chi]. \quad (4.2.61)$$

Если $\psi(x)$ — комплексное поле, то можно получить соотношения (4.2.53), (4.2.54) вместе с (4.2.55), где \mathcal{L}_J^0 и $\tilde{\mathcal{L}}_J^0$ имеют вид

$$\mathcal{L}_J^0 = \int d^4\xi \{ \bar{J}^0(\xi) \phi(\xi) + \bar{\phi}(\xi) J^0(\xi) \}, \quad (4.2.62)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_J^0 = \int d^4\xi \{ \tilde{\bar{J}}^0(\xi) \tilde{\phi}(\xi) + \tilde{\bar{\phi}}(\xi) \tilde{J}^0(\xi) \}, \quad (4.2.63)$$

причем $\bar{\phi} = \phi^\dagger \eta$ и

$$\bar{J}^0(x) = \bar{\varphi}^0(x) \lambda(\partial), \quad (4.2.64)$$

$$J^0(x) = \lambda(-\overleftarrow{\partial}) \varphi^0(x), \quad (4.2.65)$$

$$\tilde{\bar{J}}^0(x) = \tilde{\bar{\varphi}}^0(x) \lambda^*(\partial), \quad (4.2.66)$$

$$\tilde{J}^0(x) = \lambda^*(-\overleftarrow{\partial}) \tilde{\varphi}^0(x), \quad (4.2.67)$$

$$\phi(x) = Z^{-1/2} [\psi(x) - \chi], \quad (4.2.68)$$

$$\tilde{\phi}(x) = Z^{-1/2} [\tilde{\psi}(x) - \chi^*]. \quad (4.2.69)$$

Приведенный результат справедлив независимо от того, описывает ли ψ бозоны или фермионы. Выше отмечалось, что динамическое отображение ψ можно выразить только через φ^0 . С дру-

гой стороны, выражение для $S\psi$ в (4.2.53) содержит наряду с φ^0 также и $\tilde{\varphi}^0$. Это неудивительно, поскольку из (4.2.22) и (4.2.23) очевидно наличие связи между φ^0 и $\tilde{\varphi}^0$.

Следует отметить, что динамическое отображение при конечных температурах может быть получено из динамического отображения для изолированной системы (3.5.14) простой заменой $\mathcal{L}_J^0 \rightarrow (\mathcal{L}_J^0 - \tilde{\mathcal{L}}_J^0)$. Это нетрудно понять, вспомнив, что полный лагранжиан при конечных температурах имеет вид $\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}$. Следует также отметить, что хотя физическими полями являются не $\varphi^0(x)$ и $\tilde{\varphi}^0(x)$, а $\varphi^0(x, \beta)$ и $\tilde{\varphi}^0(x, \beta)$, тем не менее динамические отображения (4.2.53)—(4.2.55) принимают столь же простой вид, как и для случая нулевой температуры (3.5.14), если выразить их через $\varphi^0(x)$ и $\tilde{\varphi}^0(x)$.

Если $0_H(\psi, \tilde{\psi})$ — оператор, состоящий из ψ , ψ^\dagger , $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}^\dagger$, то формулы (4.2.53) и (4.2.54) получают следующее обобщение:

$$S0_H(\psi, \tilde{\psi}) = : \left\langle T \left[0_H(\psi, \tilde{\psi}) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} (\mathcal{L}_J^0 - \tilde{\mathcal{L}}_J^0) \right) \right] \right\rangle_c. \quad (4.2.70)$$

4.3. Спектральное представление двухточечных функций

Спектральное представление двухточечных функций для изолированной системы обсуждалось в разд. 3.6. В данном разделе будет получено обобщение этого представления на случай конечных температур [4].

Рассмотрим двухточечные функции, состоящие из операторов $A(x)$ и $B(y)$. Число фермионов, связанных с оператором $A(x)$ ($B(x)$), будем обозначать F_A (F_B). Используем векторное обозначение (см. (4.2.3))

$$\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \hat{B}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (4.3.1)$$

Причинная двухточечная функция определяется следующим образом (ср. с (4.1.70) и (4.1.83)):

$$\begin{aligned} G_{cAB}^{\alpha\beta}(x-y) &= \langle 0, \beta | T [A^\alpha(x), B^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = \\ &= \theta(t_x - t_y) \langle 0, \beta | A^\alpha(x) B^\beta(y) | 0, \beta \rangle + \\ &+ \rho \theta(t_y - t_x) \langle 0, \beta | B^\beta(y) A^\alpha(x) | 0, \beta \rangle, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

где $\rho = +1$ или -1 для бозоноподобных или фермионоподобных операторов A и B соответственно.

Используя формулу

$$\theta(t_x - t_y) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{i}{2\pi} \int d\omega \frac{1}{\omega + i\delta} \exp\{-i\omega(t_x - t_y)\} \quad (4.3.3)$$

и вставляя полный набор $\sum_{n, \tilde{m}} |n, \tilde{m}\rangle \langle \tilde{m}, n|$ между операторами A и B , находим

$$G_{cAB}^{\alpha\beta}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\frac{\sigma_{AB}^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{p})}{\rho_0 - \omega + i\delta} - \rho \frac{\sigma_{BA}^{\alpha\beta}(\omega, -\mathbf{p})}{\rho_0 + \omega - i\delta} \right), \quad (4.3.4)$$

где

$$\sigma_{AB}^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \sum_{n, \tilde{m}} \langle 0, \beta | A^\alpha(0) | n, \tilde{m} \rangle \langle \tilde{m}, n | B^\beta(0) | 0, \beta \rangle \times \\ \times \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_m) \delta(\omega - E_n + E_m). \quad (4.3.5)$$

Функция $G_{cAB}^{\alpha\beta}(p)$ в (4.3.4) определена как

$$G_{cAB}^{\alpha\beta}(x - y) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4 p \exp\{ip(x - y)\} G_{cAB}^{\alpha\beta}(p). \quad (4.3.6)$$

Величины \mathbf{p}_n и E_n в (4.3.5) — импульс и энергия состояния n , а $(-\mathbf{p}_m)$ и $(-E_m)$ — импульс и энергия состояния \tilde{m} .

Из выражений (4.2.33) и (4.2.34) имеем

$$\exp\{-\beta(H_0 - \tilde{H}_0)/2\} A(0) | 0, \beta \rangle = (-1)^{F(F+1)/2} \tilde{A}^+(0) | 0, \beta \rangle, \quad (4.3.7)$$

$$\langle 0, \beta | A(0) \exp\{-\beta(H_0 - \tilde{H}_0)/2\} = \langle 0, \beta | \tilde{A}^+(0) (-1)^{F(F+1)/2}, \quad (4.3.8)$$

а из (4.2.39) получаем

$$\langle n, \tilde{m} | A(0) | n', \tilde{m}' \rangle = (-1)^{n_m - n_{m'}} \langle \tilde{n}, m | \tilde{A}(0) | \tilde{n}', m' \rangle^*. \quad (4.3.9)$$

Из этих соотношений находим

$$\langle 0, \beta | \tilde{A}^+(0) | n, \tilde{m} \rangle = (-1)^{FA(F_A-1)/2} e^{-\beta(E_n - E_m)/2} \langle 0, \beta | A(0) | n, \tilde{m} \rangle, \quad (4.3.10)$$

$$\langle n, \tilde{m} | A(0) | 0, \beta \rangle = (-1)^{n_m} \langle \tilde{n}, m | \tilde{A}(0) | 0, \beta \rangle^* = \\ = (-1)^{n_m} \langle 0, \beta | \tilde{A}^+(0) | m, \tilde{n} \rangle = \\ = (-1)^{n_m} (-1)^{FA(F_A-1)/2} e^{-\beta(E_m - E_n)/2} \langle 0, \beta | A(0) | m, \tilde{n} \rangle, \quad (4.3.11)$$

$$\langle n, \tilde{m} | \tilde{A}^+(0) | 0, \beta \rangle = (-1)^{FA(F_A+1)/2} e^{-\beta(E_n - E_m)/2} \langle n, \tilde{m} | A(0) | 0, \beta \rangle = \\ = (-1)^{FA} (-1)^{n_m} \langle 0, \beta | A(0) | m, \tilde{n} \rangle, \quad (4.3.12)$$

$$\langle n, \tilde{m} | \tilde{B}^+(0) | 0, \beta \rangle = (-1)^{FB(F_B+1)/2} e^{-\beta(E_n - E_m)/2} \langle m, \tilde{n} | B(0) | 0, \beta \rangle, \quad (4.3.13)$$

$$\langle 0, \beta | B(0) | n, \tilde{m} \rangle = (-1)^{n_m} (-1)^{FB(F_B+1)/2} e^{-\beta(E_m - E_n)/2} \times \\ \times \langle m, \tilde{n} | B(0) | 0, \beta \rangle, \quad (4.3.14)$$

$$\langle 0, \beta | \tilde{B}^+(0) | n, \tilde{m} \rangle = (-1)^{FB} (-1)^{n_m} \langle m, n | B(0) | 0, \beta \rangle. \quad (4.3.15)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | A^\alpha(0) | n, \tilde{m} \rangle \langle \tilde{m}, n | B^\beta(0) | 0, \beta \rangle &= \langle 0, \beta | A(0) | n, \tilde{m} \rangle \times \\ &\times \langle \tilde{m}, n | B(0) | 0, \beta \rangle \times \\ &\times \left(\begin{array}{cc} 1, & (-1)^{F_A (F_{A^{-1}})^{1/2}} e^{-\beta (E_n - E_m)/2} \\ (-1)^{F_A (F_{A^{-1}})^{1/2}} e^{-\beta (E_n - E_m)/2}, & e^{-\beta (E_n - E_m)} \end{array} \right)^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | B^\beta(0) | m, \tilde{n} \rangle \langle \tilde{n}, m | A^\alpha(0) | 0, \beta \rangle &= \langle 0, \beta | A(0) | n, \tilde{m} \rangle \times \\ &\times \langle \tilde{m}, n | B(0) | 0, \beta \rangle \times \\ &\times \left(\begin{array}{cc} e^{-\beta (E_n - E_m)}, & (-1)^{F_A (F_{A^+})^{1/2}} e^{-\beta (E_n - E_m)/2} \\ (-1)^{F_A (F_{A^+})^{1/2}} e^{-\beta (E_n - E_m)/2}, & 1 \end{array} \right)^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

если $F_A = -F_B$. Если же $F_A \neq -F_B$, то $G_{cAB}^{\alpha\beta}$ обращается в нуль; поэтому в дальнейшем мы всегда считаем, что $F_A = -F_B$. Тогда (4.3.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{AB}^{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{p}) &= \sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) \times \\ &\times \left(\begin{array}{cc} c^2(\omega), & (-1)^{F_A (F_{A^{-1}})^{1/2}} c(\omega) d(\omega) \\ (-1)^{F_A (F_{A^{-1}})^{1/2}} c(\omega) d(\omega), & d^2(\omega) \end{array} \right)^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{BA}^{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{p}) &= \sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) \times \\ &\times \left(\begin{array}{cc} d^2\omega, & (-1)^{F_A (F_{A^+})^{1/2}} c(\omega) d(\omega) \\ (-1)^{F_A (F_{A^+})^{1/2}} c(\omega) d(\omega), & c^2(\omega) \end{array} \right)^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) &= \frac{(2\pi)^3}{\hbar} (1 - \rho e^{-\beta\omega}) \sum_{n, m} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_m) \delta(\omega - E_n + E_m) \times \\ &\times \langle 0, \beta | A(0) | n, \tilde{m} \rangle \langle \tilde{m}, n | B(0) | 0, \beta \rangle, \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

$$c^2(\omega) = 1 + \rho f(\omega), \quad d^2(\omega) = f(\omega), \quad (4.3.21)$$

$$f(\omega) = 1/(e^{\beta\omega} - \rho). \quad (4.3.22)$$

Напомним снова, что $\rho = 1$ для бозонов и $\rho = -1$ для фермионов. Если $f(\omega)$ становится отрицательным, фазы $c(\omega)$ и $d(\omega)$ следует выбирать так, чтобы $c(\omega) d(\omega)$ было вещественным.

Сравнивая выражения (4.3.18) и (4.3.19) с (4.1.72) и (4.1.74) соответственно, находим

$$\begin{aligned} G_{cAB}^{\alpha\beta}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) \times \\ &\times (\tau^{(F_{A^+})^{1/2}} U(\omega) [p_0 - \omega + i\delta\tau]^{-1} U^\dagger(\omega) \tau^{(F_{A^+})^{1/2}})^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

для фермионоподобных операторов ($\rho = -1$) и

$$G_{rAB}^{\alpha\beta}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) (\tau^{FA/2} U_B(\omega) \tau [p_0 - \omega + i\delta\tau]^{-1} \times \\ \times U_B(\omega) \tau^{FA/2})^{\alpha\beta} \quad (4.3.24)$$

для бозоноподобных операторов ($\rho = +1$), где $U(\omega)$ и $U_B(\omega)$ определены выражениями (4.1.76) и (4.1.86)

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} c(\omega) & d(\omega) \\ -d(\omega) & c(\omega) \end{pmatrix}, \quad (4.3.25)$$

$$U_B(\omega) = \begin{pmatrix} c_B(\omega) & d_B(\omega) \\ d_B(\omega) & c_B(\omega) \end{pmatrix}. \quad (4.3.26)$$

Соотношения (4.3.23) и (4.3.24) дают спектральное представление причинной двухточечной функции при конечных температурах.

Запаздывающая и опережающая двухточечные функции имеют вид

$$G_{rAB}^{\alpha\beta}(x-y) = \theta(t_x - t_y) \langle 0, \beta | [A^\alpha(x), B^\beta(y)]_{\pm} | 0, \beta \rangle, \quad (4.3.27)$$

$$G_{aAB}^{\alpha\beta}(x-y) = -\theta(t_y - t_x) \langle 0, \beta | [A^\alpha(x), B^\beta(y)]_{\pm} | 0, \beta \rangle \quad (4.3.28)$$

соответственно, а их фурье-образы определены соотношением

$$G_{r,aAB}(x-y) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4 p \exp\{ip(x-y)\} G_{r,a}^{\alpha\beta}(\rho). \quad (4.3.29)$$

Имеем тогда (ср. с (4.1.80) и (4.1.81), а также (4.1.91) и (4.1.92))

$$G_{rAB}^{\alpha\beta}(\rho) = \delta^{\alpha\beta} \int d\omega \frac{\sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p})}{p_0 - \omega + i\delta}, \quad (4.3.30)$$

$$G_{aAB}^{\alpha\beta}(\rho) = \delta^{\alpha\beta} \int d\omega \frac{\sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p})}{p_0 - \omega - i\delta} \quad (4.3.31)$$

для фермионоподобных операторов и

$$G_{rAB}^{\alpha\beta}(\rho) = \tau^{\alpha\beta} \int d\omega \frac{\sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p})}{p_0 - \omega + i\delta}, \quad (4.3.32)$$

$$G_{aAB}^{\alpha\beta}(\rho) = \tau^{\alpha\beta} \int d\omega \frac{\sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p})}{p_0 - \omega - i\delta} \quad (4.3.33)$$

для бозоноподобных операторов,

Из (4.3.18) очевидно, что

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | A^\alpha(x) B^\beta(y) | 0, \beta \rangle = \\ = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3p \int d\omega \exp[ik(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - i\omega(t_x - t_y)] \sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) \times \\ \times \begin{pmatrix} c^2(\omega), & (-1)^{FA(F_A^{-1})/2} c(\omega) d(\omega) \\ (-1)^{FA(F_A^{-1})/2} c(\omega) d(\omega), & d^2(\omega) \end{pmatrix}^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | [A^\alpha(x), B^\beta(y)] | 0, \beta \rangle_{t_x=t_y} = \\ = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3k \exp[ik(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \int d\omega \sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) (\tau^{(1+\rho)/2})^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

Если B — оператор, канонически сопряженный с A , имеем

$$[A^\alpha(x), B^\beta(y)]_{\pm} \delta(t_x - t_y) = \hbar (\tau^{(1+\rho)/2})^{\alpha\beta} \delta^{(4)}(x - y), \quad (4.3.36)$$

откуда, учитывая (4.3.35), получаем правило сумм

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) = 1. \quad (4.3.37)$$

Если в суммировании, входящем в (4.3.20), участвуют какие-то одночастичные состояния с энергией $\omega(\mathbf{p})$, то σ^{AB} имеет вид

$$\sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) = Z_{AB}(\mathbf{p}) \delta[\omega - \omega(\mathbf{p})] + \bar{\sigma}_{AB}(\omega, \mathbf{p}). \quad (4.3.38)$$

Свойства спектральной функции $\sigma(\omega, \mathbf{p})$, установленные в разд. 3.6, можно обобщить на случай конечных температур, если заменить $\sigma(\omega, \mathbf{p})$ на $\sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p})$. Заметим, что $\sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p})$ при конечных температурах может принимать отличные от нуля значения как для положительных, так и для отрицательных значений ω , поскольку знак разности $E_n - E_m$ не определен.

Из (4.3.11) и (4.3.14) имеем

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | A(0) | n, \tilde{m} \rangle \langle \tilde{m}, n | B(0) | 0, \beta \rangle = \\ = e^{\beta(E_n - E_m)} \langle 0, \beta | B(0) | \tilde{n}, m \rangle \langle m, \tilde{n} | A(0) | 0, \beta \rangle, \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

откуда

$$\sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) = -\rho \sigma_{BA}(-\omega, \mathbf{p}). \quad (4.3.40)$$

Когда теория инвариантна относительно пространственных отражений, имеем

$$\sigma_{AB}(\omega, \mathbf{p}) = -\rho \sigma_{BA}(-\omega, -\mathbf{p}). \quad (4.3.41)$$

Если A — бозоноподобный оператор и $B = A$, то выражение (4.3.24) можно переписать в виде

$$G_{cAB}^{\alpha\beta}(p) = \int_0^{\infty} d\omega \tilde{\sigma}_{AA}(\omega, \mathbf{p}) \times \\ \times (\tau^{FA/2} U_B(\omega) \tau [p_0^2 - (\omega - i\delta\tau)^2]^{-1} U_B(\omega) \tau^{FA/2})^{\alpha\beta}, \quad (4.3.42)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{AA}(\omega, \mathbf{p}) = 2\omega\sigma_{AA}(\omega, \mathbf{p}). \quad (4.3.43)$$

В этом случае запаздывающая и опережающая двухточечные функции имеют вид соответственно

$$G_{rAA}^{\alpha\beta}(p) = \tau^{\alpha\beta} \int_0^{\infty} d\omega \tilde{\sigma}_{AA}(\omega, \mathbf{p}) \frac{1}{(p_0 + i\delta)^2 - \omega^2}, \quad (4.3.44)$$

$$G_{aAA}^{\alpha\beta}(p) = \tau^{\alpha\beta} \int_0^{\infty} d\omega \tilde{\sigma}_{AA}(\omega, \mathbf{p}) \frac{1}{(p_0 + i\delta)^2 - \omega^2}. \quad (4.3.45)$$

4.4. Уравнение Бете — Солпитера при конечных температурах

Рассмотрим набор гейзенберговских полей ψ_a , удовлетворяющий уравнению Гейзенберга $\lambda_{ab}(\partial) \psi_b = F_b[\psi]$, которое можно записать в виде

$$\lambda(\partial) \psi = F[\psi], \quad (4.4.1)$$

где ψ и $F[\psi]$ — вектор-столбцы с компонентами ψ_a и F_a соответственно. Используя (4.2.7), получаем

$$\lambda(\partial) \psi^\alpha = P_\alpha F[\psi^\alpha]. \quad (4.4.2)$$

Рассмотрим далее причинную двухточечную функцию

$$G^{\alpha\beta}(x, y) = \langle 0, \beta | T[\psi^\alpha(x), \psi^{\beta\dagger}(y)] | 0, \beta \rangle = \quad (4.4.3)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \langle 0, \beta | \psi^\alpha(x) \psi^{\beta\dagger}(y) | 0, \beta \rangle \mp$$

$$\mp \theta(t_y - t_x) \langle 0, \beta | \psi^{\beta\dagger}(y) \psi^\alpha(x) | 0, \beta \rangle, \quad (4.4.4)$$

где верхний знак относится к фермионам, а нижний — к бозонам. Можно вычислить $\lambda(\partial) G^{\alpha\beta}$ с помощью (4.4.2), а результат записать в следующей форме ($F^{\alpha\beta}(x, y)$ — некоторая функция):

$$\lambda(\partial) G^{\alpha\beta}(x, y) = F^{\alpha\beta}(x, y) + i\hbar\delta^{(4)}(x - y) \delta^{\alpha\beta} \quad (4.4.5a)$$

для фермионов и

$$\lambda(\partial) G^{\alpha\beta}(x, y) = \{\tau F(x, y)\}^{\alpha\beta} + i\hbar\delta^{(4)}(x - y) \tau^{\alpha\beta} \quad (4.4.56)$$

для бозонов.

В интегральном виде это уравнение запишется так:

$$G^{\alpha\beta}(x, y) = S^{\alpha\beta}(x - y) - \frac{i}{\hbar} \int d^4z S^{\alpha\rho}(x - z) F^{\rho\beta}(z, y) \quad (4.4.6)$$

для фермионов и

$$G^{\alpha\beta}(x, y) = \Delta^{\alpha\beta}(x - y) - \frac{i}{\hbar} \int d^4z \Delta^{\alpha\rho}(x - z) F^{\rho\beta}(z, y) \quad (4.4.7)$$

для бозонов. Здесь использованы выражения (4.1.114) и (4.1.115); учтен также тот факт, что функция G становится равной S или Δ , когда источник \bar{F} в уравнении (4.4.2) обращается в нуль. Величина $F^{\rho\beta}(z, y)$ может содержать многоточечные функции

$$\langle 0, \beta | T [\psi^\alpha(x) \psi^\beta(y) \psi^\gamma(z) \dots] | 0, \beta \rangle.$$

Аналогичным образом из уравнения Гейзенберга (4.4.1) можно получить набор интегральных уравнений для многоточечных функций. Эти интегральные уравнения называют *уравнениями Бете—Солпитера* (БС). Обычно они лишь с трудом поддаются решению. Для этого применяют разнообразные приближения, использующие метод диаграмм Фейнмана. В следующей главе приведен ряд подобных примеров.

Могут быть получены также интегральные уравнения для величин $\langle a | T [\psi^\alpha(x), \psi^{\beta\dagger}(y)] | 0, \beta \rangle$, где $|a\rangle$ принадлежит пространству Фока $\mathcal{S}[\alpha(\beta), \bar{\alpha}(\beta)]$. Эти уравнения также называют уравнениями Бете—Солпитера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Araki H., Woods E. J., J. Math. Phys., 4, 637 (1963);
Araki H., Wyss W., Helv. Phys. Acta, 37, 136 (1964);
Haag R., Hugenholtz N. W., Winnik M., Comm. Math. Phys., 5, 215 (1967);
Ojima I., Ann. Phys., (1982).
2. Leplae L., Mancini F., Umezawa H., Phys. Rep., 10 C, 151 (1974).
3. Takahashi Y., Umezawa H., Collect. Phen., 2, 55 (1975).
4. Matsumoto H., Fortschritte der Phys., 25, 1 (1977).
5. Matsubara T., Progr. Theor. Phys., 14, 351 (1955);
Зубарев Д. Н., УФН, 71, 71 (1960).
6. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: Физматгиз, 1962;
Киржниц Д. А. Полевые методы теории многих частиц. — М.: Госатомиздат, 1963.
7. Kubo R., J. Phys. Soc. Jap., 12, 570 (1957);
Martin P., Schwinger J., Phys. Rev., 115, 1342 (1959).

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ В РАМКАХ ТЕРМОПОЛЕВОЙ ДИНАМИКИ

5.1. Электрон-фононная система

Модель. Рассмотрим гейзенберговские поля — электронное $\psi(x)$ и фононное $\phi(x)$. Для простоты пренебрежем спином электрона и будем считать ψ синглетным фермионным полем. Фононное поле вещественно: $\phi^\dagger = \phi$. Предполагается, что существует следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L}(x) = \psi^\dagger(x) \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_0(\nabla) \right) \psi(x) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi \right)^2 - \phi(x) \omega_0^2(\nabla) \phi(x) \right] - [\psi^\dagger(x) \psi(x) - n] g(\nabla) \phi(x). \quad (5.1.1)$$

Дифференциальные операторы $\varepsilon_0(\nabla)$, $\omega_0^2(\nabla)$ и $g(\nabla)$ определены с помощью своих фурье-образов

$$\varepsilon_0(\nabla) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \varepsilon_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad \text{и т. д.}, \quad (5.1.2)$$

а постоянная n должна быть определена самосогласованным образом с помощью условия

$$n = \langle 0, \beta | \psi^\dagger \psi | 0, \beta \rangle. \quad (5.1.3)$$

Предположим, что $g(\mathbf{k})$ — вещественная функция. Величина $g(\mathbf{k})/[2\omega_0(\mathbf{k})]^{1/2}$, как обычно, описывает электрон-фононное взаимодействие. Построим лагранжиан с помощью операции тильда

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) = -\tilde{\psi}^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon_0(\nabla) \right) \tilde{\psi} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\phi} \right)^2 - \tilde{\phi} \omega_0^2(\nabla) \tilde{\phi} \right] - [\tilde{\psi}^\dagger(x) \tilde{\psi}(x) - \tilde{n}] g(\nabla) \tilde{\phi}(x), \quad (5.1.4)$$

где \tilde{n} определяется в конце вычислений с помощью условия

$$\tilde{n} = \langle 0, \beta | \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} | 0, \beta \rangle. \quad (5.1.5)$$

Поскольку n — вещественное число, операция тильда дает

$$n = \tilde{n}, \quad (5.1.6)$$

что является одним из соотношений, выражающих свойства симметрии этой операции. Полный лагранжиан имеет вид

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}. \quad (5.1.7)$$

Аналогично формуле (4.2.3) введем векторные обозначения для термополевого дублета ψ^α и ϕ^α

$$\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix}. \quad (5.1.8)$$

Тогда, учитывая вид лагранжиана $\hat{\mathcal{L}}$, получим уравнения Гейзенберга в следующем виде:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla) \right) \psi^\alpha(x) = P_\alpha [\psi^\alpha(x) g(\nabla) \phi^\alpha(x) - \delta\varepsilon(\nabla) \psi^\alpha(x)], \quad (5.1.9)$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2(\nabla) \right) \phi^\alpha(x) = P_\alpha \{ g(-\nabla) [\psi^{\alpha\dagger}(x) \psi^\alpha(x) - n] - \delta\omega^2(\nabla) \phi^\alpha(x) \}, \quad (5.1.10)$$

где P_α — оператор упорядочения, введенный в (4.2.6). Поскольку операторы $\psi^\alpha(x)$ и $\phi^\alpha(x)$ коммутируют, наличие оператора P_α в (5.1.9) несущественно.

Величины $\delta\varepsilon(\nabla)$ и $\delta\omega^2(\nabla)$ представляют перенормировку (или сдвиг) энергии:

$$\varepsilon(\nabla) = \varepsilon_0(\nabla) + \delta\varepsilon(\nabla), \quad (5.1.11)$$

$$\omega^2(\nabla) = \omega_0^2(\nabla) + \delta\omega^2(\nabla). \quad (5.1.12)$$

Уравнение Бете—Солпитера. Рассмотрим причинную функцию Грина для электронного гейзенберговского поля

$$G_c^{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0, \beta | T [\psi^\alpha(x) \psi^{\beta\dagger}(y)] | 0, \beta \rangle. \quad (5.1.13)$$

Согласно уравнению Гейзенберга (5.1.9), имеем

$$\begin{aligned} \lambda(\partial) G_c^{\alpha\beta}(x-y) &= \langle 0, \beta | T [\psi^\alpha(x) g(\nabla) \phi^\alpha(x) \psi^{\beta\dagger}(y)] | 0, \beta \rangle - \\ &- \delta\varepsilon(\nabla) G_c^{\alpha\beta}(x-y) + i\hbar\delta^{(4)}(x-y) \delta^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

где $\lambda(\partial) = [i(\partial/\partial t) - \varepsilon(\nabla)]$. Отсюда получаем следующее уравнение Бете—Солпитера:

$$\begin{aligned} G_c^{\alpha\beta}(x-y) &= S_c^{\alpha\beta}(x-y) + \frac{1}{i\hbar} \sum_{\nu} \int d^4z S_c^{\alpha\nu}(x-z) \times \\ &\times \langle 0, \beta | T [\psi^\nu(z) g(\nabla) \phi^\nu(z) \psi^{\beta\dagger}(y)] | 0, \beta \rangle - \\ &- \frac{1}{i\hbar} \sum_{\nu} \int d^4z S_c^{\alpha\nu}(x-z) \delta\varepsilon(\nabla) G_c^{\nu\beta}(z-y). \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

Здесь $S_c^{\alpha\beta}(x)$ — причинная функция Грина свободного физического электронного поля ψ_0^α :

$$\lambda(\partial) S_c^{\alpha\beta}(x) = i\hbar\delta^{(4)}(x) \delta^{\alpha\beta}. \quad (5.1.16)$$

Введем далее неприводимую часть собственной энергии $\sum^{\alpha\beta}(x-y)$ с помощью соотношения

$$\langle 0, \beta | T [\psi^\nu(z) g(\nabla) \phi^\nu(z) \psi^{\beta\dagger}(y)] | 0, \beta \rangle = \\ = \int d^4 z' \sum^{\nu\rho}(z-z') G_c^{\rho\beta}(z'-y). \quad (5.1.17)$$

Тогда, учитывая фурье-представление

$$G_c^{\alpha\beta}(x-y) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4 k \exp[ik(x-y) - ik_0(t_x - t_y)] G_c^{\alpha\beta}(k), \quad (5.1.18)$$

получим уравнение БС в виде

$$G_c^{\alpha\beta}(k) = S_c^{\alpha\beta}(k) + S_c^{\alpha\nu}(k) \sum^{\nu\rho}(k) G_c^{\rho\beta}(k) - S_c^{\alpha\nu}(k) \delta\varepsilon(k) G_c^{\nu\beta}(k), \quad (5.1.19)$$

где $\sum^{\nu\rho}(k)$ — фурье-образ $\sum^{\nu\rho}(x)$.

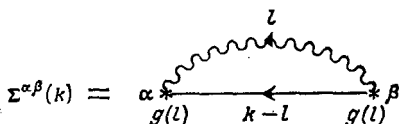


Рис. 5.1.

Спектральное представление неприводимой части собственной энергии. Согласно методу диаграмм Фейнмана, во втором порядке теории возмущений имеем (рис. 5.1)

$$\sum^{\alpha\beta}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 l g^2(l) \Delta^{\alpha\beta}(l) S^{\alpha\beta}(k-l). \quad (5.1.20)$$

Здесь $\Delta^{\alpha\beta}(l)$ — функция Грина свободного физического фонона. С другой стороны, причинная функция Грина свободного физического электрона дается выражением (4.1.75), где $\omega(\mathbf{k})$ следует заменить на $\varepsilon(\mathbf{k})$:

$$S_c(k) = U(\varepsilon) [k_0 - \varepsilon + i\delta\tau]^{-1} U^\dagger(\varepsilon), \quad (5.1.21)$$

где ε обозначает $\varepsilon(\mathbf{k})$. Функция Грина свободного физического фонона дается выражением (4.1.96):

$$\Delta_c(k) = U_B(\omega) \tau [k_0^2 - (\omega - i\delta\tau)^2]^{-1} U_B(\omega), \quad (5.1.22)$$

где ω обозначает $\omega(\mathbf{k})$. Используя (4.1.124) и (4.1.125), получаем

$$\sum(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \sigma(\kappa, \mathbf{k}) U(\kappa) [k_0 - \kappa + i\delta\tau]^{-1} U^\dagger(\kappa). \quad (5.1.23)$$

Здесь $\sum(k)$ — матрица $[\sum^{\alpha\beta}(k)]$, причем

$$\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{g^2(l)}{2\omega} [\delta(\mathbf{k} - \varepsilon - \omega) \{f_B(\omega) + 1 - f_F(\varepsilon)\} - \delta(\mathbf{k} - \varepsilon + \omega) \{f_B(-\omega) + 1 - f_F(\varepsilon)\}], \quad (5.1.24)$$

где использованы введенные выше обозначения $\omega = \omega(\mathbf{l})$, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{l})$. Выражение (5.1.23) дает спектральное представление для $\sum(k)$.

Энергия физического электрона. Поскольку ε_k — энергия физического электрона, взаимодействие не должно приводить к появлению какой-либо собственной энергии. Иными словами, $\delta\varepsilon(\mathbf{k})$ в (5.1.19) должно компенсировать собственную энергию. Подобная процедура перенормировки энергии становится сложной в случае конечных температур, поскольку наличие температуры приводит к неустойчивости многих квантов. Существование ширины энергетического уровня приводит к неоднозначности определения физической энергии. Если ширина мала, обычный способ определения физической энергии $\varepsilon(\mathbf{k})$ состоит в использовании вещественной части $\sum^{\mu\nu}$. В этом случае условие перенормировки энергии принимает вид

$$\text{Re} \sum^{\nu\rho}(k) = \delta\varepsilon(\mathbf{k}) \delta^{\nu\rho} \quad \text{для} \quad k_0 = \varepsilon(\mathbf{k}). \quad (5.1.25)$$

Согласно этому условию, физическая энергия определяется как $\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0(\mathbf{k}) + \delta\varepsilon(\mathbf{k})$. Очевидно, $\varepsilon(\mathbf{k})$ зависит от температуры. Другой способ определения физической энергии состоит в использовании комплексной полюсной особенности в двухточечной функции гейзенберговских полей. В этом случае физической энергией является вещественная часть этого комплексного полюса, как будет проиллюстрировано в разд. 5.2.

В металлах перенормировка энергии увеличивает плотность состояний вблизи уровня Ферми и приводит к росту электронной теплоемкости (см., например, [1]). Даже в диэлектриках электроны могут быть возбуждены в зону проводимости за счет внешних воздействий (например оптических или тепловых возбуждений). Эти электроны также вносят вклад в перенормировку энергии, обусловленный электрон-фононным взаимодействием. Такой электрон, «одетый» за счет фононов, называется поляроном (см., например, [2]). Структура электрон-фононной связи $g(l)$ для металлов, диэлектриков и полупроводников совершенно различна.

5.2. Модель контактного взаимодействия в ферромагнетизме коллективизированных электронов

Модель. Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = \psi^\dagger(x) \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \right) \psi(x) - \lambda \psi_\uparrow^\dagger(x) \psi_\downarrow^\dagger(x) \psi_\downarrow(x) \psi_\uparrow(x) + \mu^2 \psi^\dagger(x) \psi(x); \quad (5.2.1)$$

здесь μ^2 — перенормирующий множитель, с помощью которого самосогласованным образом подбирается химический потенциал, а $\varepsilon(\nabla^2)$ определено соотношением

$$\varepsilon(\nabla^2) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \varepsilon_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (5.2.2)$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}^2 - k_F^2). \quad (5.2.3)$$

Постоянная k_F — импульс Ферми. Символ ψ обозначает электронное гейзенберговское поле — спиновый дублет

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}. \quad (5.2.4)$$

Заметим, что лагранжиан инвариантен относительно вращения спинов

$$\psi \rightarrow \exp[i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta})] \psi, \quad (5.2.5)$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — параметр ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$).

Уравнения Гейзенберга имеют вид

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \right) \psi_\uparrow(x) = \lambda \psi_\downarrow^\dagger(x) \psi_\downarrow(x) \psi_\uparrow(x) - \mu^2 \psi_\uparrow(x), \quad (5.2.6)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \right) \psi_\downarrow(x) = \lambda \psi_\uparrow^\dagger(x) \psi_\uparrow(x) \psi_\downarrow(x) - \mu^2 \psi_\downarrow(x). \quad (5.2.7)$$

Применяя к этим уравнениям операцию эрмитова сопряжения и операцию тильда, получаем

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \right) \tilde{\psi}_\uparrow^\dagger(x) = \lambda \tilde{\psi}_\uparrow^\dagger(x) \tilde{\psi}_\downarrow^\dagger(x) \tilde{\psi}_\downarrow(x) - \mu^2 \tilde{\psi}_\uparrow^\dagger(x), \quad (5.2.8)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \right) \tilde{\psi}_\downarrow^\dagger(x) = \lambda \tilde{\psi}_\downarrow^\dagger(x) \tilde{\psi}_\uparrow^\dagger(x) \tilde{\psi}_\uparrow(x) - \mu^2 \tilde{\psi}_\downarrow^\dagger(x). \quad (5.2.9)$$

Заметим, что

$$\langle 0, \beta | \tilde{\psi}_\uparrow^\dagger \psi_\uparrow | 0, \beta \rangle = \frac{1}{2} \langle 0, \beta | \psi^\dagger (1 + \sigma_3) \psi | 0, \beta \rangle, \quad (5.2.10)$$

$$\langle 0, \beta | \tilde{\psi}_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow | 0, \beta \rangle = \frac{1}{2} \langle 0, \beta | \psi^\dagger (1 - \sigma_3) \psi | 0, \beta \rangle. \quad (5.2.11)$$

Правые части уравнений (5.2.6) и (5.2.7) запишем в виде

$$\lambda \psi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} - \mu^2 \psi_{\uparrow} = \lambda [\psi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow} - \langle 0, \beta | \psi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow} | 0, \beta \rangle] \psi_{\uparrow} - \lambda \frac{M}{2} \psi_{\uparrow} - \bar{\mu}^2 \psi_{\uparrow}, \quad (5.2.12)$$

$$\lambda \psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} \psi_{\downarrow} - \mu^2 \psi_{\downarrow} = \lambda [\psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} - \langle 0, \beta | \psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} | 0, \beta \rangle] \psi_{\downarrow} + \lambda \frac{M}{2} \psi_{\downarrow} - \mu^2 \psi_{\downarrow}. \quad (5.2.13)$$

При получении этих уравнений проведена замена $\mu^2 - \lambda (1/2) \times \times \langle 0, \beta | \psi^{\dagger} \psi | 0, \beta \rangle$ на $\bar{\mu}^2$ (перенормировка химического потенциала). Величина M определена следующим образом:

$$M = \langle 0, \beta | \psi^{\dagger}(x) \sigma_3 \psi(x) | 0, \beta \rangle, \quad (5.2.14)$$

причем предполагается, что $M \neq 0$. Иными словами, предполагается, что основное состояние системы не инвариантно относительно спиновых вращений. Это означает, что в системе существует ферромагнитное упорядочение, и симметрия относительно спиновых вращений не проявляется при наблюдениях. Можно предположить, что вращательная симметрия, описываемая тремя параметрами $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, заменяется однопараметрической (θ_3) симметрией (цилиндрической симметрией), но в последующих главах будет показано, что в действительности это не так. Будет показано, что трехпараметрическая вращательная симметрия заменяется другой формой симметрии, также описываемой тремя параметрами (динамическая перестройка симметрии). В этом разделе мы покажем, каким образом в системе возникают магноны. Появление магнонов является примером общего утверждения (теоремы Голдстоуна), что любое упорядоченное состояние поддерживается с помощью некоторых дальнедействующих корреляций, которые самосогласованным образом создаются системой. Кванты, сопоставляемые дальнедействующим корреляциям, называются голдстоуновскими бозонами. В последующих главах будет показано, каким образом появление магнонов восстанавливает вращательную инвариантность.

Используя (5.2.12) и (5.2.13), можно переписать уравнения Гейзенберга (5.2.6) и (5.2.7) в виде

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon_+ (\nabla^2) \right) \psi_{\uparrow}(x) &= \\ &= \lambda [\psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}(x) - \langle 0, \beta | \psi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow} | 0, \beta \rangle] \psi_{\uparrow}(x) - \bar{\mu}^2 \psi_{\uparrow}(x), \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_- (\nabla^2) \right) \psi_{\downarrow}(x) &= \\ &= \lambda [\psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \psi_{\uparrow}(x) - \langle 0, \beta | \psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} | 0, \beta \rangle] \psi_{\downarrow}(x) - \bar{\mu}^2 \psi_{\downarrow}(x), \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

где
$$\varepsilon_{\pm}(\nabla^2) = \varepsilon(\nabla^2) \mp \frac{\lambda}{2} M. \quad (5.2.17)$$

Если использовать обозначение для термполевого дублета (ср. с. (4.2.3))

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}^1 \\ \psi_{\uparrow}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \tilde{\psi}_{\uparrow}^{\dagger} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_{\downarrow}^1 \\ \psi_{\downarrow}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\downarrow} \\ \tilde{\psi}_{\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix}, \quad (5.2.18)$$

то уравнения Гейзенберга примут вид (ср. с (4.2.7))

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_{+}(\nabla^2) \right) \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) &= \\ &= P_{\alpha} \{ \lambda [\psi_{\downarrow}^{\alpha \dagger}(x) \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) - \langle 0, \beta | \psi_{\downarrow}^{\alpha \dagger} \psi_{\downarrow}^{\alpha} | 0, \beta \rangle] \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) - \bar{\mu}^2 \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \}, \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_{-}(\nabla^2) \right) \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) &= \\ &= P_{\alpha} \{ \lambda [\psi_{\uparrow}^{\alpha \dagger}(x) \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) - \langle 0, \beta | \psi_{\uparrow}^{\alpha \dagger} \psi_{\uparrow}^{\alpha} | 0, \beta \rangle] \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) - \bar{\mu}^2 \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \}. \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Свободные физические электронные поля $\varphi_{\uparrow, \downarrow}^{\alpha}$ удовлетворяют уравнениям

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_{+}(\nabla^2) \right) \varphi_{\uparrow}^{\alpha} = 0, \quad (5.2.21)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_{-}(\nabla^2) \right) \varphi_{\downarrow}^{\alpha} = 0. \quad (5.2.22)$$

Поэтому причинные функции Грина для этих полей описываются выражением (4.1.75)

$$S_{\pm}(k) = U(\varepsilon_{\pm}) [k_0 - \varepsilon_{\pm} + i\delta\tau]^{-1} U^{\dagger}(\varepsilon_{\pm}), \quad (5.2.23)$$

где ε_{\pm} обозначает $\varepsilon_{\pm}(\mathbf{k})$, а S_{+} (S_{-}) соответствует направлениям спина \uparrow (\downarrow).

Намагниченность. Вычислим теперь M в низшем порядке теории возмущений. Поскольку

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \psi_{\uparrow}(x) - \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}(x) | 0, \beta \rangle &= \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle 0, \beta | T [\psi_{\uparrow}(t - \varepsilon, \mathbf{x}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(t + \varepsilon, \mathbf{x}) - \\ &\quad - \psi_{\downarrow}(t - \varepsilon, \mathbf{x}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(t + \varepsilon, \mathbf{x})] | 0, \beta \rangle, \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

можно записать

$$M = - \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int_c d^4k \{S_+^{11}(k) - S_-^{11}(k)\}, \quad (5.2.25)$$

где контур интегрирования c в комплексной k_0 -плоскости представляет собой полуокружность в верхней полуплоскости. Тогда из (5.2.23) имеем

$$M = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3k \{f_F(\epsilon_+) - f_F(\epsilon_-)\} = \quad (5.2.26)$$

$$= \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ \frac{1}{e^{\beta\epsilon_+} + 1} - \frac{1}{e^{\beta\epsilon_-} + 1} \right\}. \quad (5.2.27)$$

Это уравнение самосогласования, определяющее величину M ; заметим, что величины ϵ_{\pm} зависят от M .

При низких температурах величина M ведет себя как T^2 . Но этот результат существенно изменяется, если учесть влияние магнонов, а именно при наличии магнонов в разложении для M входит слагаемое $T^{3/2}$ (закон Блоха). Этот вопрос рассматривается в разд. 6.4.

Уравнение Бете—Солпитера для магнона. Для изучения свойств магнона введем обозначения термополевого дублета для операторов рождения и уничтожения спиновых отклонений

$$\sigma_+^{\alpha}(x) = P_{\alpha} [\psi_{\uparrow}^{\alpha+}(x) \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x)] = \epsilon^{\alpha} \psi_{\uparrow}^{\alpha+}(x) \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x), \quad (5.2.28)$$

$$\sigma_-^{\alpha}(x) = P_{\alpha} [\psi_{\downarrow}^{\alpha+}(x) \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x)] = \epsilon^{\alpha} \psi_{\downarrow}^{\alpha+}(x) \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x), \quad (5.2.29)$$

где

$$\epsilon^{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha = 1, \\ -1 & \text{для } \alpha = 2; \end{cases} \quad (5.2.30)$$

операторы σ_+^{α} и σ_-^{α} взаимно эрмитово сопряжены.

Мы выведем уравнение БС для магнона с помощью диаграммного метода Фейнмана, применяемого вместо уравнений Гейзенберга (5.2.19) и (5.2.20).

Рассмотрим петлевую диаграмму, состоящую из двух внутренних электронных линий. Этой петлевой диаграмме соответствует следующее слагаемое (рис. 5.2):

$$D^{\alpha\beta}(k) = - \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4l \epsilon^{\alpha} S_-^{\alpha\beta} \left(l + \frac{k}{2} \right) S_+^{\beta\alpha} \left(l - \frac{k}{2} \right) \epsilon^{\beta}. \quad (5.2.31)$$

Повторение этой петли приводит к появлению многих цепочечных диаграмм. Петли соединяются друг с другом посредством взаимодействия $\lambda \epsilon^{\alpha} \psi_{\uparrow}^{\alpha+} \psi_{\downarrow}^{\alpha} \psi_{\downarrow}^{\alpha+} \psi_{\uparrow}^{\alpha}$, а на обоих концах цепочки стоят опе-

раторы σ_+^α и σ_-^β . Ниже мы вычислим величину $\langle 0, \beta | T [\sigma_+^\alpha(x), \sigma_-^\beta(y)] | 0, \beta \rangle$ с учетом только таких цепочечных диаграмм (цепочечное приближение). Имеем

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | T [\sigma_+^\alpha(x) \sigma_-^\beta(y)] | 0, \beta \rangle &= \\ &= \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4k \exp [ik(x-y) - ik_0(t_x - t_y)] G_B^{\alpha\beta}(k). \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

Используя цепочечное приближение, запишем (рис. 5.3)

$$G_B(k) = D(k) - \lambda D(k) \tau D(k) + \dots, \quad (5.2.33)$$

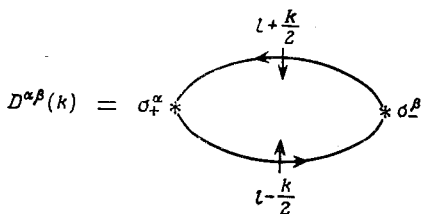


Рис. 5.2.

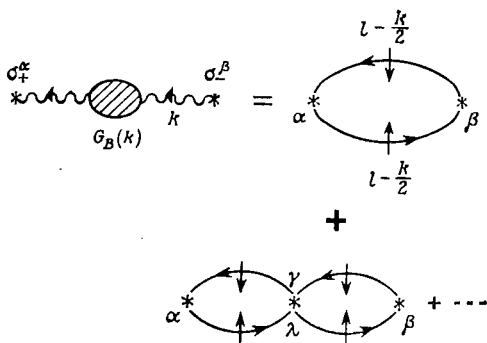


Рис. 5.3.

где $D(k)$ — матрица $[D^{\alpha\beta}(k)]$. Иными словами, $G_B(k)$ удовлетворяет следующему уравнению БС:

$$G_B(k) = D(k) - \lambda D(k) \tau G_B(k), \quad (5.2.34)$$

из которого находим

$$G_B(k) = \tau N^{-1}(k) D(k), \quad (5.2.35)$$

где

$$N(k) = \tau + \lambda D(k). \quad (5.2.36)$$

Вычисление $D(k)$ и $N^{-1}(k)$. Подставляя (5.2.23) в (5.2.31) и используя формулу (4.1.120), получаем

$$D(k) = \int d\mathbf{x} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}) U_B(\mathbf{x}) \tau [k_0 - \mathbf{x} + i\delta\tau]^{-1} U_B(\mathbf{x}), \quad (5.2.37)$$

где

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3l \left(\frac{1}{e^{\beta\varepsilon'} + 1} - \frac{1}{e^{\beta\varepsilon''} + 1} \right) \delta(\mathbf{x} - \varepsilon'_- + \varepsilon'_+). \quad (5.2.38)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\varepsilon'_+ = \varepsilon_+ \left(1 - \frac{\mathbf{k}}{2} \right), \quad \varepsilon'_- = \varepsilon_- \left(1 + \frac{\mathbf{k}}{2} \right). \quad (5.2.39)$$

Если k_0 — вещественная величина, применяем формулу

$$\frac{1}{k_0 - \mathbf{x} + i\delta} = P \frac{1}{k_0 - \mathbf{x}} - i\pi\delta(k_0 - \mathbf{x}), \quad (5.2.40)$$

откуда, а также из (5.2.37) и (4.1.88) получаем

$$D^{\alpha\beta}(k) = R(k) \tau^{\alpha\beta} - i\pi\sigma(k_0, \mathbf{k}) [U_B(k_0)^2]^{\alpha\beta}, \quad (5.2.41)$$

где

$$R(k) = P \int d\mathbf{x} \frac{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{k_0 - \mathbf{x}}. \quad (5.2.42)$$

Таким образом, имеем

$$N(k) = [1 + \lambda R(k)] \tau - i\pi\lambda\sigma(k_0, \mathbf{k}) U_B^2(k_0), \quad (5.2.43)$$

$$N^{-1}(k) = \frac{[1 + \lambda R(k)] \tau + i\pi\lambda\sigma(k_0, \mathbf{k}) U_B^{-2}(k_0)}{[1 + \lambda R(k)]^2 + \lambda^2\pi^2\sigma^2(k_0, \mathbf{k})}, \quad (5.2.44)$$

где использовано соотношение (4.1.88), т. е.

$$U_B(k_0) \tau = \tau U_B^{-1}(k_0). \quad (5.2.45)$$

Окончательно из (5.2.35) находим

$$G_B(k) = \frac{[R(1 + \lambda R) + \lambda\pi^2\sigma^2] \tau - i\pi\sigma U_B^2}{(1 + \lambda R)^2 + \lambda^2\pi^2\sigma^2}, \quad (5.2.46)$$

где $R = R(k)$, $\sigma = \sigma(k_0, \mathbf{k})$ и $U_B = U_B(k_0)$.

Поскольку $\varepsilon'_\pm = \varepsilon_\pm$ при $\mathbf{k} = 0$, из (5.2.38) и (5.2.27) получаем

$$\sigma(\mathbf{x}, 0) = M\delta(\mathbf{x} - \lambda M), \quad (5.2.47)$$

где учтено также, что $\varepsilon_- - \varepsilon_+ = \lambda M$ (ср. с (5.2.17)). Тогда из (5.2.42) имеем

$$[R(k)]_{\mathbf{k}=0} = P \frac{M}{k_0 - \lambda M} \quad \text{при } \mathbf{k} = 0. \quad (5.2.48)$$

Магنون. Если $G_B(k)$ имеет полюсную особенность, полюсный член ведет себя подобно функции Грина для бозона. Поэтому, как видно из (5.2.46), если существует функция $\omega_B(\mathbf{k})$, такая, что

$$[1 + \lambda R(k)] \pm i\lambda\sigma(k_0, \mathbf{k}) = 0 \quad \text{для } k_0 = \omega_B(\mathbf{k}), \quad (5.2.49)$$

то существует бозон с энергией $\omega_B(\mathbf{k})$. С другой стороны, как видно из (5.2.47) и (5.2.48), значения $k_0 = 0$ и $\mathbf{k} = 0$ удовлетворяют уравнению (5.2.49), откуда следует, что действительно существует бозон с энергией $\omega_B(\mathbf{k})$, такой, что

$$\omega_B(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{k} = 0. \quad (5.2.50)$$

Этот бозон называется магненом (или спиновой волной). Заметим, что существование магнона опирается на условие самосогласования (5.2.25), которое гарантирует, что основное состояние системы магнитно-упорядочено. Тем самым находит отражение тот факт, что магнитный порядок поддерживается магненом. Когда $T \neq 0$ и $\mathbf{k} \neq 0$, условие (5.2.49) удовлетворяется только при комплексных значениях $\omega_B(\mathbf{k})$, что обуславливает нестабильность магнона с отличным от нуля импульсом при конечных температурах.

Более точные вычисления для модели ферромагнетизма коллективизированных электронов, основанные на использовании так называемых соотношений Уорда—Такахаши, приведены в гл. 6.

5.3. Модель Гейзенберга в ферромагнетизме локализованных спинов

В предыдущем разделе рассматривалась модель коллективизированных электронов, описывающая возникновение магнитно-упорядоченного состояния. В этом разделе термополевая динамика применяется к системе локализованных спинов.

Модель Гейзенберга. Для описания системы локализованных спинов широко используется модель Гейзенберга. Обозначим спин, локализованный в i -м узле спиновой решетки, через $\mathbf{S}(i)$; тогда гамильтониан для модели Гейзенберга примет вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}(i) \cdot \mathbf{S}(j) - g\mu_B \sum_i \mathbf{h} \cdot \mathbf{S}(i). \quad (5.3.1)$$

Здесь J_{ij} — константа связи обменного взаимодействия ($J_{ij} = 0$ при $i = j$), \mathbf{h} — внешнее магнитное поле. Этот гамильтониан содержит только спиновые степени свободы, связанные с некоторыми частицами магнитными ионами.

Локализованные магнитные ионы. Поскольку локализованный спин связан с магнитным ионом, введем для последнего гей-

зенберговское поле и обозначим его $\psi(x)$. Рассмотрим сначала магнитный ион в изолированном состоянии, обозначив его спин через J ; в этом случае ион обладает $2J + 1$ спиновыми состояниями. Переходы между этими спиновыми состояниями могут быть описаны с помощью операторов рождения и уничтожения ($a^{(m)\dagger}, a^{(m)}$). Оператор $a^{(m)}$ уничтожает частицу в состоянии с азимутальным квантовым числом m ; это состояние мы будем называть m -состоянием. Переход от m -состояния к n -состоянию описывается действием оператора $a^{(n)\dagger}a^{(m)}$. Ортонормированную волновую функцию m -состояния обозначим через $\varphi^{(m)}(\mathbf{x})$. Рассмотрим теперь систему, в которой магнитные ионы образуют решетку и взаимодействуют друг с другом. Тогда гейзенберговское поле $\psi(x)$ принимает вид

$$\psi(x) = \hbar^{1/2} \sum_i \sum_{m=-J}^J \varphi_i^{(m)}(\mathbf{x}) a_i^{(m)}(t), \quad (5.3.2)$$

где $\varphi_i^{(m)}(\mathbf{x})$ — ортонормированная волновая функция m -состояния магнитного поля в i -м узле, а $a_i^{(m)}(t)$ — оператор $a^{(m)}$, относящийся к иону в i -м узле. Временная зависимость $a_i^{(m)}(t)$ обусловлена взаимодействием между ионами. Имеются следующие неизвестные коммутационные или антикоммутационные соотношения (в зависимости от статистики рассматриваемых магнитных ионов):

$$[a_i^{(m)}(t), a_j^{\dagger(n)}(t')]_{\pm} = \delta_{nm}\delta_{ij} \quad \text{для } t = t'.$$

Пусть $a_i(t)$ обозначает вектор-столбец, компонентами которого являются операторы $a_i^{(m)}(t)$ ($m = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J$).

Гамильтониан и операторы спина. Гамильтониан модели Гейзенберга для рассматриваемой системы принимает вид

$$H = \sum_i \mu a_i^{\dagger} a_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \mathbf{S}(i) \mathbf{S}(j) - g\mu_B \sum_i \mathbf{h} \mathbf{S}(i). \quad (5.3.3)$$

Здесь μ — химический потенциал, a_i обозначает $a_i(t)$, $\mathbf{S}(i)$ обозначает оператор $\mathbf{S}(i; t)$, определенный следующим образом¹⁾:

$$\mathbf{S}(i; t) = a_i^{\dagger} \mathbf{s} a_i(t) = \sum_{m,n} (\mathbf{s})_{mn} a_i^{(m)\dagger}(t) a_i^{(n)}(t). \quad (5.3.4)$$

¹⁾ При изучении модели Гейзенберга часто использовалось представление Гольштейна—Примакова [3] для спиновых операторов в качестве бозонного представления для $\mathbf{S}(i)$. Но в этой книге в качестве представления для $\mathbf{S}(i)$ выбрано уравнение (5.3.4).

Здесь \mathbf{s} — спиновая матрица размерности $(2J + 1) \times (2J + 1)$, удовлетворяющая перестановочному соотношению $[s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k$. Применяя операцию тильда для гамильтониана, получаем

$$\tilde{H} = \sum_i \mu \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \tilde{\mathbf{S}}(i) \tilde{\mathbf{S}}(j) - g\mu_B \sum_i \mathbf{h} \tilde{\mathbf{S}}(i). \quad (5.3.5)$$

Уравнения Гейзенберга. Уравнения Гейзенберга имеют вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} a_i(t) = \mu a_i(t) - \sum_j J_{ij} \mathbf{S}(j; t) \cdot \mathbf{s} a_i(t) - g\mu_B \mathbf{h} \cdot \mathbf{s} a_i(t), \quad (5.3.6a)$$

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{a}_i(t) = \mu \tilde{a}_i(t) - \sum_j J_{ij} \tilde{\mathbf{S}}(j; t) \cdot \mathbf{s}^* \tilde{a}_i(t) - g\mu_B \mathbf{h} \cdot \mathbf{s}^* \tilde{a}_i(t). \quad (5.3.6b)$$

Мы используем следующие обозначения для термопольевых дублетов:

$$a_i^\alpha(t) = \begin{pmatrix} a_i(t) \\ \tilde{a}_i^{\dagger t}(t) \end{pmatrix}, \quad (5.3.7)$$

$$\mathbf{S}^\alpha(i; t) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}(i; t) \\ \tilde{\mathbf{S}}^{\dagger t}(i; t) \end{pmatrix}; \quad (5.3.8)$$

в выражениях (5.3.7) и (5.3.8) верхний индекс t обозначает транспонирование матрицы или вектора (ср. с (4.2.8)).

Тогда уравнение (5.3.6) можно переписать в виде

$$i \frac{\partial}{\partial t} a_i^\alpha(t) = \mu a_i^\alpha(t) - \sum_j J_{ij} P_\alpha [\mathbf{S}^\alpha(j; t) \cdot \mathbf{s} a_i^\alpha(t)] - g\mu_B \mathbf{h} \cdot \mathbf{s} a_i^\alpha(t). \quad (5.3.9)$$

Приближение среднего поля. В приближении Хартри уравнение (5.3.9) принимает вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} a_i^\alpha(t) = \mu a_i^\alpha(t) - g\mu_B \left(\sum_j \gamma_{ij} \mathbf{M}(j) + \mathbf{h} \right) \cdot \mathbf{s} a_i^\alpha(t), \quad (5.3.10)$$

где

$$\mathbf{M}(i) = g\mu_B \langle 0, \beta | S^\alpha(i; t) | 0, \beta \rangle, \quad (5.3.11)$$

$$\gamma_{ij} = (g\mu_B)^{-2} J_{ij}. \quad (5.3.12)$$

Заметим, что вектор $\mathbf{M}(i)$ параллелен вектору \mathbf{h} .

Уравнение (5.3.10) показывает, что энергия m состояния дается выражением

$$\omega_m(i) = \mu - g\mu_B m H_M(i), \quad (5.3.13)$$

где $H_M(i)$ — величина вектора

$$\mathbf{H}_M(i) = \sum_j \gamma_{ij} \mathbf{M}(j) + \mathbf{h}. \quad (5.3.14)$$

Здесь азимутальное квантовое число m определено по отношению к направлению вектора \mathbf{h} ; вектор $\mathbf{H}_M(i)$ параллелен \mathbf{h} .

Операторы $a_i^m(t)$ и $\tilde{a}_i^m(t)$ выражаются через физические операторы уничтожения $\alpha_i^m(\beta)$ и $\tilde{\alpha}_i^m(\beta)$ посредством преобразования Боголюбова:

$$a_i^{(m)}(t) = [\alpha_i^{(m)}(\beta) g^{1/2}(\omega_i) + \tilde{\alpha}_i^{(m)\dagger}(\beta) f^{1/2}(\omega_i)] e^{-i\omega_m(i)t}, \quad (5.3.15a)$$

$$\tilde{a}_i^{(m)}(t) = [\tilde{\alpha}_i^{(m)}(\beta) g^{1/2}(\omega_i) + \rho \alpha_i^{(m)\dagger}(\beta) f^{1/2}(\omega_i)] e^{i\omega_m(i)t}. \quad (5.3.15b)$$

Чтобы оценить средние значения по вакуумному состоянию от операторов, представляющих собой функции от операторов квазичастиц α_i и $\tilde{\alpha}_i$, нужно обратить особое внимание на сохранение условия хорошо определенных локализованных состояний. Прежде всего необходимо выполнить требование о независимом распределении атомов, причем каждый узел решетки должен быть занят только одним атомом. Такая картина независимого распределения возникает в пределе $\mu \rightarrow \infty$, поскольку вероятность занятия одного узла n частицами пропорциональна $e^{-\beta n \mu}$. Таким образом, при соответствующей перенормировке состояние $|0, \beta\rangle$ сводится к вектору состояния в точном представлении

чисел заполнения, при котором имеется лишь по одному атому на узел ¹). Тогда намагниченность $M(i) \equiv |\mathbf{M}(i)|$ получается из (5.3.11) в следующем виде:

$$M(i) = g\mu_B \sum_m m \frac{1}{e^{\beta\omega_m(i)} - \rho} Z(\beta), \quad (5.3.16)$$

где $Z(\beta)$ — нормировочный множитель, о котором упоминалось выше. Поскольку каждый узел занят только одним атомом, то

$$\langle 0, \beta | a_i^\dagger a_i | 0, \beta \rangle = \sum_m \frac{1}{e^{\beta\omega_m(i)} - \rho} Z(\beta) = 1. \quad (5.3.17)$$

В пределе $\mu \rightarrow \infty$ имеем

$$M(i) = g\mu_B e^{-\beta\mu} Z(\beta) \sum_m m e^{g\mu_B \beta H_{M(i)} m}, \quad (5.3.18)$$

$$1 = e^{-\beta\mu} Z(\beta) \sum_m e^{g\mu_B \beta H_{M(i)} m}. \quad (5.3.19)$$

¹) Проиллюстрируем эту ситуацию в случае свободного оператора $\alpha^{(m)}(i)$, для которого энергия дается выражением (5.3.13). Состояние $|v\rangle$, в котором имеется по одной частице в каждом узле i , имеет вид

$$|v\rangle = \left(\frac{1}{Z_v^{1/2}(\beta)} \right) \prod_i \alpha^\dagger(i) C^{(i)}(\beta) \bar{\alpha}^\dagger(i) |0\rangle,$$

где $\alpha^\dagger(i) C^{(i)}(\beta) \bar{\alpha}^\dagger(i) = \sum_m \alpha^{(m)\dagger}(i) C_m^{(i)}(\beta) \bar{\alpha}^{(m)\dagger}(i)$, а $C_m^{(i)}(\beta)$ и $Z_v(\beta)$ даются выражениями $C_m^{(i)}(\beta) = e^{-\beta\omega_m(i)/2}$, $Z_v(\beta) = \prod_i \left(\sum_m e^{-\beta\omega_m(i)} \right)$.

Вакуумное состояние $|0\rangle$ определяется условием $\alpha(i)|0\rangle = \bar{\alpha}(i)|0\rangle = 0$. Вакуумное состояние $|0, \beta\rangle$, определенное условием

$$\alpha(i, \beta)|0, \beta\rangle = \bar{\alpha}(i, \beta)|0, \beta\rangle = 0,$$

формально выражается в виде

$$|0, \beta\rangle = \frac{1}{Z_0^{1/2}(\beta)} \prod_i \prod_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\alpha^{(m)\dagger}(i) C_m^{(i)}(\beta) \bar{\alpha}^{(m)\dagger}(i)]^n \right) |0\rangle,$$

$$Z_0(\beta) = \prod_i \prod_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega_m(i)} n \right).$$

Если сравнить среднее значение по вакууму вида

$$\langle v | [\alpha^{(m)\dagger}(i) \alpha^{(l)}(j)] \dots [\alpha^{(m')\dagger}(i') \alpha^{(l')}(j')] | v \rangle$$

со средним значением по вакууму вида

$$\langle 0, \beta | [\alpha^{(m)\dagger}(i) \alpha^{(l)}(j)] \dots [\alpha^{(m')\dagger}(i') \alpha^{(l')}(j')] | 0, \beta \rangle,$$

то легко заметить, что состояние $|0\rangle$ в $|0, \beta\rangle$ не вносит вклада в матричные элементы. Различие между этими двумя средними значениями состоит, во-первых, в различных вкладах от многочастичных состояний и, во-вторых, в нормировочных множителях. Если перейти к пределу $\mu \rightarrow \infty$, оба выражения становятся тождественными за исключением нормировочных множителей.

Тогда намагниченность $M(i)$ принимает вид

$$M(i) = g\mu_B \sum_m m e^{g\mu_B \beta H M(i) m} / \sum_m e^{g\mu_B \beta H M(i) m} = \quad (5.3.20)$$

$$= g\mu_B J B_J [g\mu_B J \beta H_M(i)], \quad (5.3.21)$$

где $B_J(x)$ — функция Бриллюэна:

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \operatorname{cth} \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \operatorname{cth} \frac{1}{2J} x. \quad (5.3.22)$$

Это хорошо известная формула, получаемая из (5.3.1) в приближении среднего поля.

Спин-волновое возбуждение (магنون). Рассмотрим теперь спин-волновое возбуждение при наличии спонтанной намагниченности ($\mathbf{h} = 0$). Введем операторы $S^\alpha(x)$ и функцию $J(\mathbf{k})$ с помощью соотношений

$$S^\alpha(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_B} d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sum_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} iS^\alpha(i; t), \quad (5.3.23)$$

$$J_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_B} d^3k J(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)]. \quad (5.3.24)$$

Символ Ω_B обозначает, что интегрирование по \mathbf{k} ограничено пределами первой зоны Бриллюэна. Введем также функции

$$J(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_B} d^3k J(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})], \quad (5.3.25)$$

$$\delta_R(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_B} d^3k \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})]. \quad (5.3.26)$$

Заметим, что функция $\delta_R(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)$ пропорциональна δ_{ij} .

Поскольку $S^\alpha(i)$ удовлетворяет перестановочному соотношению

$$[S_a^\alpha(i, t), S_b^\beta(j, t)] = i\varepsilon_{abc} \tau^{\alpha\beta} \delta_{ij} S_c^\alpha(i, t), \quad (5.3.27)$$

имеем

$$[S_a^\alpha(x), S_b^\beta(y)]_{t_x=t_y} = i\varepsilon_{abc} \tau^{\alpha\beta} \delta_R(\mathbf{x} - \mathbf{y}) S_c^\alpha(x), \quad (5.3.28)$$

где матрица $\tau^{\alpha\beta}$ приведена в (4.1.77).

Гамильтониан H из (5.3.3) может быть переписан в виде

$$H = \sum_i \mu a_i^\dagger a_i - \frac{1}{2} \int d^3x S(x) J(\nabla) S(x) - g\mu_B \int d^3x \mathbf{h} \cdot S(x), \quad (5.3.29)$$

где $J(\nabla)$ определен соотношением

$$J(\nabla) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = J(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

Имеет место соотношение

$$J(\nabla) S(x) = \int d^3y J(x-y) S(y). \quad (5.3.30)$$

Гамильтониан в (5.3.29) приводит к следующему уравнению Гейзенберга для $S(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x) = \frac{1}{2} \{S(x) \times J(\nabla) S(x) - J(\nabla) S(x) \times S(x)\} + g\mu_B S(x) \times \mathbf{h}. \quad (5.3.31)$$

Применяя операцию тильда, находим затем уравнение Гейзенберга для $\tilde{S}(x)$. Объединяя эти уравнения, получим уравнение Гейзенберга в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} S^\alpha(x) = \frac{1}{2} P_\alpha \{S^\alpha(x) \times J(\nabla) S^\alpha(x) - J(\nabla) S^\alpha(x) \times S^\alpha(x)\} + g\mu_B S^\alpha(x) \times \mathbf{h}. \quad (5.3.32)$$

Здесь P_α — символ оператора упорядочения, определенный в (4.2.6):

$$P_\alpha (A^\alpha B^\alpha \dots C^\alpha) = \begin{cases} A^1 B^1 \dots C^1 & \text{при } \alpha = 1, \\ C^2 B^2 \dots A^2 & \text{при } \alpha = 2. \end{cases} \quad (5.3.33)$$

Поскольку нас интересует случай спонтанной намагниченности, положим $\mathbf{h} = 0$ и

$$M(\beta) \equiv \langle 0, \beta | S_3^\alpha(x) | 0, \beta \rangle \neq 0, \quad (5.3.34)$$

где $M(\beta)$ не зависит от x . Введем далее оператор $\rho^\alpha(x)$ с помощью соотношения

$$\rho^\alpha(x) = S_3^\alpha(x) - M(\beta). \quad (5.3.35)$$

Из уравнения (5.3.32) следует

$$i \frac{\partial}{\partial t} S_+^\alpha(x) = \frac{P_\alpha}{2} \{S_+^\alpha(x) J(\nabla) [M(\beta) + \rho^\alpha(x)] - J(\nabla) S_+^\alpha(x) [M(\beta) + \rho^\alpha(x)]\}, \quad (5.3.36a)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} S_-^\alpha(x) = -\frac{P_\alpha}{2} \{S_-^\alpha(x) J(\nabla) [M(\beta) + \rho^\alpha(x)] - J(\nabla) S_-^\alpha(x) [M(\beta) + \rho^\alpha(x)]\}, \quad (5.3.36b)$$

где

$$S_\pm^\alpha(x) = 2^{-1/2} [S_1^\alpha(x) \pm i S_2^\alpha(x)].$$

Поскольку

$$[S_+^\alpha(x), S_-^\beta(y)]_{t_x=t_y} = S_3^\alpha(x) \delta_R(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tau^{\alpha\beta}, \quad (5.3.37)$$

имеем

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle 0, \beta | T [S_+^\alpha(x) S_-^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = i \delta_R(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t_x - t_y) \tau^{\alpha\beta} M(\beta) + \\ + [M(\beta)/2] \langle 0, \beta | T [\{J(0) - J(\nabla)\} S_+^\alpha(x), S_-^\beta(y)] | 0, \beta \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle 0, \beta | T [P_\alpha [S_+^\alpha(x) J(\nabla) \rho^\alpha(x) - J(\nabla) S_+^\alpha(x) \rho^\alpha(x)], S_-^\beta(y)] | 0, \beta \rangle. \quad (5.3.38)$$

Если пренебречь последним слагаемым в (5.3.38), получим

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} M(\beta) [J(0) - J(\nabla_x)] \right) \langle 0, \beta | T [S_+^\alpha(x) S_-^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = \\ = i \tau^{\alpha\beta} \delta_R(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t_x - t_y) M(\beta), \quad (5.3.39)$$

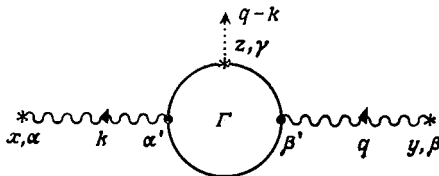


Рис. 5.4.

откуда следует выражение для энергии спиновой волны

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} M(\beta) [J(0) - J(\mathbf{k})]. \quad (5.3.40)$$

Обозначая через $\Delta^{\alpha\beta}(k)$ фурье-образ двухточечной функции $\langle 0, \beta | T [S_+^\alpha(x), S_-^\beta(y)] | 0, \beta \rangle$, получим из (5.3.39) соотношение

$$\Delta^{\alpha\beta}(k) = \left(U_B[\omega(\mathbf{k})] \frac{\tau M(\beta)}{k_0 - \omega(\mathbf{k}) + i\delta\tau} U_B[\omega(\mathbf{k})] \right)^{\alpha\beta}. \quad (5.3.41)$$

Полученные результаты для $\omega(\mathbf{k})$ и $\Delta^{\alpha\beta}(k)$ весьма неточны. В остальной части этого раздела мы исследуем, как изменяет последнее слагаемое в (5.3.38) энергию спиновой волны и двухточечную функцию $\Delta^{\alpha\beta}(k)$.

Вершинная функция и динамическое отображение спиновых операторов. Чтобы изучить влияние последнего слагаемого в (5.3.38) на полученные результаты, определим вершинную функцию (рис. 5.4) выражением

$$\langle 0, \beta | T [S_+^\alpha(x) \rho^\gamma(z) S_-^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = \\ = \left(\frac{i}{(2\pi)^4} \right)^2 \int_{\Omega_B} d^4 k q \Delta^{\alpha\alpha'}(k) \Gamma_\gamma^{\alpha'\beta'}(k, q - k; q) \Delta^{\beta'\beta}(q) \times \\ \times \exp[ikx - iqy + i(q - k)z]. \quad (5.3.42)$$

Введем далее соотношение

$$\Gamma_{\gamma}^{\alpha'\beta'}(0, 0; 0) = -M^{-1}(\beta) \delta^{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha'\gamma} \quad (5.3.43)$$

с помощью динамического отображения операторов $S_{\pm}^{\alpha}(x)$ и $S_3^{\alpha}(x)$. С этой целью обозначим свободное спин-волновое поле через $B^{\alpha}(x)$; оно удовлетворяет уравнению

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \omega(\nabla)\right) B^{\alpha}(x) = 0. \quad (5.3.44)$$

Тогда динамические отображения $S_{\pm}^{\alpha}(x)$ примут вид

$$S_{-}^{\alpha}(x) = M^{1/2}(\beta) F(\nabla) B^{\alpha+}(x) + \dots, \quad (5.3.45)$$

$$S_{+}^{\alpha}(x) = M^{1/2}(\beta) F(\nabla) B^{\alpha}(x) + \dots, \quad (5.3.46)$$

где $F(\mathbf{k})$ — некоторая функция. Многоточия обозначают нормальные произведения более высоких порядков. Согласно (4.3.38), спектральная функция $\sigma(\omega, \mathbf{k})$ для двухточечной функции $\langle 0, \beta | T [S_{+}^{\alpha}, S_{-}^{\beta}] | 0, \beta \rangle$ имеет вид

$$\sigma(\omega, \mathbf{k}) = M(\beta) F^2(\mathbf{k}) \delta[\omega - \omega(\mathbf{k})] + \bar{\sigma}_{-}(\omega, \mathbf{k}). \quad (5.3.47)$$

Здесь $\bar{\sigma}(\omega, \mathbf{k})$ описывает вклад слагаемых, обозначенных многоточиями в (5.3.45) и (5.3.46). Поскольку результат интегрирования по всему пространству $S_{\pm}^{\alpha}(x)$ не зависит от времени, фурье-образ $S_{\pm}^{\alpha}(x)$ при $\mathbf{k} = 0$ имеет нулевую частоту $k_0 = 0$. С другой стороны, состояния с $\mathbf{k} = 0$ и $k_0 = 0$ не дают вклада¹⁾ в $\bar{\sigma}(\omega, \mathbf{k})$, поскольку вклад в $\bar{\sigma}(\omega, \mathbf{k})$ дают лишь многочастичные состояния, участвующие в суммировании в (4.3.20). Таким образом, имеем $\bar{\sigma}(\omega, 0) = 0$. Далее из (5.3.37) получаем

$$\frac{1}{M(\beta)} \langle 0, \beta | [S_{+}^{\alpha}(x), S_{-}^{\beta}(y)] | 0, \beta \rangle_{t_x=t_y} = \delta_R(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tau^{\alpha\beta}. \quad (5.3.48)$$

Последнее выражение имеет тот же вид, что и среднее значение по вакууму от канонического коммутатора (4.3.36), поэтому спектральная функция для него должна удовлетворять соотношению (4.3.37):

$$\frac{1}{M(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sigma(\omega, \mathbf{k}) = 1. \quad (5.3.49)$$

Последнее соотношение при $\mathbf{k} = 0$ дает

$$F(0) = 1, \quad (5.3.50)$$

где учтены выражение (5.3.47) и равенство $\bar{\sigma}(\omega, 0) = 0$.

¹⁾ Согласно (4.3.20), $k_0 = E_n - E_m$, поэтому условие $k_0 = 0$ требует совпадения E_n и E_m . Поскольку энергия многочастичных состояний с данным импульсом покрывает сплошную область, вероятность совпадения E_n и E_m при $\mathbf{p}_n \neq \mathbf{p}_m$ равна нулю.

Хотя инвариантность основного состояния по отношению к спиновым вращениям нарушается условием (5.3.34), инвариантность относительно спинового вращения вокруг третьей оси все же сохраняется. Генератор этого вращения \hat{S}_3 имеет вид

$$\hat{S}_3 = \int d^3x [S_3(x) - \tilde{S}_3(x)] \quad (5.3.51)$$

и не зависит от времени. Правила коммутации спиновых операторов приводят к равенству

$$[S_{\pm}^{\alpha}(x), \hat{S}_3] = \mp S_{\pm}^{\alpha}(x). \quad (5.3.52)$$

Из инвариантности основного состояния относительно вращения вокруг третьей оси следует, что магнаны должны принадлежать к представлению абелевой группы вращений вокруг третьей оси. Тогда, согласно динамическим отображениям (5.3.45), (5.3.46), коммутатор $[B^{\alpha+}(x), B^{\alpha}(x)]$ при вращении вокруг третьей оси ведет себя так же, как коммутатор $[S_{-}^{\alpha}(x), S_{+}^{\alpha}(x)]$. Поэтому из (5.3.52) получаем соотношение

$$[B^{\alpha}(x), \hat{S}_3] = -B^{\alpha}(x), \quad (5.3.53)$$

которое приводит к выражению

$$\begin{aligned} \hat{S}_3 &= - \int d^3x : [B^{+}(x) B(x) - \tilde{B}^{+}(x) \tilde{B}(x)] : = \\ &= - \int d^3x : \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} B^{\alpha+}(x) B(x) :, \end{aligned} \quad (5.3.54)$$

где $\epsilon_{\alpha} = 1$ при $\alpha = 1$ и $\epsilon_{\alpha} = -1$ при $\alpha = 2$. Здесь нормальное произведение определено через физические операторы $B(x, \beta)$ и $\tilde{B}(x, \beta)$, связанные с $B(x)$ и $\tilde{B}(x)$ преобразованием Боголюбова. В выражении (5.3.54) мы опустили члены, не содержащие магنونных операторов, поскольку эти члены не имеют отношения к дальнейшему рассмотрению.

Согласно (5.3.54), динамическое отображение $\rho^{\alpha}(x)$ имеет вид

$$\rho^{\alpha}(x) = - : B^{\alpha+}(x) B^{\alpha}(x) : + \dots, \quad (5.3.55)$$

где многоточие обозначает слагаемые с отличным от нуля значением передаваемого импульса. Подставляя (5.3.45), (5.3.46) и (5.3.55) в (5.3.42), приходим к соотношению (5.3.43)¹⁾.

Дисперсионное уравнение для магнана. Используя для Δ и Γ в (5.3.42) приближенные выражения (5.3.41) и (5.3.43) соответ-

¹⁾ Соотношение (5.3.43) не зависит от модели. Действительно, это соотношение можно получить, пользуясь условием инвариантности теории относительно спиновых вращений, с помощью так называемых соотношений Уорда—Такахаша, как показано в гл. 6.

ственно, можно вычислить из (5.3.38) уточненное выражение для $\Delta^{\alpha\beta}$:

$$q_0 \Delta^{\alpha\beta}(q) = \tau^{\alpha\beta} M(\beta) + \frac{1}{2} M(\beta) [J(0) - J(q)] \Delta^{\alpha\beta}(q) - \\ - \frac{1}{2} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{c_\alpha} d^3k [\Delta^{\alpha\alpha}(k) M^{-1}(\beta) \delta^{\alpha\beta'} J(q-k) \Delta^{\beta'\beta}(q) - \\ - J(k) \Delta^{\alpha\alpha}(k) M^{-1}(\beta) \delta^{\alpha\beta'} \Delta^{\beta'\beta}(q)]. \quad (5.3.56)$$

Контур интегрирования c_α на комплексной плоскости k_0 есть полуокружность на верхней полуплоскости (обход против часовой стрелки) при $\alpha = 1$ и на нижней полуплоскости (обход по часовой стрелке) при $\alpha = 2$. Из (5.3.56) находим

$$\left\{ q_0 - \frac{1}{2} M(\beta) [J(0) - J(q)] - \delta\omega(q) \right\} \Delta^{\alpha\beta}(q) = \tau^{\alpha\beta} M(\beta), \quad (5.3.57)$$

где

$$\delta\omega(q) = \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int d^3k [J(q-k) - J(k)] f_B[\omega(k)] = \\ = \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int d^3k [J(q-k) - J(k) - J(q) + J(0)] f_B[\omega(k)] + \\ + \frac{1}{2} [J(0) - J(q)] \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k f_B[\omega(k)]. \quad (5.3.58)$$

Таким образом, (5.3.57) приводит к самосогласованному уравнению для спин-волнового спектра

$$\omega(q) = \frac{1}{2} [J(0) - J(q)] \left(M(\beta) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k f_B[\omega(k)] \right) - \\ - \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k [J(q-k) - J(k) - J(q) + J(0)] f_B[\omega(k)]. \quad (5.3.59)$$

Для вычисления $\omega(q)$ при малых T с помощью (5.3.59) необходимо знать намагниченность $M(\beta)$ при низких температурах. При нулевой температуре $B(k)$ — физический оператор уничтожения, поэтому $B^\dagger(k) B(k)$ естественным образом оказывается нормально упорядоченным произведением. Тогда из (5.3.55) и (5.3.35) имеем

$$S_3 = \int d^3x S_3(x) = M(\infty) V - \int d^3k B^\dagger(k) B(k). \quad (5.3.60)$$

Если температура лишь немного выше нуля, то $B(k)$ связан с физическими операторами $B(k, \beta)$ и $\tilde{B}^\dagger(k, \beta)$ посредством преобразования Боголюбова, и можно найти

$$\langle 0, \beta | B^\dagger(k) B(k) | 0, \beta \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} f_B[\omega(k)]. \quad (5.3.61)$$

Таким образом, имеем

$$M(\beta) = M(\infty) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k f_B(\omega(\mathbf{k})) \quad (5.3.62)$$

при низких температурах. Используя далее (5.3.59), можно показать, что температурная зависимость $\omega(\mathbf{q})$ при низких температурах обусловлена только вторым слагаемым в правой части (5.3.59), что в свою очередь приводит к закону $T^{5/2}$ для коэффициента жесткости спиновых волн [4]. Если учесть эту температурную зависимость $\omega(\mathbf{q})$, то в разложении $M(\beta)$ в (5.3.62) наряду с обычным членом $T^{3/2}$ (блеховский член) появляется также член T^4 (дайсоновский член).

5.4. Сверхпроводимость

Лагранжиан. Начнем с лагранжиана для модели БКШ [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \psi_{\uparrow}^{\dagger} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \right) \psi_{\uparrow} + \psi_{\downarrow}^{\dagger} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \right) \psi_{\downarrow} - \\ & - \lambda \psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} + \mu (\psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} + \psi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}). \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Здесь $\psi_{\uparrow, \downarrow}$ — электронные гейзенберговские поля, а $\varepsilon(\nabla^2)$ определено соотношением

$$\varepsilon(\nabla^2) e^{ikx} = \varepsilon_k e^{ikx}, \quad (5.4.2)$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 \rightarrow k_F^2) \quad (5.4.3)$$

(постоянная k_F — импульс Ферми). В выражении (5.4.1) затронутое химический потенциал равен $\mu + (\hbar/2m) k_F^2$. Поскольку перенормированный химический потенциал должен быть равен $(\hbar/2m) k_F^2$, роль параметра μ состоит в компенсации сдвига химического потенциала вследствие взаимодействия. В выражении (5.4.1) отсутствует электромагнитное взаимодействие; оно будет рассмотрено в последней части этого раздела.

Введем следующие векторные (дублетные) обозначения:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (5.4.4)$$

Тогда антикоммутирует

$$[\psi_a(x), \psi_b^{\dagger}(y)]_+ = \hbar \delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{ при } t_x = t_y \quad (5.4.5)$$

с $a, b = \uparrow$ или \downarrow принимает вид

$$[\psi(x), \psi^{\dagger}(y)]_+ = \hbar I \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{ при } t_x = t_y, \quad (5.4.6)$$

где I — матрица размерности 2×2 , а ψ — дублет, определенный (5.4.4).

Уравнение Гейзенберга. Лагранжиан (5.4.1) приводит к следующему уравнению Гейзенберга:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon (\nabla^2) \tau_3 + \Delta \tau_1 \right) \psi(x) = s(x) + \Delta \tau_1 \psi(x) - \mu \tau_3 \psi(x); \quad (5.4.7)$$

входящие сюда матрицы τ_i определены в (2.6.55):

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.8)$$

Член, ответственный за взаимодействие, $s(x)$ имеет вид

$$s = \lambda \tau_1 \frac{1 - \tau_3}{2} \psi \left(\psi^\dagger \tau_1 \frac{1 + \tau_3}{2} \psi \right) - \lambda \frac{1 - \tau_3}{2} \psi \left(\psi^\dagger \frac{1 + \tau_3}{2} \psi \right); \quad (5.4.9)$$

слагаемое $\Delta \tau_1 \psi$ в обеих частях уравнения (5.4.7) обеспечивает перенормировку энергии.

Введем теперь обозначение для термополевого дублета

$$\psi^1 = \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi^2 = \tilde{\psi}^{\dagger t} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1^+ \\ \tilde{\psi}_2^+ \end{pmatrix}, \quad (5.4.10)$$

где индекс t обозначает транспонирование. Операция тильда и эрмитово сопряжение переводят оператор s ($= s^1$) в оператор

$$s^2 \equiv \tilde{s}^{\dagger} = P_2 \left[\lambda \tau_1 \frac{1 - \tau_3}{2} \psi^2 \left(\psi^{2\dagger} \tau_1 \frac{1 + \tau_3}{2} \psi^2 \right) - \lambda \frac{1 - \tau_3}{2} \psi^2 \left(\psi^{2\dagger} \frac{1 + \tau_3}{2} \psi^2 \right) \right]; \quad (5.4.11)$$

здесь P_α — оператор упорядочения, определенный (4.2.6):

$$P_\alpha (A^\alpha B^\alpha \dots C^\alpha) = \begin{cases} A^1 B^1 \dots C^1 & \text{при } \alpha = 1, \\ C^2 B^2 \dots A^2 & \text{при } \alpha = 2. \end{cases} \quad (5.4.12)$$

Тогда можно написать

$$s^\alpha = P_\alpha \left(\lambda \tau_1 \frac{1 - \tau_3}{2} \psi^\alpha \left(\psi^{\alpha\dagger} \tau_1 \frac{1 + \tau_3}{2} \psi^\alpha \right) - \lambda \frac{1 - \tau_3}{2} \psi^\alpha \left(\psi^{\alpha\dagger} \frac{1 + \tau_3}{2} \psi^\alpha \right) \right). \quad (5.4.13)$$

Применяя далее к гейзенберговскому уравнению (5.4.7) операцию тильда и эрмитово сопряжение, получим уравнение Гейзенберга для ψ^2 . Объединяя оба уравнения, находим

$$\lambda(\partial)\psi^\alpha(x) = s^\alpha(x) + \Delta\tau_1\psi^\alpha(x) - \mu\tau_3\psi^\alpha(x), \quad (5.4.14)$$

где использовано обозначение

$$\lambda(\partial) = i\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla)\tau_3 + \Delta\tau_1. \quad (5.4.15)$$

Уравнение БС для $\langle 0, \beta | T[\psi^\alpha, \psi^{\beta\dagger}] | 0, \beta \rangle$. Выведем теперь уравнение БС для функции

$$\alpha^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = \langle 0, \beta | T[\psi^\alpha(x_1)\psi^{\beta\dagger}(x_2)] | 0, \beta \rangle. \quad (5.4.16)$$

Используя (5.4.14), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \lambda(\partial_1)\chi^{\alpha\beta}(x_1 - x_2)\lambda(-\overleftarrow{\partial}_2) = \\ = i\hbar\lambda(\partial_1)\delta^{(4)}(x_1 - x_2)\delta_{\alpha\beta} + i\hbar(\Delta\tau_1 - \mu\tau_3)\delta^{(4)}(x_1 - x_2)\delta_{\alpha\beta} + \\ + i\langle 0, \beta | [s^\alpha(x_1), \psi^{\beta\dagger}(x_2)]_+ | 0, \beta \rangle \delta(t_1 - t_2) + \\ + \langle 0, \beta | T[s^\alpha(x_1) + (\Delta\tau_1 - \mu\tau_3)\psi^\alpha(x_1), s^{\beta\dagger}(x_2) + \\ + \psi^{\beta\dagger}(x_2)(\Delta\tau_1 - \mu\tau_3)] | 0, \beta \rangle. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Для решения этого уравнения используем цепочечное приближение, в котором учтем лишь цепочечные диаграммы. В этом приближении последнее слагаемое в правой части (5.4.17), в которое входит T -коммутатор, вообще не дает вклада. Третье слагаемое можно вычислить с помощью канонических антикоммутирующих:

$$[\psi^\alpha(x), \psi^{\beta\dagger}(y)]_+ = \hbar\delta^{\alpha\beta}\delta(x - y) \quad \text{при } t_x = t_y. \quad (5.4.18)$$

Тогда уравнение (5.4.17) в цепочечном приближении приводит к следующему уравнению БС:

$$\begin{aligned} \chi^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = S_c^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) - \frac{i}{\hbar} \int d^4\xi S_c^{\alpha\nu}(x_1 - \xi) \times \\ \times [\Delta\tau_1 - \mu\tau_3 + \lambda\chi_1^{(\nu)}\tau_1 - \chi\chi_2^{(\nu)}\tau_3] S_c^{\nu\beta}(\xi - x_2), \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

где $S_c^{\alpha\beta}(x - y)$ — причинная двухточечная функция, определяемая выражением (4.1.113) и потому удовлетворяющая уравнению

$$\lambda(\partial)S_c^{\alpha\beta}(x) = i\hbar\delta^{(4)}(x)\delta^{\alpha\beta}, \quad (5.4.20)$$

согласно (4.1.114). В уравнении (5.4.19) $\chi_1^{(\nu)}$ дается выражениями

$$\chi_1^{(1)} = \langle 0, \beta | \psi_2^\dagger(x)\psi_1(x) | 0, \beta \rangle = \langle 0, \beta | \psi_1^\dagger(x)\psi_2(x) | 0, \beta \rangle = \quad (5.4.21)$$

$$= \langle 0, \beta | \psi_\downarrow(x)\psi_\uparrow(x) | 0, \beta \rangle = \langle 0, \beta | \psi_\uparrow^\dagger(x)\psi_\downarrow^\dagger(x) | 0, \beta \rangle, \quad (5.4.22)$$

$$\chi_1^{(2)} = \langle 0, \beta | \tilde{\psi}_2^\dagger\tilde{\psi}_1 | 0, \beta \rangle = \langle 0, \beta | \tilde{\psi}_1^\dagger\tilde{\psi}_2 | 0, \beta \rangle. \quad (5.4.23)$$

Заметим, что фазу $\psi_{\uparrow, \downarrow}$ можно выбрать так, чтобы $\chi_1^{(1)}$ было вещественным. Тогда $\chi_1^{(1)} = \bar{\chi}_1^{(1)}$, поэтому из (5.4.21) и (5.4.23) следует

$$\chi_1^{(1)} = \chi_1^{(2)}. \quad (5.4.24)$$

Это равенство можно назвать соотношением тильда-симметрии.

Перенормировка. Поскольку энергия, входящая в $\lambda(\partial)$, должна быть наблюдаемой (т. е. перенормированной), из уравнения (5.4.19) видно, что $\Delta + \chi\chi_1^{(\nu)} = 0$ для $\nu = 1, 2$. С учетом (5.4.24) получаем $\Delta = -\lambda\chi_1^{(1)} = -\lambda\chi_1^{(2)}$, откуда находим Δ :

$$\Delta = -\lambda \langle 0, \beta | \psi_2^\dagger \psi_1 | 0, \beta \rangle = \quad (5.4.25)$$

$$= -\lambda \langle 0, \beta | \psi_\downarrow \psi_\uparrow | 0, \beta \rangle. \quad (5.4.26)$$

Величины $\chi_2^{(\alpha)}$, входящие в (5.4.19), определяются выражениями

$$\chi_2^{(1)} = -\langle 0, \beta | \psi_\uparrow^\dagger \psi_\uparrow | 0, \beta \rangle = -\langle 0, \beta | \psi_1^\dagger \psi_1 | 0, \beta \rangle, \quad (5.4.27)$$

$$\chi_2^{(2)} = -\langle 0, \beta | \tilde{\psi}_1^\dagger \tilde{\psi}_1 | 0, \beta \rangle. \quad (5.4.28)$$

Имеется еще одно соотношение тильда-симметрии

$$\chi_2^{(1)} = \chi_2^{(2)}. \quad (5.4.29)$$

Содержащее τ_3 слагаемое в уравнении БС (5.4.19) исключается с помощью условия

$$\mu + \lambda\chi_2^{(\alpha)} = 0. \quad (5.4.30)$$

Это условие выражает перенормировку химического потенциала. Таким образом, выбирая μ с помощью условия (5.4.30) и определяя Δ с помощью (5.4.25), получаем, что электронная двухточечная функция принимает вид свободной функции:

$$\chi^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = S_c^{\alpha\beta}(x_1 - x_2). \quad (5.4.31)$$

Физический электрон и двухточечная функция для него. Поле физического электрона $\varphi^{0\alpha}$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda(\partial) \varphi^{0\alpha} = 0. \quad (5.4.32)$$

Энергия E_k физического электрона дается выражением (4.1.105):

$$E_k = (\varepsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}, \quad (5.4.33)$$

откуда ясно, что Δ имеет смысл энергетической щели.

Фурье-образ причинной двухточечной функции дается выражением (4.1.113):

$$S_c^{\alpha\beta}(k) = \frac{E_k + \varepsilon_k \tau_3 - \Delta \tau_1}{2E_k} [U(E_k)(k_0 - E_k + i\delta\tau)^{-1} U^\dagger(E_k)]_{\alpha\beta} + \\ + \frac{E_k - \varepsilon_k \tau_3 + \Delta \tau_1}{2E_k} [U(-E_k)(k_0 + E_k + i\delta\tau)^{-1} U^\dagger(-E_k)]_{\alpha\beta}. \quad (5.4.34)$$

Уравнение для щели. Из выражения (5.4.26) видно, что если $\Delta \neq 0$, то основное состояние не инвариантно относительно изменения фазы электронной волновой функции, поскольку при замене $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$ величина Δ переходит в $e^{2i\theta}\Delta$. Следовательно, основное состояние является фазово-упорядоченным.

В дальнейшем величину S_c будем обозначать просто через S . Согласно (5.4.26) и (5.4.16), имеем

$$\Delta = \lambda \lim_{t \rightarrow +0} [\chi_{12}^{11}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=0} = \quad (5.4.35)$$

$$= \lambda \lim_{t \rightarrow +0} [S_{12}^{11}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=0} = \quad (5.4.36)$$

$$= \lambda \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int_c d^4k S_{12}^{11}(k), \quad (5.4.37)$$

где контур интегрирования c в комплексной k_0 -плоскости представляет собой полуокружность в верхней полуплоскости. Тогда из (5.4.34) следует

$$\Delta = -\lambda\hbar\Delta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} [1 - 2f_F(E_k)], \quad (5.4.38)$$

откуда при $\Delta \neq 0$ получаем

$$1 = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} [1 - 2f_F(E_k)], \quad (5.4.39)$$

где $V \equiv -\hbar\lambda$. Это уравнение называется уравнением для щели, так как оно определяет энергетическую щель в электронном спектре. Оно выражает самосогласованное условие возникновения фазово-упорядоченного состояния: фазово-упорядоченное (сверхпроводящее) состояние возникает тогда и только тогда, когда уравнение (5.4.39) имеет отличные от нуля решения для энергетической щели Δ (для выполнения (5.4.39) λ должна быть отрицательной).

Обозначим энергию Дебая через ω_D , а плотность состояний на уровне Ферми — через $N(0)$. Интегрирование в (5.4.39) обре-

зается на ω_D , так как взаимодействие БКШ переносится фононами. Если $\omega_D \ll \epsilon_F$ (где ϵ_F — энергия Ферми), уравнение (5.4.39) можно приближенно записать в виде

$$1 = VN(0) \int_0^{\omega_D} d\epsilon \frac{1}{E} [1 - 2f_F(E)], \quad (5.4.40)$$

где $E = (\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}$.

Критическая температура. Критическая температура сверхпроводящего состояния T_c определяется уравнением (5.4.40) при $\Delta = 0$:

$$1 = VN(0) \int_0^{\omega_D} d\epsilon \frac{1}{\epsilon} [1 - 2f_F(\epsilon)] \text{ при } T = T_c. \quad (5.4.41)$$

Отсюда получаем знаменитое соотношение БКШ для T_c

$$k_B T_c = 1,13 \hbar \omega_D \exp [-1/N(0)V]. \quad (5.4.42)$$

С другой стороны, обозначая Δ при температуре T через $\Delta(T)$, находим из (5.4.40) $\Delta(0)$, полагая $\beta = \infty$:

$$1 = VN(0) \int_0^{\omega_D} d\epsilon \frac{1}{E} \text{ при } T = 0. \quad (5.4.43)$$

Отсюда находим

$$\Delta(0) = \omega_D \{ \text{sh} [1/NV(0)] \}^{-1} \approx 2\omega_D \exp(-1/N(0)V), \quad (5.4.44)$$

что вместе с (5.4.42) приводит к соотношению

$$\hbar \Delta(0) = 1,76 k_B T_c. \quad (5.4.45)$$

Для большинства сверхпроводников величина $VN(0)$ заключена в пределах от 0,2 до 0,4 (см., например, [6]). Тогда, согласно (5.4.44) и (5.4.45), отношение $(k_B T_c / \hbar \omega_D)$ будет порядка 0,01—0,1. Именно этим объясняется, почему критическая температура большинства сверхпроводников столь низка.

Операторы тока и плотности заряда. Оператор Гейзенберга для электрического тока имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^1 &= \frac{e}{2mi} [\psi_\uparrow^\dagger \nabla \psi_\uparrow - (\nabla \psi_\uparrow^\dagger) \psi_\uparrow + \psi_\downarrow^\dagger \nabla \psi_\downarrow - (\nabla \psi_\downarrow^\dagger) \psi_\downarrow] = \\ &= -\frac{e}{2mi} \sum_i [(\nabla_x - \nabla_y) \psi_i(x) \psi_i^\dagger(y)]_{x=y} \end{aligned} \quad (5.4.46)$$

(здесь и ниже мы опускаем тривиальные численные величины).

Применяя к (5.4.46) операцию тильда, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^2 &= \frac{e}{2mi} \sum_i [(\nabla_x - \nabla_y) \tilde{\Psi}_i(x) \tilde{\Psi}_i^\dagger(y)]_{x=y} = \\ &= \frac{e}{2mi} \sum_i [(\nabla_x - \nabla_y) \tilde{\Psi}_i^\dagger(x) \tilde{\Psi}_i(y)]_{x=y}. \end{aligned} \quad (5.4.47)$$

Термополевой дублет тока \mathbf{j}^α ($\alpha = 1, 2$) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{j}^\alpha = -\varepsilon^\alpha \frac{e}{2mi} \sum_i [(\nabla_x - \nabla_y) \Psi_i^\alpha(x) \Psi_i^{\alpha\dagger}(y)]_{x=y}. \quad (5.4.48)$$

Аналогично оператор плотности заряда имеет вид

$$\rho^\alpha = -\varepsilon^\alpha \frac{e}{\hbar} \sum_{ij} (\tau_3)_{ij} \Psi_j^\alpha \Psi_i^{\alpha\dagger}. \quad (5.4.49)$$

Закон сохранения для плотности тока имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \rho^\alpha = 0. \quad (5.4.50)$$

Введем величины

$$\Delta^{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0, \beta | T [\rho^\alpha(x) \rho^\beta(y)] | 0, \beta \rangle, \quad (5.4.51)$$

$$D^{\alpha\beta\gamma}(x, y; z) = \langle 0, \beta | T [\tilde{\Psi}_2^\alpha(x) \Psi^{\beta\dagger}(y) \rho^\gamma(z)] | 0, \beta \rangle. \quad (5.4.52)$$

Тогда получим

$$\Delta^{\alpha\gamma}(x-z) = -\frac{e}{\hbar} \varepsilon^\alpha T_r [\tau_3 D^{\alpha\alpha\gamma}(x, x; z)]. \quad (5.4.53)$$

Уравнение БС для $D^{\alpha\beta\gamma}(x, y; z)$. Уравнение Гейзенберга (5.4.14) приводит к уравнению БС следующего вида:

$$\begin{aligned} \lambda(\partial_1) D^{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2; z) \lambda(-\overleftarrow{\partial}_2) = \\ = -\hbar^2 \frac{e}{\hbar} \delta^{(4)}(x_1 - z) \delta^{(4)}(x_2 - z) \tau_3 \varepsilon^\gamma \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\gamma\beta} + \\ + i\delta(t_1 - t_2) \langle 0, \beta | T [[\{ s^\alpha(x_1) + \Delta(\tau_1) \Psi^\alpha(x_1) - \\ - \mu\tau_3 \Psi^\alpha(x_1) \}, \Psi^{\beta\dagger}(x_2)]_+ \rho^\gamma(z)] | 0, \beta \rangle + \\ + i \frac{e}{\hbar} \delta^{(4)}(x_1 - z) \delta^{\alpha\gamma} \langle 0, \beta | T [\varepsilon^\gamma \tau^3 \Psi^\gamma(z) \{ s^{\beta\dagger}(x_2) + \\ + \Psi^{\beta\dagger}(x_2) \Delta\tau_1 - \Psi^{\beta\dagger}(x_2) \mu\tau_3 \}] | 0, \beta \rangle + \\ + i \frac{e}{\hbar} \delta^{(4)}(x_2 - z) \delta^{\beta\gamma} \langle 0, \beta | T [\{ s^\alpha(x_1) + \Delta\tau_1 \Psi^\alpha(x_1) - \\ - \mu\tau_3 \Psi^\alpha(x_1) \} \Psi^{\dagger\gamma}(z) \tau_3 \varepsilon^\gamma] | 0, \beta \rangle + \\ + \langle 0, \beta | T [\{ s^\alpha(x_1) + (\Delta\tau_1 - \mu\tau_3) \Psi^\alpha(x_1) \} \{ s^{\beta\dagger}(x_2) + \\ + \Psi^{\beta\dagger}(x_2) (\Delta\tau_1 - \mu\tau_3) \} \rho^\gamma(z)] | 0, \beta \rangle. \end{aligned} \quad (5.4.54)$$

В остальной части этого раздела мы используем цепочечное приближение. Цепочечные диаграммы должны начинаться с точки $x_1 = x_2$; поскольку последние три слагаемых не содержат множителя $\delta^{(4)}(x_1 - x_2)$, они не дают вклада в цепочечное приближение и потому могут быть опущены.

Для более простой записи уравнения БС введем обозначение

$$D_{ij}^{\alpha\gamma}(\xi - z) \equiv D_{ij}^{\alpha\alpha\gamma}(\xi, \xi; z), \quad (5.4.55)$$

где суммирование по α не производится. Введем также матрицу

$$F^{\alpha\gamma}(\xi - z) = \begin{pmatrix} -\lambda D_{22}^{\alpha\gamma}(\xi - z), & \lambda D_{12}^{\alpha\gamma}(\xi - z) \\ \lambda D_{21}^{\alpha\gamma}(\xi - z), & -\lambda D_{11}^{\alpha\gamma}(\xi - z) \end{pmatrix}. \quad (5.4.56)$$

Тогда уравнение БС (5.4.54) в цепочечном приближении примет вид

$$D^{\alpha\beta\gamma}(x, y; z) = \frac{e}{\hbar} S^{\alpha\gamma}(x - z) \tau_3 S^{\gamma\beta}(z - y) \varepsilon^\gamma + \\ + \frac{i}{\hbar} \int d^4\xi S^{\alpha\gamma}(x - \xi) \varepsilon^\gamma F^{\gamma\beta}(\xi - z) S^{\beta\gamma}(\xi - y). \quad (5.4.57)$$

Решая это уравнение при $\alpha = \beta$ и $x = y$, можно найти $D^{\alpha\gamma}(\xi - z)$, а затем $F_{ij}^{\alpha\gamma}(\xi - z)$; далее с помощью (5.4.57) находится и $D^{\alpha\beta\gamma}(x, y; z)$.

Уравнение для $D^{\alpha\beta}(x - y)$. Уравнение БС (5.4.57) при $\alpha = \beta$ и $x = y$ принимает простой вид, если использовать обозначения

$$S_1^{\alpha\beta}(x) \equiv S_{11}^{\alpha\beta}(x), \quad (5.4.58a)$$

$$S_2^{\alpha\beta}(x) \equiv S_{22}^{\alpha\beta}(x), \quad (5.4.58б)$$

$$S_3^{\alpha\beta}(x) \equiv -S_{12}^{\alpha\beta}(x) = -S_{21}^{\alpha\beta}(x), \quad (5.4.58в)$$

$$Q_{ij}^{\alpha\beta}(x) = \left(-\frac{i\lambda}{\hbar}\right) S_i^{\alpha\beta}(x) S_j^{\beta\alpha}(x) \quad (5.4.59)$$

и учесть соотношения

$$S_{12}^{\alpha\beta}(x) = S_{21}^{\alpha\beta}(x) = S_{12}^{\alpha\beta}(-x), \quad (5.4.60a)$$

$$S_{11}^{\alpha\beta}(x) = -S_{22}^{\alpha\beta}(-x), \quad (5.4.60б)$$

$$S_{ij}^{\alpha\beta}(x) = S_{ij}^{\beta\alpha}(x), \quad (5.4.60в)$$

которые получаются из (5.4.34).

Вводя $D_i^{\alpha\beta}(x)$ с помощью соотношений

$$D_1^{\alpha\beta}(x) \equiv D_{12}^{\alpha\beta}(x), \quad (5.4.61a)$$

$$D_2^{\alpha\beta}(x) \equiv -D_{21}^{\alpha\beta}(x), \quad (5.4.61б)$$

$$D_3^{\alpha\beta}(x) \equiv D_{22}^{\alpha\beta}(x) - D_{11}^{\alpha\beta}(x), \quad (5.4.61в)$$

получаем уравнения БС для $D_i^{\alpha\beta}(x)$ (рис. 5.5)

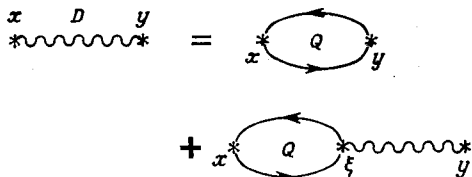


Рис. 5.5.

$$D_1(x-y) = -2i \frac{e}{\lambda} Q_{13}(x-y) \tau + \int d^4\xi [Q_{11}(x-\xi) \tau D_1(\xi-y) + Q_{33}(x-\xi) \tau D_2(\xi-y) - Q_{13}(x-\xi) \tau D_3(\xi-y)], \quad (5.4.62a)$$

$$D_2(x-y) = -2i \frac{e}{\lambda} Q_{23}(x-y) \tau + \int d^4\xi [Q_{33}(x-\xi) \tau D_1(\xi-y) + Q_{22}(x-\xi) \tau D_2(\xi-y) - Q_{23}(x-\xi) \tau D_3(\xi-y)], \quad (5.4.62b)$$

$$D_3(x-y) = 2i \frac{e}{\lambda} [Q_{33}(x-y) + Q_{12}(x-y)] \tau + \int d^4\xi [-2Q_{13}(x-\xi) \tau D_1(\xi-y) - 2Q_{23}(x-\xi) \tau D_2(\xi-y) + \{Q_{12}(x-\xi) + Q_{33}(x-\xi)\} D_3(\xi-y)], \quad (5.4.62b)$$

причем

$$D_{11}(x-y) + D_{22}(x-y) = 0. \quad (5.4.62г)$$

В уравнениях (5.4.62) $D_i(x)$ и $Q_{ij}(x)$ — матрицы:

$$D_i(x) = [D_i^{\alpha\beta}(x)], \quad Q_{ij}(x) = [Q_{ij}^{\alpha\beta}(x)]. \quad (5.4.63)$$

Чтобы выразить полученные уравнения БС через фурье-образы, введем фурье-представления

$$D_i(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - k_0t)] D_i(k) \quad (i=1, 2, 3), \quad (5.4.64)$$

$$Q_{ij}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - k_0t)] Q_{ij}(k). \quad (5.4.65)$$

Тогда уравнения (5.4.62) принимают вид

$$D_1(k) = -2e \frac{i}{\lambda} Q_{13}(k) \tau + Q_{11}(k) \tau D_1(k) + \\ + Q_{33}(k) \tau D_2(k) - Q_{13}(k) \tau D_3(k), \quad (5.4.66a)$$

$$D_2(k) = -2e \frac{i}{\lambda} Q_{23}(k) \tau + Q_{33}(k) \tau D_1(k) + \\ + Q_{22}(k) \tau D_2(k) - Q_{23}(k) \tau D_3(k), \quad (5.4.66b)$$

$$D_3(k) = 2e \frac{i}{\lambda} [Q_{33}(k) + Q_{12}(k)] \tau - 2Q_{13}(k) \tau D_1(k) - \\ - 2Q_{23}(k) \tau D_2(k) + \{Q_{12}(k) + Q_{33}(k)\} \tau D_3(k). \quad (5.4.66b)$$

Вычисление $Q_{ij}(k)$. Чтобы решить уравнения (5.4.66), вычислим величины $Q_{ij}(k)$. Прежде всего перепишем (5.4.34) в виде

$$S^{\alpha\beta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x + \varepsilon_k \tau_3 - \Delta \tau_1}{2E_k} [U(x) (k_0 - x + i\delta\tau)^{-1} U^\dagger(x)]_{\alpha\beta} \times \\ \times \{\delta(x - E_k) - \delta(x + E_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varepsilon(x) \delta(x^2 - E_k^2) \times \\ \times (x + \varepsilon_k \tau_3 - \Delta \tau_1) [U(x) (k_0 - x + i\delta\tau)^{-1} U^\dagger(x)]_{\alpha\beta}, \quad (5.4.67)$$

где $\varepsilon(x)$ — знаковый множитель:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.4.68)$$

Вводя величины

$$\widehat{Q}_{ijlm}^{\alpha\beta}(x) \equiv i \frac{\lambda}{\hbar} S_{ij}^{\alpha\beta}(x) S_{lm}^{\beta\alpha}(-x) = \quad (5.4.69)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp[i(kx - k_0 t)] \widehat{Q}_{ijlm}^{\alpha\beta}(k) \quad (5.4.70)$$

и используя формулу (4.1.120), находим

$$\widehat{Q}_{ijlm}^{\alpha\beta}(k) = \hbar \lambda \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \int dx \sigma_{ijlm}(x, k) [U_B(x) \tau (k_0 - x - i\delta\tau)^{-1} U_B^\dagger(x)]_{\alpha\beta}, \quad (5.4.71)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ijlm}(\kappa, \mathbf{k}) = & - \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa_+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa_- \varepsilon(\kappa_+) \varepsilon(\kappa_-) \delta(\kappa_+^2 - E_+^2) \times \\ & \times \delta(\kappa_-^2 - E_-^2) \delta(\kappa - \kappa_+ + \kappa_-) [f_F(\kappa_+) - f_F(\kappa_-)] \times \\ & \times (\kappa_+ + \varepsilon_+ \tau_3 - \Delta\tau_1)_{ij} (\kappa_- + \varepsilon_- \tau_3 - \Delta\tau_1)_{lm}. \end{aligned} \quad (5.4.72)$$

Здесь $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon(1 \pm k/2)$, $E_{\pm} = E(1 \pm k/2)$. Выполняя интегрирование по κ_{\pm} , находим

$$\begin{aligned} \sigma_{ijlm}(\kappa, \mathbf{k}) = & \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \left(\frac{1 - f_+ - f_-}{4E_+E_-} \{ \delta(\kappa - E_+ - E_-) \times \right. \\ & \times (E_+ + \varepsilon_+ \tau_3 - \Delta\tau_1)_{ij} (E_- - \varepsilon_- \tau_3 + \Delta\tau_1)_{lm} - \\ & - \delta(\kappa + E_+ + E_-) (E_+ - \varepsilon_+ \tau_3 + \Delta\tau_1)_{ij} (E_- + \varepsilon_- \tau_3 - \Delta\tau_1)_{lm} \} - \\ & - \frac{f_+ - f_-}{4E_+E_-} \{ \delta(\kappa - E_+ + E_-) (E_+ + \varepsilon_+ \tau_3 - \Delta\tau_1)_{ij} (E_- + \varepsilon_- \tau_3 - \Delta\tau_1)_{lm} - \\ & \left. - \delta(\kappa + E_+ - E_-) (E_+ - \varepsilon_+ \tau_3 + \Delta\tau_1)_{ij} (E_- - \varepsilon_- \tau_3 + \Delta\tau_1)_{lm} \} \right), \end{aligned} \quad (5.4.73)$$

где $f_{\pm} = f_F(E_{\pm})$.

Запишем теперь спектральное представление для $Q_{ij}^{\alpha\beta}(k)$

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{\alpha\beta}(k) = \hbar \lambda \varepsilon^{\alpha} \varepsilon^{\beta} \int d\kappa \sigma_{ij}(\kappa, \mathbf{k}) [U_B(\kappa) \tau [k_0 - \kappa + \\ + i\delta\tau]^{-1} U_B(\kappa)]_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.4.74)$$

Тогда из (5.4.59) имеем

$$\sigma_{11}(\kappa, \mathbf{k}) = \sigma_{1122}(\kappa, \mathbf{k}), \quad (5.4.75a)$$

$$\sigma_{22}(\kappa, \mathbf{k}) = \sigma_{2211}(\kappa, \mathbf{k}), \quad (5.4.75b)$$

$$\sigma_{12}(\kappa, \mathbf{k}) = \sigma_{1111}(\kappa, \mathbf{k}), \quad (5.4.75b)$$

а также

$$\sigma_{13}(\kappa, \mathbf{k}) = \sigma_{1112}(\kappa, \mathbf{k}), \quad (5.4.76a)$$

$$\sigma_{33}(\kappa, \mathbf{k}) = \sigma_{2212}(\kappa, \mathbf{k}), \quad (5.4.76b)$$

$$\sigma_{33}(\kappa, \mathbf{k}) = -\sigma_{1212}(\kappa, \mathbf{k}). \quad (5.4.76b)$$

Если $\varepsilon_F \gg \omega_D$, то в интегрирование в выражении (5.4.73) вносит вклад лишь малая область ($\lesssim \hbar\omega_D$) вблизи энергии Ферми. Плотность состояний мало меняется в слое энергии толщиной $\hbar\omega_D$ вблизи уровня Ферми. Поэтому слагаемыми вида $E_+ \varepsilon_-$ или $E_- \varepsilon_+$

можно пренебречь, так как вблизи поверхности Ферми они ведут себя как нечетные функции. Опустив эти члены, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\kappa, \mathbf{k}) = \varepsilon(\kappa) \frac{1}{2} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} & \left\{ \frac{(E_+ + E_-)}{E_+ E_-} (E_+ E_- + \varepsilon_+ \varepsilon_-) \times \right. \\ & \times (1 - f_+ - f_-) \delta[\kappa^2 - (E_+ + E_-)^2] - \frac{(E_+ - E_-)}{E_+ E_-} \times \\ & \left. \times (E_+ E_- - \varepsilon_+ \varepsilon_-) (f_+ - f_-) \delta[\kappa^2 - (E_+ - E_-)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.77)$$

Аналогично получим

$$\sigma_{22}(\kappa, \mathbf{k}) = \sigma_{11}(\kappa, \mathbf{k}), \quad (5.4.78)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(\kappa, \mathbf{k}) = \varepsilon(\kappa) \frac{1}{2} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} & \left(\frac{(E_+ + E_-)}{E_+ E_-} \times \right. \\ & \times (E_+ E_- - \varepsilon_+ \varepsilon_-) (1 - f_+ - f_-) \delta[\kappa^2 - \\ & - (E_+ + E_-)^2] - \frac{(E_+ - E_-)}{E_+ E_-} (E_+ E_- + \varepsilon_+ \varepsilon_-) (f_+ - \\ & \left. - f_-) \delta[\kappa^2 - (E_+ - E_-)^2] \right), \end{aligned} \quad (5.4.79)$$

$$\sigma_{13}(\kappa, \mathbf{k}) = \sigma_{23}(\kappa, \mathbf{k}) = -\kappa \Delta \sigma_r(\kappa, \mathbf{k}), \quad (5.4.80)$$

$$\sigma_{33}(\kappa, \mathbf{k}) = -2\Delta^2 \sigma_r(\kappa, \mathbf{k}), \quad (5.4.81)$$

где функция $\sigma_r(\kappa, \mathbf{k})$ определена равенством

$$\begin{aligned} \sigma_r(\kappa, \mathbf{k}) = -\varepsilon(\kappa) \frac{1}{4} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} & \left(\frac{(E_+ + E_-)}{E_+ E_-} \delta[\kappa^2 - \right. \\ & - (E_+ + E_-)^2] (1 - f_+ - f_-) + \\ & \left. + \frac{(E_+ - E_-)}{E_+ E_-} \delta[\kappa^2 - (E_+ - E_-)^2] (f_+ - f_-) \right). \end{aligned} \quad (5.4.82)$$

Полезно также ввести функцию

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta}(k) = \hbar \lambda \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \sigma_r(\kappa, \mathbf{k}) & [U_B(\kappa) \tau(k_0 - \kappa + \\ & + i\delta\tau)^{-1} U_B(\kappa)]_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (5.4.83)$$

так как тогда

$$Q_{33}(k) = -2\Delta^2 R(k), \quad (5.4.84)$$

$$Q_{13}(k) = Q_{23}(k) = -k_0 \Delta R(k). \quad (5.4.85)$$

При выводе (5.4.85) мы прежде всего заменили множитель κ (в выражении (5.4.80)) на $(\kappa - k_0) + k_0$, использовали равенство

$(k_0 - \kappa) (k_0 - \kappa + i\delta\tau)^{-1} = 1$, а также формулу (4.1.88) (т. е. $U_B \tau U_B = \tau$); кроме того, было учтено соотношение

$$\int d\kappa \sigma_r(\kappa, \mathbf{k}) = 0. \quad (5.4.86)$$

Вспомним далее равенство

$$f_B(\kappa) = \frac{1}{e^{\beta\kappa} - 1} = -[1 + f_B(-\kappa)], \quad (5.4.87)$$

откуда следует

$$U_B(-\kappa) = (-1)^{1/2} U_B(\kappa) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$U_B(\kappa) \tau (k_0 - \kappa + i\delta\tau)^{-1} U_B(\kappa) - U_B(-\kappa) \tau (k_0 + \kappa + i\delta\tau)^{-1} U_B(-\kappa) = 2\kappa U_B(\kappa) \tau [k_0^2 - (\kappa - i\delta\tau)^2]^{-1} U_B(\kappa) \quad \text{при } \kappa > 0. \quad (5.4.88)$$

Отсюда с учетом соотношения $\sigma(-\kappa, \mathbf{k}) = -\sigma(\kappa, \mathbf{k})$ находим

$$R^{\alpha\beta}(k) = \hbar\lambda\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta \int_0^\infty d\kappa^2 \theta(\kappa) \sigma_r(\kappa, \mathbf{k}) \times \\ \times \{U_B(\kappa) \tau [k_0^2 - (\kappa - i\delta\tau)^2]^{-1} U_B(\kappa)\}_{\alpha\beta}. \quad (5.4.89)$$

Аналогично из (5.4.74) имеем

$$Q_{ij}^{\alpha\beta}(k) = \hbar\lambda\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta \int_0^\infty d\kappa^2 \theta(\kappa) \sigma_{ij}(\kappa, \mathbf{k}) \times \\ \times \{U_B(\kappa) \tau [k_0^2 - (\kappa - i\delta\tau)^2]^{-1} U_B(\kappa)\}_{\alpha\beta}, \quad (5.4.90)$$

если только ij не равны 13 или 23. Заметим, что

$$Q_{11}(k) = Q_{22}(k), \quad (5.4.91a)$$

$$Q_{13}(k) = Q_{23}(k) = -k_0 \Delta R(k), \quad (5.4.91b)$$

$$Q_{33}(k) = -2\Delta^2 R(k). \quad (5.4.91в)$$

Таким образом, найдены все функции $Q_{ij}^{\alpha\beta}$.

Решения уравнений БС (5.4.66). Теперь уравнения БС (5.4.66) приводятся к следующему виду:

$$D_+(k) = -4e \frac{i}{\lambda} Q_{13}(k) \tau + [Q_{11}(k) + \\ + Q_{33}(k)] \tau D_+(k) - 2Q_{13}(k) \tau D_3(k), \quad (5.4.92a)$$

$$D_3(k) = 2e \frac{i}{\lambda} [Q_{33}(k) + Q_{12}(k)] \tau - 2Q_{13}(k) \tau D_+(k) + \\ + \{Q_{12}(k) + Q_{33}(k)\} \tau D_3(k), \quad (5.4.92б)$$

$$D_-(k) = \{Q_{11}(k) - Q_{33}(k)\} \tau D_-(k), \quad (5.4.92в)$$

где

$$D_{\pm}(k) = D_1(k) \pm D_2(k). \quad (5.4.93)$$

Из равенства (5.4.92в) следует, что $D_-(k) = 0$, откуда находим

$$D_1(k) = D_2(k), \quad (5.4.94)$$

так что

$$D_+(k) = 2D_1(k). \quad (5.4.95)$$

Решая (5.4.92), получаем

$$D_3(k) = 2e \frac{i}{\lambda} \frac{1}{W(k)} \{ [1 - Q_{11}(k) \tau - Q_{33}(k) \tau] \times \\ \times [Q_{33}(k) + Q_{12}(k)] \tau + 4Q_{13}(k) \tau Q_{13}(k) \tau \}, \quad (5.4.96)$$

где

$$W(k) = [1 - Q_{11}(k) \tau - Q_{33}(k) \tau] [1 - Q_{12}(k) \tau - Q_{33}(k) \tau] - \\ - 4Q_{13}(k) \tau Q_{13}(k) \tau. \quad (5.4.97)$$

Особый интерес представляет функция $D_3(k)$, поскольку существует соотношение

$$\Delta^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = \langle 0, \beta | T [\rho^{\alpha}(x_1) \rho^{\beta}(x_2)] | 0, \beta \rangle = \quad (5.4.98)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp [ik(x_1 - x_2) - ik_0(t_1 - t_2)] \left(\frac{e}{\hbar} \tau D_3(k) \right)_{\alpha\beta}, \quad (5.4.99)$$

следующее из (5.4.49), (5.4.51) и (5.4.61в).

Обобщенное уравнение для щели. Для дальнейшего изучения $D_3(k)$ заметим, что уравнение для щели (5.4.39)

$$1 = - \frac{\lambda \hbar}{2} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_l} [1 - 2f_F(E_l)] \quad (5.4.100)$$

можно обобщить, записав его в виде

$$1 = - \frac{\lambda \hbar}{4} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \left(\frac{(E_+ + E_-)}{E_+ E_-} (1 - f_+ - f_-) + \frac{(E_+ - E_-)}{E_+ E_-} (f_+ - f_-) \right). \quad (5.4.101)$$

Действительно, правую часть (5.4.101) можно переписать в виде

$$- \frac{\lambda \hbar}{4} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_+} (1 - 2f_+) - \frac{\lambda \hbar}{4} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_-} (1 - 2f_-);$$

она становится равной правой части (5.4.100) после замены переменных интегрирования $1 + (k/2) \rightarrow 1$ в первом слагаемом и $1 - (k/2) \rightarrow 1$ во втором. При этом мы пренебрегаем изменением значения импульса обрезания, вызванным этой заменой переменных, поскольку по предположению k значительно меньше

дебаевского импульса. Уравнение (5.4.101) можно записать в виде матричного уравнения размерности 2×2 :

$$\tau^{\alpha\beta} = \lambda \hbar \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \int d\mathbf{x}^2 \theta(\mathbf{x}) \sigma_g(\mathbf{x}, k) \{ U_B(\mathbf{x}) \tau [k_0^2 - (\mathbf{x} - i\delta\tau)^2]^{-1} U_B(\mathbf{x}) \}_{\alpha\beta}, \quad (5.4.102)$$

где $\sigma_g(\mathbf{x}, k)$ дается выражением

$$\begin{aligned} \sigma_g(\mathbf{x}, k) = & -\frac{1}{4} \varepsilon(\mathbf{x}) \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \left(\frac{(E_+ + E_-)}{E_+ E_-} [k_0^2 - (E_+ + E_-)^2] \times \right. \\ & \times \delta[\mathbf{x}^2 - (E_+ + E_-)^2] (1 - f_+ - f_-) + \\ & + \frac{(E_+ - E_-)}{E_+ E_-} [k_0^2 - (E_+ - E_-)^2] \delta[\mathbf{x}^2 - \\ & \left. - (E_+ - E_-)^2] (f_+ - f_-) \right). \end{aligned} \quad (5.4.103)$$

Уравнение (5.4.102) называется обобщенным уравнением для щели [7]; при его выводе использовано соотношение

$$\begin{aligned} (k_0^2 - E^2) \delta(\mathbf{x}^2 - E^2) [U_B(\mathbf{x}) \sigma(k_0^2 - E^2 + i\delta\tau)^{-1} U_B(\mathbf{x})] = \\ = \delta(\mathbf{x}^2 - E^2) \tau, \end{aligned} \quad (5.4.104)$$

которое следует из равенства $U_B \tau U_B = \tau$.

Вычисление $D_3(k)$. Как видно из (5.4.96), для вычисления $D_3(k)$ необходимо знать величину $(1 - Q_{11}\tau - Q_{33}\tau)$. Для ее вычисления используем соотношение

$$\begin{aligned} \sigma_g(\mathbf{x}, k) - \sigma_{11}(\mathbf{x}, k) - \sigma_{33}(\mathbf{x}, k) = \\ = -\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{1}{4} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} [k_0^2 - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2] \times \\ \times \left(\frac{(E_+ + E_-)}{E_+ E_-} \delta[\mathbf{x}^2 - (E_+ + E_-)^2] (1 - f_+ - f_-) + \right. \\ \left. + \frac{(E_+ - E_-)}{E_+ E_-} \delta[\mathbf{x}^2 - (E_+ - E_-)^2] (f_+ - f_-) \right). \end{aligned} \quad (5.4.105)$$

Определим $\bar{\omega}(k)$ равенством

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2(k) \sigma_r(\mathbf{x}, k) = & -\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{1}{4} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2 \left(\frac{(E_+ + E_-)^2}{E_+ E_-} \delta[\mathbf{x}^2 - \right. \\ & \left. - (E_+ + E_-)^2] (1 - f_+ - f_-) + \frac{(E_+ - E_-)}{E_+ E_-} \delta[\mathbf{x}^2 - (E_+ - E_-)^2] (f_+ - f_-) \right). \end{aligned} \quad (5.4.106)$$

Сравнивая его с (5.4.82), находим

$$\bar{\omega}(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{k} = 0. \quad (5.4.107)$$

Тогда (5.4.105) принимает вид

$$\sigma_g(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - \sigma_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - \sigma_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = [k_0^2 - \bar{\omega}^2] \sigma_r(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad (5.4.108)$$

где $\bar{\omega}$ обозначает $\bar{\omega}(\mathbf{k})$. Выражение (5.4.108) вместе с (5.4.102) дает

$$1 - Q_{11}(k) \tau - Q_{33}(k) \tau = (k_0^2 - \bar{\omega}^2) R(k) \tau. \quad (5.4.109)$$

Далее из (5.4.97) имеем

$$W(k) = R(k) \tau [k_0^2 - \Gamma(k)], \quad (5.4.110)$$

где

$$\Gamma(k) = \bar{\omega}^2 + 2\Delta^2(k_0^2 + \bar{\omega}^2) R(k) \tau + (k_0^2 - \bar{\omega}^2) Q_{12}(k) \tau. \quad (5.4.111)$$

Аналогично можно вычислить числитель в (5.4.96); в результате приходим к следующему выражению:

$$D_3(k) = 2e \frac{i}{\lambda} \frac{1}{[k_0^2 - \Gamma(k)]} [2\Delta^2(k_0^2 + \bar{\omega}^2) R(k) + (k_0^2 - \bar{\omega}^2) Q_{12}(k)] \tau, \quad (5.4.112)$$

или в другом виде

$$D_3(k) = -2e \frac{i}{\lambda} \frac{\bar{\omega}^2 - \Gamma(k)}{k_0^2 - \Gamma(k)}; \quad (5.4.113)$$

таким образом, вычислена функция $D_3(k)$.

Вычисление двухточечной функции для плотности заряда. Фурье-образ $\Delta^{\alpha\beta}(k)$ функции

$$\langle 0, \beta | T[\rho^\alpha(x), \rho^\beta(y)] | 0, \beta \rangle$$

определяется следующим образом:

$$\langle 0, \beta | T[\rho^\alpha(x), \rho^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \exp[ik(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - ik_0(t_x - t_y)] \Delta^{\alpha\beta}(k). \quad (5.4.114)$$

Фурье-образ $\Delta(k)$ имеет вид

$$\Delta(k) = (-i) \frac{e}{\hbar} \tau D_3(k) = -\frac{2e^2}{\lambda \hbar} \tau \frac{1}{k_0^2 - \Gamma(k)} [\bar{\omega}^2 - \Gamma(k)]. \quad (5.4.115)$$

Из (5.4.111) и спектральных представлений для R и Q_{12} видно, что Γ может быть записана в следующем виде:

$$\Gamma(k) = \Gamma_R(k) - i\pi\sigma_\Gamma(k_0, \mathbf{k}) \tau U_B^2(k_0). \quad (5.4.116)$$

Здесь

$$\Gamma_R(k) = \bar{\omega}^2 + \lambda \hbar \int_0^{\infty} dx^2 \theta(x) [2\Delta^2(k_0^2 + \bar{\omega}^2) \sigma_r(x, k) + (k_0^2 - \bar{\omega}^2) \sigma_{12}(x, k)] \frac{\mathcal{P}}{k_0^2 - x^2}, \quad (5.4.117)$$

$$\sigma_\Gamma(x, k) = \lambda \hbar [2\Delta^2(x^2 + \bar{\omega}^2) \sigma_r(x, k) + (x^2 - \bar{\omega}^2) \sigma_{12}(x, k)]; \quad (5.4.118)$$

в (5.4.117) \mathcal{P} — главное значение интеграла. Теперь $\Delta(k)$ можно получить из (5.4.115) в следующем виде:

$$\Delta(k) = \frac{2e^2}{\lambda \hbar} \frac{1}{(k_0^2 - \Gamma_R)^2 + \pi^2 \sigma_\Gamma^2} [-\{(k_0^2 - \Gamma_R)(\bar{\omega}^2 - \Gamma_R) + \pi^2 \sigma_\Gamma^2\} \tau - i\pi \sigma_\Gamma(k_0^2 - \bar{\omega}^2) U_B^2(k_0)]. \quad (5.4.119)$$

Функция $\Delta(k)$ имеет спектральное представление вида (4.3.24) с $F_A = 0$. Сравнивая мнимую часть выражения (5.4.119) с (4.3.24) и учитывая соотношение $\lim(k_0 \rightarrow \infty) \operatorname{Re} \Delta(k) = 0$, имеем

$$\Delta(k) = \int dx \sigma_\Delta(x, k) U_B(x) \tau [k_0 - x + i\delta\tau]^{-1} U_B(x), \quad (5.4.120)$$

где

$$\sigma_\Delta(x, k) = \frac{2e^2}{\lambda \hbar} \frac{\sigma_\Gamma(x, k)(x^2 - \bar{\omega}^2)}{(x^2 - \Gamma_R)^2 + \pi^2 \sigma_\Gamma^2(x, k)}. \quad (5.4.121)$$

Если величина $\sigma_\Gamma(x, k)$ равна нулю или пренебрежимо мала, имеем

$$\sigma_\Delta(x, k) = \frac{2e^2}{\lambda \hbar} (x^2 - \bar{\omega}^2) \varepsilon(x) \delta(x^2 - \Gamma_R). \quad (5.4.122)$$

Здесь учтено, что $\sigma_r(x, k)$ и $\sigma_{12}(x, k)$ (а следовательно, и $\sigma_\Delta(x, k)$) — нечетные функции от x . В (5.4.121) и (5.4.122) Γ_R обозначает $\Gamma_R(k)$, куда вместо k_0 входит x . Когда

$$k_0^2 - \Gamma_R(k) = 0 \quad \text{при } k_0 = \omega_B(k), \quad (5.4.123)$$

$\Delta(k)$ имеет полюсную особенность при $k_0 = \omega_B(k)$. Здесь вновь мы пренебрегли величиной $\sigma_\Gamma(x, k)$. Используя разложение Тейлора для $\Gamma_R(k)$ вблизи $k_0^2 = \omega_B^2$:

$$\Gamma_R(k) = \omega_B^2(k) + [k_0^2 - \omega_B^2(k)] \Gamma_{R1}(k) + \dots, \quad (5.4.124)$$

находим

$$\sigma_\Delta(x, k) = \frac{2e^2}{\lambda \hbar} \frac{\omega_B^2(k) - \bar{\omega}^2}{1 - \Gamma_{R1}(k)} \varepsilon(x) \delta[x^2 - \omega_B^2(k)]. \quad (5.4.125)$$

Обозначим входящий в (5.4.125) формфактор через $(e^2/\hbar) [\omega_B \eta(\mathbf{k})]^2$; тогда

$$e^2 [\omega_B \eta(\mathbf{k})]^2 = \frac{2e^2}{\lambda} \frac{\omega_B^2(\mathbf{k}) - \bar{\omega}^2}{1 - \Gamma_{R1}(\mathbf{k})}. \quad (5.4.126)$$

Функция $\eta(\mathbf{k})$ конечна при $\mathbf{k} = 0$, поскольку отношение $\bar{\omega}^2/\omega_B^2(\mathbf{k})$, согласно (5.4.107), конечно при $\mathbf{k} = 0$. Из (5.4.124) находим

$$\Gamma_{R1}(\mathbf{k}) = \left(\frac{\partial}{\partial k_0^2} \Gamma_R(k) \right)_{k_0 = \omega_B(\mathbf{k})}. \quad (5.4.127)$$

Тогда выражение (5.4.120) можно переписать в виде

$$\Delta(k) = \frac{e^2}{\hbar} \omega_B^2(\mathbf{k}) \eta^2(\mathbf{k}) U_B(\omega_B) \tau [k_0^2 - (\omega_B - i\delta\tau)^2]^{-1} U_B(\omega_B) + \dots, \quad (5.4.128)$$

где первое слагаемое представляет собой вклад от члена с δ -функцией (т. е. полюсного) в (5.4.125).

Динамическое отображение тока и плотности заряда. Сравним первое слагаемое в правой части (5.4.128) с выражением (4.1.96), дающим представление двухточечной функции свободного бозонного термополевого дублета B^α :

$$B^\alpha(x) = \hbar^{1/2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{[\omega_B(\mathbf{k})]^{1/2}} [B^\alpha(\mathbf{k}) \exp(ikx - i\omega_B t) + B^{\dagger\alpha}(\mathbf{k}) \exp(-ikx + i\omega_B t)]. \quad (5.4.129)$$

Можно убедиться, что динамическое отображение гейзенберговского оператора плотности заряда имеет вид [7]

$$\rho^\alpha(x) = -\frac{e}{\hbar} \eta(\nabla) \dot{B}^\alpha(x) + \dots, \quad (5.4.130)$$

где \dot{B} обозначает $(\partial/\partial t) B$, а многоточие — нормальные произведения более высоких порядков от свободных физических полей.

Докажем теперь, что бозон $B^\alpha(x)$ действительно существует. С этой целью заметим, что (5.4.107) и (5.4.111) приводят к выражению

$$\Gamma(k) = k_0^2 [2\Delta^2 R(k) + Q_{12}(k)] \tau \quad \text{при } k = 0. \quad (5.4.131)$$

Таким образом, уравнение (5.4.123) допускает решение, для которого

$$\omega_B(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{k} = 0, \quad (5.4.132)$$

откуда следует существование бозона B^α , энергия которого не имеет щели. Такой бозон с нулевым импульсом устойчив благодаря условию $\sigma_{\Gamma}(0, 0) = 0$. Этот (голдстоуновский) бозон под-

держивает упорядоченность фазы, а потому называется *фазоном*. Фазон — составная частица, в которую входит электронная пара. Скорость фазона $v(\mathbf{k})$ удобно определить равенством

$$\omega_B(\mathbf{k}) = v(\mathbf{k})|\mathbf{k}|. \quad (5.4.133)$$

Уравнение для фазона имеет вид

$$[(\partial/\partial t)^2 + \omega_B^2(\nabla)] B^\alpha(x) = 0, \quad (5.4.134)$$

где $\omega_B^2(\nabla) = -v^2(\nabla)\nabla^2$.

Из закона сохранения для тока следует

$$\mathbf{j}^\alpha(x) = \frac{e}{\hbar} v^2(\nabla) \eta(\nabla) \nabla B^\alpha(x) + \dots, \quad (5.4.135)$$

где многоточие вновь обозначает нормальные произведения более высоких порядков.

Перестройка фазовой симметрии. Генератор преобразования фазы $\psi^\alpha \rightarrow e^{i\theta}\psi^\alpha$ имеет вид $\varepsilon^\alpha Q^\alpha$ (при $\alpha = 1$ $\varepsilon^\alpha = 1$, при $\alpha = 2$ $\varepsilon^\alpha = -1$), где Q^α — интервал по пространству от плотности заряда:

$$Q^\alpha = \frac{1}{e} \int d^3x \rho^\alpha(x). \quad (5.4.136)$$

Вычисление показывает, что вклад в Q^α дает лишь первое слагаемое динамического отображения (5.4.130):

$$Q^\alpha = -\frac{1}{\hbar} \int d^3x \eta(\nabla) \dot{B}^\alpha(x). \quad (5.4.137)$$

Если оператор $\exp[i\theta Q^\alpha]$ действует на вектор состояния в пространстве $\mathcal{H}[\alpha(\beta), \bar{\alpha}(\beta)]$, то результирующий вектор не остается в этом пространстве (разд. 2.4). Поэтому при определении оператора Q^α необходима особая осторожность; точнее, Q^α может быть определен только с помощью некоторого предельного значения нелокального оператора. Чтобы провести этот предельный переход, введем численную функцию $f(x)$ типа волнового пакета, удовлетворяющую уравнению для фазона

$$[(\partial/\partial t)^2 + \omega_B^2(\nabla)] f(x) = 0. \quad (5.4.138)$$

Введем далее оператор $Q^\alpha(f)$ с помощью соотношения

$$Q^\alpha(f) = -\frac{1}{\hbar} \int d^3x f(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial} \eta(\nabla) B^\alpha(x), \quad (5.4.139)$$

где использовано обозначение $\overleftrightarrow{\partial}_0 = \partial_0 - \overleftarrow{\partial}_0$. Легко видеть, что $Q^\alpha(f)$ не зависит от времени, $\dot{Q}^\alpha(f) = 0$. Тогда генератор Q^α определяется с помощью следующего предельного перехода:

$$\langle a | Q^\alpha | b \rangle = \frac{1}{e} \int d^3x \langle a | \rho^\alpha(x) | b \rangle = \lim_{f \rightarrow 1} \langle a | Q^\alpha(f) | b \rangle. \quad (5.4.140)$$

Здесь $|a\rangle$ и $|b\rangle$ — векторы в пространстве Фока $\mathcal{H}[\alpha(\beta), \tilde{\alpha}(\beta)]$. Используем далее перестановочное соотношение

$$[B^\alpha(x), Q^\beta(f)] = -i\eta(\nabla)f(x)\tau^{\alpha\beta}, \quad (5.4.141)$$

которое приводит к соотношению

$$G^{-1}(f)B^\alpha(x)G(f) = B^\alpha(x) + \eta(\nabla)f(x), \quad (5.4.142)$$

$$\text{где } G(f) = \exp\left(i \sum_{\alpha} \varepsilon^\alpha Q^\alpha(f)\right). \quad (5.4.143)$$

Здесь $\varepsilon^\alpha = 1$ при $\alpha = 1$ и $\varepsilon^\alpha = -1$ при $\alpha = 2$. В пределе $f \rightarrow \theta$ величина $G(f)$ индуцирует сдвиг поля $B^\alpha(x) \rightarrow B^\alpha(x) + \eta(0)\theta$. Поскольку $\varepsilon^\alpha Q^\alpha$ — генератор преобразования фазы $\psi^\alpha(x) \rightarrow \exp(i\theta)\psi^\alpha(x)$, указанный сдвиг поля индуцирует преобразование фазы гейзенберговского поля:

$$\psi^\alpha[x; B + \eta(0)\theta, \varphi^0] = e^{i\theta}\psi^\alpha(x; B, \varphi^0); \quad (5.4.144)$$

здесь B обозначает B^α , а φ^0 обозначает $\varphi^{0\alpha}$.

Полученный результат формулируется обычно следующим образом [8]: фазовая симметрия гейзенберговского поля перестраивается и приводит к сдвигу фазонного поля. Таким образом, мы имеем здесь динамическую перестройку фазовой симметрии. *Соотношение (5.4.144) показывает, каким образом инвариантность фазы находит отражение в свойствах фазона. Иными словами, упорядоченность фазы поддерживается фазоном, что отражает существование дальнедействующей корреляции между электронами.*

Учитывая динамическую перестройку симметрии, приходим к следующему динамическому отображению для ψ :

$$\psi^\alpha(x) = : \exp[i\eta^{-1}(\nabla)B^\alpha(x)] \hat{\psi}(x; \partial B, \varphi^0) :, \quad (5.4.145)$$

где ∂B обозначает действие на B дифференциальных операторов ненулевого порядка. Последнее выражение показывает, каким образом могут быть найдены определенные черты динамических отображений, если известна структура динамической перестройки симметрии.

Влияние кулоновского взаимодействия. Введем теперь кулоновское взаимодействие. Тогда гамильтониан примет вид

$$H_e = H + H_C, \quad (5.4.146)$$

где

$$H = \int d^3x [\psi_\uparrow^\dagger e (\nabla^2) \psi_\uparrow + \psi_\downarrow^\dagger e (\nabla^2) \psi_\downarrow + \lambda \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow - \mu (\psi_\uparrow^\dagger \psi_\uparrow + \psi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow)], \quad (5.4.147)$$

$$H_C = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{\rho^1(x, t) \rho^2(y, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (5.4.148)$$

Гамильтониан H получается из введенного выше лагранжиана (5.4.1), а H_C представляет кулоновское взаимодействие.

Операция тильда дает

$$\tilde{H}_C = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{\rho^2(x, t) \rho^2(y, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (5.4.149)$$

Полный гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_e = H_e - \tilde{H}_e, \quad (5.4.150)$$

где

$$\tilde{H}_e = \tilde{H} + \tilde{H}_C. \quad (5.4.151)$$

Чтобы провести калибровочно инвариантное вычисление влияния кулоновского взаимодействия, используем метод канонического преобразования. Более полная калибровочно инвариантная формулировка дана в гл. 8.

Используем теперь выражение (5.4.137), которое показывает, что основную роль в динамическом отображении $\rho^\alpha(\mathbf{k})$ при малых \mathbf{k} играет только линейный бозонный член в (5.4.130). Поэтому здесь используется приближение, в котором учтен лишь линейный бозонный член в ρ^α .

Пусть π^α обозначает величину, канонически сопряженную B^α . Поскольку \dot{B}^α канонически сопряжена с B^α , выражение (5.4.130) можно записать в виде

$$\rho^\alpha(x) = -\frac{e}{\hbar} \eta(\nabla) \pi^\alpha(x). \quad (5.4.152)$$

Тогда гамильтониан кулоновского взаимодействия принимает вид

$$H_C = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int d^3x \int d^3y \eta(\nabla) \pi^1(x, t) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \eta(\nabla) \pi^1(y, t), \quad (5.4.153)$$

причем тильда-сопряженное к нему \tilde{H}_C получается из H_C посредством замены $\pi^1 \rightarrow \pi^2$.

Согласно (4.1.3), H в слабом смысле равен $H_0(B) + H_0(\varphi^0)$, где $H_0(B)$ — бозонная часть, а $H_0(\varphi^0)$ — квазиэлектронная часть. Для бозонной части имеем

$$\begin{aligned} H_0(B) &= \hbar \int d^3k \omega_B(\mathbf{k}) B^{1\dagger}(\mathbf{k}) B^1(\mathbf{k}) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \{[\pi^1]^2 + [v(\nabla) \nabla B^1]^2\}. \end{aligned} \quad (5.4.154)$$

В итоге получаем слабое соотношение

$$\begin{aligned} H_c &= H_0(\varphi^0) + \frac{1}{2} \int d^3x \{[\pi^1]^2 + [v(\nabla) \nabla B^1]^2\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int d^3x \int d^3y \eta(\nabla) \pi^1(\mathbf{x}, t) \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \eta(\nabla) \pi^1(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (5.4.155)$$

Каноническое перестановочное соотношение имеет вид

$$[B^\alpha(\mathbf{x}, t), \pi^\beta(\mathbf{y}, t)] = i\hbar \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tau^{\alpha\beta}. \quad (5.4.156)$$

Кулоновское взаимодействие изменяет связь между π^α и \dot{B}^α . А именно, каноническое уравнение

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} B^\alpha = [B^\alpha, \hat{H}_c] \quad (5.4.157)$$

приводит к уравнениям

$$\dot{B}^\alpha(\mathbf{x}, t) = \pi^\alpha(\mathbf{x}, t) + \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \eta(\nabla) \int d^3y \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \eta(\nabla) \pi^\alpha(\mathbf{y}, t), \quad (5.4.158)$$

$$\dot{\pi}^\alpha(\mathbf{x}, t) = v^2(\nabla) \nabla^2 B^\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (5.4.159)$$

Из этих двух уравнений имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2(\nabla) \nabla^2\right) B^\alpha(\mathbf{x}, t) - \\ &- \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \eta(\nabla) \int d^3y \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \eta(\nabla) v^2(\nabla) \nabla^2 B^\alpha(\mathbf{y}, t) = 0. \end{aligned} \quad (5.4.160)$$

Заметим, что в последнем слагаемом в (5.4.160) не проводится интегрирование по частям, поскольку $1/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ имеет бесконечный радиус действия. Применяя операцию ∇^2 к обеим частям (5.4.160), находим

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2(\nabla) \nabla^2 + 4\pi \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \eta^2(\nabla) v^2(\nabla)\right] \nabla^2 B^\alpha(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (5.4.161)$$

Это означает, что B^α состоит из двух частей: одна из них удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2(\nabla) \nabla^2 + 4\pi \left(\frac{e}{\hbar} \right)^2 \eta^2(\nabla) v^2(\nabla) \right] B^\alpha = 0, \quad (5.4.162)$$

а другая — уравнению Лапласа

$$\nabla^2 B^\alpha = 0. \quad (5.4.163)$$

Решение уравнения (5.4.162) при малых импульсах дает энергию $\omega_{pl} \equiv (e/\hbar) (4\pi)^{1/2} \eta(0) v(0)$. Как будет видно из дальнейших вычислений, это энергия плазменных колебаний.

Заметим далее, что решения уравнения Лапласа (5.4.163) имеют однородные в пространстве фурье-образы. Поэтому соответствующие моды не наблюдаются как квантовые возбуждения. Иными словами, *единственные наблюдаемые бозонные возбуждения — это плазменные колебания; бесщелевые возбуждения (фазоны) исключаются из числа наблюдаемых за счет кулоновского взаимодействия*. Это явление носит название механизма Андерсона — Хиггса — Киббла [9]. С другой стороны, наличие динамической перестройки симметрии (5.4.144) указывает на то, что фазовое преобразование электронного гейзенберговского поля $\psi \rightarrow \exp(i\theta)\psi$ индуцируется c -численным постоянным сдвигом фазонного поля $B^\alpha(x) \rightarrow B^\alpha(x) + \eta(0)\theta$. Это утверждение остается в силе даже при учете кулоновского взаимодействия. Тем самым фазон, удовлетворяющий уравнению Лапласа, сохраняет свою роль в качестве переносчика фазовой симметрии, несмотря на наличие кулоновского взаимодействия.

В итоге можно утверждать, что учет кулоновского взаимодействия приводит к появлению плазмона; фазон, который удовлетворяет уравнению Лапласа и не может наблюдаться экспериментально как возбуждение, служит все же переносчиком фазового преобразования.

Все приведенные выше соображения подтверждаются более точным и не зависящим от выбора модели рассмотрением в гл. 8.

Если использовать соотношения (5.4.152) и (5.4.159), локальный закон сохранения для тока приводит вновь к выражению (5.4.135).

Характеристическая функция бозонов. Для практических вычислений удобно переписать (5.4.135) в виде

$$\mathbf{j}^\alpha(x) = \frac{\hbar c^2}{4\pi\lambda_L^2 e} c(\nabla) \eta^{-1}(\nabla) \nabla B^\alpha(x) + \dots, \quad (5.4.164)$$

где
$$c(\nabla) = v^2(\nabla) \eta^2(\nabla) / v^2(0) \eta^2(0), \quad (5.4.165)$$

$$\frac{1}{\lambda_L^2} = \frac{4\pi e^2}{\hbar^2 c^2} v^2(0) \eta^2(0). \quad (5.4.166)$$

Заметим, что $c(\nabla)$ нормировано следующим образом:

$$c(0) = 1. \quad (5.4.167)$$

Чтобы учесть поперечный векторный потенциал \mathbf{A}^α , напомним, что $\exp[i\eta^{-1}(\nabla)B^\alpha(x)]$ является фазовым множителем электронного поля. Калибровочное преобразование переводит A_μ в $A_\mu + \partial_\mu \lambda$ и индуцирует появление у электронного поля фазового множителя $\exp[i(e/\hbar c)\lambda]$, который приводит к замене $\eta^{-1}B$ на $\eta^{-1}B + (e/\hbar c)\lambda$. Тогда в динамическом отображении любого калибровочно-инвариантного оператора нужно заменить ∇B^α на $[\nabla B^\alpha - (e/\hbar c)\eta(\nabla)\mathbf{A}^\alpha]$. Выражение (5.4.164) можно переписать в виде

$$\mathbf{j}^\alpha(x) = \frac{c\hbar}{4\pi\lambda_L^2 e} \int d^3y c(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \left(\eta^{-1}(\nabla)\nabla B^\alpha(y) - \frac{e}{\hbar c} A^\alpha(y) \right), \quad (5.4.168)$$

где

$$c(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} c(k) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (5.4.169)$$

причем, согласно (5.4.167),

$$\int d^3x c(\mathbf{x}) = 1. \quad (5.4.170)$$

Обозначим через $\lambda_L(T)$ величину λ_L при температуре T . Вычисление при $T=0$ показывает [7], что

$$\frac{1}{\lambda_L^2(0)} = \frac{8\pi}{3c^2} e^2 v_F^2 N(0) = \quad (5.4.171)$$

$$= 4\pi e^2 n / mc^2, \quad (5.4.172)$$

где n — электронная плотность. Объединяя (5.4.166) и (5.4.172), находим

$$\omega_{pl} = \frac{e}{\hbar} (4\pi)^{1/2} \eta(0) v(0) = \left(\frac{4\pi e^2 n}{m} \right)^{1/2}, \quad (5.4.173)$$

что действительно совпадает с энергией плазменного колебания. В работах [7, 10] показано, что

$$\left(\frac{\lambda_L(0)}{\lambda_L(T)} \right)^2 = 1 + 2 \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{\partial f(E)}{\partial E}, \quad (5.4.174)$$

где ω_D — энергия Дебая.

При нуле температуры величин $\omega_B(\mathbf{k})$ и $\eta(\mathbf{k})$ вычислены численно. Энергия фазона $\omega_B(\mathbf{k})$ ведет себя следующим образом:

$$\omega_B(\mathbf{k}) = \frac{1}{3} v_F^2 [1 - VN(0)] k^2 \quad \text{при малых } \mathbf{k}, \quad (5.4.175)$$

а затем плавно выходит на насыщение, стремясь к значению 2Δ при больших \mathbf{k} .

Функция $c(k)$, определенная выражением (5.4.165), называется характеристической функцией бозонов. Согласно (5.4.164), эта функция является формфактором тока; при $T = 0$ она получена с помощью численного расчета. При значениях $VN(0) = 0,2 - 0,4$ она может быть хорошо описана формулой [11]

$$c(k) = \exp \{-\nu [k\xi_0]^\eta\}, \quad (5.4.176)$$

где $k = |k|$, $\eta = 2,207 - 0,7857VN(0)$, $\nu = 0,559 - 0,4257VN(0)$, ξ_0 — длина когерентности при нуле температуры; она определена выражением

$$\xi_0 = \hbar v_F / \pi \Delta_0, \quad (5.4.177)$$

где Δ_0 — значение Δ при $T = 0$. Формула (5.4.176) достаточно хорошо аппроксимирует численный результат, но при больших k она приводит к слишком быстрому спаданию. Действительно, с помощью аналитических расчетов показано [12], что в асимптотической области $c(k)$ ведет себя согласно соотношению

$$c(k) = (A/k\xi_0) \exp(-Bk\xi_0), \quad (5.4.178)$$

где A и B — некоторые функции $VN(0)$. Если при анализе конкретных задач требуется высокая точность, то иногда оказывается, что отсутствующий в формуле (5.4.176) «хвост» играет решающую роль. В этом случае следует использовать численный результат, а не интерполирующую формулу; соответствующий пример приведен в гл. 11.

Если температура отлична от нуля, вычисление характеристической функции бозонов становится сложным вследствие температурной нестабильности коллективной моды. Первое вычисление такого типа было выполнено еще до того, как была дана формулировка спектрального представления двухточечных функций в термополевой динамике. Поэтому вычисление было приближенным. Численный результат [13], полученный в результате грубого приближения, описывается интерполирующей формулой

$$c(k) = \exp \{-\nu [k\xi(t)]^\eta\}, \quad (5.4.179)$$

где $\eta = -0,7857VN(0) + 2,207$, $\nu = -0,4257VN(0) + 0,559$. Температурная зависимость проявляется только через масштабный фактор ξ :

$$\xi(t) = \gamma(t) \xi_0, \quad (5.4.180)$$

где

$$\gamma(t) = 1 + a [t^n / (1 - t)^m], \quad (5.4.181)$$

$$a = -0,0536VN(0) + 0,3719, \quad (5.4.182a)$$

$$n = 0,3714VN(0) + 3,846, \quad (5.4.182b)$$

$$m = -0,0414VN(0) + 0,556. \quad (5.4.182в)$$

Здесь t обозначает приведенную температуру $t = T/T_c$; результаты получены для $0,2 \leq VN(0) \leq 0,4$. Примечательно, что показатель η практически не зависит от температуры.

Хотя полученная формула для $c(k)$ при отличной от нуля температуре T является результатом грубого приближения, использование (5.4.168) с этой функцией $c(k)$ приводит к разумному согласию с экспериментом в различных расчетах явлений сверхпроводимости. Желательно, однако, вычислять $c(k)$ с помощью новых уточненных формул (5.4.121).

Энергия основного состояния. Вычислим теперь энергию конденсации [5, 6] в пренебрежении электромагнитным взаимодействием. С этой целью рассмотрим среднее значение $\langle 0, \beta | H | 0, \beta \rangle$, где H — гамильтониан системы (5.4.147). Приближение Хартри — Фока дает следующее выражение для плотности энергии основного состояния:

$$W_S = (1/V_S) \langle 0, \beta | H | 0, \beta \rangle = \frac{1}{V_S} \int d^3x [\langle 0, \beta | \psi_{\uparrow}^{\dagger} \varepsilon (\nabla^2) \psi_{\uparrow} + \psi_{\downarrow}^{\dagger} \varepsilon (\nabla^2) \psi_{\downarrow} | 0, \beta \rangle + \lambda \langle 0, \beta | \psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}^{\dagger} | 0, \beta \rangle \langle 0, \beta | \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} | 0, \beta \rangle] = \quad (5.4.183)$$

$$= \frac{1}{V_S} \int d^3x \lim_{t \rightarrow +0} \{-\varepsilon (\nabla^2) \text{Tr} [\tau_3 S^{11}(x)]\}_{x=0} + \frac{1}{\lambda} \Delta^2 + \hbar \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varepsilon_k. \quad (5.4.184)$$

Здесь учтено выражение (5.4.26); V_S — объем системы. Последнее слагаемое в (5.4.184) возникло благодаря перестановке $\psi_{\downarrow}^{\dagger}$ и ψ_{\uparrow} в первом слагаемом в правой части (5.4.183).

Используя уравнение для щели (5.4.39), выражение (5.4.184) можно переписать в виде

$$W_S = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int_c d^4k \text{Tr} [\tau_3 S^{11}(k)] \varepsilon_k - \hbar \Delta^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} [1 - 2f_F(E_k)] + \hbar \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varepsilon_k, \quad (5.4.185)$$

где контур интегрирования c на комплексной k_0 -плоскости — полуокружность в верхней полуплоскости. Согласно (5.4.34), имеем

$$\begin{aligned} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \text{Tr} [\tau_3 S^{11}(k)] \varepsilon_k &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon_k^2}{E_k} [1 - 2f_F(E_k)] = \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k [1 - 2f_F(E_k)] + 2\Delta^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-1}{2E_k} [1 - 2f_F(E_k)]; \end{aligned} \quad (5.4.186)$$

тогда получаем

$$W_S = \hbar \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ (\epsilon_k - E_k) + \frac{\Delta^2}{2E_k} [1 - 2f_F(E_k)] \right\} - \\ - \frac{2\hbar}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_F(E_k) \ln \left(\frac{f_F(E_k)}{1 - f_F(E_k)} \right). \quad (5.4.187)$$

Согласно (4.1.51), свободная энергия Гельмгольца имеет вид

$$F = W_S - \frac{1}{\beta} S. \quad (5.4.188)$$

Из (4.1.52) находим

$$S = -2\hbar \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{ f_F(E_k) \ln f_F(E_k) + [1 - f_F(E_k)] \ln [1 - f_F(E_k)] \} \quad (5.4.189)$$

(множитель 2 обусловлен спиновой степенью свободы). Имеем тогда

$$F = \hbar \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left((\epsilon_k - E_k) + \frac{\Delta^2}{2E_k} [1 - 2f_F(E_k)] \right) - \\ - \frac{2\hbar}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln [1 - f_F(E_k)]. \quad (5.4.190)$$

Свободная энергия Гельмгольца F^n для нормального состояния совпадает с величиной F при значении Δ , равном нулю:

$$F^n = - \frac{2\hbar}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln [1 - f_F(\epsilon_k)]. \quad (5.4.191)$$

Тогда разность между значениями свободной энергии Гельмгольца для металла в нормальном и сверхпроводящем состояниях выражается формулой

$$\bar{F} = F^n - F. \quad (5.4.192)$$

Принято вводить величину $H_c(T)$, определенную уравнением

$$H_c^2(T)/8\pi = \bar{F}. \quad (5.4.193)$$

Из (5.4.190) и (5.4.191) находим при $T = 0$

$$H_c^2(0)/8\pi = \frac{1}{2} N(0) \Delta^2. \quad (5.4.194)$$

Поскольку $\Delta(T)$ имеет бесконечную производную при $T = T_c$, теплоемкость $T (\partial S / \partial T)$ не непрерывна при $T = T_c$; было показано, что

$$\frac{c_s - c_n}{c_n} = 1,43 \quad \text{при} \quad T = T_c, \quad (5.4.195)$$

где c_n и c_s — электронные теплоемкости нормального и сверхпроводящего состояний соответственно.

5.5. Плазменные колебания в нормальных металлах

В разд. 5.4 изучалась система электронов проводимости в сверхпроводниках. В этом разделе мы рассмотрим электронный газ в нормальных металлах. Широко известно, что электронный газ с фоном положительных ионов приводит к появлению коллективной моды (плазменных колебаний), в результате чего фотоны в металлах ведут себя подобно массивным квантам, называемым плазмонами. В этом состоит причина непрозрачности металлов для света. Квантовомеханическое описание плазменных колебаний и их влияния на энергию основного состояния было подробно рассмотрено Бомом и Пайнсом, а также другими авторами [14]. В квантовой электродинамике калибровочная инвариантность является важным свойством симметрии. Если в ходе вычислений делается то или иное приближение, особое внимание следует уделять выполнению требования о сохранении калибровочной инвариантности. В последние годы развита полезная и красивая методика учета калибровочной симметрии [15]. В гл. 8 с помощью этой методики дана самосогласованная формулировка квантовой электродинамики в твердых телах. В этом разделе мы вычислим неприводимую фотонную собственную энергию $\Sigma_{\mu\nu}$ для электромагнитного поля в нормальных металлах при конечных температурах на основе следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{e}{\hbar} A^0 \right) \psi - \frac{\hbar}{2m} \left[\left(\nabla - i \frac{e}{c\hbar} \mathbf{A} \right) \psi^\dagger \left(\nabla + i \frac{e}{c\hbar} \mathbf{A} \right) \psi - k_F^2 \psi^\dagger \psi \right] - en_e A^0 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (5.5.1)$$

где $A_\mu = (\mathbf{A}, A_0)$ — электромагнитный векторный потенциал, ψ — электронное гейзенберговское поле

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}, \quad (5.5.2)$$

($-en_e$) — положительная плотность заряда ионов. Электромагнитное поле $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, где $\partial^0 \equiv (1/c) (\partial/\partial t)$, а $\partial_0 = -(1/c) (\partial/\partial t)$. В этом разделе используется рационализированная система единиц Хевисайда — Лоренца.

Операторы тока и плотности заряда. Плотности тока и заряда даются выражениями

$$j_i = \frac{ie}{2m} (\psi^\dagger \nabla_i \psi - \nabla_i \psi^\dagger \psi) - \frac{e^2}{m\hbar c} A_i \psi^\dagger \psi, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.5.3)$$

$$\rho = -\frac{e}{\hbar} (\psi^\dagger \psi - \hbar n_e). \quad (5.5.4)$$

Предполагая, что плотность n_e постоянна во времени и однородна по пространству, мы исходим из равномерного распределения плотности заряда ионов. Тогда полная электронейтральность требует, чтобы выполнялось условие

$$\langle 0, \beta | \psi^\dagger(x) \psi(x) | 0, \beta \rangle = \hbar n_e. \quad (5.5.5)$$

Посредством операции тильда-сопряжения получаем величины $\tilde{\psi}$, \tilde{A}_μ , $\tilde{\mathcal{L}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\rho}$. Используя поля — термополевые дублеты ψ^α и A_μ^α , имеем

$$\mathbf{j}^\alpha = P_\alpha \left(\frac{ie}{2m} (\psi^{\alpha\dagger} \nabla \psi^\alpha - \nabla \psi^{\alpha\dagger} \psi^\alpha) - \frac{e^2}{m\hbar c} \psi^{\alpha\dagger} \psi^\alpha \mathbf{A}^\alpha \right), \quad (5.5.6)$$

$$\rho^\alpha = -P_\alpha \left(\frac{e}{\hbar} (\psi^{\alpha\dagger} \psi^\alpha - \hbar n_e) \right); \quad (5.5.7)$$

оператор упорядочения P_α определен в (4.2.6).

Двухточечные функции для \mathbf{j} и ρ . В однопетлевом приближении имеем

$$\begin{aligned} J_{ij}^{\alpha\beta}(x-y) &\equiv \langle 0, \beta | T [j_i^\alpha(x) j_j^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = \\ &= - (e/2m)^2 \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta S^{\beta\alpha}(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_i^x \overset{\leftrightarrow}{\partial}_j^y S^{\alpha\beta}(x-y), \end{aligned} \quad (5.5.8a)$$

$$\begin{aligned} J_{i0}^{\alpha\beta}(x-y) &\equiv \langle 0, \beta | T [j_i^\alpha(x) \rho^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = \\ &= (ie^2/2m\hbar) \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta S^{\beta\alpha}(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_i^x S^{\alpha\beta}(x-y), \end{aligned} \quad (5.5.8b)$$

$$\begin{aligned} J_{00}^{\alpha\beta}(x-y) &\equiv \langle 0, \beta | T [\rho^\alpha(x) \rho^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = \\ &= - (e/\hbar)^2 \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta S^{\beta\alpha}(y-x) S^{\alpha\beta}(x-y). \end{aligned} \quad (5.5.8b)$$

Здесь $S(x-y)$ — причинная двухточечная функция физического электрона φ^0 . Поскольку φ^0 удовлетворяет уравнению

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla) \right) \varphi^0 = 0, \quad (5.5.9)$$

$$\text{где} \quad \varepsilon(\nabla) = - \frac{\hbar}{2m} (\nabla^2 + k_F^2), \quad [(5.5.10)]$$

фурье-образ функции $S(x-y)$ дается выражением (4.1.74), так что

$$S_c(k) = U(\varepsilon_k) [k_0 - \varepsilon_k + i\delta\tau]^{-1} U^\dagger(\varepsilon_k), \quad (5.5.11)$$

где $\varepsilon_k = (\hbar/2m) \sqrt{k^2 - k_F^2}$.

Обозначим фурье-образы функций $J_{ij}(x-y)$, $J_{i0}(x-y)$ и $J_{00}(x-y)$ через $J_{ij}(k)$, $J_{i0}(k)$ и $J_{00}(k)$ соответственно:

$$J_{ij}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-y)} J_{ij}(k), \dots \quad (5.5.12)$$

Применяя формулу (4.1.120), получаем

$$J_{00}(k) = e^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \sigma(\mathbf{x}; \varepsilon_+, \varepsilon_-) [U_B(\mathbf{x}) \tau \{k_0 - \mathbf{x} + i\delta\tau\}^{-1} U_B(\mathbf{x})], \quad (5.5.13)$$

$$\text{где } \sigma(\mathbf{x}; \varepsilon_+, \varepsilon_-) = -\delta(\mathbf{x} - \varepsilon_+ + \varepsilon_-) [f_F(\varepsilon_+) - f_F(\varepsilon_-)]. \quad (5.5.14)$$

Здесь

$$\varepsilon_{\pm} \equiv \frac{\hbar}{2m} \left(1 \pm \frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2 - \frac{\hbar}{2m} k_F^2. \quad (5.5.15)$$

Существенно отметить, что ε_{\pm} может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Аналогично можно получить

$$J_{i0}(k) = \frac{e^2 \hbar}{m} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} l_i \int d\mathbf{x} \sigma(\mathbf{x}; \varepsilon_+, \varepsilon_-) [U_B(\mathbf{x}) \tau \{k_0 - \mathbf{x} + i\delta\tau\}^{-1} U_B(\mathbf{x})], \quad (5.5.16)$$

$$J_{ij}(k) = \frac{e^2 \hbar^2}{m^2} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} l_i l_j \int d\mathbf{x} \sigma(\mathbf{x}; \varepsilon_+, \varepsilon_-) \times \\ \times [U_B(\mathbf{x}) \tau \{k_0 - \mathbf{x} + i\delta\tau\}^{-1} U_B(\mathbf{x})], \quad (5.5.17)$$

откуда видно, что $J_{ij}(k) = J_{ji}(k)$. Можно показать, что имеет место также равенство $J_{i0}(k) = J_{0i}(k)$. Если учесть, что $\varepsilon_+ - \varepsilon_- = (\hbar/m)(1 \cdot \mathbf{k})$, то получим

$$\sum_i k_i J_{i0} = e^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} (\varepsilon_+ - \varepsilon_-) \sigma(\mathbf{x}; \varepsilon_+, \varepsilon_-) \times \\ \times [U_B(\mathbf{x}) \tau \{k_0 - \mathbf{x} + i\delta\tau\}^{-1} U_B(\mathbf{x})] = \\ = e^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \hbar \mathbf{l} \sigma(\mathbf{x}; \varepsilon_+, \varepsilon_-) [U_B(\mathbf{x}) \tau \{k_0 - \mathbf{x} + i\delta\tau\}^{-1} U_B(\mathbf{x})]; \quad (5.5.18)$$

отсюда, используя (5.5.13), находим

$$\sum_{\mu} k_{\mu} J_{\mu 0}(k) = -e^2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} [f_F(\varepsilon_-) - f_F(\varepsilon_+)] \tau = 0, \quad (5.5.19a)$$

где $k_{\mu} = (\mathbf{k}, k_0)$. При выводе соотношения (5.5.19a) использовано соотношение $U_B \tau U_B = \tau$.

Аналогичным образом можно доказать соотношение

$$\sum_{\mu} k^{\mu} J_{\mu i}(k) = -\frac{e^2 \hbar}{m} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} l_i [f_F(\varepsilon_-) - f_F(\varepsilon_+)] \tau. \quad (5.5.19b)$$

Для дальнейших вычислений потребуются формулы

$$\int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} l_i f_F(\epsilon_{\pm}) = \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} l_i f_F(\epsilon_l) \mp \frac{1}{2} k_l \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} f_F(\epsilon_l), \quad (5.5.20)$$

$$\int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} l_i [f_F(\epsilon_-) - f_F(\epsilon_+)] = \frac{1}{2} k_i n_l. \quad (5.5.21)$$

При выводе формулы (5.5.20) проведена замена переменной интегрирования $l \rightarrow l \mp (k/2)$, а в (5.5.21) учтено, что из (5.5.5) следует

$$n_i = 2 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} f_F(\epsilon_l). \quad (5.5.22)$$

Тогда соотношения (5.5.19) приводят к выражению

$$\sum_{\mu} k_{\mu} J_{\mu i} = -\frac{e^2 \hbar}{2m} n_e k_i \tau. \quad (5.5.23)$$

Поскольку правая часть (5.5.13) является функцией k^2 и k_0 и обращается в нуль при $k = 0$, можно ввести $\Sigma_0(k)$ с помощью соотношения

$$J_{00}(k) = -k^2 \Sigma_0(k) \tau, \quad (5.5.24)$$

где $\Sigma_0(k)$ — матрица $(\Sigma_0^{\alpha\beta})$ размерности 2×2 . Тогда можно получить

$$\sum_{i,j} k_i k_j J_{ij}(k) = -\frac{e^2 \hbar}{2m} n_e k^2 \tau + \sum_i k_0 k_i J_{0i}(k) = \quad (5.5.25)$$

$$= -\frac{e^2 \hbar}{2m} n_e k^2 \tau + k_0^2 J_{00}(k) = \quad (5.5.26)$$

$$= -\frac{e^2 \hbar}{2m} n_e k^2 \tau - k_0^2 k^2 \Sigma_0(k) \tau, \quad (5.5.27)$$

где использованы равенства (5.5.19а) и (5.5.23).

Из (5.5.27) следует, что J_{ij} имеет вид

$$J_{ij}(k) + \frac{e^2 \hbar}{2m} n_e \delta_{ij} \tau = \left(\Sigma_T(k) T_{ij}(k) - k_0^2 \Sigma_0(k) \frac{k_i k_j}{k^2} \tau \right), \quad (5.5.28)$$

где $\Sigma_T(k)$ — матрица $(\Sigma_T^{\alpha\beta})$ размерности 2×2 , а $T_{ij}(k)$ — проекционный оператор поперечной компоненты:

$$T_{ij}(k) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (5.5.29)$$

Из (5.5.28) следует

$$\Sigma_T(k) = \frac{1}{2} \left(\sum_i J_{ii}(k) + \frac{3}{2} \frac{e^2 \hbar}{2m} n_e + k_0^2 \Sigma_0(k) \right). \quad (5.5.30)$$

Матрицы Σ_T и Σ_0 могут быть вычислены с помощью (5.5.24) и (5.5.30). Из (5.5.19a) имеем

$$k_i J_{i0}(k) = k_0 J_{00}(k) = -k_0 k^2 \Sigma_0(k) \tau. \quad (5.5.31)$$

Поперечные и продольные плазмоны. Обозначим физическое фотонное (плазмонное) поле в нормальных металлах через U_μ^α ($\alpha = 1, 2$):

$$A_\mu^\alpha(x) = u_\mu^\alpha(x) + \dots \quad (5.5.32)$$

Поперечные и продольные плазмоны обозначим через $\mathbf{u}^{\alpha T}$ и $\mathbf{u}^{\alpha L}$ соответственно. В однопетлевом приближении получим следующее динамическое отображение для фурье-образов \mathbf{j}^α и ρ^α :

$$\mathbf{j}^{\alpha T}(k) = - \sum_{\beta} \Sigma_T^{\alpha\beta}(k) \frac{\mathbf{u}^{\beta T}}{c}(k) + \dots, \quad (5.5.33)$$

$$\mathbf{j}^{\alpha L}(k) = \sum_{\beta} \left(k_0^2 \Sigma_0^{\alpha\beta}(k) \frac{\mathbf{u}^{\alpha L}}{c}(k) - k_0 \mathbf{k} \Sigma_0^{\alpha\beta}(k) u_0^\beta(k) \right) + \dots, \quad (5.5.34)$$

$$\rho^\alpha(k) = - \sum_{\beta} \left[k^2 \Sigma_0^{\alpha\beta}(k) u_0^\beta(k) - \Sigma_0^{\alpha\beta}(k) k_0 \left(\mathbf{k} \frac{\mathbf{u}^\beta}{c} \right) \right] + \dots \quad (5.5.35)$$

В выражениях (5.5.33)—(5.5.35) многоточия обозначают слагаемые, отличные от линейного плазмонного слагаемого. При выводе (5.5.33)—(5.5.35) использованы формулы (5.5.24), (5.5.28), (5.5.31), а также соотношение между $J_\mu(x)$ и $A_\mu(x)$ из теории линейного отклика. Символы $\mathbf{j}^{\alpha T}$ и $\mathbf{j}^{\alpha L}$ обозначают поперечную и продольную части \mathbf{j}^α соответственно.

С другой стороны, из уравнений Максвелла следуют соотношения

$$-\partial^2 \mathbf{A}^T = \frac{1}{c} \mathbf{j}^T, \quad (5.5.36a)$$

$$\partial_0^2 \mathbf{A}^L - \partial_0 \nabla \mathbf{A}_0 = \frac{1}{c} \mathbf{j}^L, \quad (5.5.36b)$$

$$\partial_0 (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A_0 = \rho, \quad (5.5.36b)$$

а также тильда-сопряженные к ним. Эти соотношения вместе с динамическими отображениями (5.5.33)—(5.5.35) приводят к следующим уравнениям плазменных колебаний [16]:

$$\sum_{\beta} \left([\mathbf{p}^2 - (p_0/c)^2] \delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} \Sigma_T^{\alpha\beta}(p) \right) \mathbf{u}^{\beta T}(p) = 0, \quad (5.5.37a)$$

$$\sum_{\beta} [\delta^{\alpha\beta} + \Sigma_0^{\alpha\beta}(p)] \mathbf{u}^{\beta L}(p) = 0, \quad (5.5.37b)$$

$$\sum_{\beta} [\delta^{\alpha\beta} + \Sigma_0^{\alpha\beta}(p)] u_0^\beta(p) = 0. \quad (5.5.37b)$$

Из этих уравнений видно, что $\Sigma_T(p)$ и $(1/p_0^2) \Sigma_0(p)$ — неприводимые собственно-энергетические части поперечных и продольных

фотонов. Приведенные выше соотношения определяют энергии плазмонов. При нулевой температуре вычисления дают [14]

$$\Sigma_0(k) = -\frac{1}{k_0^2} \omega_{pl}^2 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{m^2} \frac{k^2}{k_0^2} + \dots \right), \quad (5.5.38a)$$

$$\Sigma_T(k) = \omega_{pl}^2 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{k_F^2}{m^2} \frac{k^2}{k_0^2} + \dots \right) \quad (5.5.38b)$$

при малых k , где

$$\omega_{pl}^2 = e^2 n_e / m. \quad (5.5.39)$$

Таким образом, энергии поперечного плазмона E_T и продольного плазмона E_L при нулевой температуре даются выражениями

$$E_L^2(k) = \omega_{pl}^2 + \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{m^2} k^2 + \dots, \quad (5.5.40a)$$

$$E_T^2(k) = \omega_{pl}^2 + \left(c^2 + \frac{1}{5} \frac{k_F^2}{m^2} \right) k^2 + \dots \quad (5.5.40b)$$

при малых k .

ЛИТЕРАТУРА

1. Schrieffer J. R., Theory of superconductivity, Benjamin, London, 1969.
[Имеется перевод: Шриффер Дж. Теория сверхпроводимости. — М.: Наука, 1970.]
2. Polarons and excitons. Ed. by C. G. Kuper and G. T. Whitefield, Oliver and Boyd, London, 1962;
Polarons in ionic crystals and polar semiconductors. Ed. by J. Devreese, North-Holland, Amsterdam, 1972.
3. Holstein T., Primakoff H., Phys. Rev., **58**, 1098 (1940).
4. Dyson F. J., Phys. Rev., **102**, 1217 (1956).
5. Bardeen J., Cooper L., Schrieffer J., Phys. Rev., **108**, 1175 (1957).
6. Superconductivity. Ed. by R. D. Parks, Marcel Dekker, New York, 1969.
7. Leplae L., Umezawa H., Mancini F., Phys. Rep., **10C**, 151 (1974).
8. Umezawa H., Nuovo Cim., **40**, 450 (1965).
9. Anderson P. W., Phys. Rev., **110**, 827; 1900 (1958);
Yosida K., Progr. Theor. Phys., **21**, 731 (1959);
Higgs P., Phys. Rev., **45**, 1156 (1960);
Kibble T. W. B., Phys. Rev., **155**, 1554 (1967).
10. Richayzen G. — in: Superconductivity, ed. by R. D. Parks, Marcel Dekker, New York, 1969.
11. Leplae L., Shah M. N., Umezawa H., Physica, **80B**, 493 (1975).
12. Mancini F., Physica, **81B**, 119 (1976).
13. Shapira I., Shah M. N., Umezawa H., Physica, **84B**, 213 (1976).
14. Bohm D., Pines D., Phys. Rev., **82**, 625 (1951); **85**, 338 (1952); **92**, 609 (1953);
Gell-Mann M., Brueckner K., Phys. Rev., **106**, 364 (1957);
Sawada K., Phys. Rev., **106**, 372 (1957);
Sawada K., Brueckner K., Fukuda N., Brout R., Phys. Rev., **108**, 507 (1957).
15. Nakanishi N., Progr. Theor. Phys., **35**, 1111 (1966); **49**, 640 (1973); **50**, 1388 (1973);
Lautrup B., Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **35**, 1 (1967).
16. Matsumoto H., Semenoff G., Tachiki M., Umezawa H., Fortschritte der Phys., **28**, 67 (1980).

ИНВАРИАНТНОСТЬ И НЁТЕРОВСКИЙ ТОК

6.1. Нётеровский ток и соотношения Уорда—Такахаша

При анализе систем многих частиц важную роль играет иногда инвариантность теории. Именно из-за требований инвариантности возникают определенные соотношения между матричными элементами операторов поля, отвечающих некоторым существенным свойствам таких систем. В этой главе дается общий метод рассмотрения инвариантности в рамках квантовой теории поля. Чтобы продемонстрировать применение этого метода, в последнем разделе обсуждается его применение к ферромагнетизму коллективизированных электронов.

Нётеровский ток и лагранжиан. Рассмотрим систему, динамика которой определяется плотностью лагранжиана $\mathcal{L} [\psi(x), \partial_\mu \psi(x)]$. Здесь $\psi(x)$ — набор гейзенберговских полей ψ_i ($i = 1, 2, \dots$). Непрерывное преобразование

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x) + \theta \delta \psi(x), \quad (6.1.1)$$

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \theta \delta x_\mu, \quad (6.1.2)$$

где θ — бесконечно малая константа, приводит к следующему изменению лагранжиана:

$$d^4 x' \mathcal{L}(\psi'(x'), \partial'_\mu \psi'(x')) - d^4 x \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)) = \theta d^4 x \delta \mathcal{L}(x). \quad (6.1.3)$$

Здесь использованы четырехмерные обозначения

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x_0 = t, \quad \partial^\mu = (\partial/\partial t, \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3), \quad \partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu,$$

$$-g_{00} = g_{ii} = 1, \text{ в остальных случаях } g_{\mu\nu} = 0.$$

Эта специфическая форма преобразования лагранжиана приводит к ряду соотношений между многоточечными функциями $\langle 0 | T [\psi(x), \dots] | 0 \rangle$, которые называются соотношениями Уорда—Такахаша (УТ). Соотношения УТ играют важную роль при анализе тех свойств систем, которые основаны на определенной симметрии динамических уравнений. Как мы увидим, соотношения УТ основаны на канонических перестановочных соотношениях для операторов, взятых в один и тот же момент времени. Начнем

со случая, когда $\delta\psi(x)$ в выражении (6.1.1) — линейное преобразование с постоянными численными коэффициентами:

$$\delta\psi_i(x) = c_{ij}\psi_j(x). \quad (6.1.4)$$

Определим

$$\theta\delta^0\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x). \quad (6.1.5)$$

Поскольку

$$\psi'(x') = \psi'(x) + \theta\delta x_\mu\partial^\mu\psi(x), \quad (6.1.6)$$

справедливо равенство

$$\delta^0\psi(x) = \delta\psi(x) - \delta x_\mu\partial^\mu\psi(x). \quad (6.1.7)$$

Если мы учтем соотношение

$$\partial(x'_1x'_2x'_3x'_0)/\partial(x_1x_2x_3x_0) = 1 + \theta\delta^\lambda\delta x_\lambda, \quad (6.1.8)$$

то из соотношения (6.1.3) получим

$$\theta\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}[\psi'(x'), \partial'_\mu\psi'(x')] - \mathcal{L}[\psi(x), \partial_\mu\psi(x)] + \theta(\partial^\lambda\delta x_\lambda)\mathcal{L}(x), \quad (6.1.9)$$

где $\mathcal{L}(x)$ обозначает $\mathcal{L}[\psi(x), \partial_\mu\psi(x)]$. Поскольку

$$\partial'_\mu\psi'(x') = \partial_\mu\psi(x) + \theta\partial_\mu\delta\psi(x) - \theta\partial^\nu\psi(x)\partial_\mu\delta x_\nu, \quad (6.1.10)$$

из равенства (6.1.9) следует

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\mu}\partial_\mu\delta\psi(x) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\mu}\partial^\nu\psi(x)\partial_\mu\delta x_\nu + \partial^\nu\delta x_\nu\mathcal{L} = \\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\mu}\delta\psi(x)\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\mu}\partial^\nu\psi(x)\partial_\mu\delta x_\nu + \partial^\nu\delta x_\nu\mathcal{L}, \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

где использовано уравнение Гейзенберга

$$\partial\mathcal{L}/\partial\psi = \partial_\mu\partial\mathcal{L}/\partial\psi_\mu. \quad (6.1.12)$$

В приведенных выше соотношениях

$$\psi_\mu \equiv \partial_\mu\psi. \quad (6.1.13)$$

Используя уравнение (6.1.12), получаем

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\mu}\partial_\nu\psi\right\} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\mu}\partial_\mu\partial_\nu\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\partial_\nu\psi = \partial_\nu\mathcal{L}[\psi(x), \partial_\mu\psi(x)]. \quad (6.1.14)$$

Таким образом, выражение (6.1.11) можно переписать в виде

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\mu}(\delta\psi - \partial^\nu\psi\delta x_\nu) + \delta x^\mu\mathcal{L}\right\}. \quad (6.1.15)$$

Учитывая соотношение (6.1.7), получаем

$$\partial^\mu N_\mu = \delta\mathcal{L}(x), \quad (6.1.16)$$

где

$$N_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\mu}\delta^0\psi + \delta x_\mu\mathcal{L}. \quad (6.1.17)$$

Из соотношения (6.1.16) следует, что изменение лагранжиана равно дивергенции тока N_μ . Этот ток называется нётеровским током [1].

Нётеровский ток и генератор. Заметим, что поле, определенное соотношением

$$\pi(x) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}^0, \quad (6.1.18)$$

является канонически сопряженным полю $\psi(x)$:

$$[\pi(x), \psi(y)]_{\pm} \delta(t_x - t_y) = -i\hbar\delta^{(4)}(x - y).$$

Таким образом, из соотношения (6.1.17) следует

$$\begin{aligned} N_0(x) &= \pi_i(x) \{c_{ij}\dot{\psi}_j(x) - \nabla\psi_i(x) \delta x - \dot{\psi}_i \delta x_0\} + \delta x_0 \mathcal{L} = \\ &= \pi_i(x) \{c_{ij}\dot{\psi}_j(x) - \nabla\psi_i(x) \delta x\} - \delta x_0 h(x), \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

где $\dot{\psi} = \partial\psi/\partial t$, а $h(x)$ — плотность гамильтониана:

$$h = \pi_i \dot{\psi}_i - \mathcal{L}. \quad (6.1.20)$$

Выражение (6.1.19) вместе с одновременными каноническими перестановочными соотношениями приводят к соотношению

$$\begin{aligned} [\psi_i(x), N(t)] \delta(t - t_x) &= i\hbar\delta(t - t_x) \{c_{ij}\dot{\psi}_j(x) - \\ &- \nabla\psi_i(x) \delta x - \dot{\psi}_i \delta x_0\} = i\hbar\delta(t - t_x) \delta^0\psi_i(x), \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

$$\text{где} \quad N(t) = \int d^3x N_0(x). \quad (6.1.22)$$

Приведенное соотношение показывает, что $N(t)$ генерирует преобразование вида $\exp\{i\theta N\}\psi \exp\{-i\theta N\} = \psi + \theta\delta^0\psi + \dots$. При выводе соотношения (6.1.21) мы использовали каноническое уравнение

$$i\hbar\dot{\psi} = [\psi, H],$$

где H — гамильтониан

$$H = \int d^3x h(x). \quad (6.1.23)$$

Вывод соотношений Уорда—Такахаша. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | T [N(t), \psi(x_1) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle &= \sum_{a=1}^n \delta(t - t_a) \langle 0 | T [\psi(x_1) \dots \\ &\dots [N(t), \psi(x_a)] \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle + \langle 0 | T [\dot{N}(t), \psi(x_1) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

Поскольку из соотношения (6.1.16) следует

$$\dot{N} = \int d^3x \delta\mathcal{L}(x), \quad (6.1.25)$$

соотношение (6.1.24) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | T [N(t), \psi(x_1) \dots] | 0 \rangle = -i\hbar \sum_{a=1}^n \delta(t - t_a) \langle 0 | T [\psi(x_1) \dots \dots \delta^0 \psi(x_a) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle + \int d^3x \langle 0 | T [\delta \mathcal{L}(x), \psi(x_1) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle. \quad (6.1.26)$$

Выполним в обеих частях соотношения (6.1.26) интегрирование по t (в пределах от $-\infty$ до $+\infty$). Если $n \equiv \langle 0 | \dot{N} | 0 \rangle \neq 0$, то N содержит неоператорный (численный) член. Из-за него при интегрировании по t в левой части возникает бесконечность. С другой стороны, замена $N \rightarrow N - \langle 0 | N | 0 \rangle$ не изменяет соотношения (6.1.21). Следовательно, соотношение (6.1.26) не изменится, если провести следующую замену:

$$N(t) \rightarrow N(t) - \langle 0 | N(t) | 0 \rangle, \quad (6.1.27a)$$

$$\delta \mathcal{L} \rightarrow \delta \mathcal{L} - \langle 0 | \delta \mathcal{L} | 0 \rangle. \quad (6.1.27b)$$

Во всех формулах этой книги принято, что такая замена выполнена во всех случаях, когда $n \neq 0$ (и, следовательно, $\langle 0 | \delta \mathcal{L} | 0 \rangle \neq 0$). Даже если эта замена проведена, может оказаться, что, когда динамическое отображение N содержит линейный по *безмассовому* физическому полю член (скажем, χ^0), при интегрировании левой части может возникнуть неоднозначность из-за дальнедействующей природы пропагатора безмассового поля. В этом случае используется следующий прием: к лагранжиану добавляется небольшой член $\mathcal{L}_\varepsilon(x)$, чтобы у χ^0 появилась собственная энергия. В конце вычислений переходят к пределу $\mathcal{L}_\varepsilon(x) \rightarrow 0$. В разд. 6.3 мы поймем физический смысл члена $\mathcal{L}_\varepsilon(x)$. С помощью этого приема интегрирование по времени левой части выражения (6.1.26) дает нуль, и результирующее соотношение имеет вид

$$\sum_a i\hbar \langle 0 | T [\psi(x_1) \dots \delta^0 \psi(x_a) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle = \int d^4x \langle 0 | T [\delta \mathcal{L}(x) \psi(x_1) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle. \quad (6.1.28)$$

Это соотношение Уорда — Такахаша (УТ)¹⁾, связанное с преобразованиями (6.1.1), (6.1.2).

¹⁾ Исторически первым было получено соотношение для векторной вершины электромагнитного взаимодействия при нулевом передаваемом импульсе. Это соотношение было названо тождеством Уорда [2]. Соотношение при конечном передаваемом импульсе выведено Такахаша [3]. В более поздних работах название «соотношение Уорда—Такахаша» используется в более широком смысле: любое соотношение, основанное на специфическом поведении лагранжиана при некотором преобразовании, называется соотношением УТ.

Компактная запись соотношений Уорда—Такахаша. Рассмотрим сначала случай, когда $\psi_i(x)$ — бозонные поля, и введем

$$\overline{\mathcal{L}}_J = \int d^4x J_i(x) \psi_i(x), \quad (6.1.29)$$

где $J_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) — численные функции, разложимые в ряд Фурье. Преобразование типа (6.1.1) и (6.1.2) приводит к замене $\overline{\mathcal{L}}_J$ на

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}_J &= \int d^4x' J_i(x') \psi'_i(x') = \int d^4x J_i(x) \psi'_i(x) = \\ &= \int d^4x J_i(x) \psi_i(x) + \theta \int d^4x J_i(x) \delta^0 \psi_i(x) = \overline{\mathcal{L}}_J + \theta \int d^4x J_i(x) \delta^0 \psi_i(x), \end{aligned} \quad (6.1.30)$$

откуда следует

$$\delta \overline{\mathcal{L}}_J \equiv (1/\theta)(\overline{\mathcal{L}}'_J - \overline{\mathcal{L}}_J) = \quad (6.1.31)$$

$$= \int d^4x J_i(x) \delta^0 \psi_i(x). \quad (6.1.32)$$

Умножая обе части уравнения (6.1.28) на $J(x_1) \dots J(x_n)$ и интегрируя по $x_1 \dots x_n$, получаем

$$i\hbar n \langle 0 | T [\delta \overline{\mathcal{L}}_J (\overline{\mathcal{L}}_J)^{n-1}] | 0 \rangle = \int d^4x \langle 0 | T [\delta \mathcal{L}(x) (\overline{\mathcal{L}}_J)^n] | 0 \rangle, \quad (6.1.33)$$

что приводит к компактной записи соотношения УТ:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left[\frac{i}{\hbar} \delta \overline{\mathcal{L}}_J \exp \left(\frac{i}{\hbar} \overline{\mathcal{L}}_J \right) \right] | 0 \rangle = \\ = - \int d^4x \langle 0 | T \left[\frac{i}{\hbar} \delta \mathcal{L}(x) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \overline{\mathcal{L}}_J \right) \right] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.1.34)$$

Чтобы увидеть, каким образом из соотношения (6.1.34) получается соотношение УТ, определим функциональную производную

$$\frac{\delta J_i(y)}{\delta J_j(x)} = \delta_{ij} \delta^{(4)}(x - y). \quad (6.1.35)$$

Поддействовав на обе части соотношения (6.1.34) оператором $(-i\hbar) \delta/\delta J(x_1)$ и перейдя к пределу при $J \rightarrow 0$, получим соотношение

$$\langle 0 | \delta^0 \psi(x_1) | 0 \rangle = - \int d^4x \langle 0 | T \left(\frac{i}{\hbar} \delta \mathcal{L}(x) \psi(x_1) \right) | 0 \rangle, \quad (6.1.36)$$

которое является соотношением УТ (6.1.28) для $n = 1$. Если на обе стороны (6.1.34) подействовать оператором $(-i\hbar)^2 [\delta/\delta J(x_1)] [\delta/\delta J(x_2)]$ и перейти к пределу при $J \rightarrow 0$, получим соотношение

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\delta^0 \psi(x_1), \psi(x_2)] | 0 \rangle + \langle 0 | T [\psi(x_1), \delta^0 \psi(x_2)] | 0 \rangle = \\ = - \int d^4x \langle 0 | T \left(\frac{i}{\hbar} \delta \mathcal{L}(x), \psi(x_1), \psi(x_2) \right) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (6.1.37)$$

которое является соотношением УТ (6.1.28) для $n = 2$. Таким образом, все соотношения УТ могут быть получены из (6.1.34).

Резюмируя, можно сказать, что если учесть преобразования (6.1.1), (6.1.2), то сначала следует вычислить $\delta^0\psi(x)$ и $\delta\mathcal{L}$, после чего сразу можно получить соотношение УТ (6.1.34)¹⁾.

Если операторы $\psi_i(x)$ — фермионные поля, соотношение УТ (6.1.34) остается справедливым, если $J_i(x)$ можно считать внешними источниками фермионного типа, т. е. $J_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) антикоммутируют (а не коммутируют) друг с другом, а также с любым фермионным полем. Таким образом, $\delta/\delta J_i(x)$ также антикоммутируют с фермионными полями. Соотношение (6.1.35) справедливо даже в том случае, когда $J_i(x)$ — источники фермионного типа.

Обобщение соотношений УТ. Мы можем распространить изложенное выше рассмотрение на преобразования вида

$$\delta\psi_i(x) = c_{ij}(x) F_j[\psi(x)] + d_i(x), \quad (6.1.38)$$

где $c_{ij}(x)$ и $d_i(x)$ — некоторые числовые функции от x_μ , а операторы $F_j[\psi(x)]$ — линейные комбинации произведений $\psi(x)$, для которых

$$[\psi(x), F_j[\psi(y)]]_{\pm} \delta(t_x - t_y) = 0. \quad (6.1.39)$$

Тогда нётеровский ток, описываемый соотношениями (6.1.17) и (6.1.19), равен

$$N_0(x) = \pi_i(x) \{c_{ij}(x) F_j[\psi(x)] + d_i(x) - \nabla\psi(x) \delta\mathbf{x}\} - \delta x_0 h(x), \quad (6.1.40)$$

откуда следует соотношение (6.1.21), т. е.

$$[\psi_i(x), N(t)] \delta(t - t_x) = i\hbar \delta(t - t_x) \delta^0\psi_i(x). \quad (6.1.41)$$

Следовательно, ни одна из формул (6.1.25)—(6.1.37) не требует изменений. В частности, не требует изменений соотношение УТ (6.1.34). Калибровочное преобразование — пример преобразования, описываемого соотношением (6.1.38).

Если ψ комплексно, $\overline{\mathcal{L}}_J$ и $\delta\overline{\mathcal{L}}_J$ нужно заменить на

$$\overline{\mathcal{L}}_J = \int d^4x (J_i^\dagger(x) \psi_i(x) + \psi_i^\dagger(x) J_i(x)), \quad (6.1.42a)$$

$$\delta\overline{\mathcal{L}}_J = \int d^4x [J_i^\dagger(x) \delta^0\psi_i(x) + \delta^0\psi_i^\dagger(x) J_i(x)]. \quad (6.1.42b)$$

Важно отметить, что соотношению УТ (6.1.34) нельзя доверять, когда лагранжиан не допускает описания в рамках канонического

¹⁾ Читатели, знакомые с функциональным формализмом квантовой теории поля, могут сразу заметить, что этот метод формально эквивалентен выводу соотношений УТ в рамках функционального формализма. Действительно, в этом формализме (6.1.34) превращается в соотношение УТ, если заменить выражение $\langle 0| T$ -скобка $|0\rangle$ функциональным интегралом [3]. Приведенный здесь вывод соотношения УТ сходен с выводом в работах [5], где интегрирование по времени ведется с использованием генератора N при $t = \pm\infty$, а не $\mathcal{L}_\varepsilon(x)$.

формализма, поскольку при выводе (6.1.21) использованы одновременные перестановочные соотношения.

Соотношения Уорда—Такахаши для локального тока. Нётеровский ток введен с помощью выражения (6.1.17); его дивергенция удовлетворяет соотношению (6.1.16). Теперь мы покажем, что n -точечные функции, содержащие $N_\mu(x)$, удовлетворяют некоторому условию, наложенному на их дивергенцию, которое также называется соотношением УТ.

Используя определение T -произведения, получаем

$$\begin{aligned} \partial^\mu \langle 0 | T [N_\mu(x), \psi(x_1) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle = \sum_{a=1}^n \delta(t - t_a) \langle 0 | T [\psi(x_1) \dots \\ \dots [N_0(x), \psi(x_a)] \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | T [\delta \mathcal{L}(x), \psi(x_1) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.1.43)$$

Если рассмотреть выражение (6.1.19), то можно убедиться, что общая форма коммутатора $[N_0(x), \psi(y)]$ имеет вид

$$[N_0(x), \psi(y)]_{t_x=t_y} = -i\hbar \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^0 \psi(x) + i\hbar \delta x_0 \nabla [\mathbf{F}(x) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})], \quad (6.1.44)$$

где $\mathbf{F}(x)$ — некоторый оператор. Это выражение следует из соотношения

$$[\psi(x), h(y)]_{t_x=t_y} = i\hbar \{ \dot{\psi}(x) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \nabla [\mathbf{F}(x) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \}, \quad (6.1.45)$$

являющегося следствием уравнения

$$[\psi(x), H] = i\hbar \dot{\psi}(x). \quad (6.1.46)$$

Если $\delta x_0 = 0$ или $\mathbf{F} = 0$, что в большинстве случаев справедливо, условие (6.1.43) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \partial^\mu \langle 0 | T [N_\mu(x), \psi(x_1) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle = -i\hbar \sum_{a=1}^n \delta^{(4)}(x - x_a) \langle 0 | T [\psi(x_1) \dots \\ \dots \delta^0 \psi(x_a) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle + \langle 0 | T [\delta \mathcal{L}(x), \psi(x_1) \dots \psi(x_n)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.1.47)$$

Это локальная форма соотношений УТ.

6.2. Соотношения Уорда—Такахаши при конечных температурах

Тильда-сопряжение. Как показано в гл. 5, когда мы рассматриваем систему при ненулевой температуре, кроме гейзенберговского поля ψ возникает тильда-сопряженное ему поле $\tilde{\psi}$.

Соотношения Уорда-Такахаши. В этом случае соотношение УТ (6.1.34) изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | T \left[\frac{i}{\hbar} \delta \hat{\mathcal{L}}_J \exp \left(\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{L}}_J \right) \right] | 0, \beta \rangle = \\ = - \int d^4x \langle 0, \beta | T \left[\frac{i}{\hbar} \delta \hat{\mathcal{L}}(x) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{L}}_J \right) \right] | 0, \beta \rangle, \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

где
$$\hat{\mathcal{L}}_J = \int d^4x [J_i^{\alpha+}(x) \psi_i^\alpha(x) + \psi_i^{\alpha+}(x) J_i^\alpha(x)], \quad (6.2.2)$$

$$\delta \hat{\mathcal{L}}_J(x) = \int d^4x [J_i^{\alpha+}(x) \delta^0 \psi_i^\alpha(x) + \delta^0 \psi_i^{\alpha+}(x) J_i^\alpha(x)], \quad (6.2.3)$$

$$\delta \hat{\mathcal{L}}(x) = \delta \mathcal{L}(x) - \delta \tilde{\mathcal{L}}(x). \quad (6.2.4)$$

Здесь мы использовали введенное в гл. 4 обозначение термополевого дублета

$$\psi_i^1 = \psi_i; \quad \psi_i^2 = \tilde{\psi}_i^\dagger. \quad (6.2.5)$$

В выражении (6.2.4) $\delta \mathcal{L}$ и $\delta \tilde{\mathcal{L}}$ — изменения \mathcal{L} и $\tilde{\mathcal{L}}$ соответственно. Эти изменения выражаются формулой (6.1.11). Соотношение УТ (6.1.28) легко обобщить на случай конечных температур, если ψ обозначает ψ^α и $\psi^{\alpha+}$, $\delta \mathcal{L}$ заменено на $\delta \hat{\mathcal{L}}$, а $|0\rangle$ — на $|0, \beta\rangle$. Тогда из выражения (6.1.28) сразу следует выражение (6.2.1).

6.3. Простой пример соотношения Уорда—Такахаши

В этом разделе мы рассмотрим простой пример соотношения УТ, чтобы дать общее представление о том, как эти соотношения можно использовать.

Простая модель описывается лагранжианом $\mathcal{L} = [\mathcal{L}_0(\psi, \psi^\dagger) + C(\psi + \psi^\dagger)]$, где ψ — комплексное скалярное поле, C — действительная постоянная, а $\mathcal{L}_0(\psi, \psi^\dagger)$ принимается инвариантным относительно фазового преобразования

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi. \quad (6.3.1)$$

Если θ бесконечно мало, то справедливо равенство

$$\theta \delta^0 \psi = i\theta \psi. \quad (6.3.2)$$

Предполагается, что введенный выше лагранжиан совместим с каноническим формализмом.

Изменение лагранжиана за счет фазового преобразования (6.3.1), когда θ бесконечно мало, равно

$$\theta \delta \mathcal{L} = C\theta \chi, \quad (6.3.3)$$

где
$$\chi = i(\psi - \psi^\dagger). \quad (6.3.4a)$$

При вычислениях мы воспользуемся также вещественным полем ϕ , определяемым с помощью соотношения

$$\phi = \psi + \psi^\dagger. \quad (6.3.46)$$

Если мы рассматриваем системы при конечной температуре, то для описания используем термополевой дублет ψ^α (χ^α и ϕ^α), определяемый следующим образом: $\psi^1 = \psi$ и $\psi^2 = \tilde{\psi}^\dagger$. Поскольку термополевой дублет для лагранжиана \mathcal{L} определяется как пара $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^2 = \tilde{\mathcal{L}}^\dagger = \tilde{\mathcal{L}}$, полный лагранжиан имеет вид

$$\hat{\mathcal{L}} = \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \mathcal{L}^\alpha, \quad (6.3.5)$$

где $\varepsilon^\alpha = 1$ для $\alpha = 1$ и $\varepsilon^\alpha = -1$ для $\alpha = 2$. Тогда можно написать

$$\hat{\mathcal{L}} = \sum_\alpha \varepsilon^\alpha (\mathcal{L}_0^\alpha + C\phi^\alpha). \quad (6.3.6)$$

Так как $(e^{i\theta})^\dagger = e^{i\theta}$, фазовое преобразование термополевого дублета ψ^α имеет вид

$$\psi^\alpha \rightarrow e^{i\theta} \psi^\alpha, \quad (6.3.7)$$

и бесконечно малым преобразованием его можно привести к виду

$$\theta \delta^0 \psi^\alpha = i\theta \psi^\alpha. \quad (6.3.8)$$

Таким образом, изменение полного лагранжиана при этом преобразовании составляет

$$\theta \delta \hat{\mathcal{L}} = \theta \sum_\alpha \varepsilon^\alpha C \chi^\alpha. \quad (6.3.9)$$

Теперь соотношение УТ (6.1.28), в котором ψ обозначает ψ^α , а $\delta \mathcal{L}$ обозначает $\delta \hat{\mathcal{L}}$, дает

$$i\hbar \langle 0, \beta | \delta^0 \psi^\alpha(x) | 0, \beta \rangle = \int d^4y \langle 0, \beta | T [\delta \hat{\mathcal{L}}(y), \psi^\alpha(x)] | 0, \beta \rangle, \quad (6.3.10)$$

$$i\hbar \langle 0, \beta | \delta^0 \psi^{\alpha\dagger}(x) | 0, \beta \rangle = \int d^4y \langle 0, \beta | T [\delta \hat{\mathcal{L}}(y), \psi^{\alpha\dagger}(x)] | 0, \beta \rangle. \quad (6.3.11)$$

Эти соотношения преобразуются к виду

$$-\hbar \langle 0, \beta | \psi^\alpha(x) | 0, \beta \rangle = C \sum_\sigma \int d^4y \langle 0, \beta | T [e^\sigma \chi^\sigma(y), \psi^\alpha(x)] | 0, \beta \rangle, \quad (6.3.12)$$

$$\hbar \langle 0, \beta | \psi^{\alpha\dagger}(x) | 0, \beta \rangle = C \sum_\sigma \int d^4y \langle 0, \beta | T [e^\sigma \chi^\sigma(y), \psi^{\alpha\dagger}(x)] | 0, \beta \rangle. \quad (6.3.13)$$

Таким образом, имеем

$$v^\alpha = i \frac{C}{\hbar} \sum_{\sigma} d^4 y \varepsilon^{\sigma} \Delta_c^{\sigma\alpha} (y - x), \quad (6.3.14)$$

где
$$v^\alpha \equiv \langle 0, \beta | \phi^\alpha | 0, \beta \rangle, \quad (6.3.15)$$

$$\Delta_c^{\alpha\beta} (x - y) = \langle 0, \beta | T [\chi^\alpha (x), \chi^\beta (y)] | 0, \beta \rangle. \quad (6.3.16)$$

Если использовать фурье-представление

$$\Delta_c^{\alpha\beta} (x - y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \exp [ip (x - y)] \Delta^{\alpha\beta} (p), \quad (6.3.17)$$

то соотношение УТ (6.3.14) принимает вид

$$v^\alpha = - \frac{C}{\hbar} \sum_{\sigma} \varepsilon^{\sigma} \Delta^{\sigma\alpha} (0). \quad (6.3.18)$$

Спектральное представление $\Delta^{\alpha\beta} (p)$ выражается равенством (4.3.24), где $F^A = 0$, т. е.

$$\Delta (p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sigma (\omega, \mathbf{p}) U_B (\omega) \tau [p_0 - \omega + i\delta\tau]^{-1} U_B (\omega); \quad (6.3.19)$$

здесь $\sigma (\omega, \mathbf{p})$ — спектральная функция. Это приводит к выражению

$$\begin{aligned} \Delta (0) &= - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sigma (\omega, 0) U_B (\omega) \tau \frac{1}{\omega - i\delta\tau} U_B (\omega) = \\ &= -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega} \sigma (\omega, 0) \tau - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sigma (\omega, 0) \delta (\omega) [U_B (\omega)]^2, \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

где использованы формулы

$$\frac{1}{\omega - i\delta\tau} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega} + i\pi\tau\delta (\omega) \quad (6.3.21)$$

и $U_B (\omega) \tau U_B (\omega) = \tau$. Поскольку

$$\sum_{\sigma} \varepsilon^{\sigma} [U_B (\omega)]_{\sigma\alpha}^2 = \frac{e^{\beta\omega} - 1}{e^{\beta\omega} + 1} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \quad \text{для } \alpha = 1, 2, \quad (6.3.22)$$

получаем

$$\sum_{\sigma} \varepsilon^{\sigma} \Delta^{\sigma\alpha} (0) = -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega} \sigma (\omega, 0) \quad \text{для } \alpha = 1, 2. \quad (6.3.23)$$

Таким образом, соотношение УТ (6.3.18) приводит к следующему правилу сумм:

$$v^\alpha = \frac{C}{\hbar} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega} \sigma(\omega, 0) \quad \text{для } \alpha = 1, 2, \quad (6.3.24)$$

где v^α не зависит от α ; $v^1 = v^2$.

Соотношение УТ (6.1.28) позволяет получить много других соотношений для многоточечных функций. Эти соотношения удобнее выразить в терминах вещественных полей χ^α и ρ^α ($\equiv \phi^\alpha - v^\alpha$), чем в терминах ψ^α . Преобразование (6.3.8) дает

$$\delta^0 \chi^\alpha = -(v^\alpha + \rho^\alpha), \quad (6.3.25a)$$

$$\delta^0 \rho^\alpha = \chi^\alpha. \quad (6.3.25b)$$

Заменяя ψ на χ^α или ρ^α в соотношении (6.1.28), можно, например, получить

$$\begin{aligned} i\hbar \langle 0, \beta | T[\delta^0 \chi^\alpha(x), \rho^\beta(y)] | 0, \beta \rangle + i\hbar \langle 0, \beta | T[\chi^\alpha(x), \delta^0 \rho^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = \\ = \int d^4z \langle 0, \beta | T[\delta \widehat{\mathcal{L}}(z), \chi^\alpha(x), \rho^\beta(y)] | 0, \beta \rangle. \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Если использовать уравнение (6.3.9) и (6.3.25), то это соотношение примет вид

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | T[\rho^\alpha(x), \rho^\beta(y)] | 0, \beta \rangle - \langle 0, \beta | T[\chi^\alpha(x), \chi^\beta(y)] | 0, \beta \rangle = \\ = \frac{i}{\hbar} C \sum_{\sigma} \int d^4z \langle 0, \beta | T[\varepsilon^{\sigma} \chi^{\sigma}(z), \chi^{\alpha}(x), \rho^{\beta}(y)] | 0, \beta \rangle, \end{aligned} \quad (6.3.27)$$

откуда получаем соотношение между двухточечными и трехточечными функциями. Другие соотношения можно получить с помощью аналогичной процедуры.

6.4. Пример петлевого разложения; ферромагнетизм зонных электронов

Методы аппроксимации и соотношения Уорда—Такахаша. В конкретных расчетах в физике обычно приходится использовать некоторые приближения. Затем мы пытаемся улучшить ситуацию, заменяя некоторые теоретические параметры их экспериментальными значениями. Например, мы часто заменяем перенормированные константы связи их экспериментальными значениями. Чтобы сделать это согласованным образом, нельзя нарушать некоторые важные соотношения. Поскольку упорядоченные состояния вытекают из определенной симметричной структуры лагранжиана, наши приближенные методы не должны нарушать соотношения УТ, так как последние являются проявлением этой симметрии. Таким образом, основной стратегический план таков: сначала

получаем соотношения УТ из соображений симметрии, связанной с рассматриваемым упорядоченным состоянием. Затем в рамках этих соотношений УТ вводим аппроксимацию.

Задавая соотношения между n - и $n + 1$ -точечными функциями, соотношения УТ (6.1.28) приводят к определенным равенствам, связывающим различные многоточечные вершинные функции (или константы связи). Это означает, что, согласно нашему предположению, многоточечные константы связи одного порядка величины и, следовательно, простые приближения, основанные на учете возмущений, не всегда удовлетворяют соотношениям УТ. Соотношение УТ (6.1.28) показывает, что внешние линии, связанные с $\delta\mathcal{L}(x)$, вследствие интегрирования по d^4x соответствуют энергии

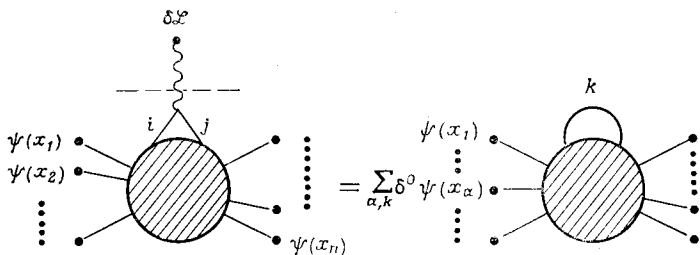


Рис. 6.1.

импульсу, равному нулю. Назовем эти внешние линии с нулевым энергией-импульсом $\delta\mathcal{L}$ -линиями. Соотношение УТ (6.1.28) показывает, что если $\delta\mathcal{L}$ -линии убрать из правой части соотношения (6.1.28), то останется лишь левая часть. Поскольку внешние линии не участвуют в петлевой структуре n -точечной функции, можно ожидать, что при классификации фейнмановских диаграмм с помощью структуры их петель этот способ классификации может привести к приближенным методам, согласующимся с соотношениями УТ. Убрав $\delta\mathcal{L}$ -линию, мы можем изменить тип вершины или внутренние линии, но топологическая структура и количество петель при этом не меняются (рис. 6.1). Если фрагменты (вершины, пропагаторы) фейнмановских диаграмм удовлетворяют соотношениям УТ, то им удовлетворяет и полная диаграмма. Следовательно, метод аппроксимации выглядит следующим образом: сначала нужно так определить пропагаторы и константы связи, чтобы они удовлетворяли соотношениям УТ, а затем отобрать все фейнмановские диаграммы с одинаковым количеством петель. Этот приближенный метод называется методом разложения по петлям (петлевого разложения). Чтобы определить количество петель, нужно сосчитать их всеми различными способами. Если учесть все фейнмановские диаграммы вплоть до n -петлевых, то

в петлевом разложении возникнет член, отвечающий n -петлевому приближению. Наиболее трудоемкая часть метода состоит в том, чтобы выработать согласованную процедуру перенормировки; каждый перенормированный контрчлен должен быть суммой в петлевом разложении. За исключением этой процедуры перенормировки, метод петлевого разложения является совершенно ясным. Но поскольку метод петлевого разложения основан на фейнмановских диаграммах, он не может быть непосредственно применен к ситуациям, когда имеются связанные состояния. Это ограничение метода довольно существенно, если мы хотим применить его к проблемам физики твердого тела, поскольку коллективные моды (такие, как фононы, магноны и т. д.) часто оказываются связанными состояниями. Хотя правило образования петлевого разложения предполагает, что соответствующим образом определенные пропагаторы связанных состояний должны быть включены в качестве внутренних линий диаграммы, сама структура этих пропагаторов зависит от приближения. Следовательно, и в данном случае требуется самосогласованное рассмотрение образования связанного состояния. Мы продемонстрируем возможности метода петлевого разложения в случае систем со связанными состояниями на примере ферромагнетизма зонных электронов.

Спиновая симметрия. Лагранжиан имеет вид $\mathcal{L} [\psi(x), \psi^+(x)]$, где $\psi(x)$ — гейзенберговское поле электрона:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(x) \\ \psi_{\downarrow}(x) \end{pmatrix}. \quad (6.4.1)$$

Лагранжиан инвариантен относительно поворота спина:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\{i\theta \cdot \sigma/2\} \psi(x). \quad (6.4.2)$$

Когда θ бесконечно мало, $\delta^0\psi(x)$ становится вектором; обозначим его $\delta^0\psi(x)$:

$$\delta^0\psi(x) = i(\sigma/2)\psi(x). \quad (6.4.3)$$

Полный лагранжиан равен

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}, \quad (6.4.4)$$

где лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$ инвариантен относительно поворота спина, примененного к полю, тильда-сопряженному по отношению к (6.4.2):

$$\tilde{\psi}(x) \rightarrow \tilde{\psi}'(x) = \exp\{-i\theta \cdot \sigma^*/2\} \tilde{\psi}(x), \quad (6.4.5)$$

$$\text{где} \quad \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{\uparrow} \\ \tilde{\psi}_{\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (6.4.6)$$

Таким образом, имеем

$$\delta^0 \bar{\psi}(x) = -i(\sigma^*/2) \bar{\psi}(x), \quad (6.4.7)$$

откуда следует

$$\delta^0 \bar{\psi}^t(x) = -i \bar{\psi}^t(x) \sigma/2. \quad (6.4.8)$$

Здесь ψ^t означает транспонирование в пространстве спинов:

$$\psi^t = (\psi_+, \psi_+). \quad (6.4.9)$$

Следуя обозначениям гл. 4, используем символику термополевых дублетов. Поскольку $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, выражение (6.4.4) можно переписать в виде

$$\hat{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \mathcal{L}^{\alpha}. \quad (6.4.10)$$

Выражения (6.4.3) и (6.4.8) можно объединить:

$$\delta^0 \psi^{\alpha}(x) = i(\sigma/2) \psi^{\alpha}(x). \quad (6.4.11)$$

Мы также используем спиновые операторы, определяемые следующим образом:

$$\sigma_{\pm}(x) = \psi^{\dagger}(x) \sigma_{\pm} \psi(x), \quad (6.4.12)$$

$$\sigma_3(x) = \psi^{\dagger}(x) \sigma_3 \psi(x), \quad (6.4.13)$$

где σ_{\pm} определяется выражением

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i\sigma_2). \quad (6.4.14)$$

Их термополевые дублеты имеют вид

$$\sigma_{\pm}^{\alpha}(x) = P_{\alpha} [\psi^{\alpha\dagger}(x) \sigma_{\pm} \psi^{\alpha}(x)] = \varepsilon^{\alpha} \psi^{\alpha\dagger}(x) \sigma_{\pm} \psi^{\alpha}(x), \quad (6.4.15)$$

$$\sigma_3^{\alpha}(x) = P_{\alpha} [\psi^{\alpha\dagger}(x) \sigma_3 \psi^{\alpha}(x)] = \varepsilon^{\alpha} \psi^{\alpha\dagger}(x) \sigma_3 \psi^{\alpha}(x). \quad (6.4.16)$$

Чтобы определить направление намагничивания, введем малое внешнее магнитное поле ε , которое добавляет к прежнему лагранжиану член

$$\hat{\mathcal{L}}_{\varepsilon}(x) = \sum_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} \mathcal{L}_{\varepsilon}^{\alpha}(x), \quad (6.4.17)$$

где

$$\mathcal{L}_{\varepsilon}^{\alpha}(x) = \varepsilon \sigma_3^{\alpha}(x). \quad (6.4.18)$$

Переход к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ должен быть выполнен в конце вычислений.

Соотношения Уорда—Такахаси для спиновой симметрии. Изменение лагранжиана вследствие поворота спина получается из выражения (6.4.11) и имеет вид

$$\delta \hat{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} \delta \mathcal{L}^{\alpha}, \quad (6.4.19)$$

где
$$\delta \mathcal{L}^{\alpha} = \delta \mathcal{L}_{\varepsilon}^{\alpha}(x) = \frac{1}{2} i \varepsilon P_{\alpha} \{ \psi^{\dagger\alpha} [\sigma_3, \sigma] \psi^{\alpha} \}. \quad (6.4.20)$$

Таким образом, имеем

$$\delta_{\pm} \mathcal{L}^{\alpha}(x) \equiv \frac{1}{2} (\delta_1 \pm i\delta_2) \mathcal{L}^{\alpha}(x) = \quad (6.4.21)$$

$$= \pm i\varepsilon \sigma_{\pm}^{\alpha}(x), \quad (6.4.22)$$

$$\delta_3 \mathcal{L}^{\alpha}(x) = 0. \quad (6.4.23)$$

Из выражения (6.4.19) получаем

$$\delta_{\pm} \widehat{\mathcal{L}}(x) = \pm i\varepsilon \sum_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} \sigma_{\pm}^{\alpha}(x). \quad (6.4.24)$$

Теперь соотношение УТ (6.1.28), в котором ψ обозначает ψ^{α} и $\psi^{\alpha+}$, а $\delta \mathcal{L}$ обозначает $\delta \widehat{\mathcal{L}}$, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \langle 0, \beta | T[\delta_{\pm}^0 \psi_s^{\alpha}(x_1), \psi_{s'}^{\beta+}(x_2)] | 0, \beta \rangle + \langle 0, \beta | T[\psi_s^{\alpha}(x_1), \delta_{\pm}^0 \psi_{s'}^{\beta+}(x_2)] | 0, \beta \rangle = \\ & = \pm \frac{1}{\hbar} \varepsilon \int d^4 y \sum_{\gamma} \langle 0, \beta | T[\varepsilon^{\gamma} \sigma_{\pm}^{\gamma}(y) \psi_s^{\alpha}(x_1) \psi_{s'}^{\beta+}(x_2)] | 0, \beta \rangle, \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

где $\delta_{\pm}^0 \psi^{\alpha+}$ определяется выражением

$$\delta_{\pm}^0 \psi^{\alpha+} = \frac{1}{2} (\delta_1^0 \pm i\delta_2^0) \psi^{\alpha+} = \quad (6.4.26)$$

$$= -i\psi^{\alpha+} (\sigma_{\pm}/2). \quad (6.4.27)$$

Умножая обе части соотношения (6.4.25) на $\varepsilon^{\alpha} (\sigma_{\mp})_{s's}$ и полагая $x_1 = x_2 = x$ и $\alpha = \beta$, получаем

$$\langle 0, \beta | \sigma_3^{\alpha}(x) | 0, \beta \rangle = \frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4 y \sum_{\gamma} \langle 0, \beta | T[\varepsilon^{\gamma} \sigma_{\pm}^{\gamma}(y) \sigma_{\pm}^{\alpha}(x)] | 0, \beta \rangle. \quad (6.4.28)$$

Аналогично можно получить любое соотношение УТ для многочечных функций. В дальнейшем мы используем обозначения

$$\langle A \rangle_{\varepsilon} = \langle 0, \beta | T[A] | 0, \beta \rangle, \quad (6.4.29)$$

$$\langle A \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle 0, \beta | T[A] | 0, \beta \rangle. \quad (6.4.30)$$

Соотношения УТ приводят нас ко многим утверждениям, которые включают вид энергетического спектра и ряд соотношений между

константами связи. Мы приведем некоторые соотношения УТ, которые в дальнейшем будут использованы:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \rangle_{\varepsilon} - \langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \rangle_{\varepsilon} = \\ = -\frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4z \sum_{\rho} \varepsilon^{\rho} \langle \sigma_{\uparrow}^{\rho}(z) \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \rangle_{\varepsilon} = \end{aligned} \quad (6.4.31)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4z \sum_{\rho} \varepsilon^{\rho} \langle \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\downarrow}^{\rho}(z) \rangle_{\varepsilon}, \quad (6.4.32)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\downarrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} - \langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} = \\ = -\frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4\xi \sum_{\rho} \varepsilon^{\rho} \langle \sigma_{\uparrow}^{\rho}(\xi) \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\downarrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6.4.33)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\downarrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} + \langle \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\downarrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} = \\ = \frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4\xi \sum_{\rho} \varepsilon^{\rho} \langle \sigma_{\uparrow}^{\rho}(\xi) \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\downarrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6.4.34)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} - \langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} = \\ = -\frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4\xi \sum_{\rho} \varepsilon^{\rho} \langle \sigma_{\uparrow}^{\rho}(\xi) \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6.4.35)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} + \langle \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} = \\ = \frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4\xi \sum_{\rho} \varepsilon^{\rho} \langle \sigma_{\uparrow}^{\rho}(\xi) \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6.4.36)$$

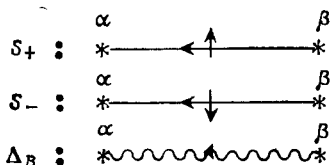


Рис. 6.2.

Используем фурье-представление двухточечных функций (рис.6.2):

$$\langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \rangle = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4p \exp[ip(x-y)] S_+^{\alpha\beta}(p), \quad (6.4.37)$$

$$\langle \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \rangle = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4p \exp[ip(x-y)] S_-^{\alpha\beta}(p), \quad (6.4.38)$$

$$\langle \sigma_{\uparrow}^{\alpha}(x) \sigma_{\downarrow}^{\beta}(y) \rangle = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4p \exp[ip(x-y)] \Delta_B^{\alpha\beta}(p). \quad (6.4.39)$$

Поскольку последующие вычисления довольно запутанны, полезно помнить, что S и Δ обозначают фермионные и бозонные двухточечные функции соответственно, а индексы «+» и «-» при S обозначают спин, направленный вверх и вниз соответственно.

Существование магнона. Докажем теперь, что, когда в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ намагниченность не исчезает, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon \neq 0, \quad (6.4.40)$$

из соотношения УТ (6.4.28) следует существование магнона. Здесь

$$M_\varepsilon \equiv \langle 0, \beta | \sigma_3^\alpha(x) | 0, \beta \rangle. \quad (6.4.41)$$

Если учесть выражение (6.4.39), то соотношение УТ (6.4.28) принимает вид

$$M_\varepsilon = -2\varepsilon \sum_{\beta} \varepsilon^{\beta} \Delta_B^{\beta\alpha}(0). \quad (6.4.42)$$

Спектральное представление $\Delta_B^{\alpha\beta}(p)$ задается соотношением (4.3.24), где $F^A = 0$:

$$\Delta_B(p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sigma_B(\omega, p) U_B(\omega) \tau [p_0 - \omega + i\delta\tau]^{-1} U_B(\omega). \quad (6.4.43)$$

Используя (4.1.88) и соотношение

$$\sum_{\rho} \varepsilon^{\rho} [U_B(\omega) U_B^{\dagger}(\omega)]_{\rho\alpha} = \frac{e^{\beta\omega/2} - 1}{e^{\beta\omega/2} + 1} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0, \quad (6.4.44)$$

можем переписать (6.4.42) в виде

$$M_\varepsilon = \varepsilon \mathcal{P} \int d\omega \frac{1}{\omega} \sigma_B(\omega, 0). \quad (6.4.45)$$

Здесь использована формула

$$\frac{1}{p_0 - \omega \pm i\delta} = \mathcal{P} \frac{1}{p_0 - \omega} \mp i\pi\delta(p_0 - \omega). \quad (6.4.46)$$

Спектральная функция $\sigma_B(\omega, p)$ может быть представлена в виде

$$\sigma_B(\omega, p) = \chi(p) \frac{\gamma(p)}{\{\omega - (\omega_p + a\varepsilon)\}^2 + \pi^2\gamma^2(p)} + \sigma_B^c(\omega, p), \quad (6.4.47)$$

где $\sigma_B^c(\omega, p)$ — часть, которая определяется условием

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ p \rightarrow 0}} \sigma_B^c(\omega, p) = 0. \quad (6.4.48)$$

Заметим, что, когда $\chi(p) \neq 0$, существуют стабильный или нестабильный бозоны; стабильная частица отвечает случаю, когда $\gamma(p) = 0$, т. е. первый член в (6.4.47) равен $\chi(p) \delta(\omega - \omega_p - a\varepsilon)$.

В выражении (6.4.47) $a\varepsilon$ — сдвиг энергии бозона, обусловленный внешним магнитным полем. Подставляя выражение (6.4.48) в (6.4.45) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\chi(\mathbf{p}) \neq 0, \quad \gamma(\mathbf{p}) = 0, \quad \omega_p = 0 \quad \text{при } \mathbf{p} = 0, \quad (6.4.49)$$

так как правая часть равенства (6.4.45) не обращается в нуль при переходе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (6.4.49) следует

$$\sigma_B(\omega, 0) = \chi(0) \delta(\omega - a\varepsilon), \quad (6.4.50)$$

а это вместе с (6.4.45) дает

$$M = \frac{2}{a} \chi(0). \quad (6.4.51)$$

Таким образом, мы делаем вывод, что существует бозон, стабильный при $\mathbf{p} = 0$, который возникает в $\sigma_{\pm}(x)$ -каналах. Этот бозон называется магноном. Функция $\Delta_B(p)$ называется двухточечной функцией магнона. Согласно (6.4.49), энергия магнона ω_p равна нулю при равном нулю импульсе. Другими словами, энергетический спектр магнона не содержит щели. При ненулевом импульсе энергия магнона имеет конечную ширину, обусловленную температурными флуктуациями. Чтобы найти величину a в выражении (6.4.51), вспомним, что интеграл по пространству от величины $(1/\hbar)\sigma_3(x)$ есть генератор поворотов вокруг третьей оси. Поскольку этот генератор не зависит от времени, имеем

$$\int d^3x [\sigma_3(x), \sigma_{\pm}(y)] = 2\hbar \sigma_{\pm}(y). \quad (6.4.52)$$

Сравнивая с каноническим уравнением

$$[H, \sigma_{\pm}(y)] = \frac{\hbar}{i} \sigma_{\pm}(y), \quad (6.4.53)$$

мы видим, что собственная энергетическая функция, обусловленная дополнительным членом в гамильтониане взаимодействия $-\varepsilon\sigma_3(x)$, равна 2ε . Поскольку сдвиг энергии магнона равен εa , находим, что $a = 2$. Таким образом, соотношение (6.4.51) можно переписать в виде

$$\chi(0) = M. \quad (6.4.54)$$

Выписанное соотношение показывает, что интенсивность вызванного спиновыми волнами неупругого рассеяния нейтронов вперед равна объемной намагниченности.

Заметим, что нет таких соотношений УТ, которые требовали бы существования бесщелевого бозона в σ_3 -канале.

Соотношения УТ для вершин. Чтобы получить соотношения УТ (6.4.31)—(6.4.36) в простой форме, введем вершинные функции Γ с помощью следующих соотношений (рис. 6.3):

$$\langle \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta\uparrow}(y) \sigma_{\downarrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} = \left(\frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \right)^2 \int d^4 p d^4 q \exp [i(p+q)x - iqz - ipy] \times \\ \times [S_{-}^{\alpha\gamma}(p+q) \varepsilon^{\gamma} S_{+}^{\gamma\beta}(p) + S_{-}^{\alpha\alpha}(p+q) \Gamma_{-c}^{ab}(p+q, p, q) S_{+}^{b\beta}(p) \Delta_B^{c\gamma}(q)], \quad (6.4.55a)$$

$$\langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta\uparrow}(y) \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon} = \left(\frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \right)^2 \int d^4 p d^4 q \exp [ipx - i(p+q)y + iqz] \times \\ \times [S_{+}^{\alpha\gamma}(p) \varepsilon^{\gamma} S_{-}^{\gamma\beta}(p+q) + S_{+}^{\alpha\alpha}(p) \Delta_B^{\gamma c}(q) \Gamma_{+c}^{ab}(p, q, p+q) S_{-}^{b\beta}(p+q)]. \quad (6.4.55b)$$

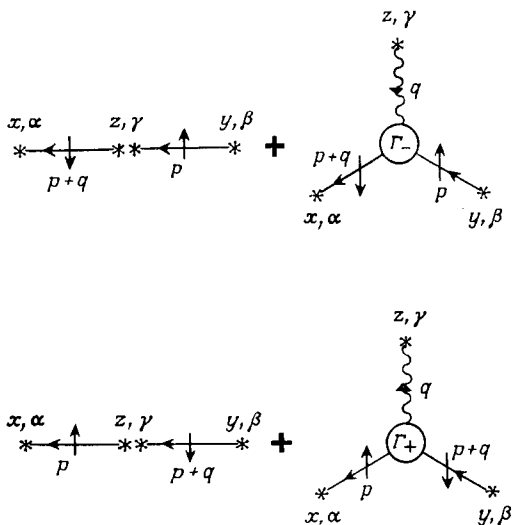


Рис. 6.3.

Если диаграмму нельзя разделить на две части путем разрезания только одной внутренней линии, она называется собственной диаграммой. Первый член в правой части (6.4.55) не-собственный, а второй собственный.

Аналогично можно получить (рис. 6.4)

$$\langle \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta\uparrow}(y) \sigma_{\downarrow}^{\rho}(\xi) \rangle_{\varepsilon} = \langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta\uparrow}(z) \rangle_{\varepsilon} \varepsilon^{\gamma} \langle \psi_{\downarrow}^{\gamma}(z) \psi_{\downarrow}^{\rho}(\xi) \rangle_{\varepsilon} \mathbf{e}^{\rho} \times \\ \times \langle \psi_{\uparrow}^{\rho}(\xi) \psi_{\uparrow}^{\beta\uparrow}(y) \rangle_{\varepsilon} + \langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta\uparrow}(y) \rangle_{\varepsilon} \langle \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \sigma_{\downarrow}^{\rho}(\xi) \rangle_{\varepsilon} + \\ + \int d^4 \xi_1 \int d^4 \xi_2 \langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\rho\uparrow}(\xi_1) \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \rangle_{\varepsilon}^{\rho} [S_{-}^{-1}(\xi_1 - \xi_2)]_{\rho\lambda} \times \\ \times \langle \psi_{\downarrow}^{\lambda}(\xi_2) \psi_{\uparrow}^{\beta\uparrow}(y) \sigma_{\downarrow}^{\rho}(\xi) \rangle_{\varepsilon}^{\rho} \langle \sigma_{\uparrow}^{\gamma}(z) \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta\uparrow}(y) \sigma_{\downarrow}^{\rho}(\xi) \rangle_{\varepsilon}^{\rho}, \quad (6.4.56)$$

где верхний индекс p обозначает собственную часть, имеющую вид

$$\langle \sigma_+^\gamma(z) \psi_\dagger^\alpha(x) \psi_\dagger^{\beta\dagger}(y) \sigma_-^\rho(\xi) \rangle_\varepsilon^p = \left(\frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \right)^3 \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 q_1 d^4 q_2 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \exp[i(q_1 z + p_1 x - p_2 y + q_2 \xi)] \times \\ \times S_+^{\alpha a}(p_1) \Delta_\beta^{\gamma c}(q_1) \Gamma_{+cd}^{ab}(p_1 q_1; p_2 q_2) S_+^{\beta b}(p_2) \Delta_B^{d\rho}(q_2). \quad (6.4.57)$$

Если учесть соотношения (6.4.28), (6.4.31), (6.4.41), то получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4 \xi \sum_\gamma \varepsilon^\gamma \langle \sigma_+^\gamma(\xi) \psi_\dagger^\alpha(x) \times \\ \times \psi_\dagger^{\beta\dagger}(y) \sigma_-^\rho(z) \rangle_\varepsilon = M \langle \psi_\dagger^\alpha(x) \psi_\dagger^{\beta\dagger}(y) \rangle + \\ + \langle \psi_\dagger^\alpha(x) \psi_\dagger^{\beta\dagger}(y) \sigma_-^\rho(z) \rangle_\varepsilon - \\ - \int d^4 \zeta_1 d^4 \zeta_2 S_+^{\alpha a}(x - \zeta_1) [S^{-1}(\zeta_1 - \\ - \zeta_2)]_{\alpha\lambda} \langle \psi_\dagger^\lambda(\zeta_2) \psi_\dagger^{\beta\dagger}(y) \sigma_-^\rho(z) \rangle_\varepsilon + \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4 \xi \sum_\gamma \varepsilon^\gamma \langle \sigma_+^\gamma(\xi) \psi_\dagger^\alpha(x) \times \\ \times \psi_\dagger^{\beta\dagger}(y) \sigma_-^\rho(z) \rangle_\varepsilon. \quad (5.4.58)$$

Таким образом, соотношение УТ (6.4.34) вместе с выражением (6.4.55a) дает

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\hbar} 2\varepsilon \int d^4 \xi \sum_\gamma \varepsilon^\gamma \langle \sigma_+^\gamma(\xi) \psi_\dagger^\alpha(x) \times \\ \times \psi_\dagger^{\beta\dagger}(y) \sigma_-^\rho(z) \rangle_\varepsilon = \int d^4 \zeta_1 d^4 \zeta_2 \times \\ \times S_+^{\alpha a}(x - \zeta_1) [S^{-1}(\zeta_1 - \zeta_2)]_{\alpha\gamma} \times \\ \times \langle \psi_\dagger^\gamma(\zeta_2) \psi_\dagger^{\beta\dagger}(y) \sigma_-^\rho(z) \rangle_\varepsilon + \dots, \quad (6.4.59)$$

где многоточие обозначает члены, которые не содержат никаких магнов, связанных с точкой z . Подставим теперь выражения (6.4.55a) и (6.4.57) в уравнение (6.4.59) и рассмотрим случай, когда четырех-вектор энергии-импульса магнона, связанный с $\sigma_-(z)$ в выражении (6.4.59), равен нулю. Это приводит к появлению множителя $(1/\varepsilon)$ в первых членах правой части уравнения (6.4.59).

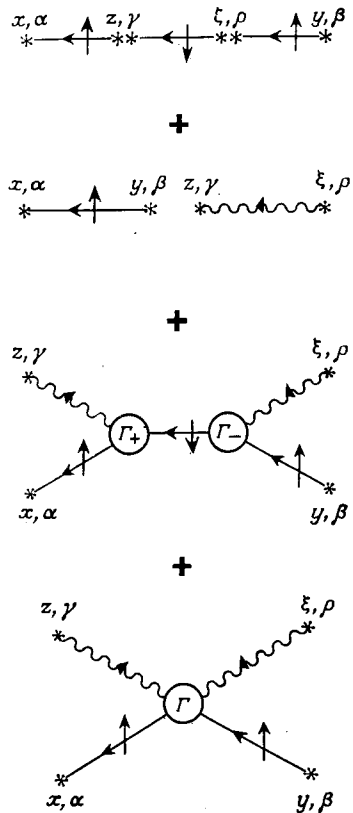


Рис. 6.4.

Тогда члены, обозначенные многоточием, можно не учитывать, и мы получаем

$$\Gamma_{-d}^{\alpha\beta}(p; p, 0) = -M \sum_c \Gamma_{+cd}^{\alpha\beta}(p, 0; p, 0).$$

Аналогично можно определить вершинную часть $\Gamma_{-cd}^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_+^\gamma(z) \psi_\downarrow^\alpha(x) \psi_\downarrow^{\beta\dagger}(y) \sigma_-^\rho(\xi) \rangle_\varepsilon &= \\ &= \left(\frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \right)^3 \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 q_1 d^4 q_2 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \times \\ &\times \exp[i(q_1 z + p_1 x - p_2 y - q_2 \xi)] \times \\ &\times S_-^{\gamma a}(p_1) \Delta_B^{\gamma c}(q_1) \Gamma_{-cd}^{ab}(p_1 q_1; p_2 q_2) S_-^{\beta b}(p_2) \Delta_B^{d\rho}(q_2). \end{aligned} \quad (6.4.60)$$

Наконец, соотношения УТ (6.4.33)—(6.4.36) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ приводят к следующим равенствам:

$$\Gamma_{-d}^{\alpha\beta}(p; p, 0) = -M \sum_c \Gamma_{+cd}^{\alpha\beta}(p, 0; p, 0) = \quad (6.4.61)$$

$$= M \sum_c \Gamma_{-cd}^{\alpha\beta}(p, 0; p, 0), \quad (6.4.62)$$

$$\Gamma_{+d}^{\alpha\beta}(p, 0; p) = -M \sum_c \Gamma_{+dc}^{\alpha\beta}(p, 0; p, 0) = \quad (6.4.63)$$

$$= M \sum_c \Gamma_{-dc}^{\alpha\beta}(p, 0; p, 0). \quad (6.4.64)$$

С другой стороны, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в соотношениях УТ (6.4.31) и (6.4.32) и учитывая равенства (6.4.55) и (6.4.42), находим

$$S_-^{-1\alpha\beta}(p) - S_+^{-1\alpha\beta}(p) = M \sum_c \Gamma_{+c}^{\alpha\beta}(p, 0; p) = \quad (6.4.65)$$

$$= M \sum_c \Gamma_{-c}^{\alpha\beta}(p; p, 0). \quad (6.4.66)$$

Соотношения (6.4.61)—(6.4.66) являются соотношениями УТ, которые используются в дальнейшем изложении.

Написанные выше соотношения УТ становятся чрезвычайно простыми при $p = 0$. Чтобы показать это, начнем со спектрального представления (4.3.23):

$$S_\pm(p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega s_\pm(\omega, \mathbf{p}) U(\omega) [p_0 - \omega + i\delta\tau]^{-1} U^\dagger(\omega). \quad (6.4.67)$$

При $p_0 = 0$ оно принимает вид

$$S_\pm^{\alpha\beta}(p)|_{p_0=0} = -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega s_\pm(\omega, \mathbf{p}) \frac{1}{\omega} \delta_{\alpha\beta} + i\pi s_\pm(0, \mathbf{p}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta}, \quad (6.4.68)$$

откуда получаем

$$S_{\pm}^{-1\alpha\beta}(\rho)|_{\rho_0=0} = -\frac{1}{K(\mathbf{p})} \left[\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega s_{\pm}(\omega, \mathbf{p}) \frac{1}{\omega} \delta_{\alpha\beta} + \right. \\ \left. + i\pi s_{\pm}(0, \mathbf{p}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \right], \quad (6.4.69)$$

$$\text{где } K(\mathbf{p}) = \left[\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega s_{\pm}(\omega, \mathbf{p}) \frac{1}{\omega} \right]^2 + \pi^2 [s_{\pm}(0, \mathbf{p})]^2. \quad (6.4.70)$$

Из этого выражения видно, что диагональные элементы $S_{\pm}^{-1}(0)$ вещественны, а недиагональные — мнимые. Поэтому из соотношений УТ (6.4.65) и (6.4.66) при $\rho = 0$ следует, что вершинные части могут быть параметризованы следующим образом:

$$\sum_c \Gamma_{\pm c}^{\alpha\beta}(0, 0, 0) = \begin{cases} -g & \text{для } \alpha = \beta, \\ -2i\pi b_2 & \text{для } \alpha \neq \beta; \end{cases} \quad (6.4.71)$$

кроме того,

$$S_{\pm}^{-1\alpha\beta}(0) = \begin{cases} \tilde{\mu}^2 \pm \frac{1}{2} gM & \text{для } \alpha = \beta, \\ i\pi [b_1 \pm b_2 M] & \text{для } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (6.4.72)$$

Параметры $\tilde{\mu}^2$, g , b_1 и b_2 вещественны и определяются значениями $s_{\pm}(\omega, 0)$.

Из соотношений УТ (6.4.61)—(6.4.64) и равенства (6.4.71) получаем

$$\sum_{c,d} \Gamma_{\pm cd}^{\alpha\beta}(0, 0; 0, 0) = \begin{cases} \pm g/M & \text{для } \alpha = \beta, \\ \pm 2i\pi b_2/M & \text{для } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (6.4.73)$$

Мнимые части равенств (6.4.71)—(6.4.73) появились вследствие конечной температуры. Поэтому можно ожидать, что b_1 и b_2 при низких температурах малы.

Двухточечные функции магнонов и энергия магнонов. Обратим теперь внимание на энергию магнонов ω_p . При рассмотрении будем использовать формулу

$$\langle \sigma_+^{\alpha}(x) \sigma_-^{\beta}(y) \rangle = \lim_{\delta \rightarrow +0} \langle \epsilon^{\alpha} \psi_{\uparrow}^{\alpha+}(x + \delta) \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x - \delta) \sigma_-^{\beta}(y) \rangle, \quad (6.4.74)$$

которая вместе с (6.4.55a) приводит к выражению (рис. 6.5)

$$\Delta_B^{\alpha\beta}(q) = -\frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int_C d^4 p \varepsilon^\alpha S_-^{\alpha\beta} \left(p + \frac{q}{2} \right) \varepsilon^\beta S_+^{\beta\alpha} \left(p - \frac{q}{2} \right) - \\ - \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int_C d^4 p \varepsilon^\alpha S_-^{\alpha\alpha} \left(p + \frac{q}{2} \right) \Gamma_{-c}^{ab} \left(p + \frac{q}{2}; p - \frac{q}{2}, q \right) \times \\ \times S_+^{b\alpha} \left(p - \frac{q}{2} \right) \Delta_B^{\alpha\beta}(q). \quad (6.4.75)$$

Из формулы (6.4.74) видно, что путь интегрирования C по переменной p_0 есть полуокружность в верхней полуплоскости ком-

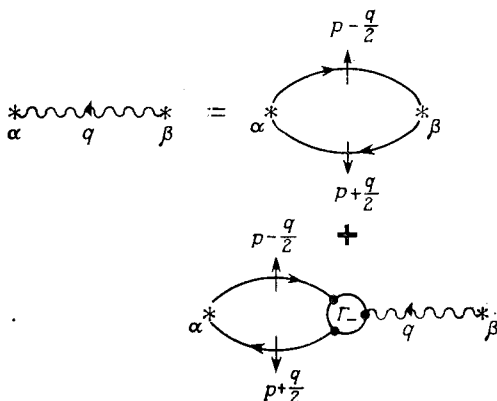


Рис. 6.5.

плексной переменной p_0 . Выражение (6.4.75) определяет $\Delta_B(q)$. Умножая обе части (6.4.75) на $\Delta_B^{-1}(q)$ и оставляя только члены, соответствующие магنونным резонансам, получаем

$$\delta_{\alpha\beta} = \text{Re} \frac{-i\hbar}{(2\pi)^4} \int_C d^4 p \varepsilon^\alpha S_-^{\alpha\alpha} \left(p + \frac{q}{2} \right) \Gamma_{-c}^{ab} \left(p + \frac{q}{2}; p - \frac{q}{2}, q \right) \times \\ \times S_+^{b\alpha} \left(p - \frac{q}{2} \right) \Big|_{q_0 = \omega_q}. \quad (6.4.76)$$

Это выражение определяет энергию магновов ω_q .

Уравнение Гейзенберга. Приведенное выше рассмотрение применимо к любому лагранжиану, инвариантному относительно вращений спина. Однако, чтобы сформулировать петлевое приближение, необходимы уравнения Гейзенберга. Здесь мы используем модель параболической зоны с контактным взаимодействием:

$$\mathcal{L}(x) = i\psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi^\dagger \varepsilon (\nabla^2) \psi - \frac{1}{2} \lambda \psi_s^\dagger \psi_s^\dagger \psi_s \psi_s, \quad (6.4.77)$$

где суммирование ведется по спиновым индексам s и s' . Энергия $\varepsilon(\mathbf{k}^2)$ равна

$$\varepsilon(\mathbf{k}^2) = \frac{\hbar}{2m} \mathbf{k}^2 - \mu^2, \quad (6.4.78)$$

где μ^2 — химический потенциал. Уравнения Гейзенберга можно записать в виде

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) \right) \psi_s(x) = \lambda \psi_{s'}^\dagger(x) \psi_{s'}(x) \psi_s(x). \quad (6.4.79)$$

Поскольку член $\lambda \psi_{s'}^\dagger \psi_{s'} \psi_s$ в (6.4.79) соответствует собственной энергии $\lambda \langle \psi_{s'}^\dagger \psi_{s'} \rangle$, перепишем уравнение (6.4.79) в виде

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) - \lambda n_- \right) \psi_\uparrow(x) = \lambda \psi_\downarrow^\dagger(x) \psi_\downarrow(x) \psi_\uparrow(x) - \lambda n_- \psi_\uparrow(x) \text{ и т. д.},$$

где $n_- = \langle \psi_\downarrow^\dagger(x) \psi_\downarrow(x) \rangle$. При этом уравнения Гейзенберга принимают вид

$$\Lambda_+(\partial) \psi_\uparrow^\alpha(x) = -\lambda P_\alpha \sigma_-^\alpha(x) \psi_\downarrow^\alpha(x) - \lambda n_- \psi_\uparrow^\alpha(x), \quad (6.4.80a)$$

$$\Lambda_-(\partial) \psi_\downarrow^\alpha(x) = -\lambda P_\alpha \sigma_+^\alpha(x) \psi_\uparrow^\alpha(x) - \lambda n_+ \psi_\downarrow^\alpha(x), \quad (6.4.80б)$$

где
$$\Lambda_\pm(\partial) = i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon(\nabla^2) - \lambda n_\mp, \quad (6.4.81)$$

$$n_- = \langle \psi_\downarrow^\dagger(x) \psi_\downarrow(x) \rangle = \langle \tilde{\psi}_\downarrow^\dagger(x) \tilde{\psi}_\downarrow(x) \rangle, \quad (6.4.82)$$

$$n_+ = \langle \psi_\uparrow^\dagger(x) \psi_\uparrow(x) \rangle = \langle \tilde{\psi}_\uparrow^\dagger(x) \tilde{\psi}_\uparrow(x) \rangle \quad (6.4.83)$$

и имеется соотношение

$$M = n_+ - n_-. \quad (6.4.84)$$

Вывод уравнений Дайсона. Уравнение Гейзенберга (6.4.80) приводит к равенству

$$\begin{aligned} \Lambda_+(\partial) \langle \psi_\uparrow^\alpha(x) \psi_\uparrow^{\beta\dagger}(y) \rangle &= \\ &= i\hbar \delta^4(x-y) \delta_{\alpha\beta} - \lambda \langle P_\alpha \sigma_-^\alpha(x) \psi_\downarrow^\alpha(x) \psi_\uparrow^{\beta\dagger}(y) \rangle - \lambda n_- \langle \psi_\uparrow^\alpha(x) \beta_\uparrow^\dagger(y) \rangle. \end{aligned} \quad (6.4.85)$$

Если использовать выражение (6.4.55a), то получим (рис. 6.6)

$$\begin{aligned} \Lambda_+(p) S_+^{\alpha\beta}(p) &= \delta_{\alpha\beta} - \\ &- \frac{i\lambda\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4k S_-^{\alpha\alpha}(p+k) \Gamma_{-c}^{ab}(p+k; p, k) S_+^{\beta\beta}(p) \Delta_B^{c\alpha}(k), \end{aligned} \quad (6.4.86)$$

где $\Lambda_+(p)$ определяется выражением

$$\Lambda_+(p) e^{ipx} = \Lambda_+(\partial) e^{ipx}. \quad (6.4.87)$$

Из (6.4.86) следует

$$S_+^{-1\alpha\beta}(p) = \Lambda_+(p) \delta_{\alpha\beta} + \frac{i\lambda\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4k S_-^{\alpha a}(p+k) \Gamma_-^{\alpha\beta}(p+k; p, k) \Delta_B^{c\alpha}(k). \quad (6.4.88)$$

Аналогично можно получить

$$S_-^{-1\alpha\beta}(p) = \Lambda_-(p) \delta_{\alpha\beta} + \frac{i\lambda\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4k S_+^{\alpha a}(p-k) \Delta_B^{c\alpha}(k) \Gamma_+^{\alpha\beta}(p-k, k; p). \quad (6.4.89)$$

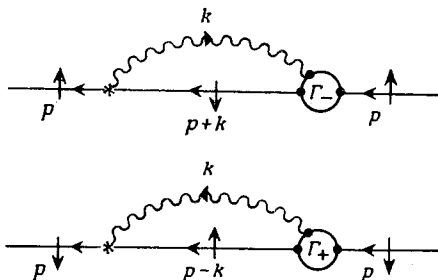


Рис. 6.6.

Вторые члены в выражениях (6.4.88) и (6.4.89) соответствуют собственной энергии, возникающей за счет электрон-магнного спаривания.

Если подействовать оператором $\Lambda_{\pm}(\partial)$ на $\langle \psi_{\downarrow}^{\alpha}(x) \psi_{\uparrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\uparrow}^{\rho}(z) \rangle$ и $\langle \psi_{\uparrow}^{\alpha}(x) \psi_{\downarrow}^{\beta+}(y) \sigma_{\downarrow}^{\rho}(z) \rangle$ и собрать только собственные части диаграмм, то получим уравнения для вершин (рис. 6.7)

$$\Gamma_{-\rho}^{\alpha\beta}(p+q; p, q) = -\lambda \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\rho} - \frac{i\lambda\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4k S_+^{\alpha a}(p+q-k) \Delta_B^{c\alpha}(k) \Gamma_{+\rho}^{\alpha\beta}(p+q-k, k; p, q), \quad (6.4.90)$$

$$\Gamma_{+\rho}^{\alpha\beta}(p, q; p+q) = -\lambda \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\rho} - \frac{i\lambda\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4k S_-^{\alpha a}(p+k) \Delta_B^{c\alpha}(k) \Gamma_{-\rho}^{\alpha\beta}(p+k, q; p+q, k). \quad (6.4.91)$$

Уравнения (6.4.88)–(6.4.91) называются уравнениями Дайсона. Заметим, что эти уравнения нельзя получить по теории возмущений, поскольку они содержат магنون, который представляет собой связанное состояние электронов.

Основные соотношения для однопетлевого приближения. До сих пор не делалось никаких приближений. Теперь мы введем однопетлевою аппроксимацию, в которой все параметры перенормированы,

Как показывают уравнения (6.4.90) и (6.4.91), в первом приближении вершинная часть $\Gamma_{\pm\rho}^{\alpha\beta}$ равна $-\lambda\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\rho}$. Поскольку мы используем только перенормированные параметры, нужно заменить λ на перенормированное значение λ_r . Тогда из соотноше-

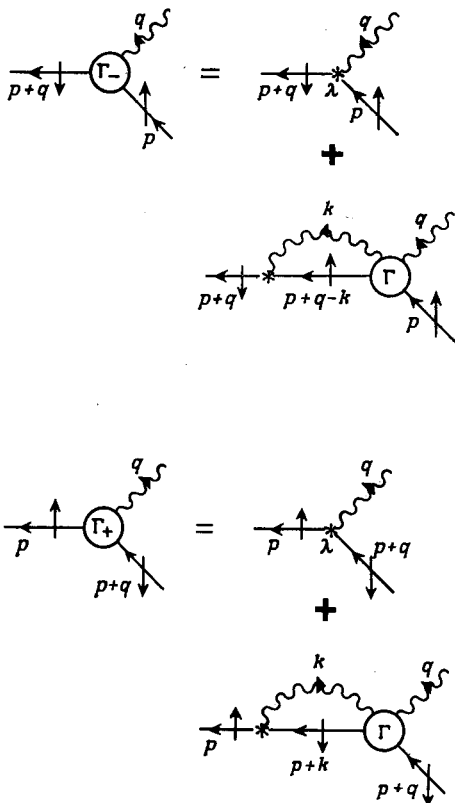


Рис. 6.7.

ния (6.4.71) следует, что $\lambda_r = g$. Таким образом, в однопетлевом приближении всякий раз, когда в однопетлевых членах появляется $\Gamma_{\pm\rho}^{\alpha\beta}$, его следует заменять приближенным значением

$$\Gamma_{\pm\rho}^{\alpha\beta}(p, q; p+q) \approx -g\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\rho}. \quad (6.4.92)$$

Аналогично $\Gamma_{\pm cd}^{\alpha\beta}$ заменяется приближенным значением $\lambda_{\pm}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha c}\delta_{\alpha d}$. Тогда из равенства (6.4.73) следует

$$\Gamma_{\pm cd}^{\alpha\beta} \approx \pm \frac{g}{M} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha c}\delta_{\alpha d}. \quad (6.4.93)$$

Подсчитаем теперь $S_{\pm}^{-1\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\pm\rho}^{\alpha\beta}$ с помощью соотношений (6.4.88)—(6.4.93). Здесь мы воспользуемся правилом Дайсона для пере-

нормировки перекрывающихся расходимостей, которое требует замены множителя λ перед интегралами (6.4.88)—(6.4.91) на g , а также симметризации в случае появления двух вершин, если константы связи в Γ в этих интегралах заменены их перенормированными значениями (рис. 6.8). Это правило получено из рассмотрения структуры фейнмановских диаграмм. Теперь мы получаем

$$S_{\pm}^{-1\alpha\beta}(p) = \Lambda_{\pm}(p) \delta_{\alpha\beta} - \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} g^2 \int d^4k S_{\mp}^{\alpha\beta}(p \pm k) \Delta_B^{\beta\alpha}(k), \quad (6.4.94)$$

$$\Gamma_{-p}^{\alpha\beta}(p+q; p, q) = \Gamma_{+p}^{\beta\alpha}(p, q; p+q) = \quad (6.4.95)$$

$$= -\lambda \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\rho} - \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \frac{g^2}{M} \int d^4k [S_{+}^{\alpha\beta}(p+q-k) \Delta_B^{\alpha\beta}(k) \delta_{\beta\rho} - S_{-}^{\alpha\beta}(p+k) \Delta_B^{\beta\alpha}(k) \delta_{\alpha\rho}]. \quad (6.4.96)$$

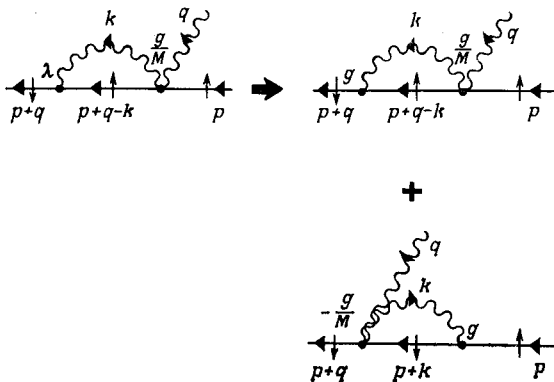


Рис. 6.8.

Важно заметить, что равенства (6.4.94)—(6.4.96) удовлетворяют соотношениям УТ (6.4.65) и (6.4.66), что означает внутреннюю согласованность расчетов.

Из соотношений (6.4.71) и (6.4.96) следует

$$g = \lambda - \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \frac{g^2}{M} \int d^4k [S_{+}^{\alpha\alpha}(-k) \Delta_B^{\alpha\alpha}(k) - S_{-}^{\alpha\alpha}(k) \Delta_B^{\alpha\alpha}(k)], \quad (6.4.97)$$

где не проводится суммирование по α . Далее соотношения (6.4.72) и (6.4.94) дают

$$\begin{aligned} \bar{\mu}^2 = \mu^2 - \frac{\lambda}{2} (n_{+} + n_{-}) - \frac{i\hbar g^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \{ S_{+}^{\alpha\alpha}(-k) \Delta_B^{\alpha\alpha}(k) + \\ + S_{-}^{\alpha\alpha}(k) \Delta_B^{\alpha\alpha}(k) \}, \quad (6.4.98) \end{aligned}$$

где также не проводится суммирование по α . Из соотношений (6.4.72), (6.4.94) следует также равенство

$$\int d^4k S_{\pm}^{11}(\mp k) \Delta_B^{11}(k) = \int d^4k S_{\pm}^{22}(\mp k) \Delta_B^{22}(k), \quad (6.4.99)$$

причем эти величины вещественны. Эти условия могут быть подтверждены прямыми вычислениями.

Исключая неперенормированные константы μ^2 и λ из выражений (6.4.94)—(6.4.96) с помощью соотношений (6.4.97) и (6.4.98), получаем

$$S_{\pm}^{-1\alpha\beta}(p) = \tilde{\Lambda}_{\pm}(p) \delta_{\alpha\beta} - \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} g^2 \int d^4k \left(S_{\pm}^{\alpha\beta}(\mp k) \Delta_B^{\alpha\beta}(k) - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \sum_a S_{\mp}^{aa}(\pm k) \Delta_B^{aa}(k) \right), \quad (6.4.100)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{-p}^{\alpha\beta}(p+q; p, q) &= \Gamma_{+p}^{\beta\alpha}(p, q; p+q) = -g \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\rho} - \\ &- \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \frac{g^2}{M} \delta_{\beta\rho} \int d^4k \left(S_{+}^{\alpha\beta}(p+q-k) \Delta_B^{\alpha\beta}(k) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \sum_a S_{+}^{aa}(-k) \Delta_B^{aa}(k) \right) + \\ &+ \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \frac{g^2}{M} \delta_{\alpha\rho} \int d^4k \left(S_{-}^{\alpha\beta}(p+k) \Delta_B^{\alpha\beta}(k) - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \sum_a S_{-}^{aa}(k) \Delta_B^{aa}(k) \right), \end{aligned} \quad (6.4.101)$$

$$\text{где} \quad \tilde{\Lambda}_{\pm}(p) = p_0 - \frac{\hbar}{2m} \mathbf{p}^2 + \tilde{\mu}^2 \pm \frac{1}{2} gM. \quad (6.4.102)$$

Эти соотношения приводят к следующим простым соотношениям между S_{\pm} и Γ_{\pm} :

$$\begin{aligned} S_{-}^{-1\alpha\beta}\left(p + \frac{q}{2}\right) \delta_{\beta\rho} - S_{+}^{-1\alpha\beta}\left(p - \frac{q}{2}\right) \delta_{\alpha\rho} = \\ = M \Gamma_{-p}^{\alpha\rho}\left(p + \frac{q}{2}; p - \frac{q}{2}, q\right) + \left(q_0 - \frac{\hbar}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\right) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\rho}. \end{aligned} \quad (6.4.103)$$

Заметим, что, как и следовало ожидать, они согласуются с соотношением УТ (6.4.66).

Воспользовавшись соотношениями (6.4.103) и (6.4.75), вычислим теперь двухточечную функцию магнонов в однопетлевом приближении. Подставив (6.4.103) в соотношение (6.4.75), найдем

$$D(q) \Delta_B^{-1}(q) = \frac{1}{M} [D(q) q_0 - N(q) \tau], \quad (6.4.104)$$

где $D(q)$ и $N(q)$ — следующие матрицы размерности 2×2 :

$$D^{\alpha\beta}(q) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4 p \varepsilon^\alpha S_-^{\alpha\beta} \left(p + \frac{q}{2} \right) \varepsilon^\beta S_+^{\beta\alpha} \left(p - \frac{q}{2} \right), \quad (6.4.105)$$

$$N^{\alpha\beta}(q) = \frac{i\hbar^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \varepsilon^\alpha S_-^{\alpha\beta} \left(p + \frac{q}{2} \right) \frac{p \cdot q}{m} S_+^{\beta\alpha} \left(p - \frac{q}{2} \right). \quad (6.4.106)$$

Уравнение (6.4.104) определяет Δ_B :

$$\Delta_B(q) = M\tau \frac{1}{q_0 - D^{-1}(q) N(q)}. \quad (6.4.107)$$

Энергия магнона ω_q определяется уравнением

$$q_0 - D^{-1}(q) N(q) = 0 \quad \text{для } q_0 = \omega_q. \quad (6.4.108)$$

Теперь можно определить однопетлевое приближение следующим образом. Члены однопетлевого разложения получаются интегрированием основных соотношений (6.4.97), (6.4.100)—(6.4.102), (6.4.107) и (6.4.108). В этих интегралах мы пользуемся приближенным равенством

$$S_{\pm}^{-1\alpha\beta}(p) \approx \tilde{\Lambda}_{\pm}(p) \delta_{\alpha\beta} = \quad (6.4.109)$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \left(p_0 - \frac{\hbar}{2m} p^2 + \varepsilon_F \pm \frac{1}{2} gM \right), \quad (6.4.110)$$

где учтено, что химический потенциал $\tilde{\mu}^2$ равен энергии Ферми $\varepsilon_F = \hbar k_F^2/2m$. В этом приближении найдем $\Delta_B(q)$ с помощью соотношения (6.4.107). Результат получается тот же, что и в приближении случайных фаз, когда все параметры заменены их перенормированными значениями. Подставляя это приближенное значение Δ_B и выражение (6.4.110) для $S_{\pm}^{\alpha\beta}(p)$ в интегралы, входящие в (6.4.100), (6.4.101), получим $S_{\pm}^{\alpha\beta}(p)$ и $\Gamma_{\pm}^{\alpha\beta}$ в однопетлевом приближении. Перенормированная константа связи g находится из выражения (6.4.97).

Намагниченность системы определяется формулой

$$M = - \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int_C d^4 p \varepsilon^\alpha \{ S_+^{\alpha\alpha}(p) - S_-^{\alpha\alpha}(p) \}, \quad (6.4.111)$$

где суммирование по α не производится. Здесь путь интегрирования C по переменной p_0 есть полуокружность в верхней полуплоскости комплексного переменного p_0 . Если воспользоваться спектральным представлением (6.4.67) для $S_{\pm}(p)$, то формула (6.4.111) принимает вид

$$M = \frac{\hbar}{(2\pi)^2} \int d^3 p \int d\omega [s_+(\omega, \mathbf{p}) - s_-(\omega, \mathbf{p})] f_F(\omega). \quad (6.4.112)$$

Конкретные расчеты значительно упрощаются, если использовать спектральное представление для S_{\pm} и Δ_B и правила для произведений, приведенные в гл. 4.

Последовательное улучшение петлевого приближения. Теперь очевидно, как усовершенствовать приближение. Начав с выражений для $S_{\pm}(p)$ и $\Gamma_{\pm\rho}^{\alpha\beta}$, полученных выше, мы вычисляем по формуле (6.4.75) уточненное значение Δ_B , а затем проводим более точное вычисление величин S_{\pm} и $\Gamma_{\pm\rho}^{\alpha\beta}$ по формулам (6.4.88)—(6.4.91).

Конкретные вычисления и приложения. Были проведены расчеты в однопетлевом приближении при нулевой температуре [6]. Было обнаружено, что функция магнов имеет вид

$$\Delta_B(q) = \frac{MF(q^2)}{q_0 - \omega_q} + \dots, \quad (6.4.113)$$

где многоточием обозначены члены, в которых нет магнного полюса.

При малых q энергия магнона пропорциональна q^2 . Когда $|q|$ превышает критическое значение, скажем q_c , ω_q совпадает с электрон-электронной или электрон-дырочной энергией и маггон становится нестабильным. Эта область называется стонеровским континуумом. На рис. 6.9 представлена область, где спектральная функция σ_B не равна нулю (рис. 6.9, *a* для случая $\zeta < 1$, рис. 6.9, *b* для случая $\zeta > 1$). Параметр ζ определяется выражением

$$\zeta \equiv gM/\epsilon_F. \quad (6.4.114)$$

Поведение энергии магнов ω_q представлено на рис. 6.10. В точке окончания сплошной линии спектр магнов переходит в стонеровский континуум. Магнный полюс сохраняется и после перехода спектра в область стонеровского континуума, но уже в виде резонанса. Штриховая линия на рис. 6.10 приблизительно соответствует положению резонанса. Неустойчивость этого состояния (и, следовательно, мнимая часть энергии магнов $\gamma(p)$) быстро возрастает при удалении резонанса в глубь стонеровского континуума.

На рис. 6.11 показана зависимость спектральной функции от $\epsilon_q = \hbar q^2/2m$. Здесь в качестве единицы энергии использована величина ϵ_F : $\hat{\epsilon}_q = \epsilon_q/\epsilon_F$. Вклад реального, т. е. стабильного, магнона показан в виде δ -функциональных всплесков, высота которых определяется величиной формфактора $F(q^2)$. На рис. 6.11 заметен острый пик в области стонеровского континуума. Даже если ϵ_q настолько велико, что маггон становится нестабильным, этот пик сохраняется, что отражает существование магнного резонанса. На рис. 6.12 показано положение такого пика спектральной функции бозонов; штрихпунктирная линия и штрихпунктирная линия с двумя точками отмечают положения пика расчетной кривой σ_B при постоянной энергии и постоянном импульсе соответственно, а штриховая линия — результат расчета в резо-

нанном приближении. На рис. 6.12 видно, что с увеличением q результаты расчета в резонансном приближении все сильнее отличаются от результатов расчетов, показанных штрихпунктирной линией. Отсюда следует, что резонансное приближение нельзя

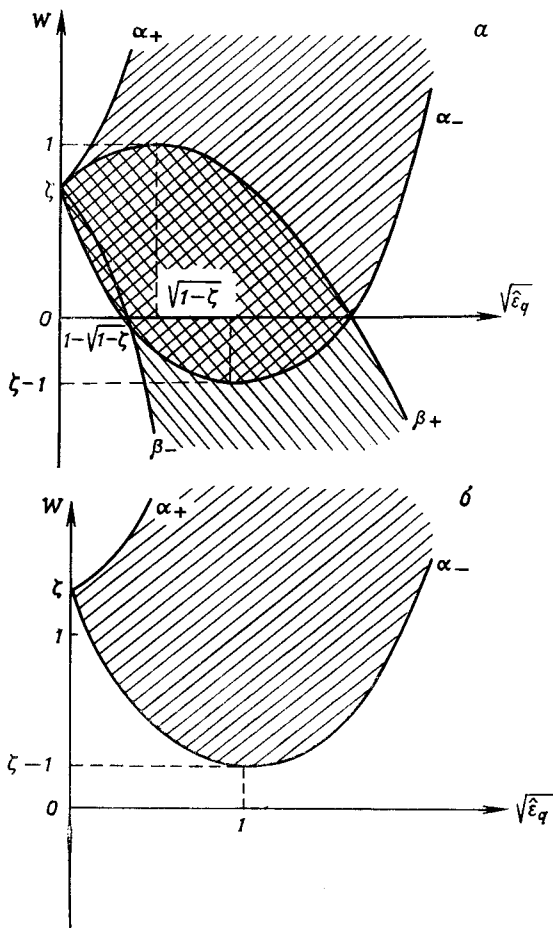


Рис. 6.9.

использовать до тех пор, пока дебаевская экранировка не перекроет полностью ту область, в которой магнон становится нестабильным. Спектральную функцию σ_B можно экспериментально определить при исследовании рассеяния нейтронов. Хотя формфактор магнона $F(q^2)$ обращается в нуль на границе стонеровского континуума, но этот континуум дает большой вклад вследствие резонансного поведения спектральной функции. Сплошными линиями на

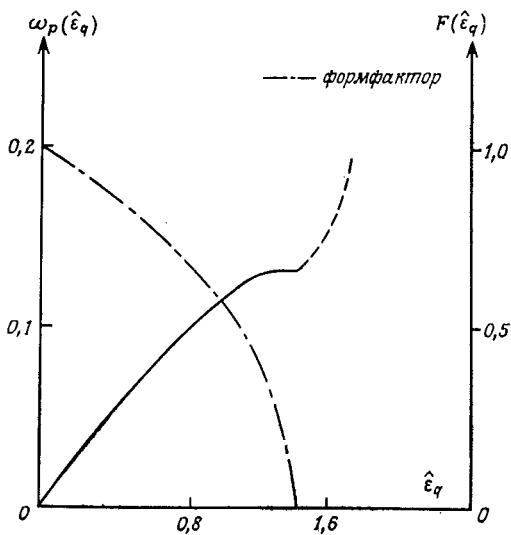


Рис. 6.10.

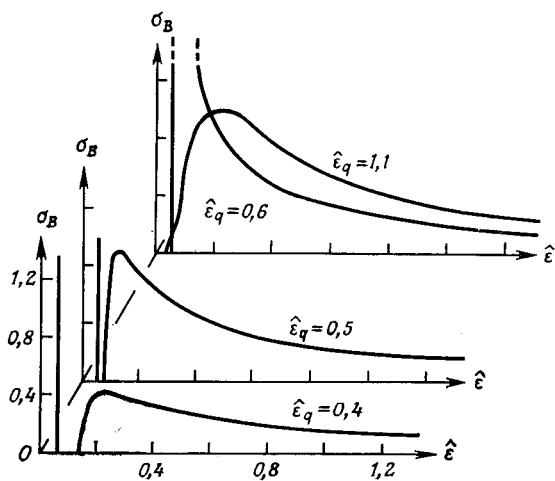


Рис. 6.11.

рис. 6.12 показано теоретическое распределение интенсивности функции σ_B . Это распределение очень похоже на экспериментально наблюдаемое распределение [7]. Используя приведенные в данном разделе формулы, эти расчеты можно распространить на конечные температуры.

Хотя в этом разделе наше внимание было сосредоточено на ферромагнитной фазе, все соотношения УТ применимы также и

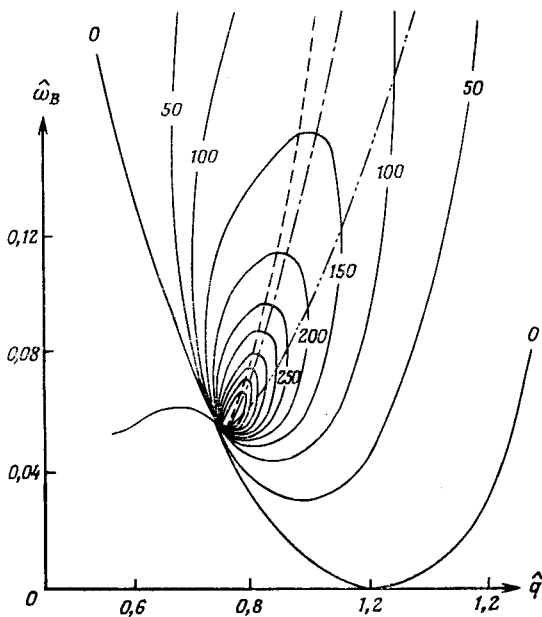


Рис. 6.12.

к парамагнитной фазе. В этом случае член в лагранжиане $\hat{\mathcal{L}}_e$, приводящий к нарушению симметрии (выражение (6.4.17)), при малом внешнем магнитном поле ε также играет важную роль, так как помогает установить некоторые важные соотношения между функциями отклика [8]. В некотором приближении эти соотношения приводят к так называемому самосогласованному ренормализационному методу Мория—Кавабаты [9], который использовался для объяснения кюри-вейсовского поведения зонных электронов и некоторых других явлений в парамагнитной фазе, образованной спиновой системой зонных электронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Noether E., Goett. Nachr., 235 (1918).
2. Ward J. C., Phys. Rev., 78, 182 (1950).
3. Takahashi Y., Nuovo Cim., 6, 370 (1957).

4. *Matsumoto H., Papastamatiou N. J., Umezawa H.*, Nucl. Phys., **B68**, 236 (1974); **B82**, 45 (1974).
5. *Nakanishi N.*, Prog. Theor. Phys., **51**, 1183 (1974);
Takahashi Y., Phys. Rev., **D15**, 1589 (1977).
6. *Matsumoto H., Seki S., Tachiki M., Umezawa H.*, Phys. Rev., **B17**, 2276 (1978).
7. *Ishikawa Y., Shirane G., Tarvin J. A., Kohgi M.*, Phys. Rev., **B16**, 4956 (1977);
Ishikawa Y., J. Magn. Mat., **14**, 123 (1979).
8. *Whitehead J., Matsumoto H., Umezawa H.*, Phys. Rev., **B** (1982).
9. *Moriya T., Kawabata A.*, J. Phys. Soc. Jap., **34**, 639 (1973);
Moriya T., J. Mag. Magn. Mat., **14**, 123 (1979).

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПЕРЕСТРОЙКА СИММЕТРИИ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

7.1. Общее рассмотрение

Перестройка симметрии. В предыдущих разделах мы использовали два языка: один основывался на гейзенберговских полях (например, ψ), в терминах которых записаны основные уравнения, а другой — на свободных физических полях (например, φ^0), с помощью которых построено пространство Фока. Переход от одного языка к другому называется динамическим отображением и обозначается символом $\psi(x; \varphi^0)$. Эта дуальная структура языка квантовой теории поля приводит к чрезвычайно сложному механизму проявления симметрии.

Предположим теперь, что уравнения Гейзенберга имеют форму, инвариантную относительно непрерывного преобразования (преобразования с непрерывными параметрами):

$$\psi \rightarrow \psi' = Q(\psi). \quad (7.1.1)$$

Часто оказывается, что основное состояние не имеет такой Q -симметрии. Хорошо известный пример — кристалл, в котором пространственно-трансляционная симметрия нарушена за счет образования решеточной структуры, хотя уравнения Гейзенберга для взаимодействующих полей молекул трансляционно инвариантны. Другой классический пример — ферромагнетик, в котором нарушена спин-вращательная симметрия. Хотя это и не очевидно из визуальных наблюдений структуры, сверхпроводимость представляет собой пример нарушения градиентной инвариантности. Эти явления называются спонтанным нарушением симметрии [1, 2]. Важнейшей чертой этих явлений является то, что начальная Q -симметрия не просто теряется, а при этом возникают определенные структуры (упорядоченные состояния), такие, как кристаллические решетки, системы поляризованных спинов в ферромагнетиках и т. д. Естественно ожидать, что появление нового порядка есть проявление исходной инвариантности. Здесь очень важно различать понятия «симметрия» и «инвариантность». Очевидно, что инвариантность теории никогда не может исчезнуть. Но, поскольку симметрия есть проявление инвариантной природы, форма симметрии уравнений Гейзенберга может отличаться от форм симметрии наблюдаемых явлений. Это изменение проявления симметрии называется динамической перестройкой симметрии [3].

Чтобы пояснить приведенную выше аргументацию, напомним, что гейзенберговское поле $\psi(x)$ выражается через физическое поле $\varphi^0(x)$ с помощью динамического отображения

$$\psi(x) = \psi(x; \varphi^0). \quad (7.1.2)$$

Если динамическое отображение (7.1.2) известно, линейная комбинация произведений ψ (например, $F(\psi)$) получается с помощью умножения и дополнительных правил действий над матрицами (т. е. операционного правила для преобразования произведений нормальных произведений φ^0 в сумму нормальных произведений тех же физических полей).

Зная динамическое отображение (7.1.2), мы можем ввести операцию, называемую подстановкой. Подстановка есть операция, при которой в динамическом отображении φ^0 заменяется на функционалы от φ^0 (например, $\Phi(\varphi^0)$). Если матричные элементы

$$\langle a | \psi_{\Phi}(x) | b \rangle = \langle a | \psi[x; \Phi(\varphi^0)] | b \rangle \quad (7.1.3)$$

хорошо определены¹⁾, то подстановка (7.1.3) превращает $\psi(x)$ в новый оператор $\psi_{\Phi}(x)$, который действует на пространстве Фока для φ^0 . Поэтому подстановка не изменяет пространство Гильберта.

Если Q -преобразованное гейзенберговское поле $\psi'(x)$ ($=Q[\psi]$) представляет собой сумму конечного числа произведений $\psi(x)$, то $\psi'(x)$ хорошо определено в пространстве Фока для φ^0 : его динамическое отображение имеет вид

$$\psi'(x) = \psi'(x; \varphi^0). \quad (7.1.4)$$

Поскольку $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению Гейзенберга, существуют определенные соотношения, связывающие матричные элементы ψ с матричными элементами ψ' . Отсюда следует, что, по-видимому, можно сделать подстановку $\varphi^0 \rightarrow \varphi^{0'}$, которая удовлетворяет условию

$$\psi'(x; \varphi^0) = \psi(x; \varphi^{0'}). \quad (7.1.5)$$

¹⁾ Часто для определения $\psi_{\Phi}(x)$ требуется совершить некоторый предельный переход. Простым примером является подстановка $\chi^0(x) \rightarrow \chi^0(x) + \theta$ (θ — постоянная, а χ^0 — безмассовое физическое поле), примененная к члену вида $\partial^2 ((1/\partial^2) : \chi^0(x)^2 :)$. Чтобы избежать трудностей, связанных с тем, что процедура применения оператора $(1/\partial^2)$ к константе бессмысленна, вспомним, что $|a\rangle$ и $|b\rangle$ в выражении $\langle a | \psi_{\Phi} | b \rangle$ — состояния, соответствующие волновым пакетам. Поскольку каждый оператор χ^0 в нормальном произведении либо уничтожает частицу в состоянии $|b\rangle$, либо рождает частицу в состоянии $|a\rangle$ и, следовательно, эти состояния представляют собой состояния с определенными волновыми пакетами, каждое поле $\chi^0(x)$ размазано за счет квадратично интегрируемой функции (функции волнового пакета), что следует учитывать при расчете выражений типа $\langle a | \psi_{\Phi} | b \rangle$. Это приводит нас к следующей простой процедуре определения указанной выше подстановки: сначала производится подстановка $\chi^0 \rightarrow \chi^0 + \theta f(x)$, где $f(x)$ пробегает бесконечный ряд квадратично интегрируемых функций, приближаясь к единице, а затем выполняется переход к пределу с помощью соотношения $\lim_{f \rightarrow 1} \partial^2 ((1/\partial^2) f^2(x)) = 1$.

Как будет показано в этом разделе, такая подстановка действительно существует, когда Q -преобразование непрерывно и имеет вид (6.1.4) или (6.1.38). Преобразование φ^0 в $\varphi^{0'}$ мы будем называть q -преобразованием:

$$\varphi^0 \rightarrow \varphi^{0'} = q(\varphi^0). \quad (7.1.6)$$

Таким образом, имеем

$$Q[\psi(x)] = \psi[x; q(\varphi^0)]. \quad (7.1.7)$$

Следовательно, мы установили, что Q -симметрия переходит в q -симметрию (рис. 7.1).

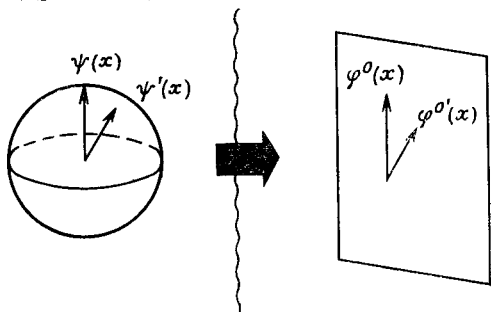


Рис. 7.1.

Спонтанное нарушение симметрии не означает потери инвариантности, оно лишь приводит к тому, что структура с Q -симметрией отлична от структуры с q -симметрией. В качестве примера рассмотрим ферромагнетик. Q -симметрия есть спин-вращательная симметрия трехпараметрической группы $SU(2)$. На первый взгляд в ферромагнетиках имеется только однопараметрическая симметрия, связанная с вращением вокруг направления спиновой поляризации. Но две другие инвариантности не могут просто исчезнуть. Тщательное изучение показывает, что q -симметрия в действительности является трехпараметрической симметрией, хотя она и не относится к группе $SU(2)$. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 7.3.

Соотношение УТ для Q -симметрии. Теперь мы получим соотношение, которое является основным инструментом при исследовании перестройки симметрии. Чтобы это сделать, напомним читателям разд. 6.1, в котором вводятся нётеровский ток и соотношение УТ. Рассмотрим преобразование, отвечающее изменению ψ на величину $\delta^0\psi$, определенную соотношением (6.1.5). Изменение лагранжиана $\delta\mathcal{L}$ определяется выражением (6.1.9). Предположим, что лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно рассматриваемого

преобразования (т. е. $\delta\mathcal{L} = 0$). Добавим к нему бесконечно малый эрмитов член [4]

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \varepsilon\Phi(x), \quad (7.1.8)$$

который нарушает инвариантность. В конце вычислений нужно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если рассматривается случай ферромагнетика, физический смысл члена \mathcal{L}_ε можно интуитивно понять. Чтобы в этом случае установилось направление намагничивания, требуется чрезвычайно слабое магнитное поле (в этом случае ε — магнитное поле, а $\Phi(x)$ — магнитный момент). В целом роль $\mathcal{L}_\varepsilon(x)$ состоит в том, чтобы определить направление, в котором нарушается симметрия. $\Phi(x)$ можно рассматривать как элемент, осуществляющий определенное представление $(\Phi_1 \dots \Phi_l)$, группы Q -симметрии. Для удобства мы выберем $\Phi = \Phi_l$. В дальнейшем будем считать, что поле Φ вещественное; если Φ_l окажется комплексным, перейдем к вещественным полям $\Phi = (\Phi_l + \Phi_l^\dagger)$.

Если рассматриваемое преобразование содержит n параметров θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то существует n нетеровских генераторов N_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Согласно выражению (6.1.9), $\delta\mathcal{L}(x)$, полученное в результате θ_i -преобразования, определяется соотношением

$$\begin{aligned} \theta_i \delta_i \mathcal{L}(x) &= \varepsilon \{ \Phi'(x') - \Phi(x) \} + \varepsilon \theta_i (\partial^\lambda \delta_i x_\lambda) \Phi(x) = \\ &= \theta_i \varepsilon \{ \delta_i \Phi(x) + (\partial^\lambda \delta_i x_\lambda) \Phi(x) \}, \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \theta_i \int d^4x \delta_i \mathcal{L}(x) &= \theta_i \varepsilon \int d^4x \{ \delta_i \Phi(x) - \delta_i x_\lambda \partial^\lambda \Phi(x) \} = \\ &= \theta_i \varepsilon \int d^4x \delta_i^0 \Phi(x). \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

Здесь мы использовали определения $\theta_i \delta_i \Phi(x) = \Phi'(x') - \Phi(x)$ и $\theta_i \delta_i^0 \Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x)$ и соотношение (6.1.7). Поскольку $\theta_i N_i(t)$ порождает преобразование $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \theta_i \delta_i^0 \Phi(x)$, из соотношения (6.1.21) находим

$$[\Phi(x), N_i(t)] \delta(t - t_x) = i\hbar \delta(t - t_x) \delta_i^0 \Phi(x). \quad (7.1.11)$$

Заменяя $\psi(x_1)$ в выражении (6.1.28) на $\delta_i^0 \Phi(x)$ и пользуясь соотношением (6.1.276), получаем соотношение УТ

$$i\hbar \langle 0 | \delta_i^0 \delta_i^0 \Phi(x) | 0 \rangle = \varepsilon \int d^4y \langle 0 | T \{ [\delta_i^0 \Phi(y) - c_i], \delta_i^0 \Phi(x) \} | 0 \rangle, \quad (7.1.12)$$

где $c_i = \langle 0 | \delta_i^0 \Phi(x) | 0 \rangle$. Тогда имеем

$$[\delta_i^0 \Phi(x), N_i(t)] \delta(t - t_x) = i\hbar \delta(t - t_x) \delta_i^0 \delta_i^0 \Phi(x), \quad (7.1.13)$$

где использовано соотношение (6.1.21).

Теорема Голдстоуна. Примем теперь, что для определенного выбора (i, j) справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle 0 | \delta_i^0 \delta_j^0 \Phi(x) | 0 \rangle \neq 0. \quad (7.1.14)$$

Тогда при интегрировании по d^4y в соотношении (7.1.12) должен возникнуть член, пропорциональный $1/\varepsilon$, поскольку в спектральном представлении правой части выражения (7.1.12) содержится полюсная особенность, связанная с теми энергиями, величина которых при нулевом импульсе порядка ε (т. е. при $\varepsilon = 0$ энергетический спектр бесщелевой). Это приводит нас к теореме Голдстоуна [1, 2, 5], утверждающей, что если выполняется условие (7.1.14), то возникают физические бозоны с бесщелевым энергетическим спектром. Обозначим эти бозоны $\chi_i^0(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Эти бозоны называются голдстоуновскими. Без потери общности мы можем так выбрать эти бозоны, чтобы все они были вещественными. Заметим, что если $N_i | 0 \rangle = 0$ для всех i и $\varepsilon = 0$, то из выражения (7.1.13) следует, что все элементы $\langle 0 | \delta_i^0 \delta_j^0 \Phi | 0 \rangle$ обращаются в нуль в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, из условия (7.1.14) при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует, что для некоторого значения i $N_i(t) | 0 \rangle \neq 0$, и, следовательно, основное состояние не инвариантно относительно преобразования типа $\exp \left[i \sum_i \theta_i N_i \right]$. Именно по этой причине неравенство (7.1.14) называют условием спонтанного нарушения симметрии.

Приведенные выше соображения показывают, что динамическое отображение $[\delta_i^0 \Phi(x) - c_i]$ содержит в качестве линейных членов голдстоуновские бозоны:

$$\delta_i^0 \Phi(x) - c_i = \sum_{j=1}^m C_{ij}(\partial) \chi_j^0(x) + \dots \quad (7.1.15)$$

Коэффициент $C_{ij}(\partial)$ может содержать производные.

Мы можем написать

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\chi_i^0(x), \chi_j^0(y)] | 0 \rangle &= \\ &= \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \delta_{ij} \int d^4p \exp[ip(x-y)] \frac{1}{p_0^2 - \omega_p^2 + \varepsilon a_i + i\delta}, \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

где $\omega_p = 0$ при $p = 0$. Здесь мы приняли, что уравнение свободного поля для χ_i^0 типа 2. Из соотношения (7.1.16) следует

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int d^4y \langle 0 | T \{ [\delta_i^0 \Phi(y) - c_i], \delta_j^0 \Phi(x) \} | 0 \rangle &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int d^4y \langle 0 | T \{ [\delta_i^0 \Phi(y) - c_i], [\delta_j^0 \Phi(x) - c_j] \} | 0 \rangle = \\ &= i\hbar \sum_{k=1}^m C_{ik}(0) C_{jk}(0) \frac{1}{a_k}. \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

Когда голдстоуновский бозон χ^0 удовлетворяет уравнению свободного поля типа 1, поле имеет комплексное значение. В таких случаях комбинации $(\chi^0 + \chi^{0+})/2^{1/2}$ и $i(\chi^0 - \chi^{0+})/2^{1/2}$ являются вещественными полями, причинные двухточечные функции которых имеют полюсные члены вида

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_0 - \omega + \varepsilon a + i\delta} + \frac{1}{-p_0 - \omega' + \varepsilon a + i\delta} \right), \quad (7.1.18)$$

где $\omega \equiv \omega(p)$ и $\omega' \equiv \omega(-p)$. Это опять приводит нас к соотношению (7.1.17).

Поскольку $\Phi(x)$ и N_i — вещественные, $\delta_i^0 \Phi(x)$ также вещественны. Таким образом, коэффициенты $C_{ih}(0)$ вещественны, а матрица, ij -й элемент которой равен $\sum_h (1/a_h) C_{ih}(0) C_{jh}(0)$, вещественна и симметрична. Следовательно, эту матрицу можно диагонализировать с помощью ортогональной матрицы, например $u = (u_{ij})$. Тогда линейный член в динамическом отображении $\sum u_{ij} \delta_j^0 \Phi$ для каждого i содержит не более одного голдстоуновского бозона. Кроме того, если мы используем для генераторов выражение $\sum u_{ij} N_j$, то эти генераторы вызывают изменения Φ , равные $\sum u_{ij} \delta_j^0 \Phi$. Поэтому мы можем всегда так составить генераторы N_i , чтобы линейный член динамического отображения $\delta_i^0 \Phi$ для каждого i не содержал более одного голдстоуновского бозона:

$$\delta_i^0 \Phi(x) - c_i = Z_i^{1/2}(\partial) \chi_i^0(x) + \dots \quad (7.1.19)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что генераторы N_i построены описанным выше образом. Тогда имеем

$$Z_i = 0 \quad \text{для } i = m + 1, \dots, n, \quad (7.1.20)$$

$$N_i |0\rangle \neq 0 \quad \text{для } i = 1, \dots, m, \quad (7.1.21)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle 0 | \delta_i^0 \delta_j^0 \Phi(x) | 0 \rangle = v_i \delta_{ij}, \quad (7.1.22)$$

$$v_i \begin{cases} \neq 0 & \text{для } i = 1, \dots, m, \\ = 0 & \text{для } i = m + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (7.1.23)$$

При этом соотношение (7.1.12) вместе с (7.1.23) и (7.1.17) приводит к соотношению

$$v_i = Z_i(0)/a_i \quad \text{для } i = 1, \dots, m. \quad (7.1.24)$$

Условие (7.1.21) или (7.1.23) определяет число голдстоуновских бозонов. Тогда уравнение свободного поля для χ_i^0 записывается в виде

$$\lambda_i(\partial) \chi_i^0(x) = 0 \quad \text{для } i = 1, \dots, m. \quad (7.1.25)$$

Поскольку энергетический спектр голдстоуновских бозонов бесщелевой, имеем

$$\lambda_i(0) = 0. \quad (7.1.26)$$

Исключение ε из соотношений УТ. Поскольку $\delta_i \mathcal{L}(x) = \varepsilon \delta_i^0 \Phi(x)$, из соотношений УТ следует

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_a \langle 0 | T [O_1(x_1) \dots \delta_i^0 O_a(x_a) \dots] | 0 \rangle = \\ = \varepsilon \int d^4 y \langle 0 | T \{ [\delta_i^0 \Phi(y) - c_i], O_1(x_1) \dots \} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

где $\psi(x_a)$ в (6.1.28) заменено символом $O_a(x_a)$, обозначающим любой гейзенберговский оператор. В соотношении (7.1.27) $\delta_i^0 O_a(x)$ определено соотношением

$$[O_a(x), N_t(t)] \delta(t - t_x) = i\hbar \delta(t - t_x) \delta_i^0 O_a(x). \quad (7.1.28)$$

Чтобы исключить ε из соотношения УТ (7.1.27), воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int d^4 y \langle 0 | T \{ [\delta_i^0 \Phi(y) - c_i], \dots \} | 0 \rangle = \\ = \frac{1}{a_i} \int d^4 y \lambda_i(\partial_y) \langle 0 | T [\delta_i^0 \Phi(y), \dots] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.1.29)$$

Чтобы ее доказать, заметим сначала, что если $F(x)$ — функция, фурье-амплитуда которой не содержит полюсной особенности, связанной с бесщелевым энергетическим спектром, то справедливо равенство $\int d^4 y \lambda_i(\partial_y) F(y) = 0$, так как $\lambda(0) = 0$. Поскольку члены, обозначенные в динамическом преобразовании (7.1.19) многоточием, не порождают полюсной особенности в спектральном представлении двухточечных функций, состоящих из гейзенберговских операторов $(\delta_i^0 \Phi - c_i)$, то мы имеем

$$\begin{aligned} \int d^4 y \lambda_i(\partial_y) \langle 0 | T \{ \delta_i^0 \Phi(y), [\delta_j^0 \Phi(z) - c_j] \} | 0 \rangle = \\ = Z_i(0) \int d^4 y \lambda_i(\partial_y) \langle 0 | T [\chi_i^0(y), \chi_j^0(z)] | 0 \rangle = i\hbar Z_i(0) \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (7.1.30)$$

где использованы соотношения (3.6.34) или (3.6.39), из которых следует, что $\langle 0 | T [\chi_i^0(y), \chi_j^0(z)] | 0 \rangle$ — гриновская функция дифференциального оператора $\lambda_i(\partial)$:

$$\lambda_i(\partial_y) \langle 0 | T [\chi_i^0(y), \chi_j^0(z)] | 0 \rangle = i\hbar \delta^{(4)}(y - z) \delta_{ij}.$$

С другой стороны, выражение (7.1.17) с $C_{i\hbar}(0) = Z_i^{1/2}(0) \delta_{i\hbar}$

приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int d^4 y \langle 0 | T \{ [\delta_i^0 \Phi(y) - c_i], [\delta_j^0 \Phi(z) - c_j] \} | 0 \rangle = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_i^{1/2}(0) Z_j^{1/2}(0) \varepsilon \int d^4 y \langle 0 | T [\chi_i^0(y) \chi_j^0(z)] | 0 \rangle = i \hbar \delta_{ij} \frac{1}{a_i} Z_i(0). \end{aligned} \quad (7.1.31)$$

Соотношения (7.1.30) и (7.1.31) дают

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int d^4 y \langle 0 | T \{ [\delta_i^0 \Phi(y) - c_i], [\delta_j^0 \Phi(z) - c_j] \} | 0 \rangle = \\ = \frac{1}{a_i} \int d^4 y \lambda_i(\partial_y) \langle 0 | T \{ \delta_i^0 \Phi(y), [\delta_j^0 \Phi(z) - c_j] \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.1.32)$$

Это частный случай формулы (7.1.29). Чтобы получить формулу (7.1.29), нужно воспользоваться также равенством

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ [\delta_i^0 \Phi(y) - c_i] \dots \} | 0 \rangle = \\ = \int d^4 z \langle 0 | T \{ [\delta_i^0 \Phi(y) - c_i], [\delta_i^0 \Phi(z) - c_i] \} | 0 \rangle q(z) \end{aligned} \quad (7.1.33)$$

(суммирование по i не производится), где $q(z)$ — некоторая функция. Эта формула может быть получена из рассмотрения общей структуры фейнмановских диаграмм. Используя выражения (7.1.32), (7.1.33) и соотношение $\lambda_i(\partial) c_i = \lambda_i(0) c_i = 0$ (ср. с (7.1.26)), получаем формулу (7.1.29).

Используя формулу (7.1.29) и полагая $\varepsilon = 0$, можно переписать соотношение УТ (7.1.27) в виде

$$\begin{aligned} i \hbar \sum_a \langle 0 | T [O_1(x_1) \dots \delta_i^0 O_a(x_a) \dots] | 0 \rangle = \\ = \frac{1}{a_i} \int d^4 y \lambda_i(\partial_y) \langle 0 | T [\delta_i^0 \Phi(y) O_1(x_1) \dots] | 0 \rangle \quad \text{для } i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (7.1.34)$$

Таким образом, мы исключили ε из соотношения УТ (7.1.27).

Перестройка симметрии. Пусть φ_i^0 ($i = 1, 2, \dots$) — все физические поля, кроме голдстоуновских бозонов. Их уравнения записываются в виде

$$\Lambda_i(\partial) \varphi_i^0 = 0. \quad (7.1.35)$$

Затем, поскольку $Z_i^{-1/2}(\partial) [\delta_i^0 \Phi(x) - c_i]$ ($i = 1, 2, \dots, m$) — связывающее поле для χ_i^0 (см. равенство (7.1.19)), соотношения (3.5.17), (3.5.18) дают

$$S\psi(x) = : \langle T [\psi(x) \exp \mathcal{A}] \rangle_c, \quad (7.1.36)$$

$$S = : \langle T [\exp \mathcal{A}] \rangle_c, \quad (7.1.37)$$

где определение скобок под знаком T -произведения приведено в абзаце, следующем за формулой (3.5.14); кроме того,

$$\mathcal{A} = -\frac{i}{\hbar} \int d^4\xi \left(\sum_{i=1}^m \chi_i^0(\xi) \lambda_i(\partial) Z_i^{-1/2}(\partial) \delta_i^0 \Phi(\xi) + \sum_i [\varphi_i^0(\xi) \Lambda_i(\partial) \phi_i(\xi)] \right). \quad (7.1.38)$$

Здесь ϕ_i — связывающее поле для φ_i^0 . Для свободных физических полей мы выберем входящие поля (т. е. $\chi_i^0 \equiv \chi_i^{\text{in}}$, $\varphi_i^0 \equiv \varphi_i^{\text{in}}$).

Будем искать такое q -преобразование

$$\begin{aligned} \chi_j^0(x) &\rightarrow \chi_j^0(x) + \theta_j \delta_j \chi_j^0(x), \\ \varphi_j^0(x) &\rightarrow \varphi_j^0(x) + \theta_j \delta_j \varphi_j^0(x), \end{aligned} \quad (7.1.39)$$

которое порождает \bar{Q} -преобразование гейзенберговского поля $\psi(x)$, не меняющее величины S (вследствие инвариантности уравнения Гейзенберга). Поскольку Q -преобразование непрерывно, для нашей цели достаточно рассмотреть только бесконечно малые преобразования. Тогда соотношения (7.1.36) и (7.1.37) приводят к условиям

$$:\langle T [\delta_i^0 O(x) \exp \mathcal{A}] \rangle_c :=$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{\hbar} : \left\langle T \left[O(x) \int d^4\xi \sum_{j=1}^m \delta_j \chi_j^0(\xi) \lambda_j(\partial) Z_j^{-1/2} \delta_j^0 \Phi(\xi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_j \delta_j \varphi_j^0(\xi) \Lambda_j(\partial) \phi_j(\xi) \right] \exp \mathcal{A} \right\rangle_c : \quad (7.1.40) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{i}{\hbar} : \left\langle T \left[\int d^4\xi \left(\sum_j \delta_j \chi_j^0(\xi) \lambda_j(\partial) Z_j^{-1/2} \delta_j^0 \Phi(\xi) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_j \delta_j \varphi_j^0(\xi) \Lambda_j(\partial) \phi_j(\xi) \right] \exp \mathcal{A} \right\rangle_c : \quad (7.1.41) \end{aligned}$$

соответственно. Здесь $O(x)$ обозначает гейзенберговский оператор. Заметим, что соотношение (7.1.41) является частным случаем соотношения (7.1.40) (при $O(x) = 1$).

С другой стороны, из соотношения УТ (7.1.34) следует
 $i\hbar : \langle T [\delta_i^0 O(x) \exp \mathcal{A}] \rangle_c : +$

$$\begin{aligned}
 &+ : \left\langle T \left[O(x) \int d^4 \xi \left(\sum_{j=1}^m \chi_j^0(\xi) \lambda_j(\partial) Z_j^{-1/2} \delta_i^0 \delta_j^0 \Phi(\xi) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \sum_j \varphi_j^0(\xi) \Lambda_j(\partial) \delta_i^0 \phi_j(\xi) \right) \exp \mathcal{A} \right] \right\rangle_c := \\
 &= \frac{1}{a_i} \int d^4 y \lambda_i(\partial) : \langle T [\delta_i^0 \Phi(y) O(x) \exp \mathcal{A}] \rangle_c :. \quad (7.1.42)
 \end{aligned}$$

Сравнивая (7.1.42) и (7.1.40), находим

$$\begin{aligned}
 &: \left\langle T \left[O(x) \int d^4 \xi \left(\sum_{j=1}^m [Z_j^{-1/2} \chi_j^0(\xi) \lambda_j(\partial) \delta_i^0 \delta_j^0 \Phi(\xi) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + Z_j^{-1/2} \delta_i \chi_j^0(\xi) \lambda_j(\partial) \delta_j^0 \Phi(\xi) \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_j [\delta_i \varphi_j^0(\xi) \Lambda_j(\partial) \phi_j(\xi) + \varphi_j^0(\xi) \Lambda_j(\partial) \delta_i^0 \phi_j(\xi)] - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{a_i} \lambda_i(\partial) \delta_i^0 \Phi(\xi) \right) \exp \mathcal{A} \right] \right\rangle_c := 0 \quad (7.1.43)
 \end{aligned}$$

для $i = 1, 2, \dots, m$. Это определяет q -преобразование.

Чтобы перейти к дальнейшим выкладкам, вспомним следующую лемму. Рассмотрим уравнение для свободного поля $\lambda(\partial) g(x) = 0$. Если двухточечная функция для гейзенберговского оператора $\psi(x)$ не содержит особенности типа полюса $\lambda^{-1}(\partial)$, то

$$\int d^4 x g(x) \lambda(\partial) \langle 0 | T [\psi(x) \dots] | 0 \rangle = 0. \quad (7.1.44)$$

Это можно доказать с помощью интегрирования по частям.

Поскольку $\Phi(x)$ — элемент неприводимого представления группы и поскольку по предположению бесконечно малое преобразование имеет вид

$$\delta_i^0 \Phi_k = i (\lambda_i)_{km} \Phi_m, \quad (7.1.45)$$

справедливы следующие равенства:

$$\delta_i^0 \Phi = i (\lambda_i)_{lm} \Phi_m, \quad (7.1.46)$$

$$\delta_i^0 \delta_j^0 \Phi = i^2 (\lambda_j \lambda_i)_{lm} \Phi_m = \frac{i^2}{2} (\{\lambda_j, \lambda_i\} + \{\lambda_j, \lambda_j\})_{lm} \Phi_m. \quad (7.1.47)$$

Так как λ_i — матрицы преобразования группы, перестановочные соотношения для них подчиняются алгебре Ли

$$[\lambda_i, \lambda_j] = iC_{ijk}\lambda_k. \quad (7.1.48)$$

С помощью соотношений (7.1.46)—(7.1.48) можно параметризовать $i^0\delta_j^0\Phi$:

$$\delta_i^0\delta_j^0\Phi = \sum_k \varepsilon_{ijk}(\partial)\delta_k^0\Phi + \dots, \quad (7.1.49)$$

где

$$\varepsilon_{ijk}(\partial) = -\frac{1}{2}[C_{ijk} + d_{ijk}], \quad (7.1.50)$$

а d_{ijk} определяется с помощью равенства

$$\{\lambda_i, \lambda_j\}_{lm}\Phi_m = id_{ijk}(\lambda_k)_{lm}\Phi_m + \dots,$$

причем

$$d_{ijk} = d_{jik}. \quad (7.1.51)$$

Члены, обозначенные многоточием в (7.1.49) и (7.1.50), не содержат связывающего поля голдстоуновских бозонов и, следовательно, согласно предыдущей лемме, не дают вклада в левую часть соотношения (7.1.43). Заметим, что эти члены не возникают, если $\{\lambda_i, \lambda_j\} = id_{ijk}\lambda_k$.

Мы можем выбрать связывающие поля так, что

$$\delta_i^0\phi_j(x) = \sum_k e_{ijk}(\partial)\phi_k(x) + \dots, \quad (7.1.52)$$

где многоточие обозначает члены, не содержащие связывающих полей $\phi_k^0(x)$ ($k = 1, 2, \dots$). Последние члены не дают вклада в левую часть (7.1.43). Мы видим, что по той же причине вклад в (7.1.43) дают только те $\varepsilon_{ijk}(\partial)$, для которых χ_j^0 и χ_k^0 имеют одну и ту же энергию (т. е. $\lambda_j(\partial) = \lambda_k(\partial)$). Аналогично в выражение (7.1.43) дают вклад только те $e_{ijk}(\partial)$ из (7.1.52), для которых $\Lambda_k(\partial) = \Lambda_j(\partial)$.

Соотношение (7.1.43) приводит теперь к следующему q -преобразованию:

$$\delta_i^0\chi_j^0(x) = [Z_i^{1/2}(0)/a_i]\delta_{ij} - \sum_k' (Z_j/Z_k)\varepsilon_{ikj}(-\partial)\chi_k^0(x), \quad (7.1.53)$$

$$\delta_i^0\phi_j^0(x) = -\sum_k' e_{ikj}(-\partial)\phi_k^0(x). \quad (7.1.54)$$

В соотношениях (7.1.53), (7.1.54) символ Σ' означает, что суммирование проводится только по тем полям, энергии которых равны энергии поля, входящего в левую часть. Преобразования (7.1.53), (7.1.54) являются q -преобразованиями, которые представляют собой наблюдаемые проявления Q -преобразования. В следующем

разделе мы приведем некоторые примеры перестройки симметрии. Форма перестройки симметрии накладывает ограничения на форму динамического отображения.

Докажем теперь, что уравнения свободного поля для физических полей χ_j^0 и φ_j^0 инвариантны относительно q -преобразования. Первое слагаемое в (7.1.53), которое появляется в результате трансляции поля χ_j^0 , не нарушает инвариантности уравнений свободного поля, так как спектр голдстоуновских бозонов не обладает щелью, т. е. $\lambda_j(0) = 0$. Второе слагаемое в (7.1.53) не нарушает инвариантности уравнения свободного поля, так как в него входят только линейные комбинации голдстоуновских полей с одной и той же энергией. Аналогично и (7.1.54) не нарушает инвариантности уравнения свободного поля.

Докажем затем, что q -преобразование оставляет инвариантными канонические соотношения для физических полей. Когда q -преобразование получено в виде

$$\delta_i \chi_j^0 = [Z_i^{1/2}(0)/a_i] \delta_{ij} + i(t_i)_{jk} \chi_k^0, \quad (7.1.55a)$$

$$\delta_i \varphi_j^0 = i(\sigma_i)_{jk} \varphi_k^0, \quad (7.1.55b)$$

каноничность физических полей вытекает из условий

$$(t_i)_{jk} = (t_i^*)_{kj} = - (t_i)_{kj}, \quad (7.1.56)$$

$$(\sigma_i)_{jk} = (\sigma_i^*)_{kj}, \quad (7.1.57)$$

причем вещественность χ_j^0 видна из (7.1.56). Соотношения (7.1.56), (7.1.57) представляют собой условия унитарности для линейной части (7.1.55). Здесь мы докажем только справедливость соотношения (7.1.56), поскольку справедливость равенства (7.1.57) может быть доказана аналогично.

Заметим сначала, что Q -преобразование любого гейзенберговского оператора можно вывести из q -преобразований (7.1.53), (7.1.54), поскольку формула (7.1.43) справедлива для любого $O(x)$. Если динамические отображения операторов A и B заданы, динамическое отображение произведения AB получается заменой произведений нормальных произведений свободных физических полей на линейные комбинации нормальных произведений тех же полей:

$$A(\chi^0) B(\chi^0) = AB(\chi^0). \quad (7.1.58)$$

Для простоты мы рассмотрели только случай голдстоуновских бозонов. Справедливо равенство

$$AB(\chi^0) + \theta^i (\delta_i^0 AB)(\chi^0) = AB(\chi^0 + \theta^i \delta_i \chi^0), \quad (7.1.59)$$

где левая часть — результат Q -преобразования, примененного к AB , а правая часть — результат q -преобразования. С другой стороны, поскольку

$$[A(\chi^0) + \theta^i \delta_i^0 A(\chi^0)][B(\chi^0) + \theta^i \delta_i^0 B(\chi^0)] = AB(\chi^0) + \theta^i \delta_i^0 AB(\chi^0), \quad (7.1.60)$$

то мы имеем

$$A(\chi^0 + \theta^i \delta_i \chi^0) B(\chi^0 + \theta^i \delta_i \chi^0) = AB(\chi^0 + \theta^i \delta_i \chi^0), \quad (7.1.61)$$

откуда следует, что две операции, а именно подстановка (7.1.53), (7.1.54) и взятие произведения, коммутируют друг с другом. Если мы сравним матричные элементы в обеих частях равенства (7.1.61), то обнаружим, что часть полей χ^0 , в которых произведено спаривание, участвующая в образовании произведения $AB(\chi^0)$, не участвует в q -преобразованиях правой части равенства. Следовательно, вклады от них должны обращаться в нуль. В частности, если для A и B выбраны связывающие поля $\chi_i(x)$ и $\chi_j(0)$ соответственно, то среднее по вакууму от величины, определяемой (7.1.61), равно

$$\langle 0 | \chi_i^0(x), \theta^k \delta_k \chi_j^0(y) | 0 \rangle + \langle 0 | \theta^k \delta_k \chi_i^0(x), \chi_j^0(y) | 0 \rangle + G(x, y) = 0, \quad (7.1.62)$$

где $G(x, y)$ содержит два или более спариваний полей χ^0 . Переходя к T -произведениям, получаем

$$\langle 0 | T[\chi_i^0(x) \chi_l^0(y)] | 0 \rangle i\theta_k (t_k)_{jl} + \\ + i\theta_k (t_k)_{il} \langle 0 | T[\chi_l^0(x) \chi_j^0(y)] | 0 \rangle + G_c(x, y) = 0. \quad (7.1.63)$$

Члены, которые содержат в импульсном представлении (7.1.63) полюсы, возникают только из первых двух слагаемых, следовательно, $(t_k)_{ji} = -(t_k)_{ij}$. С другой стороны, поскольку χ_k^0 и $\delta\chi_j^0$ вещественны, из преобразования (7.1.55а) видно, что $(t_i)_{jk}$ мнимая величина. Таким образом, мы получаем соотношение (7.1.56).

Мы показали, что каждое q -преобразование есть комбинация трансляции поля голдстоуновских бозонов $[\chi_j^0(x) \rightarrow \chi_j^0(x) + c\text{-число}]$ и образования линейной комбинации физических полей с одной и той же энергией [6—8], и эта операция оставляет инвариантными уравнения для свободных физических полей и канонические коммутационные соотношения.

Заметим, что генератор, который смешивает некоторые свободные поля с одной и той же энергией, имеет вид $\sum \alpha_i^\dagger \alpha_j$. Следовательно, он разрушает вакуум. Условие $N_i | 0 \rangle \neq 0$ для некоторых значений i приводит к тому, что q -преобразование должно включать трансляцию голдстоуновских полей, когда имеется спонтанное нарушение симметрии. Таким образом, спонтанное нарушение симметрии требует существования бозонов χ^0 с бесщелевым энергетическим спектром. Это еще одно доказательство теоремы Голд-

стоуна. Тот факт, что $v_i \neq 0$ (7.1.23), служит проявлением порядка, который возникает при спонтанном нарушении симметрии. Не обращающиеся в нуль параметры v_i называют параметрами порядка.

Интуитивно понятно, что в упорядоченном состоянии должна быть система некоторых квантовых возбуждений, находящихся в основном состоянии, причем таким образом, что их квантовые числа «отпечатываются» в этом состоянии, создавая структуру. Эти квантовые возбуждения должны подчиняться статистике Бозе, чтобы была возможна их конденсация в основном состоянии. Другими словами, в процессе динамической перестройки возникает нулевой уровень энергии бозонов, и конденсация бозонов в этом состоянии создает структуру основного состояния. Эти бозоны являются голдстоуновскими бозонами. Когда гейзенберговского поля бозе-типа нет, при динамической перестройке, естественно, возникают составные частицы, являющиеся голдстоуновскими бозонами. Если возникает конденсация, при которой плотность конденсата зависит от времени или положения в пространстве, то в результате образуются протяженные во времени или в пространстве объекты. Эти протяженные объекты мы рассмотрим в последующих главах.

Обратим наше внимание теперь на физические поля ϕ_i^0 , энергетический спектр которых имеет щель, и получим соотношение для спаривания типа $(\chi_i \phi_j \phi_i)$ в случае, когда ϕ_j^0 и ϕ_i^0 обладают различными энергетическими спектрами (т. е. $\Lambda_j(\partial) \neq \Lambda_i(\partial)$). Из соотношения УТ (7.1.34) вместе с равенством (7.1.52) получаем соотношение

$$i\hbar \left(\sum_k e_{ijk} \langle 0 | T [\phi_k(x) \phi_l^\dagger(y)] | 0 \rangle + \sum_k e_{ilk}^* \langle 0 | T [\phi_j(x) \phi_k^\dagger(y)] | 0 \rangle \right) = \frac{1}{a_i} \int d^4 z \lambda_i(\partial_z) \langle 0 | T [\delta_i^0 \Phi(z) \phi_j(x) \phi_l^\dagger(y)] | 0 \rangle. \quad (7.1.64)$$

Поскольку представление (7.1.52) унитарно, имеем

$$e_{ijk} = -e_{ikj}^*. \quad (7.1.65)$$

Рассмотрим теперь тот факт, что, поскольку ϕ_i — связывающее поле для ϕ_i^0 , линейный член в динамическом отображении ϕ_i содержит только ϕ_i^0 . Следовательно, содержащий полюс член в спектральном представлении $\langle 0 | T [\phi_k(x) \phi_l^\dagger(y)] | 0 \rangle$ обращается в нуль при $k \neq l$. Тогда из соотношений (7.1.64) и (7.1.65) следует

$$i\hbar e_{ijl} \{ \langle 0 | T [\phi_l(x) \phi_l^\dagger(y)] | 0 \rangle - \langle 0 | T [\phi_j(x) \phi_l^\dagger(y)] | 0 \rangle \}_p = \frac{1}{a_i} \int d^4 z \lambda_i(\partial_x) \langle 0 | T [\delta_i^0 \Phi(x) \phi_j(x) \phi_l^\dagger(y)] | 0 \rangle_p, \quad (7.1.66)$$

где индекс p относится к вкладу полюсных членов ϕ_i^0 и ϕ_j^0 . Предположим, что ϕ_i^0 и ϕ_j^0 имеют один и тот же энергетический спектр.

Тогда левая часть обращается в нуль, а правая становится элементом S -матрицы, соответствующим переходу $\varphi_i^0 \rightarrow \varphi_j^0 + (\chi^0$ с нулевой энергией). В этом случае равенство (7.1.66) — частный случай теоремы о низколежащих уровнях энергии S -матрицы, которая устанавливает, что энергия нулевого состояния χ^0 не дает вклада в S -матрицу. С другой стороны, когда энергия φ_j^0 меньше, чем φ_i^0 при заданном импульсе, мы оставляем в выражении (7.1.66) лишь члены с полюсом у φ_i^0 , что приводит к соотношению

$$i\hbar e_{ij} \langle 0 | T[\phi_i(x) \phi_i^\dagger(y)] | 0 \rangle_{P_i} = \frac{1}{a_i} \int d^4 z \lambda_i(\partial_z) \langle 0 | [\delta_i^0 \Phi(z) \phi_j(x) \phi_i^\dagger(y)] | 0 \rangle_{P_i}. \quad (7.1.67)$$

Здесь индекс P_i обозначает член с полюсом в φ_i^0 . Правая часть соотношения — внешняя по отношению к энергетической оболочке часть ϕ_j ; она может быть использована для определения $(\chi_i \phi_j \phi_i)$ -спаривания. Таким образом, (7.1.67) становится соотношением для константы $(\chi_i \phi_j \phi_i)$ -спаривания, если энергетический спектр φ_j^0 отличен от спектра φ_i^0 . Такое $(\chi_i \phi_j \phi_i)$ -спаривание может индуцировать процесс $\varphi_j^0 \rightarrow \varphi_i^0 + \chi_i^0$ и делать φ_j^0 нестабильным. Аналогичное рассуждение приводит к выводу о том, что φ_i^0 становится нестабильным, когда энергия поля φ_i^0 больше энергии φ_j^0 . Подводя итог, можно сказать, что в представлении $\{\phi_i\}$ q -группы φ_i^0 не могут различаться по энергиям. С другой стороны, нарушение симметрии стремится снять вырождение по энергии у φ_i^0 . Таким образом, часто оказывается, что многие поля φ_i^0 становятся синглетными представлениями q -группы. Этот процесс порождает большое количество φ_i^0 , не меняющихся при q -преобразованиях; эти поля φ_i^0 «заморожены». Таким образом, спонтанное нарушение симметрии стремится заморозить «массивные» поля φ_i^0 , т. е. поля, энергетический спектр которых имеет щель.

Конечные температуры. Завершим этот раздел замечанием о том, что все приведенные выше результаты могут быть распространены на случай систем при конечных температурах, поскольку структура динамического отображения (4.2.53) — (4.2.55) и соотношение УТ (6.2.1) те же, что и при нулевой температуре, хотя при не равной нулю температуре возникает тильда-сопряженное поле.

7.2. Фазовая симметрия

Рассмотрим лагранжиан комплексного гейзенберговского поля $\psi(x)$. Будем считать, что лагранжиан $\mathcal{L}(\psi, \psi^\dagger)$ инвариантен при фазовом преобразовании $\psi \rightarrow \exp(i\theta)\psi$. Примем, что

$$v \equiv \langle 0 | \psi(x) + \psi^\dagger(x) | 0 \rangle \neq 0. \quad (7.2.1)$$

Модель такого вида называется моделью голдстоуновского типа [2, 6]. Мы выберем приводящий к нарушению симметрии лагранжиан \mathcal{L}_ε в виде $\mathcal{L}_\varepsilon = \varepsilon (\psi + \psi^\dagger)$, т. е.

$$\Phi(x) = \psi(x) + \psi^\dagger(x). \quad (7.2.2)$$

Таким образом, фазовое преобразование приводит к тому, что

$$\delta^0 \Phi(x) = \chi(x) = i [\psi(x) - \psi^\dagger(x)]. \quad (7.2.3)$$

Поскольку имеется только один генератор, появляется лишь один голдстоуновский бозон [6] $\chi^0(x)$, уравнение для которого имеет вид

$$D(\partial) \chi^0(x) = 0. \quad (7.2.4)$$

Здесь отсутствие щели в энергетическом спектре $\chi^0(x)$ проявляется в следующем свойстве:

$$D(0) = 0. \quad (7.2.5)$$

Гейзенберговское поле $\chi(x)$ является связывающим полем голдстоуновского бозона:

$$\chi(x) = Z^{1/2}(\partial) \chi^0(x) + \dots \quad (7.2.6)$$

Единственная частица, которая появляется в $(\psi + \psi^\dagger)$ -канале, обычно нестабильна, так как она может распадаться на голдстоуновские бозоны.

Соотношение (7.2.3) приводит к равенству

$$\delta^0 \delta^0 \Phi(x) = -\Phi(x). \quad (7.2.7)$$

Поскольку в правой части (7.2.7) нет $\delta^0 \Phi$ и поскольку в $\Phi(x)$ -канале не появляется ни одного бозона χ^0 , соотношения (7.1.49) и (7.1.53) приводят к равенствам

$$\delta \chi^0(x) = Z^{1/2}(0)/a = v Z^{-1/2}(0), \quad (7.2.8)$$

так как из (7.1.24) следует, что $v = Z(0)/a$. Таким образом, фазовое преобразование

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi \quad (7.2.9)$$

индуцировано преобразованием

$$\chi^0(x) \rightarrow \chi^0(x) + v Z^{-1/2}(0) \theta, \quad (7.2.10)$$

которое представляет собой сдвиг поля $\chi^0(x)$. Преобразование (7.2.9) определяет Q -преобразование, а (7.2.10) — q -преобразование. Таким образом, мы получили динамическую перестройку фазовой симметрии [6]. Приведенные выше результаты показывают, как фаза системы определяется конденсацией голдстоуновских бозонов, которые в этом случае называются фазонами.

Этот результат можно также вывести из правила, согласно которому q -преобразование должно включать сдвиг поля голдстоуновского бозона и может также содержать смешивание физиче-

ских полей. Поскольку существует только один генератор, существует лишь один голдстоуновский бозон. Таким образом, q -преобразование есть просто сдвиг поля голдстоуновского бозона.

Поскольку сдвиг поля χ^0 (7.2.10) порождает фазовое преобразование (7.2.9) гейзенберговского поля ψ , динамические отображения $\psi(x)$ и S имеют вид

$$\psi(x) = : \exp \left(\frac{i}{v} Z^{1/2} (\partial) \chi^0(x) \right) F [\partial \chi^0] :, \quad (7.2.11)$$

$$S = : S [\partial \chi^0] :, \quad (7.2.12)$$

где символом $\partial \chi^0$ обозначены производные от χ^0 .

Рассмотрим теперь фазово-инвариантную модель фермионного гейзенберговского поля, описывающего спиновый дублет $\psi_{\uparrow, \downarrow}(x)$. Лагранжиан инвариантен при фазовом преобразовании

$$\psi_{\uparrow, \downarrow} \rightarrow \exp(i\theta/2) \psi_{\uparrow, \downarrow}(x).$$

Модель этого типа называется моделью сверхпроводимости. В этом случае параметр порядка равен

$$v \equiv \langle 0 | \psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) + \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) | 0 \rangle \neq 0, \quad (7.2.13)$$

а приводящий к нарушению симметрии лагранжиан $\mathcal{L}_e = \epsilon \Phi$, где

$$\Phi(x) = \psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) + \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x). \quad (7.2.14)$$

В этом случае имеем выражение

$$\chi(x) \equiv \delta^0 \Phi(x) = i [\psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) - \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x)], \quad (7.2.15)$$

которое определяет связывающее поле χ^0 для голдстоуновского бозона:

$$\chi(x) = Z^{1/2} (\partial) \chi^0(x) + \dots \quad (7.2.16)$$

Большая часть аргументов в пользу справедливости голдстоуновской модели применима и для модели сверхпроводимости. Единственное существенное отличие состоит в существовании квазиэлектрона φ^0 . Таким образом, мы можем показать, что сдвиг поля

$$\chi^0(x) \rightarrow \chi^0(x) + \hbar v Z^{-1/2}(0) \theta \quad (7.2.17)$$

приводит к фазовому преобразованию

$$\psi \rightarrow \exp(i\hbar\theta/2) \psi. \quad (7.2.18)$$

Динамические отображения ψ и S имеют вид, сходный с (7.2.11), (7.2.12):

$$\psi(x) = : \exp \left(\frac{i}{2v} Z^{1/2} (\partial) \chi^0(x) \right) F [\partial \chi^0, \varphi^0] :, \quad (7.2.19)$$

$$S = : S [\partial \chi^0, \varphi^0] :, \quad (7.2.20)$$

Вспомним теперь, что плотность

$$\rho(x) = \psi^\dagger(x) \psi(x) \quad (7.2.21)$$

удовлетворяет перестановочным соотношениям для операторов, взятых в один и тот же момент времени:

$$[\psi(x), \psi^\dagger(y) \psi(y)] \delta(t_x - t_y) = \hbar \psi(x) \delta^{(4)}(x - y), \quad (7.2.22)$$

откуда следует, что

$$N = - \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) \quad (7.2.23)$$

является генератором фазового преобразования. Поскольку N генерирует фазовое преобразование, генератор N конструируется при помощи величины, канонически сопряженной величине $(2v)^{-1} Z^{1/2}(\partial) \chi^0$, а именно

$$N = 2v \int d^3x Z^{-1/2}(\partial) \frac{\partial}{\partial t} \chi^0. \quad (7.2.24)$$

Поэтому динамическое отображение $\rho(x)$ имеет вид

$$\rho(x) = -2v Z^{-1/2}(\partial) \frac{\partial}{\partial t} \chi^0(x) + \dots \quad (7.2.25)$$

Вспоминая, что N — нётеровский генератор, мы будем считать, что $\rho(x)$ — четвертая компонента нётеровского тока: $\rho(x) = -N_0$. С другой стороны, поскольку энергетический спектр χ^0 не имеет щели, равенство (7.2.4) можно переписать в виде

$$D^\mu(\partial) \partial_\mu \chi^0 = 0. \quad (7.2.26)$$

Таким образом, из закона сохранения тока $\partial^\mu N_\mu = 0$ следует, что динамическое отображение N_μ имеет вид

$$N_\mu(x) = -2v Z^{-1/2}(\partial) D_\mu \chi^0(x) + \dots \quad (7.2.27)$$

7.3. Динамическая перестройка спиновой симметрии

В этом разделе мы изучаем спонтанное нарушение спин-вращательной симметрии, которое приводит к состоянию с упорядочением спинов (ферромагнитному состоянию).

Пусть $S(x)$ — гейзенберговское поле спина:

$$[S_i(x), S_j(y)] \delta(t_x - t_y) = i \epsilon_{ijk} S_k(x) \delta^4(x - y), \quad (7.3.1)$$

где ϵ_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, на компоненты которого наложено условие $\epsilon_{123} = 1$.

Чтобы уточнить, каким образом нарушается спиновая симметрия, введем дополнительный лагранжиан

$$\mathcal{L}_\epsilon(x) = \epsilon S_3(x), \quad (7.3.2)$$

который приводит к нарушению спин-вращательной симметрии. Бесконечно малая константа ε имеет смысл слабого внешнего магнитного поля, которое определяет направление поляризации. В конце расчета нужно выполнить предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Группа вращений спина содержит повороты вокруг третьей оси, которые составляют абелеву подгруппу. Заметим, что \mathcal{L}_ε в равенстве (7.3.2) инвариантно относительно преобразований этой абелевой подгруппы. Такую ситуацию можно охарактеризовать утверждением, что эта абелева подгруппа есть подгруппа устойчивости.

Поскольку мы принимаем, что вращательная симметрия относительно третьей оси не нарушается, потребуем выполнения условия

$$v = \langle 0 | S_3(x) | 0 \rangle \neq 0. \quad (7.3.3)$$

Изменения $S_i(x)$ и $\mathcal{L}_\varepsilon(x)$ из-за поворота вокруг j -й оси на бесконечно малый угол θ_j равны соответственно

$$\theta_j \delta_j^0 S_i(x) = \theta_j \varepsilon_{jik} S_k(x), \quad (7.3.4)$$

$$\theta_j \delta_j^0 \mathcal{L}_\varepsilon(x) = \varepsilon \theta_j \varepsilon_{jzk} S_k(x). \quad (7.3.5)$$

Поэтому, например, можно написать

$$\delta_1^0 S_3(x) = -S_2(x), \quad (7.3.6)$$

$$\delta_2^0 S_3(x) = S_1(x), \quad (7.3.7)$$

$$\delta_1^0 \mathcal{L}_\varepsilon(x) = -\varepsilon S_2(x), \quad (7.3.8)$$

$$\delta_2^0 \mathcal{L}_\varepsilon(x) = \varepsilon S_1(x), \quad (7.3.9)$$

$$\delta_1^0 \delta_1^0 S_3(x) = \delta_2^0 \delta_2^0 S_3(x) = -S_3(x). \quad (7.3.10)$$

Тогда равенство (7.1.12) при $i = j = 1$ и $\Phi(x) = S_3(x)$ приводит к соотношению УТ

$$-i\hbar v = \varepsilon \int d^4y \langle 0 | T [S_2(y), S_2(x)] | 0 \rangle. \quad (7.3.11)$$

Аналогично равенство (7.1.12) при $i = j = 2$ и $\Phi(x) = S_3(x)$ приводит к соотношению

$$-i\hbar v = \varepsilon \int d^4y \langle 0 | T [S_1(y), S_1(x)] | 0 \rangle. \quad (7.3.12)$$

Вспоминая соотношение (7.1.19) и полагая $\Phi = S_3$, можно показать, что здесь имеются два голдстоуновских бозона χ_1^0 и χ_2^0 , в энергетическом спектре которых нет щели, и что S_i ($i = 1, 2$) — связывающие поля этих голдстоуновских бозонов:

$$S_1(x) = \delta_2^0 S_3(x) = Z^{1/2}(\partial) \chi_2^0(x) + \dots, \quad (7.3.13a)$$

$$S_2(x) = -\delta_1^0 S_3(x) = -Z^{1/2}(\partial) \chi_1^0(x) + \dots \quad (7.3.13b)$$

Здесь нормировочный множитель $Z(\partial)$ для S_1 и S_2 один и тот же, поскольку симметрия вращения относительно третьей оси сохраняется. Следствием этой вращательной симметрии является также то, что χ_1^0 и χ_2^0 удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\lambda(\partial)\chi_i^0 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (7.3.14)$$

Поскольку в спектре этих бозонов нет щели, имеем

$$\lambda(0) = 0. \quad (7.3.15)$$

Далее, из соотношения (7.1.24) следует

$$v = Z(0)/a, \quad (7.3.16)$$

где a определяется равенством (7.1.18).

Удобно ввести комплексное поле

$$\chi^0 = 2^{-1/2}(\chi_2^0 - i\chi_1^0). \quad (7.3.17)$$

Эрмитово сопряженное поле определяется выражением

$$\chi^{0+} = 2^{-1/2}(\chi_2^0 + i\chi_1^0). \quad (7.3.18)$$

Очевидно, что

$$\lambda(\partial)\chi^0 = 0. \quad (7.3.19)$$

Поле χ^{0+} порождает квантовое возбуждение, называемое магномом, а поле χ^0 уничтожает его. Связывающее поле магнона $S_- = 2^{-1/2}(S_1 - iS_2)$ равно

$$S_-(x) = Z^{1/2}(\partial)\chi^{0+}(x) + \dots \quad (7.3.20)$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\delta_1^0\delta_2^0S_3 = \delta_2^0\delta_1^0S_3 = 0, \quad (7.3.21)$$

$$\delta_i^0\delta_3^0S_3 = 0, \quad (7.3.22)$$

$$\delta_3^0\delta_1^0S_3 = S_1 = \delta_2^0S_3 \quad (7.3.23)$$

$$\delta_3^0\delta_2^0S_3 = S_2 = -\delta_1^0S_3, \quad (7.3.24)$$

$$\delta_1^0\delta_1^0S_3 = \delta_2^0\delta_2^0S_3 = -S_3. \quad (7.3.25)$$

Таким образом, соотношение (7.1.49) дает

$$\varepsilon_{312}(\partial) = -\varepsilon_{321}(\partial) = 1, \quad (7.3.26)$$

$$\text{остальные } \varepsilon_{ijk}(\partial) = 0. \quad (7.3.27)$$

Из выражения (7.1.53) теперь видно, что поворот относительно первой оси на бесконечно малый угол θ_1 вызван преобразованиями

$$\begin{aligned}\chi_1^0(x) &\rightarrow \chi_1^0(x) + v\theta_1 Z^{-1/2}(0), \\ \chi_2^0(x) &\rightarrow \chi_2^0(x),\end{aligned}\quad (7.3.28)$$

а поворот относительно второй оси на бесконечно малый угол θ_2 — преобразованиями

$$\begin{aligned}\chi_1^0(x) &\rightarrow \chi_1^0(x), \\ \chi_2^0(x) &\rightarrow \chi_2^0(x) + v\theta_2 Z^{-1/2}(0).\end{aligned}\quad (7.3.29)$$

Поворот относительно третьей оси на бесконечно малый угол θ_3 вызван преобразованиями

$$\begin{aligned}\chi_1^0 &\rightarrow \chi_1^0(x) + \theta_3 \chi_2^0(x), \\ \chi_2^0(x) &\rightarrow \chi_2^0(x) - \theta_3 \chi_1^0(x).\end{aligned}\quad (7.3.30)$$

Если угол θ_3 конечен, то вследствие того, что вращательная симметрия относительно третьей оси не нарушается, (7.3.30) принимает вид

$$\begin{aligned}\chi_1^0 &\rightarrow \cos \theta_3 \chi_1^0 + \sin \theta_3 \chi_2^0, \\ \chi_2^0 &\rightarrow \cos \theta_3 \chi_2^0 - \sin \theta_3 \chi_1^0.\end{aligned}\quad (7.3.31)$$

С другой стороны, повторное применение преобразований (7.3.28), (7.3.29) показывает, что эти преобразования остаются справедливыми и при конечных θ_1 и θ_2 .

Таким образом, мы видим, что преобразования (7.3.28), (7.3.29) и (7.3.31) являются преобразованиями q -симметрии, которые индуцируют спиновые вращения гейзенберговского оператора. Поскольку группа q -симметрии состоит из двух сдвигов поля и одного поворота, она является двумерной евклидовой группой симметрии (т. е. группой $E(2)$).

Приведенные выше результаты можно сформулировать следующим образом: группа симметрии $SU(2)$ (группа спиновой симметрии) при динамической перестройке переходит в группу $E(2)$, если подгруппа симметрии $U(1)$ (группа вращений вокруг третьей оси) есть подгруппа устойчивости.

Это замечательный случай в том смысле, что даже структура группы изменяется при перестройке симметрии. Причина этого изменения станет очевидной, если мы вспомним, что генераторы вращения спина получаются при интегрировании $S_i(x)$ по пространству:

$$\bar{S}_i(x) = \int d^3x S_i(x). \quad (7.3.32)$$

Чтобы выразить этот факт в терминах физических полей χ_1^0 и χ_2^0 , мы должны сначала найти динамическое отображение $S_i(x; \chi_1^0, \chi_2^0)$ оператора спиновой плотности, вычислив матричные элементы $\langle a | S_i(x) | b \rangle$, где $|a\rangle$ и $|b\rangle$ принадлежат пространству Фока

для магнонов. Поскольку $|a\rangle$ и $|b\rangle$ — волновые пакеты, соответствующие состояниям магнонов, при расчете $\langle a | S_i(x) | b \rangle$ всеми членами порядка $1/V$ (V — объем) можно пренебречь. Следовательно, динамическое отображение \bar{S}_i , определяемое выражением

$$\langle a | \bar{S}_i | b \rangle = \int d^3x \langle a | S_i(x) | b \rangle, \quad (7.3.33)$$

удовлетворяет некоторым алгебраическим соотношениям, которые могут отличаться от соответствующих соотношений для \bar{S}_i . Таким образом, изменение группы симметрии вызвано тем фактом, что динамическое отображение есть соотношение в слабом смысле, и расчет динамического отображения включает предельный переход $1/V \rightarrow 0$.

Как упомянуто в разд. 7.1, q -преобразование в динамическом отображении определяется как подстановка. Матричные элементы оператора $\psi [x; q(\chi^0)]$ после q -преобразования получаются с помощью образования произведения и дополнительных правил для χ^0 . Поскольку матричные элементы $\psi(x; \chi^0)$ связаны с переходами между состояниями, соответствующими волновым пакетам, c -числа, возникающие при сдвиге поля $\chi^0 \rightarrow \chi^0 + (c\text{-число})$, нужно понимать в смысле предела $\chi^0 \rightarrow \chi^0 + (c\text{-число}) f(x)$ при $f(x) \rightarrow 1$, где $f(x)$ — квадратично интегрируемая функция (см. примечание по поводу выражения (7.1.3)). Это то же самое, что и предельный переход $1/V \rightarrow 0$.

Из теории групп известно, что сжатие группы $SU(2)$, если $U(1)$ — подгруппа устойчивости, дает группу $E(2)$. Мы можем сформулировать результаты этого раздела следующим образом. Если вращательная симметрия относительно третьей оси сохраняется, динамическая перестройка группы симметрии $SU(2)$ является результатом предельного перехода $1/V \rightarrow 0$, который вызывает сжатие группы $SU(2) \rightarrow E(2)$, где $SU(2)$ — группа Q -симметрии, а $E(2)$ — группа q -симметрии.

Обратимся теперь к динамическому отображению. Пусть $O_H(x)$ — любой гейзенберговский оператор, который инвариантен относительно поворота спина. Поскольку поворот спина вокруг первой и второй осей вызван сдвигом поля голдстоуновского бозона χ_i^0 ($i = 1, 2$), в динамическом отображении $O_H(x)$ должны содержаться производные:

$$O_H(x) = O_H[x; \partial\chi^0, \partial\chi^{0\dagger}]. \quad (7.3.34a)$$

Более того, поскольку поворот относительно третьей оси приводит к фазовому преобразованию $\chi^0 \rightarrow e^{-i\theta}\chi^0$, оператор $O_H(x)$ должен оставаться инвариантным при фазовом преобразовании. Поскольку S -матрица инвариантна относительно вращения спина, имеем

$$S = S[\partial\chi^0, \partial\chi^{0\dagger}], \quad (7.3.34b)$$

откуда следует, что в S -матрице нет членов, отвечающих магнонам с нулевой энергией, поэтому последние не участвуют ни в каких взаимодействиях. Это утверждение называется теоремой о низкоэнергетических магнонах. Все эти вопросы подробно рассмотрены в следующем разделе.

Мы завершим этот раздел вычислением констант $Z(0)$ и a в выражении (7.3.16). Поскольку $F(0) = Z(0)/M$ при $M = v$, из выражения (5.3.50) немедленно следует результат $a = 1$. Чтобы продемонстрировать различные способы вычисления, обратимся к выражению

$$\int d^3x \langle 0 | S_i(x) S_i(y) | 0 \rangle |_{t_x=t_y} = \lim_{t_x \rightarrow t_y} \int d^3x \langle 0 | T [S_i(x) S_i(y)] | 0 \rangle |_{t_x > t_y}.$$

Мы можем вычислить эту величину с помощью спектрального представления (7.1.18). Учитывая соображения, предшествовавшие написанию равенства (5.3.48), мы видим, что вклад от членов, не содержащих полюса, обращается в нуль при интегрировании по пространственным переменным. Таким образом, получаем

$$\int d^3x \langle 0 | S_i(x) S_i(y) | 0 \rangle |_{t_x=t_y} = \frac{1}{2} Z(0) \quad \text{для } i = 1, 2. \quad (7.3.35)$$

Это дает

$$\langle 0 | \bar{S}_i \bar{S}_i | 0 \rangle = \frac{1}{2} Z(0) V \quad \text{для } i = 1, 2. \quad (7.3.36)$$

С другой стороны, поскольку v — плотность спиновой поляризации, суммарный спин системы равен

$$\int d^3x \langle 0 | S_3(x) | 0 \rangle = vV. \quad (7.3.37)$$

Кроме того, поскольку вращательная симметрия относительно третьей оси не нарушается, основное состояние $|0\rangle$ есть собственное состояние \bar{S}_3 , т. е.

$$\bar{S}_3 | 0 \rangle = vV | 0 \rangle. \quad (7.3.38)$$

С другой стороны, поскольку спины полностью поляризованы вдоль третьей оси, справедливо выражение

$$\langle 0 | \bar{S}_1^2 + \bar{S}_2^2 + \bar{S}_3^2 | 0 \rangle = vV(vV + 1), \quad (7.3.39)$$

которое, согласно (7.3.36) и (7.3.38), равно $Z(0)V + (vV)^2$. Таким образом, имеем

$$Z(0) = v, \quad (7.3.40)$$

откуда следует, что $Z(0)$ — плотность спинов. Теперь из соотношения (7.3.16) следует, что $a = 1$.

7.4. Перестройка симметрии и теоремы для низких энергий

Теоремы о состояниях с низкими энергиями. Конкретная форма перестройки симметрии приводит к ряду соотношений между некоторыми матричными элементами. В эти соотношения всегда входит по крайней мере один матричный элемент, связанный с состоянием, содержащим голдстоуновский бозон в предельном состоянии с нулевой энергией. Поэтому упомянутые выше соотношения называют теоремами о состояниях с низкими энергиями (теоремами для низких энергий). Наиболее общая теорема этого типа гласит, что голдстоуновские бозоны в предельном состоянии с нулевой энергией не участвуют ни в каких взаимодействиях. Это непосредственное следствие того факта, что сдвиг поля ($\chi_\alpha^0 \rightarrow \chi_\alpha^0 + c_\alpha$) голдстоуновского бозона χ_α^0 порождает инвариантное преобразование, и, следовательно, в S -матрице χ_α^0 всегда содержатся некоторые производные. Если эту теорему применить к случаю ферромагнетизма, мы увидим, что магнон в пределе нулевой энергии не участвует ни в каких взаимодействиях. Это согласуется с результатом Дайсона [9], который установил, что элементы S -матрицы, связанные с магноном низкой энергии, малы. В физике высоких энергий эта теорема для низких энергий переходит в теорему Адлера [10], которая определяет положение нулей в амплитуде рассеяния пионов, рассматриваемых как голдстоуновские бозоны.

Проиллюстрируем теперь более сложные теоремы для низких энергий в случае спонтанного нарушения симметрии $SU(2)$ с группой устойчивости $U(1)$ (случай ферромагнетизма). Как указано в разд. 7.3, наблюдаемая группа симметрии есть группа $E(2)$. Принято, что преобразованием группы устойчивости $U(1)$ является поворот относительно третьей оси в пространстве представлений $SU(2)$ -преобразований. Тогда равенства (7.3.28) и (7.3.29) показывают, что поворот вокруг первой (второй) оси вызывается сдвигом поля голдстоуновских бозонов χ_1^0 (χ_2^0). Обозначим гейзенберговское поле через ψ и будем считать, что оно представляет собой $SU(2)$ -дублет. Рассмотрим оператор $G[\psi]$, который состоит из полей ψ и ψ^\dagger . Символ τ обозначает матрицы Паули размерности 2×2 . Если степени свободы дублета ψ являются спиновыми степенями свободы, то τ — спиновые матрицы σ . Мы используем символ τ при рассмотрении общего случая симметрии $SU(2)$. Напишем динамическое отображение G в виде $G[\chi_1^0, \chi_2^0, \dots]$, где многоточие обозначает свободные физические поля, не являющиеся голдстоуновскими полями. Рассмотрим теперь поворот вокруг первой оси на бесконечно малый угол θ . Поскольку

сдвиг поля $\chi_1^0 \rightarrow \chi_1^0 + \theta \bar{v}$ вызывает преобразование $\psi \rightarrow \exp\left(i \frac{1}{2} \theta \tau_1\right) \psi$, имеем

$$\langle a | G \left[\exp\left(i \frac{1}{2} \theta \tau_1\right) \psi \right] | b \rangle = \langle a | G [\chi_1^0 + \theta \bar{v}, \chi_2^0, \dots] | b \rangle, \quad (7.4.1)$$

где \bar{v} обозначает константу, равную $\bar{v} Z^{-1/2}(0)$ (см. (7.3.28)). Когда состояния $|a\rangle$ и $|b\rangle$ не содержат квантовых возбуждений χ_1^0 с нулевым импульсом, справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow 0} (2\omega_k)^{1/2} (2\pi)^{3/2} \langle a | : \chi_1^0(x) \chi_2^0(y) \dots : | b; \chi_1^0(\mathbf{k}) \rangle = \langle a | : \chi_2^0(y) \dots : | b \rangle, \quad (7.4.2)$$

где $|b; \chi_1^0(\mathbf{k})\rangle$ — состояние, содержащее $|b\rangle$ и голдстоуновский бозон χ_1^0 с импульсом \mathbf{k} . В (7.4.2) мы рассматриваем случай, когда χ_1^0 имеет вид

$$\chi_i^0(x) = \hbar^{1/2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [2\omega(k)]^{-1/2} [\alpha_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x - i\omega t} + \alpha_i^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x + i\omega t}],$$

где ω обозначает $\omega(\mathbf{k})$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \langle a | G [\chi_1^0 + \theta \bar{v}, \chi_2^0, \dots] - G [\chi_1^0, \chi_2^0, \dots] | b \rangle = \\ = \lim_{k \rightarrow 0} (2\pi)^{3/2} [2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \bar{v} \langle a | G [\chi_1^0, \chi_2^0, \dots] | b; \chi_1^0(\mathbf{k}) \rangle = \end{aligned} \quad (7.4.3a)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} (2\pi)^{3/2} [2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \bar{v} \langle a; \chi_1^0(\mathbf{k}) | G [\chi_1^0, \chi_2^0, \dots] | b \rangle. \quad (7.4.3b)$$

Если учесть определение

$$\delta_1 G[\psi] = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left\{ G \left[\exp\left(i \frac{1}{2} \theta \tau_1\right) \psi \right] - G[\psi] \right\}, \quad (7.4.4)$$

соотношение (7.4.3) принимает вид

$$\langle a | \delta_1 G[\psi] | b \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} (2\pi)^{3/2} [2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \bar{v} \langle a | G[\psi] | b; \chi_1^0(\mathbf{k}) \rangle = \quad (7.4.5)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} (2\pi)^{3/2} [2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \bar{v} \langle a; \chi_1^0(\mathbf{k}) | G[\psi] | b \rangle. \quad (7.4.6)$$

Если выбрать G_i в виде $G_i = \psi^\dagger \tau_i \psi$, то

$$\delta_1 G_i = \sum_j \varepsilon_{1ij} \psi^\dagger \tau_j \psi.$$

Тогда из (7.4.5) и (7.4.6) получаем соотношения

$$\langle a | \sum_j \varepsilon_{1ij} \psi^\dagger \tau_j \psi | b \rangle = \bar{v} \lim_{k \rightarrow 0} (2\pi)^{3/2} [2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \langle a | \psi^\dagger \tau_i \psi | b; \chi_1^0(\mathbf{k}) \rangle = \quad (7.4.7)$$

$$= \bar{v} \lim_{k \rightarrow 0} (2\pi)^{3/2} [2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \langle a; \chi_1^0(\mathbf{k}) | \psi^\dagger \tau_i \psi | b \rangle. \quad (7.4.8)$$

Аналогично вращение вокруг второй оси приводит к соотношениям

$$\langle a | \sum_j \varepsilon_{2ij} \psi^\dagger \tau_j \psi | b \rangle = \\ = \bar{v} \lim_{k \rightarrow 0} (2\pi)^{3/2} [2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \langle a | \psi^\dagger \tau_i \psi | b; \chi_2^0(\mathbf{k}) \rangle, \quad (7.4.9)$$

$$= \bar{v} \lim_{k \rightarrow 0} (2\pi)^{3/2} [2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \langle a; \chi_2^0(\mathbf{k}) | \psi^\dagger \tau_i \psi | b \rangle. \quad (7.4.10)$$

Эти соотношения — результат проявления перестройки симметрии $SU(2) \rightarrow E(2)$. Если заменить τ_i на σ_i , соотношения (7.4.5) — (7.4.10) становятся соотношениями для магнонов с низкими энергиями.

Теоремы для низких энергий в случае рассеяния спиновых волн. Если G — S -матрица, имеем $\delta_i S = 0$, так как S -матрица инвариантна для группы рассматриваемых преобразований. Тогда из (7.4.5), (7.4.6) получаем соотношения

$$\lim_{k \rightarrow 0} [(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \langle a | S | b; \chi_i^0(\mathbf{k}) \rangle = 0, \quad (7.4.11)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} [(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \langle a; \chi_i^0(\mathbf{k}) | S | b \rangle = 0. \quad (7.4.12)$$

Чтобы продемонстрировать, как можно использовать эти соотношения, применим их к расчету амплитуды рассеяния спиновых волн друг на друге $\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | S | \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4 \rangle$, где \mathbf{k}_i — импульсы спиновых волн. Поскольку волновое уравнение для спиновых волн принадлежит к типу 1, нормировочный множитель $(2\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}$ нужно исключить из соотношений (7.4.11) и (7.4.12) (а также и из последующих соотношений). Множители $(2\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}$ сокращаются, поэтому окончательные результаты справедливы для обоих типов волновых уравнений голдстоуновских бозонов. T -матрица находится из уравнения

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | S | \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4 \rangle = \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4 \rangle - i \prod_{i=1}^4 \frac{\hbar^{1/2}}{[(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k}_i)]^{1/2}} \times \\ \times T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta[\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_3) - \omega(\mathbf{k}_4)] \times \\ \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4). \quad (7.4.13)$$

Тогда соотношения (7.4.11), (7.4.12) приводят к условию

$$\lim_{k_i \rightarrow 0} T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = 0, \quad (7.4.14)$$

где \mathbf{k}_i — любой из четырех импульсов спиновых волн. Это означает, что магноны с нулевым импульсом не участвуют во взаимодействии.

Допустим, что пространственно-вращательная симметрия не нарушена, даже если нарушена симметрия относительно вращений спина. Тогда T является функцией $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j$. Поскольку матрица T

симметрична относительно замены ($\mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_2$) или ($\mathbf{k}_3 \leftrightarrow \mathbf{k}_4$) вследствие бозонной природы магнона, T с малыми \mathbf{k}_i ($i = 1, 2, 3, 4$) имеет вид

$$T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \sim a + b(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) + c(\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2) + \dots, \quad (7.4.15)$$

где a, b, c — некоторые константы. Чтобы получить выражение (7.4.15), мы использовали тот факт, что для малых импульсов закон сохранения энергии приводит к равенству

$$\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2 = \mathbf{k}_3^2 + \mathbf{k}_4^2. \quad (7.4.16)$$

Теперь из условия (7.4.14) следует $a = c = 0$. Следовательно, при малых импульсах T ведет себя как

$$T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \sim b(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2). \quad (7.4.17)$$

Это следствие теоремы для низких энергий.

Теорема для низких энергий в случае π — π -рассеяния. Аналогичное рассмотрение можно провести применительно к физике высоких энергий, например, рассматривая пионы как голдстоуновские бозоны χ_i^0 , возникновение которых обусловлено спонтанным нарушением киральной симметрии $SU(2) \times SU(2)$ с подгруппой устойчивости $SU(2)$. Тогда пион представляет собой $SU(2)$ -триплет $(\chi_1^0, \chi_2^0, \chi_3^0)$. Очевидно, что массой пиона следует пренебречь. Было обнаружено, что в этом случае симметрия $SU(2) \times SU(2)$ перестраивается в симметрию трехмерной евклидовой группы $E(3)$ (сдвиг поля и преобразование $SU(2)$). Рассмотрим теперь амплитуду π — π -рассеяния $\langle k_1\alpha_1, k_2\alpha_2 | S | k_3\alpha_3, k_4\alpha_4 \rangle$, где α_i ($i = 1, 2, 3$) — индекс группы $SU(2)$. T -матрица, определяемая уравнением (7.4.13), должна быть инвариантной относительно релятивистских преобразований. Поэтому она является функцией s, t и u , определяемых выражениями

$$\begin{aligned} s &= -(k_1 + k_2)^2 = -(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2, \\ t &= -(k_1 - k_3)^2, \\ u &= -(k_1 - k_4)^2. \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

Кроме того, справедливо равенство

$$k_i^2 = \mathbf{k}_i^2 - \omega_i^2 = 0, \quad (7.4.19)$$

поскольку масса пиона считается равной нулю. Из бозонной природы пиона следует симметрия относительно замены

$$\begin{aligned} \{(k_1\alpha_1), (k_2\alpha_2)\} &\rightarrow \{(k_2\alpha_2), (k_1\alpha_1)\}, \\ \{(k_1\alpha_1), (k_3\alpha_3)\} &\rightarrow \{(-k_3\alpha_3), (-k_1\alpha_1)\} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

Если рассмотреть уравнение (7.4.14) с учетом этих симметричных соотношений, выражение для T -матрицы в случае пионов с малыми энергиями будет иметь вид

$$T(k_1\alpha_1, k_2\alpha_2; k_3\alpha_3, k_4\alpha_4) = a [\delta_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_4}s + \delta_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_4}t + \delta_{\alpha_1\alpha_4}\delta_{\alpha_2\alpha_3}u]. \quad (7.4.21)$$

В действительности масса пионов не равна нулю. Следовательно, симметрия, заключенная в (7.4.21), в точности не реализуется. Если допустить, что справедлива гипотеза приближенного сохранения аксиального векторного тока (ПСАВТ) [11], то обнаружится, что в выражении (7.4.21) нужно произвести замены

$$s \rightarrow s - m_\pi^2, \quad t \rightarrow t - m_\pi^2, \quad u \rightarrow u - m_\pi^2.$$

Соотношение Гольдбергера—Треймана. В случаях когда базисная группа симметрии есть $SU(2) \times SU(2)$ или $SU(3) \times SU(3)$, можно вывести соотношения, аналогичные соотношениям (7.4.7)—(7.4.10). Некоторые из них называются соотношениями каллен-треймановского типа для распада K -лептонов (например, соотношения между характеристиками распадов $K \rightarrow l\pi$ и $K \rightarrow l2\pi$, где l обозначает лептоны). Ниже мы в качестве примера выведем соотношение Гольдбергера—Треймана [12].

Преобразования киральной группы симметрии $SU(2) \times SU(2)$ определяются с помощью следующих изменений векторного и аксиального токов $V_\mu^\alpha(x)$ и $A_\mu^\alpha(x)$:

$$\delta_V^\alpha V_\mu^\beta(x) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} V_\mu^\gamma(x), \quad (7.4.22a)$$

$$\delta_V^\alpha A_\mu^\beta(x) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma(x), \quad (7.4.22b)$$

$$\delta_A^\alpha V_\mu^\beta(x) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma(x), \quad (7.4.23a)$$

$$\delta_A^\alpha A_\mu^\beta(x) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} V_\mu^\gamma(x). \quad (7.4.23b)$$

Здесь $(\delta_V \pm \delta_A)$ индуцирует киральное $SU(2) \times SU(2)$ -преобразование. Преобразование, связанное с δ_A , вызвано сдвигом поля голдстоуновских бозонов, которые мы считаем «безмассовыми» пионами. Из соотношений (7.4.23a) и (7.4.5) следует

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \langle a | A_\mu^\gamma(x) | b \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} [(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})/\hbar]^{1/2} \bar{v} \langle a | V_\mu^\beta(x) | b; \chi_0(\mathbf{k}) \rangle. \quad (7.4.24)$$

Из этого соотношения можно вывести некоторые соотношения между формфакторами аксиального и векторного токов [13]. Поскольку ниже используются релятивистские волновые функции, читатели, мало знакомые с этой областью, могут эту часть пропустить¹⁾. В этом подразделе мы положим $\hbar = c = 1$.

¹⁾ Полное рассмотрение релятивистских волновых уравнений уже имеется в литературе (см., например, [14]).

Выберем теперь синглетные нуклонные состояния для $|a\rangle$ и $|b\rangle$; $|a\rangle = |p + q\rangle$, $|b\rangle = |p\rangle$. Свойство ковариантности лоренцевых преобразований приводит к следующей форме соотношения:

$$\begin{aligned} \langle p + q | A_\mu^\gamma(x) | p \rangle = \\ = \left(\frac{M^2}{E(p+q)E(p)} \right)^{1/2} \bar{u}(p+q) [g_A(q^2) i\gamma_\mu \gamma_5 + q_\mu g(q^2) \gamma_5] \frac{\tau_\gamma}{2} u(p). \end{aligned} \quad (7.4.25)$$

Здесь $u(p)$ — четырехкомпонентная волновая функция частицы со спином $1/2$:

$$(p \cdot \gamma + M) u(p) = 0,$$

где γ_μ — дираковские γ -матрицы, $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$. Когда q мало,

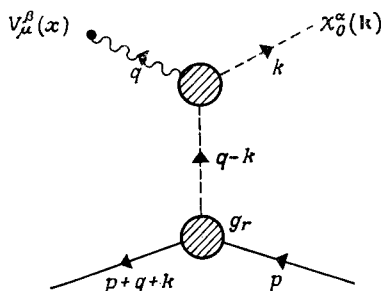


Рис. 7.2.

в правой части соотношения (7.4.24) основной вклад дает полюс пиона (рис. 7.2):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} [(2\pi)^3 2\omega(k)]^{1/2} \langle p + q | V_\mu^\beta(0) | p; \chi_0^\alpha(k) \rangle \approx \\ \approx \left(\frac{M^2}{E(p+q)E(p)} \right)^{1/2} \bar{u}(p+q) (-i) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} q_\mu \frac{1}{q^2} g_r \gamma_5 \frac{\tau_\gamma}{2} u(p). \end{aligned} \quad (7.4.26)$$

Здесь g_r — пион-нуклонная константа связи. Закон сохранения тока $\partial^\mu V_\mu^\beta = 0$ приводит к тому, что соотношение (7.4.26) принимает вид

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} [(2\pi)^3 2\omega(k)]^{1/2} \langle p + q | V_\mu^\beta(0) | p; \chi_0(k) \rangle \approx \\ \approx \left(\frac{M^2}{E(p+q)E(p)} \right)^{1/2} \bar{u}(p+q) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \times \\ \times \left(-iq_\mu \frac{1}{q^2} g_r \gamma_5 + i\gamma_\mu \gamma_5 \frac{g_r}{2M} \right) \frac{\tau_\gamma}{2} u(p). \end{aligned} \quad (7.4.27)$$

Сравнивая выражения (7.4.24) и (7.4.27), обнаруживаем, что

$$g_A(0) = \bar{v} \frac{g_r}{2M}, \quad g(q^2)|_{q \approx 0} = -i\bar{v}g_r \frac{1}{q^2}. \quad (7.4.28)$$

С другой стороны, когда $|a\rangle = |\chi_0^\delta(\mathbf{q})\rangle$ и $|b\rangle = |0\rangle$, из соотношения (7.4.24) имеем

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \langle \chi_0^\delta(\mathbf{q}) | A_\mu^\gamma | 0 \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} [(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})]^{1/2} \bar{v} \langle \chi_0^\delta(\mathbf{q}) | V_\mu^\beta | \chi_0^\alpha(\mathbf{k}) \rangle. \quad (7.4.29)$$

Поскольку

$$\langle \chi_0^\delta(\mathbf{q}) | A_\mu^\gamma | 0 \rangle = \delta^{\beta\gamma} i p_\mu f_\pi \frac{1}{[(2\pi)^3 \omega(\mathbf{q})]^{1/2}}, \quad (7.4.30)$$

$$\begin{aligned} \langle \chi_0^\delta(\mathbf{q}) | V_\mu^\beta | \chi_0^\alpha(\mathbf{k}) \rangle &= \\ &= \frac{1}{[(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{q})]^{1/2} [(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})]^{1/2}} i(q+k)_\mu \varepsilon^{\delta\beta\gamma} F[(q-k)^2], \end{aligned} \quad (7.4.31)$$

с учетом того, что

$$F(0) = 1, \quad (7.4.32)$$

из (7.4.29) получаем

$$f_\pi = \bar{v}. \quad (7.4.33)$$

Тогда, объединяя соотношения (7.4.28) и (7.4.33), находим

$$g_A(0) = f_\pi g_r / 2M; \quad (7.4.34)$$

это и есть соотношение Гольдбергера—Треймана. Если $\psi(x)$ — гейзенберговское поле нуклона, то оно преобразуется киральным $SU(2) \times SU(2)$ ψ -преобразованием следующим образом:

$$\delta_A^\alpha \psi(x) = i \frac{\tau_\alpha}{2} \gamma_5 \psi(x), \quad (7.4.35a)$$

$$\delta_V^\alpha \psi(x) = i \frac{\tau_\alpha}{2} \psi(x). \quad (7.4.35b)$$

Тогда из соотношения (7.4.5) получаем

$$\langle a | i \frac{\tau_\alpha}{2} \gamma_5 \psi(x) | b \rangle = \bar{v} \lim_{k \rightarrow 0} \langle a | \psi(x) | b; \chi_0^\alpha(\mathbf{k}) \rangle [(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{k})]^{1/2}. \quad (7.4.36)$$

Если выбрать состояния следующим образом: $|a\rangle = |0\rangle$, а в качестве $|b\rangle$ — основное состояние нуклона $|p\rangle$, то найдем

$$\begin{aligned} (-i\gamma \cdot \partial + M) \langle 0 | i \frac{\tau_\alpha}{2} \gamma_5 \psi(x) | p \rangle &= \\ &= \left(\frac{M}{E(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} (2M) i \frac{\tau_\alpha}{2} \gamma_5 u(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (7.4.37)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | (-i\gamma \cdot \partial + M) \psi(x) | p; \chi_0^\alpha(\mathbf{k}) \rangle &= \\ &= \left(\frac{M}{(2\pi)^3 E(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \frac{1}{[(2\pi)^3 \omega(\mathbf{k})]^{1/2}} i \frac{\tau_\alpha}{2} \gamma_5 g_r(k) u(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (7.4.38)$$

где $g_r(k)$ — функция, заданная условием $g_r(0) = g_r$. Теперь равенство (7.4.36) приводит к соотношению

$$\bar{v} \frac{g_r(0)}{2M} = 1. \quad (7.4.39)$$

Из соотношений (7.4.39) и (7.4.28) получаем

$$g_A(0) = 1. \quad (7.4.40)$$

Если киральная симметрия существенно нарушается из-за отличной от нуля массы пиона, этот результат требует пересмотра.

Теоремы для низких энергий и поведение системы при низких температурах. Грубо говоря, температурное поведение некоторой физической величины определяется тепловыми возбуждениями, которые дают вклад в эту величину. При низкой температуре возбуждаются только низколежащие энергетические уровни, и, следовательно, поведение системы при низкой температуре определяется в основном ее поведением в области низких энергий.

Предположим, что динамическое отображение оператора A получено при нулевой температуре:

$$A = \sum_{n,m} F(k_1 \dots k_n; q_1 \dots q_m) a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_n}^\dagger a_{q_1} \dots a_{q_m}. \quad (7.4.41)$$

Когда температура слегка повышается, a_k можно выразить через физические операторы $a(k, \beta)$ и $\bar{a}^\dagger(k, \beta)$ с помощью преобразований Боголюбова; тогда для бозонных операторов a_k справедливо равенство

$$\langle 0, \beta | a_k^\dagger a_q | 0, \beta \rangle = f_\beta [\omega(k)] \delta(k - q).$$

Если среднее по вакууму от A известно, то

$$\begin{aligned} \langle 0, \beta | A | 0, \beta \rangle &= \sum_{n,m} F(k_1 \dots k_n; q_1 \dots q_m) \times \\ &\times \langle 0, \beta | a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_n}^\dagger a_{q_1} \dots a_{q_m} | 0, \beta \rangle, \end{aligned} \quad (7.4.42)$$

причем температурная зависимость появляется в множителе $f_B [\omega(k)]$, возникающем при спаривании $a_{k_i}^\dagger$ и a_{q_j} в выражении (7.4.42). Поскольку низкотемпературное поведение $f_B [\omega(k)]$ существенно определяется поведением голдстоуновских бозонов с $k \approx 0$, зависимость от температуры $\langle 0, \beta | A | 0, \beta \rangle$ определяется зависимостью коэффициентов $F(k_1 \dots k_n; q_1 \dots q_m)$ от малых импульсов. Можно сформулировать следующее утверждение: *поведение системы при низких температурах определяют теоремы для низких энергий системы голдстоуновских бозонов в упорядоченном состоянии*. Расчеты такого рода приведены в разд. 5.3.

7.5. Перестройка симметрии и сжатие группы

В разд. 7.4 приведены некоторые примеры перестройки симметрии. Перестройка симметрии есть результат того, что динамическое отображение представляет собой слабое соотношение и для расчета матричных элементов используется предельный переход $1/V \rightarrow 0$ (V — объем) или $f(x) \rightarrow 1$ ($f(x)$ — некоторая размытая функция). При заданной форме динамической перестройки можно установить ряд соотношений между матричными элементами с помощью процедуры, описанной в разд. 7.4 (теоремы о низколежащих уровнях системы). Поэтому желательно иметь общее правило для определения характера перестройки симметрии. В общем случае, когда одна алгебра получается из другой с помощью непрерывной деформации, первая называется деформацией последней алгебры ¹⁾. В этом смысле перестройка симметрии может всегда рассматриваться как деформация исходной группы. В частности, если новая алгебра получается с помощью сингулярного линейного преобразования исходной алгебры, эта процедура называется сжатием исходной алгебры [17]. Поскольку сингулярное преобразование есть предельный случай регулярного преобразования, алгебра, полученная сжатием, есть особый случай деформации. В разд. 7.3 нам встречался пример, в котором перестройка симметрии принимает форму сжатия группы $SU(2) \rightarrow E(2)$.

Теперь возникает вопрос: при каких условиях динамическая перестройка неабелевой симметрии принимает форму сжатия группы? Этот вопрос вызван тем, что получаемая в результате сжатия группа имеет простую структуру, обеспечивающую простой метод получения теорем для низких энергий.

Начнем с определения сжатия группы [17]. Обозначим элементы алгебры Ли символами $\{L_i\}$:

$$[L_i, L_j] = iC_{ijk}L_k. \quad (7.5.1)$$

Здесь C_{ijk} — структурные постоянные. Определим новые элементы алгебры $\tilde{L}_i(\varepsilon)$, связав их со старыми с помощью линейного преобразования

$$\tilde{L}_i(\varepsilon) = U_{ij}L_j + \varepsilon V_{ij}L_j, \quad (7.5.2)$$

где $\det U = 0$, а $\det(U + \varepsilon V) \neq 0$ при $\varepsilon \neq 0$. Если элементы $\tilde{L}_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют предельные значения \tilde{L}_i , то алгебра, образованная из элементов \tilde{L}_i , есть сжатие исходной алгебры. Соответ-

¹⁾ Более точное определение см. в работах [15, 16]. В работе [16] рассмотрено приложение процедуры деформации к перестройке симметрии.

ствующими преобразованиями $\tilde{L}_i(\varepsilon)$ и $L_i(\varepsilon)$ матрицы U и V можно привести к виду

$$U = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & 0 \end{array} \right), \quad V = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & v & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & 1 & \\ & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & 1 \end{array} \right). \quad (7.5.3)$$

Элементы, относящиеся к необращающимся в нуль компонентам U , отметим верхним индексом (1), остальные — индексом (2). Тогда получим соотношения

$$\tilde{L}_i^{(1)}(\varepsilon) = L_i^{(1)} + \varepsilon \sum_j v_{ij} L_j^{(1)} \quad (1 \leq i, j \leq r), \quad (7.5.4)$$

$$\tilde{L}_\alpha^{(2)}(\varepsilon) = \varepsilon L_\alpha^{(2)} \quad (r+1 \leq \alpha \leq n). \quad (7.5.5)$$

Вычислим коммутаторы операторов $\tilde{L}_i(\varepsilon)$ при бесконечно малом ε . Например,

$$\begin{aligned} [\tilde{L}_i^{(1)}(\varepsilon), \tilde{L}_j^{(1)}(\varepsilon)] &= [L_i^{(1)}, L_j^{(1)}] + \dots = iC_{ijk}^{(1)}L_k^{(1)} + iC_{ija}^{(2)}L_a^{(2)} + \dots = \\ &= iC_{ijk}^{(1)}\tilde{L}_k^{(1)}(\varepsilon) + i\frac{1}{\varepsilon}C_{ija}^{(2)}\tilde{L}_a^{(2)}(\varepsilon) + \dots \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

Чтобы алгебра с элементами $\tilde{L}_i(\varepsilon)$ в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ была хорошо определена, должно выполняться равенство

$$C_{ija}^{(2)} = 0. \quad (7.5.7)$$

С помощью аналогичного расчета можно показать, что алгебра с элементами \tilde{L}_i существует только в том случае, если $\tilde{L}_i^{(1)}$ образуют замкнутую подгруппу, а $\tilde{L}_\alpha^{(2)}$ — инвариантную абелеву подгруппу:

$$[\tilde{L}_i^{(1)}, \tilde{L}_j^{(1)}] = ic_{ijk}^{(1)}\tilde{L}_k^{(1)}, \quad [\tilde{L}_\alpha^{(2)}, \tilde{L}_\beta^{(2)}] = 0, \quad [\tilde{L}_i^{(1)}, \tilde{L}_\alpha^{(2)}] = ic_{i\alpha\beta}^{(2)}\tilde{L}_\beta^{(2)}, \quad (7.5.8)$$

где

$$c_{ijk}^{(1)} = C_{ijk}^{(1)}, \quad c_{i\alpha\beta}^{(2)} = C_{i\alpha\beta}^{(2)}. \quad (7.5.9)$$

Хорошо известным примером сжатия группы является процедура перехода от группы Галилея к группе Лоренца ($c \rightarrow \infty$, где c — скорость света).

В примере сжатия группы $SU(2) \rightarrow E(2)$ новая алгебра $E(2)$ является предельным случаем ($\varepsilon \rightarrow 0$) алгебры, образованной с помощью преобразований

$$\tilde{L}_1(\varepsilon) = \varepsilon L_1, \quad \tilde{L}_2(\varepsilon) = \varepsilon L_2, \quad \tilde{L}_3(\varepsilon) = L_3, \quad (7.5.10)$$

где L_i — элементы алгебры спинов $SU(2)$. Для того чтобы $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{L}_i(\varepsilon)$ был хорошо определен в представлении L_i , размерность пространства представлений должна возрасти при уменьшении ε . Если рассматривается l -представление спина для L_i , легко видеть, что $\tilde{L}_i(\varepsilon)$ стремится к нетривиальному пределу, когда ε уменьшается, а $l\varepsilon$ стремится к константе. В этом смысле $V(\text{объем}) \rightarrow \infty$ (и, следовательно, к бесконечности стремится общий спин системы) участвует в сжатии группы для спиновой системы.

Как показано в разд. 7.1, когда имеет место перестройка симметрии, для того, чтобы возникли некоторые преобразования исходной симметрии, требуются определенные сдвиги поля голдстоуновских бозонов. Поскольку эти сдвиги поля образуют абелеву группу, часто случается, что перестройка симметрии становится сжатием группы. Ниже мы исследуем условие, при котором перестройка симметрии принимает форму сжатия группы.

Рассмотрим динамическую перестройку Q -симметрия $\rightarrow q$ -симметрия. Примем, что преобразования Q -симметрии формируют группу Q . Пусть χ_i^0 — голдстоуновские бозоны. Другие физические поля обозначим символами φ_i^0 . Мы рассмотрим те случаи, когда параметры преобразования θ_i не зависят от времени и положения в пространстве. Эти элементы симметрии называются внутренними. Элементы q -симметрии, связанные с этим θ_i , имеют вид (см. (7.1.53), (7.1.54))

$$\chi_j^{\theta'}(x) = \chi_j^0(x) - \theta_i \sum_k' (Z_j/Z_k)^{1/2} \varepsilon_{ikj} (-\partial) \chi_k^0(x) + (Z_i^{1/2}(0)/a_i) \theta_i, \quad (7.5.11)$$

$$\varphi_j^{\theta'}(x) = \varphi_j^0(x) - \theta_i \sum_k' e_{ikj} (-\partial) \varphi_k^0(x). \quad (7.5.12)$$

Другими словами, q -преобразования являются суперпозициями сдвига поля голдстоуновских бозонов и смешивания физических полей.

Предположим, что H — подгруппа Q и что H -симметрия сохраняется; H называется подгруппой устойчивости группы Q . Пусть N_1, \dots, N_n — генераторы Q -преобразований. Обозначим символами \tilde{N}_i соответствующие генераторы q -преобразований. Выберем N_{m+1}, \dots, N_n в качестве генераторов H -преобразований. Таким образом, $m \leq n$. Поскольку H — группа устойчивости, для $i > m$ должно быть $N_i |0\rangle = 0$. Пусть \tilde{H} обозначает группу, образованную теми q -преобразованиями, которые индуцируют

H -группу преобразований гейзенберговских полей. Поскольку группа \tilde{H} должна оставлять вакуум инвариантным, генераторы \tilde{N}_i ($i > m$) группы \tilde{H} приводят к аннигиляции вакуума:

$$\tilde{N}_i |0\rangle = 0 \quad (i > m). \quad (7.5.13)$$

Тогда \tilde{N}_i ($i > m$) представляют собой комбинацию только членов вида $\alpha_i^\dagger \alpha_j$, составленную таким образом, что удовлетворяются соотношения (7.5.11) и (7.5.12); следовательно, \tilde{H} вызывает только смешивание свободных физических полей.

Предположим теперь, что имеется генератор, скажем N_a , $a \leq m$, который создает только линейную «смесь» физических полей. Поскольку уравнение свободного поля для физических полей инвариантно относительно преобразований (7.5.11) и (7.5.12), генератор \tilde{N}_i такой «смеси» полей не зависит от времени и представляет собой суперпозицию членов вида $\alpha_i^\dagger \alpha_j$, откуда следует, что $\tilde{N}_a |0\rangle = |0\rangle$. При этом смешивании вакуум остается инвариантным, так как $\exp\{i\theta \tilde{N}_a\} |0\rangle = |0\rangle$. Для $i > m$ выполняется также равенство $[\tilde{N}_i, \tilde{N}_a] |0\rangle = 0$, поэтому N_a принадлежит группе устойчивости. Следовательно, когда нет группы устойчивости, более широкой, чем H , каждый из генераторов $\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_m$ (которые соответствуют N_1, \dots, N_m) помимо смешивания физических полей должен вызывать определенный сдвиг голдстоуновских бозонов. Следовательно, количество голдстоуновских бозонов χ_j^0 равно m ($j = 1, \dots, m$); при q -преобразованиях нарушение симметрии проявляется в сдвиге голдстоуновских полей.

Поскольку $\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_m$ вызывают сдвиг поля голдстоуновских бозонов, они кроме вызывающих смешивание физических полей билинейных членов содержат некоторые линейные χ^0 -члены (члены, канонически сопряженные χ^0). Поскольку H -группа сохраняется, а χ_i^0 и N_i при H -преобразованиях ведут себя одинаково, (N_1, \dots, N_m) и $(\chi_1^0, \dots, \chi_m^0)$ образуют одни и те же m -мерные представления групп H и \tilde{H} соответственно. В общем случае $(\chi_1^0, \dots, \chi_m^0)$ распадается на несколько неприводимых представлений \tilde{H} .

Когда алгебра \tilde{N}_i образуется сжатием N_i , она должна, согласно (7.5.8), содержать замкнутую подалгебру $\{\tilde{N}_i^{(1)}\}$ и инвариантную абелеву подалгебру $\{\tilde{N}_i^{(2)}\}$. Алгебра, составленная из элементов $\{\tilde{N}_i; i > m\}$, есть замкнутая подалгебра, так как при $i > m$ \tilde{N}_i — генераторы группы устойчивости. Если \tilde{N}_i ($i \leq m$) содержат только линейные χ^0 -члены, они образуют абелеву подалгебру. Действительно, можно показать [8], что только в том случае, когда Q -симметрия является компактной симметрией группы Ли, q -сим-

метрия образуется сжатием Q -симметрии. Кроме того, используя соотношения (7.1.50), (7.1.51) и (7.1.56), можно показать, что $\epsilon_{ijk} = (-1/2) C_{ijk}$ для $i, j, k < m$. Отсюда следует, что \tilde{N}_i ($i \leq m$) не содержат билинейных членов тогда и только тогда, когда C_{ijk} ($i, j, k \leq m$) в выражении (7.1.50) обращаются в нуль. Следовательно, если Q -симметрия является симметрией относительно компактной группы Ли, то q -преобразование является сжатием тогда и только тогда, когда исходная алгебра Ли удовлетворяет условиям

$$[H_a, H_b] = iC_{abc}H_c, \quad (7.5.14a)$$

$$[H_a, N_i] = iC_{a ij}N_j, \quad (7.5.14б)$$

$$[N_i, N_j] = iC_{i ja}H_a, \quad (7.5.14в)$$

где H_a — генераторы группы устойчивости H (т. е. $a, b, c > m$), а N_i — дополнительные к ним генераторы ($i, j \leq m$). Заметим, что члены, содержащие C_{ijk} с $i, j, k \leq m$, исключаются. В этом случае q выражается в виде полупрямого произведения \tilde{H} и \tilde{T} , т. е. $\tilde{H} \square \tilde{T}$, где \tilde{T} состоит из сдвигов голдстоуновских полей.

В частности, если Q — компактная *простая* группа Ли, условия (7.5.14) устанавливаются просто, поскольку H есть максимальная подгруппа.

Ниже мы приведем несколько примеров. В последнем разделе исследуется модель группы $SU(2)$ в случае, когда H есть группа $U(1)$. Возникают два голдстоуновских бозона (или один комплексный голдстоуновский бозон) χ_1^0 и χ_2^0 . Поскольку $U(1)$ — максимальная подгруппа $SU(2)$, перестройка симметрии должна иметь вид сжатия группы [7]: $SU(2) \rightarrow U(1) \square \tilde{T}(2) = E(2)$. В реальной модели скалярного поля группы $SU(2) \times SU(2)$, если подгруппа устойчивости есть изоспиновая группа $SU(2)$, появляются три голдстоуновских бозона, которые образуют триpletное представление группы $SU(2)$, и при сжатии $SU(2) \times SU(2) \rightarrow E(3)$ идет динамическая перестройка. С другой стороны, в случае изодублетной скалярной модели симметрии $SU(2)$ и группы устойчивости, состоящей из единичных элементов, было показано [18], что q -симметрия не возникает при сжатии Q -симметрии. Это и понятно, поскольку H не является максимальной подгруппой. В случае $Q = SU(n)$ и $H = SU(n-1) \times U(1)$ перестройка происходит при сжатии

$$SU(n) \rightarrow SU(n-1) \times U(1) \square \tilde{T}[2(n-1)] = EU(n-1),$$

поскольку $SU(n-1) \times U(1)$ — максимальная подгруппа $SU(n)$. В случае $G = O(n)$ и $H = O(n-1)$ перестройка симметрии есть сжатие $O(n) \rightarrow O(n-1) \square \tilde{T}(n-1) = E(n-1)$.

Когда размерность группы велика, максимальная подгруппа может быть выбрана различными способами. Например, для $G = SU(3)$, если H выбрать в виде $H = SU(2) \times U(1)$, происходит сжатие $SU(3) \rightarrow EU(2)$, а при другом выборе, т. е. $H = SU(2)$, генераторы G/H реализуются в пятимерном неприводимом представлении $SU(2)$. В этом случае динамическая перестройка симметрии связана со сжатием группы $SU(3) \rightarrow SU(2) \square \tilde{T}(5)$. Когда сохраняется симметрия только меньшей группы, из сжатия групп не обязательно вытекает перестройка.

7.6. Инфракрасный эффект голдстоуновских бозонов и параметр порядка

Как показано в разд. 7.1, сдвиги поля голдстоуновских бозонов играют жизненно важную роль в восстановлении исходной симметрии. Поскольку сдвиг поля вида $\chi_\alpha^0 \rightarrow \chi_\alpha^0 + C_\alpha$ меняет χ_α^0 , добавляя к нему константу C_α , он влияет только на моду, отвечающую нулевой энергии голдстоуновского бозона. Таким образом, мы видим, что за перестройку симметрии и поддержание упорядоченного состояния ответственны голдстоуновские бозоны с очень низкой энергией (инфракрасные бозоны). В этом разделе мы затронем еще один эффект, возникающий благодаря этим инфракрасным бозонам, а именно разрушение упорядоченного состояния, когда влияние этих бозонов становится чересчур сильным. Особенно часто это происходит в системах низкой размерности (одномерных или двумерных)¹⁾.

Для определенности продемонстрируем наше рассмотрение, воспользовавшись фазово-инвариантной моделью. Если ψ — гейзенберговское поле, мы примем, что лагранжиан фазово-инвариантен:

$$\mathcal{L}[e^{i\theta}\psi] = \mathcal{L}[\psi]. \quad (7.6.1)$$

Рассмотрим фазовый параметр порядка

$$v = \langle 0 | \psi_\dagger(x) \psi_\dagger(x) | 0 \rangle. \quad (7.6.2)$$

¹⁾ Физики, работающие в области твердого тела, хорошо знают, что в одно- и двумерных системах трудно создать упорядоченные состояния [19]. В работе [20] для объяснения невозможности существования сверхпроводимости в одномерном случае приводится соображение об инфракрасных эффектах такого рода у голдстоуновских бозонов. Этот довод был уточнен в работе [21], где было показано, как влияние инфракрасных голдстоуновских бозонов препятствует появлению упорядоченного состояния при нуле температуры в одномерном случае и при конечной температуре в одно- и двумерном случаях. Колеман [22] привел доказательство того, что спонтанное нарушение симметрии невозможно при размерности пространства-времени $1+1$. Хотя его рассмотрение не включает калибровочных полей, результат остается справедливым, если даже они существуют. В этом разделе мы следуем работе [21].

Здесь мы приняли, что ψ — спиновый дублет. Тогда появляется один голдстоуновский бозон χ^0 , и динамическое отображение ψ имеет вид (7.2.19), т. е.

$$\psi_{\uparrow, \downarrow}(x) = : \exp \left(\frac{i}{2v} Z^{1/2} (-\partial) \chi^0(x) \right) F_{\uparrow, \downarrow}[\partial \chi^0, \varphi^0];, \quad (7.6.3)$$

где φ^0 обозначает физические поля, не являющиеся голдстоуновскими бозонами.

Для исследования влияния инфракрасных голдстоуновских бозонов выделим в χ^0 инфракрасную часть χ_η^0 , а все остальное обозначим χ_s^0 : $\chi^0 = \chi_\eta^0 + \chi_s^0$. Под инфракрасным вкладом мы подразумеваем вклад полей с импульсами меньше определенной бесконечно малой пороговой величины (т. е. $|\mathbf{k}| < \eta$). Поскольку поле χ^0 входит в $F_{\uparrow, \downarrow}$ под знаком производной, вклад χ_η^0 в F пренебрежимо мал. Собирая выражения $\exp [(i/2v) Z^{1/2} (-\partial) \chi_s^0(x)]$ и $F_{\uparrow, \downarrow}$ вместе, мы можем переписать равенство (7.6.3) в виде

$$\psi_{\uparrow, \downarrow}(x) = : \exp \left(\frac{i}{2v} Z^{1/2} \chi_\eta^0(x) \right) \widehat{F}_{\uparrow, \downarrow}[\chi_s^0, \varphi^0], \quad (7.6.4)$$

где Z обозначает $Z(0)$, а $\widehat{F}_{\uparrow, \downarrow}$ не содержит χ_η^0 . Тогда выражение (7.6.2) дает

$$v = \langle 0 | : \widehat{F}_{\uparrow}[\chi_s^0, \varphi^0] : : \widehat{F}_{\downarrow}[\varphi_s^0, \varphi^0] : | 0 \rangle \times \\ \times \langle 0 | : \exp \left(\frac{i}{2v} Z^{1/2} \chi_\eta^0(x) \right) : : \exp \left(\frac{i}{2v} Z^{1/2} \chi_\eta^0(x) \right) : | 0 \rangle. \quad (7.6.5)$$

Это можно записать в компактном виде

$$v = v_s \exp \left(\frac{-1}{2} \frac{Z}{(2v)^2} D_\eta(0) \right), \quad (7.6.6)$$

$$\text{где } D_\eta(0) = \langle 0 | |\chi_\eta^0(x)|^2 | 0 \rangle = \quad (7.6.7)$$

$$= \frac{\hbar}{2(2\pi)^n} \int d^n p \theta(\eta - |\mathbf{p}|) \frac{1}{\omega(\mathbf{p})} \quad (7.6.8)$$

для размерности пространства n . Если температура рассматриваемой системы равна T , состояние $|0\rangle$ нужно заменить на $|0, \beta\rangle$ ($\beta \equiv \hbar/kT$), и выражение (7.6.8) принимает вид

$$D_\eta(0) = \langle 0, \beta | |\chi_\eta^0(x)|^2 | 0, \beta \rangle = \quad (7.6.9)$$

$$= \frac{\hbar}{2(2\pi)^n} \int d^n p \theta(\eta - |\mathbf{p}|) \frac{1}{\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} = \\ = \frac{\hbar}{2(2\pi)^n} \frac{1}{\beta} \int d^n p \theta(\eta - |\mathbf{p}|) \frac{1}{[\omega(\mathbf{p})]^2}. \quad (7.6.10)$$

Поскольку в случае спонтанного нарушения фазовой симметрии

для малых $|\mathbf{p}|$ величина $\omega(\mathbf{p})$ пропорциональна $|\mathbf{p}|$, из выражения (7.6.10) следует, что при $n = 1$ или $n = 2$ $D_\eta(0)$ расходится и параметр порядка v обращается в нуль (ср. с (7.6.6)). Отсюда следует, что в случае размерности пространства n , равной 1 или 2, гомогенного состояния с упорядоченной фазой не существует.

Следует заметить, что все рассмотрение в этом разделе базируется на допущении о бесконечности объема системы. Грубо говоря, если рассматриваемая одно- или двумерная система имеет линейный размер L , параметр порядка приблизительно пропорционален $\exp(-cL)$ или $\exp(-c \ln L)$, где c — положительная константа. Ситуация может существенно измениться, если элементы системы приобретут хотя бы небольшую свободу, связанную с третьим измерением.

Приведенные выше доводы могут быть применены к случаю ферромагнетизма, если мы изменим определение $D_\eta(0)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} D_\eta(0) &= \langle 0, \beta | B(x) B^\dagger(x) | 0, \beta \rangle = \frac{\hbar}{2(2\pi)^n} \int d^n p \theta(\eta - |\mathbf{p}|) \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega(\mathbf{p})}} = \\ &= \frac{\hbar}{2(2\pi)^n} \frac{1}{\beta} \int d^n p \theta(n - |\mathbf{p}|) \frac{1}{\omega(\mathbf{p})}. \end{aligned} \quad (7.6.11)$$

Здесь $B(x)$ — поле магнона. Поскольку $\omega(\mathbf{p})$ вблизи $\mathbf{p} = 0$ ведет себя как Dp^2 , получаем тот же вывод, что и для фазовой модели.

Хотя конечный размер системы меняет приведенные выше соображения, мы имеем достаточно оснований считать, что полученный результат в целом справедлив. Для системы конечного размера необходимо учесть влияние поверхности. Если рассматривать очень малый магнетик в трехмерном пространстве, его магнитный момент будет малым из-за влияния поверхности. Та же ситуация сохраняется и в случае более низкой размерности: конечность размера образца не очень выгодна с точки зрения существования упорядоченного состояния, так как поверхностный эффект стремится разрушить порядок. Но рассмотрение, проведенное в этом разделе, не исключает появления близкого порядка, связанного с дискретными элементами симметрии, даже в системах с низкой размерностью. Состояния Костерлица—Таулеса [23] в двумерных системах и солитоны в ϕ^4 -модели — вот некоторые примеры такого рода. Последний пример связан с дискретными элементами симметрии; он рассматривается в гл. 9.

7.7. Кристаллы

В предыдущих разделах этой главы мы рассмотрели те случаи, когда спонтанное нарушение симметрии не нарушает пространственно-временную симметрию. В этом разделе мы исследуем случай, когда вращательная и трансляционная симметрии спонтанно

нарушаются. Рассмотрение проводится на примере кристалла [24—26]¹⁾ (в работе [26] приведены основные результаты работ [24, 25]).

Условия периодичности. Отправным пунктом рассмотрения является лагранжиан $\mathcal{L}(x)$, который включает молекулярное поле $\psi(x)$: $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}[\psi(x)]$. Мы принимаем, что лагранжиан обладает трансляционной и вращательной инвариантностью, т. е.

$$\int d^4x \mathcal{L}[\psi(x)] = \int d^4x \mathcal{L}[\psi(x + \alpha)] \quad (7.7.1)$$

для любых α [$\alpha = (0, \alpha)$], а также допускаем, что взаимодействие таково, что может образоваться кристалл с векторами решетки \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$), т. е.

$$v(\mathbf{x} + \mathbf{a}_i) = v(\mathbf{x}), \quad (7.7.2)$$

где $v(x)$ — среднее значение оператора плотности $n(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x)$:

$$v(x) = \langle 0 | n(x) | 0 \rangle. \quad (7.7.3)$$

Введем полный набор ортонормированных вещественных периодических функций $\{\varphi_\lambda(x); \lambda = -1, 0, 1, 2, \dots\}$ с периодичностью решетки $\varphi_\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{a}_i) = \varphi_\lambda(\mathbf{x})$. Выберем их следующим образом:

$$\{\varphi_\lambda(x)\} = \{\varphi_{-1}(x) = 1, \varphi_0(x), \varphi_i(x), \dots\}; \quad (7.7.4)$$

здесь
$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^3 (V^{-1/2})_{ij} \nabla_j v(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.7.5)$$

а $\varphi_0(x)$ определяется равенством

$$v(x) = v_{-1} + v_0 \varphi_0(x), \quad (7.7.6)$$

где v_0 и v_{-1} — две константы. Матрица V размерности 3×3 определяется из условия

$$\Omega V_{ij} = \int_{\Omega} d^3x \nabla_i v(x) \nabla_j v(x), \quad (7.7.7)$$

где Ω — объем элементарной ячейки кристалла.

Соотношение Уорда—Такахаси. Поскольку лагранжиан трансляционно инвариантен, выбираем систему отсчета, добавляя к лагранжиану $\mathcal{L}(x)$ небольшой нарушающий симметрию член

$$\mathcal{L}_\varepsilon(x) = \varepsilon v(x) \psi^\dagger(x) \psi(x). \quad (7.7.8)$$

¹⁾ При обычном подходе квантуются только смещения ионов в определенных узлах решетки, в результате чего возникает ансамбль фононов [27].

Сравнивая (7.7.8) и (7.1.8), видим, что функция $\Phi(x)$ должна быть выбрана в виде

$$\Phi(x) = v(x) \psi^\dagger(x) \psi(x). \quad (7.7.9)$$

Пространственная трансляция приводит к замене $\psi(x)$ на $\psi'(x) = \psi(x + \theta, t)$. При этом $\Phi(x)$ изменяется следующим образом:

$$\Phi'(x) = v(x) n(x + \theta, t). \quad (7.7.10)$$

Если θ — бесконечно малая величина, то

$$\delta_i^0 \Phi(x) = v(x) \nabla_i n(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.7.11)$$

Вспомним теперь соотношение Уорда — Такахаши (6.1.28) и используем $\Phi(x_1)$ вместо $\psi(x_1)$. Поскольку $\delta_i \mathcal{L} = \varepsilon \delta_i^0 \Phi(x)$, получим

$$i\hbar \langle 0 | \delta_i^0 \Phi(x) | 0 \rangle = \varepsilon \int d^4y \langle 0 | T [\delta_i^0 \Phi(y), \Phi(x)] | 0 \rangle, \quad (7.7.12)$$

что можно записать в виде

$$i\hbar v(x) \nabla_i v(x) = \varepsilon v(x) \int d^4y \langle 0 | T [n(x), \nabla_i n(y)] | 0 \rangle v(y) = \quad (7.7.13)$$

$$= \varepsilon v(x) \int d^4y \langle 0 | T [\hat{n}(x), \nabla_i \hat{n}(y)] | 0 \rangle v(y) + \\ + \varepsilon [v(x)]^2 \int d^4y v(y) \nabla_i v(y). \quad (7.7.14)$$

Здесь

$$\hat{n}(x) \equiv n(x) - v(x), \quad (7.7.15)$$

$$\text{откуда следует} \quad \langle 0 | \hat{n}(x) | 0 \rangle = 0. \quad (7.7.16)$$

Последний член в (7.7.14), очевидно, обращается в нуль. Интегрируя по частям в первом члене (7.7.14), получаем соотношение УТ

$$i\hbar \nabla_i v(x) = -\varepsilon \int d^4y \langle 0 | T [\hat{n}(x), \hat{n}(y)] | 0 \rangle \nabla_i v(y). \quad (7.7.17a)$$

Используя (7.7.5), последнее выражение можно записать в виде

$$i\hbar \varphi_i(x) = -\varepsilon \int d^4y \langle 0 | T [\hat{n}(x), \hat{n}(y)] | 0 \rangle \varphi_i(y). \quad (7.7.17b)$$

Фононы. Следуя выводу выражения для спектрального представления двухточечных функций, проведенному в разд. 3.6, мы можем получить соотношение

$$\langle 0 | T [\hat{n}(x), \hat{n}(y)] | 0 \rangle = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int dk_0 \int_{\Omega_B} d^3k e^{ik(x-y)} \times \\ \times \left(\sum_{\alpha} \Delta^{\alpha}(x, y, k) + \dots \right), \quad (7.7.18)$$

где $k(x - y) = k(x - y) - k_0(t_x - t_y)$, а $\Delta^\alpha(x, y, k)$ обозначает член, который содержит сингулярность типа полюса:

$$\Delta^\alpha(x, y, k) = \frac{F_\alpha(k, x) F_\alpha^*(k, y)}{k_0^2 - \omega_\alpha^2(k) - \varepsilon C_\alpha(k) + i\eta} \quad (7.7.19)$$

Здесь $\varepsilon C_\alpha(k)$ отвечает сдвигу полюса вследствие влияния $\mathcal{L}_\varepsilon(x)$. В выражении (7.7.19) функция $F_\alpha(k, x)$ периодична с периодом решетки:

$$F_\alpha(k, x + a_i) = F_\alpha(k, x). \quad (7.7.20)$$

Многоточие в выражении (7.7.18) обозначает члены с обрезанными сингулярностями, а Ω_B — объем первой зоны Бриллюэна. Для простоты в (7.7.19) приведено спектральное представление при нулевой температуре, хотя выражение (7.7.19) легко модифицировать, введя в него температурные эффекты, аналогично тому, как это сделано в разд. 4.3 и 6.2. Все результаты этого раздела остаются справедливыми при конечных температурах.

Разлагая периодическую функцию $F_\alpha(k, x)$ в ряд по $\varphi_\lambda(x)$:

$$F_\alpha(k, x) = \sum_\lambda \gamma_\lambda^\alpha(k) \varphi_\lambda(x), \quad (7.7.21)$$

можно переписать (7.7.18) в виде

$$\langle 0 | T[\hat{n}(x), \hat{n}(y)] | 0 \rangle = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int dk_0 \int_{\Omega_B} e^{ik(x-y)} \sum_{\lambda, \lambda'} \varphi_\lambda(x) \Delta_{\lambda\lambda'}(k) \varphi_{\lambda'}(y), \quad (7.7.22)$$

где

$$\Delta_{\lambda\lambda'}(k) = \frac{\gamma_\lambda^\alpha(k) \gamma_{\lambda'}^{\alpha*}(k)}{k_0^2 - \omega_\alpha^2(k) - \varepsilon C_\alpha(k) + i\eta} + \dots \quad (7.7.23)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (7.7.17) и используя соотношения (7.7.22), (7.7.23), получаем

$$\varphi_i(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon) \sum_\lambda \varphi_\lambda(x) \Delta_{\lambda i}(0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.7.24)$$

Поскольку члены с обрезанными сингулярностями, которые обозначены многоточием в выражении для $\Delta_{\lambda\lambda'}(k)$ (7.7.23), не порождают никаких сингулярностей типа $1/\varepsilon$, находим

$$\omega_\alpha^2(0) = 0, \quad (7.7.25)$$

$$\delta_{ij} = \sum_\alpha \gamma_i^\alpha(0) C_\alpha^{-1}(0) \gamma_j^{\alpha*}(0), \quad (7.7.26)$$

$$\gamma_\lambda^\alpha(0) = 0, \quad \lambda \neq 1, 2, 3. \quad (7.7.27)$$

Полнота соотношений (7.7.26) требует по крайней мере трех типов бозонов ($\alpha = 1, 2, 3$), энергетические спектры которых не имеют

щелей (см. (7.7.25)). Эти голдстоуновские бозоны являются акустическими фононами. Таким образом, набор физических квантовых состояний состоит из трех фононов χ_α^0 и квазимолекулы φ^0 . Они удовлетворяют уравнениям свободного поля в виде

$$\lambda_\alpha (\partial) \chi_\alpha^0 (x) = 0, \quad (7.7.28)$$

$$\lambda (\partial) \varphi^0 (x) = 0, \quad (7.7.29)$$

где, в частности,

$$\lambda_\alpha (\partial) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega_\alpha^2 (\nabla), \quad (7.7.30)$$

а дифференциальные операторы $\omega_\alpha^2 (\nabla)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) определены соотношением

$$\omega_\alpha^2 (\nabla) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \omega_\alpha^2 (\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (7.7.31)$$

Точечная группа и векторы поляризации. Уравнение для фононов (7.7.28) может быть записано в более привычной форме с помощью векторов поляризации $e_i^\alpha (\nabla)$. Чтобы ввести векторы поляризации, рассмотрим точечную группу кристаллической решетки. Для простоты ограничимся только теми случаями, когда кристаллическая решетка инвариантна при некоторых дискретных преобразованиях вида

$$x_i \rightarrow (D\mathbf{x})_i \equiv \sum_j D_{ij} x_j, \quad (7.7.32)$$

которые составляют так называемую «точечную группу». Распространение нашего рассмотрения на более общие случаи проводится непосредственно. Матрицу D_{ij} будем называть координатным представлением операции D —элемента этой точечной группы. Действие этого элемента на любой вектор состояния будем также обозначать символом D . Матрица D унитарна:

$$D^\dagger = D^{-1}. \quad (7.7.33)$$

Инвариантность кристаллической решетки относительно преобразований точечной группы приводит к соотношениям

$$v (D\mathbf{x}) = v (\mathbf{x}), \quad (7.7.34)$$

$$D |0\rangle = |0\rangle. \quad (7.7.35)$$

Пусть $B^{\alpha+}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) обозначают операторы рождения фононов. Тогда эти операторы для заданного \mathbf{k} образуют представление D , что означает

$$DB^{\alpha+} (\mathbf{k}) D^{-1} = \sum_{\beta} B^{\beta+} (D\mathbf{k}) \mathcal{D}_{\beta\alpha} (\mathbf{k}). \quad (7.7.36)$$

Из (7.7.36) и соотношения унитарности (7.7.33) следует

$$DB^\alpha (\mathbf{k}) D^{-1} = \sum_{\beta} B^\beta (D\mathbf{k}) \mathcal{D}_{\beta\alpha}^* (\mathbf{k}). \quad (7.7.37)$$

Представление $\mathcal{D}_{\beta\alpha}(\mathbf{k})$, хотя оно, вообще говоря, зависит от \mathbf{k} , может быть записано в терминах \mathcal{D}_{ij} , которые не зависят от \mathbf{k} , следующим образом:

$$\mathcal{D}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) = \sum_{ij} e_i^{\beta*} (D\mathbf{k}) \mathcal{D}_{ij} e_j^\alpha(\mathbf{k}). \quad (7.7.38)$$

Это соотношение определяет векторы поляризации $e_i^\alpha(\mathbf{k})$, которые выбраны так, чтобы удовлетворялись соотношения унитарности

$$\sum_i e_i^{\alpha*}(\mathbf{k}) e_i^\beta(\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (7.7.39)$$

$$\sum_\alpha e_i^\alpha(\mathbf{k}) e_j^{\alpha*}(\mathbf{k}) = \delta_{ij}. \quad (7.7.40)$$

Фоннное поле. Поскольку D коммутирует с общим гамильтонианом H , для любого целого n справедливо равенство

$$DH^n |B^\alpha(\mathbf{k})\rangle = H^n D |B^\alpha(\mathbf{k})\rangle = \sum_\beta H^n \mathcal{D}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) |B^\beta(D\mathbf{k})\rangle, \quad (7.7.41)$$

где использованы соотношения (7.7.35), (7.7.36). Это приводит к уравнению

$$[\omega_\alpha(\mathbf{k})]^n \sum_\beta \mathcal{D}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) |B^\beta(D\mathbf{k})\rangle = \sum_\beta [\omega_\beta(D\mathbf{k})]^n \mathcal{D}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) |B^\beta(D\mathbf{k})\rangle. \quad (7.7.42)$$

Таким образом, имеем

$$\mathcal{D}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) [\omega_\alpha(\mathbf{k})]^n = [\omega_\beta(D\mathbf{k})]^n \mathcal{D}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}). \quad (7.7.43)$$

Если $\omega_\alpha(\mathbf{k})$ не вырождены (нет пересечений между тремя ветвями фоннного спектра), мы всегда можем перенумеровать фоннные моды, расположив их в порядке убывания:

$$\omega_1(\mathbf{k}) > \omega_2(\mathbf{k}) > \omega_3(\mathbf{k}) \quad (\mathbf{k} \neq 0). \quad (7.7.44)$$

Тогда из уравнения (7.7.43) следует

$$\omega_\alpha(\mathbf{k}) = \omega_\alpha(D\mathbf{k}). \quad (7.7.45)$$

Если имеется вырождение, может оказаться, что $\omega_\alpha(\mathbf{k}) = \omega_\beta(D\mathbf{k})$. Даже в этом случае мы можем перенумеровать фононы так, чтобы равенство (7.7.45) оставалось справедливым.

Упростим ситуацию, приняв, что система инвариантна относительно обращения времени¹⁾. Тогда имеем

$$\mathcal{D}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) = \mathcal{D}_{\beta\alpha}^*(-\mathbf{k}), \quad (7.7.46)$$

$$e_i^\alpha(\mathbf{k}) = e_i^{\alpha*}(-\mathbf{k}), \quad (7.7.47)$$

$$\omega_\alpha(\mathbf{k}) = \omega_\alpha(-\mathbf{k}). \quad (7.7.48)$$

¹⁾ Случай, когда инвариантность относительно обращения времени нарушается, рассмотрен в работе [24].

Соотношения (7.7.46) и (7.7.47) дают

$$\mathcal{D}_{ij}^* = \mathcal{D}_{ij}. \quad (7.7.49)$$

Используя соотношения (7.7.37), (7.7.38), (7.7.43) и (7.7.49), можно показать, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} e_i^{\alpha}(\mathbf{k}) D B^{\alpha}(\mathbf{k}) D^{-1} \exp[-i\omega_{\alpha}(\mathbf{k})t] = \\ & = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} e_i^{\alpha}(\mathbf{k}) B^{\beta}(D\mathbf{k}) \mathcal{D}_{\beta\alpha}^*(\mathbf{k}) \exp[-i\omega_{\alpha}(\mathbf{k})t] = \\ & = \sum_{\beta} B^{\beta}(D\mathbf{k}) \exp[-i\omega_{\beta}(D\mathbf{k})t] \sum_{\alpha} \mathcal{D}_{\beta\alpha}^*(\mathbf{k}) e_i^{\alpha}(\mathbf{k}) = \\ & = \sum_{\beta} \exp[-i\omega_{\beta}(D\mathbf{k})t] B^{\beta}(D\mathbf{k}) \sum_j e_j^{\beta}(D\mathbf{k}) \mathcal{D}_{ji}. \end{aligned} \quad (7.7.50)$$

Отсюда видно, что фоновые поля χ_i^0 ($i = 1, 2, 3$), определяемые выражением

$$\begin{aligned} \chi_i^0(x) & \equiv \sum_{\alpha} e_i^{\alpha}(\nabla) \chi_{\alpha}^0(x) = \\ & = \frac{\hbar^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \int_{\Omega_B} d^3k \frac{1}{[2\omega_{\alpha}(\mathbf{k})]^{1/2}} \{ e_i^{\alpha}(\mathbf{k}) B^{\alpha}(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega_{\alpha}(\mathbf{k})t] + \\ & \quad + e_i^{\alpha}(-\mathbf{k}) B^{\alpha+}(\mathbf{k}) \exp[-\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega_{\alpha}(\mathbf{k})t] \}, \end{aligned} \quad (7.7.51)$$

образуют представление точечной группы:

$$D\chi_i^0(x) D^{-1} = \sum_j \chi_j^0(Dx) \mathcal{D}_{ji}. \quad (7.7.52)$$

Здесь Dx обозначает $(D\mathbf{x}, t)$. В выражении (7.7.51) $e_i^{\alpha}(\nabla)$ определяется соотношением

$$e_i^{\alpha}(\nabla) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = e_i^{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

Вводя матрицу

$$\omega_{ij}^2(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha} e_i^{\alpha}(\mathbf{k}) \omega_{\alpha}^2(\mathbf{k}) e_j^{\alpha*}(\mathbf{k}), \quad (7.7.53)$$

можно привести фоновое уравнение (7.7.28) к виду

$$\lambda_{ij}(\partial) \chi_j^0(x) = 0, \quad (7.7.54)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(\partial) & = \sum_{\alpha} e_i^{\alpha}(\nabla) \lambda_{\alpha}(\partial) e_j^{\alpha*}(\nabla) = \\ & = -\delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega_{ij}^2(\nabla), \end{aligned} \quad (7.7.55)$$

а $\omega_{ij}^2(\nabla)$ определяется соотношением

$$\omega_{ij}^2(\nabla) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \omega_{ij}^2(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (7.7.56)$$

Матрица $\lambda_{ij}(\partial)$ называется динамической матрицей колебаний решетки.

Эквивалентность координатного представления и представления фононного поля. Докажем, что представление \mathcal{D}_{ij} для набора $\{\chi_i^0(x)\}$ эквивалентно координатному представлению. Чтобы это сделать, заметим, что, согласно спектральному представлению (7.7.18), динамическое отображение $n(x)$ имеет вид

$$n(x) = v(x) + \sum_{\alpha} F_{\alpha}(\nabla, x) \chi_{\alpha}^0(x) + \dots, \quad (7.7.57)$$

где $F_{\alpha}(\nabla, x)$ определяется соотношением

$$F_{\alpha}(\nabla, x) e^{ikx} = F_{\alpha}(k, x) e^{ikx}. \quad (7.7.58)$$

Многоточие в выражении (7.7.57) обозначает нормальные произведения более высоких порядков. Динамическое отображение (7.7.57) может быть представлено в виде

$$n(x) = v(x) + \sum_i F_i(\nabla, x) \chi_i^0(x) + \dots, \quad (7.7.59)$$

где
$$F_i(k, x) \equiv \sum_{\alpha} F_{\alpha}(k, x) e_i^{\alpha*}(k). \quad (7.7.60)$$

Динамическое отображение (7.7.59) приводит к соотношению

$$Dn(x) D^{-1} = v(x) + \sum_{ij} F_i(\nabla, x) \chi_j^0(Dx) \mathcal{D}_{ji} + \dots \quad (7.7.61)$$

С другой стороны, поскольку гейзенберговское поле $\psi(x)$ преобразуется как

$$D\psi(x) D^{-1} = \psi(Dx), \quad (7.7.62)$$

имеем

$$Dn(x) D^{-1} = n(Dx). \quad (7.7.63)$$

Сравнивая это с соотношением (7.7.61), находим

$$F_i(k, Dx) = \sum_j F_j(D^{-1}k, x) \mathcal{D}_{ji}^{-1}, \quad (7.7.64)$$

где принято, что матрица \mathcal{D}_{ij} вещественна и унитарна, т. е. $\mathcal{D}^T = \mathcal{D}^{-1}$. Заменяя D на D^{-1} в соотношении (7.7.64), получаем

$$F_i(k, D^{-1}x) = \sum_j F_j(Dk, x) \mathcal{D}_{ji}. \quad (7.7.65)$$

С другой стороны, соотношения (7.7.21) и (7.7.27) дают

$$F_i(0, x) = \sum_j \varphi_j(x) N_{ji}, \quad (7.7.66)$$

где

$$N_{ji} = \sum_{\alpha} \gamma_j^{\alpha}(0) e_j^{\alpha*}(0). \quad (7.7.67)$$

Кроме того, поскольку $v(D\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ и $\varphi_i = (V^{-1/2})_{ij} \nabla_j v(\mathbf{x})$, справедливо равенство

$$\varphi_i(D^{-1}\mathbf{x}) = \sum_j \varphi_j(\mathbf{x}) (V^{1/2} D V^{-1/2})_{ji}. \quad (7.7.68)$$

Тогда выражение (7.7.66) приводит к соотношению

$$F_i(0, D^{-1}\mathbf{x}) = \sum_j \varphi_j(\mathbf{x}) (V^{1/2} D V^{-1/2} N)_{ji}, \quad (7.7.69)$$

а равенства (7.7.65) и (7.7.66) дают

$$F_i(0, D^{-1}\mathbf{x}) = \sum_j \varphi_j(\mathbf{x}) (N\mathcal{D})_{ji}. \quad (7.7.70)$$

Таким образом, имеем

$$\mathcal{D} = \eta(0) D \eta^{-1}(0), \quad (7.7.71)$$

где матрица $\eta(0)$ определяется выражением

$$\eta_{ij}(0) = (N^{-1} V^{1/2})_{ij}. \quad (7.7.72)$$

Ниже мы введем зависящую от \mathbf{k} матрицу $\eta(\mathbf{k})$, которая совпадает с $\eta(0)$ при $\mathbf{k} = 0$. Этим объясняется то, что мы используем обозначение $\eta(0)$ вместо η .

Соотношение (7.7.71) показывает, что набор $\{\chi_i^0\}$ соответствует координатному представлению нормировочной матрицы $\eta(0)$.

Докажем теперь, что

$$[\mathcal{D}, N^T N] = 0, \quad (7.7.73)$$

где N^T — транспонированная матрица N . Для этого используем соотношение (7.7.66), которое дает

$$\int_{\Omega} d^3x F_i(0, \mathbf{x}) F_j(0, \mathbf{x}) = (N^T N)_{ij}. \quad (7.7.74)$$

Поскольку левая часть инвариантна при преобразовании $\mathbf{x} \rightarrow D\mathbf{x}$, получаем соотношение (7.7.73).

Динамическая перестройка трансляционной симметрии. Исследуем теперь вопрос о том, какого рода преобразования χ_i^0 и φ^0 вызывают пространственный сдвиг гейзенберговского поля $\psi(x)$. Чтобы провести детальный вывод этого преобразования, необходимо обобщить формулу (7.1.40) для динамического отображения, а также выражение (7.1.41), которое следует из (7.1.40), приняв во внимание периодическую пространственную структуру кристалла. Такой вывод преобразования приведен в работе [24]. Здесь мы выберем более короткий путь. Согласно общим соображениям, приведенным в конце разд. 7.1, исследуемое преобразо-

вание принадлежит к числу преобразований, оставляющих уравнения свободного поля для χ_i^0 и φ^0 инвариантными. Кроме того, нарушение симметрии возникает только при сдвиге поля χ_i^0 ($\chi_i^0 \rightarrow \chi_i^0 + c$ -число). Таким образом, в рассматриваемом случае мы приходим к следующему преобразованию, вызывающему пространственную трансляцию гейзенберговского поля $\psi(x) \rightarrow \psi(x + \theta)$:

$$\chi_i^0(x) \rightarrow \chi_i^0(x + \theta) + \sum_j \theta_j c_{ij}, \quad (7.7.75a)$$

$$\varphi^0(x) \rightarrow \varphi^0(x + \theta). \quad (7.7.75b)$$

Здесь θ обозначает совокупность параметров $(\theta, 0)$. Чтобы определить c -числа c_{ij} , вернемся к динамическому отображению (7.7.59), которое можно переписать в виде

$$n(x) = v(x) + \sum_i F_i(0, x) \chi_i^0(x) + \dots, \quad (7.7.76)$$

где многоточие заменяет не только нормальные произведения более высоких порядков, но также линейные по χ члены, содержащие дифференциальные операторы в положительных степенях. Если смещение θ бесконечно мало, то из выражения (7.7.76) следует

$$\begin{aligned} n(x + \theta) &= v(x) + (\theta \cdot \nabla) v(x) + \sum_i F_i(0, x) \chi_i^0(x + \theta) + \\ &+ \sum_i \chi_i^0(x + \theta) (\theta \cdot \nabla) F_i(0, x) + \dots = v(x) + \\ &+ \sum_{ij} \varphi_j(x) \{ \theta_i V'_{ij} + N_{ji} \chi_i^0(x + \theta) \} + \\ &+ \sum_i \chi_i^0(x + \theta) (\theta \cdot \nabla) F_i(0, x) + \dots, \end{aligned} \quad (7.7.77)$$

где использованы равенства (7.7.5) и (7.7.66). Это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} n(x + \theta) &= v(x) + \sum_{ij} \varphi_j(x) N_{ji} \left(\chi_i^0(x + \theta) + \sum_l \eta_{il}(0) \theta_l \right) + \\ &+ \sum_i \chi_i^0(x + \theta) (\theta \cdot \nabla) F_i(0, x) + \dots \end{aligned} \quad (7.7.78)$$

Поскольку преобразование поля χ_i^0 , примененное к квадратичным по χ^0 членам в выражении (7.7.76), образует линейный по χ^0 член, третий член в правой части (7.7.78) должен возникать из квадратичного члена выражения (7.7.76). Поэтому мы фиксируем свое внимание только на первых двух членах правой части равенства (7.7.78). Тогда мы находим, что константы c_{ij} , появляющиеся при

сдвиге поля (7.7.75а), должны быть равны $\eta_{ij}(0)$. Подводя итоги, делаем вывод, что преобразование вида

$$\chi_i^0(\mathbf{x}) \rightarrow \chi_i^0(x + \theta) + \sum_j \eta_{ij}(0)\theta_j, \quad (7.7.79a)$$

$$\varphi^0(x) \rightarrow \varphi^0(x + \theta) \quad (7.7.79b)$$

вызывает пространственную трансляцию гейзенберговского поля $\psi(x) \rightarrow \psi(x + \theta)$. Это и есть динамическая перестройка трансляционной симметрии в кристаллах. Вывод остается справедливым и в случае, когда θ_j не бесконечно малы.

Динамическое отображение. Выражение (7.7.79) для перестройки пространственной симметрии показывает, что динамическое отображение любого гейзенберговского оператора (например, $O_H(x)$) имеет вид

$$O_H(x) = : \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda} [x + \mathbf{X}^0(x)] \hat{O}_{\lambda}(x; \partial \mathbf{X}^0, \varphi^0) :, \quad (7.7.80)$$

где поля фононов X_i^0 ($i = 1, 2, 3$) определяются выражением

$$X_i^0(x) = \eta_{ij}^{-1}(\nabla) \chi_j^0(x). \quad (7.7.81)$$

Здесь $\eta(\nabla)$ — дифференциальный матричный оператор, удовлетворяющий условию

$$\eta_{ij}(\mathbf{k}) = \eta_{ij}(0) \quad \text{для } \mathbf{k} = 0. \quad (7.7.82)$$

Функции φ_{λ} — элементы полного ортонормированного набора (7.7.4). Символом $\partial \mathbf{X}^0$ в равенстве (7.7.80) обозначена совокупность X_i^0 , содержащих любое число производных. Оператор \hat{O}_{λ} при преобразованиях $\partial X^0(x) \rightarrow \partial X^0(x + \theta)$ и $\varphi^0(x) \rightarrow \varphi^0(x + \theta)$ меняется: $\hat{O}_{\lambda}(x) \rightarrow \hat{O}_{\lambda}(x + \theta)$. Таким образом, $\hat{O}_{\lambda}(x)$ обладает трансляционно-инвариантной формой (3.4.2), т. е.

$$\hat{O}_{\lambda}(x) = \sum_n \int d^4x_1 \dots d^4y_n F_{\lambda}(x - x_1, x - x_2, \dots, x - y_n) \times \\ \times : \partial \mathbf{X}^0(x_1) \partial \mathbf{X}^0(x_2) \dots \varphi^0(y_n) :. \quad (7.7.83)$$

Отметим, что область импульсов физических полей \mathbf{X}^0 и φ^0 ограничена первой зоной Бриллюэна.

Импульс, тензор напряжений, энергия. В дальнейшем мы допустим, что лагранжиан поля взаимодействующих молекул $\psi(x)$ имеет вид

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} \left(\psi^{\dagger} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^{\dagger}}{\partial t} \psi \right) - \frac{\hbar}{2M} \nabla \psi^{\dagger} \nabla \psi - V(\psi, \psi^{\dagger}), \quad (7.7.84)$$

где M — масса молекулы, а $V(\psi, \psi^{\dagger})$ — функционал, зависящий от ψ и ψ^{\dagger} и не содержащий производных. Поскольку лагранжиан

инвариантен при фазовом преобразовании $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$, справедлив закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x) + \nabla \cdot \mathbf{j}(x) = 0, \quad (7.7.85)$$

где

$$\mathbf{j}(x) = \frac{i\hbar}{2M} [\psi^\dagger(x) \nabla \psi(x) - \nabla \psi^\dagger(x) \psi(x)]. \quad (7.7.86)$$

Это означает, что число молекул сохраняется.

Закон сохранения для канонического тензора энергии-напряжения $T_{\mu\nu}$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i(x) + \sum_j \nabla_j T_{ji} = 0, \quad (7.7.87)$$

где

$$P_i(x) = T_{0i}(x) + M_{ji}(x), \quad (7.7.88)$$

$$T_{ij}(x) = \frac{\hbar}{2M} (\nabla_i \psi^\dagger \nabla_j \psi + \nabla_j \psi^\dagger \nabla_i \psi) + \delta_{ij} \mathcal{L}. \quad (7.7.89)$$

Операторы P_i и T_{ij} называются плотностью импульса и тензором напряжений.

Рассматривая динамическое отображение $n(x)$ (7.7.59) и принимая во внимание равенство (7.7.85), мы видим, что линейный по χ^0 член в динамическом отображении \mathbf{j} (и, следовательно, \mathbf{P}) содержит производные по времени первого порядка. Чтобы найти линейный $\dot{\chi}^0$ -член ($\dot{\chi}^0 \equiv \partial \chi^0 / \partial t$) в динамическом отображении $P_i(x)$, вспомним, что оператор

$$K_i \equiv - \int d^3x P_i(x) \quad (7.7.90)$$

является генератором пространственной трансляции. Поскольку это должно привести к преобразованию (7.7.79), соответствующее динамическое отображение должно иметь вид

$$K_i = K_i[\varphi^0] + \sum_j \int d^3x \dot{\chi}_j^0(x) \nabla_i \chi_j^0(x) + \sum_j \eta_{ij}^\dagger(0) \int d^3x \dot{\chi}_j^0(x), \quad (7.7.91)$$

где учтено, что $\eta_{ij}^\dagger(0) = \eta_{ji}(0)$. Здесь $K_i[\varphi^0]$ — оператор свободного импульса, который порождает пространственную трансляцию φ^0 .

Из выражения (7.7.91) видно, что $P_i(x)$ содержит линейный по $\dot{\chi}^0$ член, формфактор которого для $\varphi_{-1}(\mathbf{x}) (=1)$ при нулевом импульсе равен $-\eta_{ij}^\dagger(0)$. В этом случае $P_i(x)$ имеет вид

$$P_i(x) = - \sum_j \eta_{ij}^\dagger(\nabla) \dot{\chi}_j^0(x) + \sum_{\lambda \neq -1} \sum_j \varphi_\lambda(x) \gamma_{i\lambda j}(\nabla) \dot{\chi}_j^0(x) + \dots \quad (7.7.92)$$

Отсюда определяются $\eta_{ij}^\dagger(\nabla)$ и, следовательно, $\eta_{ij}(\nabla)$, удовлетворяющее условию (7.7.82).

Из эрмитовости $P_i(x)$ следует

$$\eta_{ji}^*(\nabla) = \eta_{ji}(-\nabla) = \eta_{ij}^\dagger(\nabla). \quad (7.7.93)$$

В терминах X_i^0 , определяемых (7.7.81), выражение (7.7.92) принимает вид

$$P_i(x) = - \sum_j \rho_{ij}(\nabla) \dot{X}_j^0(x) + \sum_{\lambda \neq -1} \sum_j \varphi_\lambda(\mathbf{x}) \gamma_{i\lambda j}(\nabla) \eta_{jk}(\nabla) \dot{X}_k^0(x) + \dots, \quad (7.7.94)$$

где

$$\rho_{ij}(\nabla) \equiv \eta_{ik}^\dagger(\nabla) \eta_{kj}(\nabla). \quad (7.7.95)$$

Фононное уравнение (7.7.54) может быть переписано в терминах X_i^0 следующим образом:

$$\Lambda_{ij}(\partial) X_j^0 = 0, \quad (7.7.96)$$

$$\Lambda_{ij}(\partial) = -\rho_{ij}(\nabla) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Phi_{ij}(\nabla). \quad (7.7.97)$$

Здесь

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = [\eta^\dagger(\mathbf{k}) \omega^2(\mathbf{k}) \eta(\mathbf{k})]_{ij}, \quad (7.7.98)$$

где $\omega^2(\mathbf{k})$ — матрица, определенная выражением (7.7.53).

Используя закон сохранения (7.7.87) и фононное уравнение (7.7.96), тензор напряжения T_{ij} можно записать в виде

$$T_{ij}(x) = \sum_{k, l, m} c_{ij}^{lm}(\nabla) \nabla_m X_l^0(x) + \sum_{\lambda \neq -1} \sum_l \varphi_\lambda(\mathbf{x}) \Gamma_{ij\lambda}^l(\nabla) X_k^0(x) + \dots, \quad (7.7.99)$$

где

$$\sum_{l, m} c_{ij}^{lm}(\mathbf{k}) k_l k_m = \Phi_{ij}(\mathbf{k}), \quad (7.7.100)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \neq -1} \sum_{j, l} \nabla_j [\varphi_\lambda(\mathbf{x}) \Gamma_{ij\lambda}^l(\nabla) X_k^0(x)] &= \\ &= \sum_{\lambda \neq -1} \sum_{j, k} \varphi_\lambda(x) \gamma_{i\lambda j}(\nabla) \eta_{jk}(\nabla) \Phi_{kl}(\nabla) X_l^0(x). \end{aligned} \quad (7.7.101)$$

Поскольку $\mathbf{P} = M\mathbf{j}$, закон сохранения (7.7.85) вместе с выражением (7.7.94) приводит к равенству

$$\begin{aligned} n(x) = v(\mathbf{x}) - \frac{1}{M} \sum_{i, j} \nabla_j \rho_{ij}(\nabla) X_j^0(x) + \\ + \sum_{\lambda \neq -1} \sum_{i, j} \varphi_\lambda(x) \gamma_{\lambda i}(\nabla) \eta_{ij}(\nabla) X_j^0(x) + \dots \end{aligned} \quad (7.7.102)$$

Здесь матрица $\gamma_{\lambda i}$ определена выражением

$$\gamma_{\lambda i}(\nabla) = -\frac{1}{M} \sum_j \left\{ \nabla_j \gamma_{j\lambda i}(\nabla) + \sum_{\lambda' \neq -1} a_{\lambda\lambda'}^i \gamma_{j\lambda' i}(\nabla) \right\}, \quad (7.7.103)$$

где

$$a_{\lambda\lambda'}^i = \frac{1}{\Omega} \int d^3x \varphi_{\lambda}(\mathbf{x}) \nabla_i \varphi_{\lambda'}(\mathbf{x}). \quad (7.7.104)$$

Из выражений (7.7.76) и (7.7.66) следует

$$\gamma_{\lambda i}(0) = N_{\lambda i} \quad \text{для } i = 1, 2, 3, \quad (7.7.105a)$$

$$\gamma_{\lambda i}(0) = 0 \quad \text{в остальных случаях.} \quad (7.7.105b)$$

Многоточия в выражениях (7.7.94), (7.7.99) и (7.7.102) обозначают как нормальные произведения χ^0 более высоких порядков, так и члены, содержащие φ^0 .

Величины $c_{ij}^{im}(\mathbf{k})$ определяются из равенства (7.7.99). Обычно их называют упругими постоянными (или модулями упругости), хотя они и зависят от \mathbf{k} . Эти величины обладают следующими элементами симметрии:

$$c_{il}^{im}(\mathbf{k}) = c_{il}^{im}(\mathbf{k}), \quad (7.7.106a)$$

$$c_{il}^{mj}(\mathbf{k}) = c_{ii}^{jm*}(\mathbf{k}), \quad (7.7.106b)$$

$$c_{il}^{jm*}(\mathbf{k}) = c_{il}^{im}(-\mathbf{k}). \quad (7.7.106b)$$

Эти три свойства следуют из симметрии T_{ij} , эрмитовости $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ и соотношений (7.7.47) и (7.7.93). Из (7.7.106) ясно, что при $\mathbf{k} = 0$ упругие постоянные вещественны и только 21 из них независима.

Полный гамильтониан H в слабом смысле эквивалентен свободному гамильтониану с численной константой W_0 :

$$\langle a | H | b \rangle = \langle a | H(\chi^0) + H(\varphi^0) | b \rangle + W_0 \langle a | b \rangle. \quad (7.7.107)$$

Здесь $H(\chi^0)$ и $H(\varphi^0)$ — свободные гамильтонианы для X^0 и φ^0 . Таким образом, имеем

$$H(X^0) = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \dot{X}_i^0(x) \rho_{ij}(\nabla) \dot{X}_j^0(x) + [\nabla_i X_i^0(x)] c_{ij}^{lm}(\nabla) [\nabla_m X_j^0(x)] \right\}. \quad (7.7.108)$$

Резюмируя, можно сказать, что в процессе вывода уравнений для упорядоченного состояния кристалла мы обнаружили существование трех акустических фононов, являющихся голдстоуновскими бозонами. Мы также выяснили структуру динамической перестройки трансляционной симметрии и получили выражения для динамического отображения некоторых операторов, например оператора плотности молекул $n(x)$, оператора молекулярного тока $\mathbf{j}(x)$, оператора импульса \mathbf{P} , оператора тензора напряжений и

энергии $T_{ij}(x)$. Следует отметить, что фононное поле низких энергий (т. е. X^0 без производных) входит в динамическое отображение (7.7.80) в комбинации $x + X^0$, что согласуется с обычной интерпретацией фононного поля как поля смещений. Согласно фононному уравнению (7.7.96), величина, канонически сопряженная X_i^0 , есть $\rho_{ij}(\nabla) \dot{X}_j^0$. Тот факт, что $\rho_{ij} \dot{X}_j^0(x)$ является как главный член динамического отображения импульса P в (7.7.94), связан с тем, что оператор импульса канонически сопряжен векторной координате $x + X^0(x)$.

Следует отметить, что в общем случае все возбуждения не исчерпываются акустическими фонанами. Структура кристалла определяет вид представления точечной группы и, следовательно, число возбуждаемых мод. Последнее равно $3N$, где N — число молекул в элементарной ячейке. Если $N > 1$, возникают $3N - 3$ моды, которые не являются акустическими; их называют оптическими модами. Операторы физического поля оптических мод содержатся в членах, обозначенных многоточием в выражениях для динамических отображений, приведенных в этой главе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nambu Y., Jona-Lasinio G., Phys. Rev., **122**, 345; **124**, 246 (1961).
2. Goldstone J., Nuovo Cim., **19**, 154 (1961).
3. Umezawa H., Nuovo Cim., **40**, 450 (1965);
Leplae L., Sen R. N., Umezawa H., Suppl. Prog. Theor. Phys. (commemoration issue for the 30th Anniversary of the Meson Theory by Dr. H. Yukawa), 637 (1965);
Leplae L., Umezawa H., Nuovo Cim., **44**, 410 (1966).
4. Bogoliubov N. N., Phys. Abhandl. Sov., **6**, 113; 229 (1962);
Wagner H., Zs. Phys., **195**, 273 (1966);
Matsumoto H., Papastamatiou N. J., Umezawa H., Nucl. Phys., **B68**, 236 (1974).
5. Goldstone J., Salam A., Weinberg S., Phys. Rev., **127**, 965 (1962).
6. Matsumoto H., Papastamatiou N. J., Umezawa H., Nucl. Phys., **B82**, 45 (1974).
7. Matsumoto H., Umezawa H., Vitiello G., Wyly J. K., Phys. Rev., **D9**, 2806 (1974).
8. Hongoh M., Matsumoto H., Umezawa H., Prog. Theor. Phys. (Kyoto), **64**, 315 (1981).
9. Dyson F. J., Phys. Rev., **102**, 1217 (1956).
10. Adler S. L., Phys. Rev., **137**, B1022; **139**, B1638 (1965);
Weinberg S., Phys. Rev. Lett., **17**, 616 (1966).
11. Gell-Mann M., Lévy M., Nuovo Cim., **16**, 705 (1960).
12. Goldberger M. W., Treiman S. B., Phys. Rev., **110**, 1178 (1958).
13. Fujimoto Y., Papastamatiou N. J., Nuovo Cim., **40**, 468 (1977).
14. Schweber S. S., An introduction to relativistic quantum field theory, Harper and Row, New York, 1966. [Имеется перевод: Швейбер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.];
Nishijima K., Fields and particles, W. A. Benjamin, New York, 1969;
Takahashi Y., An introduction to field quantization, Pergamon, Oxford, 1969.
15. Hermann R., Math. Phys., **2**, 155; 251; **3**, 53; 75 (1966); **5**, 131; 157 (1967).
16. Joos H., Weimar E., Nuovo Cim., **32**, 283 (1976);
Weimar E., Acta Phys. Austr., **48**, 201 (1978).
17. Inonu E., Wigner E. P., Proc. NAS, **39**, 510 (1953).

18. *Matsumoto H., Papastamatiou N. J., Umezawa H.*, Phys. Rev., **D13**, 1054 (1976).
19. *Hohenberg P. C.*, Phys. Rev., **158**, 383 (1967);
Mermin N. D., Wagner H., Phys. Rev. Lett., **17**, 1133 (1966).
20. *Leplae L., Mancini F., Umezawa H.*, Phys. Rep., **10C**, 153 (1974).
21. *Matsumoto H., Papastamatiou N. J., Umezawa H.*, Phys. Rev., **B12**, 1836 (1975).
22. *Coleman S.*, Comm. Math. Phys., **3**, 259 (1973).
23. *Kosterlitz J. M., Thouless D. J.*, J. Phys., **C16**, 1181 (1973).
24. *Wadati M., Matsumoto H., Takahashi Y., Umezawa H.*, Fortschr. Phys., **26**, 357 (1978).
25. *Wadati M., Matsumoto H., Umezawa H.*, Phys. Rev., **D18**, 4077 (1978).
26. *Wadati M.*, Phys. Rep., **50**, 87 (1979).
27. *Born M., Huang K.*, Dynamical theory of crystal lattices, Oxford University Press, Oxford, 1954. [Имеется перевод: *Борн М., Хуан Кунь*. Динамическая теория кристаллических решеток. — М.: ИЛ, 1958.];
Ziman J., Electrons and phonons, Oxford University Press, Oxford, 1960. [Имеется перевод: *Займан Дж.* Электроны и фононы. — М.: ИЛ, 1962.];
Kittel C., Quantum theory of solids, Wiley, New York, 1963. [Имеется перевод: *Киттель Ч.* Квантовая теория твердых тел. — М.: Наука, 1967.];
Maradudin A. A., Montroll E. W., Weiss G. H., Theory of lattice dynamics in the harmonic approximation, Solid State Physics Series, Academic Press, New York, 1963. [Имеется перевод: *Марадудин А. А., Монтролл Е. У., Вейс Г. Г.* Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. — М.: Мир, 1965.];
Kallaway J., Quantum Theory of the Solid State, Academic Press, New York, 1976. [Имеется перевод: *Каллуэй Дж.* Теория энергетической зонной структуры. — М.: Мир, 1969].

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

I. ПЕРЕСТРОЙКА КАЛИБРОВОЧНОЙ СИММЕТРИИ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

8.1. Сверхпроводимость

В этой главе методы, развитые в гл. 7, применяются для исследования квантовой электродинамики твердых тел. В первом разделе мы исследуем перестройку фазовой и калибровочной симметрии в сверхпроводящих металлах. Если известна перестройка симметрии, то известны и основные характеристики динамических отображений электромагнитного поля и тока.

Лагранжиан. Поле электрона ψ и электромагнитное поле, описываемое вектор-потенциалом A_μ , являются гейзенберговскими полями. Электроны взаимодействуют друг с другом посредством электрон-фононных (и других) столкновений. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\psi^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{e}{\hbar}A^0 \right) \psi - H \left[\psi, \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi, F_{ij} \right], \quad (8.1.1)$$

где
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (8.1.2)$$

Структура H зависит от динамических свойств системы. Выше мы использовали рационализированную систему единиц Хевисайда—Лоренца, в которой $e^2/4\pi\hbar c = 1/137$. Значение потенциала A_μ отличается от его значения в гауссовых единицах множителем $(4\pi)^{-1/2}$. Дифференциальный оператор ∂_μ определяется как четыре-вектор $\partial_\mu = \left(\nabla, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$.

Лагранжиан инвариантен относительно фазового преобразования $\psi \rightarrow \exp[-i(e/\hbar c)\theta]$, а также калибровочного преобразования

$$\psi(x) \rightarrow \exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}\lambda(x)\right) \psi(x), \quad (8.1.3)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x), \quad (8.1.4)$$

где калибровочная функция $\lambda(x)$ должна удовлетворять условию существования фурье-образа.

Допустим, что положительные ионы образуют фон с зарядом en_e , где n_e — число. При этом в лагранжиане возникает дополни-

тельный член $-eA_0(x)n_e$, который при интегрировании по d^4x калибровочно инвариантен, поскольку условия, наложенные на функцию $\lambda(x)$, требуют обращения ее в нуль при $|t| \rightarrow \infty$ (а также при $|x| \rightarrow \infty$). Так как система в целом электронейтральна, имеем

$$\langle 0 | \rho(x) | 0 \rangle = -en_e, \quad (8.1.5)$$

где $\rho(x)$ — плотность заряда электронов.

Мы не обращаем много внимания на электрон-фононные (и другие) столкновения, поскольку получаемые в этой главе результаты не зависят от природы столкновений.

Как хорошо известно (см., например, [1]), в теории Максвелла лагранжиан (8.1.1) не допускает канонического формализма, так как A_0 не имеет канонически сопряженной величины (т. е. $\delta\mathcal{L}/\delta\dot{A}_0 = 0$). Поэтому мы попытаемся модифицировать лагранжиан таким образом, чтобы можно было применять канонический формализм. Для этого добавим к лагранжиану \mathcal{L} член [2]

$$\mathcal{L}_B(x) = B(x) D^\mu(\partial) A_\mu(x) - \frac{1}{2} B(x) \alpha(\partial) B(x). \quad (8.1.6)$$

Здесь $B(x)$ — новое гейзенберговское поле, а дифференциальный оператор $D^\mu(\partial)$ — четыре-вектор вида

$$D^\mu(\partial) = \left((v_B(\partial)/c)^2 \nabla, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (8.1.7)$$

Дифференциальные операторы $\alpha(\partial)$ и $v_B(\partial)$ определяются так, чтобы теория формулировалась в терминах физических частиц. Мы связываем величины V^μ и V_μ с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$: $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$. Тензор $g_{\mu\nu}$ диагонален; диагональные элементы равны

$$g_{ii} = -g_{00} = 1. \quad (8.1.8)$$

Канонические коммутационные соотношения и уравнения Гейзенберга. Лагранжиан $\mathcal{L} + \mathcal{L}_B$ допускает канонический формализм, поскольку $(1/c)B$ — величина, канонически сопряженная A_0 . Канонические коммутационные соотношения для бозонных полей имеют вид

$$[A_0(x), B(y)] \delta(t_x - t_y) = ic\hbar\delta^{(4)}(x - y), \quad (8.1.9)$$

$$[B(x), B(y)] \delta(t_x - t_y) = 0, \quad (8.1.10)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] \delta(t_x - t_y) = 0, \quad (8.1.11)$$

$$[A_i(x), B(y)] \delta(t_x - t_y) = 0, \quad (8.1.12)$$

$$[A_i(x), F_{0j}(y)] \delta(t_x - t_y) = -ic\hbar\delta^{(4)}(x - y) \delta_{ij}, \quad (8.1.13)$$

$$[F_{0i}(x), B(y)] \delta(t_x - t_y) = 0, \quad (8.1.14)$$

$$[A_0(x), F_{0i}(y)] \delta(t_x - t_y) = 0. \quad (8.1.15)$$

Здесь i и j пробегают значения 1, 2, 3. Операторы электронного поля $\psi(x)$ и $\psi^\dagger(x)$ коммутируют с $B(y)$, $A_\nu(y)$ и $F_{0j}(y)$ при $t_x = t_y$.

Уравнения Гейзенберга для электромагнитного поля имеют вид

$$-\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu - D_\nu(\partial) B. \quad (8.1.16)$$

$$D^\mu A_\mu = \alpha(\partial) B, \quad (8.1.17)$$

где j_μ — электрический ток:

$$j_\mu = \delta\mathcal{L}/\delta A^\mu, \quad (8.1.18)$$

удовлетворяющий закону сохранения

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (8.1.19)$$

Голдстоуновский бозон и поля духов. Рассматривая совместно уравнения (8.1.16) и (8.1.19), приходим к любопытному выводу, что гейзенберговское поле $B(x)$ свободно:

$$D(\partial) B = 0, \quad (8.1.20)$$

где

$$D(\partial) = \partial^\mu D_\mu(\partial). \quad (8.1.21)$$

Считая, что $v_B(\partial) = v_B(-\partial)$, получаем $D(-\partial) = D(\partial)$.

Это соотношение подтверждает тот факт, что хотя поле B ведет себя как канонически сопряженное A_0 , оно не взаимодействует ни с каким другим полем. Согласно уравнению (8.1.20), энергия кванта B дается формулой

$$\omega(\mathbf{p}) = v_B(\mathbf{p}) |\mathbf{p}|, \quad (8.1.22)$$

где $v_B(\mathbf{p})$ определяется соотношением

$$v_B(\partial) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = v_B(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (8.1.23)$$

Заметим, что энергетический спектр $\omega(\mathbf{p})$ не имеет щели.

В дальнейшем мы будем считать, что j_μ выражается только через ψ , ψ^\dagger и \mathbf{A} , а также, возможно, через их производные по координатам. Тогда имеем

$$[A_\mu(x), j_\nu(y)] \delta(t_x - t_y) = 0, \quad (8.1.24)$$

$$[B(x), j_\mu(y)] \delta(t_x - t_y) = 0. \quad (8.1.25)$$

Поскольку из соотношения (8.1.16) при $\nu = 0$ следует

$$\dot{B} = -\partial_i F_{i0} - j_0, \quad (8.1.26)$$

из уравнений (8.1.13)—(8.1.15), (8.1.24) и (8.1.25) получаем

$$[B(x), \dot{B}(y)] \delta(t_x - t_y) = 0, \quad (8.1.27)$$

$$[\dot{B}(x), A_i(y)] \delta(t_x - t_y) = i\hbar\partial_i^x \delta^{(4)}(x - y), \quad (8.1.28)$$

$$[\dot{B}(x), A_0(y)] \delta(t_x - t_y) = 0. \quad (8.1.29)$$

Здесь мы использовали обозначение $\dot{G} \equiv (1/c) (\partial/\partial t) G$.

Вспомним теперь, что уравнение (8.1.20) для B второго порядка относительно производной по времени. Таким образом, из уравнений (8.1.10) и (8.1.27) следует

$$[B(x), B(y)] = 0, \quad (8.1.30)$$

откуда вытекает, что свободное поле B имеет равную нулю норму [2]. Поскольку в пространстве Фока нельзя определить одночастичное состояние без нормы, поле B есть суперпозиция двух бозонов χ^0 и b^0 [3—5]:

$$B = Z_B(\partial)(b^0 - \chi^0), \quad (8.1.31)$$

$$\text{где} \quad D(\partial)\chi^0 = 0, \quad D(\partial)b^0 = 0. \quad (8.1.32)$$

Чтобы B имело нулевую норму, норма χ^0 должна быть положительна, а норма b^0 — отрицательна:

$$[\chi^0(x), \dot{\chi}^0(y)] \delta(t_x - t_y) = ic\hbar\delta^{(4)}(x - y), \quad (8.1.33)$$

$$[b^0(x), \dot{b}^0(y)] \delta(t_x - t_y) = -ic\hbar\delta^{(4)}(x - y). \quad (8.1.34)$$

Таким образом мы обнаружили, что пространство Фока есть линейное пространство с индефинитной метрикой. Поле b^0 называется полем духов. Заметим, что нормировка χ^0 отличается от нормировки в (2.6.122) множителем c^2 .

Возможность конструирования линейного пространства с индефинитной метрикой стала известна после того, как Гупта и Блойлер [6] предложили формулировку квантовой электродинамики (детальное исследование индефинитной метрики см. в работе Наканиши, цитированной в [6]). Мы не будем здесь подробно показывать, как конструируется пространство с индефинитной метрикой. Кратко можно сказать, что мы должны изменить определение внутренних произведений: внутренние произведения состояний определяются следующим образом: $\langle n'_1 \dots | n_1 \dots \rangle = \prod_i \delta_{n_i n'_i} (-1)^n$, где n — полное число b^0 -квантов в состоянии $|n_1, n_2 \dots\rangle$.

Поскольку $B(x)$ не взаимодействует ни с какими полями, мы можем определить наблюдаемые физические состояния как состояния, которые удовлетворяют условию

$$[\chi^0(x) - b^0(x)]^{(-)} |a\rangle = 0. \quad (8.1.35)$$

Здесь $(-)$ обозначает ту часть оператора, которая отвечает уничтожению, а $|a\rangle$ — любое наблюдаемое состояние.

Условие существования наблюдаемого физического состояния (8.1.35) гарантирует выполнение уравнений Максвелла, поскольку соотношение (8.1.16) приводит к тому, что для наблюдаемых состояний $|a\rangle$ и $|b\rangle$

$$-\langle a | \partial^\mu F_{\mu\nu} | b \rangle = \langle a | j_\nu | b \rangle. \quad (8.1.36)$$

Обратим теперь внимание на фазовую инвариантность. Лагранжиан $\mathcal{L} + \mathcal{L}_B$ инвариантен относительно фазового преобразования

$$\psi(x) \rightarrow \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \theta\right) \psi(x). \quad (8.1.37)$$

Бесконечно малый член лагранжиана, приводящий к нарушению инвариантности, равен $\mathcal{L}_e = \varepsilon \Phi$, где

$$\Phi(x) = \psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) + \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x). \quad (8.1.38)$$

Важнейшее условие возникновения сверхпроводимости состоит в том, что параметр порядка для фазы не обращается в нуль:

$$v \equiv \langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle \neq 0. \quad (8.1.39)$$

Определим гейзенберговское поле χ с помощью выражений (7.2.15):

$$\chi = i(\psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} - \psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}^{\dagger}). \quad (8.1.40)$$

Тогда, согласно выражению (7.2.16), голдстоуновский бозон (фазон) χ_G^0 соответствует линейному члену в динамическом отображении χ :

$$\chi(x) = Z_{\chi}^{1/2}(\partial) \chi_G^0(x) + \dots \quad (8.1.41)$$

Уравнение свободного поля для χ_G^0 записывается в виде

$$D_G(\partial) \chi_G^0(x) = 0. \quad (8.1.42)$$

Поскольку энергетический спектр бозона не имеет щели, $D_G(0) = 0$.

Примем теперь, что

$$j_0 = -\frac{e}{\hbar} (\psi^{\dagger} \psi - \hbar n_e). \quad (8.1.43)$$

Тогда имеем соотношение

$$[\chi(x), j_0(y)] \delta(t_x - t_y) = -2ie\Phi(x) \delta^{(4)}(x - y), \quad (8.1.44)$$

которое вместе с равенством (8.1.26) дает

$$[\dot{B}(x), \chi(y)] \delta(t_x - t_y) = -2ie\Phi(x) \delta^{(4)}(x - y). \quad (8.1.45)$$

Мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t_x}\right)^2 \langle 0 | T [B(x), \chi(y)] | 0 \rangle &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t_x}\right) \langle 0 | T [\dot{B}(x), \chi(y)] | 0 \rangle = \\ &= -\frac{2iev}{c} \delta^{(4)}(x - y) + \langle 0 | T [\ddot{B}(x), \chi(y)] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (8.1.46)$$

откуда следует

$$D(\partial_x) \langle 0 | T [B(x), \chi(y)] | 0 \rangle = \frac{2iev}{c} \delta^{(4)}(x - y). \quad (8.1.47)$$

Совместное рассмотрение этого выражения и соотношений (8.1.31) и (8.1.41) показывает, что χ_G^0 должно совпадать с χ^0 :

$$\chi(x) = Z_\chi^{1/2}(\partial) \chi^0(x) + \dots, \quad (8.1.48)$$

$$D(\partial) \chi^0(x) = 0. \quad (8.1.49)$$

Таким образом, мы обнаружили, что $\chi^0(x)$ есть голдстоуновский бозон (фазон).

Вспомним теперь, что дифференциальный оператор $D_\mu(\partial)$ еще точно не определен. Но из уравнения (8.1.49) ясно видно, что оператор $D_\mu(\partial)$ должен быть выбран так, чтобы уравнение (8.1.49) при условии $D(\partial) = D^\mu(\partial) \partial_\mu$ было уравнением для голдстоуновского бозона. Таким образом, левая часть калибровочного соотношения (8.1.17) теперь точно определена.

Соотношения (8.1.31), (8.1.47) и (8.1.48) определяют перенормировочный множитель Z_B в динамическом отображении B :

$$B = -\frac{2ev}{\hbar c} Z_\chi^{-1/2}(\partial)(b^0 - \chi^0). \quad (8.1.50)$$

Определение калибровочного условия. Соотношения (8.1.12) и (8.1.28) дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t_x} \right)^2 \langle 0 | T [B(x), A_i(y)] | 0 \rangle &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t_x} \right) \langle 0 | T [\dot{B}(x), A_i(y)] | 0 \rangle = \\ &= i\hbar \partial_i^x \delta^{(4)}(x-y) + \langle 0 | T [\ddot{B}(x), A_i(y)] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (8.1.51)$$

а это соотношение вместе с (8.1.20) приводит к уравнению

$$D(\partial) \langle 0 | T [B(x), A_i(y)] | 0 \rangle = -i\hbar \partial_i^x \delta^{(4)}(x-y). \quad (8.1.52)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t_x} \right)^2 \langle 0 | T [B(x), A_0(y)] | 0 \rangle &= \\ &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t_x} \right) i\hbar \delta^{(4)}(x-y) + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \langle 0 | T [\dot{B}(x), A_0(y)] | 0 \rangle = \\ &= i\hbar \partial_0^x \delta^{(4)}(x-y) + \langle 0 | T [\ddot{B}(x), A_0(y)] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (8.1.53)$$

где учтены соотношения (8.1.9) и (8.1.29). Совместное рассмотрение соотношений (8.1.52) и (8.1.53) приводит к уравнению

$$D(\partial) \langle 0 | T [B(x), A_\mu(y)] | 0 \rangle = -i\hbar \partial_\mu^x \delta^{(4)}(x-y). \quad (8.1.54)$$

Из этого уравнения видно, что линейные по χ^0 и b^0 члены присутствуют в динамическом отображении в следующей форме:

$$A_\mu(x) = \frac{\hbar c}{2ev} Z_\chi^{1/2}(\partial) \partial_\mu b^0(x) + \beta_\mu(\partial) B(x) + \dots \quad (8.1.55)$$

При выводе учитывалось соотношение (8.1.50). Поскольку уравнение свободного поля для B является уравнением второго по-

рядка относительно производных по времени, мы без потери общности можем допустить, что $\beta_\mu(\partial)$ не содержит производных по времени порядка выше первого. Тогда имеем

$$D^\mu(\partial_x) \langle 0 | T [A_\mu(x), \chi(y)] | 0 \rangle = \beta_\mu(\partial_x) D^\mu(\partial_x) \times \\ \times \langle 0 | T [B(x), \chi(y)] | 0 \rangle + \dots, \quad (8.1.56)$$

где многоточие заменяет вклады от членов, обозначенных многоточием в выражении для динамического отображения A_μ (8.1.55); эти члены не содержат множителя $1/D(\partial)$.

С другой стороны, поскольку $A_\mu(x)$ коммутирует с $\psi(y)$ и $\psi^\dagger(y)$ при $t_y = t_x$, из соотношения (8.1.17) с учетом условия (8.1.47) получаем

$$D^\mu(\partial_x) \langle 0 | T [A_\mu(x), \chi(y)] | 0 \rangle = \alpha(\partial_x) \langle 0 | T [B(x), \chi(y)] | 0 \rangle = \\ = \frac{2iev}{c} \alpha(\partial_x) \frac{1}{D(\partial)} \delta^{(4)}(x-y). \quad (8.1.57)$$

Тогда имеем

$$\beta^\mu(\partial) D_\mu(\partial) = \alpha(\partial). \quad (8.1.58)$$

Чтобы определить $\beta_\mu(\partial)$ и $\alpha(\partial)$, вспомним, что, так как ψ коммутирует с F_{0i} и с A_μ , то χ , согласно (8.1.40), также коммутирует с ними. Поскольку

$$\dot{A}_i = F_{i0} - \partial_i A_0,$$

находим

$$[\dot{A}_i(x) \chi(y)] \delta(t_x - t_y) = 0. \quad (8.1.59)$$

Это уравнение вместе с (8.1.48), (8.1.55) дает

$$\beta_i(\partial) = 0. \quad (8.1.60)$$

Поскольку $D_0(\partial) = (1/c) \partial/\partial t$ и так как $\alpha(\partial)$ не содержит производных по времени, из соотношения (8.1.58) теперь следует

$$\alpha(\partial) = 0, \quad \beta_\mu(\partial) = 0. \quad (8.1.61)$$

Подводя итог, мы видим, что из условия $v \neq 0$ следует, что калибровочное условие имеет вид

$$D^\mu(\partial) A_\mu(x) = 0, \quad (8.1.62)$$

а динамическое отображение A_μ не содержит линейных по χ^0 членов:

$$A_\mu = \frac{\hbar c}{2ev} Z_\chi^{1/2}(\partial) \partial_\mu b^0 + \dots \quad (8.1.63)$$

Плазмон. Из соотношений (8.1.11) и (8.1.62) следует

$$D^\mu(\partial) \langle 0 | T [A_\mu(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle = 0, \quad (8.1.64)$$

где учтено равенство (8.1.7). Этому условию нельзя удовлетворить, если b^0 — единственный линейный член в динамическом отображении (8.1.63). Поэтому введем векторное поле u_μ^0 :

$$A_\mu = \frac{\hbar c}{2ev} Z_x^{1/2} (\partial) \partial_\mu b^0 + Z_\mu^{(1/2)v} (\partial) u_\nu^0 + \dots, \quad (8.1.65)$$

где многоточие обозначает нормальные произведения более высоких порядков. Векторное поле u_μ^0 называется плазмоном.

Чтобы выделить продольную и поперечную части, нужны проекционные операторы $L_{\mu\nu}$ для продольной части и $T_{\mu\nu}$ для поперечной:

$$L_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \partial_i \frac{1}{\nabla^2} \partial_j \end{pmatrix}, \quad (8.1.66a)$$

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\nabla^2} \partial_j \end{pmatrix}. \quad (8.1.66b)$$

Мы можем написать

$$Z_{\mu\nu} (\partial) = Z_l (\partial) T_{\mu\nu} + Z_l (\partial) L_{\mu\nu}, \quad (8.1.67)$$

$$u_\mu^0 = u_\mu^T + u_\mu^L, \quad (8.1.68)$$

$$\text{где } u_\mu^T = T_{\mu\nu}^{\nu} u_\nu^0, \quad u_\mu^L = L_{\mu\nu}^{\nu} u_\nu^0. \quad (8.1.69)$$

Очевидно, что

$$D^\mu (\partial) u_\mu^T = 0, \quad u_0^T = 0. \quad (8.1.70)$$

Уравнения для поперечного и продольного плазмонов можно записать в виде

$$[\partial^2 - m_T^2 (\partial)] u_\mu^T (x) = 0, \quad (8.1.71a)$$

$$[D (\partial) - m^2 (\partial)] u_\mu^L (x) = 0, \quad (8.1.71b)$$

$$D^\mu (\partial) u_\mu^L (x) = 0, \quad (8.1.71b)$$

причем последнее уравнение получено из калибровочного условия (8.1.62).

Поскольку при нулевом импульсе поперечные и продольные состояния неразличимы, имеем

$$Z_t (0) = Z_l (0), \quad (8.1.72)$$

$$m_T (0) = m (0). \quad (8.1.73)$$

Все три уравнения (8.1.71) можно объединить в одно условие вида [4]

$$\Lambda^{\mu\nu}(\partial) u_\nu^0(x) = 0, \quad (8.1.74)$$

$$\Lambda^{\mu\nu}(\partial) = \partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu - m^2(\partial) \eta^{\mu\nu}(\partial) + \delta m^2(\partial) T^{\mu\nu}, \quad (8.1.75)$$

где $\delta m^2(\partial) = m^2(\partial) - m_T^2(\partial)$ и

$$\eta^{\mu\nu}(\partial) = \begin{pmatrix} -[v_B(\partial)/c]^{-2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & I \end{pmatrix}. \quad (8.1.76)$$

Из соотношения (8.1.73) следует

$$\delta m^2(0) = 0. \quad (8.1.77)$$

Докажем теперь, что из уравнения (8.1.74) вытекают три уравнения (8.1.71). Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} (\partial^2 g^{i\rho} - \partial^i \partial^\rho) L_{\rho\nu} &= -\partial_\nu^2 L_\nu^i - \partial^i \partial^0 L_{0\nu} = \\ &= \left(-\partial_0^2 + \frac{1}{c^2} v_B^2(\partial) \nabla^2 \right) L_\nu^i + \partial^i \left(-\partial^0 L_{0\nu} - \frac{1}{c^2} v_B^2(\partial) \partial^j L_{j\nu} \right) = \\ &= \{D(\partial) g^{i\rho} - \partial^i D^\rho(\partial)\} L_{\rho\nu}, \quad (8.1.78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial^2 g^{0\rho} - \partial^0 \partial^\rho) L_{\rho\nu} &= \nabla^2 L_\nu^0 - \partial^0 \partial^j L_{j\nu} = \\ &= [v_B(\partial)/c]^{-2} \{ (v_B(\partial)/c)^2 \nabla^2 - \partial_0^2 \} L_\nu^0 - \\ &\quad - \partial^0 \{ (v_B(\partial)/c)^2 \partial^j L_{j\nu} + \partial^0 L_{0\nu} \} = \\ &= [v_B(\partial)/c]^{-2} [D(\partial) g^{0\rho} - \partial^0 D^\rho(\partial)] L_{\rho\nu}. \quad (8.1.79) \end{aligned}$$

Эти два соотношения можно записать в виде одного уравнения

$$[\partial^2 g^{\mu\rho} - \partial^\mu \partial^\rho] L_{\rho\nu} = \eta^{\mu\rho}(\partial) \{D(\partial) g_\rho^\sigma - \partial_\rho D^\sigma(\partial)\} L_{\sigma\nu}. \quad (8.1.80)$$

Таким образом, $\Lambda^{\mu\nu}(\partial)$ в (8.1.75) имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu\nu}(\partial) &= [\partial^2 - m^2(\partial) - \delta m^2(\partial)] T^{\mu\nu} + \\ &\quad + \eta^{\mu\rho}(\partial) \{ [D(\partial) - m^2(\partial)] g_\rho^\sigma - \partial_\rho D^\sigma(\partial) \} L_\sigma^\nu. \quad (8.1.81) \end{aligned}$$

Тогда уравнение (8.1.72) немедленно приводится к виду (8.1.71а) причем

$$m_T^2(\partial) = m^2(\partial) - \delta m^2(\partial), \quad (8.1.82)$$

а также к виду

$$\eta^{\mu\rho}(\partial) \{ [D(\partial) - m^2(\partial)] g_\rho^\sigma - \partial_\rho D^\sigma(\partial) \} u_\sigma^L = 0. \quad (8.1.83)$$

Умножая уравнение (8.1.83) на ∂_μ и используя равенство

$$\partial_\nu \eta^{\nu\rho} = \eta^{\rho\nu} \partial_\nu = [v_B(\partial)/c]^{-2} D^\rho(\partial), \quad (8.1.84)$$

получаем уравнение

$$[v_B(\partial)/c]^{-2} m^2(\partial) D^\sigma(\partial) u_\sigma^L = 0.$$

Из этого уравнения следует (8.1.71в), которое вместе с уравнением (8.1.83) приводит к уравнению (8.1.71б). Таким образом, мы доказали, что уравнение (8.1.74) эквивалентно трем уравнениям (8.1.71), т. е. представляет собой уравнение плазмона.

Двухточечная функция и дивизор для плазмона. Построим теперь двухточечную функцию плазмона $\Delta_{\nu\lambda}(x)$, определенную следующим образом:

$$\Lambda^{\mu\nu}(\partial) \Delta_{\nu\lambda}(x) = i g_\lambda^\mu \delta^{(4)}(x). \quad (8.1.85)$$

Следуя методу, изложенному в разд. 2.6, введем дивизор для продольного плазмона. Докажем, что дивизор $d_{\mu\nu}(\partial)$ определяется выражением

$$d_{\mu\nu}(\partial) = \{g_\mu^\rho - m^{-2}(\partial) \partial_\mu D^\rho(\partial)\} \eta_{\rho\nu}^{-1}(\partial). \quad (8.1.86)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \{g_\mu^\rho - m^{-2}(\partial) \partial_\mu D^\rho(\partial)\} \{[D(\partial) - m^2(\partial)] g_{\rho\sigma} - \partial_\rho D_\sigma(\partial)\} = \\ = \{D(\partial) - m^2(\partial)\} g_{\mu\sigma}, \end{aligned} \quad (8.1.87)$$

мы можем доказать следующие соотношения:

$$L_{\mu\rho} d^{\rho\eta}(\partial) \Lambda_{\eta\nu}(\partial) = \{D(\partial) - m^2(\partial)\} L_{\mu\nu}, \quad (8.1.88)$$

$$L_{\mu\sigma} d^{\sigma\nu}(\partial) = d_{\mu\sigma}(\partial) L^{\sigma\nu}. \quad (8.1.89)$$

Из соотношения (8.1.88) видно, что $d_{\mu\nu}$ есть дивизор для продольного плазмона.

Теперь мы можем записать

$$\Delta_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu} \Delta^T(x) + d_\mu^\rho(\partial) L_{\rho\nu} \Delta^L(x), \quad (8.1.90)$$

где

$$[\partial^2 - m_T^2(\partial)] \Delta^T(x) = i \delta^{(4)}(x), \quad (8.1.91)$$

$$[D(\partial) - m^2(\partial)] \Delta^L(x) = i \delta^{(4)}(x). \quad (8.1.92)$$

Поскольку из (8.1.86) следует

$$D^\mu(\partial) d_{\mu\nu}(\partial) = -m^{-2}(\partial) \{D(\partial) - m^2(\partial)\} D^\rho \eta_{\rho\nu}^{-1}(\partial) \quad (8.1.93)$$

и так как

$$D^\rho \eta_{\rho\nu}^{-1}(\partial) = [v_B(\partial)/c]^2 \partial_\nu, \quad (8.1.94)$$

из выражения (8.1.90) и соотношения $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ следует

$$D^\mu \Delta_{\mu\nu}(x) = -i m^{-2}(\partial) [v_B(\partial)/c]^2 \partial_\nu \delta^{(4)}(x). \quad (8.1.95)$$

Используя построение свободных полей, выполненное в разд. 2.6, и соотношение (3.6.30), получаем

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [u_\mu^L(x), u_\nu^L(y)] | 0 \rangle &= \hbar d_\mu^\rho(\partial) L_{\rho\nu} \Delta^L(x) - \\ &- i\hbar c^2 [d_\mu^\rho(\partial), \theta(t_x - t_y)] L_{\rho\nu} \Delta^+(x - y) + \\ &+ i\hbar c^2 [d_\mu^\rho(\partial), \theta(t_y - t_x)] L_{\rho\nu} \Delta^-(x - y), \end{aligned} \quad (8.1.96)$$

где $\Delta^\pm(x)$ — функции, определенные в (2.6.85). Множитель c^2 во втором и третьем членах соотношения (8.1.96) обусловлен различным выбором нормировки. При выводе этого соотношения использовано выражение (2.6.86). Теперь из (8.1.86) с учетом (2.6.87) следует

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [u_\mu^L(x), u_\nu^L(y)] | 0 \rangle &= \hbar d_\mu^\rho(\partial) L_{\rho\nu} \Delta^L(x - y) - \\ &- i\hbar \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} m^{-2}(\partial) [v_B(\partial)/c]^2 \delta^{(4)}(x - y). \end{aligned} \quad (8.1.97)$$

Таким образом, из (8.1.90) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [u_\mu^0(x), u_\nu^0(y)] | 0 \rangle &= \hbar \Delta_{\mu\nu}(x - y) - \\ &- i\hbar \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} m^{-2}(\partial) [v_B(\partial)/c]^2 \delta^{(4)}(x - y), \end{aligned} \quad (8.1.98)$$

а оно с учетом выражения (8.1.95) приводит к равенству

$$\begin{aligned} D^\mu(\partial) \langle 0 | T [u_\mu^0(x), u_\nu^0(y)] | 0 \rangle &= \\ &= -i\hbar m^{-2}(\partial) [v_B(\partial)/c]^2 [\partial_\nu^x - \partial_0^x \delta_{\nu 0}] \delta^{(4)}(x - y). \end{aligned} \quad (8.1.99)$$

Пусть Δ_b — причинная двухточечная функция поля b^0 :

$$\Delta_b(x) \equiv \langle 0 | T [b^0(x), b^0(y)] | 0 \rangle. \quad (8.1.100)$$

Она удовлетворяет условию

$$D(\partial) \Delta_b(x) = -i\hbar \delta^{(4)}(x). \quad (8.1.101)$$

Знак минус — следствие отрицательности нормы b^0 . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \Delta_b(x - y) &= \langle 0 | T [\partial_\mu b^0(x), \partial_\nu b^0(y)] | 0 \rangle - i\hbar \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \delta^{(4)}(x - y). \end{aligned} \quad (8.1.102)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} D^\mu \langle 0 | T [\partial_\mu b^0(x), \partial_\nu b^0(y)] | 0 \rangle &= \\ &= i\hbar [\partial_\nu^x - \partial_0^x \delta_{\nu 0}] \delta^{(4)}(x - y). \end{aligned} \quad (8.1.103)$$

Предварительное рассмотрение динамических отображений. Теперь мы готовы к тому, чтобы определить линейный по u^0 член в динамическом отображении A_μ . В самом деле, из (8.1.65) следует

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [A_\mu(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle &= \\ &= (\hbar c / 2ev)^2 Z_x(\partial) \langle 0 | T [\partial_\mu b^0(x), \partial_\nu b^0(y)] | 0 \rangle + \\ &+ Z_\mu^{(1/2)\rho}(\partial) Z_\nu^{(1/2)\sigma}(\partial) \langle 0 | T [u_\rho^0(x), u_\sigma^0(y)] | 0 \rangle + \dots, \end{aligned} \quad (8.1.104)$$

где многоточием обозначены члены, образованные нормальными произведениями более высоких порядков. Таким образом, из соотношений (8.1.64), (8.1.99) и (8.1.103) получаем

$$(\hbar c/2ev)^2 Z_\chi(\partial) = m^{-2}(\partial) Z_0(\partial) [v_B(\partial)/c]^2, \quad (8.1.105)$$

где
$$Z_0(\partial) = Z_l(\partial) + \dots \quad (8.1.106)$$

Многоточие заменяет вклады от членов, обозначенных многоточием в выражении (8.1.104), а Z_l определено в (8.1.67). Из соотношения (8.1.105) следует

$$m^2(\partial) = (2ev/\hbar c)^2 Z_0(\partial) Z_\chi^{-1}(\partial) [v_B(\partial)/c]^2. \quad (8.1.107)$$

Это выражение определяет энергию продольного плазмона [4]. В случае нулевого импульса эта энергия равна

$$m(0) = \frac{2ev}{\hbar c} Z_0^{1/2}(0) Z_\chi^{-1/2}(0) v_B(0)/c. \quad (8.1.108)$$

Резюмируя, запишем выражения для динамических отображений бозонных полей (ср. с (8.1.48), (8.1.50), (8.1.65))

$$\chi(x) = Z_\chi^{1/2}(\partial) \chi^0(x) + \dots, \quad (8.1.109)$$

$$B(x) = \frac{2ev}{\hbar c} Z_\chi^{-1/2}(\partial) \{\chi^0(x) - b^0(x)\}, \quad (8.1.110)$$

$$A_\mu(x) = \frac{\hbar c}{2ev} Z_\chi^{1/2}(\partial) \partial_\mu b^0(x) + Z_\mu^{(1/2)v} u_\nu^0(x) + \dots, \quad (8.1.111)$$

где многоточия обозначают нормальные произведения более высоких порядков. С другой стороны, из результатов разд. 7.2, а именно из соотношения (7.2.19), следует, что динамическое отображение $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi(x) = : \exp\left(-\frac{i}{2v} Z_\chi^{1/2}(\partial) \chi^0(x)\right) F[\partial\chi^0, \phi^0, u_\mu^0, b^0]:, \quad (8.1.112)$$

где ϕ^0 — квазиэлектрон. Знак минус в экспоненциальном множителе обусловлен выбором заряда электрона равным $(-e)$. Из выражения (8.1.109) видно, что связывающее поле для χ^0 есть $Z_\chi^{1/2}(\partial) \chi$. Кроме того, согласно равенствам (8.1.110) и (8.1.111), связывающие поля для b^0 и u_ν^0 равны соответственно

$$b(x) \equiv -\frac{\hbar c}{2ev} Z_\chi^{1/2}(\partial) B(x) + Z_\chi^{-1/2}(\partial) \chi(x) = \quad (8.1.113a)$$

$$= b^0(x) + \dots, \quad (8.1.113б)$$

$$U_\mu(x) \equiv Z_\mu^{-(1/2)v} A_\nu(x) + (\hbar c/2ev)^2 Z_\chi(\partial) Z_\mu^{-(1/2)v} \partial_\nu B(x) -$$

$$- (\hbar c/2ev) Z_\mu^{-(1/2)v} \partial_\nu \chi(x) = \quad (8.1.114a)$$

$$= u_{\mu\nu}^0(x) + \dots. \quad (8.1.114б)$$

Таким образом, динамическое отображение гейзенберговского оператора (например, $O(x)$) имеет вид

$$SO(x) = : \langle T[O(x) \exp \{\mathcal{A}\}] \rangle_c :, \quad (8.1.115a)$$

$$S = : \langle T[\exp \{\mathcal{A}\}] \rangle_c :, \quad (8.1.115b)$$

где учтены соотношения (3.5.17), (3.5.18). Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \{ \chi^0(x) D(\partial) Z_\chi^{-1/2}(\partial) \chi(x) - b^0(x) D(\partial) b(x) + \\ & + u_\mu^0(x) \Lambda^{\mu\nu}(\partial) U_\nu(x) + \varphi^{0+}(x) \lambda_\varphi(\partial) \hat{\phi}(x) + \hat{\phi}^\dagger(x) \lambda_\varphi(-\overleftarrow{\partial}) \varphi^0(x) \}, \end{aligned} \quad (8.1.116)$$

где $\hat{\phi}(x)$ — связывающее поле для квазиэлектрона $\varphi^0(x)$, уравнение для которого имеет вид $\lambda_\varphi(\partial) \varphi^0(x) = 0$.

Динамическая перестройка калибровочной симметрии. Рассмотрим теперь вопрос о том, как преобразуются физические поля при калибровочном преобразовании

$$\begin{aligned} \psi(x) \rightarrow \exp[-i(e/\hbar c) \lambda(x)] \psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \\ + \partial_\mu \lambda(x), \quad B(x) \rightarrow B(x). \end{aligned}$$

Здесь $\lambda(x)$ — бесконечно малая неоператорная функция, имеющая фурье-образ; никаких других условий на $\lambda(x)$ не накладывается. Тогда изменение $SO(x)$ в результате калибровочного преобразования вызвано изменением гейзенберговских полей внутри скобок T -произведения в правой части соотношения (8.1.115). С другой стороны, поскольку калибровочное преобразование есть частный случай соотношения (6.1.38), можно использовать соотношение УТ (6.1.28). Из этого соотношения следует

$$\int d^4\xi \langle 0 | T[\delta\mathcal{L}(\xi), F] | 0 \rangle = i\hbar \langle 0 | T[\delta^0 F] | 0 \rangle, \quad (8.1.117)$$

где F — любая комбинация гейзенберговских полей, а δF — ее изменение при калибровочном преобразовании. Символ $\delta\mathcal{L}$ обозначает изменение лагранжиана при калибровочном преобразовании. Из (8.1.115) и соотношения УТ (8.1.117) получаем

$$\delta \{SO(x)\} = -\frac{i}{\hbar} : \int d^4\xi \langle T[\delta\mathcal{L}(\xi) O(x) \exp \{\mathcal{A}\}] \rangle_c :, \quad (8.1.118)$$

где $\delta \{SO(x)\}$ — изменение $SO(x)$ при калибровочном преобразовании.

Изменение лагранжиана происходит только из-за изменения $\mathcal{L}_B + \mathcal{L}_e$, где \mathcal{L}_B определено выражением (8.1.6) при $\alpha(\partial) = 0$, а $\mathcal{L}_e = e\Phi$, где Φ определено в (8.1.38). Таким образом, имеем

$$\delta\mathcal{L}(x) = B(x) \cdot D(\partial) \lambda(x) + 2ee\lambda(x) \chi(x). \quad (8.1.119)$$

Поскольку $\lambda(x)$ — произвольная функция, $\langle 0 | T [\lambda(x) \chi(x) \dots] | 0 \rangle$ не может содержать сомножителя $1/\varepsilon$. Следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ вторым членом в выражении (8.1.119) можно пренебречь. Тогда имеем

$$\delta \{SO(x)\} = -\frac{i}{\hbar} : \int d^4\xi \lambda(\xi) D(\partial_\xi) \langle T [B(\xi), O(x) \exp\{\mathcal{A}\}] \rangle_c :. \quad (8.1.120)$$

С другой стороны, преобразования

$$\begin{aligned} \chi^0(x) &\rightarrow \chi^0(x) + \frac{2ev}{\hbar c} Z_x^{-1/2} (-\partial) \lambda(x), \\ b^0(x) &\rightarrow b^0(x) + \frac{2ev}{\hbar c} Z_x^{-1/2} (-\partial) \lambda(x) \end{aligned} \quad (8.1.121)$$

изменяют \mathcal{A} на величину

$$\delta \mathcal{A} = -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \lambda(x) D(\partial) B(x). \quad (8.1.122)$$

Таким образом, если $\lambda(x)$ бесконечно мало, при этом преобразовании выражение в правой части (8.1.115a) заменяется на

$$-\frac{i}{\hbar} : \int d^4\xi \lambda(\xi) D(\partial_\xi) \langle T [B(\xi) O(x) \exp\{\mathcal{A}\}] \rangle_c :. \quad (8.1.123)$$

Это выражение совпадает с выражением для $\delta \{SO(x)\}$ (8.1.120). Таким образом, мы доказали, что преобразование (8.1.121) вызывает калибровочное преобразование гейзенберговских полей (динамическую перестройку калибровочной симметрии [3, 4]). Это приводит к заключению, что динамическое отображение любого калибровочно инвариантного оператора содержит χ^0 и b^0 только в виде комбинации ($\chi^0 - b^0$).

Поскольку

$$SB(\xi) = : \langle T [B(\xi) \exp\{\mathcal{A}\}] \rangle_c :, \quad (8.1.124)$$

из выражения (8.1.120) при $O(x) = 1$ следует

$$\delta S = -\frac{i}{\hbar} S \int d^4\xi \lambda(\xi) D(\partial_\xi) B(\xi) = 0, \quad (8.1.125)$$

где учтено соотношение (8.1.20). Из этого результата видно, что S -матрица калибровочно инвариантна.

Общая структура динамического отображения. Вводя поле фазона $f^0(x)$ и линейный векторный потенциал a_μ^0 с помощью выражений

$$f^0(x) = \frac{1}{2v} Z_x^{1/2} (\partial) \chi^0(x), \quad (8.1.126)$$

$$a_\mu^0(x) = Z_\mu^{(1/2)} v u_\nu^0(x) + \frac{\hbar c}{2ev} Z_x^{1/2} (\partial) \partial_\mu b^0(x), \quad (8.1.127)$$

а также учитывая соотношения (8.1.109)—(8.1.112), можно записать динамические отображения $\psi(x)$, $A_\mu(x)$ и $B(x)$ [4] в виде

$$\psi(x) = : \exp \{ -i f^0(x) \} \bar{F} \left(x; a_\mu^0 - \frac{\hbar c}{e} \partial_\mu f^0, \partial(\chi^0 - b^0), \varphi^0 \right) :, \quad (8.1.128)$$

$$A_\mu(x) = a_\mu^0(x) + : \bar{A}_\mu \left(x; a_\nu^0 - \frac{\hbar c}{e} \partial_\nu f^0, \partial(\chi^0 - b^0), \varphi^0 \right) :, \quad (8.1.129)$$

$$B(x) = \frac{2e\tau}{\hbar c} Z_\chi^{-1/2}(\partial) \{ \chi^0(x) - b^0(x) \}. \quad (8.1.130)$$

Дифференциальный оператор, стоящий при комбинации $(\chi^0 - b^0)$ в выражениях (8.1.128), (8.1.129), отражает тот факт, что преобразование $(\chi^0 \rightarrow \chi^0 + \text{const})$ порождает фазовое преобразование $\psi(x)$ (см. разд. 7.2). Эти динамические отображения имеют чрезвычайно простую структуру, что представляет собой результат проявления калибровочной инвариантности теории.

Резюмируя, можно сказать, что калибровочное преобразование порождается преобразованиями (8.1.121). Динамические отображения гейзенберговских полей имеют структуру выражений (8.1.128)—(8.1.130).

Заметим теперь, что поскольку член с \bar{A}_μ в (8.1.129) возникает в A_μ -канале, он должен содержать гриновскую функцию плазмона $\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\partial)$. Кроме того, из калибровочного условия $D^\mu A_\mu = 0$ следует, что член с \bar{A} содержит дифференциальный оператор $[D(\partial) g_{\mu\nu} - \partial_\mu D_\nu(\partial)]$, поскольку

$$D^\mu(\partial) [D(\partial) g_{\mu\nu} - \partial_\mu D_\nu(\partial)] = 0. \quad (8.1.131)$$

Таким образом, динамическое отображение $A_\mu(x)$ имеет вид

$$A_\mu(x) = a_\mu^0 + [D(\partial) g_\mu^0 - \partial_\mu D^0(\partial)] \times \\ \times \Lambda_\rho^{-1\sigma}(\partial) \bar{A} \left(x; a_\nu^0 - \frac{\hbar c}{e} \partial_\nu f^0, \partial(\chi^0 - b^0), \varphi^0 \right). \quad (8.1.132)$$

Если зависимость A от пространственных переменных гладкая, можно положить

$$[D(\partial) g_\mu^0 - \partial_\mu D^0(\partial)] \Lambda_{\rho\sigma}^{-1}(\partial) \ll 1, \quad (8.1.133)$$

поскольку энергия плазмона много больше энергии голдстоуновского бозона. В этом случае разумно применить линейную аппроксимацию

$$A_\mu(x) \approx a_\mu^0(x). \quad (8.1.134)$$

Еще одно замечание по поводу динамического отображения касается структуры \bar{F} в выражении (8.1.128). Поскольку фазовая симметрия спонтанно нарушается, связывающее поле φ^0 не может быть равно ψ , а является суперпозицией ψ и ψ^\dagger . Следовательно, линейный член в динамическом отображении \bar{F} является суперпо-

зицией φ^0 и φ^{+0} . Именно по этой причине фазовое преобразование $\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(x)$ не может быть выведено из фазового преобразования $\varphi^0(x)$.

Собственная энергия фотонов и бесконечная проводимость. Полученные до сих пор результаты основывались только на коммутационных соотношениях и калибровочной инвариантности. Попробуем теперь получить дальнейшие результаты, используя в явном виде уравнение Гейзенберга [5]. Таким образом, мы возвращаемся к уравнению Гейзенберга (8.1.16), из которого следует

$$\begin{aligned} (-\partial^2 g_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\mu} \partial^{\lambda}) \langle 0 | T [A_{\lambda}(x), A_{\nu}(y)] | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | T [j_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] | 0 \rangle - i\hbar g_{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-y) - \\ - D_{\mu}(\partial) \langle 0 | T [B(x), A_{\nu}(y)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (8.1.135)$$

Учитывая выражение (8.1.54), мы можем переписать это равенство в виде

$$\begin{aligned} (-\partial^2 g_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\mu} \partial^{\lambda}) \langle 0 | T [A_{\lambda}(x), A_{\nu}(y)] | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | T [j_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] | 0 \rangle - i\hbar g_{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-y) + \\ + i\hbar D_{\mu}(\partial) \partial_{\nu}^x \frac{1}{D(\partial)} \delta^{(4)}(x-y). \end{aligned} \quad (8.1.136)$$

Введем обозначения

$$\langle 0 | T [A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] | 0 \rangle = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ip(x-y)} \Delta_{\mu\nu}^A(p), \quad (8.1.137)$$

$$\langle 0 | T [j_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] | 0 \rangle = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ip(x-y)} J_{\mu\nu}^A(p). \quad (8.1.138)$$

Обозначив символом $\Sigma_{\mu\nu}(p)$ собственно энергетическую функцию фотонов, можем написать

$$J_{\mu\nu}^A(p) = -\Sigma_{\mu}^{\rho}(p) \Delta_{\rho\nu}^A(p). \quad (8.1.139)$$

Теперь уравнение (8.1.136) принимает вид

$$\{p^2 g_{\mu}^{\lambda} - p_{\mu} p^{\lambda} + \Sigma_{\mu}^{\lambda}(p)\} \Delta_{\lambda\nu}^A(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{1}{D(p)} D_{\mu}(p) p_{\nu}. \quad (8.1.140)$$

Здесь использованы обозначения $D_{\mu}(\partial) e^{ipx} = iD_{\mu}(p) e^{ipx}$, $D(\partial) e^{ipx} = -D(p) e^{ipx}$.

С другой стороны, из соотношения (8.1.64) следует

$$\Delta_{\mu}^{A\nu}(p) D_{\nu}(p) = 0, \quad (8.1.141)$$

а закон сохранения $\partial^{\mu} j_{\mu} = 0$ вместе с выражением (8.1.24) приводит к уравнению

$$p^{\mu} \Sigma_{\mu\nu}(p) = 0. \quad (8.1.142)$$

Для простоты предположим, что теория обладает инвариантностью относительно вращений. Поскольку перекрестных вкладов от про-

дольных и поперечных членов возникать не может, $\Sigma_{\mu\nu}(p)$ можно записать в виде

$$\Sigma_{\mu\nu}(p) = \Sigma_T(p) T_{\mu\nu} + \Sigma_0(p) (p^2 L_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu), \quad (8.1.143)$$

где учтено уравнение (8.1.142). Теперь уравнение (8.1.140) принимает вид

$$\begin{aligned} \{[p^2 + \Sigma_T(p)] T_\mu^\lambda + [1 + \Sigma_0(p)] (p^2 L_\mu^\lambda - p_\mu p^\lambda)\} \Delta_{\lambda\nu}^A(p) = \\ = -T_{\mu\nu} - \frac{1}{D(p)} \{D(p) L_{\mu\nu} - D_\mu(p) p_\nu\} \end{aligned} \quad (8.1.144)$$

Чтобы его решить, полезно написать следующие соотношения, которые легко вывести из определения $\eta_{\mu\nu}$:

$$[v_B(\mathbf{p})/c]^{-2} \eta_{\mu}^{-1\nu}(\mathbf{p}) D_\nu(p) = p_\mu, \quad (8.1.145)$$

$$[v_B(\mathbf{p})/c]^{-2} D^\mu(p) \eta_{\mu\nu}^{-1}(\mathbf{p}) = p_\nu, \quad (8.1.146)$$

$$p^2 L_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu = D(p) L_\mu^\lambda \eta_{\nu\lambda}(\mathbf{p}) - [v_B(\mathbf{p})/c]^{-2} D^\mu(p) D_\nu(p). \quad (8.1.147)$$

Если в левой части уравнения (8.1.144) учесть соотношения (8.1.141) и (8.1.147), то мы получим

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\frac{1}{p^2 + \Sigma_T(p)} T_{\mu\nu} - \frac{1}{D(p) [1 + \Sigma_0(p)]} L_\mu^\lambda \eta_{\lambda}^{-1\nu}(\mathbf{p}) \times \\ \times \left[L_{\rho\nu} - \frac{1}{D(p)} D(p) p_\nu \right] = -\frac{1}{p^2 + \Sigma_T(p)} T_{\mu\nu} - \\ - \frac{1}{[1 + \Sigma_0(p)] D(p)} \left[L_\mu^\lambda \eta_{\lambda\nu}^{-1}(\mathbf{p}) - (v_B(\mathbf{p})/c)^2 \frac{1}{D(p)} p_\mu p_\nu \right]. \end{aligned} \quad (8.1.148)$$

На последнем этапе вывода выражения (8.1.148) использованы соотношения (8.1.145), (8.1.146).

Следуя приведенному в разд. 3.6 методу спектрального представления, потребуем, чтобы $\Delta_{\mu\nu}^A(p)$ не имело двойного полюса, т. е. члена типа $[1/D(p)]^2$. Тогда выражение (8.1.148) позволяет заключить, что $[1 + \Sigma_0(p)]^{-1}$ имеет вид

$$\frac{1}{1 + \Sigma_0(p)} = \frac{D(p)}{D(p) + m^2(p)} Z(p), \quad (8.1.149)$$

где принято, что $[1 + \Sigma_0(p)]^{-1}$ должно быть пропорционально гриновской функции продольного плазмона (т. е. $1/[D(p) + m^2(p)]$). Отсюда следует замечательный факт: $\Sigma_0(p)$ содержит особенность типа $1/D(p)$ и, следовательно, расходится при $p = 0$. В одной из последующих глав мы покажем, что электропроводность пропорциональна $\Sigma_0(p)$. При этом рассмотрении мы убедимся, что проводимость сверхпроводников бесконечна, как это и следует из названия «сверхпроводник» [5]. Этот результат подтверждают также приближенные расчеты $\Sigma_0(p)$. Рассмотрим для примера приближение случайных фаз. Поскольку $\Sigma_0(p)$ есть не-

приводимая часть собственно-энергетической функции фейнмановских диаграмм (т. е. фрагментов диаграмм, которые нельзя разделить на две, разрезая только по одной линии), в рамках приближения случайных фаз она не может включать электромагнитного взаимодействия. С другой стороны, если пренебречь электромагнитным взаимодействием, из результатов предыдущей главы (а именно из соотношения (7.2.27)) вытекает, что $\langle 0 | T [j_\mu, j_\nu] | 0 \rangle$ имеет особенность типа $1/D(p)$. Таким образом, полученный с помощью приближения случайных фаз вывод о том, что $\Sigma_0(p)$ имеет полюс типа $1/D(p)$, согласуется с приведенными выше общими соображениями. В приближении случайных фаз электромагнитное взаимодействие приводит к многократному повторному действию Σ_0 , вследствие чего $\langle 0 | T [j_\mu, j_\nu] | 0 \rangle$ пропорционально

$$1/[1 + \Sigma_0(p)] \sim D(p)/[D(p) + m^2(p)].$$

Таким образом, электромагнитное взаимодействие порождает плазменные моды.

Получим теперь окончательное выражение для $\Delta_{\mu\nu}^A$, объединив (8.1.148) и (8.1.149). Результат имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\frac{1}{p^2 + \Sigma_T(p)} T_{\mu\nu} - \frac{Z(p)}{D(p) + m^2(p)} \left[\eta_{\mu}^{-1\rho}(p) L_{\rho\nu} - \left(\frac{v_B}{c}\right)^2 \frac{1}{D(p)} p_\mu p_\nu \right], \quad (8.1.150)$$

где v_B обозначает $v_B(p)$. Выделяя полюсные члены, получаем

$$\Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\frac{Z_t(p)}{p^2 + m_T^2(p)} T_{\mu\nu} - \frac{Z_l(p)}{D(p) + m^2(p)} \left[\eta_{\mu}^{-1\rho}(p) L_{\rho\nu} + m^{-2}(p) \left(\frac{v_B}{c}\right)^2 p_\mu p_\nu \right] + m^{-2}(p) Z_0(p) (v_B/c)^2 \frac{1}{D(p)} p_\mu p_\nu + \dots, \quad (8.1.151)$$

где m_T^2 , $Z_t(p)$, $Z_l(p)$ и $Z_0(p)$ определены выражениями

$$\Sigma_T(p) = m_T^2(p) + [Z_t^{-1}(p) - 1] \{p^2 + m_T^2(p)\} + \dots, \quad (8.1.152)$$

$$Z_l(p) = Z(p) \quad \text{для } D(p) = -m^2(p), \quad (8.1.153)$$

$$Z_0(p) = Z(p) \quad \text{для } D(p) = 0. \quad (8.1.154)$$

Многоточием в выражении (8.1.151) обозначены члены, которые не содержат особенности типа полюса.

Покажем теперь, что приведенные выше результаты следуют непосредственно из динамического отображения (8.1.111). Если

учесть выражения (8.1.98), (8.1.102), то из динамического отображения (8.1.111) следует

$$\Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\frac{Z_t(p)}{p^2 + m_f^2(p)} T_{\mu\nu} - \frac{Z_l(p)}{D(p) + m^2(p)} d_\mu^\rho(p) L_{\rho\nu} + \\ + m^{-2}(p) Z_0(p) (v_B/c)^2 \frac{1}{D(p)} p_\mu p_\nu + \dots, \quad (8.1.155)$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие особенности типа полюса. При выводе выражения (8.1.155) использовано соотношение (8.1.107). Вспомним теперь выражение (8.1.86), т. е.

$$d_\mu^\rho(p) L_{\rho\nu} = \{g_\mu^\rho + m^{-2}(p) p_\mu D^\rho(p)\} \eta_\rho^{-1\sigma}(p) L_{\sigma\nu} = \\ = \eta_\mu^{-1\rho}(p) L_{\rho\nu} + m^{-2}(p) (v_B/c)^2 p_\mu p_\nu, \quad (8.1.156)$$

где учтено равенство $D^\rho(p) \eta_{\rho\nu}^{-1}(p) = (v_B/c)^2 p_\nu$. Таким образом, выражение (8.1.155) преобразуется к виду

$$\Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\frac{Z_t(p)}{p^2 + m_f^2(p)} T_{\mu\nu} - \frac{Z_l(p)}{D(p) + m^2(p)} [\eta_\mu^{-1\rho}(p) L_{\rho\nu} + \\ + m^{-2}(p) (v_B/c)^2 p_\mu p_\nu] + m^{-2}(p) Z_0(p) (v_B/c)^2 \frac{1}{D(p)} p_\mu p_\nu + \dots \quad (8.1.157)$$

Это согласуется с (8.1.151). Из этого результата следует, что введенное в выражении (8.1.105) $Z_0(p)$ определяется равенством (8.1.154).

Мы завершаем этот раздел замечанием о температурных эффектах. Когда используются методы термополевой динамики (ср. гл. 4), возникают операторы, тильда-сопряженные гейзенберговским операторам. В рассмотренном здесь случае кроме всех приведенных выше соотношений возникают также тильда-сопряженные соотношения.

8.2. Квантовая электродинамика нормальных металлов

Лагранжиан. В этом разделе мы рассмотрим электромагнитные свойства твердых тел в нормальном состоянии [5]. Лагранжиан $\mathcal{L}(\psi, A)$ определяется выражением (8.1.1) и инвариантен при калибровочном преобразовании $\psi \rightarrow \exp[-i(e/\hbar c) \lambda(x)]$, $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$. Лагранжиан также инвариантен при фазовом преобразовании $\psi \rightarrow \exp[-i(e/\hbar c) \theta] \psi$, $A_\mu \rightarrow A_\mu$.

В этом разделе мы примем, что

$$v = \langle 0 | \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger + \psi_\downarrow \psi_\uparrow | 0 \rangle = 0. \quad (8.2.1)$$

Другими словами, мы допустим, что спонтанного нарушения симметрии не происходит (т. е. система находится не в сверхпроводящем, а в нормальном состоянии).

Следуя методу, развитому в предыдущем разделе, мы введем величину $B(x)$, канонически сопряженную A_0 . Таким образом, мы добавим к лагранжиану член вида

$$\mathcal{L}_B(x) = B(x) D^\mu(\partial) A_\mu(x) - \frac{1}{2} B(x) \alpha(\partial) B(x). \quad (8.2.2)$$

Дифференциальные операторы $D^\mu_\pm(\partial)$ и $\alpha(\partial)$ определим самосопряженным образом. Допустим, что $D^\mu(\partial)$ имеет вид (8.1.7):

$$D^\mu(\partial) = \left((v_B(\partial)/c)^2 \nabla, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (8.2.3)$$

Чтобы упростить анализ, допустим, что $v_B^0(\partial) = v_B^0(-\partial)$. Поскольку фазовая симметрия не нарушается, нам не нужно вводить член \mathcal{L}_e . Тогда лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}(\psi, A_\mu) = e A_0 n_e + B(x) D^\mu(\partial) A_\mu(x) - \frac{1}{2} B(x) \alpha(\partial) B(x). \quad (8.2.4)$$

Уравнение Гейзенберга, калибровочное условие и условие физического состояния. Уравнения Гейзенберга для ψ и A_μ возьмем в том же виде, что и в предыдущем разделе, например

$$-\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu - D_\nu(\partial) B. \quad (8.2.5)$$

Из уравнения (8.2.5) и равенства $\partial^\nu j_\nu = 0$ следует соотношение (8.1.20):

$$D(\partial) B = 0, \quad (8.2.6)$$

из которого вытекает, что B — свободное поле, энергетический спектр которого не имеет щели. Калибровочное условие имеет вид (8.1.17), т. е.

$$D^\mu(\partial) A_\mu(x) = \alpha(\partial) B(x). \quad (8.2.7)$$

Все канонические одновременные перестановочные соотношения (8.1.9)—(8.1.15), а также соотношения (8.1.24)—(8.1.30) остаются справедливыми и в этом разделе. Таким образом, мы видим, что образуются два бозона χ^0 и b^0 с энергетическим спектром, не имеющим щели, через которые можно выразить поле B в виде (8.1.31)

$$B = Z_B(\partial) (b^0 - \chi^0). \quad (8.2.8)$$

Уравнения для χ^0 и b^0 имеют вид

$$D(\partial) \chi^0 = 0, \quad D(\partial) b^0 = 0. \quad (8.2.9)$$

Бозон χ^0 имеет положительную норму, а b^0 — отрицательную (т. е. b^0 — бозон-дух). Физически наблюдаемые состояния $|a\rangle$ должны удовлетворять уравнению (8.1.35):

$$(\chi^0 - b^0)^{(-)} |a\rangle = 0. \quad (8.2.10)$$

Уравнение (8.1.54) может быть выведено и для данного случая:

$$D(\partial) \langle 0 | T [B(x), A_\mu(y)] | 0 \rangle = -i\hbar \partial_\mu^x \delta^{(4)}(x-y). \quad (8.2.11)$$

Существенная разница между нормальным и сверхпроводящим состояниями проявляется в том, что в случае сверхпроводимости из условия $v \neq 0$ следовало, что $\chi = i(\psi_\downarrow \psi_\uparrow - \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger)$ — связывающее поле для χ^0 . Отсюда было выведено соотношение (8.1.61) (т. е. $\alpha(\partial) = 0$) и, следовательно, калибровочное соотношение (8.1.62). В данном же случае, поскольку $v = 0$, χ не должно быть связывающим полем χ^0 , следовательно, $\alpha(\partial)$ не должно обращаться в нуль и калибровочное соотношение имеет вид (8.2.7).

Приведенные соображения показывают, что равенство (8.1.64) в данном случае не выполняется, поскольку при его выводе использовалось калибровочное условие. В самом деле, если использовать выражение (8.2.11), мы получим соотношение

$$D^\mu(\partial) \langle 0 | T [A_\mu(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle = \alpha(\partial) \langle 0 | T [B(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle = \quad (8.2.12)$$

$$= -i\hbar \alpha(\partial) \partial_\nu^x \frac{1}{D(\partial)} \delta^{(4)}(x-y). \quad (8.2.13)$$

Из выражений (8.2.11) и (8.2.8) следует

$$A_\mu = Z_\mu^{(1/2)v}(\partial) u_\nu^0 - Z_B^{-1}(\partial) \partial_\mu b^0 + \beta_\mu(\partial) (b^0 - \chi^0) + \dots, \quad (8.2.14)$$

где многоточием обозначены члены более высоких порядков, а u_μ^0 — векторное поле, называемое плазмоном. Третий член в (8.2.14) в случае сверхпроводника не возникает (ср. с (8.1.61)), так как $\alpha(\partial)$ обращается в нуль; в данном случае $\alpha(\partial)$ не обращается в нуль.

Из калибровочного условия (8.2.7) следует

$$D^\mu(\partial) Z_\mu^{(1/2)v}(\partial) u_\nu^0 = 0, \quad (8.2.15)$$

$$D^\mu(\partial) \beta_\mu(\partial) = \alpha(\partial) Z_B(\partial) + \tilde{\alpha}(\partial) D(\partial), \quad (8.2.16)$$

а члены, обозначенные многоточием в (8.2.14), не дают вклада в $D^\mu A_\mu$. В соотношении (8.2.16) $\tilde{\alpha}(\partial)$ — некоторый дифференциальный оператор.

Из соотношения (8.2.16) следует

$$\beta_\mu(\partial) = \tilde{\alpha}(\partial) \partial_\mu + \alpha(\partial) Z_B(\partial) [v_B(\partial)/c]^{-2} \frac{1}{v^2} (\partial_\mu - \partial_0 \delta_{0\mu}), \quad (8.2.17)$$

где учтено равенство (8.2.3). Здесь учтен также тот факт, что, согласно (8.2.14), $\beta_\mu(\partial)$ не содержит множителя $[1/D(\partial)]$.

Плазмон. Перенормировочный коэффициент $Z_{\mu\nu}$ может быть представлен в виде (8.1.67), т. е.

$$Z_{\mu\nu}(\partial) = Z_t(\partial) T_{\mu\nu} + Z_l(\partial) L_{\mu\nu}, \quad (8.2.18)$$

где $T_{\mu\nu}$ и $L_{\mu\nu}$ — проекционные операторы для поперечной и продольной компонент соответственно. Таким образом, $u_\mu^T = T_\mu^\nu u_\nu^0$ и $u_\mu^L = L_\mu^\nu u_\nu^0$ — поперечный и продольный плазмоны. Из соотношения (8.2.15) следует

$$D^\mu(\partial) u_\mu^0 = 0. \quad (8.2.19)$$

Уравнения для u_μ^T и u_μ^L можно написать в той же форме, что и уравнение (8.1.71):

$$[\partial^2 - m_T^2(\partial)] u_\mu^T = 0, \quad (8.2.20a)$$

$$[D(\partial) - m^2(\partial)] u_\mu^L = 0. \quad (8.2.20b)$$

Тогда уравнение для плазмона принимает вид (8.1.74):

$$\Lambda_\mu^\nu(\partial) u_\nu^0(x) = 0, \quad (8.2.21)$$

$$\Lambda_{\mu\nu}(\partial) = \partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu - m^2(\partial) \eta_{\mu\nu}(\partial) + \delta m^2(\partial) T_{\mu\nu}. \quad (8.2.22)$$

Справедливы также выражения (8.1.98), (8.1.99), т. е.

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [u_\mu^0(x), u_\nu^0(y)] | 0 \rangle = \\ = \hbar \Delta_{\mu\nu}(x-y) - i \hbar \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} m^{-2}(\partial) [v_B(\partial)/c]^2 \delta^{(4)}(x-y), \end{aligned} \quad (8.2.23)$$

$$\begin{aligned} D^\mu(\partial) \langle 0 | T [u_\mu^0(x), u_\nu^0(y)] | 0 \rangle = \\ = -i \hbar m^{-2}(\partial) [v_B(\partial)/c]^2 [\partial_\nu^2 - \partial_0^x \delta_{\nu 0}] \delta^{(4)}(x-y), \end{aligned} \quad (8.2.24)$$

а гриновская функция $\Delta_{\mu\nu}(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\Lambda_\mu^\nu(\partial) \Delta_{\nu\lambda}(x) = i g_{\mu\lambda} \delta^{(4)}(x) \quad (8.2.25)$$

и определяется выражением (8.1.90).

Перестройка калибровочной и фазовой симметрии, динамические отображения и перенормированный заряд. Чтобы определить структуру нормальных произведений более высоких порядков в динамическом отображении (8.2.14), исследуем перестройку симметрии. В данном случае нужно использовать генератор, а не соотношения УТ.

Если воспользоваться в данном случае соотношением (6.1.19), то генератор N_g для калибровочного преобразования приобретает вид

$$N_g(t) = -\frac{1}{c} \int d^3x [F_{0i}(x) \partial_i \lambda(x) - B(x) \partial_0 \lambda(x) + j_0(x) \lambda(x)], \quad (8.2.26)$$

поскольку $-c^{-1}F_{0i}$ ($i = 1, 2, 3$) — величины, канонически сопряженные A_i , а $c^{-1}B(x)$ — величины, канонически сопряженные $A_0(x)$. Последний член в (8.2.26) приводит к преобразованию $\psi \rightarrow \exp[-i(e/\hbar c)\lambda]\psi$. Так как $\lambda(x)$ по предположению — гладкая функция, которая достаточно быстро убывает при $|x| \rightarrow \infty$, в (8.2.26) можно выполнить интегрирование по частям. Тогда уравнение Гейзенберга (8.2.5) при $v = 0$ приводит к выражению

$$N_g(t) = -\frac{1}{c} \int d^3x [\partial_0 B(x) \cdot \lambda(x) - B(x) \partial_0 \lambda(x)], \quad (8.2.27)$$

так как $D_0(\partial) = \partial_0$ ($= -c^{-1}\partial/\partial t$). Отсюда видно, что $N_g(t)$ не зависит от времени, если $\lambda(x)$ — решение уравнения $D(\partial)\lambda(x) = 0$. Этот результат согласуется с тем фактом, что при $D(\partial)\lambda(x) = 0$ даже член \mathcal{L}_B лагранжиана (8.2.2) инвариантен относительно калибровочного преобразования. При последующем изложении мы не будем требовать выполнения условия $D(\partial)\lambda(x) = 0$. Если учесть выражение (8.2.8), то легко получить

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar} N_g(t)\right) \chi^0(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} N_g(t)\right) &= \chi^0(x) - Z_B(\partial) \lambda(x), \\ \exp\left(\frac{i}{\hbar} N_g(t)\right) b^0(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} N_g(t)\right) &= b^0(x) - Z_B(\partial) \lambda(x). \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем заключить, что калибровочное преобразование $\psi \rightarrow \exp[-i(e/\hbar c)\lambda(x)]$, $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$, $B \rightarrow B$ вызывается преобразованиями

$$\begin{aligned} \chi^0(x) &\rightarrow \chi^0(x) - Z_B(\partial) \lambda(x), \\ b^0(x) &\rightarrow b^0(x) - Z_B(\partial) \lambda(x). \end{aligned} \quad (8.2.28)$$

Это — динамическая перестройка калибровочной симметрии в квантовой электродинамике нормальных металлов. Сравнивая (8.2.28) и (8.2.21) и учитывая соотношение (8.1.50), приходим к любопытному результату: динамическая перестройка калибровочной симметрии в данном случае та же, что и в случае сверхпроводимости.

Поскольку преобразования (8.2.28) вызывают калибровочные преобразования, динамические отображения гейзенберговских полей A_μ и ψ имеют вид

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= Z_\mu^{(1/2)v}(\partial) u_v^0(x) - Z_B^{-1}(\partial) \partial_\mu b^0(x) + \\ &+ \beta_\mu(\partial) [b^0(x) - \chi^0(x)] + : \hat{A}_\mu[x; u_v^0, (b^0 - \chi^0), \varphi^0] :, \end{aligned} \quad (8.2.29)$$

$$\psi(x) = : \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} Z_B^{-1}(\partial) \chi^0(x)\right) \{\varphi^0(x) + \hat{\psi}[x; u_v^0, (b^0 - \chi^0), \varphi^0]\} : \quad (8.2.30)$$

Динамическое отображение B определяется равенством (8.2.8), т. е.

$$B(x) = Z_B(\partial) \{b^0(x) - \chi^0(x)\}. \quad (8.2.31)$$

Если символом $\bar{O}(x)$ обозначить произвольный калибровочно-инвариантный оператор, структура его динамического отображения будет иметь вид

$$\bar{O}(x) = : \bar{O}[x; u_v^0, (b^0 - \chi^0), \varphi^0] :. \quad (8.2.32)$$

Условие наблюдаемости физического состояния (8.2.10) приводит к тому, что возбуждение квантов b и χ^0 при измерении любой калибровочно-инвариантной величины становится ненаблюдаемым.

Обратим внимание теперь на фазовое преобразование $\psi \rightarrow \exp[-i(e/\hbar c)\theta]\psi$, $A_\mu \rightarrow A_\mu$, $B \rightarrow B$. Генератор его имеет вид

$$N_p = -\frac{1}{ec} \int d^3x j_0(x). \quad (8.2.33)$$

Поскольку ток j_μ сохраняется, N_p не зависит от времени. Согласно общим соображениям, приведенным в разд. 7.1, преобразование симметрии свободных физических полей есть комбинация линейного смешивания физических полей и трансляций поля бозонов с бесщелевым энергетическим спектром. Следовательно, динамическое отображение N_p содержит линейные и билинейные по физическим полям члены. Кроме того, линейные члены должны соответствовать бозонам с бесщелевым спектром. Поскольку b^0 и χ^0 не имеют заряда, билинейные по этим полям члены в N_p не возникают. Поэтому можно написать

$$N_p = \frac{1}{ec} \int d^3x \left(\frac{e_r}{\hbar} \varphi^{0+}(x) \varphi^0(x) + c_B \partial_0 [b^0(x) - \chi^0(x)] \right). \quad (8.2.34)$$

Константы e_r и c_B исследуются ниже. Появление во втором члене оператора ∂_0 обусловлено независимостью от времени генератора N_p .

Генератор N_p , определенный выражением (8.2.34), порождает преобразования

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar} e\theta N_p\right) \varphi^0(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} e\theta N_p\right) &= \exp\left(-i \frac{e_r}{\hbar c} \theta\right) \varphi^0(x), \\ \exp\left(\frac{i}{\hbar} e\theta N_p\right) \chi^0(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} e\theta N_p\right) &= \chi^0(x) - c_B \theta \chi^0(x), \\ \exp\left(\frac{i}{\hbar} e\theta N_p\right) b^0(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} e\theta N_p\right) &= b^0(x) - c_B \theta b^0(x). \end{aligned} \quad (8.2.35)$$

С другой стороны, из выражения (8.2.30) видно, что динамическое отображение $\psi(x)$ содержит множитель $\exp[i(e/\hbar c) \times \times Z_B^{-1}(\partial) \chi^0(x)]$. Поэтому второе из преобразований (8.2.35) приводит к появлению фазового множителя $\exp[-i(e/\hbar c) c_B Z_B^{-1}(0) \theta]$.

Поскольку спонтанное нарушение фазового преобразования отсутствует, $\psi(x)$ должно быть пропорционально φ^0 . Таким образом, полный фазовый множитель, возникший при преобразовании (8.2.35), есть $\exp[-(i/\hbar c) [e_r + ec_B Z_B^{-1}(0)] \theta]$, и он должен быть равен $\exp[-i(e/\hbar c) \theta]$. Поэтому имеем

$$e_r + ec_B Z_B^{-1}(0) = e. \quad (8.2.36)$$

Пусть $|\varphi^0\rangle$ обозначает состояние с одним физическим электроном. Поскольку оно должно удовлетворять условию наблюдаемости физического состояния (8.2.10), имеем

$$\langle \varphi^0 | ecN_p | \varphi^0 \rangle = e_r \langle \varphi^0 | \varphi^0 \rangle. \quad (8.2.37)$$

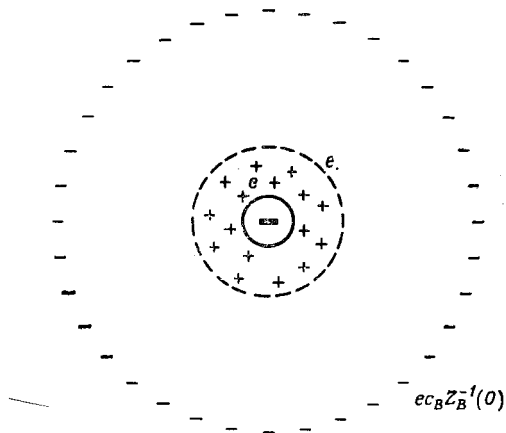


Рис. 8.1.

Отсюда следует, что e_r — перенормированный заряд. Это помогает ответить на вопрос, почему электрический заряд изменяется от e до e_r , даже если общий заряд сохраняется и фазовая симметрия не нарушается. Интуитивно понятно, что разность зарядов, равная $e - e_r$, чтобы стать ненаблюдаемой, должна уйти на бесконечность, если не встретится поверхность, препятствующая утечке (рис. 8.1). Как показало предыдущее рассмотрение, математически этот процесс состоит в том, что разность зарядов связана с ненаблюдаемыми квантами χ^0 и b^0 и уходит в ненаблюдаемое подпространство гильбертова пространства. Если образец имеет конечные размеры, избыток заряда собирается около поверхности. Это наводит на мысль, что, хотя микроскопическое возбуждение χ^0 или b^0 становится ненаблюдаемым, скопление χ^0 или b^0 (т. е. конденсация бозонов) вблизи определенных особых областей (таких, как поверхностная особенность) вызывает макроскопические и наблюдаемые явления. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 11.

Калибровочное условие (8.2.7) вместе с динамическим отображением (8.2.29) приводит к равенству

$$D^\mu(\partial) \bar{A}_\mu[x; u_\nu^0, (b^0 - \chi^0), \varphi^0] = 0. \quad (8.2.38)$$

Теперь аналогично тому, как мы вывели соотношение (8.1.132), покажем, что динамическое отображение A_μ имеет вид

$$A_\mu(x) = -Z_B^{-1}(\partial) \partial_\mu b^0(x) + \beta_\mu(\partial) [b^0(x) - \chi^0(x)] + Z_\mu^{(1/2)\rho}(\partial) u_\rho^0(x) + [D(\partial) g_\mu^0 - \partial_\mu D^\rho(\partial)] \Lambda_\rho^{-1\sigma}(\partial) \bar{A}_\sigma[x; u_\nu^0, (b^0 - \chi^0), \varphi^0]. \quad (8.2.39)$$

Линейный член очень мал, если \bar{A} — гладкая функция пространственных переменных, так как

$$[D(\partial) g_\mu^0 - \partial_\mu D^\rho(\partial)] \Lambda_\rho^{-1\sigma}(\partial) \ll 1. \quad (8.2.40)$$

Другими словами,

$$A_\mu(x) \approx -Z_B^{-1}(\partial) \partial_\mu b^0(x) + \beta_\mu(\partial) [b^0(x) - \chi^0(x)] + Z_\mu^{(1/2)\rho}(\partial) u_\rho^0(x). \quad (8.2.41)$$

Собственная энергия фотонов. Получим теперь дополнительную информацию из уравнений Гейзенберга. Следуя изложению последнего раздела (ср. с (8.1.137) и (8.1.138)), введем

$$\langle 0 | T [A_\mu(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ip(x-y)} \Delta_{\mu\nu}^A(p), \quad (8.2.42a)$$

$$\langle 0 | T [j_\mu(x), A_\nu(y)] | 0 \rangle = \frac{i\hbar}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ip(x-y)} J_{\mu\nu}^A(p). \quad (8.2.42b)$$

Обозначая неприводимую часть собственной энергии фотона $\Sigma_{\mu\nu}(p)$, получаем соотношение (8.1.139), т. е.

$$J_{\mu\nu}^A(p) = -\Sigma_\mu^0(p) \Delta_{\rho\nu}^A(p). \quad (8.2.43)$$

Мы можем взять $\Sigma_{\mu\nu}(p)$ в форме (8.1.143):

$$\Sigma_{\mu\nu}(p) = \Sigma_T(p) T_{\mu\nu} + \Sigma_0(p) (p^2 L_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu). \quad (8.2.44)$$

Из уравнения Гейзенберга следует уравнение (8.1.144), т. е.

$$\begin{aligned} \{ [p^2 + \Sigma_T(p)] T_\mu^\lambda + [1 + \Sigma_0(p)] (p^2 L_\mu^\lambda - p_\mu p^\lambda) \} \Delta_{\lambda\nu}^A(p) = \\ = -T_{\mu\nu} - \frac{1}{D(p)} \{ D(p) L_{\mu\nu} - D_\mu(p) p_\nu \}. \end{aligned} \quad (8.2.45)$$

Калибровочное условие (8.2.7) приводит к уравнению (8.2.13), которое можно записать в виде

$$D^\mu \Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\alpha(p) \frac{1}{D(p)} p_\nu. \quad (8.2.46)$$

Перепишав левую часть (8.2.45) с учетом соотношений (8.1.147) и (8.2.46), мы можем разрешить уравнение (8.2.45) относительно $\Delta_{\mu\nu}^A(p)$:

$$\Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\frac{1}{p^2 + \Sigma_T(p)} T_{\mu\nu} - \frac{1}{[1 + \Sigma_0(p)] D(p)} L_{\mu}^{\lambda} \eta_{\lambda\nu}^{-1}(p) - \frac{1}{D^2(p)} Q(p) p_{\mu} p_{\nu}, \quad (8.2.47)$$

где
$$Q(p) = \alpha(p) - \frac{1}{1 + \Sigma_0(p)} [v_B(p)/c]^2. \quad (8.2.48)$$

Эта ситуация резко отличается от той, которая возникает в случае сверхпроводимости, когда $\alpha(p) = 0$. В данном случае $\alpha(p) \neq 0$, и, следовательно, из условия, что $\Delta_{\mu\nu}^A(p)$ не должно содержать члена $[1/D(p)]^2$, не следует, что $\Sigma_0(p)$ должно содержать член $1/D(p)$. Таким образом, нет оснований, чтобы $\Sigma_0(p)$ расходилось при $p = 0$. Поэтому объемная проводимость нормального металла имеет конечное значение. Представим теперь $1/[1 + \Sigma_0(p)]$ в виде

$$\frac{1}{1 + \Sigma_0(p)} = -\frac{m^2(p)}{D(p) + m^2(p)} Z(p). \quad (8.2.49)$$

Это уравнение нужно сравнить с уравнением (8.1.149).

Теперь $Q(p)$ имеет вид

$$Q(p) = \alpha(p) + [v_B(p)/c]^2 Z(p) - \frac{D(p) Z(p)}{D(p) + m^2(p)} [v_B(p)/c]^2. \quad (8.2.50)$$

Напишем следующее равенство:

$$Z(p) = Z_0(p) + D(p) \tilde{Z}(p), \quad (8.2.51)$$

где
$$Z_0(p) = Z(p)|_{D(p)=0}. \quad (8.2.52)$$

Затем, чтобы избавиться от членов типа $[1/D(p)]^2$ в $\Delta_{\mu\nu}^A$, выберем $\alpha(p)$ в виде

$$\alpha(p) = -Z_0(p) (v_B/c)^2. \quad (8.2.53)$$

Калибровочное условие (8.2.7) определено с точностью до выбора $v_B(p)$.

Из равенств (8.2.53), (8.2.17) следует

$$\beta_{\mu}(\partial) = \tilde{\alpha}(\partial) \partial_{\mu} - Z_0(\partial) Z_B(\partial) \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_{\mu} - \partial_0 \delta_{0\mu}), \quad (8.2.54)$$

где $\tilde{\alpha}(\partial)$ еще не определено,

Используя соотношения (8.2.47), (8.2.49), (8.2.50), (8.2.53), получаем следующее выражение для $\Delta_{\mu\nu}^A$:

$$\Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\frac{1}{p^2 + \Sigma_T(p)} T_{\mu\nu} + \frac{m^2(p)}{D(p) + m^2(p)} \frac{Z(p)}{D(p)} \left[\eta_{\mu}^{-1\rho}(p) L_{\rho\nu} + \right. \\ \left. + m^{-2}(p) \left(\frac{v_B}{c} \right)^2 \rho_{\mu} \rho_{\nu} \right] - \left(\frac{v_B}{c} \right)^2 \frac{\tilde{Z}(p)}{D(p)} \rho_{\mu} \rho_{\nu}. \quad (8.2.55)$$

Объединяя члены с полюсами, получаем

$$\Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\frac{Z_t(p)}{p^2 + m_T^2(p)} T_{\mu\nu} - \\ - \frac{Z_I(p)}{D(p) + m^2(p)} \left[\eta_{\mu}^{-1\rho}(p) L_{\rho\nu} + m^{-2}(p) \left(\frac{v_B}{c} \right)^2 \rho_{\mu} \rho_{\nu} \right] + \\ + \frac{Z_0(p)}{D(p)} \left[\eta_{\mu}^{-1\rho}(p) L_{\rho\nu} + m^{-2}(p) \left(\frac{v_B}{c} \right)^2 \rho_{\mu} \rho_{\nu} \right] - \\ - \left(\frac{v_B}{c} \right)^2 \frac{\tilde{Z}_0(p)}{D(p)} \rho_{\mu} \rho_{\nu} + \dots, \quad (8.2.56)$$

где многоточие обозначает члены, которые не содержат особенности типа полюса, а m_T^2 , Z_t , Z_I и \tilde{Z}_0 определяются выражениями (8.1.152)—(8.1.154):

$$\Sigma_T(p) = m_T^2(p) + [Z_t^{-1}(p) - 1] \{p^2 + m_T^2(p)\} + \dots, \quad (8.2.57)$$

$$Z_I(p) = Z(p) \quad \text{для} \quad D(p) = -m^2(p), \quad (8.2.58)$$

$$\tilde{Z}_0^0(p) = \tilde{Z}(p) \quad \text{для} \quad D(p) = -m^2(p). \quad (8.2.59)$$

Сравним теперь выражение (8.2.56) с выражением для $\Delta_{\mu\nu}^A$, полученным непосредственно из динамического отображения (8.2.14). Учитывая равенства (8.2.23) и (8.1.88), из соотношения (8.2.14) получаем

$$\Delta_{\mu\nu}^A(p) = -\frac{Z_t(p)}{p^2 + m_T^2(p)} T_{\mu\nu} - \frac{Z_I(p)}{D(p) + m^2(p)} d_{\mu}^0(p) L_{\rho\nu} + \\ + Z_B^{-2}(p) \frac{1}{D(p)} \rho_{\mu} \rho_{\nu} - Z_B^{-1}(p) \{ \beta_{\mu}(p) \rho_{\nu} + \beta_{\nu}(p) \rho_{\mu} \} \frac{1}{D(p)} + \dots = \\ = -\frac{Z_t(p)}{p^2 + m_T^2(p)} T_{\mu\nu} - \frac{Z_I(p)}{D(p) + m^2(p)} \left[\eta_{\mu}^{-1\rho}(p) L_{\rho\nu} - \right. \\ \left. - m^{-2}(p) \left(\frac{v_B}{c} \right)^2 \rho_{\mu} \rho_{\nu} \right] + \left[\{ Z_B^{-2}(p) - 2\tilde{\alpha}(p) Z_B^{-1}(p) \} \rho_{\mu} \rho_{\nu} + \right. \\ \left. + \frac{1}{p^2} Z_0(p) \{ \rho_{\mu} (\rho_{\nu} - \rho_0 \delta_{\nu 0}) + (\rho_{\mu} - \rho_0 \delta_{\mu 0}) \rho_{\nu} \} \right] \frac{1}{D(p)} + \dots \quad (8.2.60)$$

Первые два члена — полюсные члены плазмона — соответствуют аналогичным членам соотношения (8.2.56). Чтобы сравнить

члены, пропорциональные $1/D(p)$, нужно заменить p_0 в числителе на $[v_B(p)/c] |p|$. Тогда члены $\Delta_{00}(p)$, пропорциональные $1/D(p)$ в (8.2.56), становятся равными

$$-\left(\frac{v_B}{c}\right)^2 \frac{1}{D(p)} \left[Z_0(p) \left\{ 1 - m^2(p) \left(\frac{v_B}{c}\right)^2 p^2 \right\} - \tilde{Z}_0(p) \left(\frac{v_B}{c}\right)^2 p^2 \right],$$

а члены в $\Delta_{00}(p)$, пропорциональные $1/D(p)$ в соотношении (8.2.60), равны

$$\left(v_B/c^2\right) \frac{1}{D(p)} [Z_B^{-2}(p) - 2\tilde{\alpha}(p) Z_B^{-1}(p)] p^2.$$

Сравнивая два этих выражения, получаем соотношение

$$Z_B^{-2}(p) - 2\alpha(p) Z_B^{-1}(p) = -\frac{Z_0(p)}{p^2} + \frac{Z_0(p)}{m^2(p)} \left(\frac{v_B}{c}\right)^{-2} - \tilde{Z}_0(p) \left(\frac{v_B}{c}\right)^2. \quad (8.2.61)$$

Аналогичный анализ выражений для Δ_{0i} , Δ_{i0} и Δ_{ij} также приводит к соотношению (8.2.61).

Если $\Sigma_{\mu\nu}(p)$ вычислено, немедленно определяются $m_T^2(p)$, $m^2(p)$, $Z_t(p)$, $Z_l(p)$ и $Z_0(p)$. Из соотношения (8.2.61) затем определяется $\tilde{\alpha}(p)$ (и, следовательно, $\beta_\mu(p)$) как функция $Z_B(p)$ и $v_B(p)$. Поскольку в этих выражениях использованы величины, обратные Z_B и v_B , потребуем, чтобы

$$Z_B(p) \neq 0, \quad v_B(p) \neq 0. \quad (8.2.62)$$

В остальном эти две функции произвольны. В самом деле, из условия (8.2.10) для физического состояния с определенностью следует, что ни одна из величин $\beta_\mu(p)$, $Z_B(p)$ или $v_B(p)$ не наблюдается.

Динамическое отображение тока j_μ можно получить, используя уравнение Максвелла (8.2.5) и динамические отображения (8.2.9) и (8.2.31), в виде

$$j_\mu(x) = (-\partial^2 g_\mu^\nu + \partial_\mu \partial^\nu) A_\nu(x) + D_\mu B(x) = -[m^2(\partial) \eta_\mu^\nu(\partial) - \delta m^2(\partial) T_\mu^\nu] Z_\nu^{(1/2)\lambda} u_\lambda^0(x) - Z_B(\partial) [1 + Z_0(\partial)] D_\mu (b^0(x) - \chi^0(x)) + \dots \quad (8.2.63)$$

Здесь использованы соотношения (8.2.9), (8.2.21) и (8.2.54). Теперь мы видим, что константа c_B в (8.2.34) определяется выражением

$$c_B = Z_B(\partial) [1 + Z_0(\partial)] \quad (8.2.64)$$

и, следовательно,

$$e_T = -e Z_0(0). \quad (8.2.65)$$

Таким образом, мы выявили общую структуру динамических отображений гейзенберговских операторов и рассчитали все параметры.

Как и в случае сверхпроводимости, при конечных температурах справедливы все соотношения этого раздела, а также соотношения, тильда-сопряженные к ним. Приближенный расчет [5, 7] собственной энергии фотона рассмотрен в разд. 5.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wentzel G.*, Quantum theory of fields, Interscience, New York, 1949.
2. *Nakanishi N.*, Prog. Theor. Phys., **49**, 640 (1973); **50**, 1388 (1973);
Lautrup B., Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **35**, 1 (1967).
3. *Matsumoto H.*, *Papastamatiou N. J.*, *Umezawa H.*, *Vitiello G.*, Nucl. Phys., **B97**, 61 (1975).
4. *Matsumoto H.*, *Umezawa H.*, F. Phys., **24**, 357 (1977);
Matsumoto H., *Tachiki M.*, *Umezawa H.*, F. Phys., **25**, 273 (1977).
5. *Matsumoto H.*, *Semenoff G.*, *Tachiki M.*, *Umezawa H.*, F. Phys., **28**, 67 (1980).
6. *Gupta S. N.*, Proc. Phys. Soc. (London), **A63**, 681 (1950);
Bleuler K., Helv. Phys. Acta., **23**, 567 (1950);
Nakanishi N., Suppl. Prog. Theor. Phys. (Kyoto), **51**, 1 (1972).
7. *Bohm D.*, *Pines D.*, Phys. Rev., **82**, 625 (1951); **85**, 338 (1952); **92**, 609 (1953);
Gell-Mann M., *Brueckner K.*, Phys. Rev., **106**, 364 (1957);
Sawada K., Phys. Rev., **105**, 372 (1957);
Sawada K., *Brueckner K.*, *Fukuda N.*, *Brout R.*, Phys. Rev., **108**, 507 (1957).

ПРОТЯЖЕННЫЕ ОБЪЕКТЫ КВАНТОВОЙ ПРИРОДЫ

9.1. Простое рассмотрение

Протяженные объекты в квантовополевых системах. В предыдущих главах мы изучали некоторые характерные особенности упорядоченных квантовых состояний. Однако в реальных ситуациях мы редко можем найти эти упорядоченные системы в чисто квантовых состояниях. Например, кристаллы, изучавшиеся в гл. 7, являются совершенными кристаллами, реальные же кристаллы всегда содержат некоторые протяженные (или макроскопические) объекты, такие, как дислокации, границы зерен, точечные дефекты, ультразвуковые волны и т. д. Эти протяженные объекты образуются в результате конденсации фононов. Даже граничные поверхности кристаллов являются не искусственно созданными, а формирующимися самосогласованным образом макроскопическими объектами. Вихри в сверхпроводниках также представляют собой протяженные объекты, которые образуются естественным образом в квантовополевой системе фазово-упорядоченного состояния. Кроме того, большинство наблюдаемых на макроскопическом уровне токов и электромагнитных полей в обычных веществах также можно рассматривать как макроскопические объекты, имеющие квантовую природу. По существу большинство явлений вокруг нас являются макроскопическими. Это подводит нас к вопросу о том, как эти макроскопические объекты образуются из квантовополевых систем [1]. Когда мы подходим к этому вопросу, сразу же осознаем ту интересную особенность, что большинство стабильных или стационарных макроскопических объектов появляются в определенных упорядоченных квантовых состояниях. Это можно понять, если мы вспомним проведенное в гл. 7 рассмотрение, основанное на том, что порядок в квантовополевых системах поддерживается благодаря некоторым коллективным бозонным модам (голдстоуновским бозонам), поскольку конденсация бозонов — простейший путь к накоплению большого числа квантов, необходимых для макроскопического проявления квантовых эффектов. Тот факт, что энергетический спектр голдстоуновских бозонов не имеет щели, упрощает возможность конденсации. В этой и последующих главах мы попытаемся дать подробное описание механизма образования протяженных объектов квантовой природы.

В данной главе проводится элементарное рассмотрение с целью выделения наиболее важных черт механизма образования протяженных объектов.

Уравнение Гейзенберга. Рассмотрим уравнение Гейзенберга

$$\Lambda(\partial)\psi(x) = F[\psi(x)], \quad (9.1.1)$$

где $\psi(x)$ — гейзенберговское бозонное поле, а $F[\psi]$ — некоторый функционал от него. Без потери общности мы можем так выбрать ψ , чтобы $\langle 0 | \psi | 0 \rangle = 0$. Упростим ситуацию, приняв, что составные частицы отсутствуют и можно пользоваться методом разложения в ряд теории возмущений. Более общие случаи рассматриваются в разд. 9.3. Предположим также, что бозе-поле ψ вещественно ($\psi^\dagger = \psi$) и величина, канонически сопряженная ψ , есть $(\partial/\partial t)\psi$. Из (9.1.1) следует уравнение Янга — Фельдмана

$$\psi(x) = Z^{1/2}(\nabla)\varphi^0(x) + \Lambda^{-1}(\partial)F[\psi(x)], \quad (9.1.2)$$

где φ^0 — свободное бозонное поле, удовлетворяющее уравнению

$$\Lambda(\partial)\varphi^0 = 0, \quad (9.1.3)$$

а $Z^{1/2}(\nabla)$ — перенормировочный множитель.

Решая уравнение (9.1.2) методом последовательных приближений, приходим к обычному ряду теории возмущений. Результат представляет собой линейную комбинацию нормальных произведений свободного поля φ^0 :

$$\psi(x) = Z^{1/2}(\nabla)\varphi^0(x) + \dots \quad (9.1.4)$$

Здесь многоточие обозначает нормальные произведения более высокого порядка. Оператор $\Lambda(\partial)$ в уравнении (9.1.3) мы выбираем так, чтобы φ^0 представляло собой свободное физическое поле. Тот факт, что такой же дифференциальный оператор $\Lambda(\partial)$ появляется в левой части уравнения (9.1.1), означает, что произведена перенормировка энергии, иными словами $F[\psi]$ содержит энергетический контрчлен. Обозначая теперь $Z^{-1/2}(\nabla)\psi$ через ψ , можно сформировать такое ψ , которое является перенормированным гейзенберговским полем:

$$\psi(x) = \varphi^0(x) + \dots \quad (9.1.5)$$

Тогда $F[\psi]$ в (9.1.1) содержит явным образом множитель Z . Соотношение (9.1.5) представляет собой динамическое отображение перенормированного гейзенберговского поля ψ . В дальнейшем мы будем считать, что ψ в уравнении (9.1.1) уже перенормировано. Его динамическое отображение обозначается через $\psi(x; \varphi^0)$:

$$\psi(x) = \psi(x; \varphi^0). \quad (9.1.6)$$

Бозонное преобразование. Введем теперь функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Lambda(\partial) f(x) = 0. \quad (9.1.7)$$

Мы можем теперь получить обобщение уравнения Янга — Фельдмана [2]:

$$\psi(x) = \varphi^0(x) + f(x) + \Lambda^{-1}(\partial) F[\psi(x)], \quad (9.1.8)$$

где ψ , очевидно, удовлетворяет уравнению Гейзенберга (9.1.1). Решая уравнение (9.1.8) методом последовательных приближений, получаем новое решение уравнения (9.1.1)

$$\psi^f(x) = \psi(x; \varphi^0 + f). \quad (9.1.9)$$

Отметим, что ψ^f равно ψ с заменой φ^0 на $\varphi^0 + f$. Эта замена называется *бозонным преобразованием*¹⁾. Тот факт, что ψ и ψ^f удовлетворяют одному и тому же уравнению Гейзенберга, составляет содержание *теоремы о бозонном преобразовании* [3, 4]

$$\Lambda(\partial) \psi^f = F[\psi^f]. \quad (9.1.10)$$

Поскольку бозонное преобразование представляет собой трансляцию поля $\varphi^0 \rightarrow \varphi^0 + f$, оно описывает конденсацию бозонов φ^0 . Результатом этой конденсации является образование некоторого протяженного объекта.

Физический смысл гейзенберговского поля ψ^f , полученного с помощью бозонного преобразования. Запишем динамическое отображение ψ в виде

$$\begin{aligned} \psi(x) = \psi(x; \varphi^0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4\sigma_1 \dots d^4\sigma_n \times \\ &\times c(x; \sigma_1 \dots \sigma_n) : \varphi^0(\sigma_1) \dots \varphi^0(\sigma_n) :. \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

Отсюда получаем

$$\psi^f(x) = \psi(x; \varphi^0 + f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} : \psi_f^{(n)}(x) :, \quad (9.1.12)$$

где

$$\psi_f^{(n)}(x) = \int d\sigma_1 \dots d\sigma_n c_f(x; \sigma_1 \dots \sigma_n) \varphi^0(\sigma_1) \dots \varphi^0(\sigma_n). \quad (9.1.13)$$

¹⁾ Если $f(x)$ имеет фурье-образ, то бозонное преобразование эквивалентно преобразованию трансляции для операторов уничтожения $\alpha(\mathbf{k}) \rightarrow \alpha(\mathbf{k}) + c_{\mathbf{k}}$, которое определено в (2.4.51) и отвечает образованию когерентного состояния. В данном случае бозонное преобразование приводит к возникновению конкретного когерентного представления, которое подчиняется условию (9.1.7). Но выполнение требования, чтобы функция $f(x)$, определяющая бозонное преобразование, имела фурье-образ, не обязательно. Когда $f(x)$ не имеет фурье-образа, бозонное преобразование не может рассматриваться как трансляция $\alpha(\mathbf{k})$. Особенности, связанные с $f(x)$, рассматриваются в гл. 10.

Здесь коэффициенты c_f определяются выражением

$$c_f(x; \sigma_1 \dots \sigma_n) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int d^4\xi_1 \dots d^4\xi_l c(x; \sigma_1 \dots \sigma_n \xi_1 \dots \xi_l) f(\xi_1) \dots f(\xi_l). \quad (9.1.14)$$

Основной член в (9.1.12) представляет собой c -число:

$$\phi^f(x) = \psi_f^{(0)}(x) = \quad (9.1.15)$$

$$= \langle 0 | \psi^f(x) | 0 \rangle = \quad (9.1.16)$$

$$= c_f(x). \quad (9.1.17)$$

Это c -число описывает классический протяженный объект. Отметим, что классическое поле $\phi^f(x)$ возникает даже при $\hbar \neq 0$ (\hbar — постоянная Планка). Это можно понять следующим образом. Поскольку конденсируется большое число бозонов, квантовые флуктуации $\hbar \Delta n$ могут стать значительно меньшими, чем полное число квантов hn :

$$\frac{\hbar \Delta n}{hn} = \frac{\Delta n}{n} \ll 1. \quad (9.1.18)$$

Условие (9.1.18) не зависит от \hbar . Следовательно, объект, обладающий классическим поведением, может возникнуть даже в том случае, если $\hbar \neq 0$.

Второй член в динамическом отображении (9.1.12) линеен по φ^0 :

$$\psi_f^{(1)}(x) = \int d\sigma c_f(x; \sigma) \varphi^0(\sigma). \quad (9.1.19)$$

Матричные элементы этого оператора описывают поведение отдельного кванта под действием протяженного объекта. Члены более высокого порядка в (9.1.12) отвечают реакциям между квантами в присутствии протяженного объекта. Таким образом, ψ^f описывает систему квантов и протяженных объектов.

Компактное выражение для динамического отображения, отвечающего ψ^f . Разлагая $\psi(x; \varphi^0 + f)$ в ряд Тейлора, можем записать динамическое отображение ψ^f в виде [5]

$$\begin{aligned} \psi^f(x) = & \phi^f(x) + \int d^4\sigma \varphi^0(\sigma) \frac{\delta}{\delta f(\sigma)} \phi^f(x) + \\ & + : \frac{1}{2} \int d^4\sigma_1 \int d^4\sigma_2 \varphi^0(\sigma_1) \varphi^0(\sigma_2) \frac{\delta}{\delta f(\sigma_1)} \frac{\delta}{\delta f(\sigma_2)} \phi^f(x) : + \dots \end{aligned} \quad (9.1.20)$$

Вводя обозначение

$$\delta_f \equiv \int d^4\sigma \varphi^0(\sigma) \frac{\delta}{\delta f(\sigma)}, \quad (9.1.21)$$

можем представить (9.1.20) в виде

$$\psi^f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} : (\delta_f)^n \phi_f(x) :, \quad (9.1.22)$$

откуда

$$\psi_f^{(n)}(x) = (\delta_f)^n \phi_f(x). \quad (9.1.23)$$

Это приводит к соотношению

$$\psi_f^{(n+1)} = \delta_f \psi_f^{(n)}. \quad (9.1.24)$$

Самосогласованный потенциал, создаваемый протяженными объектами. Заменяем теперь $f(x)$ на $f(x) + \varepsilon g(x)$, где $g(x)$ удовлетворяет уравнению для $f(x)$, т. е.

$$\Lambda(\partial) g(x) = 0, \quad (9.1.25)$$

а ε — бесконечно малая константа. Имеем

$$\delta \phi_g^f(x) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\phi^{f+\varepsilon g}(x) - \phi^f(x)] = \int d^4 y g(y) \frac{\delta \phi^f(x)}{\delta f(y)}. \quad (9.1.26)$$

Введем обозначение

$$J^f(x) = \langle 0 | F[\psi^f(x)] | 0 \rangle. \quad (9.1.27)$$

Тогда из уравнения Гейзенберга (9.1.1) получим

$$\Lambda(\partial) \phi^f(x) = J^f(x), \quad (9.1.28)$$

откуда

$$\Lambda(\partial) \phi^{f+\varepsilon g} = J^{f+\varepsilon g}. \quad (9.1.29)$$

Разность уравнений (9.1.28) и (9.1.29) имеет вид

$$\Lambda(\partial) \delta \phi_g^f = \int d^4 y g(y) \frac{\delta J^f(x)}{\delta f(y)}. \quad (9.1.30)$$

При заданной функции $f(x)$ мы можем вычислить ϕ^f и J^f . Исключая f , выразим J^f через ϕ^f :

$$J^f(x) = J(x; \phi^f). \quad (9.1.31)$$

Функциональную производную $\delta J^f / \delta f$ в (9.1.30) можно представить в виде

$$\frac{\delta J^f(x)}{\delta f(y)} = \int d^4 z \frac{\delta J^f(x)}{\delta \phi^f(z)} \frac{\delta \phi^f(z)}{\delta f(y)}.$$

Поскольку ϕ^0 удовлетворяет уравнению (9.1.25), можно использовать ϕ^0 вместо g . Тогда уравнение (9.1.30) принимает вид

$$\Lambda(\partial) \delta_f \phi^f(x) = \int d^4 z \frac{\delta J^f(x)}{\delta \phi^f(z)} \delta_f \phi^f(z), \quad (9.1.32)$$

где учтено (9.1.26). Уравнение (9.1.32) можно представить в виде

$$\Lambda(\partial) \delta_f \phi^f(x) = \delta_f J^f(x), \quad (9.1.33)$$

если использовать формулу

$$\delta_f G(x) = \int d^4z \frac{\delta G(x)}{\delta \phi^f(z)} \delta_f \phi^f(z) = \quad (9.1.34)$$

$$= \int d^4z \frac{\delta G(x)}{\delta \phi^f(z)} \psi_f^{(1)}(z), \quad (9.1.35)$$

где G — произвольный функционал от ϕ^f .

Повторяя проведенное рассмотрение, получаем

$$\Lambda(\partial) (\delta_f)^n \phi^f(x) = (\delta_f)^n J^f(x). \quad (9.1.36)$$

При $n = 1$ это уравнение совпадает с (9.1.32), которое можно записать в виде

$$\Lambda(\partial) \psi_f^{(1)}(x) - \int d^4z V^f(x; z) \psi_f^{(1)}(z) = 0, \quad (9.1.37)$$

где

$$V^f(x; z) = \delta J^f(x) / \delta \phi^f(z). \quad (9.1.38)$$

Действуя на обе части этого уравнения оператором δ_f и используя формулу (9.1.35), получаем

$$\begin{aligned} \Lambda(\partial) \psi_f^{(2)}(x) - \int d^4z V^f(x; z) \psi_f^{(2)}(z) = \\ = \int d^4y \int d^4z \psi_f^{(1)}(y) \psi_f^{(1)}(z) V^f(x; y, z), \end{aligned} \quad (9.1.39)$$

где

$$V^f(x; y, z) = \frac{\delta}{\delta \phi^f(y)} \frac{\delta}{\delta \phi^f(z)} J^f(x). \quad (9.1.40)$$

При $n = 2$ уравнение (9.1.39) совпадает с (9.1.36). Аналогичным образом можно в явном виде представить действие оператора $(\delta_f)^n$ в уравнении (9.1.36), которое является уравнением относительно $\psi_f^{(n)}$. Правая часть (9.1.36) может быть выражена через $\psi_f^{(m)}$ при $m < n$; при $n > 1$ уравнение (9.1.36) неоднородно. Уравнение (9.1.37) для $\psi_f^{(1)}$ однородно и, следовательно, не определяет полностью $\psi_f^{(1)}$. Мы покажем ниже, что $\psi_f^{(1)}$ определяется уравнением (9.1.37), а также выражением для одновременного канонического коммутатора.

Вспомним теперь, что оператор $\psi_f^{(1)}$ описывает поведение отдельного кванта под действием протяженного объекта. Уравнение (9.1.37) показывает, что этот квант ведет себя как частица в потенциале $V^f(x, z)$. Иными словами, *на физический квант влияет потенциал, создаваемый протяженным объектом*. Этот потенциал описывает взаимодействие между квантом и протяжен-

ным объектом. Поскольку потенциал создается протяженным объектом, возникающим самосогласованным образом в квантово-полевой системе, он называется самосогласованным потенциалом [5].

Древесное приближение и уравнение Эйлера. Решение уравнения (9.1.8) методом последовательных приближений приводит к рассмотрению множества диаграмм типа фейнмановских. Все петли, появляющиеся в этих диаграммах, обусловлены спариваниями физических полей. Диаграммы, в которых отсутствуют петли, называются древесными диаграммами, а приближение, в котором петлевые диаграммы не учитываются, носит название древесного приближения. При использовании древесного приближения ψ^f , $\psi_f^{(n)}$ и ϕ^f обозначаются соответственно как $\hat{\psi}^f$, $\hat{\psi}_f^{(n)}$ и $\hat{\phi}^f$. Отметим, что каждая внутренняя линия содержит в качестве множителя постоянную Планка \hbar .

Поскольку разность между средним по вакууму от произведения полей ψ^f и соответствующим произведением вакуумных средних от $\hat{\psi}^f$ обусловлена спариваниями физических полей, имеем

$$\langle 0 | F[\psi^f] | 0 \rangle = F[\phi^f] + \dots, \quad (9.1.41)$$

где многоточие обозначает вклад петлевых диаграмм.

Исходя из уравнения Гейзенберга (9.1.1), приходим теперь к заключению, что $\hat{\phi}^f$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\Lambda(\partial) \hat{\phi}^f(x) = F[\hat{\phi}^f(x)]. \quad (9.1.42)$$

Таким образом, мы доказали, что *вакуумное среднее от $\psi^f(x)$ в древесном приближении удовлетворяет классическому уравнению Эйлера* [2].

Достигнутый в последнее время прогресс в области классической нелинейной теории поля вскрыл тот факт, что уравнения, описывающие классические нелинейные поля, имеют некоторые решения, отвечающие порциям локализованной энергии. Эти решения называются солитонами (см., например, обзоры по солитонам [6]). Солитоны представляют собой протяженные объекты с классическим поведением; они подчиняются классическим уравнениям Эйлера, поэтому исследуемые протяженные объекты часто называют солитонами.

Для продолжения рассмотрения введем величину $F^{(n)}[\phi^f(x)]$ посредством соотношений

$$\frac{\delta}{\delta\phi^f(y)} F[\phi^f(x)] = F^{(1)}[\phi^f(x)] \delta^{(4)}(x-y), \quad (9.1.43a)$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi^f(y)} \frac{\delta}{\delta\phi^f(z)} F[\phi^f(x)] = F^{(2)}[\phi^f(x)] \delta^{(4)}(x-y) \delta^{(4)}(x-z) \text{ и т. д.} \quad (9.1.43б)$$

Если размерность пространства-времени есть d , четырехмерная δ -функция должна быть заменена на $\delta^d(x - y)$. Формально мы можем написать

$$F^{(n)} = (\delta/\delta\phi^f)^n F. \quad (9.1.44)$$

Из уравнения (9.1.37) следует ¹⁾

$$\{\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\hat{\phi}^f(x)]\} \hat{\psi}_f^{(1)}(x) = 0, \quad (9.1.45)$$

откуда видно, что $F^{(1)}$ — самосогласованный потенциал в древесном приближении. Исходя из (9.1.39), получаем

$$\{\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\hat{\phi}^f(x)]\} \hat{\psi}_f^{(2)}(x) = F^{(2)}[\hat{\phi}^f(x)] [\hat{\psi}_f^{(1)}(x)]^2. \quad (9.1.46)$$

Поскольку

$$\delta_f F^{(n)}[\hat{\phi}^f(x)] = F^{(n+1)}[\hat{\phi}^f(x)] \hat{\psi}_f^{(1)}(x), \quad (9.1.47)$$

действие оператора δ_f на (9.1.46) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \{\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\hat{\phi}^f(x)]\} \hat{\psi}_f^{(3)}(x) = \\ = 3F^{(2)}[\hat{\phi}^f(x)] \hat{\psi}_f^{(1)}(x) \hat{\psi}_f^{(2)}(x) + F^{(3)}[\hat{\phi}^f(x)] [\hat{\psi}_f^{(1)}(x)]^3. \end{aligned} \quad (9.1.48)$$

В древесном приближении порядок действия операторов $\hat{\psi}_f^{(1)}$ и $\hat{\psi}_f^{(2)}$ не имеет значения.

Общий вид рекуррентной формулы в древесном приближении может быть получен непосредственно из уравнения Гейзенберга (9.1.10), которое записывается в виде

$$\Lambda(\partial) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \hat{\psi}_f^{(n)} \right) = F \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\psi}_f^{(n)} \right). \quad (9.1.49)$$

Здесь можно не учитывать в древесном приближении некоммутативность операторов $\hat{\psi}_f^{(n)}$. Разлагая в ряд Тейлора (вблизи $\hat{\phi}^f$) правую часть уравнения (9.1.49), получаем

$$\Lambda(\partial) \hat{\psi}_f^{(n)}/n! = \sum_l F^{(l)}[\hat{\psi}_f^f] \prod_i \frac{1}{\alpha_i!} (\hat{\phi}_f^{(n_i)}/n_i!)^{\alpha_i}, \quad (9.1.50)$$

где

$$\sum \alpha_i = l, \quad \sum \alpha_i n_i = n, \quad (9.1.51a)$$

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n. \quad (9.1.51b)$$

Суммирование в (9.1.50) проводится по всем возможным наборам l , n_i , α_i , удовлетворяющим условиям (9.1.51a) и (9.1.51b). Легко

¹⁾ Это уравнение называется уравнением устойчивости [7].

видеть, что при $n = 1, 2, 3$ (9.1.50) совпадает с уравнениями (9.1.45), (9.1.46), (9.1.48) соответственно.

Трансляционные моды и квантовая координата. Однородное уравнение (9.1.45) требует особой осторожности, поскольку это уравнение допускает решения, отвечающие не только рассеянным волнам, но также связанным состояниям; мы сталкиваемся тут с хорошо известным конфликтом между итерационным методом и появлением связанных состояний в задаче о потенциальном рассеянии. Чтобы упростить ситуацию, будем считать протяженный объект статическим, т. е. $f(x) = f(\mathbf{x})$ и $\phi^f(x) = \phi^f(\mathbf{x})$. В этом случае самосогласованный потенциал не зависит от времени. Если уравнение (9.1.45) записать в виде

$$\widehat{\psi}_f^{(1)}(x) = \varphi^0(x) + \Lambda^{-1}(\partial) F^{(1)}[\widehat{\phi}^f(\mathbf{x})]\widehat{\psi}_f^{(1)}(x), \quad (9.1.52)$$

то итерационный метод приводит только к решению, отвечающему рассеянным волнам. Это решение мы обозначим через $\chi_0^s(x)$. Чтобы показать в явном виде структуру χ_0^s , введем собственную функцию $u(\mathbf{x}, \mathbf{k})$:

$$\{\Lambda(\partial, \omega_{\mathbf{k}}) - F^{(1)}[\phi^f(\mathbf{x})]\} u(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = 0, \quad (9.1.53)$$

где

$$\Lambda(\partial, \omega) \equiv \Lambda(\partial)|_{\partial_0 = -i\omega}. \quad (9.1.54)$$

Тогда $\chi_0^s(x)$ записываются в виде

$$\chi_0^s(x) = \int d^3k \frac{\hbar^{1/2}}{(2\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} [u(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + u^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \alpha^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}]. \quad (9.1.55)$$

Здесь $\alpha(\mathbf{k})$ — оператор уничтожения для состояний, отвечающих рассеянным волнам. Но χ_0^s и $(\partial/\partial t)\chi_0^s$ не могут удовлетворять каноническому коммутационному соотношению для $\psi(x)$ и $(\partial/\partial t)\psi(x)$. (Заметим, что в формуле (9.1.12) только $\psi_f^{(1)}$ обеспечивает в древесном приближении появление δ -функции в выражении для коммутатора.) Это обусловлено тем, что уравнение на собственные значения (9.1.53) допускает также наличие некоторых решений с дискретными значениями энергии

$$\{\overline{\Lambda_i(\partial, \omega_i)} - F^{(1)}[\widehat{\phi}^f(\mathbf{x})]\} u_i(\mathbf{x}) = 0. \quad (9.1.56)$$

Очевидно, что функции $u_i(\mathbf{x})$ должны отвечать связанным состояниям φ^0 -кванта и протяженного объекта.

Мы можем выбрать $u(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ и $u_i(\mathbf{x})$ таким образом, чтобы они образовывали полный набор ортонормированных функций:

$$\int d^3x u^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}) u(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \quad (9.1.57)$$

$$\int d^3x u_i^*(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij}, \quad (9.1.58)$$

$$\int d^3x u_i^*(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = 0. \quad (9.1.59)$$

Получаем правило сумм

$$\int d^3k u(\mathbf{x}, \mathbf{k}) u^*(\mathbf{y}, \mathbf{k}) + \sum_i u_i(\mathbf{x}) u_i^*(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (9.1.60)$$

Чтобы доказать, что уравнение (9.1.45) всегда допускает некоторые решения, отвечающие дискретным значениям энергии, напомним, что если $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $\Lambda(\partial)f = 0$, то этому же уравнению удовлетворяет и функция $f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$, где \mathbf{a} — постоянный вектор. Поскольку $\hat{\phi}^f$ зависит от \mathbf{x} только через $f(\mathbf{x})$, мы видим, что как $\hat{\phi}^f(\mathbf{x})$, так и $\hat{\phi}^f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ удовлетворяют уравнению Эйлера (9.1.42). Поэтому мы можем подействовать дифференциальным оператором на обе части уравнения (9.1.42):

$$\Lambda(\partial)\nabla\hat{\phi}^f(\mathbf{x}) = F^{(1)}[\hat{\phi}^f(\mathbf{x})]\nabla\hat{\phi}^f(\mathbf{x}). \quad (9.1.61)$$

Отсюда видно, что $\partial_i\hat{\phi}^f(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, 3$) — решения уравнения (9.1.56), отвечающие нулевой энергии:

$$[\Lambda(\partial, 0) - F^{(1)}[\hat{\phi}^f(\mathbf{x})]]\nabla\hat{\phi}^f(\mathbf{x}) = 0. \quad (9.1.62)$$

Введем обозначение

$$V_{ij} = \int d^3x \partial_i\hat{\phi}^f(\mathbf{x}) \partial_j\hat{\phi}^f(\mathbf{x}), \quad (9.1.63)$$

используя которое, можно записать следующее выражение для $u_i(\mathbf{x})$:

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 (V^{-1/2})_{ij} \partial_j\hat{\phi}^f(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9.1.64)$$

так как эти функции удовлетворяют не только уравнению на собственные значения (9.1.62), но также условиям ортонормированности (9.1.58) и (9.1.59). Квантовые моды, описываемые волновой функцией $u_i(\mathbf{x})$, называются трансляционными модами. Если $f(\mathbf{x})$ зависит только от одной компоненты вектора \mathbf{x} (скажем, от x_1), то мы имеем только одну трансляционную моду, поскольку $\partial_2\hat{\phi}^f = \partial_3\hat{\phi}^f = 0$. Аналогично если $f(\mathbf{x})$ зависит от двух компонент вектора \mathbf{x} , то возникают две квантовые моды. При дальнейшем

рассмотрении мы полагаем, что $f(\mathbf{x})$ зависит от всех компонент вектора \mathbf{x} . Поэтому имеют место три квантовые моды $\partial_i \hat{\phi}^f$ ($i = 1, 2, 3$).

Будем пользоваться следующими обозначениями: u_i ($i = 1, 2, 3$) — волновые функции, отвечающие трансляционным модам, а u_i ($i > 3$) — волновые функции других связанных состояний. Введем определение свободного поля $\chi_0^b(x)$ для состояний с $i > 3$

$$\chi_0^b(x) = \sum_{i>3} \frac{\hbar^{1/2}}{(2\omega_i)^{1/2}} [u_i(\mathbf{x}) \alpha_i \exp(-i\omega_i t) + u_i^*(\mathbf{x}) \alpha_i^\dagger \exp(i\omega_i t)]. \quad (9.1.65)$$

Операторы уничтожения α_i отвечают связанным состояниям с $i > 3$.

Может возникнуть искушение описывать аналогичным образом трансляционную моду, воспользовавшись при $i \leq 3$ выражением $u_i(x) (\alpha_i + \alpha_i^\dagger)$. Но это было бы неправильно, поскольку трансляционные моды отвечают нулевой энергии и, следовательно, не наблюдаются в качестве возбужденных мод. Определим поле, связанное с трансляционными модами, через $\sum u_i(\mathbf{x}) \beta_i$, где β_i ($i = 1, 2, 3$) — некоторые операторы, коммутирующие с α_i и $\alpha(\mathbf{k})$. Ниже будет показано, что канонические одновременные коммутационные соотношения для гейзенберговского поля требуют введения операторов Π_i ($i = 1, 2, 3$), канонически сопряженных операторам β_i , т. е. $[\beta_i, \Pi_j] = i\hbar \delta_{ij}$. Удобнее выразить $\sum u_i(\mathbf{x}) \beta_i$ через $\partial_i \hat{\phi}^f$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\sum u_i(\mathbf{x}) \beta_i = -(\mathbf{q} \cdot \nabla) \hat{\phi}^f(\mathbf{x}), \quad (9.1.66)$$

где

$$q_i = - \sum (V^{-1/2})_{ij} \beta_j. \quad (9.1.67)$$

Здесь учтено соотношение (9.1.64). Оператор \mathbf{q} называют квантовой координатой [5]; он коммутирует с α_i и $\alpha(\mathbf{k})$. Сопряженный этой координате импульс дается выражением

$$p_i = - \sum_j \Pi_j (V^{1/2})_{ji}, \quad (9.1.68)$$

поскольку при этом

$$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (9.1.69)$$

Ниже символом α обозначаются как α_k , так и α_i при $i > 3$.

Правило сумм (9.1.60) приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} [\chi_0^b(x) - (\mathbf{q} \cdot \nabla) \hat{\phi}^f(\mathbf{x}), \dot{\chi}_0^b(y) - (\mathbf{p} \cdot \nabla) \hat{\phi}^f(\mathbf{y})] \delta(t_x - t_y) = \\ = i\hbar \delta^{(4)}(x - y), \end{aligned} \quad (9.1.70)$$

где

$$\chi^0(x) = \chi_0^s(x) + \chi_0^b(x). \quad (9.1.71)$$

Заметим теперь, что при использовании древесного приближения вклад в каноническое коммутационное соотношение вносит только линейный член ($\psi_f^{(1)}$):

$$\left[\psi_f^{(1)}(x); \frac{\partial}{\partial t} \psi_f^{(1)}(y) \right] \delta(t_x - t_y) = i\hbar \delta^{(4)}(x - y). \quad (9.1.72)$$

Таким образом, воспользовавшись (9.1.70), а также (9.1.72), получаем

$$\psi_f^{(1)}(x) = \chi^0(x) - (\mathbf{q} \cdot \nabla) \hat{\phi}^f(x), \quad (9.1.73)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} + \dots \quad (9.1.74)$$

Выражение (9.1.73) со всей ясностью демонстрирует, что каноническое коммутационное соотношение для ψ_f^f требует наличия квантовой координаты \mathbf{q} . Многоточие в (9.1.74) отвечает произведениям более высокого порядка, составленным из \mathbf{p} , и поэтому в древесном приближении не вносящим вклада в δ -функцию, имеющуюся в выражении (9.1.72) для канонического коммутатора. Из формулы (9.1.74) видно, что координата \mathbf{q} , введенная с помощью соотношения (9.1.66), зависит от времени. В тех случаях, когда мы хотим подчеркнуть это обстоятельство, она обозначается как $\mathbf{q}(t)$. Не зависящий от времени набор канонических переменных (\mathbf{q}, \mathbf{p}) может быть определен с помощью $[\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)]$ в определенный момент времени (например, при $t = 0$): $\mathbf{q} = \mathbf{q}(0)$ и т. д. Поскольку временная эволюция гейзенберговских операторов определяется гамильтонианом H , квантовая координата для любого гейзенберговского оператора определяется соотношением

$$\mathbf{Q}(t) = e^{iHt/\hbar} \mathbf{q} e^{-iHt/\hbar}.$$

Так как H содержит операторы рождения и уничтожения частиц (α^\dagger, α), то их содержит и $\mathbf{Q}(t)$. Следовательно, $\mathbf{Q}(t)$ может не коммутировать с α и α^\dagger , в то время как $\mathbf{q}(t)$ коммутирует с α и α^\dagger по определению. На качественном уровне можно сказать, что \mathbf{Q} включает в себя наряду с обычными квантовомеханическими флуктуациями \mathbf{q} квантовые флуктуации, обусловленные возбужденными состояниями. Но в древесном приближении различие между $\mathbf{q}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$ не имеет значения. Поэтому мы используем в (9.1.73) $\mathbf{Q}(t)$ вместо $\mathbf{q}(t)$. Поскольку $\mathbf{Q}(t) \cdot \nabla \hat{\phi}^f(\mathbf{x})$ должно удовлетворять уравнению (9.1.45) и так как в $\Lambda(\partial)$ входит вторая производная по времени, из уравнения (9.1.62) следует

$$\ddot{\mathbf{Q}} = 0, \quad \dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{q} + \dot{\mathbf{Q}}t. \quad (9.1.75)$$

Проявление связанных состояний при бозонном преобразовании может зависеть от способа определения предела для итерационного метода решения уравнения Шредингера (9.1.52). Оно может зависеть также от способа определения суммы степенного ряда (9.1.14) при $n = 1$, т. е.

$$c_f(x; \sigma) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int d^4\xi_1 \dots d^4\xi_l c(x; \sigma \xi_1 \dots \xi_l) f(\xi_1) \dots f(\xi_l). \quad (9.1.76)$$

Суммирование должно быть определено так, чтобы выполнялось каноническое коммутационное соотношение в совпадающие моменты времени. Данная ситуация с итерационным методом аналогична той, которая была обнаружена для случая (N, θ) -модели в разд. 3.1. Там было показано, что итерационный метод не позволяет выявить связанное состояние (N, θ) (называемое V -квантом), наличие которого требуется для выполнения канонического коммутационного соотношения в совпадающие моменты времени. Поэтому гильбертово пространство строится так, чтобы учесть существование V -кванта. Аналогично появление трансляционных мод и других мод с дискретными значениями энергии, обусловленных наличием протяженного объекта, приводит к необходимости перестройки гильбертова пространства, чтобы учесть эти связанные состояния. Поэтому процесс бозонного преобразования не так прост, как это кажется на первый взгляд.

Подводя итог, отметим, что протяженный объект приводит к появлению самосогласованного потенциала, благодаря которому φ^0 -квант либо рассеивается, либо образует связанное состояние с протяженным объектом. Каноническое коммутационное соотношение, которое можно интерпретировать как условие полноты, приводит к требованию, чтобы $\psi_f^{(1)}$ включало в себя как рассеянные волны, так и связанные состояния. В числе этих связанных состояний появляются трансляционные моды с равной нулю энергией, которым отвечает квантовая координата \mathbf{Q} . *Происхождение трансляционных мод связано с трансляционной инвариантностью теории; как только возникновение протяженного объекта нарушает трансляционную симметрию, динамика системы естественным образом приводит к появлению трансляционных мод, призванных сохранить трансляционную инвариантность теории.* Трансляционные моды обладают нулевой энергией, поскольку изменение положения протяженного объекта не влечет за собой никакого изменения наблюдаемой ситуации.

Квантовая координата и динамическое отображение. Рассмотрим теперь $\psi_f^{(2)}$ и, используя древесное приближение, исследуем

Проявление связанных состояний при бозонном преобразовании может зависеть от способа определения предела для итерационного метода решения уравнения Шредингера (9.1.52). Оно может зависеть также от способа определения суммы степенного ряда (9.1.14) при $n = 1$, т. е.

$$c_f(x; \sigma) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int d^4\xi_1 \dots d^4\xi_l c(x; \sigma \xi_1 \dots \xi_l) f(\xi_1) \dots f(\xi_l). \quad (9.1.76)$$

Суммирование должно быть определено так, чтобы выполнялось каноническое коммутационное соотношение в совпадающие моменты времени. Данная ситуация с итерационным методом аналогична той, которая была обнаружена для случая (N, θ) -модели в разд. 3.1. Там было показано, что итерационный метод не позволяет выявить связанное состояние (N, θ) (называемое V -квантом), наличие которого требуется для выполнения канонического коммутационного соотношения в совпадающие моменты времени. Поэтому гильбертово пространство строится так, чтобы учесть существование V -кванта. Аналогично появление трансляционных мод и других мод с дискретными значениями энергии, обусловленных наличием протяженного объекта, приводит к необходимости перестройки гильбертова пространства, чтобы учесть эти связанные состояния. Поэтому процесс бозонного преобразования не так прост, как это кажется на первый взгляд.

Подводя итог, отметим, что протяженный объект приводит к появлению самосогласованного потенциала, благодаря которому ϕ^0 -квант либо рассеивается, либо образует связанное состояние с протяженным объектом. Каноническое коммутационное соотношение, которое можно интерпретировать как условие полноты, приводит к требованию, чтобы $\psi_f^{(1)}$ включало в себя как рассеянные волны, так и связанные состояния. В числе этих связанных состояний появляются трансляционные моды с равной нулю энергией, которым отвечает квантовая координата \mathbf{Q} . *Происхождение трансляционных мод связано с трансляционной инвариантностью теории; как только возникновение протяженного объекта нарушает трансляционную симметрию, динамика системы естественным образом приводит к появлению трансляционных мод, призванных сохранить трансляционную инвариантность теории.* Трансляционные моды обладают нулевой энергией, поскольку изменение положения протяженного объекта не влечет за собой никакого изменения наблюдаемой ситуации.

Квантовая координата и динамическое отображение. Рассмотрим теперь $\psi_f^{(2)}$ и, используя древесное приближение, исследуем

вопрос о том, как в $\psi_f^i(x)$ появляется $\mathbf{Q}(t)$. Действуя на обе части уравнения (9.1.61) оператором ∂_i , получаем

$$\begin{aligned} (\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\hat{\phi}^f(x)]) \partial_i \partial_j \hat{\phi}^f(x) &= \\ &= F^{(2)}[\hat{\phi}^f(x)] \partial_i \hat{\phi}^f(x) \partial_j \hat{\phi}^f(x). \end{aligned} \quad (9.1.77)$$

Аналогичным образом из уравнения

$$(\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\hat{\phi}^f(x)]) \chi^0(x) = 0 \quad (9.1.78)$$

следует

$$(\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\hat{\phi}^f(x)]) \nabla \chi^0(x) = F^{(2)}[\hat{\phi}^f(x)] \nabla \hat{\phi}^f(x). \quad (9.1.79)$$

Поскольку (9.1.73) приводит к соотношению

$$(\hat{\psi}_f^{(1)})^2 = (\chi^0)^2 + [(\mathbf{Q}(t) \cdot \nabla) \hat{\phi}^f]^2 - 2\chi^0[\mathbf{Q}(t) \cdot \nabla] \hat{\phi}^f, \quad (9.1.80)$$

из (9.1.46) с учетом (9.1.77) и (9.1.79) получаем

$$(\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\hat{\phi}^f(x)]) \hat{\chi}_2(x) = F^{(2)}[\hat{\phi}^f(x)] [\chi^0(x)]^2, \quad (9.1.81)$$

где

$$\hat{\chi}_2(x) \equiv \hat{\phi}_f^{(2)}(x) + 2[\mathbf{Q}(t) \cdot \nabla] \chi^0(x) - [\mathbf{Q}(t) \cdot \nabla]^2 \hat{\phi}^f(x). \quad (9.1.82)$$

Таким образом, динамическое отображение (9.1.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^f(x) &= \left\{ 1 - [\mathbf{Q}(t) \cdot \nabla] + \frac{1}{2!} [\mathbf{Q}(t) \cdot \nabla]^2 + \dots \right\} \hat{\phi}^f(x) + \\ &+ \{ 1 - [\mathbf{Q}(t) \cdot \nabla] + \dots \} \chi^0(x) + \frac{1}{2!} \hat{\chi}_2(x) + \dots \end{aligned} \quad (9.1.83)$$

Повторяя аналогичные выкладки, получаем

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} [\mathbf{Q}(t) \cdot \nabla]^n \left(\hat{\phi}^f(x) + \chi^0(x) + \frac{1}{2!} \hat{\chi}_2(x) + \dots \right) = \\ &= \hat{\phi}^f[\mathbf{x} - \mathbf{Q}(t)] + \chi^0[\mathbf{x} - \mathbf{Q}(t)] + \frac{1}{2!} \hat{\chi}_2[\mathbf{x} - \mathbf{Q}(t)] + \dots, \end{aligned} \quad (9.1.84)$$

где

$$\mathbf{x} - \mathbf{Q}(t) \equiv [\mathbf{x} - \mathbf{Q}(t), t_x]. \quad (9.1.85)$$

Из соотношения (9.1.82) видно, что если пренебречь квантовой координатой, то $\hat{\psi}_f^{(2)}$ становится равным $\hat{\chi}_2$. Обозначим через $\hat{\chi}_n$ такое выражение для $\hat{\psi}_f^{(n)}$, в котором не учитывается квантовая

координата. Тогда (9.1.50) приводит к рекуррентному соотношению

$$\Lambda(\partial) \hat{\chi}_n / n! = \sum_l F^{(l)} [\hat{\phi}^l] \prod_i \frac{1}{\alpha_i!} (\hat{\chi}_{n_i} / n_i!)^{\alpha_i}, \quad (9.1.86)$$

где

$$\hat{\chi}_1 \equiv \chi^0. \quad (9.1.87)$$

Соотношение (9.1.86) при $n = 1$ или $n = 2$ сводится соответственно к (9.1.78) или (9.1.81). При $n = 3$ (9.1.86) получается из уравнения (9.1.48) при замене $\hat{\psi}_f^{(n)}$ на $\hat{\chi}_n$:

$$\{\Lambda(\partial) = F^{(1)} [\hat{\phi}^f(\mathbf{x})] \hat{\chi}_3(x) = 3F^{(2)} [\hat{\phi}^f(\mathbf{x})] \chi^0(x) \chi_2(x) + \\ + F^{(3)} [\hat{\phi}^f(\mathbf{x})] [\chi^0(x)]^3. \quad (9.1.88)$$

Динамическое отображение (9.1.84) приводит к

$$\psi_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} : \hat{\chi}_n [x - Q(t)] :. \quad (9.1.89)$$

Это соответствует утверждению, что \mathbf{x} и $\mathbf{Q}(t)$ появляются только в виде комбинации $\mathbf{x} - \mathbf{Q}(t)$. Соотношение (9.1.84) показывает справедливость этого утверждения вплоть до $n = 2$. В разд. 9.4 мы доказываем его с самых общих позиций. Это означает, что, как только возникновение протяженного объекта приводит к нарушению трансляционной симметрии, появляется квантовая координата, которая ведет себя как голдстоуновская мода¹⁾. Другими словами, трансляция в пространстве $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ индуцируется преобразованием

$$\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q} - \mathbf{a}. \quad (9.1.90)$$

Это представляет собой определенную форму перестройки трансляционной симметрии пространства.

Хотя приведенные выше результаты определяют конкретный способ появления \mathbf{Q} , мы не выяснили еще, каким образом в ψ появляется \mathbf{p} (или $\dot{\mathbf{Q}}$). Ниже мы вернемся к этому вопросу.

Гильбертово пространство для системы с протяженными объектами. Данное гильбертово пространство представляет собой произведение гильбертова пространства $\mathcal{H}_q = \{|\Psi_q\rangle\}$ для квантовой координаты и пространства Фока $\mathcal{H}_F = \{|\Psi_F\rangle\}$ для мод, отвечающих возбужденным состояниям системы:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_F\rangle \times |\Psi_q\rangle. \quad (9.1.91)$$

¹⁾ Исследование квантовой координаты, основанное на методе интегрирования по траекториям, см. в работе [8].

Это гильбертово пространство мы будем называть расширенным пространством Фока. Мы пользуемся символом $|0\rangle$ для обозначения вакуумного состояния в \mathcal{H}_F . Поэтому определение (9.1.16) классического поля $\phi^f(x)$ должно быть модифицировано следующим образом:

$$\phi^f(x) = \langle 0 | \psi^f(x) | 0 \rangle_{p=q=0}. \quad (9.1.92)$$

Обобщенные координаты. Исследуем теперь, используя древесное приближение, как $\dot{\mathbf{Q}}$ (и, следовательно, \mathbf{p}) появляется в динамическом отображении ψ^f . В древесном приближении порядок действия $\mathbf{Q}(t)$ и $\dot{\mathbf{Q}}$ не играет роли. Для дальнейшего нам потребуется формула

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{\psi}^f(x) = \bar{\partial}_i \widehat{\psi}^f(x) + \dot{Q}_i \frac{\partial}{\partial Q_i} \widehat{\psi}^f(x), \quad (9.1.93)$$

где символ $\bar{\partial}_i$ означает, что оператор дифференцирования по времени действует не на $\mathbf{Q}(t)$, а только на временную компоненту x . В (9.1.93) учтено, что в соответствии с соотношением (9.1.75) отсутствует член $\ddot{Q}_i (\partial/\partial \dot{Q}_i) \widehat{\psi}^f$. В дальнейшем мы будем использовать символ $\bar{\partial}_\mu \equiv (\partial_i, \bar{\partial}_t)$. Чтобы конкретизировать ситуацию, примем

$$\Lambda(\partial) = \partial^2 - m^2. \quad (9.1.94)$$

Тогда уравнение Гейзенберга (9.1.10) примет вид

$$\left(\bar{\partial}^2 - m^2 - 2\bar{\partial}_i \dot{Q}_i \frac{\partial}{\partial Q_i} - \left(\dot{Q}_i \frac{\partial}{\partial Q_i} \right)^2 \right) \psi^f = F[\psi^f]. \quad (9.1.95)$$

Для любого вектора \mathbf{V} мы можем определить вектор \mathbf{V}_T , поперечный по отношению к $\dot{\mathbf{Q}}$, а также вектор \mathbf{V}_L , продольный по отношению к $\dot{\mathbf{Q}}$:

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{V} - \frac{1}{\dot{Q}^2} \dot{\mathbf{Q}} (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{V}), \quad (9.1.96a)$$

$$\mathbf{V}_L = \frac{1}{\dot{Q}^2} \dot{\mathbf{Q}} (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{V}), \quad (9.1.96b)$$

где $\dot{Q}^2 \equiv (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{Q}})$. Вводя обозначения

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_T + \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} \mathbf{x}_L, \quad (9.1.97a)$$

$$t' = (1 - \dot{Q}^2)^{1/2} t = \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x}), \quad (9.1.97b)$$

имеем

$$\nabla^2 - (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \nabla)^2 = \nabla'^2 + \dot{Q}^2 (\partial'_i)^2 - 2 (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \nabla') \partial'_i, \quad (9.1.98a)$$

$$\partial_t^2 - 2 (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \nabla) \partial_t = (\partial'_t)^2 + \dot{Q}^2 (\partial'_t)^2 - 2 (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \nabla') \partial'_t. \quad (9.1.98б)$$

При этом уравнение (9.1.95) принимает вид [9]

$$[\partial'^2 - m^2] \psi^f = F [\psi^f]. \quad (9.1.99)$$

Как было выяснено выше, \mathbf{x} следует заменить на $\mathbf{x}_Q \equiv \mathbf{x} - \mathbf{Q}(t)$, что приводит к замене \mathbf{x}' и t' на \mathbf{X} и T соответственно, где

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}_{QT} + \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} \mathbf{x}_{QL}, \quad (9.1.100a)$$

$$T = (1 - \dot{Q}^2)^{1/2} t - \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x}_Q). \quad (9.1.100б)$$

Величины \mathbf{X} , T называют обобщенными координатами.

Теперь ясен рецепт нахождения динамического отображения $\hat{\psi}^f$: сначала следует решить уравнения для ψ^n при $\psi_f^{(1)} \rightarrow \chi^0$, а затем заменить (\mathbf{x}, t) на (\mathbf{X}, T) , чтобы учесть $\dot{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{Q}(t)$. Если $\Lambda(\partial)$ имеет вид, отличный от (9.1.94), то (9.1.97) и (9.1.100) должны быть соответствующим образом модифицированы. В одном из последующих разделов мы рассмотрим обобщенные координаты, не пользуясь древесным приближением.

Квантовые поправки и перенормировка. Покажем теперь, что полная структура динамического отображения ψ^f , включающая квантовые поправки, может быть получена, если известно выражение для $\hat{\psi}^f$ в древесном приближении. Заметим сначала, что, согласно теории перенормировок, $F[\psi]$ в уравнении Гейзенберга (9.1.1) содержит контрчлен $F_c[\psi]$:

$$F[\psi] = F_0[\psi] + F_c[\psi]. \quad (9.1.101)$$

Контрчлен $F_c[\psi]$ компенсирует разность между перенормированными и затравочными параметрами. Процедура перенормировки иллюстрируется в следующем разделе на примере простой модели. В теории перенормировок древесное приближение применяется для рассмотрения уравнения

$$\Lambda(\partial) \hat{\psi} = F_0[\hat{\psi}], \quad (9.1.102)$$

что приводит к уравнению Эйлера

$$\Lambda(\partial) \hat{\phi}_0^f = F_0[\hat{\phi}_0^f]. \quad (9.1.103)$$

Если наше рассмотрение начинается с решения этого уравнения, то $\hat{\phi}_0^f$ следует выразить через $\hat{\phi}_0^f$. Чтобы выполнить это, восполь-

зуюемся уравнениями (9.1.42) и (9.1.103) для получения следующего соотношения:

$$\Lambda(\partial) \Delta \hat{\phi}^f = F_0 [\hat{\phi}_0^f + \Delta \hat{\phi}^f] - F_0 [\hat{\phi}_0^f] + F_c [\hat{\phi}_0^f + \Delta \hat{\phi}^f], \quad (9.1.104)$$

где

$$\Delta \hat{\phi}^f \equiv \hat{\phi}^f - \hat{\phi}_0^f. \quad (9.1.105)$$

Используя разложение в ряд Тейлора

$$F^{(n)} [\hat{\phi}^f] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} F^{(n+l)} [\hat{\phi}_0^f] (\Delta \hat{\phi}^f)^l, \quad (9.1.106)$$

мы можем, исходя из (9.1.104), получить $\Delta \hat{\phi}^f$, выраженное через $\hat{\phi}_0^f$. Поскольку выше мы выразили $\hat{\psi}_f^{(n)}$ через $\hat{\phi}^f (= \hat{\phi}_0^f + \Delta \hat{\phi}^f)$, мы можем записать $\hat{\psi}_f^{(n)}$ и через $\hat{\phi}_0^f$. Величина $\Delta \hat{\phi}^f$ представляет собой квантовую поправку, обусловленную эффектом перенормировки.

Обратим теперь внимание на другие вклады в квантовые поправки, которые возникают за счет спариваний свободных полей. Сначала не будем учитывать квантовые координаты и исследуем классическое поле

$$\phi^f(\mathbf{x}) = \langle 0 | \psi^f(x) | 0 \rangle_{p=q=0}, \quad (9.1.107)$$

которое включает все квантовые поправки, кроме квантовой координаты. Имеем

$$\phi^f(x) = \hat{\phi}_0^f(x) + \Delta \hat{\phi}^f(x) + \bar{\Delta} \phi^f(x), \quad (9.1.108)$$

где $\bar{\Delta} \phi^f$ — величина, которая находится из динамического отображения $\hat{\psi}^f$ при осуществлении всех возможных спариваний физических полей:

$$\bar{\Delta} \phi^f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \langle 0 | \hat{\psi}_f^{(2n)}(x) | 0 \rangle. \quad (9.1.109)$$

В качестве примера рассмотрим однопетлевую поправку

$$\bar{\Delta} \phi^f(x) \approx \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{\psi}_f^{(2)}(x) | 0 \rangle. \quad (9.1.110)$$

Исходя из (9.1.46) и (9.1.73) и пренебрегая квантовой координатой, в однопетлевом приближении получаем

$$\{\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\hat{\phi}_0^f(x)]\} \bar{\Delta} \phi^f(x) = \frac{1}{2} F_0^{(2)}[\hat{\phi}_0^f(x) \langle 0 | (\chi^0(x))^2 | 0 \rangle].$$

$$(9.1.111)$$

С другой стороны, (9.1.104) в однопетлевом приближении приобретает вид

$$\{\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\widehat{\phi}_0^f(x)]\} \Delta \widehat{\phi}^f(x) = F_c[\widehat{\phi}_0^f(x)]. \quad (9.1.112)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \{\Lambda(\partial) - F^{(1)}[\widehat{\phi}_0^f(x)]\} (\phi^f(x) - \widehat{\phi}_0^f(x)) = \\ & = F_c[\widehat{\phi}_0^f(x)] + \frac{1}{2} F_0^{(2)}[\widehat{\phi}_0^f(x)] \langle 0 | [\chi^0(x)]^2 | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.1.113)$$

Отсюда определяется $(\phi^f - \widehat{\phi}_0^f)$ (а следовательно, и ϕ^f) в однопетлевом приближении.

Квантовые эффекты в линейном члене $\psi_f^{(1)}$ могут быть рассчитаны аналогичным образом. В этом случае мы рассматриваем $\psi_f^{(2l+1)}$ и проводим все возможные спаривания $2l$ физических полей. В результате получаем поправки к $\psi_f^{(1)}$, обусловленные диаграммами с l линиями. Таким способом мы можем вычислить квантовые поправки к любому члену динамического отображения ψ^f .

Симметризация квантовых координат. Квантовая координата $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{Q}})$ в ψ^f учитывается с помощью следующего метода. Сначала заменяем, согласно (9.1.100), (\mathbf{x}, t) на (\mathbf{X}, T) ; затем, используя (9.1.75), разлагаем каждую из величин $\psi_f^{(n)}$ в ряд по произведениям \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{Q}}$. Наконец, симметризуем порядок действия \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{Q}}$, например

$$q_i \dot{Q}_j \rightarrow \frac{1}{2} (q_i \dot{Q}_j + \dot{Q}_j q_i). \quad (9.1.114)$$

Симметризация требуется по следующей причине. Динамическое отображение ψ^f имеет вид

$$\psi^f = \sum_n \int d\sigma_1 \dots d\sigma_n g(x; \sigma_1 \dots \sigma_n) : \psi_f^{(1)}(\sigma_1) \dots \psi_f^{(1)}(\sigma_n) :. \quad (9.1.115)$$

Поскольку $: \psi_f^{(1)}(\sigma_1) \dots \psi_f^{(1)}(\sigma_n) :$ симметрично по $\sigma_1 \dots \sigma_n$, тем же свойством обладает и $g(x; \sigma_1 \dots \sigma_n)$. Каждая из величин $\psi_f^{(1)}(\sigma_1)$ линейна по \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{Q}}$. Поэтому проводится симметризация по \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{Q}}$.

Построение ψ^f . Вычисление ψ^f осуществляется следующим образом. Сначала мы пренебрегаем квантовой координатой и находим $\widehat{\psi}_f^{(n)}$ в древесном приближении с помощью соотношения (9.1.50) при условии $\widehat{\psi}_f^{(1)} \rightarrow \chi_0$. Это позволяет определить динамическое отображение $\widehat{\psi}^f$, если задана функция $f(\mathbf{x})$. Затем вычисляем величину $\Delta \widehat{\phi}^f$, определяемую эффектом перенормировки,

чтобы выразить $\hat{\psi}^f$ через $\hat{\phi}_0^f$. После этого находим квантовые поправки, связанные со спариванием физических полей. Наконец, проводим замену $(x, t) \rightarrow (X, T)$ и осуществляем симметризацию по q и \dot{Q} . В результате получаем динамическое отображение ψ^f . Примечательно, что знание $f(x)$ (а следовательно, классического поля $\phi_0^f(x)$) полностью определяет динамическое отображение ψ^f .

В рамках обычной процедуры квантования классической механики часто использовалась симметризация по q и \dot{Q} . Проведенное выше рассмотрение обосновывает теперь этот традиционный метод. Но мы не исследовали упорядочение по Q и (α, α^\dagger) . Этот вопрос обсуждается в разд. 5.

Классические и квантовомеханические протяженные объекты. Приведенное выше рассмотрение показывает, что

$$\phi^f(X) = \langle 0 | \psi^f(x) | 0 \rangle, \quad (9.1.116)$$

где X зависит от квантовой координаты $[Q(t), \dot{Q}]$. Если квантовые флуктуации величин $Q(t)$ и \dot{Q} пренебрежимо малы, то $\phi^f(X) \approx \phi^f(x)$ описывает классический протяженный объект, если же флуктуации $Q(t)$ и \dot{Q} становятся заметными, то протяженный объект обладает квантовомеханическим поведением. *Следовательно, как классические, так и квантовомеханические объекты естественным образом возникают в квантовополевых системах в процессе конденсации бозонов.*

Завершим этот раздел следующим замечанием. Оператор уничтожения $\alpha(k)$, входящий в выражение (9.1.55) для физического поля $\chi_0^s(x)$, не совпадает с оператором уничтожения (скажем, $a(k)$) для физического поля $\phi^0(x)$ в отсутствие протяженных объектов. Существование протяженных объектов оказывает влияние на физическое поле χ_0^s , и $a(k)$ становится сложным функционалом от $\alpha(k)$, α_i ($i \geq 3$), квантовой координаты (Q, \dot{Q}) и параметра бозонного преобразования f , т. е. $a(k) = a[\alpha(k), \alpha_i, Q, \dot{Q}, f]$. Когда производится разложение $a(k)$ в ряд по нормальным произведениям $\alpha(k)$, $\alpha^\dagger(k)$, α_i и α_i^\dagger , коэффициент при каждом члене этого разложения является функционалом от Q , \dot{Q} и f .

9.2. Простой пример

Модель. Чтобы проиллюстрировать общее рассмотрение, проведенное в разд. 9.1, обратимся к простой модели. Эта модель представляет собой $(1+1)$ -мерную модель типа $\lambda\phi^4$:

$$(\partial^2 + \mu^2) \rho(x) = \lambda \rho^3(x), \quad (9.2.1)$$

где $\partial^2 = -(\partial^2/\partial t^2) + (\partial^2/\partial x^2)$.

Прежде всего сформулируем процедуру перенормировки. Для этого требуются четыре перенормировочных параметра: физическая масса m , перенормированная константа взаимодействия g , вакуумное среднее $\langle 0 | \rho | 0 \rangle$ и перенормировочный множитель Z для волновой функции, определяемый равенством $\rho = \langle 0 | \rho | 0 \rangle + Z^{1/2} \psi$. Здесь ψ — перенормированное гейзенберговское поле, обладающее свойством $\langle 0 | \psi | 0 \rangle = 0$. Эти четыре неизвестных параметра нужно определить в процессе вычисления квантовых поправок. Вместо того чтобы воспользоваться четырьмя указанными выше параметрами, мы сформулируем процедуру перенормировки с помощью четырех перенормировочных множителей Z , Z_1 , Z_2 и ω , определяемых следующим образом. Член $\lambda \rho^3$ в уравнении (9.2.1) возникает благодаря лагранжиану взаимодействия $(\lambda/4) \rho^4$, который приводит к появлению члена типа ψ^3 , имеющего вид $\lambda Z^{3/2} \langle 0 | \rho | 0 \rangle \psi^3$. Если не учитывать квантовые поправки, то этот член равен $\lambda \langle 0 | \rho | 0 \rangle \psi^3$. Задаем перенормированную константу взаимодействия g , вводя для указанного члена типа ψ^3 обозначение $(mg/2) \psi^3$; получаем при этом $\lambda \langle 0 | \rho | 0 \rangle = mg/2$. Заметим, что член типа ψ^3 приводит к появлению треугольной вершинной диаграммы с весом $3! (mg/2) = 3mg$, поскольку имеются $3!$ способа выбора внешних трех линий. Беря вакуумное среднее от обеих частей уравнения (9.2.1) и не учитывая квантовых поправок, получаем $\mu^2 = \lambda [\langle 0 | \rho | 0 \rangle]^2$, а для линейного по ψ члена имеем уравнение $(\partial^2 + \mu^2) \psi = 3\lambda [\langle 0 | \rho | 0 \rangle]^2 \psi$. Последнее уравнение приводит к следующему выражению для физической массы m^2 : $m^2 = -\mu^2 + 3\lambda [\langle 0 | \rho | 0 \rangle]^2$. Из этих двух соотношений получаем $m^2 = 2\mu^2$ и $2\lambda [\langle 0 | \rho | 0 \rangle]^2 = m^2$. Тогда соотношение $\lambda \langle 0 | \rho | 0 \rangle = mg/2$ приводит к равенствам $g^2 = 2\lambda$ и $\langle 0 | \rho | 0 \rangle = m/g$. В результате без учета квантовых поправок имеем $\mu^2 = m^2/2$, $\lambda = g^2/2$ и $\langle 0 | \rho | 0 \rangle = m/g$. Квантовые поправки изменяют эти соотношения, приводя к появлению некоторых перенормировочных множителей. Мы вводим перенормировочные множители Z_1 , Z_2 и ω посредством соотношений $\lambda = (g^2/2) Z_1 Z^{-2}$, $\mu^2 = (m^2/2) Z_2 Z^{-1}$ и $\langle 0 | \rho | 0 \rangle = Z^{1/2} (m/g) \omega$ соответственно. Таким образом, имеем

$$\rho(x) = Z^{1/2} \left(\frac{m}{g} \omega + \psi(x) \right), \quad (9.2.2a)$$

$$\lambda = \frac{g^2}{2} Z_1 Z^{-2}, \quad (9.2.2б)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{2} m^2 Z_2 Z^{-1}. \quad (9.2.2в)$$

Очевидно, что без учета квантовых поправок $Z = Z_1 = Z_2 = \omega = 1$.

Мы можем переписать уравнение Гейзенберга (9.2.1) в виде $(\partial^2 - m^2) \psi = F[\psi]$, где $F[\psi]$ содержит $g, m, Z, Z_1, Z_2, \omega$ и ψ . Обозначим через $F_0[\psi]$ значение $F[\psi]$ при $Z = Z_1 = Z_2 = \omega = 1$ и введем «контрчлен» $F_c[\psi]$, написав $F[\psi] = F_0[\psi] + F_c[\psi]$. Очевидно, что $F_c[\psi]$ обращается в нуль при $Z = Z_1 = Z_2 = \omega = 1$. Уравнение Гейзенберга (9.2.1) записывается теперь в виде

$$(\partial^2 - m^2) \psi(x) = F_0[\psi(x)] + F_c[\psi(x)], \quad (9.2.3)$$

где

$$F_0[\psi] = \frac{3}{2} gm\psi^2 + \frac{1}{2} g^2\psi^3, \quad (9.2.4)$$

$$F_c[\psi] = -\frac{1}{2} \frac{m^3}{g} \omega (Z_2 - Z_1\omega^2) + m^2 \left[\frac{3}{2} Z_1\omega^2 - \left[Z + \frac{1}{2} Z_2 \right] \right] \psi + \\ + \frac{3}{2} (Z_1\omega - 1) gm\psi^2 + \frac{1}{2} (Z_1 - 1) g^2\psi^3 + (1 - Z) (\partial^2 - m^2) \psi = \quad (9.2.5)$$

$$= -\frac{m^2}{2} (Z_2 - Z) \left(\frac{m}{g} \omega + \psi \right) + \frac{g^2}{2} (Z_1 - Z) \left(\frac{m}{g} \omega + \psi \right)^3 -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{m^2}{g} Z\omega (1 - \omega^2) -$$

$$- \frac{3}{2} m^2 Z (1 - \omega^2) \psi - \frac{3}{2} gm (1 - Z\omega) \psi^2 - \frac{1}{2} g^2 (1 - Z) \psi^3 +$$

$$+ (1 - Z) (\partial^2 - m^2) \psi. \quad (9.2.6)$$

Заметим, что

$$\langle 0|\psi|0\rangle = 0, \quad (9.2.7)$$

$$Z = 1 + O(g^2), \quad (9.2.8a)$$

$$Z_i = 1 + O(g^2), \quad i = 1, 2, \quad (9.2.8b)$$

$$\omega = 1 + O(g^2). \quad (9.2.8в)$$

Здесь и ниже символ $O(g^n)$ обозначает члены порядка g^n .

В однопетлевом приближении можем написать

$$Z^i \omega^n (Z_i - Z) \approx (Z_i - Z), \quad i = 1, 2, \quad (9.2.9a)$$

$$Z^i \omega^n (1 - \omega^2) \approx 2(1 - \omega), \quad (9.2.9б)$$

$$(1 - Z\omega) \approx (2 - Z - \omega) \quad (9.2.9в)$$

при произвольных l и n . Таким образом, имеем

$$F_c[\psi] \approx -\frac{m^2}{2}(Z_2 - Z)\left(\frac{m}{g} + \psi\right) + \frac{g^2}{2}(Z_1 - Z)\left(\frac{m}{g} + \psi\right)^3 - \\ - \frac{m^3}{g}(1 - \omega) - 3m^2(1 - \omega)\psi - \frac{3}{2}gm(2 - Z - \omega)\psi^2 - \\ - \frac{1}{2}g^2(1 - Z)\psi^3 + (1 - Z)(\partial^2 - m^2)\psi, \quad (9.2.10)$$

откуда получаем

$$F_c[\psi] \approx \frac{1}{2}\frac{m^3}{g}[Z_1 - Z_2 - 2(1 - \omega)] + \\ + m^2\left[\frac{1}{2}(3Z_1 - Z_2 - 2Z) - 3(1 - \omega)\right]\psi + \\ + \frac{3}{2}gm[Z_1 + \omega - 2]\psi^2 - \frac{1}{2}g^2(1 - Z)\psi^3 + (1 - Z)(\partial^2 - m^2)\psi. \quad (9.2.11)$$

Для вычисления констант перенормировки полезно заметить, что выражение (9.2.4) для F_0 получается из лагранжиана $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_1 = (1/2)gm\psi^3$, а $\mathcal{L}_2 = (1/8)g^2\psi^4$.

Перенормировка энергии. Собственно-энергетическая часть $\Sigma(-p^2)$ в однопетлевом приближении дается выражением

$$\Sigma(-p^2) = \frac{3}{2}g^2\Delta_0 + \frac{9}{2}m^2g^2A(-p^2) - \delta\mu^2 + (1 - Z)(-p^2 - m^2), \quad (9.2.12)$$

где

$$\Delta_0 = \langle 0 | [\varphi^0(x)]^2 | 0 \rangle = \quad (9.2.13)$$

$$= \frac{i\hbar}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{1}{-k^2 - m^2}, \quad (9.2.14)$$

$$A(-p^2) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{1}{(-k^2 - m^2)[-(k-p)^2 - m^2]}, \quad (9.2.15)$$

$$\delta\mu^2 = -m^2 \left[\frac{1}{2}(3Z_1 - Z_2 - 2Z) - 3(1 - \omega) \right]. \quad (9.2.16)$$

Первый член (с Δ_0) в правой части (9.2.12) описывается петлей (рис. 9.1), имеющей одну вершину, отвечающую \mathcal{L}_2 , а второй член (с $A(-p^2)$) соответствует петле с двумя вершинами, возникающими за счет \mathcal{L}_1 (рис. 9.2). Член $\delta\mu^2$ в (9.2.12) появляется благодаря второму (линейному по ψ) члену в выражении (9.2.11) для «контрвзаимодействия» F_c , а последний член в (9.2.12) соответ-

ствует вкладу последнего члена из формулы (9.2.11). $\Sigma(-p^2)$ при $p^2 = -m^2$ определяет изменение массы, обусловленное взаимодействием. Поскольку значение m^2 выбрано так, что оно равно наблюдаемому, указанное изменение m^2 должно равняться нулю. Таким образом, из (9.2.12) получаем

$$\delta\mu^2 = \frac{3}{2} g^2 \Delta_0 + \frac{9}{2} m^2 g^2 A(m^2). \quad (9.2.17)$$

Учет (9.2.16) приводит к некоторому соотношению между перенормировочными множителями.

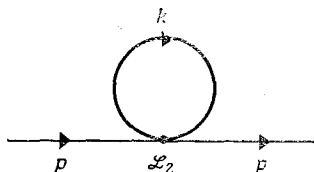


Рис. 9.1.

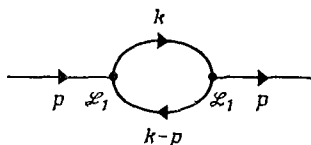


Рис. 9.2.

Перенормировка волновой функции. Поскольку двухточечная причинная функция $\Delta(p)$ получается за счет повторного действия $\Sigma(-p^2)$, используя (9.2.17), находим

$$\Delta^{-1}(p) = -p^2 - m^2 - \Sigma(-p^2) = \quad (9.2.18)$$

$$= -p^2 - m^2 - \frac{9}{2} m^2 g^2 [A(-p^2) - A(m^2)] - \\ - (1 - Z)(-p^2 - m^2). \quad (9.2.19)$$

Если ввести обозначение

$$A(-p^2) - A(m^2) = B(-p^2)(-p^2 - m^2), \quad (9.2.20)$$

то из (9.2.19) получим

$$\Delta(p) = \left[Z - \frac{9}{2} m^2 g^2 B(-p^2) \right]^{-1} \frac{1}{-p^2 - m^2}. \quad (9.2.21)$$

С другой стороны, $\Delta(p)$ имеет вид

$$\Delta(p) = \frac{1}{-p^2 - m^2} + \dots, \quad (9.2.22)$$

где многоточие отвечает членам, не имеющим особенности типа полюса. Заметим, что вычет $\Delta(p)$ в полюсе $p^2 + m^2 = 0$ равен единице, поскольку ψ — перенормированная функция. Таким образом, (9.2.21) приводит к следующей формуле для Z :

$$Z = 1 + \frac{9}{2} m^2 g^2 B(m^2). \quad (9.2.23)$$

Поскольку из (9.2.21) следует, что $B(m^2) = A'(m^2)$, где

$$A'(-p^2) \equiv \frac{d}{d(-p^2)} A(-p^2), \quad (9.2.24)$$

формула (9.2.23) переписывается в виде

$$Z = 1 + \frac{9}{2} m^2 g^2 A'(m^2). \quad (9.2.25)$$

Перенормировка вершины. Для вычисления Z_1 определим вершинную функцию $\Gamma(p, q, r)$ следующим образом:

$$\langle 0 | T[\psi(x)\psi(y)\psi(z)] | 0 \rangle = \left(\frac{i\hbar}{(2\pi)^2} \right)^2 \int d^2p d^2q d^2r \delta(p+q+r) \times \\ \times \exp(ipx + iqu + irz) \Delta(p) \Delta(q) \Delta(r) \Gamma(p, q, r). \quad (9.2.26)$$

В однопетлевом приближении имеем

$$\Gamma(p, q, r) = 3mg + (3mg)^3 I(q, p, r) + \frac{9}{2} mg^3 [A(-p^2) + \\ + A(-q^2) + A(-r^2)] + 3mg [Z_1 + \omega - 2], \quad (9.2.27)$$

где

$$I(q, p, r) = \frac{i\hbar}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{1}{(-k^2 - m^2) [-(p-k)^2 - m^2] [-(r+k)^2 - m^2]}. \quad (9.2.28)$$

Член с $I(q, p, r)$ в (9.2.27) отвечает треугольной диаграмме

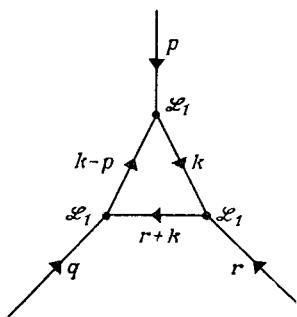


Рис. 9.3.

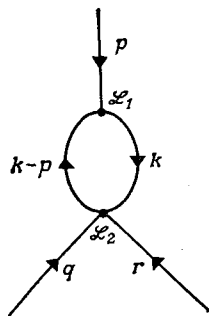


Рис. 9.4.

(рис. 9.3) с тремя вершинами, каждая из которых возникает за счет \mathcal{L}_1 . Члены с A в (9.2.27) описываются однопетлевой диаграммой (рис. 9.4) с двумя вершинами, одна из которых соответствует \mathcal{L}_1 , а другая \mathcal{L}_2 . Последний член в (9.2.27) получается из члена с ψ^2 в выражении (9.2.11) для F_c .

Зададим Z_1 таким образом, чтобы перенормированная константа

взаимодействия g определялась соотношением

$$\Gamma(p, q, r)_{p^2=q^2=r^2=-m^2} = 3mg. \quad (9.2.29)$$

Тогда из (9.2.27) получаем

$$2 - Z_1 - \omega = 9m^2g^2I(m^2) + \frac{9}{2}g^2A(m^2), \quad (9.2.30)$$

где

$$I(m^2) \equiv I(p, q, r)_{p^2=q^2=r^2=-m^2}. \quad (9.2.31)$$

Это соотношение определяет Z_1 , если известно ω .

Перенормировка вакуумного среднего. Вычислим теперь среднее по вакууму от обеих частей уравнения Гейзенберга (9.2.3). Результат имеет вид

$$\frac{3}{2}gm\Delta_0 + \frac{3}{2}gm[Z_1 + \omega - 2]\Delta_0 + \frac{1}{2}\frac{m^3}{g}[Z_1 - Z_2 - 2(1 - \omega)] = 0,$$

где первый член обусловлен вкладом F_0 , а остальные возникают за счет F_c . Поскольку в однопетлевом приближении

$$(1 - Z_1 - \omega)^{-1} [Z_2 - Z_1 - 2(\omega - 1)] \approx \\ \approx -[Z_2 - Z_1 - 2(\omega - 1)],$$

получаем

$$\frac{3}{2}mg\Delta_0 \approx \frac{1}{2}\frac{m^3}{g}[Z_2 - Z_1 - 2(\omega - 1)]. \quad (9.2.32)$$

Константы перенормировки. Объединяя (9.2.16), (9.2.17), (9.2.25), (9.2.30) и (9.2.32) в систему уравнений, для констант перенормировки в однопетлевом приближении мы можем получить следующие выражения [10]:

$$\omega = 1 + 3m^2g^2 \left[3I(m^2) + \frac{3}{2}A'(m^2) \right], \quad (9.2.33a)$$

$$Z_2 = 1 + 3\frac{g^2}{m^2}\Delta_0 - \frac{9}{2}g^2[A(m^2) - m^2A'(m^2)], \quad (9.2.33b)$$

$$Z_1 = 1 - 3m^2g^2 \left(6I(m^2) + \frac{3}{2}\frac{1}{m^2}A(m^2) + \frac{3}{2}A'(m^2) \right), \quad (9.2.33b)$$

$$Z = 1 + \frac{9}{2}m^2g^2A'(m^2). \quad (9.2.33r)$$

Из соотношений (9.2.14), (9.2.15) и (9.2.31) находим

$$\Delta_0 = \frac{\hbar}{2\pi} \int dk \frac{1}{2\omega_k} [\omega_k = (k^2 + m^2)^{1/2}], \quad (9.2.34a)$$

$$A(m^2) = -\frac{\hbar}{6(3)^{1/2} m^2}, \quad (9.2.34б)$$

$$A'(m^2) = \frac{\hbar}{m^4} \left(\frac{1}{18(3)^{1/2}} - \frac{1}{6\pi} \right), \quad (9.2.34в)$$

$$I(m^2) = \hbar/8(3)^{1/2} m^4. \quad (9.2.34г)$$

Статический солитон. Получим теперь с помощью бозонного преобразования протяженный объект. Метод Янга — Фельдмана приводит к уравнению (9.1.2), в котором физическое поле φ^0 удовлетворяет следующему уравнению:

$$(\partial^2 - m^2) \varphi^0 = 0. \quad (9.2.35)$$

Указанное уравнение Янга — Фельдмана обуславливает динамическое отображение $\psi(x; \varphi^0)$. Получаемое в результате бозонного преобразования гейзенберговское поле ψ^f дается соотношением $\psi^f = \psi(x; \varphi^0 + f)$, в котором неоператорная функция $f(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$(\partial^2 - m^2) f = 0. \quad (9.2.36)$$

Получаемое с помощью бозонного преобразования гейзенберговское поле ψ^f также удовлетворяет уравнению Гейзенберга (9.2.3)

$$(\partial^2 - m^2) \psi^f = F_0[\psi^f] + F_c[\psi^f]. \quad (9.2.37)$$

Классическое поле ϕ^f определяется соотношением (9.1.16)

$$\phi^f(x) = \langle 0 | \psi^f(x) | 0 \rangle. \quad (9.2.38)$$

Величина ϕ^f в древесном приближении обозначается через $\hat{\phi}_0^f$ и удовлетворяет уравнению Эйлера (9.1.103)

$$(\partial^2 - m^2) \hat{\phi}_0^f = \frac{3}{2} gm (\hat{\phi}_0^f)^2 + \frac{1}{2} g^2 (\hat{\phi}_0^f)^3. \quad (9.2.39)$$

Рассматривая вакуумное среднее от обеих частей уравнения Янга — Фельдмана (9.1.8), получаемого в результате бозонного преобразования, и пренебрегая членом F_c , связанным с учетом петлевых поправок, получаем

$$\hat{\phi}_0^f(x) = f(x) + (\partial^2 - m^2)^{-1} \left\{ \frac{3}{2} gm [\hat{\phi}_0^f(x)]^2 + \frac{1}{2} g^2 [\hat{\phi}_0^f(x)]^3 \right\}. \quad (9.2.40)$$

Это уравнение совпадает с интегральным уравнением, которое получается из уравнения Эйлера (9.2.39), если использовать параметр бозонного преобразования $f(x)$ в качестве линейного члена.

Поскольку мы рассматриваем $(1 + 1)$ -мерную модель, можно написать $x = (x_1, t)$. Выберем следующее статическое решение уравнения (9.2.36):

$$f(x_1) = Ae^{-mx_1}. \quad (9.2.41)$$

Решая уравнение (9.2.40) методом последовательных приближений, получаем [2]

$$\hat{\phi}_0^f(x_1) = \frac{m}{g} \left[\operatorname{th} \left(\frac{m}{2} (x_1 - a) \right) - 1 \right], \quad (9.2.42)$$

где a находится из условия

$$A = -2 \frac{m}{g} e^{ma}. \quad (9.2.43)$$

Функция, определяемая формулой (9.2.42), представляет собой хорошо известное статическое солитонное решение нелинейного уравнения (9.2.39).

Взаимодействие между отдельным квантом и протяженным объектом. Согласно уравнению (9.1.45), на квант действует самосогласованный потенциал $F_0^{(1)}[\hat{\phi}^f]$, создаваемый статическим солитоном. Здесь $F_0^{(1)}$ определяется соотношением $F_0^{(1)}[\psi] = \delta F_0 / \delta \psi$. Таким образом, из выражения (9.2.4) получаем

$$F_0^{(1)}[\hat{\phi}^f] = 3gm\hat{\phi}^f + \frac{3}{2}g^2(\hat{\phi}^f)^2. \quad (9.2.44)$$

Уравнения на собственные значения (9.1.53) и (9.1.56) принимают вид

$$\{\omega_k^2 + (d/dx_1)^2 - m^2 - F_0^{(1)}[\hat{\phi}_0^f(x_1)]\} u(x_1, k) = 0, \quad (9.2.45a)$$

$$\{\omega_i^2 + (d/dx_1)^2 - m^2 - F_0^{(1)}[\hat{\phi}_0^f(x_1)]\} u_i(x_1) = 0. \quad (9.2.45b)$$

Если использовать переменную ζ , определенную выражением

$$\zeta \equiv \frac{g}{m} \hat{\phi}_0^f(x_1) + 1 = \operatorname{th} \frac{m}{2} (x_1 - a), \quad (9.2.46)$$

то дифференциальные уравнения (9.2.45) сводятся к дифференциальному уравнению Лежандра

$$\left((1 - \zeta^2) \frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{d}{d\zeta} + \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - \zeta^2} \right) u(\zeta) = 0, \quad (9.2.47)$$

где $\nu = 2$, $\mu^2 = (m^2 - \omega^2)/(m^2/4)$. Решение уравнения (9.2.47), не имеющее особенностей при $\zeta = \pm 1$, представляет собой функ-

цию Лежандра $P_{\nu}^{\mu}(\xi)$. Случаи, когда $\mu = 2iu$, отвечают решениям типа рассеянных волн, а случаи, когда $\mu = 1, 2$ (целое число), — решениям, описывающим связанные состояния. Таким образом, полная ортонормированная система собственных функций уравнений (9.2.45) имеет вид

$$u(x_1, k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{iu} \left(1 - \frac{3}{1-2iu} (1-\xi) + \frac{3}{2(1-2iu)(1-iu)} (1-\xi)^2 \right), \quad (9.2.48)$$

где $k = mu$, а $\omega_k = (k^2 + m^2)^{1/2} = m(1 + u^2)^{1/2}$,

$$u_1(x_1) = (3/4)^{1/2} (1 - \xi^2) \quad \text{при } \omega_1 = 0, \quad (9.2.49)$$

$$u_2(x_1) = (3/2)^{1/2} \xi (1 - \xi^2)^{1/2} \quad \text{при } \omega_2 = (3/4)^{1/2} m. \quad (9.2.50)$$

Таким образом, возникают два связанных состояния, одно из которых, а именно u_1 , представляет собой трансляционную моду. Отметим, что

$$u_1 = (3/4)^{1/2} \left(\frac{2g}{m^2} \right) \frac{d}{dx_1} \hat{\phi}_0^f. \quad (9.2.51)$$

Согласно соотношению (9.1.73), имеем

$$\hat{\psi}_f^{(1)}(x) = \chi^0(x) - Q(t) \frac{d}{dx_1} \hat{\phi}_0^f(x_1), \quad (9.2.52)$$

где

$$\chi^0(x) = \int dk \frac{\hbar^{1/2}}{(2\omega_k)^{1/2}} [u(x_1, k) \alpha(k) e^{-i\omega_k t} + u^*(x_1, k) \alpha^*(k) e^{i\omega_k t}] + \frac{\hbar^{1/2}}{(2\omega_2)^{1/2}} u_2(x_1) [\alpha_2(k) e^{-i\omega_2 t} + \alpha_2^*(k) e^{i\omega_2 t}], \quad (9.2.53)$$

$$Q(t) = (3/4)^{1/2} (2g/m^2) \beta(t). \quad (9.2.54)$$

Здесь $Q(t)$ — квантовая координата. Мы определили $\beta(t)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство (см. (9.1.66))

$$Q(t) = \frac{d}{dx_1} \hat{\phi}_0^f(x_1) = \beta(t) \cdot u_1(x_1). \quad (9.2.55)$$

Динамическое отображение $\hat{\psi}^f$. Динамическое отображение $\hat{\psi}^f$ в древесном приближении имеет вид

$$\hat{\psi}^f(X, T) = \hat{\phi}_0^f(X) + \chi^0(X, T) + \dots, \quad (9.2.56)$$

где

$$X = \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} [x_1 - Q(t)], \quad (9.2.57a)$$

$$T = (1 - \dot{Q}^2)^{1/2} t - \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} \dot{Q} [x_1 - Q(t)]. \quad (9.2.57b)$$

Здесь мы учли соотношения (9.1.100). Чтобы быть точными, нам следует симметризовать (9.2.56) по q и \dot{Q} .

Однопетлевая поправка к классическому полю. Вычислим теперь $(\phi^f - \hat{\phi}_0^f)$ в однопетлевом приближении. Уравнение (9.1.113) записывается в виде

$$\begin{aligned} \{\partial^2 - m^2 - F^{(1)}[\hat{\phi}_0^f]\} [\phi^f - \hat{\phi}_0^f] = & -\frac{m^2}{2} (Z_2 - Z) \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right) + \\ & + \frac{g^2}{2} (Z_1 - Z) \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right)^3 - \frac{m^3}{g} (1 - \omega) - 3m^2 (1 - \omega) \hat{\phi}_0^f - \\ & - \frac{3}{2} gm (2 - Z - \omega) (\hat{\phi}_0^f)^2 - \frac{1}{2} g^2 (1 - Z) (\hat{\phi}_0^f)^3 + \\ & + (1 - Z) (\partial^2 - m^2) \hat{\phi}_0^f + \frac{3}{2} g^2 \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right) \langle 0 | [\chi^0(x)]^2 | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (9.2.58)$$

где использованы выражения (9.2.10) и

$$F_0^{(2)}[\hat{\phi}_0^f] = 3g^2 \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right). \quad (9.2.59)$$

Последняя формула получена из (9.2.44) при учете равенства $F_0^{(2)}[\psi] = \delta F_0^{(1)}/\delta\psi$. Используя (9.2.39) и (9.2.44), мы можем записать уравнение (9.2.58) в виде

$$\begin{aligned} \{\partial^2 - m^2 - F^{(1)}[\hat{\psi}_0^f]\} [\phi^f - \hat{\phi}_0^f] = \\ = \frac{1}{2} [3g^2 \langle 0 | (\chi^0(x))^2 | 0 \rangle - m^2 (Z_2 - Z)] \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right) + \\ + \frac{1}{2} g^2 (Z_1 - Z) \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right)^3 - \{m^2 + F^{(1)}[\hat{\phi}_0^f]\} \frac{m}{g} (1 - \omega). \end{aligned} \quad (9.2.60)$$

Проводя дальнейшие преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \{\partial^2 - m^2 - F^{(1)}[\hat{\phi}_0^f]\} \left(\phi^f - \hat{\phi}_0^f - \frac{m}{g} (1 - \omega) \right) = \\ = \frac{1}{2} \{3g^2 \langle 0 | [\chi^0(x)]^2 | 0 \rangle - m^2 (Z_2 - Z)\} \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right) + \\ + \frac{1}{2} g^2 (Z_1 - Z) \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right)^3. \end{aligned} \quad (9.2.61)$$

При учете (9.2.33) это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \{\partial^2 - m^2 - F^{(1)}[\hat{\phi}_0^f]\} \left(\phi^f - \hat{\phi}_0^f - \frac{m}{g} (1 - \omega) \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(3g^2 \langle 0 | [\chi^0(x)]^2 | 0 \rangle - 3g^2 \Delta_0 + \frac{9}{2} m^2 g^2 A(m^2) \right) \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right) - \\ - \frac{3}{2} m^2 g^4 \left(6I(m^2) + \frac{3}{2} \frac{1}{m^2} A(m^2) + 3A'(m^2) \right) \left(\frac{m}{g} + \hat{\phi}_0^f \right)^3. \end{aligned} \quad (9.2.62)$$

Из этого уравнения можно определить величину однопетлевой поправки к ϕ^f .

Согласно формулам (9.2.34), только Δ_0 является расходящейся величиной, а $A(m^2)$, $A'(m^2)$ и $I(m^2)$ имеют конечные значения. Кроме того, конечной является и величина

$$[\langle 0 | (\chi^0)^2 | 0 \rangle - \Delta_0] = \langle 0 | [(\chi^0)^2 - (\varphi^0)^2] | 0 \rangle,$$

поскольку самосогласованный потенциал не приводит к изменению рассеянных волн с бесконечным импульсом. Следовательно, мы получаем, что однопетлевая поправка, входящая в выражение для ϕ^f , конечна. В $(3 + 1)$ -мерном случае (т. е. при $x = (x, t)$) Δ_0 и $A(m^2)$ расходятся, хотя $I(m^2)$ и $A'(m^2)$ имеют конечные значения. Вычисления показывают, что даже в этом случае расходимости в правой части уравнения (9.2.62) сокращаются [10]. Это является примером общего утверждения, согласно которому в теории, перенормируемой в отсутствие протяженных объектов, при возникновении любого протяженного объекта перенормируемость не нарушается. Этот вопрос рассматривается в разд. 9.3.

Квантовую координату можно учесть, если заменить $\phi^f(x)$ на $\phi^f(X)$. Квантовая координата $Q(t)$, появляющаяся в выражении для X , превращает солитон в квантовомеханический объект.

В этом разделе мы изучали $(1 + 1)$ -мерную модель типа $\lambda\phi^4$ в рамках метода бозонного преобразования¹⁾. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для модели типа синус-Гордона²⁾.

9.3. Общее рассмотрение бозонного преобразования

В двух предыдущих разделах мы описали метод бозонного преобразования на примере простых случаев, когда составные частицы отсутствуют и поэтому для решения уравнения Янга—Фельдмана (9.1.2) применим метод последовательных приближений. Однако на практике часто встречаются случаи, когда протяженные объекты возникают путем конденсации составных бозонов (например, фононов в кристалле, магнонов и т. д.). В этом разделе мы формулируем метод бозонного преобразования в общем виде.

Теорема о бозонном преобразовании. Предположим, что уравнение Гейзенберга (9.1.1)

$$\Lambda(\partial)\psi = F[\psi] \quad (9.3.1)$$

¹⁾ Рассмотрение этой модели с помощью других методов можно найти в работах [11].

²⁾ Рассмотрение модели типа синус-Гордона с помощью методов, отличных от метода бозонного преобразования, можно найти в работе [12].

отвечает появлению набора свободных физических полей ($\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0, \dots$). Здесь φ_α^0 ($\alpha = 1, \dots, n$) — бозоны, а остальные физические поля — фермионы. Уравнения свободного поля для бозонов имеют вид

$$\lambda^\alpha (\partial) \varphi_\alpha^0 = 0, \quad (9.3.2)$$

где суммирование по α не производится.

Динамическое отображение обозначим следующим образом:

$$\psi(x) = : \psi(x; \varphi^0 \dots) :. \quad (9.3.3)$$

Чтобы вычислить $F[\psi]$ в правой части уравнения Гейзенберга (9.3.1), вспомним правило умножения, введенное в разд. 3.4; согласно этому правилу, мы должны сначала вычислить произведения нормальных произведений физических полей и преобразовать их в линейные комбинации нормальных произведений. Интегрирование по пространственным и временным координатам следует производить только после этого.

Осуществим теперь операцию трансляции для рассматриваемых полей

$$\varphi_\alpha^0(x) \rightarrow \varphi_\alpha^0(x) + f_\alpha(x) \quad (9.3.4)$$

как формальную замену в динамическом отображении. Здесь $f_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, \dots, n$) — неоператорные функции. В результате этой замены на основе динамического отображения гейзенберговского оператора $\psi(x)$ получаем определение нового оператора $\psi^f(x)$:

$$\psi^f(x) \equiv : \psi(x; \varphi_\alpha^0 + f_\alpha, \dots) :. \quad (9.3.5)$$

До тех пор пока каждый член в разложении по степеням $(\varphi_\alpha^0 + f_\alpha)$ остается хорошо определенным, на $f_\alpha(x)$ не накладываются никаких условий.

Теорема. Если $f_\alpha(x)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\varphi_\alpha^0(x)$:

$$\lambda^\alpha (\partial) f_\alpha(x) = 0, \quad (9.3.6)$$

то оператор $\psi^f(x)$ удовлетворяет тому же уравнению Гейзенберга, что и $\psi(x)$:

$$\Lambda(\partial) \psi^f(x) = F[\psi^f(x)]. \quad (9.3.7)$$

Преобразование (9.3.4) при условии (9.3.6) называется бозонным преобразованием, а эта теорема носит название теоремы о бозонном преобразовании.

Доказательство. Рассмотрим произведение операторов $\psi(x)$, например $F[(\psi(x))]$. Трансляция полей на неоператорную величину не оказывает влияния на спаривания полей φ_α^0 , которые могут встретиться, если переписать $\hat{F}[(\psi(x))]$ в виде нормальных произ-

ведений $\varphi_\alpha^0(x)$. Поэтому если мы записываем все величины, используя разложение в ряд по степеням $(\varphi_\alpha^0 + f_\alpha)$, то произведение гейзенберговских полей, подвергнутых бозонному преобразованию, равно результату действия бозонного преобразования на произведение гейзенберговских полей. Другими словами, эти две операции (бозонное преобразование и перемножение операторов) коммутируют между собой:

$$F[\psi^f] = (F[\psi])^f. \quad (9.3.8)$$

Здесь $(F[\psi])^f$ означает, что бозонное преобразование действует на динамическое отображение $F[\psi]$.

Рассмотрим затем некоторый дифференциальный или интегральный оператор $D(\partial_x; \dots)$, действующий на $\varphi_\alpha^0(x)$. Здесь ∂_x в D отвечает какой-либо операции (дифференцирования или интегрирования), совершаемой над $\varphi_\alpha^0(x)$. Многоточие показывает, что D может зависеть и от других переменных. Если $D(\partial_x; \dots)$ действует на $\varphi_\alpha^0(x)$, то имеем

$$D(\partial_x; \dots)\varphi_\alpha^0(x) = D_0(\partial_x; \dots)\varphi_\alpha^0(x), \quad (9.3.9)$$

где D_0 — результат некоторых манипуляций. Операторы $D(\partial_x; \dots)$ и $D_0(\partial_x; \dots)$ связаны между собой соотношением

$$D(\partial_x; \dots) = D_0(\partial_x; \dots) + \sum_l a^{(l)}(\partial_x; \dots) [\lambda_\alpha(\partial_x)]^l. \quad (9.3.10)$$

Поскольку $f_\alpha(x)$ и $\varphi_\alpha^0(x)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (9.3.2) или (9.3.6), имеем

$$D(\partial_x; \dots)[\varphi_\alpha^0(x) + f_\alpha(x)] = D_0(\partial_x; \dots)[\varphi_\alpha^0(x) + f_\alpha(x)]. \quad (9.3.11)$$

Это означает, что

$$D(\partial_x; \dots)[\varphi_\alpha^0(x)]^f = [D_0(\partial_x; \dots)\varphi_\alpha^0(x)]^f = [D(\partial_x; \dots)\varphi_\alpha^0(x)]^f. \quad (9.3.12)$$

Здесь обозначение $[D(\partial_x; \dots)\varphi_\alpha^0(x)]^f$ соответствует тому, что бозонное преобразование осуществляется после действия оператора $D(\partial_x; \dots)$ на $\varphi_\alpha^0(x)$. Отсюда следует, что любая операция дифференцирования (или интегрирования) коммутирует с бозонным преобразованием. Поскольку нахождение решения уравнения Гейзенберга включает в себя только использование комбинаций процессов интегрирования и дифференцирования, очевидно, что

$$\Lambda(\partial)\psi^f = [\Lambda(\partial)\psi]^f = (F[\psi])^f = F[\psi^f]. \quad (9.3.13)$$

Таким образом, мы пришли к теореме о бозонном преобразовании, которая утверждает, что подвергнутое бозонному преобразованию гейзенберговское поле ψ^f также удовлетворяет уравнению Гейзенберга (9.3.1), если обе части уравнения (9.3.1) пред-

ставлены в виде разложения по степеням $(\varphi_\alpha^0 + f_\alpha)$. Это утверждение завершает наше доказательство.

Теорема о бозонном преобразовании формулируется с использованием степенного ряда по $(\varphi_\alpha^0 + f_\alpha)$. В общем случае бозонное преобразование не вполне эквивалентно соответствующему преобразованию для когерентного представления, так как $f(x)$ подчиняется условию (9.3.6) и, кроме того, не требуется, чтобы функция $f(x)$ имела фурье-образ. Другими словами, когда $f(x)$ имеет фурье-образ, бозонное преобразование приводит к конкретному когерентному представлению, подчиняющемуся условию (9.3.6).

Самосогласованный потенциал. Возможно, что в результате суммирования степенных рядов по f_α выявляются некоторые физические состояния с дискретными значениями энергии. Пример такого рода ситуации в явном виде описан в разд. 9.1. Воспользовавшись интуитивными представлениями, можно сказать, что бозонное преобразование отвечает конденсации бозонов, которая приводит к возникновению некоторых протяженных объектов. Эти протяженные объекты создают самосогласованный потенциал, оказывающий влияние на квантовые состояния. Этот потенциал обуславливает появление некоторых новых уравнений с дискретным спектром энергий, причем появляющиеся состояния представляют собой связанные состояния протяженного объекта и кванта. До настоящего времени не сформулирована систематическая процедура расчета самосогласованного потенциала для случая, когда протяженный объект образуется в результате конденсации *составных* бозонов. Но на практике имеется много примеров из области физики твердого тела, когда проявляются определенные эффекты, связанные с наличием самосогласованного потенциала. Электроны, на которые действует самосогласованный потенциал, создаваемый вихрями в сверхпроводниках (электроны вблизи сердцевин вихря), а также фононы в окрестности дислокаций в кристаллах представляют собой некоторые примеры такого рода.

Квантовая координата. Среди упомянутых выше связанных состояний всегда имеются трансляционные моды с нулевой энергией. Как показано в разд. 9.1, происхождение трансляционных мод связано с трансляционной инвариантностью теории. Рассмотрим сначала гейзенберговское поле $\psi(\mathbf{x}, t)$, над которым не было проведено бозонное преобразование. Тогда, учитывая трансляционную инвариантность теории, можно видеть, что $\psi(\mathbf{x} + \mathbf{a}, t)$ с постоянным вектором \mathbf{a} также подчиняется уравнению Гейзенберга. Кроме того, если $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению для свободного поля (9.3.6), то ему же удовлетворяет и $f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{a}, t)$.

Поэтому $\psi^f(\mathbf{x} + \mathbf{a}, t)$ удовлетворяет тому же уравнению Гейзенберга, что и $\psi^f(\mathbf{x}, t)$. Операция $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ не приводит к изменению теории. Квантовые моды, связанные с этой трансляцией в пространстве, являются теми же трансляционными модами, которые мы рассматривали в двух предыдущих разделах. Поскольку операция $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ не требует затраты энергии, трансляционные моды отвечают нулевой энергии. Следовательно, эти моды не наблюдаются как возбужденные состояния. Следуя рассуждениям, приведенным в разд. 9.1, мы будем описывать эти моды, используя квантовую координату \mathbf{q} , а не операторы рождения и уничтожения. Оператор \mathbf{q} является тем оператором, который приводит к пространственным трансляциям. Другими словами, $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} - \mathbf{a}$ индуцирует $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$, поскольку \mathbf{x} и \mathbf{q} появляются в ψ^f только в виде комбинации $\mathbf{x} - \mathbf{q}$. В разд. 9.4 появление \mathbf{q} рассматривается с общей теоретико-полевой точки зрения.

Квантовая координата и внутренняя симметрия. До сих пор мы считали, что ϕ_α^0 не обладает какими-либо степенями свободы, кроме тех, которые связаны с пространственными и временными переменными. Симметрии, никак не связанные с пространственными и (или) временными переменными, называются внутренними симметриями. Изоспин и спин — примеры проявления внутренних симметрий. Если ψ^0 обладает изоспином, то возникновение протяженных объектов может привести к нарушению изоспиновой симметрии. Поэтому следует ожидать, что протяженный объект, описываемый ϕ^f , может иметь не только обычную квантовую координату, но и квантовую изоспиновую координату (квантовые изоспиновые углы), отвечающую нулевой энергии. В следующем разделе показано, что несферический объект в $(1 + 3)$ -мерном пространстве обладает квантовыми координатами, отличными от \mathbf{Q} .

Энергия протяженных объектов. Попытаемся кратко описать процедуру вычисления энергии протяженных объектов, возникших за счет бозонного преобразования. Обозначим символом H гамильтониан системы

$$H = \int d^3x h[x; \psi], \quad (9.3.14)$$

где ψ — гейзенберговское поле, а $h[x; \psi]$ — оператор плотности гамильтониана. Гамильтониан H^f , получаемый в результате бозонного преобразования, дается выражением

$$H^f = \int d^3x h[x; \psi^f]. \quad (9.3.15)$$

Если используется древесное приближение, то, исходя из тех же соображений, что и при выводе классического уравнения

Эйлера (9.1.42), можно доказать, что

$$\langle 0 | H^f | 0 \rangle \approx \int d^3x h [x; \hat{\phi}^f]. \quad (9.3.16)$$

Если не использовать древесное приближение, то энергия протяженных объектов определяется выражением

$$\langle 0 | H^f | 0 \rangle = \int d^3x \langle 0 | h [x; \psi^f] | 0 \rangle. \quad (9.3.17)$$

Здесь важно отметить, что интегрирование по пространственным переменным должно осуществляться только после вычисления вакуумного среднего от плотности гамильтониана, получаемого в результате бозонного преобразования.

Как показано в гл. 3, гамильтониан H в слабом смысле равен свободному гамильтониану с добавочной константой W_0 :

$$\langle a | H | b \rangle = \langle a | H_0 [\varphi^0] | b \rangle + W_0 \langle a | b \rangle. \quad (9.3.18)$$

Данное соотношение основывается на том факте, что φ^0 — распространяющаяся волна. Поэтому если $f(x)$ — распространяющийся волновой пакет, то мы можем обобщить соотношение (9.3.18) следующим образом:

$$\langle a | H^f | b \rangle = \langle a | H_0 [\varphi^0 + f] | b \rangle + W_0 \langle a | b \rangle. \quad (9.3.19)$$

Но это соотношение не выполняется, если функция f имеет какую-либо особенность, приводящую к отсутствию у нее фурье-образа. Когда f не имеет фурье-образа, в выражении (9.3.17) для энергии появляются члены, содержащие более высокие степени f , если не имеется каких-нибудь конкретных причин, препятствующих возникновению таких членов. Заметим также, что величина, определяемая формулой (9.3.17), представляет собой оператор, включающий квантовомеханическую переменную p .

Перенормируемость и протяженные объекты. Предположим, что уравнение Гейзенберга (9.3.1) перенормируемо, если не проводилось бозонного преобразования. Рассмотрим сначала простой случай, когда имеется только одно физическое поле φ^0 , являющееся бозонным полем. Зададим динамическое отображение ψ в виде

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4\sigma_1 \dots d^4\sigma_n c(x; \sigma_1 \dots \sigma_n) : \varphi^0(\sigma_1) \dots \varphi^0(\sigma_n) : . \quad (9.3.20)$$

Динамическое отображение гейзенберговского поля, полученного в результате бозонного преобразования, имеет вид

$$\psi^f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\sigma_1 \dots d\sigma_n c_f(x; \sigma_1 \dots \sigma_n) : \varphi^0(\sigma_1) \dots \varphi^0(\sigma_n) : . \quad (9.3.21)$$

Коэффициенты этого разложения $c_f(x; \sigma_1 \dots)$ связаны с $c(x; \sigma_1 \dots)$ посредством соотношения (9.1.14)

$$\begin{aligned} c_f(x; \sigma_1 \dots \sigma_n) &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int d^4\xi_1 \dots d^4\xi_l c(x; \sigma_1 \dots \sigma_n \xi_1 \dots \xi_l) f(\xi_1) \dots f(\xi_l). \end{aligned} \quad (9.3.22)$$

Поскольку уравнение Гейзенберга, которому удовлетворяет ψ , перенормируемо, коэффициенты разложения $c(x; \sigma_1 \dots)$ в формуле (9.3.20) являются ограниченными функциями, если они выражены через перенормированные значения энергии и перенормированные константы взаимодействия. Тогда выражение (9.3.22) показывает, что коэффициенты $c_f(x; \sigma_1 \dots)$ не содержат расходимостей, если они представлены в виде разложения в ряд по степеням f . Вспоминая тот факт, что утверждение о перенормируемости всегда связывалось с некоторыми разложениями (например, с разложением в ряд теории возмущений, с разложением по петлевым диаграммам и т. д.), мы можем сформулировать приведенный выше результат в виде утверждения, что если коэффициенты $c(x; \sigma_1 \dots \sigma_n)$ перенормируемы, то таковыми являются и $c_f(x; \sigma_1 \dots \sigma_n)$. Другими словами, возникновение протяженных объектов не нарушает перенормируемости. Хотя мы пришли к этому заключению, рассматривая простой случай, когда единственное физическое поле — бозон φ^0 , легко распространить приведенное выше рассмотрение на общий случай. Полученный выше вывод находится в согласии с тем очевидным фактом, что протяженный объект не является локальным объектом в микроскопическом смысле.

Условия образования статических протяженных объектов.

Статические объекты возникают при бозонном преобразовании с функцией $f(\mathbf{x})$, не зависящей от времени. Покажем теперь, что уравнение свободного поля, которому удовлетворяет не зависящая от времени функция $f(\mathbf{x})$, приводит к появлению некоторого особого свойства статических объектов.

Чтобы избежать ненужных усложнений, опустим индекс α и обозначим f_α просто через f . Функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению (9.3.6)

$$\lambda(\partial) f(\mathbf{x}) = 0. \quad (9.3.23)$$

Обозначим через $\omega(\mathbf{k})$ энергию бозона φ^0 с импульсом \mathbf{k} . Будем считать, что $\omega(\mathbf{k})$ — неотрицательная величина. Пусть $\omega(\mathbf{k}) = 0$ при $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(a)}$ ($a = 1, 2, \dots$). Другими словами, $\omega(\mathbf{k})$ отвечает мягкой моде при $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(a)}$. Предположив, что функция $f(\mathbf{x})$ имеет фурье-образ, обозначим его через $f(\mathbf{k})$. Тогда из (9.3.23) следует соотношение $\omega(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) = 0$, где подразумевается, что $f(\mathbf{x})$ представляется в виде суммы периодических функций:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_a c_a \exp[i\mathbf{k}^{(a)} \cdot \mathbf{x}]. \quad (9.3.24)$$

Этот статический протяженный объект возникает в результате конденсации бозонов на уровнях с нулевой энергией. В физике твердого тела существует много примеров таких периодических объектов: синусоидальное спиновое упорядочение в хроме, спиральные спиновые структуры в Tb, Dy, Ho и т. д.

Все другие статические объекты обладают некоторыми особенностями, которые приводят к отсутствию фурье-образа $f(\mathbf{x})$. Эти особенности либо типа расходимости, либо топологические. В данном случае термин «особенность типа расходимости» означает, что $f(\mathbf{x})$ расходится при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ по крайней мере вдоль одного из направлений вектора \mathbf{x} . Пример протяженного объекта с особенностью типа расходимости приведен в разд. 9.2 (формула (9.2.41)). Наличие топологической особенности означает, что $f(\mathbf{x})$ не является однозначной функцией. Если $f(\mathbf{x})$ имеет особенность, то говорят, что протяженный объект сингулярен.

Если равенство $\omega(\mathbf{k}) = 0$ имеет место только при $\mathbf{k} = 0$, то формула (9.3.24) приводит к тривиальному выбору $f(\mathbf{x})$, а именно $f(\mathbf{x}) = \text{const}$.

Итак, возникновение несингулярных статических объектов возможно тогда и только тогда, когда при некотором отличном от нуля значении \mathbf{k} имеет место смягчение $\omega(\mathbf{k})$. И обратно, если $\omega(\mathbf{k}) \neq 0$ для любого отличного от нуля значения \mathbf{k} , то статические объекты всегда сингулярны.

Этот вывод привлекает наше внимание к изучению протяженных объектов, обладающих некоторыми особенностями.

Хорошо известным примером протяженного объекта с топологической особенностью является вихрь в сверхпроводнике. В этом случае уравнение (9.3.23) превращается в уравнение Лапласа $\nabla^2 f = 0$. Пусть θ — угол в цилиндрической системе координат вокруг оси x_3 . Тогда имеем уравнение $\nabla^2 \theta = 0$; θ представляет собой многозначное решение уравнения Лапласа. Вихрь в виде

прямой линии отвечает выбору $f(\mathbf{x}) = \theta$. Дислокация в кристалле — еще один пример протяженного объекта с топологической особенностью. В физике твердого тела мы обнаруживаем множество протяженных объектов с линейными или с поверхностными топологическими особенностями. В гл. 10 мы проводим систематическое рассмотрение протяженных объектов с топологическими особенностями.

9.4. Асимптотическое условие и асимптотический гамильтониан

Введение. В разд. 9.2 вычисление членов низшего порядка в разложении ψ^f показало, что \mathbf{x} и \mathbf{q} появляются в комбинации $\mathbf{x} - \mathbf{q}$. В данном разделе мы исследуем эту проблему с точки зрения общего подхода к рассмотрению квантовополевой системы с протяженным объектом. Чтобы осуществить такой подход, полезно вспомнить ситуацию в случае отсутствия протяженных объектов (см. для сравнения гл. 2 и 3), когда нахождение гейзенберговского поля ψ проводилось в рамках самосогласованного метода, в котором ключевая роль отводилась картине свободных физических частиц. Эта картина, где физические частицы рассматриваются как свободные, отражает асимптотическое условие, качественная формулировка которого заключается в том, что частицы становятся свободными в асимптотическом пределе ($t \rightarrow \pm\infty$). В этом разделе мы изучим вопрос о том, как нужно сформулировать асимптотическое условие при наличии протяженного объекта и каковы следствия этого асимптотического условия. В дальнейшем мы сосредоточим наше внимание только на случае, когда протяженный объект является статическим (т. е. $f(\mathbf{x})$ не зависит от времени).

Квантовая координата. Обозначим через \mathbf{x}_0 макроскопическое положение статического протяженного объекта. Тогда макроскопическая величина $\phi = \langle 0 | \psi^f | 0 \rangle$ является функцией $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Поскольку оператор полного импульса \mathbf{P} для гейзенберговского поля представляет собой генератор трансляций в пространстве, он должен приводить к сдвигу \mathbf{x}_0 ($\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_0 - \mathbf{a}$), который выполняет роль трансляции применительно к \mathbf{x} , а именно $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{x}_0$. Поэтому следует ожидать, что \mathbf{x}_0 имеет смысл величины, канонически сопряженной \mathbf{P} , хотя \mathbf{x}_0 и не является оператором. Это означает, что \mathbf{x}_0 сопутствует оператору \mathbf{q} , появляясь в комбинации $\mathbf{x}_0 + \mathbf{q}$, где \mathbf{q} — оператор, канонически сопряженный \mathbf{P} ; трансляция \mathbf{q} ($\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} - \mathbf{a}$) приводит к трансляции \mathbf{x}_0 ($\mathbf{x}_0 + \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x}_0 - \mathbf{a} + \mathbf{q}$). Короче говоря, ϕ есть функция $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{q}$. Неопределенность квантового оператора \mathbf{q} отражает производ

при выборе координаты x_0 . Указанный произвол коренится в трансляционной инвариантности теории. Строго говоря, положение протяженного объекта задается величиной $x_0 + q$, где оператор q — квантовая координата. Заметим, что q зависит от времени даже в том случае, когда $f(x)$ не зависит от t .

Асимптотическое условие. Асимптотическое условие заключается в том, что любое физическое квантовое поле χ^0 становится свободным полем, если его координата x отвечает точке, настолько удаленной от того места, где расположен протяженный объект, что x оказывается вне радиуса действия самосогласованного по-

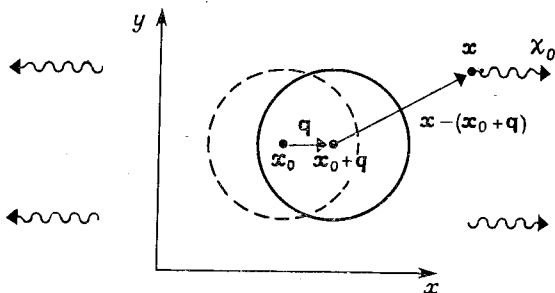


Рис. 9.5.

тенциала, создаваемого этим объектом. Поскольку положение протяженного объекта задается величиной $x_0 + q$, асимптотическое условие сводится к утверждению, что χ_0 является функцией $x - x_0 - q$, обладающей свойством

$$\Lambda(\partial) \chi_0(x) = 0 \quad (9.4.1)$$

при больших значениях $|x - x_0 - q|$. Здесь $|x - x_0 - q|$ следует понимать как среднее квадратичное значение длины вектора $(x - x_0 - q)$ (рис. 9.5).

Комбинация $(x - x_0 - q)$. Поскольку все наблюдаемые результаты зависят только от относительного расположения точки, где производятся измерения, и протяженного объекта, гейзенберговское поле ψ^f , получившееся в результате бозонного преобразования, должно зависеть от x только в комбинации $(x - x_0 - q)$. В этом состоит физический смысл появления комбинации $(x - x_0 - q)$ при выводе соответствующих формул.

Формальное доказательство утверждения о том, что x и q появляются только в виде комбинации $(x - x_0 - q)$, может быть получено, исходя из следующих соображений [13]. Согласно соотношению (9.1.22), зависимость ψ^f от x обусловлена зависимостью от x функции ϕ^f . Поскольку x содержится в ϕ^f только в виде

комбинации $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{q})$, в том же виде \mathbf{x} входит и в ψ^f . Хотя подобное формальное доказательство и возможно, приведенные выше физические аргументы позволяют более глубоко разобраться в причинах появления комбинации $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{q})$.

Оператор трансляции \mathbf{P} . Хотя асимптотическое условие формулируется довольно просто, некоторые его следствия оказываются весьма неожиданными. В частности, оно определяет структуру генератора пространственной трансляции \mathbf{P} . Генератор \mathbf{P} представляет собой оператор импульса, который находится из лагранжиана для поля ψ . Поскольку χ^0 содержит \mathbf{x} и \mathbf{q} только в виде комбинации $\mathbf{x} - \mathbf{q}$, а \mathbf{P} генерирует трансляцию $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} - \mathbf{a}$, операторы рождения и уничтожения (α^\dagger, α) в χ^0 (см. соотношения (9.1.55), (9.1.65) и (9.1.71)) не должны никак меняться при трансляции в пространстве, откуда следует

$$[\mathbf{P}, \alpha_h] = [\mathbf{P}, \alpha_i] = 0. \quad (9.4.2)$$

Поэтому, вводя определение

$$\mathbf{p} \equiv \langle 0 | \mathbf{P} | 0 \rangle, \quad (9.4.3)$$

получаем

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}. \quad (9.4.4)$$

Мы видим, что \mathbf{p} и \mathbf{q} образуют множество канонических операторов, коммутирующих с α и α^\dagger . Фактически $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}; \alpha, \alpha^\dagger\}$ — это те операторы, с помощью которых строится упомянутое выше гильбертово пространство.

В гл. 2 физическое пространство Фока строится путем циклического действия на вакуум $|0\rangle$ операторов рождения волновых пакетов, отвечающих физическим квантам:

$$\alpha_g^\dagger = \int d^3g(\mathbf{k}) \alpha_k^\dagger.$$

Здесь $g(\mathbf{k})$ — нормированная квадратично-интегрируемая функция. Теперь мы имеем дополнительные квантовомеханические операторы (\mathbf{p}, \mathbf{q}) . Поэтому состояние, в котором отсутствуют частицы, представляет собой произведение $|0\rangle$ и квантовомеханического состояния, отвечающего операторам (\mathbf{p}, \mathbf{q}) . Указанное состояние определяется выражением

$$|0; g_0\rangle = \int d^3k g_0(\mathbf{k}) \xi_k \times |0\rangle, \quad (9.4.5)$$

где ξ_k — собственное состояние оператора \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} \xi_k = \hbar \mathbf{k} \xi_k. \quad (9.4.6)$$

Нормированная квадратично-интегрируемая функция $g_0(\mathbf{k})$ конкретизирует состояние протяженного объекта. Таким образом,

состояния в гильбертовом пространстве строятся путем циклического действия операторов рождения волновых пакетов α_g^\dagger на состояния $\{|0; \mathbf{g}_0\rangle\}$ типа волновых пакетов, соответствующие протяженному объекту:

$$\mathcal{H} = \{|\Psi\rangle; |\Psi\rangle = \alpha^\dagger(\mathbf{g}_1) \dots \alpha^\dagger(\mathbf{g}_n) |0; \mathbf{g}_0\rangle\}. \quad (9.4.7)$$

Это гильбертово пространство представляет собой расширенное пространство Фока. Заметим, что вплоть до предыдущего подраздела мы считали, что квантовые координаты, отличные от \mathbf{q} , отсутствуют. Любой оператор в данной теории может быть выражен через $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}; \alpha, \alpha^\dagger\}$.

Соотношение (9.4.2) отвечает ситуации, резко контрастирующей со случаем, когда отсутствуют какие-либо протяженные объекты; в этом случае \mathbf{P} представляет собой сумму импульсов отдельных квантов:

$$\mathbf{P} = \hbar \int d^3k k \alpha_k^\dagger \alpha_k \quad (9.4.8)$$

и генерирует трансляцию в пространстве $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ для оператора $\alpha_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$ посредством преобразования $\alpha_{\mathbf{k}} \rightarrow \alpha_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{a})$. Если же существует статический протяженный объект, то квантовая координата \mathbf{q} появляется в комбинации $\mathbf{x} - \mathbf{q}$, и трансляция в пространстве возникает за счет преобразования $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} - \mathbf{a}$, так что не требуется, чтобы оператор $\alpha_{\mathbf{k}}$ изменялся при трансляции, поскольку $\alpha_{\mathbf{k}}$ связан с волновой функцией $u(\mathbf{x} - \mathbf{q} - \mathbf{x}_0, \mathbf{k})$. В результате имеет место равенство (9.4.4).

Тот факт, что структура оператора \mathbf{P} существенным образом меняется за счет бозонного преобразования, не вызывает удивления, если вспомнить ситуацию, имеющую место в квантовой теории поля без протяженных объектов. Рассматривая этот последний случай, предположим, что константа взаимодействия g имеет критическое значение g_c в том смысле, что при $g > g_c$ возникает составная частица. Если g меняется от значения, немного меньше g_c , до значения, несколько большего g_c , то в операторе \mathbf{P} неожиданно появляется новый член, описывающий импульс составной квантовой частицы. В случае же квантовополевой системы с протяженными объектами возникновение трансляционных мод приводит к появлению квантовой координаты \mathbf{q} и в то же время к исключению всех α и α^\dagger из выражения для оператора \mathbf{P} .

Соотношение (9.4.4) оказывается принципиально важным, если попытаться построить ψ^f , используя $\psi^{(n)}$, полученные из решения дифференциального уравнения (9.1.50). Решения этого уравнения определены с точностью до функции, удовлетворяющей однородному уравнению вида $\Lambda(\partial)u = 0$. Указанная неоднозначность исключается, если учесть соотношение (9.4.4). Это

было показано с помощью непосредственного вычисления в работе [14].

Оператор углового момента J . Когда размерность пространства больше 1, преобразования группы Пуанкаре включают вращения в пространстве. Пространственное вращение $\mathbf{x} \rightarrow \bar{R}\mathbf{x}$, где \bar{R} — матрица вращения, обуславливает преобразование операторов

$$R^{-1}\psi(\mathbf{x}, t)R = \psi(\bar{R}\mathbf{x}, t). \quad (9.4.9)$$

Здесь мы для простоты полагаем, что гейзенберговское поле $\psi(\mathbf{x})$ скалярное. Генератор вращения R определяется оператором углового момента J :

$$R^{-1} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} J \cdot \theta\right), \quad (9.4.10)$$

где θ — параметр преобразования.

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда $\{q, p, \alpha, \alpha^\dagger\}$ образуют полный набор физических операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Это возможно, если протяженный объект является сферически симметричным в покоящейся относительно него системе отсчета [13]. Поскольку квантовая координата q появляется только в комбинации $\mathbf{x} - \mathbf{q}$, соотношение (9.4.9) выполняется, если оператор J приводит к вращению q , удовлетворяющему условию

$$R^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})R = \mathbf{x} - \bar{R}^{-1}\mathbf{q} = \bar{R}^{-1}(\bar{R}\mathbf{x} - \mathbf{q}). \quad (9.4.11)$$

В динамическом отображении поля $\psi(\mathbf{x})$ появляются комбинации $(\mathbf{x} - \mathbf{q})^2$, $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q})$ и $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q})$, где \mathbf{k} — вектор, отвечающий оператору уничтожения частиц $\alpha_{\mathbf{k}}$. Отсюда следует, что преобразования неоператорных величин $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \bar{R}\mathbf{x}$ и $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = \bar{R}\mathbf{k}$ обусловлены следующими преобразованиями операторов (рис. 9.6):

$$R^{-1}qR = \bar{R}^{-1}q, \quad R^{-1}pR = \bar{R}^{-1}p, \quad (9.4.12)$$

$$R^{-1}\alpha_{\mathbf{k}}R = \alpha_{\bar{R}\mathbf{k}}, \quad (9.4.13)$$

где частицы считаются бесспиновыми. Поэтому угловой момент J представляет собой сумму орбитального момента L , соответствующего квантовой координате, и орбитального момента l , описывающего возбужденные частицы:

$$J = L + l, \quad (9.4.14)$$

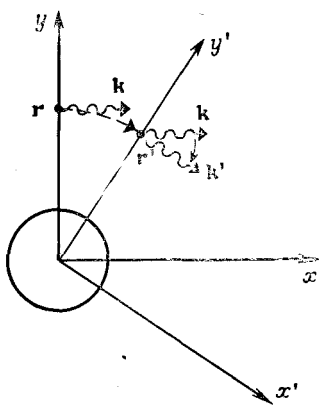


Рис. 9.6.

где

$$\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \quad (9.4.15)$$

$$l_i = -\frac{\hbar}{2} i \epsilon_{ijl} \int d^3k \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \left(k_j \frac{\partial}{\partial k_l} \right) \alpha_{\mathbf{k}} + \text{эрмит. сопр.} \quad (9.4.16)$$

Отметим, что \mathbf{L} и \mathbf{I} коммутируют между собой. Когда имеются дискретные уровни с отличной от нуля энергией (i -состояния), \mathbf{I} должно включать в себя орбитальный момент, соответствующий этим уровням.

Если в системе отсутствуют частицы, то, чтобы индуцировать преобразование пространственных координат, отвечающее вращению, достаточно осуществить вращение протяженного объекта. Но если в систему вносятся частицы, то полная система перестает быть сферически-симметричной и \mathbf{I} играет роль внутреннего спина объекта.

Чтобы естественным образом обобщить проведенное выше рассмотрение на случай, когда объект не является сферическим (или круговым), потребуются новые квантовомеханические операторы, играющие роль внутреннего спина объекта. На классическом языке это отвечает эффекту, связанному с моментом инерции. Рассмотрим в $(1 + 2)$ -мерном мире статический объект, не являющийся круговым. Несферическая форма приводит на феноменологическом уровне к нарушению круговой симметрии, а квантовые флуктуации θ проявляются в виде моды с энергией, равной нулю. Поэтому для выполнения канонического коммутационного соотношения для ψ^f требуется наличие новой квантовомеханической координаты θ_q (и канонически сопряженной ей величины θ_p). Поскольку неопределенность θ_q должна проявляться в неоднозначности угла θ , θ_q и θ должны образовывать комбинацию $(\theta - \theta_q)$. Имеем три квантовые координаты: q_1 , q_2 и θ_q . По той же причине появляются новые квантовые координаты для несферического объекта в $(1 + 3)$ -мерном мире. В этом случае алгебраическая ситуация с этими новыми квантовыми координатами несколько осложняется тем, что группа вращений не является абелевой.

Если ψ обладает некоторыми внутренними степенями свободы, обусловленными соответствующими симметриями (такими, как спиновая симметрия, изоспиновая симметрия и т. д.), и если наличие некоторых протяженных объектов нарушает на феноменологическом уровне внутреннюю симметрию, то появляются «внутренние квантовые координаты».

Чтобы избежать усложнений, в дальнейшем мы будем рассматривать сферически-симметричные объекты, для которых единственными квантовомеханическими операторами, появляющимися в теории, являются $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$.

Гамильтониан в слабом смысле. Мы видели, что, как только в системе возникает протяженный объект, появляются и необходимые для сохранения трансляционной инвариантности квантовомеханические операторы (\mathbf{p} , \mathbf{q}), не зависящие от операторов физических частиц (α , α^\dagger). Оператор \mathbf{q} всегда встречается в комбинации ($\mathbf{x} - \mathbf{q}$). Но если вспомнить тот факт, что сдвиг во времени генерируется гамильтонианом H , мы немедленно обнаружим, что комбинация ($\mathbf{x} - \mathbf{q}$) приобретает более общую форму [$\mathbf{x} - \mathbf{Q}(t)$], где

$$\mathbf{Q}(t) = e^{iHt/\hbar} \mathbf{q} e^{-iHt/\hbar}. \quad (9.4.17)$$

Иными словами, гейзенберговское поле ψ^i зависит от \mathbf{q} только через комбинацию [$\mathbf{x}' - \mathbf{Q}(t)$]. Величина $\mathbf{Q}(t)$ описывает квантовые флуктуации положения объектов в том случае, когда существуют протяженный объект и некоторое количество квантовых частиц.

Вообще говоря, величина $\mathbf{Q}(t)$ зависит от $\{\alpha_k, \alpha_k^\dagger\}$, поскольку H включает в себя α и α^\dagger . Это можно понять на качественном уровне, если учесть тот факт, что присутствие некоторых квантов оказывает влияние на квантовые флуктуации положения протяженного объекта. И наоборот, если объект флуктуирует, то из-за этого возникает некоторая неопределенность при идентификации энергии квантов, приводящая к уширению квантовых энергетических уровней. Это означает, что гамильтониан, выраженный через физические операторы, не является просто суммой энергий, отвечающих независимым модам. Асимптотическое условие и пространственно-временная симметрия налагают жесткие ограничения на корреляцию между квантами и протяженным объектом [15].

Асимптотическое условие приводит к одному важному следствию, касающемуся энергии. В гл. 3 мы видели, что в случае отсутствия какого-либо протяженного объекта H эффективно или (в слабом смысле) играет роль свободного гамильтониана:

$$H = H_0, \quad (9.4.18)$$

где

$$H_0 = \hbar \int i^3 k \omega_k n_k, \quad (9.4.19)$$

$$n_k = \alpha_k^\dagger \alpha_k. \quad (9.4.20)$$

Это отражает тот факт, что измеренная полная энергия представляет собой сумму результатов измерения энергий для каждого физического кванта (асимптотически свободной частицы). В случае когда присутствует статический протяженный объект, солитон обладает полным импульсом \mathbf{p} . Кроме того, отдельный квант может быть идентифицирован только в асимптотической области. Гамильтониан H не зависит от \mathbf{q} , поскольку H получается в ре-

зультате интегрирования по пространству плотности гамильтониана, в которую q входит в виде $x - q$. Таким образом, асимптотическое соотношение (9.4.18) заменяется утверждением, что H зависит только от p и n_k :

$$H = H(p, n_k). \quad (9.4.21)$$

Конкретная структура $H(p, n_k)$ зависит от пространственно-временной симметрии лагранжиана. Ниже мы проиллюстрируем это обстоятельство. В противоположность ситуации с H_0 гамильтониан $H(p, n_k)$ по своей структуре не обязательно является линейной функцией от n_k , что обусловлено взаимной корреляцией между протяженным объектом и квантами. Формула (9.4.21) представляет собой модификацию соотношения (9.4.18), обусловленную наличием статического протяженного объекта, и ее следует понимать, подобно (9.4.18), как соотношение, справедливое в слабом смысле.

Из (9.4.21) непосредственно следует

$$\dot{Q}(t) = ie^{iHt/\hbar} [q, H/\hbar] e^{-iHt/\hbar} = \partial H/\partial p. \quad (9.4.22)$$

Поэтому $\dot{Q}(t)$ включает в себя зависимость от p и n_k :

$$\dot{Q}(t) = \dot{Q}(t; p, n_k). \quad (9.4.23)$$

Таким образом, мы видим, что \dot{Q} коммутирует с H и, следовательно, не зависит от времени:

$$\ddot{Q} = 0. \quad (9.4.24)$$

Это отражает тот факт, что трансляционные моды отвечают нулевой энергии. Из (9.4.24) и (9.4.17) следует

$$Q(t) = q + t\dot{Q}. \quad (9.4.25)$$

Получается следующая сводка коммутаторов для величин H , p , Q и \dot{Q} :

$$[H, p] = [H, \dot{Q}] = 0, \quad (9.4.26)$$

$$i [H/\hbar, q] = i [H/\hbar, Q] = \dot{Q} = \partial H/\partial p. \quad (9.4.27)$$

Пространственно-временная симметрия и гамильтониан в слабом смысле. Зададим теперь вопрос, каким образом симметрия, отвечающая группе Лоренца, оказывает влияние на вид гамильтониана в слабом смысле. Оператор лоренцева «поворота» K удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$i [K_i, P_j] = \hbar H \delta_{ij}, \quad (9.4.28)$$

$$i [K_i, H] = \hbar P_i, \quad (9.4.29)$$

$$i [K_i, K_j] = \hbar \epsilon_{ijk} J_k, \quad (9.4.30)$$

Здесь \mathbf{J} — генератор вращения, определяемый соотношениями (9.4.14)—(9.4.16).

Оператор \mathbf{K} не меняет числа частиц. Запишем этот оператор в виде

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2} (H\mathbf{q} + \mathbf{q}H) - \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{l}}{H + M} + \delta\mathbf{K}, \quad (9.4.31)$$

где M построен из операторов n_h . Тогда оператор $\delta\mathbf{K}$ включает в себя только \mathbf{p} и n_h , поскольку он коммутирует с \mathbf{p} , согласно (9.4.28). Исходя из (9.4.27), получаем

$$q_i = -H^{-1}K_i + \frac{i}{2} H^{-1} \frac{\partial}{\partial p_i} H - \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{l})_i}{H(H + M)} + H^{-1}\delta K_i. \quad (9.4.32)$$

Это приводит к соотношению

$$i [\mathbf{q}, H] = -i [H^{-1}\mathbf{K}, H] = -\hbar\mathbf{p}H^{-1}, \quad (9.4.33)$$

откуда имеем

$$\partial/\partial p_i H = p_i H^{-1}. \quad (9.4.34)$$

Отсюда получаем, что H имеет вид

$$H = [\mathbf{p}^2 + M^2 (n_h)]^{1/2}. \quad (9.4.35)$$

Соотношение (9.4.30) выполняется в том случае, если указанная выше величина $M (n_h)$ совпадает с M из (9.4.31). $\delta\mathbf{K}$ коммутирует с \mathbf{p} , H и \mathbf{K} . Из соотношения (9.4.22) находим теперь

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{[\mathbf{p}^2 + M^2 (n_h)]^{1/2}}. \quad (9.4.36)$$

Формулы (9.4.35), (9.4.36) приводят к релятивистским выражениям для энергии и импульса, в которых $\dot{\mathbf{Q}}$ играет роль скорости:

$$H = M (n_h)/(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}, \quad (9.4.37a)$$

$$\mathbf{p} = M (n_h) \dot{\mathbf{Q}}/(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}, \quad (9.4.37b)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{p}/[\mathbf{p}^2 + M^2 (n_h)]^{1/2}. \quad (9.4.37c)$$

Чтобы найти массовый оператор $M (n_h)$, рассмотрим ситуацию, когда среднее квадратичное значение \mathbf{p} пренебрежимо мало. В этом случае энергия E системы есть сумма массы покоя солитона M_0 и энергий $[\omega(\mathbf{k}_1), \omega(\mathbf{k}_2) \dots]$ асимптотически свободных квантов:

$$E = M_0 + \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) + \dots \quad (9.4.38)$$

Эта энергия должна быть равна собственному значению оператора $M (n_h)$. Следовательно, имеем

$$M (n_h) = M_0 + H_0, \quad (9.4.39)$$

где

$$H_0 = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}) n_{\mathbf{k}} = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}}. \quad (9.4.40)$$

Когда имеются некоторые связанные состояния протяженного объекта и квантов, выражение (9.4.40) изменяется следующим образом. Обозначим энергии возбуждения этих связанных состояний через $\hbar\omega_i$, где связанные состояния нумеруются индексом i . Полная энергия, отвечающая i -му состоянию, равна $M_0 + \hbar\omega_i$. Возбуждение i -го состояния и исчезновение этого возбуждения описываются с помощью оператора рождения α_i^{\dagger} и оператора уничтожения α_i соответственно. Если солитон возникает в i -м состоянии, то M_0 в (9.4.38) заменяется на $M_0 + \hbar\omega_i$. При этом равенство (9.4.39) остается справедливым, если формулу (9.4.40) модифицировать следующим образом:

$$H_0 = \hbar \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}} + \sum_i \hbar\omega_i \alpha_i^{\dagger} \alpha_i. \quad (9.4.41)$$

Поскольку $M(n_{\mathbf{k}})$ не зависит от \mathbf{p} , равенство (9.4.39) выполняется, даже если среднее квадратичное значение \mathbf{p} не мало. С помощью выражений (9.4.35) и (9.4.39) мы определили H [в слабом смысле].

Отметим, что член $H^{-1}\delta K$ в выражении (9.4.32) может быть исключен выбором соответствующего представления. Рассмотрим унитарный оператор $\exp(-iN/\hbar)$, где N — функционал от \mathbf{p} и $n_{\mathbf{k}}$. Функционал N выбирается таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$e^{iN/\hbar} \mathbf{q} e^{-iN/\hbar} = \mathbf{q} - H^{-1} \delta K, \quad (9.4.42)$$

что приводит к условию

$$\frac{\partial}{\partial p_i} N = -H^{-1} \delta K_i. \quad (9.4.43)$$

N коммутирует с H и поэтому не зависит от времени. Следовательно, если ψ удовлетворяет уравнению Гейзенберга, то этому уравнению удовлетворяет и преобразованный оператор ψ . В дальнейшем, выбирая соответствующее представление, мы будем полагать $\delta K = 0$. При этом выражения (9.4.32) и (9.4.31) примут вид

$$\mathbf{q} = -H^{-1} \mathbf{K} + \frac{i}{2} \mathbf{p} H^{-2} - \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{l}}{H(H+M)}, \quad (9.4.44)$$

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2} (H\mathbf{q} + \mathbf{q}H) - \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{l}}{H+M}. \quad (9.4.45)$$

В $(1+1)$ -мерном случае «спин» отсутствует и последний член в этих выражениях оказывается ненужным,

9.5. (cq) -превращение и обобщенная координата

(cq) -превращение есть проявление корреляции между классическими и квантовыми аспектами поведения протяженного объекта. Его смысл заключается в утверждении, согласно которому требуется, чтобы любое преобразование неоператорных величин (c -чисел) было непосредственным образом связано некоторым операторным преобразованием.

Чтобы проиллюстрировать (cq) -превращение, обратимся сначала к простейшему случаю, отвечающему пространственной трансляции. Мы видели, что x и Q появляются в виде комбинации $(x - Q)$, поэтому трансляция неоператорной величины обусловлена преобразованием оператора (q -числа): $Q \rightarrow Q - a$. В этом состоит (cq) -превращение, связанное с пространственной трансляцией и выражаемое соотношениями

$$\exp(-ip \cdot a/\hbar) (x - Q) \exp(ip \cdot a/\hbar) = (x' - Q)_{x'=x+a} \quad (9.5.1)$$

$$\text{или } \exp(-ipa/\hbar) \psi^f(x) \exp(ipa/\hbar) = \psi^f(x'). \quad (9.5.2)$$

В этих соотношениях правая часть представляет собой преобразование c -чисел, а левая — q -чисел.

Обобщенная координата и преобразование Лоренца. Изучим теперь, к каким следствиям, касающимся лоренцевых «вращений», приводят ограничения, связанные с (cq) -превращением. Рассмотрим сначала $(1 + 1)$ -мерный пространственно-временной мир [13, 15].

Число частиц не меняется в результате преобразования Лоренца. Следовательно, в любой оператор, не вызывающий какого-либо изменения состояний частиц и поэтому содержащий α_k и α_k^\dagger в комбинации n_k , координата x должна входить только через обобщенную координату $X(x, t)$, удовлетворяющую условию (cq) -превращения

$$e^{-i\theta K/\hbar} X(x, t) e^{i\theta K/\hbar} = X(x', t'), \quad (9.5.3)$$

$$\text{где} \quad \begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \theta + t \operatorname{sh} \theta, \\ t' &= x \operatorname{sh} \theta + t \operatorname{ch} \theta. \end{aligned} \quad (9.5.4)$$

В частности, гейзенберговское поле выражается следующим образом:

$$\psi(x) = \phi[X(x, t)] + \dots, \quad (9.5.5)$$

где $\phi(x)$ определяется выражением

$$\phi(x) = \langle 0 | \psi(x) | 0 \rangle_{p=q=0}, \quad (9.5.6)$$

Многоточие в (9.5.5) не означает, что в опущенные члены x и t входят только через $X(x, t)$. В дальнейшем мы покажем, что из (9.5.3) следует соотношение

$$X(x, t) = \frac{1}{2} \{ [x - Q(t)] (1 - \dot{Q}^2)^{-1/2} + (1 - \dot{Q}^2)^{-1/2} [x - Q(t)] \}. \quad (9.5.7)$$

Выражение (9.4.45) в $(1+1)$ -мерном случае имеет вид

$$K = -\frac{1}{2} \{ qH + Hq \}. \quad (9.5.8)$$

Из (9.4.37в) получаем

$$[q, \dot{Q}] = i\hbar \frac{\partial \dot{Q}}{\partial p} = i\hbar (1 - \dot{Q}^2) H^{-1}. \quad (9.5.9)$$

Таким образом, из соотношений (9.5.8) и (9.4.27) следует

$$\frac{i}{\hbar} [\dot{Q}, K] = -(1 - \dot{Q}^2), \quad (9.5.10)$$

$$\frac{i}{\hbar} [q, K] = \frac{1}{2} (q\dot{Q} + \dot{Q}q), \quad (9.5.11)$$

$$\frac{i}{\hbar} [Q(t), K] = -t + \frac{1}{2} [Q(t)\dot{Q} + \dot{Q}Q(t)]. \quad (9.5.12)$$

Вводя определение

$$\dot{Q}(\theta) = e^{-iK\theta/\hbar} \dot{Q} e^{iK\theta/\hbar}, \quad (9.5.13)$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \dot{Q}(\theta) = -[1 - \dot{Q}^2(\theta)], \quad (9.5.14)$$

откуда следует

$$\dot{Q}(\theta) = \text{th}(A - \theta), \quad (9.5.15)$$

где A находится из условия

$$\dot{Q} = \text{th} A. \quad (9.5.16)$$

Уравнение для $q(\theta)$, определяемого как

$$q(\theta) = e^{-iK\theta/\hbar} q e^{iK\theta/\hbar}, \quad (9.5.17)$$

получается из соотношений (9.5.11) и (9.5.15):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} q(\theta) = \frac{1}{2} \{ q(\theta) \text{th}(A - \theta) + \text{th}(A - \theta) q(\theta) \}.$$

Это уравнение имеет решение

$$q(\theta) = \frac{1}{2} \{ B \text{ch}^{-1}(A - \theta) + \text{ch}^{-1}(A - \theta) B^+ \}, \quad (9.5.18)$$

где

$$B = q \text{ch} A. \quad (9.5.19)$$

Поскольку (9.5.16) приводит к выражению $\text{ch } A = (1 - \dot{Q}^2)^{1/2} = H/M(n_k)$, из (9.5.8) и (9.5.19) следует простое соотношение

$$K = -\frac{1}{2} M(n_k) (B + B^+). \quad (9.5.20)$$

Отсюда видно, что $(B + B^+)$ коммутирует с K , а значит, остается инвариантным при преобразовании Лоренца.

Если использовать формулу (9.4.25), величина $X(x, t)$, задаваемая соотношением (9.5.7), выражается через A и B следующим образом:

$$X(x, t) = x \text{ ch } A - t \text{ sh } A - \frac{1}{2} (B + B^+). \quad (9.5.21)$$

При этом из (9.5.15) и (9.5.18) получаем

$$\begin{aligned} X(x, t; \theta) &= e^{-iK\theta/\hbar} X(x, t) e^{iK\theta/\hbar} = \\ &= x \text{ ch } (A - \theta) - t \text{ sh } (A - \theta) - \frac{1}{2} (B + B^+) = \\ &= x' \text{ ch } A - t' \text{ sh } A - \frac{1}{2} (B + B^+) = X(x', t'). \end{aligned} \quad (9.5.22)$$

Таким образом, величина $X(x, t)$ удовлетворяет условию (ср) превращения (9.5.3); она называется обобщенной пространственной координатой. Заметим, что в древесном приближении соотношение (9.5.7) принимает вид (9.1.100а) (или (9.2.57а)).

Обратимся теперь к $(1 + 3)$ -мерному случаю. В этом случае мы могли бы соблазниться возможностью обобщить условие (9.5.3) следующим образом:

$$\exp(-i\theta K/\hbar) \mathbf{X}(x, t) \exp(i\theta K/\hbar) = \mathbf{X}(x', t'),$$

где x' и t' — значения пространственной и временной координат, получающиеся в результате лоренцева «вращения», а $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — параметры, описывающие «вращения». Можно показать, что величин \mathbf{X} , которые удовлетворяли бы приведенному выше условию, не существует. В этом нет ничего удивительного по следующей причине. Хотя наша модель статическая, квантовая координата тем не менее зависит от t , и, следовательно, объект движется со скоростью, определяемой квантовым оператором \dot{Q} . Поскольку лоренцово «вращение» для движущегося объекта включает вращение, называемое вигнеровским, представляется разумным модифицировать приведенное выше условие следующим образом:

$$\exp(-i\theta K/\hbar) X_i(x, t) \exp(i\theta K/\hbar) = R_{ij}(\theta) X_j(x', t'), \quad (9.5.23)$$

где $R_{ij}(\theta)$ — ортогональная матрица, элементы которой зависят от θ и \dot{Q} . Если мы рассмотрим сферически-симметричный объект,

то $\langle 0 | \psi(x) | 0 \rangle$ при $\mathbf{p} = \mathbf{q} = 0$ будет функцией от x^2 , которую мы обозначим через $\phi(x^2)$. Наличие квантовой координаты приводит к тому, что данная функция приобретает [вид $\phi(X^\dagger X)$ благодаря замене $x^2 \rightarrow X^\dagger X$.

Чтобы найти величину \mathbf{X} , удовлетворяющую соотношению (9.5.23), рассмотрим лоренцево «вращение», отвечающее скорости \mathbf{v} , и образуем набор взаимно ортогональных векторов \mathbf{v} , \mathbf{p}_\perp и \mathbf{e} , где \mathbf{p}_\perp — проекция \mathbf{p} на плоскость, перпендикулярную \mathbf{v} , а \mathbf{e} — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{v} \times \mathbf{p}$ (рис. 9.7):

$$\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p} - \mathbf{v} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})}{v^2}, \quad (9.5.24)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{v |\mathbf{p}_\perp|} (\mathbf{v} \times \mathbf{p}). \quad (9.5.25)$$

Таким образом, любой вектор \mathbf{A} может быть представлен в виде

$$\mathbf{A} = v A_v + \mathbf{p}_\perp A_\perp + \mathbf{e} A_e. \quad (9.5.26)$$

При этом для вектора, эрмитово сопряженного \mathbf{A} , получаем выражение

$$\mathbf{A}^\dagger = A_v^\dagger \mathbf{v} + A_\perp^\dagger \mathbf{p}_\perp + A_e^\dagger \mathbf{e}. \quad (9.5.27)$$

В частности,

$$\mathbf{p} = v p_v + \mathbf{p}_\perp \cdot 1. \quad (9.5.28)$$

Мы можем записать $\theta \mathbf{K}$ в виде

$$\theta \mathbf{K} = (\theta/v) (\mathbf{v} \mathbf{K}) = v \theta K_v, \quad (9.5.29)$$

где θ определяется соотношением

$$\text{th } \theta = v \equiv |\mathbf{v}|. \quad (9.5.30)$$

Для каждого оператора A можно ввести обозначение

$$A(\theta) = \exp(-i v \theta K_v / \hbar) A \exp(i v \theta K_v / \hbar). \quad (9.5.31)$$

Отсюда видно, что $A(\theta)$ получается из A в результате лоренцева «вращения».

Поскольку H и \mathbf{p} образуют 4-вектор, получаем

$$H(\theta) = H \text{ch } \theta - v p_v \text{sh } \theta, \quad (9.5.32a)$$

$$v p_v(\theta) = v p_v \text{ch } \theta - H \text{sh } \theta, \quad (9.5.32б)$$

$$p_\perp(\theta) = p_\perp = 1. \quad (9.5.32в)$$

Это приводит к соотношению

$$dH(\theta)/d\theta = -v p_v(\theta). \quad (9.5.33)$$

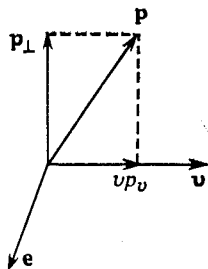


Рис. 9.7.

Так как $\dot{\mathbf{Q}}(\theta)$ равно $\mathbf{p}(\theta)/H(\theta)$, имеем

$$\dot{Q}_v(\theta) = p_v(\theta)/H(\theta), \quad (9.5.34a)$$

$$\dot{Q}_\perp(\theta) = 1/H(\theta), \quad (9.5.34б)$$

$$\dot{Q}_e(\theta) = \dot{Q}_e = 0. \quad (9.5.34в)$$

Из (9.4.29) следует

$$\frac{i}{\hbar} [H^{-1}, \mathbf{K}] = \mathbf{p}H^{-2}, \quad (9.5.35)$$

поэтому, исходя из (9.4.30) и (9.4.14), находим

$$\frac{i}{\hbar} [H^{-1}K_i, K_j] = H^{-2}p_iK_j + \frac{1}{H^2(H+M)} \varepsilon_{ijk}[\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{l})]_k + \varepsilon_{ijk} \frac{l_k}{H}. \quad (9.5.36)$$

Далее можно вывести формулу

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} [H^{-1}(\mathbf{p} \times \mathbf{l})_i, K_j] &= \\ &= \frac{1}{H(H+M)} \varepsilon_{ijk}[\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{l})]_k - \varepsilon_{ijk}l_k \frac{M}{H} + H^{-2}p_j(\mathbf{p} \times \mathbf{l})_i. \end{aligned} \quad (9.5.37)$$

Таким образом, получаем простое соотношение

$$\frac{i}{\hbar} [\xi_i, K_j] = H^{-1}p_i\xi_j, \quad (9.5.38)$$

где

$$\xi = -H^{-1}\mathbf{K} - \frac{1}{MH}(\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \quad (9.5.39)$$

$$= \mathbf{q} - \frac{1}{M(H+M)}(\mathbf{p} \times \mathbf{l}) + \frac{i}{2} \mathbf{p}H^{-2}. \quad (9.5.40)$$

Учитывая (9.5.29) и (9.5.31), из (9.5.38) получаем

$$\frac{d}{d\theta} \xi(\theta) = \frac{1}{v} H^{-1}(\theta) \mathbf{p}(\theta) [\xi(\theta) \cdot \mathbf{v}]. \quad (9.5.41)$$

Используя обозначения (9.5.26), можно записать

$$\xi = \mathbf{v}\xi_v + \mathbf{p}_\perp\xi_\perp + \mathbf{e}\xi_e. \quad (9.5.42)$$

При этом соотношение (9.5.41) представляется в виде

$$\frac{d}{d\theta} \xi_v(\theta) = v \frac{p_v(\theta)}{H(\theta)} \xi_v(\theta), \quad (9.5.43a)$$

$$\frac{d}{d\theta} \xi_\perp(\theta) = v \frac{1}{H(\theta)} \xi_\perp(\theta), \quad (9.5.43б)$$

$$\frac{d}{d\theta} \xi_e(\theta) = 0. \quad (9.5.43в)$$

Если учесть (9.5.33), то из соотношения (9.5.43а) находим

$$\xi_v(\theta) = \frac{H}{H(\theta)} \xi_v. \quad (9.5.44)$$

Тогда (9.5.43б) принимает вид

$$\frac{d}{d\theta} \xi_{\perp}(\theta) = v \frac{H}{H^2(\theta)} \xi_v, \quad (9.5.45)$$

откуда следует

$$\xi_{\perp}(\theta) = \xi_{\perp} + v \operatorname{sh} \theta \frac{1}{H(\theta)} \xi_v. \quad (9.5.46)$$

Из (9.5.43) получаем

$$\xi_e(\theta) = \xi_v. \quad (9.5.47)$$

Последнее соотношение отражает простое свойство вектора ξ : его компонента, перпендикулярная плоскости, образуемой вектором скорости v , отвечающей лоренцеву «вращению», и вектором квантовой скорости \dot{Q} , не меняется при лоренцевом «вращении». Квантовая координата q не обладает этим свойством. Кроме того, имеем следующие соотношения:

$$[\xi_i, p_j] = [q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (9.5.48)$$

$$-\frac{i}{\hbar} [\xi, H] = -\frac{i}{\hbar} [q, H] = \dot{Q}. \quad (9.5.49)$$

Таким образом, оператор

$$Q^{\xi}(t) \equiv \xi + \dot{Q}t \quad (9.5.50)$$

удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[Q_i^{\xi}(t), p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (9.5.51)$$

$$-\frac{i}{\hbar} [Q^{\xi}(t), H] = \dot{Q} = \dot{Q}^{\xi}. \quad (9.5.52)$$

Благодаря этим простым свойствам ξ обобщенная координата, как следует из проводимого ниже рассмотрения, пропорциональна $(\mathbf{x} - \xi)$. Тем не менее мы не называем величину ξ квантовой координатой, так как ее компоненты ξ_1, ξ_2, ξ_3 не коммутируют между собой в отличие от компонент вектора q .

Поскольку \mathbf{x} и t образуют 4-вектор, имеем

$$x'_v = vx_v \operatorname{ch} \theta + t \operatorname{sh} \theta, \quad (9.5.53a)$$

$$t' = t \operatorname{ch} \theta + vx_v \operatorname{sh} \theta, \quad (9.5.53б)$$

$$x'_1 = x_{\perp}, \quad (9.5.53в)$$

$$x'_e = x_e. \quad (9.5.53г)$$

Из формул (9.5.44), (9.5.46), (9.5.47) и (9.5.50) следует

$$\begin{aligned} x_v - Q_v^{\xi}(t, \theta) &= x_v - \xi_v(\theta) - \frac{p_v(\theta)}{H(\theta)} t = \frac{H}{H(\theta)} \left(x'_v - \xi_v - \frac{p_v}{H} t \right) = \\ &= \frac{H}{H(\theta)} [x'_v - Q_v^{\xi}(t')], \end{aligned} \quad (9.5.54)$$

$$\begin{aligned} x_{\perp} - Q_{\perp}^{\xi}(t, \theta) &= x'_{\perp} - \xi_{\perp}(\theta) - \frac{1}{H(\theta)} t = \\ &= x'_{\perp} - Q_{\perp}^{\xi}(t') + v \operatorname{sh} \theta \frac{1}{H(\theta)} [x'_v - Q_v^{\xi}(t')], \end{aligned} \quad (9.5.55)$$

где мы учли соотношения $x_v = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/v^2$,

$$Q_v^{\xi}(t) = (\mathbf{Q}^{\xi}(t) \cdot \mathbf{v})/v^2, \quad Q_{\perp}^{\xi}(t) = (1/p_{\perp}^2) (\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{Q}_{\perp}^{\xi}(t)) \text{ и т. д.}$$

Поскольку $x_e = x'_e$ и $Q_e^{\xi}(t, \theta) = Q_e^{\xi}(t) = Q_e^{\xi}(t')$ (так как $\dot{Q}_e = = H^{-1}p_e = 0$), приведенные выше результаты могут быть записаны в виде следующего соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{Q}^{\xi}(t, \theta) &= \mathbf{x}' - \mathbf{Q}^{\xi}(t') + \\ &+ \left[\mathbf{v} \left(\frac{H}{H(\theta)} - 1 \right) + \mathbf{p}_{\perp} v \operatorname{sh} \theta \frac{1}{H_0} \right] [x'_v - Q_v^{\xi}(t')]. \end{aligned} \quad (9.5.56)$$

Введем теперь величину

$$\eta_{ij}(\mathbf{p}) = \left(\delta_{ij} - \frac{1}{\mathbf{p}^2} p_i p_j \right) + \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} \frac{1}{\mathbf{p}^2} p_i p_j = \quad (9.5.57)$$

$$= \delta_{ij} - \frac{1}{M(H + M)} p_i p_j. \quad (9.5.58)$$

В результате лоренцева «вращения» η_{ij} принимает вид

$$\eta_{ij}[\mathbf{p}(\theta)] = \delta_{ij} + \frac{1}{M[H(\theta) + M]} p_i(\theta) p_j(\theta), \quad (9.5.59)$$

Если определить оператор [16]

$$X_i \equiv X_i[\mathbf{x} - \mathbf{Q}^{\xi}(t), \dot{\mathbf{Q}}] \equiv \eta_{ij}(\mathbf{p}) [x_j - Q_j^{\xi}(t)], \quad (9.5.60)$$

то можно показать, что он удовлетворяет условию (cq)-превращения (9.5.23):

$$X_i[\mathbf{x} - \mathbf{Q}^{\xi}(t, \theta), \dot{\mathbf{Q}}(t)] = R_{ij}(\theta) X_j[\mathbf{x}' - \mathbf{Q}^{\xi}(t'), \dot{\mathbf{Q}}]. \quad (9.5.61)$$

Если потребовать затем, чтобы оператор \mathbf{X} линейно зависел от \mathbf{x} и при равных нулю \mathbf{p} и \mathbf{q} сводился бы к \mathbf{x} , то \mathbf{X} , определенный формулой (9.5.60), окажется единственным решением, удовлетворяющим условию (cq)-превращения. Ортогональная матрица $R_{ij}(\theta)$ имеет вид

$$R(\theta) = \exp [i\varphi(\mathbf{e} \cdot \mathbf{t})], \quad (9.5.62)$$

где t_i ($i = 1, 2, 3$) — спиновые матрицы размерности 3×3 :

$$[t_i, t_j] = i\epsilon_{ijk}t_k, \quad (9.5.63)$$

$$(t_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}. \quad (9.5.64)$$

Следовательно, выражение (9.5.62) показывает, что $R(\theta)$ вызывает поворот вокруг вектора \mathbf{e} на угол φ . Угол φ определяется из соотношений [16]

$$\cos \varphi = 1 + \rho(\theta) p_{\perp}^{2*} (1 - \operatorname{ch} \theta), \quad (9.5.65a)$$

$$\sin \varphi = -\rho(\theta) |\mathbf{p}_{\perp}| \{v p_v (1 - \operatorname{ch} \theta) + (H + M) \operatorname{sh} \theta\}, \quad (9.5.65b)$$

$$\text{где } \rho(\theta) = \frac{1}{[H(\theta) + M](H + M)}. \quad (9.5.66)$$

Для вычисления каждого матричного элемента мы можем использовать соотношение

$$R(\theta) = 1 + i(\mathbf{e} \cdot \mathbf{t}) \sin \varphi + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t})^2 (\cos \varphi - 1), \quad (9.5.67)$$

которое следует из равенства $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{t})^3 = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t})$.

Таким образом, обобщенная координата \mathbf{X} определяется формулой (9.5.60). В приведенном выше выводе выражения для обобщенной координаты не используется каких-либо приближений. Обобщенная координата в древесном приближении дается выражением (9.1.100a); она имеет вид $X_i = \eta_{ij}(\mathbf{p}) [x_j - Q_j(t)]$. Это приближенное выражение для X_i , даваемое формулой (9.1.100a), отличается от точного (9.5.60) членом $(\mathbf{q} - \xi)$.

Классические и квантовомеханические протяженные объекты.

Мы видели, что протяженный объект описывается не просто посредством $\phi^f(\mathbf{x} - \mathbf{q})$, а величиной $\phi^f[\mathbf{X}(x, t)]$, в которой обобщенная координата \mathbf{X} содержит не только \mathbf{p} и \mathbf{q} , но еще и $n_h (\equiv \alpha_h^\dagger \alpha_h)$, поскольку $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{p}H^{-1}$. Величина $\phi^f(\mathbf{x})$ определяется как

$$\phi^f(\mathbf{x}) = \langle 0 | \psi^f(x, t) | 0 \rangle |_{\mathbf{p}=\mathbf{q}=0}, \quad (9.5.68)$$

а $\phi^f(\mathbf{X})$ получается из $\phi^f(\mathbf{x})$ с помощью замены $\mathbf{x}^2 \rightarrow \mathbf{X}^+\mathbf{X}$. Если квантовые флуктуации входящих в \mathbf{X} величин \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{Q}}$ приводят к измеримым эффектам, то $\phi^f(\mathbf{X})$ описывает квантовомеханический объект. Например, ширина линий мессбауэровского спектра для мелкодисперсных частиц при очень низкой температуре может выявить флуктуации квантовой координаты. Атомные ядра больших размеров также могут вести себя подобно квантовомеханическим протяженным объектам. Если же квантовыми флуктуациями \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{Q}}$ в \mathbf{X} можно пренебречь, то протяженный объект характеризуется классическим поведением. Таким образом, на основе квантовой теории поля можно получить как классические, так и квантовомеханические объекты.

Замечательная особенность поля $\phi^f(\mathbf{X})$ для статических объектов состоит в том, что оно описывает не только покоящиеся, но и движущиеся протяженные объекты; понятие «статический объект» не означает, что объект покоится, поскольку для статического объекта ϕ^f не зависит от времени, если пренебречь наличием $\dot{\mathbf{Q}}$ и \mathbf{q} . Так как состояние, в котором отсутствуют частицы (вакуумное состояние), характеризуется волновым пакетом $|0; g_0\rangle$, определяемым формулой (9.4.5), вакуумное среднее $\langle 0; g_0 | \phi^f(\mathbf{X}) | 0; g_0 \rangle$ не обязательно является не зависящим от времени; $\phi^f(\mathbf{X})$ может описывать все виды равномерного классического движения, которые обусловлены наличием в \mathbf{X} квантового оператора скорости $\dot{\mathbf{Q}}$. Однако $\phi^f(\mathbf{X})$ не описывает каких-либо ускоренных движений, поскольку для ускоренного движения требуется действие внешней силы. Движения, описываемые посредством $\phi^f(\mathbf{x})$, называются свободными.

Уравнение свободного поля и (cq)-превращение. Построим асимптотическое поле χ_0 с помощью метода ЛСЦ, описанного в разд. 3.5. Для этого сконструируем внутреннее произведение $\{\psi^f(x) - \phi^f[\mathbf{X}(x, t)]\}$ и каждого из элементов множества ортонормированных собственных решений (например, $u(x)$) уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом (см. уравнение (9.1.37)) и рассмотрим каждое внутреннее произведение в пределе $t \rightarrow \infty$. В результате процесса нахождения предела по временной переменной из ψ^f выделяются только те члены, которые находятся в резонансе по времени с собственными решениями $u(x)$. Таким образом, предел каждого внутреннего произведения представляет собой оператор α с некоторым перенормировочным множителем. Умножим каждый оператор α (или α^\dagger) на $u(x)$ (или на $u^*(x)$) и просуммируем по всем элементам множества собственных решений. Эта процедура определяет предел

$$\{\psi^f(x) - \phi^f[\mathbf{X}(x, t)]\} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \chi_0(x). \quad (9.5.69)$$

Следовательно, $\chi_0(x)$ удовлетворяет уравнению Шредингера с самосогласованным потенциалом (см. выражения (9.1.55), (9.1.65) и (9.1.71)). Динамическое отображение ψ^f имеет вид

$$\psi^f(x) = \phi^f[\mathbf{X}(x, t)] + \chi_0(x, t) + \dots, \quad (9.5.70)$$

где многоточие заменяет нормальные произведения более высоких порядков, составленные из α и α^\dagger . Эти члены не находятся в резонансе по времени с собственными решениями $u(x)$ и не вносят вклад в выражение (9.5.69) для предела. Если среднее квадратичное значение величины $|\mathbf{x} - \mathbf{q}|$ в состоянии типа волнового пакета, описывающем протяженный объект, становится столь боль-

шим, что \mathbf{x} оказывается вне радиуса действия самосогласованного потенциала, то $\chi_0(x)$ превращается в свободное поле $\psi_0(x)$:

$$\{\psi^f(x) - \phi^f[\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)]\} \xrightarrow[\substack{t \rightarrow -\infty \\ |\mathbf{x} - \mathbf{q}| \rightarrow \infty}]{} \psi_0(x), \quad (9.5.71)$$

$$\Lambda(\partial)\psi_0(x) = 0. \quad (9.5.72)$$

Исследуем теперь структуру свободного поля $\psi_0(x)$, рассматривая асимптотический гамильтониан (9.4.35) с учетом формулы (9.4.39) и условия (cq) -превращения. Поле $\psi_0(\mathbf{x}, t)$ представляется в виде интеграла Фурье:

$$\psi_0(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{(2\omega_k)^{1/2}} [A_k(\mathbf{p}, \alpha, \alpha^\dagger) \exp\{ik(\mathbf{x} - \mathbf{q}) - i\omega_k t\} + \text{компл. сопр.}] \quad (9.5.73)$$

Здесь учтен тот факт, что пространственная трансляция $\psi_0(x)$ обусловлена оператором $\mathbf{P} = \mathbf{p}$ (см. (9.4.4)). Здесь и далее индекс k обозначает \mathbf{k} .

Поскольку сдвиг во времени обусловлен оператором H , должно выполняться условие

$$\psi_0(\mathbf{x}, t) = e^{iHt/\hbar} \psi_0(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt/\hbar}. \quad (9.5.74)$$

Это приводит к соотношению

$$e^{-i\omega_k t} A_k(\mathbf{p}, \alpha, \alpha^\dagger) = \exp[iH(\mathbf{p})t/\hbar] A_k(\mathbf{p}, \alpha, \alpha^\dagger) \exp \times \\ \times [-iH(\mathbf{p} + \mathbf{k})t/\hbar]. \quad (9.5.75)$$

Здесь $H(\mathbf{p})$ совпадает с H , определяемым формулой (9.4.35). Если, не особенно задумываясь, положить $A_k = \alpha_k$, то окажется, что выбранное таким образом A_k не удовлетворяет соотношению (9.5.75). Поскольку действие A_k сводится к уничтожению одной частицы, мы можем записать A_k в виде линейной комбинации операторов α_l с коэффициентами, зависящими от \mathbf{p} и n_k . Предположим, что \mathbf{k} в (9.5.75) равно \mathbf{l} в покоящейся системе отсчета ($\mathbf{p} = 0$). Здесь $\mathbf{p} = 0$ означает, что среднее квадратичное значение \mathbf{p} пренебрежимо мало. Поскольку \mathbf{k} связано с \mathbf{l} посредством функции от \mathbf{p} (а также $\alpha^\dagger \alpha$), A_k имеет вид

$$A_k = \int d^3l \delta(\mathbf{k} - \mathbf{K}_l) F^l \alpha_l, \quad (9.5.76)$$

где F^l и \mathbf{K}_l — некоторые функции от \mathbf{p} и $\alpha^\dagger \alpha$. В результате из (9.5.75) получаем условие

$$\hbar \omega_{\mathbf{K}_l} = H(\mathbf{p} + \mathbf{K}_l, n_l + 1) - H(\mathbf{p}, n_l). \quad (9.5.77)$$

Из этого соотношения находим

$$\omega_{K_l} = \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} [\tilde{\omega}_l + \dot{Q} \cdot \tilde{\Gamma}], \quad (9.5.78)$$

$$K_l = \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} [\tilde{\Gamma}_L + \dot{Q} \tilde{\omega}_l] + \tilde{\Gamma}_T. \quad (9.5.79)$$

Здесь использованы обозначения (9.1.96). Поскольку $\omega_{K_l}^2 - K_l^2 = \mu^2$, имеем

$$\tilde{\omega}_l^2 - \tilde{\Gamma}^2 = \mu^2, \quad (9.5.80)$$

где μ — масса, отвечающая свободному полю ψ_0 . Отсюда

$$\tilde{\omega}_l = \omega_l + I^2/2M, \quad (9.5.81)$$

$$\tilde{\Gamma}^2 = I^2 \left(1 - \frac{\omega_l}{M} + \frac{I^2}{4M^2} \right), \quad (9.5.82)$$

где M обозначает $M(n_h)$. Подставляя (9.5.76) в (9.5.73), получаем

$$\psi_0(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3l [f^l \mathcal{P}_q \exp \{iK_l(\mathbf{x} - \mathbf{q}) - i\omega_{K_l} t\} \alpha_l + \text{эрмит. сопр.}] \quad (9.5.83)$$

здесь символ \mathcal{P}_q означает, что любое \mathbf{q} должно быть помещено справа от всех других операторов, а

$$f^l = F^l / (2\omega_{K_l})^{1/2}. \quad (9.5.84)$$

Коэффициент f^l определяют с помощью условия (cq) -превращения

$$\psi_0(\mathbf{x}', t') = \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{0} / \hbar) \psi_0(\mathbf{x}, t) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{0} / \hbar). \quad (9.5.85)$$

В $(1+1)$ -мерном случае коэффициент f^l , удовлетворяющий условию (9.5.85), можно найти, если учесть тот факт, что выражение для K имеет вид

$$K = - \left(Hq + \frac{i}{2} \frac{\partial H}{\partial p} \right) \quad (9.5.86)$$

и из (9.5.85) следует условие

$$[\psi_0(0, 0), K] = 0. \quad (9.5.87)$$

После громоздких вычислений [15] получаем следующее решение:

$$f^l = \left(\frac{H + \omega_{K_l}}{H} \right)^{1/2} f_0^l. \quad (9.5.88)$$

Функция f_0^l представляет собой нормировочный множитель, не зависящий от p . Поле ψ_0 , определяемое формулой (9.5.83) с f^l , даваемым выражением (9.5.88), удовлетворяет уравнению свободного поля (9.5.72) и условию (cq) -превращения (9.5.85).

Интересно отметить, что если воспользоваться формулами (9.5.78) и (9.5.79), то $\Psi_0(x, t)$ можно записать также в виде

$$\Psi_0(x, t) = \frac{\hbar^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \int dl^i l^j \mathcal{P}_q \exp \{ i \tilde{l} X(x, t) - i \tilde{\omega}_l T(x, t) \} \alpha_l +$$

+ эрмит. сопр. (9.5.89)

Здесь $X(x, t)$ и $T(x, t)$ — обобщенные координаты, определяемые выражениями

$$X(x, t) = \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} [x - Q(t)], \quad (9.5.90)$$

$$T(x, t) = (1 - \dot{Q}^2)^{1/2} t - \frac{\dot{Q} [x - Q(t)]}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}}. \quad (9.5.91)$$

При наличии оператора \mathcal{P}_q , упорядочивающего q , операторы $X(x, t)$, определяемые формулами (9.5.7) и (9.5.90), действуют одинаковым образом. Отметим, что при выводе соотношений (9.5.89), (9.5.90) и (9.5.91) не использовалось никаких приближений.

В $(1 + 3)$ -мерном случае иметь дело с условием (9.5.85) было бы весьма утомительно. Поэтому мы рассмотрим этот случай в древесном приближении. Поскольку в древесном приближении не учитываются коммутаторы со сложной структурой, имеем

$$[\alpha_h, H] \approx \hbar \omega_h \alpha_h M/H. \quad (9.5.92)$$

В древесном приближении в левой части соотношения (9.5.77) следует ограничиться линейными членами разложения по $\hbar \omega_l$ и $\hbar K_l$:

$$H(\mathbf{p} + \mathbf{K}_l, n_l + 1) - H(\mathbf{p}, n_l) \approx \hbar \left(\omega_l \frac{M}{H} + \mathbf{K}_l \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right). \quad (9.5.93)$$

Согласно (9.5.78) и (9.5.79), полученное приближенное выражение равно $\hbar [\omega_{K_l} + (\omega_l - \tilde{\omega}_l) (M/H)]$. Поэтому из соотношений (9.5.77) и (9.5.80) следует

$$\tilde{\omega}_l = \omega_l \text{ и } \tilde{l}^2 = l^2. \quad (9.5.94)$$

Обращаясь к формулам (9.5.81) и (9.5.82), видим, что это соответствует $\omega_l/M \ll 1$. Поскольку использование формулы (9.4.45) приводит к выражению

$$[\alpha_h, K_l] = - \frac{1}{H + M} \varepsilon_{ijl} p_j [\alpha_h, l_a] - \left[\alpha_h, H \left(q_i + \frac{i}{2} p_i H^{-2} \right) \right] -$$

$$- \varepsilon_{ija} p_j l_a \left[\alpha_h, \frac{1}{H + M} \right], \quad (9.5.95)$$

имеем

$$\begin{aligned} \left[\alpha_k, \frac{1}{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}) \right] = & - \frac{1}{H+M} |\mathbf{p}_\perp| [\alpha_k, (\mathbf{l} \cdot \mathbf{e})] - \\ & - v \left[\alpha_k, H \left(q_v + \frac{i}{2} p_v H^{-2} \right) \right] - |\mathbf{p}_\perp| (\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) \left[\alpha_k, \frac{1}{H+M} \right]. \end{aligned} \quad (9.5.96)$$

С другой стороны, из (9.4.16) с учетом (9.5.64) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} [\alpha_k, l_i] = i \varepsilon_{ija} k_j \frac{\partial}{\partial k_a} \alpha_k = k_j (t_i)_{ja} \frac{\partial}{\partial k_a} \alpha_k = \\ = k'_j (t_i)_{ja} \frac{\partial}{\partial k'_a} \alpha_k, \end{aligned} \quad (9.5.97)$$

где k' связано с k посредством поворота вокруг i -й оси.

Таким образом, (9.5.96) приводит к следующему соотношению для оператора $\alpha_k(\theta)$, получающегося из α_k при лоренцевом «вращении»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha_k(\theta) = i \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} k'_j (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t})_{ja} \frac{\partial}{\partial k'_a} \alpha_k(\theta) - \\ - \frac{1}{\hbar} v \left[\alpha_k(\theta), H(\theta) \left(q_v(\theta) + \frac{i}{2} p_v(\theta) H^{-2}(\theta) \right) \right] - \\ - \frac{1}{\hbar} |\mathbf{p}_\perp| (\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) \left[\alpha_k(\theta), \frac{1}{H(\theta)+M} \right], \end{aligned} \quad (9.5.98)$$

где φ — угол, отвечающий вигнеровскому повороту. При выводе выражения для первого члена в правой части (9.5.98) использовано соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{|\mathbf{p}_\perp|}{H(\theta)+M}, \quad (9.5.99)$$

которое следует из (9.5.65). С другой стороны, если

$$k'_i = R_i^{-1}(\theta) k_j, \quad (9.5.100)$$

где $R(\theta)$ — матрица вигнеровского вращения, то имеем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \alpha_{k'} = i \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} k'_j (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t})_{ja} \frac{\partial}{\partial k'_a} \alpha_{k'}. \quad (9.5.101)$$

Сравнивая это соотношение с (9.5.98), мы можем записать

$$\alpha_k(\theta) = \alpha_{k'} e^{i\Lambda(\theta)}, \quad (9.5.102)$$

где k' дается формулой (9.5.100). При этом из (9.5.98) следует

$$\begin{aligned} \alpha_k(\theta) \frac{\partial \Lambda(\theta)}{\partial \theta} = i \frac{1}{\hbar} v \left[\alpha_k(\theta), H(\theta) \left(q_v(\theta) + \frac{i}{2} p_v(\theta) H^{-2}(\theta) \right) \right] - \\ - \frac{1}{\hbar} |\mathbf{p}_\perp| (\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}) \left[\alpha_k(\theta), \frac{1}{H(\theta)+M} \right]. \end{aligned} \quad (9.5.103)$$

Если воспользоваться соотношением (9.5.92), то (9.5.103) принимает вид

$$\frac{\partial \Lambda(\theta)}{\partial \theta} = -\omega_k M \frac{H}{H^2(\theta)} v \xi_v = \omega_k \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sh } \theta \frac{1}{H(\theta)} \right) M v \xi_v, \quad (9.5.104)$$

где ξ дается формулой (9.5.40). В результате имеем

$$\Lambda(\theta) = -\omega_k \text{sh } \theta \frac{M}{H(\theta)} \xi_v. \quad (9.5.105)$$

Введем теперь величину

$$T = \frac{H}{M} t - \frac{1}{M} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \xi) = \quad (9.5.106)$$

$$= (1 - \dot{Q}^2)^{1/2} t - \frac{1}{(1 - \dot{Q}^2)^{1/2}} [\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{Q}^\xi(t)]. \quad (9.5.107)$$

Вид T после лоренцева «вращения» (т. е. $T(\theta)$) можно найти, используя соотношения

$$H(\theta) t - \mathbf{p}(\theta) \cdot \mathbf{x} = H t' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}', \quad (9.5.108a)$$

$$\mathbf{p}(\theta) \xi(\theta) = \mathbf{p} \xi - v \text{sh } \theta \frac{M^2}{H(\theta)} \xi_v, \quad (9.5.108b)$$

где \mathbf{x}' и t' — значения \mathbf{x} и t , получаемые в результате лоренцева «вращения». Обозначая через T' выражение для T , в котором \mathbf{x} и t заменены на \mathbf{x}' и t' , имеем

$$\omega_k T(\theta) = \omega_k T' + \Lambda(\theta). \quad (9.5.109)$$

Принимая во внимание соотношения (9.5.61) и (9.5.102), можно видеть, что $\alpha_k \exp[ik\mathbf{X} - i\omega_k T]$ удовлетворяет условию (с_q)-превращения:

$$\begin{aligned} \alpha_k(\theta) \exp[ik\mathbf{X}(\theta) - i\omega_k T(\theta)] &= \\ &= \alpha_{k'} \exp[ik'\mathbf{X}' - i\omega_{k'} T']. \end{aligned} \quad (9.5.110)$$

Таким образом, получаем

$$\Psi_0(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{(2\omega_k)^{1/2}} [\alpha_k \exp(ik\mathbf{X} - i\omega_k T) + \text{эрмит. сопр.}], \quad (9.5.111)$$

$$f^l = \frac{1}{(2\omega_l)^{1/2}} \exp\{ik \cdot X\} |_{q=0, \mathbf{x}=0}, \quad (9.5.112)$$

где T — обобщенная временная координата.

Свободные и вынужденные движения протяженных объектов. Как отмечено в абзаце, непосредственно следующем за формулой (9.5.68), в статическом случае $\phi(\mathbf{X})$ может описывать всевозможные равномерные движения, если рассматривать вакуумное сред-

нее $\langle 0; g_0 | \varphi(\mathbf{X}) | 0; g_0 \rangle$, которое может зависеть от t через $\mathbf{Q}(t)$. Эти равномерные движения сопутствуют движениям с нулевой энергией, обуславливающим появление квантовой координаты. Поэтому указанные движения называют свободными. Если рассмотреть объект, не имеющий сферически-симметричной структуры, то кроме квантовой координаты $\mathbf{Q}(t)$, связанной с трансляциями, появляется угловая квантовая координата θ_q ; в этом случае свободные движения представляют собой комбинации трансляций и поворотов. Интересным примером такого рода является случай двухточечного объекта на плоскости. Подобную систему можно рассматривать как один протяженный объект, не обладающий круговой симметрией. Поэтому его движение есть совокупность трансляции и вращения вокруг центра масс. Практическим приложением такой модели может служить свободное движение двух параллельных прямолинейных вихрей. Если рассмотреть плоскость, перпендикулярную этим вихрям, то их можно спроектировать в две точки на плоскости. Таким образом, мы видим, что свободное движение этих двух вихрей есть комбинация трансляций и поворотов одного относительно другого. Описанное движение двух вихрей наблюдалось в сверхтекучих жидкостях.

Протяженные объекты с захваченными фермионами. Если в системе имеются физические фермионы, которые взаимодействуют с протяженным объектом, то гамильтониан H_0 в (9.4.39) должен включать в себя свободный гамильтониан этих фермионов. Особенно важен случай протяженных объектов, которые захватывают фермионы, поскольку фермионы должны последовательно заполнять все состояния, начиная с состояния, отвечающего наименьшей энергии. Если фермионы представляют собой нуклоны, такая картина применима для описания ядер. Если же фермионы — это кварки, то данная модель приводит к модели мешка. В физике твердого тела становится очень модным изучение солитонов в одномерных моделях. Особое внимание привлекли к себе солитоны, захватывающие фермионы [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Umerawa H., Matsumoto H. — in: Symmetries in science, eds. B. Gruber and R. Millman, Plenum, New York, 1980, p. 411.
2. Matsumoto H., Sodano P., Umezawa H., Phys. Rev., **D19**, 511 (1979).
3. Leplae L., Mancini F., Umezawa H., J. Math. Phys., **10**, 2038 (1969); Phys. Rev., **B2**, 3594 (1970); Phys. Rep., **10C**, 151 (1974).
4. Matsumoto H., Papastamatiou N. J., Umezawa H., Nucl. Phys., **82**, 45 (1975); **B97**, 90 (1975).
5. Matsumoto H., Oberlechner G., Umezawa M., Umezawa H., J. Math. Phys., **20**, 2088 (1979).

6. Scott A. C., Chu F., McLaughlin D., Proc. IEEE, **61**, 1443 (1973); Rajaraman R., Phys. Rep., **C21**, 227 (1975).
7. Jackiw R., Rev. Mod. Phys., **49**, 681 (1977).
8. Gervais J.-L., Sakita B., Phys. Rev., **D11**, 2943 (1975); Gervais J.-L., Jevicki A., Sakita B., Phys. Rev., **D12**, 1038 (1975); Callan C. G., Jr., Gross D. J., Nucl. Phys., **B93**, 29 (1975).
9. Matsumoto H., Semenoff G., Umezawa H., Umezawa M., J. Math. Phys., **21**, 1761 (1980).
10. Semenoff G., Matsumoto H., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **63**, 1393 (1980).
11. Dashen R., Hasslacher B., Neveu A., Phys. Rev., **D10**, 4114; 4136 (1974); Gervais J.-L., Jevicki A., Sakita B., Phys. Rev., **D12**, 1038 (1975).
12. Копенун В. Е., Фаддеев Л. Д., ТМФ, **25**, 147 (1975).
13. Matsumo H., Papastamatiou N. J., Umezawa H., Umezawa M., Phys. Rev., **D22**, 1339 (1981).
14. Semenoff G., Matsumoto H., Umezawa H., J. Math. Phys., **22**, 2208 (1981).
15. Matsumoto H., Papastamatiou N. J., Semenoff G., Umezawa H., Phys. Rev., **D24**, 406 (1981).
16. Yamanaka H., Matsumoto H., Umezawa H., Phys. Rev., **D24**, 2607 (1981).
17. Su W. P., Schrieffer J. R., Heeger N. J., Phys. Rev., **B22**, 2099 (1980); Takayama H., Lin-Liu Y. R., Maki K., Phys. Rev., **B21**, 2388 (1980); Jackiw R., Schrieffer J. R., UCSB preprint (1981).

ПРОТЯЖЕННЫЕ ОБЪЕКТЫ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

10.1. Общие соображения

Бозонное преобразование при наличии топологических особенностей. В гл. 9 мы исследовали вопрос, каким образом в квантовых системах многих тел могут возникать протяженные объекты. В частности, в разд. 9.3 показано, что, за исключением тех случаев, когда энергия бозонов $\omega(\mathbf{k})$ обращается в нуль при некоторых отличных от нуля значениях импульса, уравнение $\lambda(\partial) f(x) = 0$ для параметра бозонного преобразования $f(x)$ не может иметь никакого статического решения, обладающего фурье-образом. Особенности, препятствующие существованию фурье-образа, либо типа расходимостей, либо представляют собой топологические особенности. Наличие особенности типа расходимости означает, что $f(x)$ расходится при $|\mathbf{x}| = \infty$ по крайней мере для некоторого направления \mathbf{x} , а топологическая особенность связана с неоднозначностью функции $f(x)$. В данной главе мы дадим систематический подход к описанию топологических особенностей [1, 2]. Рассмотрению неабелевых симметрий посвящен разд. 10.3.

Если функция $f(x)$ обладает некоторой топологической особенностью, то она не однозначна, и, следовательно, ее значение в точке x зависит от пути подхода к этой точке. Хорошо известным примером величины, зависящей от пути, является в цилиндрической системе координат угол θ поворота вокруг некоторой прямой (например, вокруг третьей оси). Этот угол представляет собой решение уравнения Лапласа $\nabla^2 \theta = 0$. Кроме того, имеется хорошо известная формула $\nabla \times \nabla \theta = 2\pi \delta(x_1) \delta(x_2) \mathbf{e}^3 \neq 0$, где \mathbf{e}^3 — единичный вектор, направленный вдоль третьей оси. Этот пример демонстрирует общее свойство топологических особенностей, состоящее в том, что некоторые производные не коммутируют между собой в области существования особенности.

Ниже мы рассмотрим набор бозе-полей φ_α^0 ($\alpha = 1, 2, \dots$), над которыми производится бозонное преобразование $\varphi_\alpha^0 \rightarrow \varphi_\alpha^0 + f_\alpha$. Уравнения для φ_α^0 запишем в виде

$$\lambda^\alpha(\partial) \varphi_\alpha^0 = 0. \quad (10.1.1)$$

Функции f_α удовлетворяют тому же уравнению

$$\lambda^\alpha(\partial) f_\alpha = 0. \quad (10.1.2)$$

Введем величину

$$G_{\mu\nu}^{\alpha+}(x) \equiv [\partial_\mu, \partial_\nu] f_\alpha(x). \quad (10.1.3)$$

Если

$$G_{\mu\nu}^{\alpha+}(x) \neq 0 \quad \text{для некоторых } x, \mu, \nu \text{ и } \alpha, \quad (10.1.4)$$

то область переменной x , в которой выполняется это соотношение, называется областью топологической особенности. Кроме того, наличие зависящей от пути функции $f_\alpha(x)$ приводит к требованию, чтобы величина $\partial_\mu f_\alpha$ была однозначной:

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] \partial_\rho f_\alpha(x) = 0. \quad (10.1.5)$$

Соотношения (10.1.4) и (10.1.5) представляют собой условия существования топологических особенностей.

В соответствии с рассмотрением, проведенным в гл. 9, протяженные объекты, возникающие в результате бозонного преобразования, приводят к появлению самосогласованного потенциала, оказывающего влияние на квантовые состояния системы. Если функции $f_\alpha(x)$, определяющие бозонное преобразование, обладают некоторыми топологическими особенностями, то структура самосогласованного потенциала серьезным образом зависит от структуры этих особенностей. В разд. 10.2 показано, что так называемая «энергия сердцевины» вихря в сверхпроводнике связана с наличием электронов, захваченных самосогласованным потенциалом вихря, представляющего собой протяженный объект с линейной топологической особенностью. Имеется много других примеров такого рода. Но до сих пор отсутствовал систематический подход к построению самосогласованного потенциала, вызываемого протяженными объектами, существование которых связано с топологическими особенностями.

Топологические особенности и голдстоуновские бозоны. Докажем теперь, что функция $f_\alpha(x)$ может обладать некоторыми топологическими особенностями тогда и только тогда, когда в энергетическом спектре $\omega^\alpha(\mathbf{k})$ для бозонов φ_α^0 отсутствует щель [3, 4]:

$$\omega^\alpha(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{k} = 0. \quad (10.1.6)$$

Чтобы доказать это, заметим, что уравнение (10.1.2) всегда может быть представлено в виде

$$[D_\alpha^\mu(\partial) \partial_\mu + \mu_\alpha^2] f_\alpha(x) = 0, \quad (10.1.7)$$

где μ_α — некоторые константы, а $D_\alpha^\mu(\partial)$ — некоторые дифференциальные операторы. Из соотношений (10.1.3) и (10.1.5) следует

$$D_\alpha^\mu(\partial) G_{\mu\nu}^{\alpha+}(x) = D_\alpha(\partial) \partial_\nu f_\alpha(x) - \partial_\nu D_\alpha(\partial) f_\alpha(x) = \{D_\alpha(\partial) + \mu_\alpha^2\} \partial_\nu f_\alpha(x), \quad (10.1.8)$$

$$D_\alpha(\partial) = D_\alpha^\mu(\partial) \partial_\mu; \quad (10.1.9)$$

суммирование по α здесь не проводится. Таким образом, имеем

$$\partial_{\mu} f_{\alpha}(x) = \frac{1}{D_{\alpha}(\partial) + \mu_{\alpha}^2} D_{\alpha}^{\lambda}(\partial) G_{\lambda\mu}^{\alpha+}(x). \quad (10.1.10)$$

Поскольку $G_{\lambda\mu}^{\alpha+}$ имеет фурье-образ, а $G_{\lambda\mu}^{\alpha+} = -G_{\mu\lambda}^{\alpha+}$, находим

$$D_{\alpha}(\partial) f_{\alpha}(x) = 0 \quad (\text{т. е. } \mu_{\alpha} = 0). \quad (10.1.11)$$

Так как $D_{\alpha}(0) = 0$ в соответствии с формулой (10.1.9), это означает, что в энергетическом спектре бозонных полей φ_{α}^0 отсутствует щель.

Отсюда мы заключаем, что *протяженные объекты, существование которых связано с топологическими особенностями, могут возникать только благодаря конденсации бозонов с бесщелевым энергетическим спектром*. В этом состоит причина того, что протяженные объекты с топологическими особенностями обычно появляются в состояниях, определенным образом упорядоченных, поскольку упорядочение связано с наличием голдстоуновских бозонов, не имеющих щели в энергетическом спектре (примерами таких объектов являются дислокации, границы зерен и точечные дефекты в кристаллах, вихри в сверхпроводниках).

Поскольку данный раздел посвящен исследованию топологических особенностей, мы будем полагать, что $f_{\alpha}(x)$ (а следовательно, и φ_{α}^0) удовлетворяет уравнению (10.1.11). Если структура топологической особенности задается посредством $G_{\mu\nu}^{\alpha+}$ в (10.1.3), то $\partial_{\mu} f_{\alpha}$ определяется соотношением (10.1.10) при $\mu_{\alpha} = 0$:

$$\partial_{\mu} f_{\alpha}(x) = \frac{1}{D_{\alpha}(\partial)} D_{\alpha}^{\lambda}(\partial) G_{\lambda\mu}^{\alpha+}. \quad (10.1.12)$$

Из этой формулы находится зависящая от пути функция $f_{\alpha}(x)$ [1, 2].

Топологический заряд. Рассмотрим теперь величину, задаваемую интегралом по контуру

$$N_T^{\alpha} = \int_c ds^{\mu} \partial_{\mu} f_{\alpha}, \quad (10.1.13)$$

где c — замкнутый контур, не проходящий через область топологической особенности. Обозначая через S поверхность, ограниченную контуром c , мы можем переписать выражение (10.1.13) в виде

$$N_T^{\alpha} = \frac{1}{2} \int_S dS^{\mu\nu} [\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] f_{\alpha} = \frac{1}{2} \int_S dS^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^{\alpha+}, \quad (10.1.14)$$

где $dS^{\mu\nu}$ — элемент поверхности. Отсюда видно, что константы N_T^{α} не изменяются при замене контура c другим замкнутым контуром,

не проходящим через область топологической особенности. Эти константы N_T^α называются топологическими зарядами (см., например, обзор Коулмена [5]).

Полное условие, определяющее топологическую особенность. Мы видели, что если топологическая особенность задается некоторым конкретным выражением $G_{\mu\nu}^{\alpha+}$, то $\partial_\mu f_\alpha$ определяется формулой (10.1.12). Используя это $\partial_\mu f_\alpha$, мы можем затем вычислить $G_{\mu\nu}^{\alpha+} = [\partial_\mu, \partial_\nu] f_\alpha$, $[\partial_\mu, \partial_\nu] \partial_\rho f_\alpha$ и $D_\alpha(\partial) f_\alpha$. Первоначальный выбор $G_{\mu\nu}^{\alpha+}$ оправдан в том и только в том случае, если это вычисление приводит к исходному $G_{\mu\nu}^{\alpha+}$, а также к выполнению соотношений (10.1.5) и (10.1.11). Действуя таким образом, мы можем найти полное условие, определяющее топологическую особенность.

Чтобы исследовать это полное условие, удобно ввести величину $G_\alpha^{\mu\nu}$, дуально сопряженную $G_{\mu\nu}^{\alpha+}$:

$$G_\alpha^{\mu\nu}(x) \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} G_{\lambda\rho}^{\alpha+}(x) = \quad (10.1.15)$$

$$= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} [\partial_\lambda, \partial_\rho] f_\alpha(x), \quad (10.1.16)$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ — полностью антисимметричный тензор, у которого $\varepsilon^{0123} = 1$. Из (10.1.16) следует уравнение непрерывности

$$\partial_\mu G_\alpha^{\mu\nu} = 0. \quad (10.1.17)$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu G_{\lambda\rho}^{\alpha+} = 0, \quad (10.1.18)$$

что приводит к соотношению

$$\partial_\mu G_{\lambda\rho}^{\alpha+} + \partial_\rho G_{\mu\lambda}^{\alpha+} + \partial_\lambda G_{\rho\mu}^{\alpha+} = 0. \quad (10.1.19)$$

Используя далее (10.1.12), находим

$$\begin{aligned} [\partial_\nu, \partial_\mu] f_\alpha &= \frac{1}{D_\alpha(\partial)} D_\alpha^\lambda(\partial) \{ \partial_\nu G_{\lambda\mu}^{\alpha+} - \partial_\mu G_{\nu\lambda}^{\alpha+} \} = \\ &= -\frac{1}{D_\alpha(\partial)} D_\alpha^\lambda(\partial)_\lambda G_{\mu\nu}^{\alpha+} = G_{\nu\mu}^{\alpha+}, \end{aligned}$$

что совпадает с соотношением (10.1.3). В проведенном вычислении использованы равенства $G_{\mu\nu}^{\alpha+} = -G_{\nu\mu}^{\alpha+}$ и (10.1.9). Кроме того, очевидно, что выражение (10.1.12) удовлетворяет условию (10.1.5), поскольку (10.1.12) показывает, что $\partial_\mu f_\alpha$ обладает фурье-образом. Из (10.1.12) следует также, что $D_\alpha(\partial) f_\alpha = D_\alpha^\mu(\partial) \partial_\mu f_\alpha = 0$, так как $G_{\mu\nu}^{\alpha+} = -G_{\nu\mu}^{\alpha+}$. Итак, мы доказали, что уравнение непрерывности (10.1.17) представляет собой полное условие, определяющее топологическую особенность.

Вычисление величины $\partial_\mu f_\alpha$ начинают с решения уравнения непрерывности (10.1.17) с целью выбора подходящего $G_\alpha^{\mu\nu}$. Далее из соотношения (10.1.15) находят $G_{\mu\nu}^{\alpha\tau}$ в виде

$$G_{\mu\nu}^{\alpha\tau}(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} G_\alpha^{\lambda\rho}(x). \quad (10.1.20)$$

Тем самым определяется структура топологической особенности. Затем из (10.1.12) получают выражения для функций $\partial_\mu f_\alpha$.

Линейная топологическая особенность. Примерами протяженных объектов с линейными топологическими особенностями могут служить дислокации в кристаллах и вихри в сверхпроводниках. В общем случае линия особенностей может быть описана с помощью одного пространственного параметра σ и временного параметра τ . Таким образом, линейная особенность представляет собой набор линий, каждая из которых определяется величиной $y_\mu^a(\tau, \sigma)$ ($a = 1, 2, \dots$). Поскольку величины $G_\alpha^{\mu\nu}(x)$ не обращаются в нуль только в том случае, если x лежит на такой линии, мы можем записать

$$G_\alpha^{\mu\nu}(x) = \sum_a v^{\alpha a} \int d\tau \int d\sigma \frac{\partial [y_\mu^a, y_\nu^a]}{\partial [\tau, \sigma]} \delta^{(4)} [x - y^a(\tau, \sigma)], \quad (10.1.21)$$

где $v^{\alpha a}$ — некоторые константы, а $\partial [y_\mu, y_\nu] / \partial [\tau, \sigma]$ — якобиан

$$\frac{\partial [y_\mu, y_\nu]}{\partial [\tau, \sigma]} = \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau} \frac{\partial y_\nu}{\partial \sigma} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau}. \quad (10.1.22)$$

Из (10.1.21) следует

$$\partial_\mu G_\alpha^{\mu\nu}(x) = \sum_a v^{\alpha a} \int d\tau \int d\sigma \left(-\frac{\partial y_\nu^a}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial y_\nu^a}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \delta^{(4)} [y - y^a(\tau, \sigma)]. \quad (10.1.23)$$

Поскольку τ — временной параметр, выберем τ так, чтобы выполнялось равенство

$$y_0^a(\tau, \sigma) = \tau \text{ для всех } a. \quad (10.1.24)$$

Так как граничные значения временного параметра равны $\pm\infty$, первый член в круглых скобках можно заменить на $\partial^2 y_\nu^a / \partial \sigma \partial \tau$, воспользовавшись интегрированием по частям. Проводя дальнейшее интегрирование по частям относительно переменной σ , получаем

$$\partial_\mu G_\alpha^{\mu\nu}(x) = \sum_a v^{\alpha a} \int d\tau \frac{\partial y_\nu^a}{d\tau} \delta^{(4)} [x - y^a(\tau, \sigma)]_{\sigma=\sigma_1^a(\tau)}^{\sigma=\sigma_2^a(\tau)}, \quad (10.1.25)$$

где $\sigma_1^a(\tau)$ и $\sigma_2^a(\tau)$ — краевые точки линии $y^a(\tau, \sigma)$ в момент времени τ . Воспользовавшись снова равенством (10.1.24), находим

$$\partial_\mu G_\alpha^{\mu\nu}(x) = \sum_a v^{\alpha a} [\delta\{\mathbf{x} - \mathbf{y}^a[t_x, \sigma_1^a(t_x)]\} \dot{y}_\nu^a[t_x, \sigma_1^a(t_x)] - \delta\{\mathbf{x} - \mathbf{y}^a[t_x, \sigma_2^a(t_x)]\} \dot{y}_\nu^a[t_x, \sigma_2^a(t_x)]], \quad (10.1.26)$$

где $\dot{y}_\nu^a(\tau, \sigma) = (\partial/\partial\tau) y_\nu^a(\tau, \sigma)$. Из этого соотношения видно, что если линия имеет изолированную краевую точку внутри системы, то уравнение непрерывности (10.1.17) перестает выполняться. Поэтому совокупность рассматриваемых линий должна образовывать сетку, в которой отсутствуют краевые точки внутри системы. Если линии из некоторого набора $y^b(\tau, \sigma)$ ($b = 1, 2, \dots$) соединяются друг с другом в точке $y(\tau)$ (называемой вершиной или узлом), то из уравнения непрерывности (10.1.17) и из соотношения (10.1.26) следует

$$\sum_b (\pm v^{\alpha b}) = 0, \quad (10.1.27)$$

где знаки «+» и «-» отвечают соответственно первому и второму членам в правой части соотношения (10.1.26). И обратно, правая часть соотношения (10.1.25) обращается в нуль при всех α , если равенство (10.1.27) выполняется в каждой вершине. Следовательно, (10.1.27) представляет собой полное условие, определяющее линейную топологическую особенность. Константы $v^{\alpha b}$ задают «силу» особенностей.

Таким образом, полное условие, определяющее линейную особенность, состоит в том, что линия не должна иметь ни одной краевой точки. Отметим, что краевые точки на границе системы не являются краевыми точками особенности, так как сама граничная поверхность представляет собой двумерную топологическую особенность. Двумерные особенности мы рассмотрим ниже.

Если рассматривать статические протяженные объекты, то \mathbf{y}^a не зависит от τ (рис. 10.1):

$$\mathbf{y}^a = \mathbf{y}^a(\sigma). \quad (10.1.28)$$

При рассмотрении одной линии нам не требуется индекс a , и соотношение (10.1.21) принимает вид

$$G_\alpha^{\mu\nu}(x) = v^\alpha \int d\tau \int d\sigma \frac{\partial [y_\mu, y_\nu]}{\partial [\tau, \sigma]} \delta^{(4)}[x - y(\tau, \sigma)], \quad (10.1.29)$$

где $y_0 = \tau$.

Прямолинейная особенность вдоль третьей оси определяется соотношением

$$y_i(\sigma) = \sigma \delta_{i3} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (10.1.30)$$

Отсюда имеем

$$G_{\alpha}^{03}(x) = -G_{\alpha}^{30}(x) = v^{\alpha} \delta(x_1) \delta(x_2), \quad (10.1.31)$$

откуда получаем

$$G_{12}^{\alpha+}(x) = -G_{21}^{\alpha+}(x) = v^{\alpha} \delta(x_1) \delta(x_2). \quad (10.1.32)$$

Другие компоненты $G_{\alpha}^{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}^{\alpha+}$ обращаются в нуль. Из соотношения (10.1.12) в данном случае следует, что $f_{\alpha}(x)$ зависит только от x_1 и x_2 :

$$\partial_1 f_{\alpha}(x) = -v^{\alpha} \frac{1}{D_{\alpha}(\partial)} D_{\alpha}^2(\partial) \delta(x_1) \delta(x_2), \quad (10.1.33)$$

$$\partial_2 f_{\alpha}(x) = v^{\alpha} \frac{1}{D_{\alpha}(\partial)} D_{\alpha}^1(\partial) \delta(x_1) \delta(x_2), \quad (10.1.34)$$

$$\partial_3 f_{\alpha} = \partial_0 f_{\alpha} = 0. \quad (10.1.35)$$

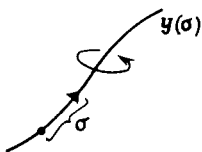


Рис. 10.1.

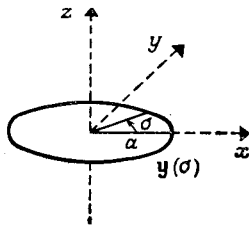


Рис. 10.2.

Кольцо (рис. 10.2) задается выражением

$$y(\sigma) = (a \cos \sigma, a \sin \sigma, 0), \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi, \quad (10.1.36)$$

где a — радиус кольца. В этом случае получаем

$$G_{\alpha}^{01}(x) = v^{\alpha} \delta[x_2 - (a^2 - x_1^2)^{1/2}] \delta(x_3), \quad (10.1.37)$$

$$G_{\alpha}^{02}(x) = v^{\alpha} \delta[x_1 - (a^2 - x_2^2)^{1/2}] \delta(x_3), \quad (10.1.38)$$

$$G_{\alpha}^{03}(x) = G_{\alpha}^{ij}(x) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (10.1.39)$$

В качестве примера зависящей от времени особенности рассмотрим движущуюся прямую линию. Пусть эта линия расположена вдоль третьей оси и движется со скоростью v в направлении x_1 . В этом случае имеем

$$y(\sigma, \tau) = (v\tau, 0, \sigma), \quad (10.1.40)$$

$$y_0(\sigma, \tau) = \tau, \quad (10.1.41)$$

откуда получаем

$$G_{\alpha}^{03}(x) = -G_{\alpha}^{30}(x) = v^{\alpha} \delta(x_1 - vt) \delta(x_2), \quad (10.1.42)$$

$$G_{\alpha}^{13}(x) = -G_{\alpha}^{31}(x) = v^{\alpha} v \delta(x_1 - vt) \delta(x_2). \quad (10.1.43)$$

Другие компоненты $G_{\alpha}^{\mu\nu}$ обращаются в нуль,

Замечательная черта поведения особенностей состоит в том, что оно определяется только уравнением непрерывности (10.1.17) и не зависит от вида уравнения для ϕ_α^0 . Например, даже в том случае, когда уравнения Гейзенберга и уравнения для ϕ_α^0 инвариантны относительно преобразований Лоренца, это отнюдь не вынуждает топологические особенности вести себя в соответствии с законами специальной теории относительности. Имеется широкий выбор различных особенностей. Выбор же свободных движений, определение которых дано в разд. 9.5, сильно ограничен.

Двумерная топологическая особенность. Межзеренные границы в кристаллах, доменные стенки в ферромагнетиках, джозефсоновские контакты в сверхпроводниках — все это примеры двумерных топологических особенностей. Существующие в отсутствие внешних воздействий граничные поверхности некоторых упорядоченных состояний (например, поверхность кристалла) также являются двумерными топологическими особенностями.

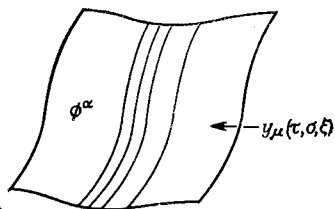


Рис. 10.3.

Мы видели, что допустимо существование любой линейной особенности, если она не имеет краевых точек. Поэтому можно сделать вывод, что допустима также любая поверхность, образованная линиями, у которых отсутствуют краевые точки. Если описывать поверхность двумя пространственными параметрами (σ, ξ) и одним временным параметром τ , то $G_\alpha^{\mu\nu}$ можно представить в виде

$$G_\alpha^{\mu\nu}(x) = \int d\tau \int d\sigma \int d\xi \frac{\partial [y_\mu, y_\nu, \phi^\alpha]}{\partial [\tau, \sigma, \xi]} \delta^{(4)}(x - y), \quad (10.1.44)$$

где $y_\mu(\tau, \sigma, \xi)$ описывает поверхность, а ϕ^α — некоторые функции от τ, σ и ξ (рис. 10.3). Мы можем выбрать y_0 следующим образом:

$$y_0(\tau, \sigma, \xi) = \tau. \quad (10.1.45)$$

Если мы рассматриваем статическую двумерную особенность, у и ϕ^α зависят только от σ и ξ :

$$y = y(\sigma, \xi), \quad \phi^\alpha = \phi^\alpha(\sigma, \xi). \quad (10.1.46)$$

В этом случае из соотношений (10.1.44) и (10.1.45) получаем

$$G_\alpha^{0k}(x) = -G_\alpha^{k0}(x) = \int d\sigma \int d\xi \frac{\partial [y_k, \phi^\alpha]}{\partial [\sigma, \xi]} \delta(x - y). \quad (10.1.47)$$

Остальные компоненты $G_\alpha^{\mu\nu}$ обращаются в нуль.

Если статическая особенность расположена в плоскости (1, 2), то мы имеем

$$y_1(\sigma, \xi) = \sigma, \quad y_2(\sigma, \xi) = \xi, \quad y_3 = 0. \quad (10.1.48)$$

При этом из (10.1.47) находим

$$G_{\alpha}^{01}(x) = -G_{\alpha}^{10}(x) = \partial_2 \phi^{\alpha}(x_1, x_2) \delta(x_3), \quad (10.1.49)$$

$$G_{\alpha}^{02}(x) = -G_{\alpha}^{20}(x) = -\partial_1 \phi^{\alpha}(x_1, x_2) \delta(x_3). \quad (10.1.50)$$

Остальные компоненты обращаются в нуль.

Если особенность расположена в плоскости (1, 2), а временная зависимость этой особенности возникает только за счет «силы» $\phi^{\alpha}(t, x_1, x_2)$, то из (10.1.44) получаем

$$G_{\alpha}^{01}(x) = -G_{\alpha}^{10}(x) = \partial_2 \phi^{\alpha}(t, x_1, x_2) \delta(x_3), \quad (10.1.51)$$

$$G_{\alpha}^{02}(x) = -G_{\alpha}^{20}(x) = -\partial_1 \phi^{\alpha}(t, x_1, x_2) \delta(x_3), \quad (10.1.52)$$

$$G_{\alpha}^{12}(x) = -G_{\alpha}^{21}(x) = -\frac{\partial}{\partial t} \phi^{\alpha}(t, x_1, x_2) \delta(x_3). \quad (10.1.53)$$

Остальные компоненты обращаются в нуль.

В качестве примера замкнутой двумерной особенности рассмотрим статическую сферическую поверхность радиуса a . Тогда

$$y(\sigma, \xi) = (a \sin \sigma \cos \xi, a \sin \sigma \sin \xi, a \cos \sigma), \quad (10.1.54)$$

$$\text{где} \quad 0 \leq \sigma \leq \pi, \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi. \quad (10.1.55)$$

Величины $G_{\alpha}^{\mu\nu}$ находятся из соотношения (10.1.44).

Топологическое квантовое число, квантование потока для вихрей и вектор Бюргера дислокаций в кристаллах. С помощью формулы (10.1.13) мы ввели топологические заряды N_T^{α} . Часто случается, что некоторые из этих топологических зарядов могут принимать определенные дискретные значения. Если это имеет место, то константы N_T^{α} называются топологическими квантовыми числами.

Чтобы увидеть, как возникают топологические квантовые числа, обозначим через $O_H(x; \varphi_{\alpha}^0, \partial\varphi_{\alpha}^0, \dots)$ динамические отображения гейзенберговских операторов, описывающих наблюдаемые величины. Здесь многоточие отвечает свободным физическим полям, отличным от бозонов φ_{α}^0 с бесщелевым энергетическим спектром, а $\partial\varphi_{\alpha}^0$ обозначает производные от φ_{α}^0 . Предположим, что O_H инвариантно относительно преобразования $\varphi_{\alpha}^0 \rightarrow \varphi_{\alpha}^0 + n^{\alpha} c_{\alpha}$:

$$O_H(x; \varphi_{\alpha}^0, \partial\varphi_{\alpha}^0, \dots) = O_H(x; \varphi_{\alpha}^0 + n^{\alpha} c_{\alpha}, \partial\varphi_{\alpha}^0, \dots). \quad (10.1.56)$$

Здесь c_α — некоторые заданные константы, а n^α — целые числа. Бозонное преобразование превращает O_H в O_H^f :

$$O_H^f = O_H(x; \varphi_\alpha^0 + f_\alpha, \partial\varphi_\alpha^0 + \partial f_\alpha, \dots). \quad (10.1.57)$$

Поскольку ∂f_α — однозначная функция, сосредоточим внимание только на f_α , не обращая внимание на производные.

Рассмотрим теперь замкнутый контур. В соответствии с соотношением (10.1.56) для однозначности определения наблюдаемых величин O_H^f требуется, чтобы изменение f_α вдоль замкнутого контура было равно $n^\alpha c_\alpha$. Поэтому из (10.1.13) следует

$$N_T^\alpha = n^\alpha c_\alpha, \quad (10.1.58)$$

а это означает, что N_T^α — топологическое квантовое число. Данное рассмотрение показывает, каким образом топологическое квантовое число связано со структурой динамического отображения наблюдаемых, которая жестко контролируется свойствами инвариантности исходного лагранжиана.

Обратимся для примера к фазово-инвариантной скалярной модели, рассмотренной в разд. 7.2, или к квантовой электродинамике, которой посвящена гл. 8. В этих случаях динамическое отображение ψ (скалярного поля в фазово-инвариантной модели, описанной в разд. 7.2, или электронного поля в случае квантовой электродинамики) имеет вид

$$\psi(x) = : \exp[i\chi^0(x)/\eta] \hat{\psi}[\partial\chi^0, \dots] :. \quad (10.1.59)$$

Здесь χ^0 — голдстоуновский бозон, а η — константа. Рассматривается следующее бозонное преобразование:

$$\chi^0(x) \rightarrow \chi^0(x) + \eta f(x). \quad (10.1.60)$$

Поскольку χ^0/η представляет собой фазу $\psi(x)$, из однозначности $\psi(x)$ следует наличие топологического квантового числа

$$N_T = \int ds^\mu \cdot \partial_\mu f = 2\pi n \quad (10.1.61)$$

в случае фазово-инвариантной скалярной модели. Здесь n — целое число. В случае сверхпроводимости следует учесть тот факт, что все гейзенберговские операторы, отвечающие наблюдаемым величинам, содержат четные степени электронного поля ψ , поскольку электронное поле является фермионным. Поэтому однозначность наблюдаемых приводит к условию

$$N_T = \int ds^\mu \partial_\mu f = \pi n. \quad (10.1.62)$$

Как показано в гл. 11, магнитный поток, связанный с вихрями в сверхпроводниках, пропорционален N_T . Следовательно, условие (10.1.62) приводит к квантованию потока.

В гл. 8 мы выяснили, что в случае нормальных проводников фазовое преобразование $\psi \rightarrow \exp(i\theta)\psi$ обусловлено комбинацией двух преобразований

$$\chi^0(x) \rightarrow \chi^0(x) + \eta\theta_1, \quad (10.1.63a)$$

$$\varphi^0(x) \rightarrow \exp[i(\theta - \theta_1)]\varphi^0. \quad (10.1.63b)$$

Поскольку (10.1.63a) не является единственным источником фазового преобразования, для однозначности наблюдаемых не требуется выполнения равенства (10.1.62). Иными словами, хотя однозначность наблюдаемых приводит к соотношению $N_T + \theta_1 = \pi n$, величина θ_1 может быть подобрана произвольным образом. Поэтому в нормальных металлах отсутствует закон квантования потока.

Другой интересный пример топологического квантового числа дают дислокации в кристаллах. Как видно из соотношения (7.7.80), динамическое отображение $O_H(x)$ имеет вид

$$O_H(x) = : \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda} [x + X^0(x)] \hat{O}_{\lambda}(x; \partial X^0, \dots) :. \quad (10.1.64)$$

Здесь X^0 — поле фононов, а функции $\varphi_{\lambda}(x)$ являются элементами полной ортонормированной системы периодических функций:

$$\varphi_{\lambda}(x) = \varphi_{\lambda}(x + a_i), \quad (10.1.65)$$

где a_i ($i = 1, 2, 3$) — базисные векторы кристаллической решетки. Бозонное преобразование для фононов имеет вид

$$[X^0(x) \rightarrow X^0(x) + f(x)]. \quad (10.1.66)$$

Таким образом, из (10.1.64) и (10.1.65) следует, что для однозначности $O_H(x)$ требуется выполнение условия

$$N_T = \int ds^{\mu} \partial_{\mu} f \doteq \sum_i n_i a_i, \quad (10.1.67)$$

где n_i — целые числа. Отсюда видим, что три компоненты вектора N_T представляют собой топологические квантовые числа [7]. Вектор N_T называется вектором Бюргерса [6].

В общем случае протяженные объекты, обладающие определенными квантовыми числами, термодинамически устойчивы, поскольку топологические заряды не могут непрерывным образом обращаться в нуль. Именно по этой причине в сверхпроводниках никогда не могут самопроизвольно возникать прямолинейные вихри; они являются результатом проникновения в систему через граничную поверхность внешнего магнитного потока. С другой стороны, в нормальных металлах устойчивых вихрей не бывает.

10.2. Протяженные объекты в кристаллах

В предыдущем разделе описан общий формализм, применяемый для рассмотрения протяженных объектов с топологическими особенностями. В данном разделе мы проиллюстрируем этот общий подход на примере кристалла. Мы кратко покажем, каким образом на основе микроскопической теории может быть построена теория, описывающая дислокации и другие протяженные объекты в кристаллах [7].

Уравнение для фононов. В разд. 7.7 мы нашли трехкомпонентное фононное поле $\mathbf{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, X_3^0)$, удовлетворяющее уравнению (7.7.96):

$$\sum_j \Lambda_{ij}(\partial) X_j^0 = 0; \quad (10.2.1)$$

здесь
$$\Lambda_{ij}(\partial) = -\rho_{ij}(\nabla) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{l,m} C_{ij}^{lm}(\nabla) \nabla_l \nabla_m, \quad (10.2.2)$$

причем использовано соотношение (7.7.100). Мы можем представить (10.2.2) в виде

$$\Lambda_{ij}(\partial) = \sum_{\mu,\nu} C_{ij}^{\mu\nu}(\nabla) \partial_\mu \partial_\nu, \quad (10.2.3)$$

где $C_{ij}^{\mu\nu}$ при $\mu = 0$ или $\nu = 0$ определяется следующим образом:

$$C_{ij}^{00}(\nabla) = -\rho_{ij}(\nabla), \quad (10.2.4a)$$

$$C_{ij}^{l0}(\nabla) = C_{ij}^{0l}(\nabla) = 0. \quad (10.2.4b)$$

Сингулярное бозонное преобразование. Если функции $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$), определяющие бозонное преобразование, обладают некоторой топологической особенностью, то из формулы (10.1.12) следует

$$\partial_\mu f_i(x) = \sum_{k,j} \sum_{\lambda,\rho} \int d^4x' \Delta_{ik}(x-x') C_{kj}^{\lambda\rho}(\nabla') \partial'_\lambda G_{\rho\mu}^{j+}(x'), \quad (10.2.5)$$

где $\Delta_{ik}(x)$ — функция Грина, удовлетворяющая условию

$$\sum_j \Lambda_{ij}(\partial) \Delta_{jk}(x) = \delta_{ik} \delta^{(4)}(x). \quad (10.2.6)$$

Динамическое отображение любого гейзенберговского оператора имеет вид (7.7.80)

$$O_H(x) = : \sum_\lambda \varphi_\lambda[\mathbf{x} + \mathbf{X}^0(x)] \hat{O}_\lambda(x; \partial\mathbf{X}, \varphi^0) :. \quad (10.2.7)$$

Протяженные объекты возникают за счет конденсации фононов,

описываемой бозонным преобразованием

$$X_i^0(x) \rightarrow X_i^0(x) + f_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad (10.2.8)$$

в котором неоператорные функции $f_i(x)$ должны удовлетворять уравнению для фононов

$$\sum_j \Lambda_{ij}(\partial) f_j(x) = 0. \quad (10.2.9)$$

В результате бозонного преобразования $O_H(x)$ заменяется на

$$O_H^f(x) = : \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda} [\mathbf{x} + \mathbf{X}^0(x) + \mathbf{f}(x)] \hat{O}_{\lambda}(x; \partial \mathbf{X}^0 + \partial \mathbf{f}, \varphi^0) :. \quad (10.2.10)$$

В частности, для плотности импульса $\mathbf{P}(x)$, тензора напряжений $T_{ij}(x)$ и плотности числа молекул $n(x)$ имеем соответственно

$$P_i^f(x) = - \sum_j \rho_{ij}(\nabla) [\dot{X}_j^0(x) + \dot{f}_j(x)] + \\ + \sum_{\lambda \neq -1} \sum_{i, k} \varphi_{\lambda}(\mathbf{x}) \gamma_{i\lambda j}(\nabla) \eta_{jk}(\nabla) [X_k^0(x) + f_k(x)] + \dots, \quad (10.2.11)$$

$$T_{ij}^f(x) = \sum_{l, m} C_{il}^{jm}(\nabla) \nabla_m [X_l^0(x) + f_l(x)] + \\ + \sum_{\lambda \neq -1} \sum_l \varphi_{\lambda}(\mathbf{x}) \Gamma_{i\lambda l}^j(\nabla) [X_l^0(x) + f_l(x)] + \dots, \quad (10.2.12)$$

$$n^f(x) = v(\mathbf{x}) - \frac{1}{M} \sum_{i, j} \nabla_i \rho_{ij}(\nabla) [X_j^0(x) + f_j(x)] + \\ + \sum_{\lambda \neq -1} \sum_{i, j} \varphi_{\lambda}(\mathbf{x}) \gamma_{\lambda i}(\nabla) \eta_{ij}(\nabla) [X_j^0(x) + f_j(x)] + \dots. \quad (10.2.13)$$

При выводе этих результатов мы использовали соотношения (7.7.92), (7.7.99) и (7.7.102) соответственно.

Плотность гамильтониана имеет вид

$$h^f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i, j} (\dot{X}_i^0 + \dot{f}_i) \rho_{ij}(\nabla) (\dot{X}_j^0 + \dot{f}_j) + \\ + \sum_{i, j} \sum_{l, m} \frac{1}{2} [\nabla_l (X_i^0 + f_i)] C_{ij}^{lm}(\nabla) [\nabla_m (X_j^0 + f_j)] + \dots. \quad (10.2.14)$$

Как видно из выражения (7.7.108), члены более высокого порядка, обозначенные многоточием в (10.2.14), не вносят вклада в гамильтониан при $\mathbf{f} = 0$. Но, как выяснено в разд. 9.3, вклад этих членов более высокого порядка не обращается в нуль, если мы осуществляем бозонное преобразование с функцией f , имеющей особенность.

Изотропное, длинноволновое и линейное приближение. Поскольку в этом разделе мы хотим дать краткое описание метода

рассмотрения протяженных объектов в кристаллах, нами используется линейное и изотропное приближение. Другими словами, мы полагаем, что $\rho_{ij}(\nabla) \approx \rho(\nabla) \delta_{ij}$, и не учитываем члены, обозначенные многоточием в выражениях (10.2.11)–(10.2.14), а также члены, содержащие $\varphi_\lambda(\mathbf{x})$ с $\lambda \neq -1$. Кроме того, мы пользуемся длинноволновым (соответствующим малым значениям импульса) приближением, в рамках которого $\rho_{ij}(\nabla)$ и $C_{ij}^{lm}(\nabla)$ заменяются на $\rho_{ij}(0)$ и $C_{ij}^{lm}(0)$. Поэтому выражение (10.2.2) принимает вид

$$\Lambda_{ij}(\partial) \approx -\rho_0 \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{l,m} C_{ij}^{lm}(0) \nabla_l \nabla_m, \quad (10.2.15)$$

где $\rho_0 \equiv \rho(0)$. При этом формулы (10.2.11), (10.2.12) и (10.2.13) записываются в виде

$$P_i^f(x) \approx -\rho_0 [\dot{X}_i^0(x) + \dot{f}_i(x)], \quad (10.2.16)$$

$$T_{ij}^f(x) \approx \sum_{l,m} C_{il}^{jm}(0) \nabla_m [X_l^0(x) + f_l(x)], \quad (10.2.17)$$

$$n^f(x) \approx v(\mathbf{x}) - \frac{1}{M} \rho_0 \nabla \cdot [\mathbf{X}^0(x) + \mathbf{f}(x)]. \quad (10.2.18)$$

В этом приближении плотность гамильтониана $h^f(x)$ имеет вид

$$h^f(x) \approx \frac{1}{2} \rho_0 [\dot{\mathbf{X}}^0(x) + \dot{\mathbf{f}}(x)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{l,m} C_{ij}^{lm}(0) [\nabla_l (X_i^0 + f_i)] [\nabla_m (X_j^0 + f_j)]. \quad (10.2.19)$$

Если используются соотношения (7.7.106), то $C_{ij}^{lm}(0)$ можно выразить через два параметра λ и μ :

$$C_{ij}^{lm}(0) = \mu (\delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{jl}) + \lambda \delta_{il} \delta_{jm}. \quad (10.2.20)$$

Константа ρ_0 называется плотностью, а λ и μ — коэффициент Ламе и модуль сдвига соответственно [6].

Соотношение (10.2.15) принимает теперь вид

$$\Lambda_{ij}(p) = \rho_0 p_0^2 \delta_{ij} - \mu p^2 \delta_{ij} - (\lambda + \mu) p_i p_j, \quad (10.2.21)$$

где $\Lambda_{ij}(p)$ определяется соотношением $\Lambda_{ij}(\partial) \exp(ipx) = = \Lambda_{ij}(p) \exp(ipx)$. Мы можем переписать (10.2.21) в виде

$$\Lambda_{ij}(p) = \rho_0 (p_0^2 - v_i^2 p^2) \left(\delta_{ij} - \frac{1}{p^2} p_i p_j \right) + \rho_0 (p_0^2 - v_j^2 p^2) \frac{1}{p^2} p_i p_j, \quad (10.2.22)$$

где

$$v_t = (\mu/\rho_0)^{1/2}, \quad (10.2.23a)$$

$$v_l = [(\lambda + 2\mu)/\rho_0]^{1/2}. \quad (10.2.23б)$$

Из формулы (10.2.22) видно, что энергии поперечного и продольного фононов равны соответственно $\omega_t(p) = v_t |p|$ и $\omega_l(p) = v_l |p|$.

Функция Грина в импульсном пространстве $\Delta_{ij}(p)$ определяется выражением

$$\Delta_{ij}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{i p x} \Delta_{ij}(p), \quad (10.2.24)$$

и равенство (10.2.6) принимает вид

$$\sum_j \Delta_{ij}(p) \Delta_{jk}(p) = \delta_{ik}. \quad (10.2.25)$$

Из (10.2.22) находим

$$\Delta_{ij}(p) = \frac{1}{\rho_0 (p_0^2 - v_l^2 p^2)} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{p^2} p_i p_j \right) + \frac{1}{\rho_0 (p_0^2 - v_t^2 p^2)} \frac{1}{p^2} p_i p_j = \quad (10.2.26)$$

$$= \frac{1}{\rho_0 (p_0^2 - v_l^2 p^2) (p_0^2 - v_t^2 p^2)} [(p_0^2 - v_l^2 p^2) \delta_{ij} + (v_l^2 - v_t^2) p_i p_j]. \quad (10.2.27)$$

В статических случаях удобно работать с функцией Грина в координатном пространстве

$$\Delta_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) [\Delta_{ij}(p)]_{p_0=0} = \quad (10.2.28)$$

$$= -\frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{8\pi r} \delta_{ij} - \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{8\pi r^3} x_i x_j, \quad (10.2.29)$$

где $r = |\mathbf{x}|$. Из (10.2.5) получаем

$$\begin{aligned} \partial_i f_i(\mathbf{x}) &= \sum_{m,j} \int \frac{d^3 x'}{4\pi} \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \right. \\ &\times \{ (x_j - x'_j) \delta_{im} + (x_m - x'_m) \delta_{ij} - (x_i - x'_i) \delta_{mj} \} + \\ &+ 3 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (x_i - x'_i) (x_m - x'_m) (x_j - x'_j) \Big) G_{jl}^{m+}(x'). \end{aligned} \quad (10.2.30)$$

Из этого соотношения определяется $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ для статических объектов.

Дислокации. Рассмотрим теперь дислокацию, представляющую собой объект, содержащий линейную особенность. Функции $G_i^{\mu\nu}(\mathbf{x})$ даются формулой (10.1.29), где $\alpha = i$, $y_0 = \tau$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\sigma)$:

$$G_i^{0k}(\mathbf{x}) = -G_i^{k0}(\mathbf{x}) = v^{(i)} \int d\sigma \frac{dy_k}{d\sigma} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (10.2.31)$$

Остальные компоненты $G_i^{\mu\nu}$ обращаются в нуль. Топологические заряды (вектор Бюргера) определяются соотношением (10.1.14):

$$N_T^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{k, l} \int_S dS_{kl} G_{kl}^{i+}(\mathbf{x}) = \quad (10.2.32)$$

$$= \sum_k \int_S dS_k G_i^{0k}(\mathbf{x}), \quad (10.2.33)$$

где $dS_k = (1/2) \varepsilon_{kij} dS_{ij}$. Можно осуществить такую параметризацию пространственных координат $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, чтобы линия, определяемая равенством $\xi_2 = \xi_3 = 0$, совпадала с кривой $y(\sigma)$. Тогда имеем

$$\frac{dy_k}{d\sigma} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial [\xi_1, \xi_2, \xi_3]}{\partial [x_1, x_2, x_3]} \delta(\xi_1 - \sigma) \delta(\xi_2) \delta(\xi_3). \quad (10.2.34)$$

В этом случае из (10.2.31) следует

$$G_i^{0k}(\mathbf{x}) = v^{(i)} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial [\xi_1, \xi_2, \xi_3]}{\partial [x_1, x_2, x_3]} \delta(\xi_2) \delta(\xi_3). \quad (10.2.35)$$

Без потери общности в качестве поверхности, по которой производится интегрирование, можно выбрать плоскость (ξ_2, ξ_3) :

$$dS_k = \frac{1}{2} \frac{\partial [x_i, x_j]}{\partial [\xi_2, \xi_3]} \varepsilon_{kij} d\xi_2 d\xi_3. \quad (10.2.36)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial [x_i, x_j]}{\partial [\xi_2, \xi_3]} = \frac{\partial [x_1, x_2, x_3]}{\partial [\xi_1, \xi_2, \xi_3]}, \quad (10.2.37)$$

получаем

$$N_T^{(i)} = v^{(i)} \int_S d\xi_2 d\xi_3 \delta(\xi_2) \delta(\xi_3) = v^{(i)}. \quad (10.2.38)$$

Следовательно, вектор Бюргера имеет вид $\mathbf{v} = (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$. В разд. 10.1 мы видели, что этот вектор обладает дискретным спектром (существуют топологические квантовые числа).

Обозначим через $\boldsymbol{\eta}(\sigma)$ единичный вектор, направленный по касательной к кривой $y(\sigma)$. Если в некоторой области изменения параметра σ справедливо равенство

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}(\sigma) = 0, \quad (10.2.39)$$

то в этой области существует краевая дислокация (рис. 10.4), а равенства

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}(\sigma) = \pm |\mathbf{v}| \quad (10.2.40)$$

отвечают соответственно правовинтовой и левовинтовой дислокациям (рис. 10.5).

В качестве примера рассмотрим теперь прямолинейную особенность, расположенную вдоль третьей оси, $y_i = \sigma \delta_{i3}$. В этом случае, согласно формуле (10.1.32), имеем

$$G_{12}^{i+}(\mathbf{x}) = -G_{21}^{i+}(\mathbf{x}) = v^{(i)} \delta(x_1) \delta(x_2). \quad (10.2.41)$$

Остальные компоненты обращаются в нуль. Винтовая дислокация определяется условием $v^{(1)} = v^{(2)} = 0$. В этом случае выражение (10.2.30) принимает вид

$$\partial_1 f_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} v^{(3)} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \partial_{i3}, \quad (10.2.42a)$$

$$\partial_2 f_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} v^{(3)} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \delta_{i3}, \quad (10.2.42b)$$

$$\partial_3 f_i(\mathbf{x}) = 0. \quad (10.2.42b)$$



Рис. 10.4.

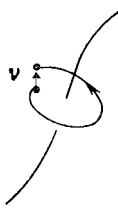


Рис. 10.5.

Таким образом, вне особой линии $x_1 = x_2 = 0$ поля смещений имеют вид

$$f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = 0, \quad f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} v^{(3)} \operatorname{arctg}(x_2/x_1). \quad (10.2.43)$$

Несущественные константы интегрирования выбраны здесь так, чтобы получились простые выражения для $f_i(\mathbf{x})$. В случае краевой дислокации ($v^{(2)} = v^{(3)} = 0$) из выражения (10.2.30) получаем

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} v^{(1)} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right], \quad (10.2.44a)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} v^{(1)} \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \ln(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right), \quad (10.2.44b)$$

$$f_3(\mathbf{x}) = 0. \quad (10.2.44b)$$

Границы зерен. Обратим теперь наше внимание на двумерные особенности. Обычные материалы представляют собой не монокристаллы, а совокупность малых кристаллических зерен. Граничная поверхность между двумя монокристаллическими зернами называется межзеренной границей. Межзеренная граница — это макроскопический объект (протяженный объект), возникающий за счет конденсации фононов.

Величина $G_i^{\mu\nu}$ для двумерных особенностей дается выражением (10.1.44) с заменой α на i . Предположим, что «сила» особенности постоянна вдоль поверхности. Другими словами, мы предполагаем, что

$$\phi^i(y) = \sum_{\lambda} v^{i\lambda} y_{\lambda}(\tau, \sigma, \xi). \quad (10.2.45)$$

Кроме того, ограничим наше рассмотрение статическим случаем

$$y_0 = \tau, \quad y = y(\sigma, \xi), \quad v^{i0} = 0. \quad (10.2.46)$$

Тогда не обращающиеся в нуль компоненты $G_i^{\mu\nu}$ имеют вид

$$G_i^{0k}(\mathbf{x}) = -G_i^{k0}(\mathbf{x}) = \sum_l v^{il} \int d\sigma \int d\xi \frac{\partial [y_k, y_l]}{\partial [\sigma, \xi]} \delta(\mathbf{x} - y). \quad (10.2.47)$$

В каждый момент времени топологическая особенность представляет собой поверхность $y(\sigma, \xi)$. Как будет показано ниже, матрица v^{il} связана с поворотами областей, разделенных этой поверхностью. Введем такую параметризацию пространственных координат $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, чтобы поверхность, задаваемая равенством $\xi_3 = 0$, совпадала с поверхностью $y(\sigma, \xi)$. Используя соотношение

$$\delta(\mathbf{x} - y) = \frac{\partial [\xi_1, \xi_2, \xi_3]}{\partial [x_1, x_2, x_3]} \delta(\xi_1 - \sigma) \delta(\xi_2 - \xi) \delta(\xi_3), \quad (10.2.48)$$

мы можем переписать формулу (10.2.47) в виде

$$G_i^{0k}(\mathbf{x}) = \sum_l v^{il} \frac{\partial [x_k, x_l]}{\partial [\xi_1, \xi_2]} \frac{\partial [\xi_1, \xi_2, \xi_3]}{\partial [x_1, x_2, x_3]} \delta(\xi_3). \quad (10.2.49)$$

Из (10.1.13) находим топологические заряды

$$N_T^i = \int_c dS^{\mu} \partial_{\mu} f_i(\mathbf{x}) = \quad (10.2.50)$$

$$= \frac{1}{2} \int_S dS^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^{+\alpha}(\mathbf{x}) = \quad (10.2.51)$$

$$= \int_S dS_k G_i^{0k}(\mathbf{x}), \quad (10.2.52)$$

где dS_k определяется так же, как в формуле (10.2.33). В качестве контура c выберем замкнутый контур, проходящий под поверхностью ($\xi_3 = 0_-$) от точки $Q(\xi_1^i, \xi_2^i, 0)$ к точке $P(\xi_1^i, \xi_2^i, 0)$, а затем возвращающийся над поверхностью ($\xi_3 = 0_+$) из P в Q . Вектор N_T представляет собой сумму векторов Бюргерса, отвечающих ин-

тервалу PQ . Поскольку S — площадь, охватываемая контуром s , имеем

$$dS_h = \frac{1}{2} \varepsilon_{hij} \left(\frac{\partial [x_i, x_j]}{\partial [\xi_1, \xi_3]} d\xi_1 d\xi_3 + \frac{\partial [x_i, x_j]}{\partial [\xi_2, \xi_3]} d\xi_2 d\xi_3 \right). \quad (10.2.53)$$

Используя соотношения (10.2.49), (10.2.52) и (10.2.53), получаем

$$\begin{aligned} N_T^i &= \sum_l v^{il} \int_S \left(\frac{\partial x_l}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial x_l}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right) d\xi_3 \delta(\xi_3) = \\ &= \sum_l v^{il} \int_Q^P \left(\frac{\partial x_l}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial x_l}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right) = \sum_l v^{il} V_l, \end{aligned} \quad (10.2.54)$$

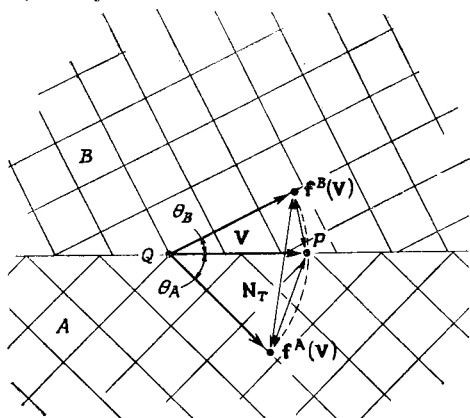


Рис. 10.6.

где $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ — вектор, направленный из точки Q в точку P :

$$V_l = x_l(\xi_1^f, \xi_2^f, 0) - x_l(\xi_1^i, \xi_2^i, 0). \quad (10.2.55)$$

Матрица v^{il} определяет взаимную разориентацию граничащих между собой зерен. Предположим, что зерна A и B повернуты на $\omega_A = \theta_A \mathbf{a}^A$ и $\omega_B = \theta_B \mathbf{a}^B$ соответственно относительно кристалла, принятого за систему отсчета. Здесь \mathbf{a}^α ($\alpha = A, B$) — единичный вектор, который задает направление оси поворота, а θ_α ($\alpha = A, B$) — угол поворота вокруг оси \mathbf{a}^α . Введем векторы \mathbf{V}_\pm : вектор \mathbf{V}_+ направлен из точки Q на поверхности в точку P_+ внутри зерна B , а вектор \mathbf{V}_- соединяет Q с точкой P_- внутри зерна A (рис. 10.6). Смещение вектора \mathbf{V}_+ , обусловленное поворотом ω_B зерна B , равно $\mathbf{f}^B(\mathbf{V}_+)$, а смещение вектора \mathbf{V}_- при повороте ω_A зерна A равно $\mathbf{f}^A(\mathbf{V}_-)$. Следовательно, в пределе $\mathbf{V}_+ = \mathbf{V}_- = \mathbf{V}$ имеем

$$\mathbf{f}^A(\mathbf{V}) = [\exp(i\theta_A \mathbf{a}^A \cdot \mathbf{J}) - 1] \mathbf{V}, \quad (10.2.56a)$$

$$\mathbf{f}^B(\mathbf{V}) = [\exp(i\theta_B \mathbf{a}^B \cdot \mathbf{J}) - 1] \mathbf{V}, \quad (10.2.56b)$$

где J_i — генератор поворотов вокруг оси x_i . Если замкнутый контур c в (10.2.50) есть QP_+P_-Q , то в результате интегрирования по нему получаем $f_i^B(\mathbf{V}_+) - f_i^A(\mathbf{V}_-)$. Затем, снова рассматривая случай $\mathbf{V}_+ = \mathbf{V}_- = \mathbf{V}$, находим

$$N_T^i = f_i^B(\mathbf{V}) - f_i^A(\mathbf{V}). \quad (10.2.57)$$

Используя выражения (10.2.54) и (10.2.56), получаем

$$v^{ij} = [\exp(i\theta_B \mathbf{a}^B \cdot \mathbf{J}) - \exp(i\theta_A \mathbf{a}^A \cdot \mathbf{J})]_{ij}. \quad (10.2.58)$$

Тогда по формуле (10.2.54) для вектора Бюргерса находим

$$\begin{aligned} N_T = \mathbf{a}^B (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^B) - \mathbf{a}^A (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^A) + [\mathbf{V} - \mathbf{a}^B (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^B)] \cos \theta_B - \\ - [\mathbf{V} - \mathbf{a}^A (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^A)] \cos \theta_A + \sin \theta_B (\mathbf{V} \times \mathbf{a}^B) - \sin \theta_A (\mathbf{V} \times \mathbf{a}^A). \end{aligned} \quad (10.2.59)$$

Рассмотрим случай $\mathbf{a}^A = -\mathbf{a}^B = \mathbf{d}$. В этом случае кристалл, принимаемый за систему отсчета, всегда можно ориентировать таким образом, что $\theta_A = \theta_B = (1/2)\theta$; поэтому (10.2.59) принимает вид

$$N_T = 2(\mathbf{V} \times \mathbf{d}) \sin(1/2)\theta. \quad (10.2.60)$$

Это формула Франка для большеугловых границ зерен. Если вектор \mathbf{d} лежит в плоскости межзеренной границы, то такая граница называется границей наклона. Если же вектор \mathbf{d} перпендикулярен граничной поверхности, то она называется границей кручения. В общем случае граница имеет смешанный характер, и существуют составляющие, отвечающие как наклону, так и кручению.

Здесь уместно сделать следующие два замечания. Во-первых, нужно отметить, что при построении матрицы v^{ij} , определяющей взаимную разориентацию зерен, совсем не имеется в виду, что поля смещений в зернах A и B отличаются только ориентацией. В общем случае поля смещений f_i по обе стороны границы включают не только вращение, но и растяжение (или сжатие). Во-вторых, в ходе рассмотрения, начиная с формулы (10.2.56) и кончая формулой (10.2.60), используется предположение об отсутствии на граничной поверхности растяжения (или сжатия). Мы подчеркиваем здесь слова «на граничной поверхности», поскольку допустимо растяжение (или сжатие) внутри каждого из зерен. Мы вернемся к этому вопросу ниже, когда будут в явном виде выписаны выражения для поля смещений в обоих зернах.

Так как мы рассматриваем двумерные особенности, образованные линиями, не имеющими концов, удовлетворяется уравнение непрерывности $\partial_\mu G_i^{\mu\nu} = 0$. Рассмотрим теперь совокупность межзеренных границ ($a = 1, 2, \dots, n$), описываемую формулой

$$G_i^{\mu\nu}(x) = \sum_{a,\lambda} v_a^{i\lambda} \int d\tau \int d\sigma \int d\xi \frac{\partial [y_\mu^a, y_\nu^a, y_\lambda^a]}{\partial [\tau, \sigma_1, \sigma_2]} \delta^{(4)}(x - y^{(a)}). \quad (10.2.61)$$

Ограничимся статическим случаем. Линия, общая для более чем двух границ зерен, называется линией узлов. Рассмотрим линию узлов, описываемую функцией $y(\zeta)$. Границы, пересекающиеся по линии $y(\zeta)$, мы будем обозначать через y^b ($b = 1, 2, \dots, m$). Поскольку уравнение непрерывности приводит к условию (10.1.27) в каждой узловой точке линейной особенности, мы приходим к условию

$$\sum_a \sum_l (\pm) v_a^{il} n_l(\zeta) = 0, \quad (10.2.62)$$

где $\mathbf{n}(\zeta) = \partial \mathbf{y}(\zeta) / \partial \zeta$ — вектор, направленный по касательной к линии узлов $\mathbf{y}(\zeta)$. Соотношение (10.2.62) носит название соотношения непрерывности для границ зерен. Более подробный вывод условия (10.2.62) можно найти в работе [7]. В качестве частного случая рассмотрим ситуацию, когда $m = 1$, т. е. когда имеется только одна межзеренная граница. Заметим, что условие (10.2.62) выполняется, если одна из компонент вектора \mathbf{n} (например, n_3) не обращается в нуль, а v_i^{i3} ($i = 1, 2, 3$) равны нулю. Таким образом, межзеренная граница может оканчиваться внутри кристалла. Этот случай представляет собой пример дисклинации (поворотной дислокации) [6].

Рассмотрим теперь в качестве примера плоскую границу зерен, определяемую равенствами

$$y_1(\sigma, \xi) = \sigma, \quad y_2(\sigma, \xi) = \xi, \quad y_3(\sigma, \xi) = 0. \quad (10.2.63)$$

Согласно (10.2.47), не равные нулю компоненты $G_i^{\mu\nu}$ имеют вид

$$G_i^{01}(\mathbf{x}) = -G_i^{10}(\mathbf{x}) = v^{i2} \delta(x_3), \quad (10.2.64a)$$

$$G_i^{02}(\mathbf{x}) = -G_i^{20}(\mathbf{x}) = -v^{i1} \delta(x_3). \quad (10.2.64b)$$

Из (10.2.5) и (10.1.20) получаем

$$\partial_1 f_i(\mathbf{x}) = v^{i1} I_0(x_3), \quad (10.2.65a)$$

$$\partial_2 f_i(\mathbf{x}) = v^{i2} I_0(x_3), \quad (10.2.65b)$$

$$\partial_3 f_i(\mathbf{x}) = \left(-v^{31} \delta_{i1} - v^{32} \delta_{i2} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (v^{11} + v^{22}) \delta_{i3} \right) I_0(x_3), \quad (10.2.65b)$$

где

$$I_0(x_3) = \frac{1}{2\pi} \int dp_3 \frac{i}{p_3} e^{ip_3 x_3}.$$

Обозначим через σ_{ij} тензор напряжений; σ_{ij} представляет собой j -ю компоненту силы на единицу площади в плоскости,

внешняя нормаль к которой параллельна положительному направлению оси x_i . Согласно закону Гука (10.2.17), имеем

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ik}^{jl}(0) \partial_{if} f_h(\mathbf{x}) = \quad (10.2.66)$$

$$= \mu \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{f}). \quad (10.2.67)$$

Примечательно, что условие свободной поверхности $\sigma_{i3} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) автоматически выполняется благодаря соотношению (10.2.65). Мы накладываем на интеграл $I_0(x_3)$ следующие граничные условия:

$$I_0(x_3) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\pi} \int dp_3 \frac{1}{p_3 + i\varepsilon} e^{ip_3 x_3} = \begin{cases} 0 & \text{при } x_3 > 0, \\ 1 & \text{при } x_3 \leq 0. \end{cases} \quad (10.2.68)$$

Поэтому поле смещений $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ вне особой точки $x_3 = 0$ дается соотношениями

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{при } x_3 > 0, \quad (10.2.69a)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = U\mathbf{x} \quad \text{при } x_3 < 0, \quad (10.2.69b)$$

где матрица U имеет вид

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} \nu^{11} & \nu^{12} & -\nu^{31} \\ \nu^{21} & \nu^{22} & -\nu^{32} \\ \nu^{31} & \nu^{32} & -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\nu^{11} + \nu^{22}) \end{pmatrix}. \quad (10.2.70)$$

Если бы поле смещений $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ могло быть следующим образом представлено с помощью ортогональной матрицы T_R : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ при $x_3 > 0$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (T_R - I)\mathbf{x}$ при $x_3 < 0$, то зерну в области $x_3 < 0$ можно было бы придать ту же ориентацию, что и при $x_3 > 0$, посредством чистого вращения, т. е. зерно, отвечающее $x_3 < 0$, оказалось бы идеальным кристаллом. Однако можно доказать, что $(I + U)$ не является ортогональной матрицей, за исключением тривиального случая $U = 0$. Поэтому всегда наряду с вращением имеется и растяжение (или сжатие).

Мы можем выбрать ν^{ij} таким образом, чтобы поле смещений при $x_3 = 0_-$ описывалось чистым вращением. Например, при следующем выборе параметров: $\nu^{11} = \nu^{22} = \cos \theta - 1$, $\nu^{12} = -\nu^{21} = \sin \theta$, $\nu^{31} = \nu^{32} = 0$ получаем

$$U\mathbf{x} = (T_R - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} (\cos \theta - 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (10.2.71)$$

где

$$T_R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.2.72)$$

Таким образом, Ux при $x_3 = 0$ описывает чистый поворот на угол θ . Второй член в правой части выражения (10.2.71) показывает, что поворот сопровождается растяжением или сжатием вдоль третьей оси. Если угол θ очень мал, то это растяжение (или сжатие) квадратично по θ .

Теперь полезно вспомнить вывод формулы (10.2.60). В рамках этого вывода (в частности, когда мы записывали формулу (10.2.56)) неявно предполагается, что сжатия или растяжения структуры, прилегающей к граничной поверхности, не происходит. Приведенное выше рассмотрение показывает, что это предположение не всегда справедливо. Кроме того, даже если данное предположение верно, выражение (10.2.71) показывает, что эффекты, связанные с растяжением (или сжатием), проявляются в области вдали от поверхности. С ростом θ эта область приближается к межзеренной границе.

Точечные дефекты. Будем рассматривать точечный дефект как двумерную сферическую особенность радиуса R :

$$y_0 = \tau, \quad y = (R \sin \sigma \cos \xi, R \sin \sigma \sin \xi, R \cos \sigma). \quad (10.2.73)$$

Подробное исследование такого объекта при произвольных v^{il} проведено в работе [7]. Здесь мы рассмотрим только простой случай

$$v^{il} = v \delta_{il}. \quad (10.2.74)$$

Проведя соответствующие вычисления, получаем

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{4}{3} \frac{v\mu}{\lambda + 2\mu} x_i \quad \text{при } 0 < r < R, \quad (10.2.75a)$$

$$f_i(\mathbf{x}) = -\frac{v}{3} \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{R^3}{r^3} x_i \quad \text{при } r > R, \quad (10.2.75b)$$

где $r \equiv |\mathbf{x}|$. Объемное расширение (вычисленное на сфере), обусловленное точечным дефектом, дается выражением

$$\Delta V = \int_{r>R} dS \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \quad (10.2.76)$$

$$= -\frac{4\pi}{3} v R^3 \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}. \quad (10.2.77)$$

Согласно формуле (10.2.67), тензор напряжений σ_{ij} равен

$$\sigma_{ij} = \frac{4}{3} \nu \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \quad \text{при } 0 < r < R, \quad (10.2.78a)$$

$$\sigma_{ij} = 2\nu \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{R^3}{r^5} x_i x_j - \frac{1}{3} \frac{R^3}{r^3} \delta_{ij} \right) \quad \text{при } r > R. \quad (10.2.78b)$$

Определим теперь величину

$$\sigma_{rr} = \sum_{i, j} \frac{x_i}{r} \sigma_{ij} \frac{x_j}{r}. \quad (10.2.79)$$

Тогда из соотношений (10.2.78) следует

$$\sigma_{rr} = \frac{4}{3} \nu \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + 2\mu} \quad \text{при } 0 < r < R, \quad (10.2.80a)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{4}{3} \nu \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{R^3}{r^3} \quad \text{при } r > R. \quad (10.2.80b)$$

Отметим, что σ_{rr} непрерывна в точке $r = R$. Это можно доказать при любом выборе ν^{il} . Из (10.2.76) и (10.2.80) получаем

$$\sigma_{rr} = -\frac{\mu}{\pi r^3} \Delta V \quad \text{при } r > R. \quad (10.2.81)$$

Из формулы (10.2.75b) видно, что $\nabla f = 0$ при $r > R$. Поэтому ΔV в (10.2.76) не зависит от выбора поверхности интегрирования, если только эта поверхность не пересекает особенность при $r = R$. Иными словами, ΔV — топологическая постоянная. Однако эта топологическая постоянная не является топологическим квантовым числом, поскольку не требуется, чтобы спектр ее значений был дискретным¹⁾.

Плотность энергии деформации ω равна $\langle 0 | h^l(x) | 0 \rangle$, где плотность гамильтониана дается выражением (10.2.19). Таким образом, получаем

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i, j} \sum_{l, k} C_{ik}^{jl}(0) \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \frac{\partial f_k}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \sum_{i, j} \sigma_{ij} \frac{\partial f_l}{\partial x_j}, \quad (10.2.82)$$

где использована формула (10.2.66). Отсюда с помощью выражения (10.2.80) получаем

$$\omega = \frac{8}{3} \nu^2 \mu^2 \frac{2\mu + 3\lambda}{(\lambda + 2\mu)^2} \quad \text{при } 0 < r < R, \quad (10.2.83a)$$

$$\omega = \frac{2}{3} \nu^2 \mu^2 \frac{(2\mu + 3\lambda)^2}{(\lambda + 2\mu)^2} \frac{R^6}{r^6} \quad \text{при } r > R. \quad (10.2.83b)$$

¹⁾ Хотя для точечных дефектов отсутствует топологическое квантовое число, гарантирующее их устойчивость, они обычно устойчивы, поскольку их существование обусловлено наличием либо атомных вакансий, либо примесей замещения; малая скорость диффузии атомов обеспечивает достаточно большое время жизни. Мы могли бы сказать, что атомный номер играет роль топологического квантового числа, хотя он не имеет ничего общего с топологией.

Полная энергия деформации W равна

$$W = \int d^3x w(x) = 2\nu^2\mu^2 \frac{2\mu + 3\lambda}{(\lambda + 2\mu)^2} \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Разумно предположить, что увеличение объема, обусловленное точечным дефектом, порядка объема, приходящегося на один атом. Поэтому если мы примем грубое допущение, что $R \approx a$ (a — постоянная решетки), то из выражения (10.2.77) получим, что ν порядка единицы. Известно, что типичные значения λ и μ порядка 10^{12} дин/см². Тогда полная энергия деформации порядка 1 эВ, что качественно совпадает с энергией образования вакансии в решетке.

В гл. 12 мы применяем методы, описанные в этой главе, к задаче о поверхностных волнах.

10.3. Топологические особенности, связанные с неабелевыми группами симметрии

Введение. Как показано в разд. 10.1, термодинамическая устойчивость топологических объектов (т. е. объектов с топологическими особенностями) часто обусловлена наличием некоторых топологических квантовых чисел, характерных для этих объектов. Появление таких квантовых чисел и условия их существования жестко связаны с симметрией фундаментальной теории. Если фундаментальная симметрия имеет неабелеву природу, то требуется дальнейшее развитие того подхода, который использован в предыдущих разделах. Примером топологического объекта с неабелевой симметрией является объект типа монополя [8]. Предполагалось, что объект типа монополя может возникать в жидких кристаллах [9], в случае магнитных доменов [10], в сверхтекучем ³He [11] и т. д. По-видимому, другие топологические объекты с неабелевой симметрией будут еще обнаружены во многих областях физики твердого тела. Имеются отличные работы по топологической классификации протяженных объектов [12]. Большинство из них основано на использовании глобальных свойств топологических объектов, причем некоторые из этих работ предназначены для физиков, занимающихся элементарными частицами высоких энергий. В физике твердого тела часто требуется выяснить локальную структуру топологических объектов, которая не определяется полностью глобальными граничными условиями. Поэтому желательно описывать топологическую природу таких объектов на языке пространственно-временных координат особых точек. Чтобы осуществить это, мы обобщим рассмотрение, проведенное в разд. 10.1, придав ему форму [13], удобную для описания топологических объектов с неабелевой

симметрией. Такое описание в значительной степени опирается на использование понятия «калибровка». В рамках рассмотрения, проведенного в разд. 10.1, локальные свойства топологической структуры описываются с помощью $[\partial_\mu, \partial_\nu] f$, а следовательно, и с помощью величины $[\partial_\mu, \partial_\nu] U(x)$, где $U(x) = \exp [if(x)]$, поскольку данная величина пропорциональна $[\partial_\mu, \partial_\nu] f$. В случае неабелевой группы симметрии (например, G) фазовый множитель $\exp [if(x)]$ мы заменяем матрицей U , с помощью которой вводится калибровочная функция.

Матрица калибровочного преобразования. Рассмотрим набор гейзенберговских операторов $\{\psi_a(x); a = 1, 2, \dots, N\}$, который отвечает гейзенберговским полям, образующим некоторое представление n -параметрической группы G . Для простоты будем считать, что G — компактная группа. Предположим также, что уравнение Гейзенберга и одновременные канонические коммутаторы инвариантны относительно преобразований группы G и что возникает некоторое число (например, m) физических бозонов $[\chi^a(x), a = 1, \dots, m]$ с бесщелевым энергетическим спектром. Нас интересуют протяженные объекты, возникающие при бозонном преобразовании $\chi^a(x) \rightarrow \chi^a(x) + f^a(x)$. Гейзенберговское поле, трансформированное бозонным преобразованием, обозначается символом ψ_a^f . Мы видели в гл. 9, что неоператорная часть ψ_a^f

$$v_a(x) = \langle 0 | \psi_a^f(x) | 0 \rangle \quad (10.3.1)$$

(без учета квантовых координат) однозначно определяет гейзенберговское поле ψ_a^f . Сконцентрируем наше внимание на неоператорных функциях $v_a(x)$, которые будем называть параметрами порядка. Поскольку параметры порядка в древесном приближении ($\hbar \rightarrow 0$) соответствуют решениям классического уравнения Эйлера, большая часть проводимого ниже рассмотрения применима также и к чисто классическим полям.

Будем использовать векторные обозначения $\psi(x)$ и $\mathbf{v}(x)$ для $\psi_a^f(x)$ и $v_a(x)$ ($a = 1, \dots, N$) соответственно. Векторное пространство представлений группы обозначим символом \mathcal{H}_G . Поскольку $\psi(x)$ и $\mathbf{v}(x)$ — некоторые представления компактной группы G , выберем эти представления так, чтобы они были унитарными. Определим затем внутреннее произведение двух произвольных векторов \mathbf{v}^1 и \mathbf{v}^2 в пространстве \mathcal{H}_G следующим образом:

$$(\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^2) = \sum_a v_a^{1*} v_a^2. \quad (10.3.2)$$

Если задать в группе G некоторое унитарное преобразование u , то получим

$$(u\mathbf{v}^1 \cdot u\mathbf{v}^2) = (\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^2). \quad (10.3.3)$$

Обозначим через e_0 некий фиксированный единичный вектор в пространстве \mathcal{H}_G . Выберем e_0 так, чтобы он был инвариантен относительно всех преобразований группы H , представляющей собой подгруппу G . Символом h обозначим размерность группы H . Предположим, что параметр порядка $\mathbf{v}(x)$ имеет вид

$$\mathbf{v}(x) = U(x) e_0 v(x), \quad (10.3.4)$$

где $v(x)$ — неоператорная функция, а $U(x)$ — унитарная матрица с зависящими от x элементами. Это соотношение представляет собой условие, накладываемое на параметр порядка $\mathbf{v}(x)$. Число независимых переменных в $U(x) e_0$ равно $(n - h)$. Учитывая наличие $v(x)$, получаем, что общее число переменных в правой части соотношения (10.3.4) составляет $(n - h + 1)$, т. е.

$$N = n - h + 1. \quad (10.3.5)$$

Это накладывает ограничения на выбор представления, отвечающего параметру порядка. Мы имеем соотношение

$$v^2(x) = [\mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{v}(x)]. \quad (10.3.6)$$

Матрица $U(x)$ называется матрицей калибровочного преобразования. Удобно определить вектор

$$e(x) \equiv \mathbf{v}(x)/v(x) = U(x) e_0, \quad (10.3.7)$$

поскольку он характеризует топологическую структуру протяженных объектов.

Чтобы выразить топологические свойства в дифференциальной форме, определим матрицу $f_\mu(x)$ посредством соотношения

$$f_\mu(x) = -iU^{-1}(x) \partial_\mu U(x), \quad (10.3.8a)$$

или

$$\partial_\mu U(x) = iU(x) f_\mu(x). \quad (10.3.8b)$$

С другой стороны, поскольку матрица $U(x)$ унитарна, ее можно представить в виде

$$U(x) = \exp \{it_\alpha \theta_\alpha(x)\}, \quad (10.3.9)$$

где t_α ($\alpha = 1, \dots, n$) — матрицы $N \times N$, представляющие собой генераторы преобразований группы G , а θ_α — параметры, зависящие от x . Чтобы вычислить $f_\mu(x)$, исследуем матрицу

$$U(\tau, x) \equiv \exp \{i\tau t_\alpha \theta_\alpha(x)\} \quad (10.3.10)$$

и введем величину $f_\mu(\tau, x)$, определяемую выражением

$$f_\mu(\tau, x) \equiv -iU^{-1}(\tau, x) \partial_\mu U(\tau, x). \quad (10.3.11)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} f_{\mu}(\tau, x) &= -U^{-1}(\tau, x) t_{\alpha} \theta_{\alpha}(x) \partial_{\mu} U(\tau, x) + \\ &+ U^{-1}(\tau, x) \partial_{\mu} \{t_{\alpha} \theta_{\alpha}(x) U(\tau, x)\} = U^{-1}(\tau, x) t_{\alpha} \partial_{\mu} \theta_{\alpha}(x) U(\tau, x). \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

Поскольку $f_{\mu}(\tau = 0, x) = 0$, отсюда следует формула

$$f_{\mu}(x) = f_{\mu}(\tau = 1, x) = \int_0^1 d\tau U^{-1}(\tau, x) t_{\alpha} \partial_{\mu} \theta_{\alpha}(x) U(\tau, x). \quad (10.3.13)$$

Матрица $U(x)$ может быть представлена [13] в виде контурного интеграла от $f_{\mu}(x)$.

Условие интегрируемости и топологические особенности. Если требуется, чтобы вектор $e(x)$ был хорошо определен в качестве многозначной функции, то условие интегрируемости

$$[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] e(x) = 0 \quad (10.3.14)$$

должно выполняться везде, за исключением некоторых особых точек. Здесь особыми называются те точки, в которых функция $e(x)$ становится плохо определенной. Такие особенности являются топологическими. Обозначим символом \mathcal{D} множество этих особых точек. Определяя величину $f_{\mu\nu}$ посредством соотношения

$$[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] U(x) = i U(x) f_{\mu\nu}(x), \quad (10.3.15)$$

находим

$$f_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu} f_{\nu}(x) - \partial_{\nu} f_{\mu}(x) + i [f_{\mu}(x), f_{\nu}(x)]. \quad (10.3.16)$$

Область \mathcal{D} задается следующим образом:

$$f_{\mu\nu}(x) e_0 \begin{cases} \neq 0 & \text{при } x \in \mathcal{D}, \\ = 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (10.3.17)$$

Если \mathcal{D}_U — множество топологических особенностей матрицы $U(x)$, то оно состоит из точек, где $[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] U \neq 0$ (т. е. $f_{\mu\nu} \neq 0$). Очевидно, что \mathcal{D} не обязательно совпадает с \mathcal{D}_U , и имеет место соотношение $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_U$. Благодаря такой возможности неабелев случай существенным образом отличается от абелева.

Поскольку дифференциальный оператор (т. е. $U^{-1}(x) \partial_{\mu} U(x)$) является локальным по своей природе и по определению не должен нигде зависеть от траектории, получаем

$$[\partial_{\nu}, \partial_{\mu}] f_{\lambda}(x) = 0 \quad \text{в любой точке } x. \quad (10.3.18)$$

Если определить дуальный тензор $f_{\mu\nu}^{\dagger}$ посредством соотношения

$$f_{\mu\nu}^{\dagger}(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}^{\lambda\rho} f_{\lambda\rho}, \quad (10.3.19)$$

то из (10.3.18) следует тождество Бьянки

$$\partial_\mu f_{\mu\nu}^\dagger(x) + i[f^\mu, f_{\mu\nu}^\dagger] = 0. \quad (10.3.20)$$

Оно соответствует формуле (10.1.17) в абелевом случае.

Условие однозначности параметра порядка. Рассмотрим замкнутый контур C , который описывается функциями $x_\mu(s)$, зависящими от вещественного параметра s , причем выполняются соотношения

$$0 \leq s \leq 1, \quad x_\mu(0) = x_\mu(1). \quad (10.3.21)$$

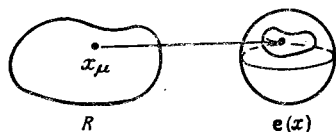


Рис. 10.7.

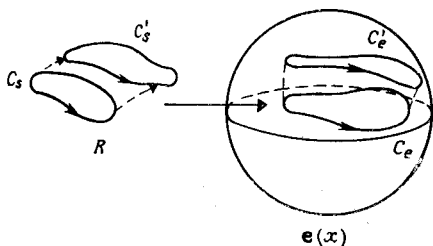


Рис. 10.8.

Поскольку вектор e_0 инвариантен относительно любого преобразования (например, U_h) из H , т. е.

$$U_h e_0 = e_0, \quad U_h \in H, \quad (10.3.22)$$

из однозначности $e(x)$ следует

$$U[x(1)] = U[x(0)] U_n. \quad (10.3.23)$$

Это условие более слабое, чем условие $U[x(1)] = U[x(0)]$.

Взаимное соответствие между координатным пространством и пространством симметрии. Посредством вектора $e(x)$ координатное пространство R отображается на пространство симметрии:

$$x_\mu \rightarrow e(x) = U(x) e_0. \quad (10.3.24)$$

Таким образом, R отображается на $(N-1)$ -мерную сферу S_e единичного радиуса ($e^2 = 1$), отвечающую представлению \mathcal{H}_G (рис. 10.7).

Топологические особенности. Чтобы проанализировать структуру множества особенностей \mathcal{D} , исследуем отображения всех возможных замкнутых поверхностей C_s на сферу S_e (рис. 10.8). Пусть d_s — размерность C_s . Тогда для задания C_s требуется d_s параметров. Поскольку размерность S_e равна $N-1$, некоторые параметры или некоторые их комбинации должны оставаться

инвариантными для каждого отображения C_s на S_e , если d_s больше $N - 1$. Поэтому при дальнейшем рассмотрении мы будем полагать, что $d_s \leq N - 1$. Если d — размерность нашего пространства-времени, то $d_s < d$.

Начнем рассмотрение со случая $d_s = N - 1$, предполагая, что $d \geq N$. Тогда C_s и S_e имеют одинаковую размерность $N - 1$. Если C_s не пересекает никаких особенностей, то C_s можно единственным образом отобразить в виде замкнутой поверхности на S_e . Отметим, что данное отображение может быть многозначным. Если же C_s пересекает некоторые особенности из множества \mathcal{D} , то параметры порядка в этих особых точках определяются только для конкретной траектории, задаваемой C_s (рис. 10.9). В общем случае мы обозначаем посредством C_e ту из траекторий, которая получается в результате отображения C_s на S_e ; иными словами, осуществляется отображение $C_s \rightarrow C_e$.

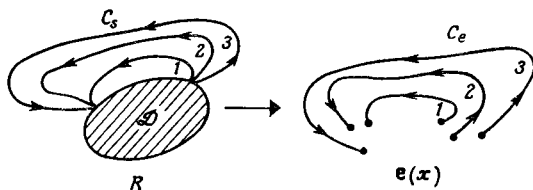


Рис. 10.9.

С другой стороны, при рассмотрении части S_e (например, s) площадь поверхности, занятая областью s , дается интегралом по ориентированной поверхности

$$\int_s \omega, \quad (10.3.25)$$

где ω — внешняя дифференциальная форма, заданная на ориентированном многообразии и определяемая выражением

$$\omega = \frac{1}{(N-1)!} e_i \varepsilon_{i_1 \dots i_{N-1}} de_{i_1} \wedge de_{i_2} \wedge \dots \wedge de_{i_{N-1}}. \quad (10.3.26)$$

Полная площадь Ω поверхности S_e равна

$$\Omega = \int_{S_e} \omega. \quad (10.3.27)$$

В выражении (10.3.26) e_1, \dots, e_N — координаты в пространстве, отвечающем представлению \mathcal{H}_G , а $\varepsilon_{i_1 \dots i_{N-1}}$ — полностью антисимметричный тензор N -го ранга. Так как S_e — $(N - 1)$ -мерная

единичная сфера, она может быть параметризована с помощью углов $(\theta_1, \dots, \theta_{N-1})$ в полярной системе координат

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2} \cos \theta_{N-1}, \\ e_2 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2} \sin \theta_{N-1}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ e_{N-1} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ e_N &= \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (10.3.28)$$

В этом случае выражение для ω имеет вид

$$\omega = \pm (\sin \theta_1)^{N-2} (\sin \theta_2)^{N-3} \dots (\sin \theta_{N-2}) d\theta_1 \dots d\theta_{N-1}, \quad (10.3.29)$$

где знак «+» или «-» выбирается в соответствии с ориентацией поверхности. Полная площадь поверхности Ω дается формулой

$$\Omega = (2\pi) (\pi^{1/2})^{N-2} / \Gamma(N/2). \quad (10.3.30)$$

Определим v с помощью интеграла по поверхности (10.3.25), где $s = C_e$:

$$\Omega v = \int_{C_e} \omega. \quad (10.3.31)$$

Чтобы преобразовать этот интеграл в интеграл по нашему координатному пространству, представим параметр порядка $e(x) [= e_a(x), a = 1, \dots, N]$ в виде (10.3.28), введя функции $\theta_1(x), \dots, \theta_{N-1}(x)$. Тогда интеграл по поверхности (10.3.31) на S_e превращается в следующий интеграл в координатном пространстве:

$$\Omega v = \int_{C_s} g_{\mu_1 \dots \mu_{N-1}}(x) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{N-1}}, \quad (10.3.32)$$

где

$$g_{\mu_1 \dots \mu_{N-1}}(x) = \frac{1}{(N-1)!} e_i(x) \varepsilon_{i i_1 \dots i_{N-1}} \frac{\partial [e_{i_1}(x) \dots e_{i_{N-1}}(x)]}{\partial [x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{N-1}}]} = \quad (10.3.33)$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{(1/2)(N-2)(N+1)} [\sin \theta_1(x)]^{N-2} \dots \sin \theta_{N-2}(x) \times \\ &\times \frac{\partial [\theta_1(x) \dots \theta_{N-1}(x)]}{\partial [x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{N-1}}]}. \end{aligned} \quad (10.3.34)$$

Используя теорему Стокса, находим

$$\Omega v = \int_{S_c} \partial_\mu g_{\mu_1 \dots \mu_{N-1}}(x) dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{N-1}} = \quad (10.3.35)$$

$$= \frac{1}{N!} \int_{S_c} G_{\mu_1 \dots \mu_N}^\dagger(x) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_N}. \quad (10.3.36)$$

Здесь функция $G_{\mu_1 \dots \mu_N}^\dagger(x)$ определяется следующим образом:

$$G_{\mu_1 \dots \mu_N}^\dagger(x) = \sum_A \partial_{\mu_1} g_{\mu_2 \dots \mu_N}, \quad (10.3.37)$$

а S_c — область, ограниченная поверхностью C_s . Символ \sum_A обозначает суммирование слагаемых, получающихся из выписанных антисимметризацией по индексам. Поскольку выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \sum_A \partial_{\mu_1} g_{\mu_2 \dots \mu_N} &= \frac{1}{(N-1)!} \left(\varepsilon_{i_1 \dots i_N} \frac{\partial [e_{i_1}(x) \dots e_{i_N}(x)]}{\partial [x^{\mu_1} \dots x^{\mu_N}]} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_A e_{i_1}(x) \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \partial_{\mu_1} \frac{\partial [e_{i_2}(x) \dots e_{i_N}(x)]}{\partial [x^{\mu_2} \dots x^{\mu_N}]} \right), \quad (10.3.38) \end{aligned}$$

а также соотношение

$$\partial [e_{i_1}(x) \dots e_{i_N}(x)] / \partial [x^{\mu_1} \dots x^{\mu_N}] = 0, \quad (10.3.39)$$

которое находится из условия $e^2(x) = 1$, получаем

$$G_{\mu_1 \dots \mu_N}^\dagger(x) = \sum_A \partial_{\mu_1} g_{\mu_2 \dots \mu_N} = \sum_A e_{i_1}(x) \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \partial_{\mu_1} \frac{\partial [e_{i_2}(x) \dots e_{i_N}(x)]}{\partial [x^{\mu_2} \dots x^{\mu_N}]}. \quad (10.3.40)$$

Так как это выражение состоит только из членов, включающих в себя коммутаторы от производных, оно не обращается в нуль только в точках, отвечающих топологическим особенностям функций $e_a(x)$ ($a = 1, \dots, N$). Из соотношения (10.3.36) видно, что $G_{\mu_1 \dots \mu_N}^\dagger(x)$ — совокупность N -мерных δ -функций. Таким образом, эта величина определяет $(d - N)$ -мерную область в d -мерном $\{x_\mu\}$ -пространстве. Данная область представляет собой множество топологических особенностей, которые, согласно (10.3.40), имеются в $G_{\mu_1 \dots \mu_N}^\dagger$. Это множество обозначим символом \mathcal{D}_{d-N} . Проводя интегрирование в (10.3.35), можно видеть, что v остается постоянным при непрерывной деформации поверхности S_c , если только ее сечение между C_s и \mathcal{D} не меняется. Таким образом, мы видим, что v — топологическая постоянная, а также что \mathcal{D}_{d-N} не может быть больше \mathcal{D} . В результате имеем три типа областей топологи-

ческих особенностей. \mathcal{D}_U — область особенностей, связанных с матрицей калибровочного преобразования (т. е. множество $f_{\mu\nu}(x) \neq 0$), а \mathcal{D} — область особенностей параметра порядка $\epsilon(x)$ (для которых $f_{\mu\nu}(x) \epsilon_0 \neq 0$). Топологические особенности, вносящие вклад в формирование топологической постоянной ν , образуют область \mathcal{D}_{d-N} (где $G_{\mu_1 \dots \mu_N}^+(x) \neq 0$). Вся область \mathcal{D}_U не наблюдаема, поскольку наблюдаются только особенности, входящие в \mathcal{D} . Такая ситуация резко контрастирует со случаем абелевой симметрии, где $\mathcal{D}_U = \mathcal{D}$. Задавая множество \mathcal{D}_{d-N} с помощью величин $y_\mu(\sigma_1 \dots \sigma_{d-N})$, зависящих от $(d-N)$ параметров, находим

$$G_{\mu_1 \dots \mu_N}^+(x) = \frac{\nu \Omega}{(d-N)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_N}^{\lambda_1 \dots \lambda_{d-N}} \int d\sigma_1 \dots d\sigma_{d-N} \times \\ \times \frac{\partial(y_{\lambda_1} \dots y_{\lambda_{d-N}})}{\partial(\sigma_1 \dots \sigma_{d-N})} \delta^{(d)}[x - y(\sigma_1 \dots \sigma_{d-N})]. \quad (10.3.41)$$

С помощью дуального тензора

$$G_{\mu_1 \dots \mu_{d-N}}(x) = \frac{1}{N!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-N}}^{\lambda_1 \dots \lambda_N} G_{\mu_1 \dots \mu_N}^+(x) \quad (10.3.42)$$

соотношение (10.3.37) может быть переписано в виде

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-N}}^{\lambda_1 \dots \lambda_N} \partial_{\lambda_1} g_{\mu_2 \dots \mu_N} = G_{\mu_1 \dots \mu_{d-N}}. \quad (10.3.43)$$

Из (10.3.41) находим

$$G_{\mu_1 \dots \mu_{d-N}}(x) = \Omega \nu \int d\sigma_1 \dots d\sigma_{d-N} \frac{\partial(y_{\mu_1} \dots y_{\mu_{d-N}})}{\partial(\sigma_1 \dots \sigma_{d-N})} \delta^{(d)}[x - y(\sigma_1 \dots \sigma_{d-N})]. \quad (10.3.44)$$

В рамках рассмотренного подхода могут быть локально идентифицированы топологические особенности, топологическая постоянная которых представляет собой интеграл по $(N-1)$ -мерной замкнутой поверхности, а размерность равна $(d-N)$.

В случае абелевой симметрии $N=2$, поэтому формула (10.3.28) имеет вид $e_1 = \cos \theta_1$, $e_2 = \sin \theta_1$. Отсюда, согласно (10.3.34), $g_\mu(x) = \partial_\mu \theta_1(x)$; при этом (10.3.37) превращается в соотношение $G_{\mu\nu}^+ = [\partial_\mu, \partial_\nu] \theta_1(x)$, совпадающее с (10.1.3) при $f_\alpha(x) = \theta_1(x)$. В этом случае выражение (10.3.44) сводится к (10.1.21).

Топологическое квантовое число и устойчивость протяженных объектов. Если особенность изолирована в том смысле, что ее можно отделить от других особенностей замкнутой поверхностью S_s , то благодаря однозначности $\epsilon(x)$ S_e образует замкнутую поверхность на S_e . В этом случае ν в формуле (10.3.31) принимает целое значение (топологическое квантовое число), поскольку S_e должна оборачивать S_e целое число раз. Если сово-

купность особенностей образует объект, окруженный поверхностью C_s , то целое значение ν приписывается этой совокупности. Весовой множитель $\Omega\nu$ (ν — целое число) в выражении (10.3.44) определяет топологическое квантовое число, относящееся к объекту, положения особенностей которого задаются функциями y_μ ($\sigma_1 \dots \sigma_{d-N}$). Это целое число — индекс, называемый степенью Брауера (см., например, [14]). Объект с отличным от нуля топологическим квантовым числом является устойчивым или частично устойчивым, поскольку он не может исчезнуть до тех пор, пока ему не встретится объект с квантовым числом противоположного знака. Приведенные выше соображения показывают, что происхождение топологического квантового числа связано с условием однозначности $\epsilon(x)$, а также с тем условием, что замкнутая поверхность C_s не пересекает какую-либо часть области существования особенностей.

Выше выяснено, что вклад в формирование топологического квантового числа ν вносят особенности, образующие множество \mathcal{D}_{d-N} . Если множество \mathcal{D} более широкое, чем \mathcal{D}_{d-N} , то $\epsilon(x)$ обладает некоторыми топологическими особенностями, не участвующими в образовании топологического квантового числа. Поскольку эти последние особенности, по-видимому, неустойчивы, наиболее важными являются те случаи, когда вклад в формирование топологических квантовых чисел вносят все особенности из \mathcal{D} .

Полное условие, определяющее топологические особенности в \mathcal{D}_{d-N} . Отметим, что из соотношения (10.3.43) следует равенство

$$\partial^\mu G_{\mu_1 \dots \mu_{d-N}} = 0, \quad (10.3.45)$$

являющееся обобщением (10.1.17). Если применить условие (10.3.45) для анализа выражения (10.3.44), то мы увидим, что исследуемый объект является $(d - N)$ -мерным и не имеет замкнутых границ. Это согласуется с тем фактом, что величина ν сохраняет смысл топологической постоянной до тех пор, пока замкнутая поверхность C_s не пересекает рассматриваемый объект. Заметим, что точка (т. е. $N = d$) рассматривается в качестве 0-мерного объекта, не имеющего замкнутой границы.

Множества топологических особенностей, имеющие более высокую размерность. Мы рассматривали до сих пор только $(N - 1)$ -мерную замкнутую поверхность C_s . Обратимся теперь к вопросу о том, каким образом замкнутые поверхности C_s более низкой размерности (т. е. $d_s < N - 1$) в $\{x_\mu\}$ -пространстве позволяют описывать топологические особенности в области \mathcal{D} . Если поверхность C_s отображается на S_e , то в результате получается d_s -мерная поверхность C_e . Рассмотрим ситуацию, когда C_s не мо-

жет стянуться в точку, не пересекая некоторых особенностей в \mathcal{D} . Тогда при любой деформации поверхности C_s размерность C_e нельзя изменить до тех пор, пока в процессе деформации C_s не пересечет какой-либо особенности из \mathcal{D} . Следовательно, осуществляя эту деформацию, всегда можно отобразить C_e на d_s -мерную сферу S'_e (рис. 10.10). Заметим, что совсем не требуется, чтобы S'_e находилась на S_e . Поскольку C_e нельзя стянуть в точку на S_e , существует некоторая сингулярная область в пространстве S_e , препятствующая такому стягиванию. Подобная ситуация резко отличается от той, которая имеет место в случае $(N - 1)$ -мерной

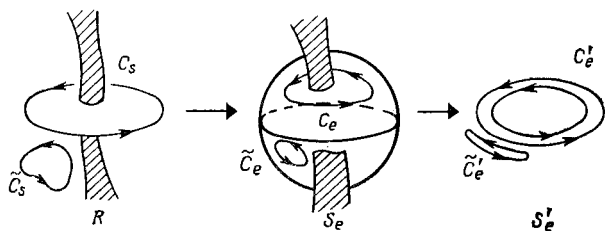


Рис. 10.10.

замкнутой поверхности C_s ; в этом последнем случае на S_e не возникает особенности до тех пор, пока C_s не пересечет какой-нибудь особенности из \mathcal{D} .

Если отображение из $\{x_\mu\}$ -пространства на S'_e обозначить через $e'(x)$ (сфера в $(d_s + 1)$ -мерном пространстве), то все рассуждения, касающиеся формул от (10.3.26) до (10.3.44), можно применить и к отображению $e'(x)$. (Но явное выражение $e'(x)$ через $e(x)$ может оказаться весьма сложным и зависящим от рассматриваемого объекта.) Таким образом, d_s -мерная замкнутая поверхность C_s задает $(d - d_s - 1)$ -мерный объект, положение которого описывается функциями $y(\sigma_1 \dots \sigma_{d-d_s-1})$, зависящими от $d - d_s - 1$ параметров. Этот объект не должен иметь замкнутой границы. Однозначность $e(x)$ приводит к однозначности $e'(x)$. Следовательно, топологическое квантовое число характеризует также и $(d - d_s - 1)$ -мерные изолированные объекты. Но если $d_s < (N - 1)$, то существование топологического квантового числа не обязательно обеспечивает устойчивость таких объектов. Чтобы понять это, вспомним о существовании сингулярной области на S_e , препятствующей стягиванию C_e в точку. Поскольку природа этой особенности зависит от физической или динамической ситуации в системе, возможно, что особенности могут быть ликвидированы за счет некоторых физических процессов, обуславливающих неустойчивость топологических объектов. $(d - N)$ -мерные объекты представляют собой исключение; так как C_s в этом

случае имеет размерность $(N - 1)$, на S_e отсутствуют особенности, и топологический объект, обладающий топологическим квантовым числом (10.3.31), становится устойчивым.

Подводя итог, отметим, что замкнутые d_s -мерные поверхности ($d_s = 1, 2, \dots, N - 1$) задают топологические особенности в \mathcal{D} , представляющие собой совокупность $(d - d_s - 1)$ -мерных объектов, не имеющих замкнутых границ и описываемых величиной $G_{\mu_1 \dots \mu_{d-d_s}}$, определяемой выражением (10.3.44). Таким образом, \mathcal{D} состоит из объектов, которые можно рассматривать как

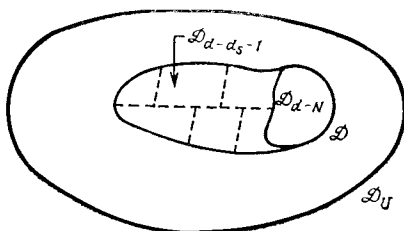


Рис. 10.11.

дискретную или непрерывную суперпозицию α -мерных объектов без замкнутых границ, причем α удовлетворяет условию

$$d - N \leq \alpha \leq d - 2. \quad (10.3.46)$$

Если множество \mathcal{D} состоит из объектов размерности α , то оно будет обозначаться символом \mathcal{D}_α . Наименьшей размерностью обладает множество \mathcal{D}_{d-N} . Изолированные $(d - N)$ -мерные топологические объекты описываются топологическими квантовыми числами, которые возникают вследствие однозначности $e(x)$ и обеспечивают устойчивость этих объектов (рис. 10.11).

Модель $SU(2)$ -триплета и монополю. Проиллюстрируем проведенное выше общее рассмотрение на простом примере¹⁾. Поскольку мы уже видели, как на основе этого рассмотрения для случая абелевой симметрии воспроизводятся результаты разд. 10.1, рассмотрим теперь модель $SU(2)$ -триплета (т. е. $G = SU(2)$ и $N = 3$). Предположим, что e_0 в (10.3.24) — единичный вектор, направленный вдоль третьей оси в векторном пространстве \mathcal{H}_G . Тогда $e(x)$ выразится в виде

$$e(x) = U(x) e_3. \quad (10.3.47)$$

Инвариантная подгруппа H — это $U(1)$ ($h = 1$), которая описывает повороты вокруг вектора e_3 .

¹⁾ В литературе исследовались и некоторые другие примеры. См., в частности, работы [12, 15].

Из (10.3.28) получаем

$$\begin{aligned} e_1 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ e_2 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2, \\ e_3 &= \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (10.3.48)$$

В этом случае из (10.3.33) находим

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial [e_j(x), e_k(x)]}{\partial (x_\mu, x_\nu)} = \frac{\partial [\theta_2(x), \cos \theta_1(x)]}{\partial (x_\mu, x_\nu)}. \quad (10.3.49)$$

С другой стороны, поскольку $U(x)$ — унитарная матрица, ее можно представить в виде

$$U(x) = e^{i\theta_2(x) t_3} e^{i\theta_1(x) t_2} e^{i\varphi(x) t_3}, \quad (10.3.50)$$

где $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции, а t — спиновая матрица размерности 3×3 . Без потери общности можно выбрать $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ в (10.3.49) совпадающими с обозначенными теми же символами функциями в (10.3.50). Будем считать, что $\{x_\mu\}$ -пространство $(1+3)$ -мерно, $d=4$.

Топологическая особенность, имеющая наименьшую размерность (т. е. соответствующая \mathcal{D}_{d-N}), описывается формулой (10.3.44):

$$G_\mu(x) = 4\pi\nu \int d\tau \frac{\partial y_\mu(\tau)}{\partial \tau} \delta^{(4)}[x - y(\tau)]. \quad (10.3.51)$$

Согласно (10.3.45), имеем

$$\partial^\mu G_\mu(x) = 0. \quad (10.3.52)$$

Соотношение (10.3.43) записывается в виде

$$\varepsilon_\mu^{\nu\lambda\rho} \partial_\nu g_{\lambda\rho}(x) = G_\mu(x), \quad (10.3.53)$$

что эквивалентно соотношению (см. (10.3.37))

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda}(x) + \partial_\nu g_{\lambda\mu}(x) + \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu\lambda}^+(x), \quad (10.3.54)$$

где

$$G_{\mu\nu\lambda}^+(x) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}^\rho G_\rho(x). \quad (10.3.55)$$

Поскольку особенность представляет собой точку в пространстве, она может быть полностью окружена замкнутой поверхностью S_g . Поэтому ν принимает только целочисленные значения (т. е. является топологическим квантовым числом) $\nu = 0, \pm 1, \dots$

Если мы будем рассматривать τ как временной параметр, то в этом случае особенность — точка, перемещающаяся с течением времени (ее траектория задается функцией $y(\tau)$). Такой объект называется монополем.

Попробуем теперь выразить приведенные выше результаты с помощью величины $f_{\mu\nu}$. Если воспользоваться выражениями

(10.3.50) и (10.3.8а), то непосредственное вычисление производной $\partial_\mu U(x)$ приводит к следующей формуле:

$$f_\mu(x) = \mathbf{f}_\mu(x) \cdot \mathbf{t}, \quad (10.3.56)$$

где вектор $\mathbf{f}_\mu = (f_\mu^{(1)}, f_\mu^{(2)}, f_\mu^{(3)})$ определяется выражениями

$$f_\mu^{(1)}(x) = \sin \theta_1(x) \cos \varphi(x) \partial_\mu \theta_2(x) - \sin \varphi(x) \partial_\mu \theta_1(x), \quad (10.3.57a)$$

$$f_\mu^{(2)}(x) = \sin \theta_1(x) \sin \varphi(x) \partial_\mu \theta_2(x) + \cos \varphi(x) \partial_\mu \theta_1(x), \quad (10.3.57б)$$

$$f_\mu^{(3)}(x) = \cos \theta_1(x) \partial_\mu \theta_2(x) + \partial_\mu \varphi(x). \quad (10.3.57в)$$

При этом (10.3.49) принимает вид

$$g_{\mu\nu} = - [f_\mu^{(1)}(x) f_\nu^{(2)}(x) - f_\mu^{(2)}(x) f_\nu^{(1)}(x)] = -\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_\mu(x) \times \mathbf{f}_\nu(x). \quad (10.3.58)$$

Удобно также определить вектор $\mathbf{f}_{\mu\nu}$:

$$f_{\mu\nu}(x) = \mathbf{f}_{\mu\nu}(x) \cdot \mathbf{t}. \quad (10.3.59)$$

Из (10.3.16) и (10.3.58) находим

$$f_{\mu\nu}^{(3)} = h_{\mu\nu}^{(3)}(x) + g_{\mu\nu}, \quad (10.3.60)$$

где

$$\mathbf{h}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \mathbf{f}_\nu - \partial_\nu \mathbf{f}_\mu. \quad (10.3.61)$$

Так как

$$\partial_\lambda \mathbf{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \mathbf{h}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \mathbf{h}_{\lambda\mu} = 0, \quad (10.3.62)$$

из формул (10.3.54) и (10.3.60) следует

$$G_{\mu\nu\lambda}^+(x) = \partial_\lambda f_{\mu\nu}^{(3)} + \partial_\mu f_{\nu\lambda}^{(3)} + \partial_\nu f_{\lambda\mu}^{(3)}. \quad (10.3.63)$$

Это и есть $G_{\mu\nu\lambda}^+$, выраженное через $f_{\mu\nu}$. Данная формула в явном виде демонстрирует тот факт, что $G_{\mu\nu\lambda}^+$ определяет топологические особенности этой конкретной комбинации, а не самой величины $\mathbf{f}_{\mu\nu}$. Особенности, отвечающие $\mathbf{f}_{\mu\nu}$, образуют область \mathcal{D}_U , в то время как особенности, связанные с $f_{\mu\nu} \mathbf{e}_3$ и $G_{\mu\nu\lambda}^+$, образуют области \mathcal{D} и $\mathcal{D}_1 (= \mathcal{D}_{d-N})$ соответственно. Отметим, что \mathcal{D}_1 в каждый момент времени состоит только из точек.

Чтобы увидеть взаимосвязь между этими тремя областями, вычислим теперь $\mathbf{f}_{\mu\nu}$, используя формулы (10.3.16) и (10.3.57). В результате получим

$$f_{\mu\nu}^{(1)} = \sin \theta_1 \cos \varphi [\partial_\mu, \partial_\nu] \theta_2 - \sin \varphi [\partial_\mu, \partial_\nu] \theta_1, \quad (10.3.64a)$$

$$f_{\mu\nu}^{(2)} = \sin \theta_1 \sin \varphi [\partial_\mu, \partial_\nu] \theta_2 + \cos \varphi [\partial_\mu, \partial_\nu] \theta_1. \quad (10.3.64б)$$

$$f_{\mu\nu}^{(3)} = \cos \theta_1 [\partial_\mu, \partial_\nu] \theta_2 + [\partial_\mu, \partial_\nu] \varphi. \quad (10.3.64в)$$

Эти выражения показывают, что $\mathbf{f}_{\mu\nu}$ (а следовательно, и \mathcal{D}_U) имеет линейные особенности, если хотя бы у одной из функций

$\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\varphi(x)$ имеется топологическая особенность. Согласно формуле (10.3.63), эти линейные особенности не вносят вклада в $G_{\mu\nu\lambda}^\dagger$, поскольку \mathcal{D}_1 в каждый момент времени включает в себя только отдельные точки. (Указанные линейные особенности представляют собой $(N-2)$ ($=1$)-мерные замкнутые петли, абелевы по своей природе.) Поскольку из (10.3.50) следует

$$U(x) \mathbf{e}_3 = e^{i\theta_2(x)} t_3 e^{i\theta_1(x)} t_2 \mathbf{e}_3, \quad (10.3.65)$$

при исследовании области особенностей \mathcal{D} , определяемой соотношением $[\partial_\mu, \partial_\nu] U(x) \mathbf{e}_3 \neq 0$, можно выбрать $\varphi = 0$. Можно также выбрать $\theta_2(x)$ пропорциональной азимутальному углу:

$$\text{tg}(\theta_2/\rho) = x_2/x_1, \quad (10.3.66)$$

где ρ — некоторая константа. Тогда получаем

$$[\partial_1, \partial_2] \theta_2 = 2\pi\rho\delta(x_1)\delta(x_2). \quad (10.3.67)$$

Из выражений (10.3.64) (при $\varphi = 0$) находим

$$f_{12}^{(1)}(x) = 2\pi\rho\delta(x_1)\delta(x_2)\sin\theta_1(x), \quad (10.3.68)$$

$$f_{\mu\nu}^{(1)}(x) = 0 \text{ в остальных случаях,}$$

$$f_{\mu\nu}^{(2)}(x) = [\partial_\mu, \partial_\nu]\theta_1(x), \quad (10.3.69)$$

$$f_{12}^{(3)}(x) = 2\pi\rho\delta(x_1)\delta(x_2)\cos\theta_1(x), \quad (10.3.70)$$

$$f_{\mu\lambda}^{(3)}(x) = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Используя эти выражения, получаем

$$G_{123}^\dagger(x) = \partial_3 f_{12}^{(3)}(x) = 2\pi\rho\delta(x_1)\delta(x_2)\partial_3[\cos\theta_1(x)], \quad (10.3.71)$$

$$G_{\mu\nu\lambda}^\dagger(x) = 0 \text{ в остальных случаях}$$

и

$$f_{12}\mathbf{e}_3 = (f_{12} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{e}_3 = (-i)f_{12}^{(1)}\mathbf{e}_2 + if_{12}^{(2)}\mathbf{e}_1 =$$

$$= -2\pi i\rho\delta(x_1)\delta(x_2)\sin\theta_1(x)\mathbf{e}_2 + i[\partial_1, \partial_2]\theta_1(x)\mathbf{e}_1, \quad (10.3.72a)$$

$$f_{\mu\nu}\mathbf{e}_3 = i[\partial_\mu, \partial_\nu]\theta_1(x)\mathbf{e}_1 \text{ в остальных случаях.} \quad (10.3.72b)$$

Отсюда видно, что $f_{\mu\nu}\mathbf{e}_3$ (а следовательно, и \mathcal{D}) имеет линейные особенности, которые возникают за счет $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$.

Если выбрать $\theta_1(x)$ следующим образом:

$$\cos\theta_1(x) = x_3/r \quad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad (10.3.73)$$

то получим

$$\begin{aligned} \delta(x_1)\delta(x_2)\cos\theta_1(x) &= \varepsilon(x_3)\delta(x_1)\delta(x_2), \\ \delta(x_1)\delta(x_2)\sin\theta_1(x) &= 0 \text{ при } x_3 \neq 0 \end{aligned} \quad (10.3.74a)$$

и

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] \theta_1(x) = 0 \quad \text{при } x \neq 0. \quad (10.3.746)$$

Значение θ_1 в начале координат ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) не является хорошо определенным. В этом случае из (10.3.72) следует

$$f_{\mu\nu} e_3 = 0 \quad \text{при } x \neq 0. \quad [(10.3.75)]$$

В данном конкретном случае область \mathcal{D} не содержит линий; она представляет собой точку в начале координат. Поскольку (10.3.71) и (10.3.74) приводят к соотношению

$$G_{123}^\dagger(x) = 2\pi\rho \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3), \quad (10.3.76)$$

\mathcal{D}_1 также оказывается точкой, расположенной в начале координат: $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$. Отсюда видно, что сделанный выше выбор отвечает существованию статического монополя в начале координат. Однозначность $e(x)$ обеспечивает целочисленность ρ , а это означает, что в данном случае $e^{i\theta_1(x)}$ однозначно.

Обобщим наше рассмотрение на такую ситуацию, когда на третьей оси расположено несколько монополей. Потребовав, чтобы $G_{123}^\dagger(x)$ из (10.3.71) представляла собой суперпозицию δ -функций, получим

$$\delta(x_1) \delta(x_2) \partial_3 [\cos \theta_1(x)] = \frac{2}{\rho} \delta(x_1) \delta(x_2) \sum_i \nu_i \delta(x_3 - a_i), \quad (10.3.77)$$

где $a_1 < a_2 < \dots$. Благодаря условию квантования здесь ν_i — целые числа. Таким образом, имеем

$$\delta(x_1) \delta(x_2) \cos \theta_1(x) = \left(\nu_0 + \frac{2}{\rho} \sum_i \nu_i \theta(x_3 - a_i) \right) \delta(x_1) \delta(x_2). \quad (10.3.78)$$

Чтобы в качестве топологических особенностей выступали только монополи, необходимо обращение $\delta(x_1) \delta(x_2) \sin \theta_1(x)$ в нуль везде, кроме $x_3 = a_1, a_2, \dots$ (см. (10.3.72)). Это означает, что $\cos \theta_1 = \pm 1$ на каждом из отрезков оси x_3 (т. е. при $x_1 = x_2 = 0$), на которые ее разбивают точки a_i . При этом имеются следующие возможности выбора параметров:

$$1) \nu_0 = -1, \quad \nu_1 = \rho, \quad \nu_2 = -\rho, \dots, \quad (10.3.79a)$$

$$2) \nu_0 = 1, \quad \nu_1 = -\rho, \quad \nu_2 = \rho, \dots. \quad (10.3.79б)$$

Отсюда следует, что монополи и антимнополи должны чередоваться вдоль третьей оси при данном конкретном типе упорядочения, отвечающем одноосной симметрии [13, 16].

В общем случае топологический заряд зависит от выбора замкнутой поверхности C_s , и мы имеем соотношение

$$4\pi\nu = \int dx_1 dx_2 \int_a^b dx_3 G_{123}^+(x) = 4\pi \frac{1}{2} [\cos \theta_1(0, 0, b) - \cos \theta_1(0, 0, a)]. \quad (10.3.80)$$

Замечание об инстантоне. Если заменить время t на it , то пространство Минковского превратится в четырехмерное евклидово пространство. В этом пространстве ($d = 4$) квадруплетная модель ($N = 4$) неабелевой симметрии приводит к появлению топологического объекта в некоторой точке пространства-времени (например, при $x_\mu = 0$), поскольку $d - N = 0$; эта точка представляет собой область \mathcal{D}_{d-N} . Как показывает общее рассмотрение, проведенное в данной главе, указанный объект обладает топологическим квантовым числом. Этот объект называется инстантоном [17, 18]; он привлек большое внимание физиков, работающих в области частиц высоких энергий.

Метод бозонного преобразования. Зададим теперь вопрос, каким образом за счет бозонного преобразования возникают рассматриваемые топологические объекты. До сих пор мы описывали топологические свойства с помощью функций $U(x)$ и $f_{\mu\nu}(x)$. С другой стороны, рассматриваемые топологические объекты образуются посредством конденсации некоторых бозонов $\{\chi^a(x); a = 1, \dots, m\}$. Нас интересует теперь, как $f_{\mu\nu}$ зависит от параметров бозонного преобразования $f^a(x)$. В методе бозонного преобразования сначала рассматривают гейзенберговское поле ψ , которое реализуется в пространстве Фока физических полей $\Psi = \Psi(x; \chi^a)$. Гейзенберговское поле, отвечающее той же системе, но с протяженными объектами, описывается операторами $\psi^f(x) = \psi(x; \chi^a + f^a)$, где неоператорные функции f^a удовлетворяют уравнениям свободного поля для χ^a . Все неоператорные величины, такие, как матричные элементы матрицы калибровочного преобразования $U(x)$, компоненты параметра порядка $\nu(x)$, величины $f_{\mu\nu}$ и т. д., являются некоторыми функционалами от $f^a(x)$. Следовательно, происхождение топологических особенностей должно быть связано с функцией f^a , определяющей бозонное преобразование. Чтобы выявить этот факт, представим $U(x)$ в виде

$$U(x) = \sum_{n, m, l} [f(x)]^n [\partial f(x)]^m \int d\xi_1 \dots d\xi_l F_l(x; \xi_1 \dots \xi_l) \partial f(\xi_1) \dots \partial f(\xi_l), \quad (10.3.81)$$

где f обозначает f^a , а символ ∂f отвечает некоторым производным от f^a ; F_l — коэффициент разложения, являющийся однозначной функцией своих аргументов $(x, \xi_1 \dots \xi_l)$. Поскольку ∂f^a — однозначные функции и имеет место соотношение

$$[\partial_\mu, \partial_\nu][f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}[\partial_\mu, \partial_\nu]f(x), \quad (10.3.82)$$

получаем

$$[\partial_\mu, \partial_\nu]U(x) = \sum_a \frac{\delta U(x)}{\delta f^a(x)} [\partial_\mu, \partial_\nu]f^a(x), \quad (10.3.83)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\delta U(x)}{\delta f^a(x)} = & \sum_{n, m, l} \left(\frac{\delta}{\delta f^a(x)} [f(x)]^n \right) [\partial f(x)]^m \times \\ & \times \int d\xi_1 \dots d\xi_l F_l(x, \xi_1 \dots \xi_l) \partial f(\xi_1) \dots \partial f(\xi_l). \end{aligned} \quad (10.3.84)$$

Таким образом, мы выяснили, что матрица $[(f_{\mu\nu})_{\alpha\beta}]$ имеет вид

$$f_{\mu\nu}(x) = \sum_a C_a [f] [\partial_\mu, \partial_\nu] f^a(x), \quad (10.3.85)$$

где

$$C_a[f] = U^{-1} \delta U / \delta f^a. \quad (10.3.86)$$

Это соотношение показывает в явном виде, как топологическая особенность в $f_{\mu\nu}$ появляется за счет топологической особенности в $f^a(x)$. В разд. 10.1 показано, что топологическая особенность у f^a может возникнуть в том и только в том случае, если в энергетическом спектре χ^a -бозона отсутствует щель. Следовательно, топологические объекты, рассмотренные в этом разделе, могут возникнуть (даже в случае неабелевой симметрии) только путем конденсации бесщелевых бозонов.

Теория калибровочных полей. Выше мы рассмотрели гейзенберговский оператор ψ , отвечающий N -мерному представлению компактной группы G , имеющей размерность n , и ввели матрицу калибровочного преобразования $U(x)$. В общем случае ψ включает в себя гейзенберговские поля. Рассмотрим теперь случай, когда ψ — гейзенберговское поле, и введем n векторных полей A_μ (т. е. A_μ^α , $\alpha = 1, \dots, n$), а затем рассмотрим лагранжиан $\mathcal{L}(\psi, A_\mu)$, инвариантный относительно преобразования

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x) \psi(x), \quad (10.3.87a)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = U(x) \left(A_\mu(x) - \frac{1}{g} f_\mu(x) \right) U^{-1}(x), \quad (10.3.87b)$$

где f_μ определено соотношением (10.3.8). Здесь g — некоторая константа; $A_\mu(x)$ в (10.3.87б) — матрица $A_\mu(x) = A_\mu^\alpha \cdot t_\alpha$. Теория такого типа называется калибровочной теорией, а $A_\mu(x)$ — калибровочным полем. Простейшим примером подобной теории является квантовая электродинамика. Вихрь в сверхтекучей жидкости представляет собой топологический объект с линейной особенностью в модели, отвечающей абелевой симметрии (т. е. фазовой инвариантности), а f_μ принимает вид $\partial_\mu \lambda(x)$. В данном случае калибровочное поле отсутствует. Вихрь в сверхпроводнике — топологический объект того же типа, но уже в калибровочной теории (т. е. в квантовой электродинамике). Калибровочная теория, соответствующая неабелевой симметрии, называется теорией Янга—Миллса [19]. Если $U(x)$ не обладает топологическими особенностями, то наличие $f_\mu(x)$ не приводит к наблюдаемым эффектам благодаря калибровочной инвариантности теории. Теория калибровочных полей, в которой отсутствует ψ , называется чисто калибровочной теорией.

Если мы введем величину

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)], \quad (10.3.88)$$

то из (10.3.87) получим

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu}(x) &\equiv \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x) + ig[A'_\mu(x), A'_\nu(x)] = \\ &= U(x) \left(F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{g} f_{\mu\nu}(x) \right) U^{-1}(x), \end{aligned} \quad (10.3.89)$$

где $f_{\mu\nu}$ определено в соотношении (10.3.16). Если у $U(x)$ нет топологической особенности, то мы находим, что $f_{\mu\nu} = 0$, и, следовательно,

$$F'_{\mu\nu}(x) = U(x) F_{\mu\nu}(x) U^{-1}(x). \quad (10.3.90)$$

Таким образом, лагранжиан

$$\mathcal{L}(A_\mu) = -\frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{Tr}[F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)] \quad (10.3.91)$$

инвариантен относительно калибровочного преобразования, если у $U(x)$ отсутствуют топологические особенности¹⁾. Поэтому мы будем использовать $\mathcal{L}(A_\mu)$ в качестве лагранжиана чисто калибровочной теории. Лагранжиан $\mathcal{L}(A_\mu)$ приводит к уравнению для чистого поля Янга—Миллса

$$-\partial_\mu F_\nu^\mu(x) + ig[A_\mu(x), F_\nu^\mu(x)] = 0. \quad (10.3.92)$$

¹⁾ Напомним, что в квантовой электродинамике требуется, чтобы калибровочная функция $\lambda(x)$ имела фурье-образ.

Вводя величины $F_{\mu\nu} (=F_{\mu\nu}^\alpha, \alpha = 1, \dots, n)$ и $A_\mu (=A_\mu^\alpha, \alpha = 1, \dots, n)$:

$$F_{\mu\nu}(x) = \sum_{\alpha} F_{\mu\nu}^{\alpha} t_{\alpha}, \quad (10.3.93a)$$

$$A_{\mu}(x) = \sum_{\alpha} A_{\mu}^{\alpha}(x) t_{\alpha}, \quad (10.3.93b)$$

можем написать

$$\mathcal{L}(A_{\mu}) = -\frac{1}{4} \int d^4x [F_{\mu\nu}(x) \cdot F^{\mu\nu}(x)]. \quad (10.3.94)$$

Матрица t_{α} нормирована так, что $\text{Tr}[t_{\alpha}t_{\beta}] = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}$.

В качестве примера рассмотрим теорию Янга—Миллса, отвечающую группе $SU(2)$, где \mathbf{t} — матрица размерности 2×2 :

$$t_{\alpha} = \sigma_{\alpha}/2, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (10.3.95)$$

Здесь σ_{α} — спиновые матрицы Паули размерности 2×2 .

Особое внимание было привлечено к решениям вида

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{g} \bar{\sigma}_{\mu\nu} \partial^{\nu} \rho(x), \quad (10.3.96)$$

где $\{x_{\mu}\}$ -пространство считается евклидовым. Здесь $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{0j} &= -\bar{\sigma}_{j0} = -\frac{1}{2} \sigma_j \quad (j = 1, 2, 3), \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma_k. \end{aligned} \quad (10.3.97)$$

Из уравнения Янга—Миллса (10.3.92) получается следующее уравнение для ρ :

$$\partial^2 \partial_{\mu} \rho + 2 \partial^2 \rho \partial_{\mu} \rho - \partial_{\mu} (\partial_{\alpha} \rho)^2 - 2 \partial_{\mu} \rho (\partial_{\alpha} \rho)^2 = 0. \quad (10.3.98)$$

В частности, исследуем следующие два решения: решение Полякова [17]

$$\rho_{\rho} = \ln(1 + r^2), \quad (10.3.99)$$

и решение т'Хофта [18]

$$\rho_{\tau} = -\ln\left(1 + \frac{1}{r^2}\right). \quad (10.3.100)$$

Здесь $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2$. Из решения Полякова следует

$$A_{\mu}^{\rho} = \frac{1}{g} \bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{2x^{\nu}}{r^2} \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right), \quad (10.3.101)$$

а из решения т'Хофта получаем

$$A_{\mu}^T = \frac{1}{g} \bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{2x^{\nu}}{r^2} \left(\frac{1}{1+r^2} \right). \quad (10.3.102)$$

Определим величину $a_{\mu}(x)$ по аналогии с (10.3.96), заменив $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ на $\sigma_{\mu\nu}$:

$$a_{\mu}(x) = \frac{1}{g} \sigma_{\mu\nu} \partial^{\nu} \rho(x), \quad (10.3.103)$$

где

$$\sigma_{0j} = -\sigma_{j0} = \frac{1}{2} \sigma_j, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (10.3.104)$$

Любопытно, что $a_{\mu}(x)$ также удовлетворяет уравнению Янга—Миллса (10.3.92). С помощью некоторых преобразований можно показать, что A_{μ}^P и a_{μ}^T связаны друг с другом соотношением

$$A_{\mu}^P = U(x) \left(a_{\mu}^T + \frac{1}{g} f_{\mu} \right) U^{-1}(x). \quad (10.3.105)$$

Здесь $U(x)$ — матрица калибровочного преобразования, отвечающая группе $SU(2)$:

$$U(x) = e_0(x) + \sum_{j=1}^3 e_j(x) \sigma_j, \quad (10.3.106)$$

где

$$e_{\mu}(x) = x_{\mu}/r, \quad r^2 = x_{\mu}x^{\mu}, \quad (10.3.107)$$

которая удовлетворяет условию

$$e_0^2 + \sum_i e_i^2 = 1. \quad (10.3.108)$$

Топологическая особенность матрицы $U(x)$ представляет собой точку с координатами $x_{\mu}^* = 0$, т. е. особенность типа инстантона. Заметим, что $f_{\mu}(x)$ в выражении (10.3.106) можно представить в виде

$$f_{\mu}(x) \equiv -iU^{-1}(x) \partial_{\mu}U(x) = -\sigma_{\mu\nu} \partial^{\nu} \ln r^2, \quad (10.3.109a)$$

а

$$\bar{f}_{\mu}(x) \equiv -iU(x) \partial_{\mu}U^{-1}(x) = -\bar{\sigma}_{\mu\nu} \partial^{\nu} \ln r^2. \quad (10.3.109b)$$

Решение Полякова A_{μ}^P на бесконечности стремится к чисто калибровочной функции $\bar{f}_{\mu}(x)$, в то время как решение т'Хофта a_{μ}^T в начале координат стремится к $f_{\mu}(x)$:

$$A_{\mu}^P \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{g} \bar{f}_{\mu}, \quad (10.3.110a)$$

$$a_{\mu}^T \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{1}{g} f_{\mu}. \quad (10.3.110b)$$

Кроме того, A_μ^P — везде регулярная функция, а a_μ^T имеет особенность при $r = 0$. Поэтому a_μ^T можно рассматривать как решение с источником в начале координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Matsumoto H., Papastamatiou N. J., Umezawa H.*, Nucl. Phys., **B97**, 90 (1975); Phys. Rev., **D14**, 3536 (1976).
2. *Wadati M., Matsumoto H., Umezawa H.*, Phys. Rev., **D18**, 520 (1978).
3. *Matsumoto H., Sodano P., Umezawa H.*, Phys. Rev., **D19**, 511 (1979).
4. *Umezawa H., Matsumoto H.*, Orders in nature: from quantum to classical. Symmetries in science, Plenum, New York, 1980, p. 411.
5. *Coleman S.*, Lecture at Erice Summer School, 1976.
6. *Friedel J.*, Dislocations, Pergamon Press, Oxford, London, New York, 1964. [Имеется перевод: Фридель Ж. Дислокации. — М.: Мир, 1967.]; *Hirth J. P., Lothe J.*, Theory of Dislocations, McGraw-Hill, New York, 1968. [Имеется перевод: Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. — М.: Атомиздат, 1972.]
7. *Wadati M., Matsumoto H., Umezawa H.*, Phys. Rev., **B18**, 4077 (1978).
8. *'t Hooft G.*, Nucl. Phys., **B79**, 276 (1974).
9. *Анисимов С. И., Дзялошинский И. Е.*, ЖЭТФ, **63**, 1460 (1972); *Toulouse G.*, J. Phys. Lett., **38**, L67 (1977).
10. *Feldtkeller E.*, Zs. Angew. Phys., **19**, 530 (1965); *Slonczewski J. C.*, J. Appl. Phys., **45**, 3129 (1974); *Hagedorn F. B.*, J. Appl. Phys., **45**, 2705 (1974).
11. *Maki K.*, Physica, **90B**, 84 (1977).
12. *Finkelstein D.*, J. Math. Phys., **7**, 1218 (1966); *Arafune J., Freund P. G. O., Goebel C. J.*, J. Math. Phys., **16**, 433 (1975); *Patani A., Schlindwein M., Shafi O.*, J. Phys., **A9**, 1513 (1976); *Toulouse G., Kleman M.*, J. Phys. Lett., **37**, L149 (1976); *Kleman M., Michel L., Toulouse G.*, J. Phys. Lett., **38**, L195 (1977); *Воловик Г. Е., Минеев В. П.*, ЖЭТФ, **72**, 2256 (1977).
13. *Matsumoto H., Umezawa H., Umezawa M.*, Fortschr. Phys., **29**, 441 (1981).
14. *Milnor J. W.*, Topology from the differential view point, University of Virginia, Charlottesville, 1965. [Имеется перевод переработанного издания: Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1972.]
15. *Поляков А.*, ЖЭТФ, **68**, 1975 (1975); *Тюпкин Ю. С., Фатеев В. А., Шварц А. С.*, Письма в ЖЭТФ, **21**, 91 (1975).
16. *Schiff H.*, J. Phys., **A11**, 173 (1978).
17. *Belavin A., Polyakov A., Schwartz A., Tyupkin Y.*, Phys. Lett., **B59**, 85 (1975).
18. *'t Hooft G.*, Coral Gable Conf., 1977; *Jackiw R., Nohl C., Rebbi C.*, Phys. Rev., **D15**, 1642 (1977).
19. *Yang C. N., Mills R. L.*, Phys. Rev., **96**, 191 (1954).

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

II. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

11.1. Вывод классического уравнения Максвелла

Макроскопические явления. Эта глава посвящена исследованию макроскопических электромагнитных явлений в твердых телах с помощью метода бозонного преобразования, который развит в двух предыдущих главах. Хотя все явления, изучаемые физикой твердого тела, имеют микроскопическую природу, многие из них проявляются на макроскопическом уровне. Например, проводимость есть отношение макроскопического тока к макроскопическому электромагнитному полю. Вихри в сверхпроводниках дают нам пример макроскопических объектов с топологическими особенностями. В этом разделе мы выведем уравнение типа уравнения Максвелла, которое определяет макроскопический ток и электромагнитное поле. Чтобы проделать это, мы осуществим некоторые бозонные преобразования в приведенных в гл. 8 динамических отображениях величин A_μ и j_μ .

Динамические отображения. Поле плазмонов μ_μ^0 , голдстоуновские бозоны χ^0 и духи b^0 появляются как в случае сверхпроводников, так и в случае нормальных проводников. Введем обозначение

$$f^0(x) = Z_c(\partial) \chi^0, \quad (11.1.1)$$

где

$$Z_{c-}(\partial) \equiv \frac{1}{2v} Z_\chi^{1/2}(\partial) \quad (11.1.2a)$$

в случае сверхпроводников (см. (8.1.126)) и

$$Z_c(\partial) \equiv \frac{e}{\hbar c} Z_B^{-1}(\partial) \quad (11.1.2b)$$

в случае нормальных проводников (см. (8.2.30)). Согласно (8.1.112) или (8.2.30), динамическое отображение гейзенберговского поля электронов содержит фазовый множитель $\exp(-if^0)$. В обоих случаях, исходя из (8.1.50) или (8.2.31), получаем

$$B = -\frac{e}{\hbar c} Z_c^{-1}(\partial) (b^0 - \chi^0). \quad (11.1.3)$$

Из лагранжиана (8.1.1) можно видеть, что существует электромагнитное взаимодействие двух типов. Одно из них вводится

путем замены $\partial_\mu \rightarrow i(e/\hbar c) A_\mu + \partial_\mu$ в свободном лагранжиане для электронов. Это взаимодействие называется минимальным взаимодействием. Взаимодействие другого типа зависит от вектор-потенциала только через F_{ij} . Оно называется взаимодействием F_{ij} -типа. Обозначим через a_μ^0 линейные члены в динамическом отображении A_μ :

$$A_\mu = a_\mu^0 + \dots \quad (11.1.4)$$

В случае сверхпроводимости из (8.1.65) видно, что a_μ^0 представляет собой линейную комбинацию u_μ^0 и $\partial_\mu b^0$. В случае нормальных проводников a_μ^0 кроме u_μ^0 и $\partial_\mu b^0$ содержит еще B . Поскольку ψ имеет фазовый множитель $\exp(-if^0)$, определим функцию $\hat{\psi} \equiv \exp(if^0)\psi$, которая калибровочно инвариантна. Выражая через $\hat{\psi}$ уравнение Гейзенберга для поля электронов, видим, что в случае минимального взаимодействия A_μ заменяется выражением $A_\mu - (\hbar c/e) \partial_\mu f^0$, линейный член которого представляет собой комбинацию $[a_\mu^0 - (\hbar c/e) \partial_\mu f^0]$. Поэтому в динамическом отображении любого калибровочно инвариантного оператора величина $\partial_\mu f^0$ появляется только в указанной выше комбинации, в то время как a_μ^0 может также входить в выражение вида

$$f_{ij}^0 = \partial_i a_j^0 - \partial_j a_i^0. \quad (11.1.5)$$

Таким образом, динамические отображения A_μ и ψ имеют вид

$$A_\mu(x) = a_\mu^0(x) + : \tilde{A}_\mu(x; a_\lambda^0 - \frac{\hbar c}{e} \partial_\lambda f^0, f_{ij}^0, B, \varphi^0) :, \quad (11.1.6a)$$

$$\psi(x) = : \exp[-if^0(x)] \hat{\psi}(x; a_\mu^0 - \frac{\hbar c}{e} \partial_\mu f^0, f_{ij}^0, B, \varphi^0) :, \quad (11.1.6b)$$

где φ^0 — поле квазиэлектронов. Эти соотношения следуют из (8.1.128) и (8.1.129), а также из (8.2.29) и (8.2.30).

Поскольку ток j_μ калибровочно инвариантен, его динамическое отображение имеет вид

$$j_\mu = j_\mu^0 - \tilde{\Sigma}_\mu^{ij}(\partial) f_{ij}^0 + c_\mu(\partial) B + \dots, \quad (11.1.7)$$

$$\text{где} \quad j_\mu^0 = -\Sigma_\mu^\nu(\partial) \left(a_\nu^0 - \frac{\hbar c}{e} \partial_\nu f^0 \right). \quad (11.1.8)$$

Многоточие в формуле (11.1.7) заменяет нормальные произведения более высоких порядков, составленные из $a_\lambda^0 - (\hbar c/e) \partial_\lambda f^0$, f_{ij}^0 , B и φ^0 . Формула (11.1.7) включает динамические отображения j_μ (как в случае сверхпроводника, так и в случае нормального металла), полученные в гл. 8. Из приведенного выше результата видим, что

$$\Sigma_\mu^\nu(\partial) + \tilde{\Sigma}_\mu^{ij}(\nabla_i g_j^\nu - \nabla_j g_i^\nu)$$

представляет собой неприводимую часть собственной энергии фотона. Здесь g_{μ}^{ν} — метрический тензор.

Динамическое отображение j_{μ}^0 получается из (11.1.8), если мы исключим из $\Sigma_{\mu}^{\nu}(\partial)$ и $\tilde{\Sigma}^{\lambda\nu}(\partial)$ производные по времени, используя уравнения свободных полей для u_{μ}^0 и χ^0 и b^0 . Сделаем теперь очень важное замечание относительно бозонного преобразования. Когда f^0 подвергается бозонному преобразованию $f^0 + f(x)$ и неоператорная функция $f(x)$ содержит топологическую особенность, $D(\partial)\partial_{\mu}f(x) \neq 0$, даже если $D(\partial)f(x) = 0$. Поэтому, подготавливая формулу, описывающую динамическое отображение, для осуществления бозонного преобразования, необходимо учитывать порядок действия производных в тех случаях, когда для исключения производных по времени используются уравнения свободных полей. В (11.1.8) сохранены производные по времени.

Выразим уравнения свободных полей, используя не u_{μ}^0 , χ^0 и b^0 , а a_{μ}^0 , f^0 , B . Соответствующие уравнения имеют вид

$$D(\partial)f^0 = 0, \quad (11.1.9a)$$

$$D(\partial)B = 0, \quad (11.1.9б)$$

$$(-\partial^2 g_{\mu}^{\nu} + \partial_{\mu}\partial^{\nu})a_{\nu}^0 = j_{\mu}^0 - \tilde{\Sigma}_{\mu}^{ij}(\partial)f_{ij}^0 + c_{\mu}(\partial)B. \quad (11.1.10)$$

Бозонное преобразование. Рассмотрим бозонные преобразования, которые оставляют приведенные выше уравнения неизменными:

$$f^0(x) \rightarrow f^0(x) + f(x), \quad (11.1.11a)$$

$$B(x) \rightarrow B(x), \quad (11.1.11б)$$

$$a_{\mu}^0(x) \rightarrow a_{\mu}^0(x) + a_{\mu}(x). \quad (11.1.11в)$$

Поскольку это преобразование должно сохранить инвариантность уравнений свободного поля (11.1.9), неоператорные функции $f(x)$ и $a_{\mu}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$(-\partial^2 g_{\mu}^{\nu} + \partial_{\mu}\partial^{\nu})a_{\nu} = J_{\mu} - \tilde{\Sigma}_{\mu}^{ij}(\partial)f_{ij}, \quad (11.1.12)$$

$$D(\partial)f(x) = 0, \quad (11.1.13)$$

где

$$J_{\mu} = -\Sigma_{\mu}^{\nu}(\partial)\left(a_{\nu} - \frac{\hbar c}{e}\partial_{\nu}f\right), \quad (11.1.14)$$

$$f_{ij} = \partial_i a_j - \partial_j a_i. \quad (11.1.15)$$

Заметим теперь, что условия калибровки (8.1.62) или (8.2.7) представляют собой составную часть уравнения Гейзенберга. Эти условия приводят к уравнению

$$D^{\mu}(\partial)a_{\mu} = 0. \quad (11.1.16)$$

Уравнения (11.1.12), (11.1.13) и (11.1.16) называют уравнениями максвелловского типа. Эти уравнения отвечают за макроскопические аспекты электромагнитных свойств твердых тел [1—3]. Заметим, что условие, определяющее физическое состояние (8.1.35) или (8.2.10), не изменяется в результате преобразования (11.1.11).

Формулы (11.1.6а) и (11.1.7) показывают, что вещественный классический вектор-потенциал и ток даются выражениями

$$\tilde{a}_\mu = \langle 0 | A_\mu | 0 \rangle = \quad (11.1.17)$$

$$= a_\mu + \dots, \quad (11.1.18)$$

$$\tilde{J}_\mu = \langle 0 | j_\mu | 0 \rangle = \quad (11.1.19)$$

$$= J_\mu - \tilde{\Sigma}_\mu^{ij}(\partial) f_{ij} + \dots \quad (11.1.20)$$

Здесь многоточие заменяет произведения более высоких порядков, составленные из J_λ и f_{ij} .

Беря вакуумное среднее от уравнения Гейзенберга (8.1.16) или (8.2.5), мы можем получить классическое уравнение Максвелла

$$(-\partial^2 g_\mu^\nu + \partial_\mu \partial^\nu) \tilde{a}_\nu = \tilde{J}_\mu. \quad (11.1.21)$$

Из этого уравнения видно, что члены высших порядков в разложении (11.1.20) включают в качестве множителя оператор $(-\partial^2 g_\mu^\nu + \partial_\mu \partial^\nu)$:

$$\tilde{J}_\mu(x) = J_\mu(x) - \tilde{\Sigma}_\mu^{ij}(\partial) f_{ij}(x) + (-\partial^2 g_\mu^\nu + \partial_\mu \partial^\nu) F_\nu(x; J_\lambda, f_{ij}), \quad (11.1.22)$$

где F_ν — нелинейные члены разложения, составленные из J_μ и f_{ij} .

Топологические особенности. Рассмотрим теперь важную теорему, согласно которой бозонное преобразование (11.1.11) может приводить к макроскопическим эффектам только в том случае, когда $f(x)$ обладает некоторыми топологическими особенностями. Чтобы доказать это, вспомним уравнение (8.1.143) или (8.2.44), в которых величина $\Sigma_{\mu\nu}$ разделена на продольную и поперечную части:

$$\Sigma_{\mu\nu}(p) = \Sigma_T(p) T_{\mu\nu} + \Sigma_0(p) (p^2 L_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu). \quad (11.1.23)$$

Заметим, что, поскольку $p^\mu L_{\mu\nu} = p_\nu$ и $L_{\mu\nu} p^\nu = p_\mu$, мы имеем

$$p^2 L_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu = (p^2 g_\mu^\lambda - p_\mu p^\lambda) L_{\lambda\nu} = \quad (11.1.24)$$

$$= L_{\mu\nu} (p^2 g_\nu^\lambda - p^\lambda p_\nu). \quad (11.1.25)$$

Заметим также, что

$$T_i^{\nu} \partial_{\nu} f = T_i^j \partial_j f = \frac{1}{\nabla^2} (\nabla \delta_{ij} - \partial_i \partial_j) \partial_j f = \frac{1}{\nabla^2} \partial_j [\partial_j, \partial_i] f, \quad (11.1.26)$$

$$(\partial^2 g^{\lambda\nu} - \partial^{\lambda} \partial^{\nu}) \partial_{\nu} f = \partial^{\nu} [\partial_{\nu}, \partial^{\lambda}] f. \quad (11.1.27)$$

Если f не имеет топологических особенностей, то $[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] f = 0$ и, следовательно, $\Sigma_{\mu}^{\nu}(\partial) \partial_{\nu} f = 0$. Таким образом, f выпадает из уравнения максвелловского типа (11.1.12), т. е. любое f без топологических особенностей не приводит к макроскопическим явлениям. Причина этого лежит в калибровочной инвариантности теории. Поскольку f — фаза электронного поля, при отсутствии у нее какой-либо топологической особенности ее действие заключается просто в изменении калибровки и не приводит к наблюдаемому эффекту. Как видно из уравнения (11.1.1), f^0 совпадает с голдстоуновским полем χ^0 (если исключить множитель Z_c). Поскольку f^0 — свободное поле, соответствующее голдстоуновскому кванту, оно имеет фурье-представление, выражаемое через операторы рождения и уничтожения. Как показано в разд. 8.1, состояния, отвечающие этому голдстоуновскому кванту (а также д́ухам), ненаблюдаемы благодаря накладываемому на физические состояния ограничению (8.1.35) или (8.2.10). Эта ситуация описывается посредством утверждения, что поле f^0 (а также поле д́ухов b^0) устраняется с помощью выбора соответствующей калибровки; оно не наблюдается. Если неоператорная функция $f(x)$ имеет фурье-образ, то ее тоже можно исключить посредством выбора калибровки. Но $f(x)$ с топологическими особенностями может приводить к наблюдаемым явлениям.

Если f не вносит вклада в J_{μ} , то уравнение (11.1.12) принимает вид

$$(-\partial^2 g_{\mu}^{\nu} + \partial_{\mu} \partial^{\nu}) a_{\nu} = -\Sigma_{\mu}^{\nu}(\partial) a_{\nu} - \tilde{\Sigma}_{\mu}^{ij}(\partial) f_{ij}. \quad (11.1.28)$$

Это уравнение, описывающее классические плазменные колебания.

В разд. 10.1 мы убедились в том, что макроскопические объекты в нормальных проводниках не обладают топологическими квантовыми числами. Следовательно, эти объекты неустойчивы. Поэтому мы можем пренебречь $f(x)$ в уравнении максвелловского типа (11.1.12). С другой стороны, макроскопические объекты в сверхпроводниках могут иметь топологические квантовые числа (например, связанные с квантованием магнитного потока вихрей). Таким образом, $f(x)$ играет существенную роль при описании макроскопических явлений в сверхпроводниках.

Любопытно, что классическое уравнение Максвелла имеет один и тот же вид как в случае сверхпроводников, так и в случае нормальных проводников. Но поведение Σ_{μ}^{ν} в статическом пределе различно: для сверхпроводника величина $\Sigma_{\mu}^{\nu}(0)$ отлична от нуля,

в то время как для нормального металла она обращается в нуль. Благодаря наличию члена $\sum_{\mu}^{\nu} a_{\nu}$ в выражении для тока даже в статическом пределе возникает мейсснеровский ток и появляется глубина проникновения в сверхпроводниках, а этот же член при более высоких частотах приводит к тому, что свет почти полностью отражается как от сверхпроводников, так и от нормальных металлов (плазменная частота). Другая характерная особенность, которая отличает сверхпроводники от нормальных проводников и делает сверхпроводники диамагнитными, заключается в квантовании потока для вихрей в сверхпроводниках. Благодаря этому прохождение магнитного потока через сверхпроводник затруднено. Существует еще одно свойство, отличающее сверхпроводники, а именно их бесконечная проводимость. Это свойство рассматривается в разд. 11.2.

Линейное приближение. Если отсутствует взаимодействие F_{ij} -типа, то f_{ij} в выражении (11.1.22) обращается в нуль, а F_{μ} представляет собой разложение по степеням только линейного тока J_{μ} , причем каждый член размазан в пространстве. В этом случае член с F_{μ} может стать пренебрежимо малым, когда $J(x)$ не испытывает нигде резких изменений, поскольку на F_{μ} в (11.1.22) действует дифференциальный оператор. Итак, получаем

$$\tilde{J}_{\mu} \approx J_{\mu}, \quad (11.1.29)$$

$$\tilde{a}_{\mu} \approx a_{\mu}, \quad (11.1.30)$$

и линейное уравнение (11.1.12) превращается в уравнение Максвелла (11.1.21). Это приближение называется линейным.

11.2. Проводимость и диэлектрическая проницаемость

Магнитная индукция и электрическое поле. В этом разделе мы воспользуемся линейным приближением. Магнитная индукция \mathbf{B} и электрическое поле \mathbf{E} даются выражениями

$$B_i = (\nabla \times \mathbf{a})_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} f_{jk}, \quad (11.2.1)$$

$$E_i = (-\nabla_i a_0 + \partial_0 a_i) = f_{0i}. \quad (11.2.2)$$

Эти две величины связаны между собой соотношением

$$\partial_0 \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E}. \quad (11.2.3)$$

Заметим, что

$$\partial_0 \mathbf{B} \equiv -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\dot{\mathbf{B}},$$

Для простоты примем, что взаимодействие F_{ij} -типа отсутствует. Постулируем также наличие внешнего тока j_μ^{ext} , инжектируемого в металл. Таким образом, уравнение максвелловского типа принимает вид [1]

$$-\partial^\lambda f_{\lambda\mu} = -\Sigma_\mu^\lambda(\partial) \left(a_\lambda - \frac{\hbar c}{e} \partial_\lambda f \right) + j_\mu^{\text{ext}}. \quad (11.2.4)$$

При учете соотношения (11.1.23) уравнение (11.2.4) выражается через \mathbf{V} и \mathbf{E} следующим образом:

$$[1 + \Sigma_0(\partial)] \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\hbar c}{e} \Sigma_0(\partial) \nabla \cdot [\nabla, \partial_0] f + j_0^{\text{ext}}, \quad (11.2.5)$$

$$[1 + \Sigma_0(\partial)] (\nabla \times \mathbf{B} - \partial^0 \mathbf{E}) = [\Sigma_T(\partial) + \partial^2 \Sigma_0(\partial)] \frac{1}{V^2} \times \\ \times \left(\nabla \times \mathbf{B} + \frac{\hbar c}{e} \nabla_j [\nabla_j, \nabla] f \right) - \frac{\hbar c}{e} \Sigma_0(\partial) \partial^\lambda [\partial_\lambda, \nabla] f + j^{\text{ext}}. \quad (11.2.6)$$

Рассмотрим явления, обусловленные только внешним (пробным) током, т. е. при $f = 0$. Соотношения между пробным током и электромагнитным полем имеют вид

$$E_0^{\text{ext}} = [1 + \Sigma_0(\partial)] \nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (11.2.7)$$

$$\mathbf{j}^{\text{ext}} = \nabla \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{V^2} [\Sigma_T(\partial) - \partial_0^2 \Sigma_0(\partial)] \nabla \times \mathbf{B} - \Sigma_0(\partial) \dot{\mathbf{E}}. \quad (11.2.8)$$

Диэлектрическая проницаемость и проводимость. В электродинамике часто используется величина, называемая электрической индукцией \mathbf{D} , которая вводится с помощью соотношения

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = j_0^{\text{ext}}(x). \quad (11.2.9)$$

При этом тензор комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}_{ij}(\rho)$ определяется следующим образом:

$$D_i(\rho) = \hat{\epsilon}_{ij}(\rho) E_j(\rho), \quad (11.2.10)$$

где $\mathbf{D}(\rho)$ и $\mathbf{E}(\rho)$ — фурье-образы $\mathbf{D}(x)$ и $\mathbf{E}(x)$:

$$\mathbf{D}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4\rho \mathbf{D}(\rho) e^{i\rho x} \text{ и т. д.} \quad (11.2.11)$$

Имеется некоторая неопределенность в задании электрической индукции $\mathbf{D}(x)$, поскольку соотношение (11.2.9) не определяет ее однозначным образом.

Обычный метод исключения этой неоднозначности заключается в использовании поляризации \mathbf{P} , обусловленной локализованными молекулами или локализованными электронами и ионами; \mathbf{D} дается выражением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (11.2.12)$$

где использованы единицы Хевисайда. Поскольку

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} = j_0^{\text{ind}}(x), \quad (11.2.13)$$

где $j_\mu^{\text{ind}}(x)$ — наведенный ток, определяемый выражением

$$j_\mu^{\text{ind}}(x) = -\partial^\lambda f_{\lambda\mu}(x) - j_\mu^{\text{ext}}(x), \quad (11.2.14)$$

имеем

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{P}} = -\dot{j}_0^{\text{ind}}(x) = \nabla \cdot \mathbf{j}^{\text{ind}}(x), \quad (11.2.15)$$

Таким образом, можно отождествить

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{j}^{\text{ind}}(x). \quad (11.2.16)$$

Используя (11.2.10), (11.2.12) и (11.2.16), находим

$$j_i^{\text{ind}}(p) = ip_0[\delta_{ij} - \hat{\epsilon}_{ij}(p)] E_j(p). \quad (11.2.17)$$

Выражение для наведенного тока (11.2.14) может быть преобразовано с помощью соотношения (11.2.3), связывающего \mathbf{B} и \mathbf{E} , к виду

$$j_i^{\text{ind}}(p) = \frac{i}{p_0} \left(\Sigma_T(p) \delta_{ij} - [\Sigma_T(p) + p_0^2 \Sigma_0(p)] \frac{p_i p_j}{p^2} \right) E_j(p), \quad (11.2.18)$$

$$j_0^{\text{ind}}(p) = i \Sigma_0(p) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}). \quad (11.2.19)$$

Сравнивая (11.2.17) с (11.2.18), имеем

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{ij}(p) &= \delta_{ij} - \frac{1}{p_0^2} \left(\Sigma_T(p) \delta_{ij} - [\Sigma_T(p) + p_0^2 \Sigma_0(p)] \frac{p_i p_j}{p^2} \right) = \\ &= \delta_{ij} - \frac{1}{p_0^2} \Sigma_{ij}(p). \end{aligned} \quad (11.2.20)$$

Поскольку из (11.1.23) следует равенство

$$p^i \Sigma_{ij}(p) = p_0^2 \Sigma_0(p) p_j, \quad (11.2.21)$$

получаем соотношение

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = (1 + \Sigma_0(p)) \nabla \cdot \mathbf{E} = j_0^{\text{ext}}, \quad (11.2.22)$$

которое согласуется с определением (11.2.9). Подводя итог, замечаем, что тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}_{ij}$ может быть вычислен в соответствии с (11.2.20) [1¹]. Комплексная диэлектрическая проницаемость $\epsilon(p)$, определяемая из соотношения

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{D}(p) = \epsilon(p) \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \quad (11.2.23)$$

дается формулой

$$\epsilon(p) = 1 + \Sigma_0(p). \quad (11.2.24)$$

¹) См. статью Нозьера и Пайнса [1], в которой рассматриваются диэлектрическая проницаемость и проводимость нормальных металлов.

Это демонстрирует нам физический смысл перенормировки заряда: когда в систему вносится пробный заряд, полный заряд с учетом поляризации равен

$$e_r = \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon^{-1} (\partial) \nabla \cdot \mathbf{D} = e/(1 + \Sigma_0),$$

что приводит к формуле $e_r = -eZ_0$, где $Z_0 = -1/(1 + \Sigma_0)$ (см. (8.2.49) и (8.2.65)).

Тензор комплексной проводимости $\hat{\sigma}_{ij}(\rho)$ определяется соотношением

$$j_i^{\text{ind}}(\rho) = \hat{\sigma}_{ij}(\rho) E_j(\rho). \quad (11.2.25)$$

Отсюда, согласно (11.2.17), имеем

$$\hat{\sigma}_{ij}(\rho) = i\rho_0 [\delta_{ij} - \hat{\varepsilon}_{ij}(\rho)], \quad (11.2.26)$$

что с учетом (11.2.20) дает

$$\hat{\sigma}_{ij}(\rho) = i \frac{1}{\rho_0} \Sigma_{ij}(\rho). \quad (11.2.27)$$

В теории линейного отклика проводимость связывается с ослаблением корреляции ток—ток. Поскольку электрическое поле \mathbf{E} представляет собой сумму внешнего и наведенного полей, эффект перенормировки фононов включен в \mathbf{E} . Поэтому проводимость определяется не всей корреляционной функцией ток—ток, а только ее неприводимой частью (т. е. Σ_{ij}). Принимая это во внимание, мы видим, что соотношение (11.2.27) согласуется с результатом, следующим из теории линейного отклика [4].

Из (11.1.23) видно, что сумма $\Sigma_T(\rho) + \rho_0^2 \Sigma_0(\rho)$ должна обращаться в нуль при $\rho = 0$, чтобы функция $\Sigma_{\mu\nu}(\rho)$ была хорошо определена при $\rho = 0$. Используя еще раз (11.1.23), получим соотношение

$$\Sigma_{ij}(\rho) = -\rho_0^2 \Sigma_0(\rho) \delta_{ij} \quad \text{при } \rho = 0. \quad (11.2.28)$$

Таким образом, тензоры $\hat{\varepsilon}_{ij}(\rho)$ и $\hat{\sigma}_{ij}(\rho)$ в пределе $\rho = 0$ диагональны:

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\rho) = [1 + \Sigma_0(\rho)] \delta_{ij} \quad \text{при } \rho = 0, \quad (11.2.29a)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(\rho) = -i\rho_0 \Sigma_0(\rho) \delta_{ij} \quad \text{при } \rho = 0. \quad (11.2.29b)$$

Диэлектрическая проницаемость ε и проводимость σ в статическом пределе определяются вещественными частями $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ при $\rho = 0$:

$$\varepsilon = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \text{Re} [1 + \Sigma_0(\rho)]_{\rho=0}, \quad (11.2.30a)$$

$$\sigma = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \text{Im} [\rho_0 \Sigma_0(\rho)]_{\rho=0}. \quad (11.2.30b)$$

В случае нормальных металлов $\Sigma_0(p)$ обладает структурой

$$\Sigma_0(p) \approx -\frac{\sigma}{\rho_0 \tau} \frac{1}{\rho_0 + i/\tau}, \quad (11.2.31)$$

если учесть влияние примесей и температуры. Но в случае сверхпроводников из (8.1.149) видно, что $\Sigma_0(p)$ имеет полюс типа $1/D(p)$, обусловленный наличием коллективной моды. Даже при учете влияния примесей и температуры коллективная мода устойчива при $p = 0$. Следовательно, $\Sigma_0(p)$ при $p = 0$ имеет слагаемое с полюсом типа $1/\rho_0^2$ и дает вклад в σ типа $\delta(\rho_0)$, а это означает, что проводимость сверхпроводников бесконечна.

Наконец, исследуем поперечные составляющие $\Sigma_T(p)$ в однородном и статическом пределе. Соотношения (11.2.28) и (11.2.31) показывают, что в нормальном металле $\Sigma_T(p)$ обладает структурой

$$\Sigma_T(p) \approx \frac{\rho_0 \sigma}{\tau} \frac{1}{\rho_0 + i/\tau}. \quad (11.2.32)$$

Следовательно, в статическом пределе $\Sigma_T(p) = 0$, что означает отсутствие мейсснеровского тока. В сверхпроводниках существование полюса у $\Sigma_0(p)$ предотвращает обращение $\Sigma_T(p)$ в нуль в статическом пределе, обуславливая мейсснеровский ток. Таким образом, мейсснеровский ток и проводимость тесно связаны друг с другом.

11.3. Сверхпроводимость

Уравнение максвелловского типа. В случае сверхпроводимости могут появиться разнообразные топологические объекты, связанные с наличием топологических особенностей функции $f(x)$. Поэтому мы оставим эту функцию в уравнении максвелловского ¹⁾ типа (см. (11.1.12)). Сначала будем предполагать, что взаимодействие F_{ij} -типа отсутствует. При этом имеем ²⁾

$$(-\partial^2 g_\mu^\nu + \partial_\mu \partial^\nu) a_\nu = -\Sigma_\mu^\nu(\partial) \left(a_\nu - \frac{\hbar c}{e} \partial_\nu f \right) = 4\pi J_\mu, \quad (11.3.1)$$

$$D(\partial) f(x) = 0, \quad (11.3.2)$$

$$D^\mu(\partial) a_\mu(x) = 0. \quad (11.3.3)$$

¹⁾ В этом разделе при описании магнитных свойств сверхпроводников вместо единиц системы Хевисайда используются единицы гауссовой системы.

²⁾ Заметим, что если мы хотим использовать ковариантное выражение, ток J должен иметь множитель $1/c$.

Уравнение Лапласа. Введем функции

$$f_s(x) = \left(1 - \frac{1}{\nabla^2}\right) f(x) = \quad (11.3.4)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{t_x=t_y} dS_y \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \nabla_y f(y) - f(y) \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right), \quad (11.3.5)$$

$$f_t(x) = \frac{1}{\nabla^2} \nabla^2 f(x). \quad (11.3.6)$$

В формуле (11.3.5) dS_y — элемент поверхности, ограничивающей систему. Сингулярная область также должна быть заключена внутрь граничной поверхности. Поскольку $[\partial_\mu, \partial_\nu] \partial_\rho f = 0$ функция $f_t(x)$ не имеет особенностей. Таким образом, f_s — сингулярная часть f . Заметим, что ¹⁾

$$\nabla^2 f_s = 0. \quad (11.3.7)$$

Поскольку вклад в величину поля $f_{\mu\nu}$ и тока J_μ вносит только сингулярная часть, мы можем в (11.3.1) заменить f на f_s . При этом уравнение (11.3.2) заменяется уравнением Лапласа (11.3.7). Из этого уравнения видно, что ∇f_s — «поперечный вектор», так как $\nabla \cdot \nabla f_s = 0$. Другими словами, мы имеем

$$T_{ij} \partial_j f_s = \partial_i f_s. \quad (11.3.8)$$

Вот почему в уравнении максвелловского типа член с $\partial_\nu f$, хотя он по виду и является продольным, может привести к появлению поперечного тока.

Энергия протяженных объектов. Рассчитаем теперь энергию, связанную с макроскопическими током и полем, воспользовавшись линейным приближением. В этом приближении мы учитываем только билинейные члены в гамильтониане. Поэтому оператором энергии оказывается гамильтониан для свободных полей u^0 , b^0 и χ^0 . Поскольку

$$(-\partial^2 g_\mu^\nu + \partial_\mu \partial^\nu) u_\nu^0 = -\Sigma_\mu^\nu (\partial) u_\nu^0 \quad (11.3.9)$$

представляет собой уравнение для u_μ^0 , поле плазмонов в операторе энергии должно описываться членом

$$(1/8\pi) \{ (f_{i0}^0)^2 + (1/2) (f_{ij}^0 f_{ij}^0) + a_\mu^0 \Sigma^{\mu\nu} (\partial) a_\nu^0 \}.$$

Здесь использована гауссова система единиц. Кроме того, вклад поля χ^0 обуславливает замену a_μ^0 на $[a_\mu^0 - (\hbar c/e) \partial_\mu f^0]$. Таким

¹⁾ Подход, основанный на использовании кулоновской калибровки, непосредственно приводит к уравнению Лапласа $\nabla^2 f = 0$ (см. рассмотрение, следующее за формулой (11.3.42)).

образом, оператор электромагнитной энергии в линейном приближении должен иметь вид

$$H_0 = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left\{ (f_{i0}^0)^2 + \frac{1}{2} (f_{ij}^0 f_{ij}^0) - [a_\mu^0 - (\hbar c/e) \partial_\mu f^0] 4\pi J^{0\mu} \right\}. \quad (11.3.10)$$

Бозонное преобразование (11.1.11) приводит к возникновению состояния с энергией $E[f] = \langle 0 | H_0^f | 0 \rangle$, где H_0^f — гамильтониан H_0 после бозонного преобразования. Из (11.3.10) следует

$$E[f] = \frac{1}{8\pi} \int d^3(x) \left[f_{i0}^2 + \frac{1}{2} f_{ij} f_{ij} - \left(a_\mu - \frac{\hbar c}{e} \partial_\mu f \right) 4\pi J^\mu \right]. \quad (11.3.11)$$

Этот результат получен в работах [2, 5].

Ниже мы будем рассматривать только статический случай $f(x) = f(\mathbf{x})$. Так как \dot{a}_ν и \dot{f} равны нулю, уравнение (11.3.1) принимает вид

$$-\nabla^2 a_0 = -\Sigma_0^\nu(\partial) a_\nu. \quad (11.3.12)$$

С другой стороны, из (11.1.23) следует

$$\Sigma_0^\nu(\partial) a_\nu = -\Sigma_0(\partial) \nabla^2 a_0. \quad (11.3.13)$$

Таким образом, имеем

$$[1 + \Sigma_0(\partial)] \nabla^2 a_0 = 0, \quad (11.3.14)$$

откуда получаем $\nabla^2 a_0 = 0$. Поскольку нас интересуют только такие a_μ , которые обусловлены существованием f (т. е. $a_\mu = 0$ при $f = 0$), видим, что $a_\nu = 0$ для f , не зависящих от времени, а следовательно, $f_{i0} = 0$. Кроме того, исходя из уравнения (11.3.3), имеем $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, а это означает, что \mathbf{a} имеет только поперечные компоненты. Теперь (11.3.11) приводит к следующему выражению для энергии в статическом случае:

$$E[f] = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left[\frac{1}{2} f_{ij} f_{ij} - \left(a_i - \frac{\hbar c}{e} \partial_i f \right) 4\pi J_i \right] = \quad (11.3.15)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \frac{\hbar c}{e} \int d^3x \partial_{if} \cdot \partial^i f_{ji} = \quad (11.3.16)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \frac{\hbar c}{e} \int d^3x f_{ji} G_{ji}^\dagger = \quad (11.3.17)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \frac{\hbar c}{e} \int d^3x \mathbf{H}(x) \cdot (\nabla \times \nabla) f(x), \quad (11.3.18)$$

где $\mathbf{H}(x)$ — локальное магнитное поле:

$$\mathbf{H}(x) = \nabla \times \mathbf{a}, \quad (1.3.19)$$

а $G_{\mu\nu}^\dagger$ определяет топологическую особенность, согласно (10.1.3), т. е.

$$G_{\mu\nu}^\dagger = [\partial_\mu, \partial_\nu] f, \quad (11.3.20)$$

В (11.3.18) мы использовали \mathbf{H} вместо \mathbf{B} . В рассматриваемом случае $\mathbf{B}(x) = \mathbf{H}(x)$, но выражение (11.3.18) остается верным даже в том случае, если равенство $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ нарушается из-за взаимодействия F_{ij} -типа. Из (11.3.18) видно, что энергия определяется величиной магнитного поля в тех точках, где имеются особенности.

Параметр порядка. Бозонное преобразование (11.1.11), в результате которого ψ заменяется на ψ^f , приводит к зависимости параметра порядка от f :

$$\Delta(x) = \langle 0 | \psi_{\downarrow}^f(x) \psi_{\uparrow}^f(x) | 0 \rangle. \quad (11.3.21)$$

В соответствии с (11.1.66) и (11.1.14) $\Delta(x)$ имеет следующую структуру:

$$\Delta(x) = \exp[-2if(x)] \widehat{F}(x; J_{\mu}), \quad (11.3.22)$$

где $\widehat{F} \equiv |\Delta(x)|$ — разложение по степеням J_{μ} . Другими словами, \widehat{F} зависит от df через J_{μ} , в то время как f без производных появляется в (11.3.22) только в фазовом множителе. Отметим, что как ток, так и параметр порядка определяются функцией f , отвечающей бозонному преобразованию; эти две величины связаны между собой посредством f . Если параметр порядка при $J = 0$ обозначить через Δ , то

$$\widehat{F}(x) = \Delta + \int d^4\xi \int d^4\sigma F^{\mu\nu}(x - \xi, x - \sigma) J_{\mu}(\xi) J_{\nu}(\sigma) + \dots \quad (11.3.23)$$

В \widehat{F} отсутствует член, линейный по J_{μ} . Все коэффициенты разложения не зависят от f , так как зависимость \widehat{F} от f появляется только благодаря $J_{\mu}(x)$. Поскольку $J_{\mu}(x)$ — всюду гладкая функция, следует ожидать, что каждый нелинейный член разложения по степеням J_{μ} также будет гладкой функцией. В выражении для тока $J_{\mu}(x)$ нелинейные члены включают в себя дифференциальный оператор $(\partial^2 g_{\mu}^{\nu} - \partial_{\mu} \partial^{\nu})$ (см. (11.1.22)). Поэтому вклад от нелинейных членов в $\widehat{F}(x)$ предполагается малым. С другой стороны, нелинейные члены параметра порядка могут быть не столь малыми, как в выражении для тока. Действительно, $\widehat{F}(x)$ в (11.3.23) должно обращаться в нуль в точках, где f имеет особенности, чтобы параметр порядка $\Delta(x)$ (11.3.22) был хорошо определенной функцией в этих точках. Поэтому нелинейные члены в $|\Delta(x)|$ должны вносить столь существенный вклад, чтобы скомпенсировать Δ в особых точках. Если рассматриваемая точка далека от особенности, то следует ожидать, что вклад от нелинейных членов, обусловленный интегралами перекрытия, окажется малым и не будет резко изменяться. Эти интегралы перекрытия начинают постепенно

вносить вклад при приближении к особым точкам на расстояниях меньше эффективного радиуса действия коэффициентов в формуле (11.3.23) ξ_0 .

На первый взгляд создается впечатление, что уравнение для параметра порядка, поскольку оно содержит \mathbf{a} , вместе с уравнением Максвелла образует единую систему. Однако эти два уравнения расцепляются благодаря наличию члена $\partial_{\nu} f$ в уравнении максвелловского типа. Как только задана функция $f(x)$, векторный потенциал $\mathbf{a}(x)$, внутреннее магнитное поле $\mathbf{H}(x)$ и ток $\mathbf{J}(x)$ можно получить из уравнения максвелловского типа (11.3.1). Воспользовавшись полученной таким образом функцией $\mathbf{a}(x)$, можно попытаться вычислить параметр порядка $\Delta(x)$.

Вычисление неприводимой части собственной энергии фотона. Чтобы завершить вывод уравнения максвелловского типа (11.3.1),

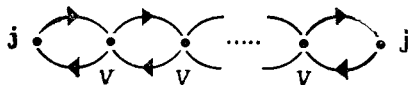


Рис. 11.1.

необходимо вычислить $\Sigma_{\mu\nu}(\partial)$. Мы воспользуемся гамильтонианом БКШ (5.4.1) и учтем электромагнитное взаимодействие. Иными словами, наш лагранжиан включает в себя как электромагнитный лагранжиан (8.1.1), так и член, описывающий электрон-электронное взаимодействие типа БКШ $V\psi_{\downarrow}^{\dagger}\psi_{\uparrow}^{\dagger}\psi_{\uparrow}\psi_{\downarrow}$. Это взаимодействие мы будем называть V -взаимодействием.

Попытаемся сначала вычислить $\Sigma_{\mu\nu}$ в однопетлевом приближении. К сожалению, при этом не возникает особенности типа полюса $1/D(p)$, обусловленной коллективной модой (т. е. полем f^0). Полюсная особенность в $\Sigma_{\mu\nu}$ весьма существенна: как мы видели в предыдущем разделе, именно с этой особенностью связана бесконечная проводимость сверхпроводников. Поэтому мы обратимся к цепочечному приближению. Так как $\Sigma_{\mu\nu}(p)$ определяется неприводимыми диаграммами, ее нельзя разделить на две части, рассекая внутреннюю фотонную линию. Следовательно, все петли соединяются между собой за счет V -взаимодействия. Если цепочка состоит более чем из одной петли, то петли на обоих концах имеют вершины двух типов: векторную вершину, обусловленную током, и скалярную, возникающую благодаря V -взаимодействию (рис. 11.1). Каждая из этих крайних петель пропорциональна p . Поэтому цепочки, включающие более одной петли, хотя и приводят к появлению полюса $1/D(p)$, вносят вклад только в продольную часть $\Sigma_{\mu\nu}$. По существу член с полюсом $1/D(p)$ представляет собой

множитель при проекционном операторе, выделяющем продольную часть $\Sigma_{\mu\nu}$.

В результате даже при использовании цепочечного приближения поперечная составляющая тока определяется однопетлевой диаграммой, в то время как в продольный ток вносят вклад все цепочечные диаграммы. Поэтому $\Sigma_{\mu\nu}$, определяемая цепочечными диаграммами, не удовлетворяет соотношению (8.1.142)

$$p^\mu \Sigma_{\mu\nu}(p) = 0, \quad (11.3.24)$$

которое является следствием закона сохранения тока. Другими словами, в рамках цепочечного приближения нарушается закон сохранения тока.

Очевидно, что соотношение $p^\mu \Sigma_{\mu\nu}(p) = 0$ должно автоматически выполняться при учете всех диаграмм. Поскольку цепочечные диаграммы, включающие более одной петли, вносят вклад только в продольную часть $\Sigma_{\mu\nu}$, эти диаграммы следует дополнить другими, чтобы удовлетворить условию $p^\mu \Sigma_{\mu\nu}(p) = 0$. Хотя это равенство нелегко получить с помощью фейнмановских диаграмм, мы будем им пользоваться, чтобы найти недостающую поперечную часть $\Sigma_{\mu\nu}$. Поскольку в неприводимой части собственной энергии отсутствуют мостики, состоящие из одной фотонной линии, она в цепочечном приближении совпадает с величиной

$$\frac{1}{\hbar} \langle 0, \beta | T [j_\mu, j_\nu] | 0, \beta \rangle,$$

если не учитывать электромагнитное взаимодействие. Данная величина была вычислена в разд. 5.4; она равна $\hbar^{-1} \Delta(k)$, где $\Delta(k)$ дается выражением (5.4.128)¹⁾

$$\Sigma_{00}(p) = -4\pi \frac{e^2}{\hbar^2} \eta^2(p) p_0^2 U_B(\omega_B) \frac{1}{D(p)} \tau U_B(\omega_B) + \dots, \quad (11.3.25)$$

где ω_B в $D(p) = -p_0^2 + c^{-2}\omega_B^2$ заменено на $\omega_B - i\delta\tau$. Многоточие отвечает членам, не имеющим полюсной особенности. Отметим, что линейный по f^0 член в динамическом отображении j_μ должен быть пропорциональным $D_\mu(p)$, поскольку из соотношения $\partial^\mu D_\mu(\partial) f^0 = D(\partial) f^0 = 0$ следует закон сохранения тока $\partial^\mu j_\mu = 0$. Поэтому выражение (11.3.25) можно обобщить следующим образом:

$$\Sigma_{\mu\nu}(p) = -4\pi \frac{e^2}{\hbar^2} \eta^2(p) D_\mu(p) U_B(\omega_B) \frac{1}{D(p)} \tau U_B(\omega_B) D_\nu(p) + \dots \quad (11.3.26)$$

В случае явлений, характеризующихся медленными изменениями (т. е. малыми p_0), $\Sigma_{\mu\nu}(p)$ можно с хорошей точностью описать

¹⁾ В (5.4.128) p_0^2 заменено на $c^{-2}\omega_B^2$.

полюсным членом, пренебрегая членами, обозначенными многоточием (полюсное приближение). Если мы будем рассматривать (11.3.26) как продольную часть $\Sigma_{\mu\nu}$, то условие (11.3.24) приводит к выражению

$$\Sigma_{\mu\nu}(p) = 4\pi \frac{e^2}{\hbar^2} \eta^2(p) U_B(\omega_B) \left[\left(\frac{v_B}{c} \right)^2 \eta_{\mu\nu}(p) - D_\mu(p) \frac{1}{D(p)} D_\nu(p) \right] \tau U_B(\omega_B), \quad (11.3.27)$$

где матрица $\eta_{\mu\nu}$ определяется формулой (8.1.76):

$$\eta_{\mu\nu}(p) = \begin{pmatrix} - (v_B/c)^{-2} & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & & I \end{pmatrix}. \quad (11.3.28)$$

При выводе выражения (11.3.27) использовано соотношение

$$p^\mu \eta_{\mu\nu}(p) = (v_B/c)^{-2} D_\nu(p). \quad (11.3.29)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} 4\pi J_\mu &= -\Sigma_\mu^\nu(\partial) \left(a_\nu - \frac{\hbar c}{e} \partial_\nu f \right) = \\ &= -4\pi \frac{e^2}{\hbar^2} \eta^2(p) \left(\frac{v_B}{c} \right)^2 \eta_\mu^\nu(\partial) \left(a_\nu - \frac{\hbar c}{e} \partial_\nu f \right) \tau, \end{aligned} \quad (11.3.30)$$

где использована формула (4.1.88), т. е.

$$U_B \tau U_B = \tau. \quad (11.3.31)$$

Наблюдаемый ток определяется матричным элементом τ_{11} в (11.3.30). Обозначая наблюдаемый ток тем же символом J_μ , имеем

$$J_\mu = -\frac{e^2}{\hbar^2} \eta^2(p) \left(\frac{v_B}{c} \right)^2 \eta_\mu^\nu(\partial) \left(a_\nu - \frac{\hbar c}{e} \partial_\nu f \right), \quad (11.3.32)$$

так как $\tau_{11} = 1$. Результат (11.3.32) учитывает эффекты, связанные с коллективной модой (т. е. имеется член типа $1/D(p)$), и находится в согласии с условием $p^\mu \Sigma_{\mu\nu} = 0$.

Характеристическая функция бозонов и лондоновская глубина проникновения. В разд. 5.4 ввели посредством формул (5.4.165) и (5.4.166) характеристическую функцию бозонов $c(p)$ и лондоновскую глубину проникновения λ_L соответственно:

$$c(p) = v_B^2(p) \eta^2(p) / v_B^2(0) \eta^2(0), \quad (11.3.33)$$

$$1/\lambda_L^2 = (4\pi e^2 / \hbar^2 c^2) v_B^2(0) \eta^2(0). \quad (11.3.34)$$

Используя эти величины, мы можем записать (11.3.32) в виде

$$J_{\mu}(x) = -\frac{1}{4\pi\lambda_L^2} c(\partial) \eta_{\mu}^{\nu}(\partial) \left(a_{\nu} - \frac{\hbar c}{e} \partial_{\nu} f \right) = \quad (11.3.35)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\lambda_L^2} \int d^3y c(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \eta_{\mu}^{\nu}(\partial) \left(a_{\nu}(y) - \frac{\hbar c}{e} \partial_{\nu} f(y) \right), \quad (11.3.36)$$

где $t_y = t_x$, а

$$c(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} c(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (11.3.37)$$

Согласно формуле (11.3.33), имеем

$$c(\mathbf{k}) = 1 \quad \text{при } \mathbf{k} = 0, \quad (11.3.38)$$

откуда следует

$$\int d^3x c(\mathbf{x}) = 1. \quad (11.3.39)$$

В этом случае уравнение максвелловского типа принимает вид [2, 3, 5]

$$(\partial^2 g_{\mu}^{\nu} - \partial_{\mu} \partial^{\nu}) a_{\nu}(x) = \frac{1}{\lambda_L^2} \int d^3y c(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \eta_{\mu}^{\nu}(\partial) \left(a_{\nu}(y) - \frac{\hbar c}{e} \partial_{\nu} f(y) \right). \quad (11.3.40)$$

Функция $c(\mathbf{k})$ и константа λ_L получены в разд. 5.4. В частности, согласно (5.4.171), при $T=0$ λ_L определена соотношением

$$\frac{1}{\lambda_L^2(0)} = \frac{8\pi}{3c^2} e^2 v_F^2 N(0). \quad (11.3.41a)$$

Плотность сверхпроводящих электронов n_s определена соотношением

$$1/\lambda_L^2 = 4\pi e^2 n_s / m c^2, \quad (11.3.41b)$$

где m — масса электрона. Отметим, что плотность n_s не обязательно равна электронной плотности n . Хотя $(4\pi e^2 n / m)$ равно $(v_{pl})^2$, где v_{pl} — плазменная частота, $1/\lambda_L^2$ в формуле (11.3.41) не всегда равно $(v_{pl})^2 / c^2$. В самом деле, в n_s (а значит, и в $1/\lambda_L^2$) вносят вклад только электроны, находящиеся в окрестности поверхности Ферми (т. е. те, которые образуют куперовские пары), в то время как при вычислении $(v_{pl})^2$ учитывается существенно большее число электронов. Это является отражением упомянутого выше факта, что $(1/\lambda_L^2) c(\mathbf{p})$ отвечает $\Sigma_{\mu\nu}(\mathbf{p})$ не при $p_0 = \omega_{pl}$, а при $p_0 = \omega_B(\mathbf{p}) \ll \omega_{pl}$.

Вычисления показывают, что уравнение (11.3.40) в случае одного вихря приводит к появлению линейного тока J_{μ} , который равен нулю в центре вихря, постепенно растет в области $r \lesssim \lambda_L$, проходит через максимум и экспоненциально спадает при больших r . Следовательно, J_{μ} везде является гладкой функцией. Поэтому мы

полагаем, что разумно воспользоваться линейным приближением: $\tilde{J}_\mu \approx J_\mu$ и $\tilde{a}_\mu = a_\mu$. Гладкость функции J_μ обусловлена коллективной модой, благодаря которой формфактор $c(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ оказывается сильно нелокальным. Это можно понять, исходя из того, что $c(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ возникает за счет особенности типа $1/D(p)$ в $\Sigma_{\mu\nu}(p)$.

Если для вычисления $\Sigma_{\mu\nu}$ использовать цепочечное приближение, то, как было показано выше, вклад в поперечный линейный ток (т. е. в поперечную часть J_μ) вносит только однопетлевая диаграмма, которая ведет себя как $1/r$ в окрестности центра вихря. Такое быстрое увеличение линейного тока вблизи центра вихря является следствием того факта, что однопетлевая диаграмма не обладает особенностью типа полюса, которая обусловлена коллективной модой, отражающей влияние флуктуаций куперовских пар. Резкое изменение линейного тока в окрестности центра вихря приводит к возрастанию нелинейных членов, которые, как предполагается, стремятся ликвидировать расходимость типа $1/r$ в центре вихря. В этом случае ожидается, что ток будет чрезвычайно быстро расти в малой области около центра, проходить через максимум, а затем уменьшаться по закону $1/r$. При больших r ток должен обладать асимптотическим поведением, характерным для линейного тока, т. е. экспоненциально спадать. Подобное поведение демонстрирует ток, найденный в результате численного расчета на основе уравнения Горькова [6, 7]¹⁾ в пределе низких температур. Мы не будем обсуждать уравнение Горькова [8], так как оно очень хорошо исследовано и описывается в любой книге по сверхпроводимости (см., например, [9]). При выводе уравнения (11.3.40) мы воспользовались приближением другого типа, при котором в линейном токе учитывается влияние коллективной моды, и условие $\rho^\mu \Sigma_{\mu\nu} = 0$ выполняется точно. В этом приближении по причине, указанной выше, нелинейные члены в \tilde{J}_μ считаются малыми. Но вопрос о том, насколько малы эти нелинейные члены (т. е. $\tilde{J}_\mu - J_\mu$), остается открытым.

Важно отметить, что условие калибровки (11.3.3) также является следствием уравнения максвелловского типа (11.3.40). Чтобы показать это, вычислим $\partial^\mu J_\mu$ с помощью формулы (11.3.35). Используя соотношения $\partial^\mu \eta_\mu^\nu(\partial) = (v_B/c)^{-2} D^\nu(\partial)$ и $D(\partial)f = 0$, находим, что $\partial^\mu J_\mu$ пропорционально $D^\mu(\partial)a_\mu$. Соотношение $\partial^\mu J_\mu = 0$, которое следует из уравнения максвелловского типа, приводит к условию калибровки $D^\mu(\partial)a_\mu = 0$. Таким образом, условие калибровки (11.3.3) в неявном виде содержится в уравнении максвелловского типа (11.3.40).

¹⁾ Линейная часть тока, определяемая из уравнения Горькова, совпадает с той, которая находится на основе цепочечного приближения. Из уравнения Горькова можно определить также нелинейную часть тока,

Покажем теперь, что зависимость параметра порядка $|\Delta(x)|$ от пространственных координат учтена в выражении для тока (11.3.36). Для этого изучим следующий вопрос: каким будет выражение для линейного тока \mathbf{j} , если величину $|\Delta(x)|$ считать постоянной. Для ответа на этот вопрос введем величину $\phi_f(x)$ посредством соотношения $\psi^f(x) = \exp[-if(x)] \phi_f(x)$. Величина $\phi_f(x)$ является функционалом от \mathbf{a} и ∇f . Постоянная $|\Delta(x)|$ отвечает приближению, в рамках которого пренебрегают всякой зависимостью $\phi_f(x)$ от \mathbf{a} и ∇f . Тогда, поскольку $\phi_f^\dagger(x) \nabla \phi_f$ — вектор, не содержащий ни \mathbf{a} , ни ∇f , его среднее по основному состоянию обращается в нуль, как этого и следует ожидать для среднего значения вектора по любому однородному основному состоянию. Поэтому выражение для тока принимает вид

$$\langle 0 | -\frac{ie}{2mc} \phi_f^\dagger \overleftrightarrow{\nabla} \phi_f - \frac{e^2}{m\hbar c^2} \left(\mathbf{a} - \frac{\hbar c}{e} \nabla f \right) \phi_f^\dagger \phi_f | 0 \rangle = \frac{ne^2}{mc^2} \left(\mathbf{a} - \frac{\hbar c}{e} \nabla f \right),$$

где n — электронная плотность. Сравнивая его с (11.3.36), мы видим, что наличие $c(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ в (11.3.36) частично отражает эффекты, обусловленные зависимостью $|\Delta(x)|$ от пространственных координат.

Кулоновская калибровка. В разд. 5.4 вычисления проводились на основе кулоновской калибровки. Чтобы рассмотрение, проводимое в этом разделе, сформулировать на языке кулоновской калибровки [2, 5], необходимо провести калибровочное преобразование $a_\mu \rightarrow a_\mu^c = a_\mu + \partial_\mu \lambda$, где $\lambda = -(1/\nabla^2) \nabla \cdot \mathbf{a}$. Таким образом,

$$\mathbf{a}^c = \mathbf{a}^T, \quad (11.3.42a)$$

$$a_0^c = a_0 + \frac{1}{\nabla^2} (\nabla \cdot \dot{\mathbf{a}}). \quad (11.3.42b)$$

где \mathbf{a}^T — поперечная часть \mathbf{a} , $a_i^T = T_{ij} a_j$. Уравнение максвелловского типа (11.3.40) для пространственных компонент ($\mu = 1, 2, 3$) принимает вид

$$\partial^2 \mathbf{a}^c(x) = \frac{1}{\lambda_L^2} \int d^3 y c(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left(\mathbf{a}^c(y) - \frac{\hbar c}{e} \nabla f_s(y) \right), \quad (11.3.43)$$

где f_s дается формулой (11.3.4) и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа (11.3.7).

Чтобы переписать уравнение максвелловского типа для четвертой компоненты, рассмотрим соотношение $D^\mu(\partial) a_\mu = 0$, из которого при учете формулы (11.3.42b) следует

$$\nabla^2 a_0^c = (v_B/c)^{-2} D(\partial) a_0. \quad (11.3.44)$$

Отметим также, что

$$D(\partial) \partial_0 f = (v_B/c)^2 \nabla^2 \partial_0 f - \partial_0^3 f = (v_B/c)^2 [\nabla^2, \partial_0] f.$$

Поскольку f_s — единственная сингулярная часть f , выполняются равенства $[\nabla^2, \partial_0] f = [\nabla^2, \partial_0] f_s = \nabla^2 \partial_0 f_s$. Отсюда находим

$$D(\partial) \partial_0 f = (v_B/c)^2 \nabla^2 \partial_0 f_s. \quad (11.3.45)$$

Уравнение максвелловского типа (11.3.40) для четвертой компоненты принимает вид

$$\nabla^2 a_0^c = \lambda_L^2 (v_B/c)^{-2} c(\partial) [a_0 - (\hbar c/e) \partial_0 f].$$

Используя (11.3.44), получаем

$$\begin{aligned} \left(D(\partial) - \frac{1}{\lambda_L^2} c(\partial) \right) \nabla^2 a_0^c &= \frac{\hbar c}{\lambda_L^2 e} \left(\frac{v_B}{c} \right)^{-2} c(\partial) D(\partial) \partial_0 f_0 = \\ &= - \frac{\hbar c}{\lambda_L^2 e} c(\partial) \nabla^2 \partial_0 f_s, \end{aligned} \quad (11.3.46)$$

где использовано и соотношение (11.3.45). Итак, мы получаем

$$a_0^c(x) = - \frac{1}{\lambda_L^2} \frac{\hbar c}{e} \int d^3 y c(x-y) g(y), \quad (11.3.47)$$

где $g(y) = [-D(\partial) + \lambda_L^{-2} c(\partial)]^{-1} \dagger_s$. (11.3.48)

Уравнения (11.3.43) и (11.3.47) представляют собой уравнения максвелловского типа в случае кулоновской калибровки. Это согласуется с результатами, полученными в разд. 5.4.

В дальнейшем мы будем работать не с кулоновской калибровкой, а с калибровкой $D^\mu(\partial) a_\mu = 0$.

Вихри. Рассмотрим не зависящую от времени функцию $f(x)$, имеющую прямолинейные особенности в направлении x_3 . Функция $f(x)$ для отдельного вихря с центром в начале координат строится с помощью соотношений (10.1.29) и (10.1.30), откуда находим

$$G_{12}^\dagger(x) = -G_{21}^\dagger(x) = v \delta(x_1) \delta(x_2). \quad (11.3.49)$$

Остальные компоненты $G_{\mu\nu}^\dagger$ обращаются в нуль. Равенство (11.3.49) можно представить в виде

$$(\nabla \times \nabla) f = v e^3 \delta(x_1) \delta(x_2), \quad (11.3.50)$$

где e^3 — единичный вектор в направлении x_3 . Уравнение (11.3.2) для не зависящей от времени функции $f(x)$ превращается в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 f = 0. \quad (11.3.51)$$

Из (11.3.50) и (11.3.51) следует, что $f(x) = (v/2\pi) \theta$, где θ — угол поворота вокруг оси x_3 в цилиндрической системе координат. Условие квантования (10.1.62) для v приводит к появлению топологического кванта $v = s\pi$ (s — целое число), откуда получаем

$$f(x) = \frac{s}{2} \theta. \quad (11.3.52)$$

Итак, мы имеем

$$\nabla f(x) = \frac{s}{2} \frac{1}{r} \mathbf{e}(x), \quad (11.3.53)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $r = |\mathbf{x}|$, а $\mathbf{e}(x)$ — единичный вектор в азимутальном направлении, т. е. $\mathbf{e}(x) = (-x_2/r, x_1/r)$.

Поскольку энергия вихря пропорциональна s^2 , случай $\dot{s} = 1$ обычно отвечает выбору энергетически выгодного состояния. В дальнейшем, если это специально не оговаривается, мы считаем $s = 1$.

В статическом случае уравнение максвелловского типа (11.3.40) принимает вид

$$\nabla \times \mathbf{H}(x) = -\frac{1}{\lambda_L^2} \int d^3y c(x-y) \left[\mathbf{a}(y) - \frac{\hbar c}{e} \nabla f(y) \right] = \quad (11.3.54)$$

$$= -\frac{1}{\lambda_L^2} c(\partial) \left[\mathbf{a}(x) - \frac{\hbar c}{e} \nabla f(x) \right], \quad (11.3.55)$$

где $c(\partial)$ определяется соотношением $c(\partial) \exp(ipx) = c(p) \exp \times \times (ipx)$, а $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{a}$. Исходя из (11.3.55), получаем

$$\nabla^2 \mathbf{H}(x) = \frac{1}{\lambda_L^2} c(\partial) \left[\mathbf{H}(x) - \frac{\hbar c}{e} \nabla \times \nabla f(x) \right]. \quad (11.3.56)$$

В случае отдельного вихря обозначим \mathbf{H} через \mathbf{h} . Тогда из уравнения (11.3.56) при $v = s\lambda$ находим

$$\nabla^2 \mathbf{h}(x) = \frac{1}{\lambda_L^2} c(\partial) [\mathbf{h}(x) - s\phi e^{3\delta(2)}(x)], \quad (11.3.57)$$

где $\phi = \pi \hbar c / e$. Отсюда получаем, что $\mathbf{h}(x) = h(x) \mathbf{e}^3$, где

$$h(x) = \frac{s\phi}{\lambda_L^2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{c(k)}{k^2 + c(k)/\lambda_L^2} e^{ikx}. \quad (11.3.58)$$

Здесь и далее \mathbf{k} и \mathbf{x} — двумерные векторы, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ и т. д. Эта формула определяет магнитное поле, создаваемое отдельным вихрем с $v = s\lambda$ и с центром в начале координат. Интегрируя данное выражение по всей плоскости (x_1, x_2) , находим поток

$$\Phi = \int d^2x h(x) = s\phi. \quad (11.3.59)$$

Именно по этой причине ϕ называют квантом потока.

Обратимся теперь к случаю многих вихрей, линии которых параллельны оси x_3 . Поскольку уравнение (11.3.2) для $f(x)$ линейно, мы можем получить $f(x)$ в виде суперпозиции соответствующих функций f для каждого отдельного вихря:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_i \theta(x - \xi_i), \quad (11.3.60)$$

где $\theta(\mathbf{x} - \xi_i)$ — угол поворота вокруг линии, характеризующейся координатой ξ_i . Отсюда находим

$$(\nabla \times \nabla) f(\mathbf{x}) = \pi e^3 \sum_i \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \xi_i). \quad (11.3.61)$$

Здесь мы предположили, что $s = 1$ для каждого из вихрей. При этом из уравнения (11.3.56) получаем

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \sum_i \mathbf{h}(\mathbf{x} - \xi_i). \quad (11.3.62)$$

Поток определяется выражением

$$\Phi = \int d^2x (\mathbf{H} \cdot \mathbf{e}^3) = N\phi, \quad (11.3.63)$$

где N — число вихрей.

Энергия электромагнитного поля, создаваемая этими вихрями, дается формулой (11.3.18):

$$E[f] = \frac{1}{8\pi} \phi \sum_{i,j} h(\xi_i - \xi_j). \quad (11.3.64)$$

Это выражение показывает, что $(\phi/8\pi) h(\xi_i - \xi_j)$ — энергия взаимодействия двух вихрей, характеризующихся координатами ξ_i и ξ_j . Другими словами, энергия взаимодействия двух вихрей пропорциональна магнитному полю $h(\mathbf{r})$ отдельного вихря, где \mathbf{r} — вектор, соединяющий центры обоих вихрей. Отрицательная часть $h(\mathbf{r})$ отвечает притяжению между вихрями. Таким образом, мы видим, что притяжение обусловлено сменой знаком поля, а это означает, что некоторая часть тока вращается в обратном направлении. Увеличение энергии за счет изменения электронных состояний (энергия сердцевин) будет рассмотрено ниже.

Если вихри образуют периодическую решетку с элементарной ячейкой в виде параллелограмма, то из (11.3.64) можно получить следующее выражение для плотности энергии:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} n\phi \sum_i h(\xi_i), \quad (11.3.65)$$

где n — плотность вихрей. Макроскопическая магнитная индукция B равна $n\phi$.

Обозначим через a и b длины сторон параллелограмма, а через θ — угол между ними. Можно получить соотношение

$$\sum_i h(\xi_i) = n\phi \sum_{i,m} F(\mathbf{g}), \quad (11.3.66)$$

где $F(\mathbf{k})$ — фурье-образ $h(\mathbf{x})$, а \mathbf{g} — вектор обратной решетки. Имеем (см. (11.3.58))

$$F(\mathbf{k}) = \frac{c(\mathbf{k})}{\lambda_L^2 k^2 + c(\mathbf{k})}, \quad (11.3.67)$$

$$a g_1 = 2\pi l, \quad (11.3.68a)$$

$$b (g_1 \cos \theta + g_2 \sin \theta) = 2\pi m, \quad (11.3.68b)$$

где l и m — целые числа, пробегающие значения от $-\infty$ до ∞ (рис. 11.2). Имеем также

$$n = 1/ab \sin \theta. \quad (11.3.69)$$

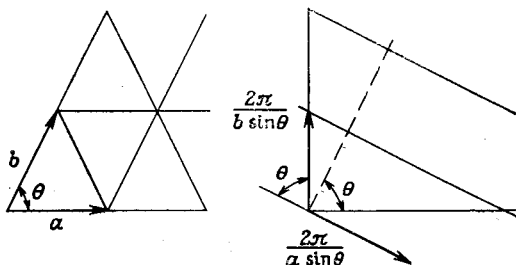


Рис. 11.2.

Исходя из соотношений (11.3.68) и (11.3.69), получаем

$$g \equiv |\mathbf{g}| = 2\pi n (b^2 l^2 + a^2 m^2 - 2ablm \cos \theta)^{1/2}. \quad (11.3.70)$$

Поскольку a и b пропорциональны $1/n^{1/2}$, из формулы (11.3.70) видно, что g пропорционально $n^{1/2}$. Поэтому получаем соотношение

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{1}{2n} g. \quad (11.3.71)$$

Из формулы (11.3.65) с учетом равенства (11.3.66) находим

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} (n\phi)^2 \sum_{l, m} F(\mathbf{g}). \quad (11.3.72)$$

Отметим, что плотность вихрей определяется постоянной решетки. Если вихри образуют регулярную треугольную решетку, то

$$n = \frac{2}{3^{1/2}} \frac{1}{a^2}, \quad (11.3.73)$$

где a — постоянная решетки.

Поскольку $c(\mathbf{k})$ зависит от $k\xi_0$, $VN(0)$, l и от температуры, магнитные свойства сверхпроводников определяются κ_B , $VN(0)$, l и температурой, хотя зависимость от $VN(0)$ довольно слабая¹⁾.

¹⁾ В формализме, опирающемся на уравнение Горькова, зависимость от $VN(0)$ отсутствует, так как при выводе этого уравнения она не учитывается.

Здесь ξ_0 — длина когерентности при нулевой температуре. Она определена формулой (5.4.177), согласно которой $\xi_0 = \hbar v_F / \pi \Delta_0$, где Δ_0 — значение Δ при $T = 0$. Константа κ_B равна

$$\kappa_B \approx \lambda_L(0) / \xi_0, \quad (11.3.74)$$

где $\lambda_L(0)$ — лондоновская глубина проникновения при нулевой температуре. Константа l — длина свободного пробега, связанная с наличием примесей.

Влияние примесей. Влияние немагнитных примесей на уравнение максвелловского типа исследовали Манчини и др. [10]. При этом к плотности лагранжиана, рассмотренной в разд. 5.4, добавляется потенциал примесей, имеющий вид $v(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x})$, где $\rho = \psi_\uparrow^\dagger \psi_\uparrow + \psi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow$. Уравнения Бете—Солпитера, приведенные в разд. 5.4, изменяются благодаря наличию потенциала примесей. Влияние примесей усреднялось по их конфигурациям с помощью метода Абрикосова и Горькова [11]. Результат сводится к замене ξ_0 на $\xi_0(l) = \gamma(l) \xi_0$, где $\gamma(l)$ — некоторая функция.

Лондоновская глубина проникновения $\lambda_L(l, T)$ также рассчитывалась в зависимости от длины свободного пробега l . На практике удобно обозначать $\xi_0(l)$ и $\lambda_L(l, T)$ через ξ_0 и $\lambda_L(T)$ соответственно. В дальнейшем мы будем пользоваться такими обозначениями.

Сверхпроводники I, II/1 и II/2 рода. Сверхпроводящее состояние, в котором отсутствуют какие-либо протяженные объекты, называется мейсснеровским, состояние с вихрями — смешанным. Обозначим через \bar{F} разность плотностей свободной энергии мейсснеровского и нормального состояний. Эта величина, которая носит название энергии конденсации, вычислена в разд. 5.4. В приближении Хартри получена формула (5.4.192). Поле H_c (см. (5.4.193)) обычно определяют выражением

$$\bar{F} = \frac{1}{8\pi} H_c^2. \quad (11.3.75)$$

Если проводник остается в мейсснеровском состоянии при $H_{\text{ext}} < H_c$ и скачком переходит в нормальное состояние при $H_{\text{ext}} = H_c$, то он называется сверхпроводником I рода [9]. Здесь H_{ext} — внешнее магнитное поле (которое не следует путать с внутренним магнитным полем $H(\mathbf{x})$). При $H_{\text{ext}} = H_c$ происходит фазовый переход первого рода. На рис. 11.3, а показан типичный вид кривой намагничивания (зависимости $\chi = -4\pi M$ от H_{ext}) для сверхпроводника I рода.

Часто бывает, что между мейсснеровским и нормальными состояниями появляется смешанное состояние. В этом случае мейсснеровское состояние существует при $H_{\text{ext}} < H_{c1}$, смешанное

— при $H_{c1} < H_{ext} < H_{c2}$ и нормальное — при $H_{ext} > H_{c2}$. Если реализуется такая ситуация, то этот сверхпроводник называют сверхпроводником II рода. Фазовый переход при $H_{ext} = H_{c2}$ является переходом второго рода. Поскольку площадь под кривой намагничивания равна энергии конденсации, мы видим, что $H_{c1} < H_c < H_{c2}$.

Существуют два вида сверхпроводников II рода [12]. Если при $H_{ext} = H_{c1}$ имеет место фазовый переход первого рода, то

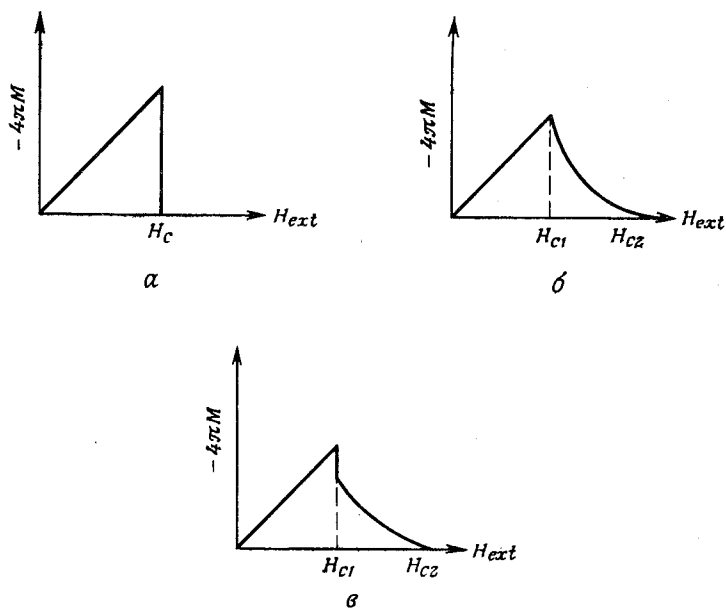


Рис. 11.3.

такой сверхпроводник называют сверхпроводником II/1 рода, если имеет место переход второго рода, то его называют сверхпроводником II/2 рода. На рис. 11.3, б и 11.3, в показан типичный вид кривых намагничивания для сверхпроводников II/2 и II/1 рода соответственно.

Фазовый переход первого рода при $H_{ext} = H_{c1}$ в сверхпроводниках II/1 рода обусловлен притяжением между вихрями [13]; благодаря притяжению вихри сразу накапливаются таким образом, что расстояние между ними соответствует притяжению. Это приводит к скачкообразному возникновению магнитного потока (или резкому спаду кривой намагничивания) при $H_{ext} = H_{c1}$. Значение скачкообразно возникающей при этом магнитной индукции обозначим символом B_0 . Очевидно, что B_0 определяется величиной расстояния d_1 , на котором проявляется притяжение между

вихрями. Если вихри образуют треугольную решетку, то из формулы (11.3.73) следует

$$B_0 = \frac{2}{3^{1/2}} \frac{\phi}{d_1^2}. \quad (11.3.76)$$

На рис. 11.4 представлено в увеличенном виде типичное поведение (вблизи $H_{\text{ext}} = H_{c1}$) теоретической кривой намагничивания для сверхпроводника II/1 рода. Кривая, выгнутая внутрь

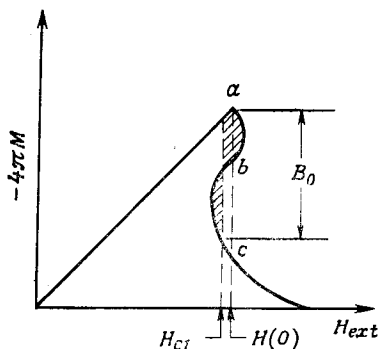


Рис. 11.4.

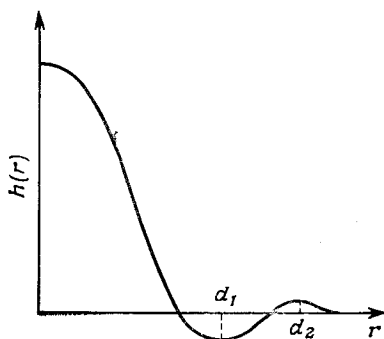


Рис. 11.5.

($b \rightarrow c$), демонстрирует влияние притяжения. Если вне области притяжения имеется значительное отталкивание, то кривая выгибается наружу ($a \rightarrow b$). Поле H_{c1} определяется положением вертикальной линии, при котором разделяемые ею заштрихованные области имеют равную площадь. Мы пользуемся также символом $H(n)$, обозначающим значение H_{ext} , соответствующее $B = n\phi$. На рис. 11.4 $H(0)$ — значение $H(n)$ при $n = 0$.

На рис. 11.5 представлено поведение магнитного поля $h(r)$ ($r = |x|$) отдельного вихря. На этом рисунке область притяжения показана в сильно увеличенном виде. Минимум при $r = d_1$ отвечает наиболее сильному притяжению. Это дает нам точное определение d_1 . При этом скачок B_0 намагниченности при $H_{\text{ext}} \approx H_{c1}$ дается формулой (11.3.76). На практике притяжение при $r = d_1$ очень слабое. Например [14], если взять значения параметров $VN(0) = 0,32$, $\kappa_B = 0,8$, то мы получим $|h(d_1)|/h(0) \approx 10^{-3}$. Вычисления [14] показывают, что $\Delta H = H(0) - H_{c1}$ равно $3|h(d_1)|$, а это означает, что отношение $\Delta H/H_{c1}$ крайне мало. При заданной температуре T существуют два критических значения κ_B , обозначаемые $\kappa_{B1}(T)$ и $\kappa_{B2}(T)$. Они определяются следующим образом: случай $\kappa_B < \kappa_{B2}(T)$ отвечает сверхпроводникам I рода, случай $\kappa_{B2}(T) < \kappa_B < \kappa_{B1}(T)$ — сверхпроводникам II/1 рода, а случай $\kappa_B > \kappa_{B1}(T)$ — сверхпроводникам II/2

рода. Значение $\kappa_{B1}(T)$ находится из условия $B_0 = 0$, что соответствует $d_1 = \infty$.

Любые экспериментальные данные, касающиеся величины B_0 , чрезвычайно полезны для проверки применимости уравнения максвелловского типа (11.3.40), так как d_1 (а значит, и B_0) определяется только с помощью этого уравнения. Если взять $VN(0) = 0,32$ и $\kappa_B = 0,8$ (чистый ниобий), то из уравнения максвелловского типа следует [14], что $d_1 \approx 6\lambda_L$ при $T = 0$. Это значение близко к получающемуся на эксперименте [12]. Эксперименты по рассеянию нейтронов [15] позволяют провести очень точные измерения B_0 . Экспериментальные результаты для температурной зависимости $B_0(T)/B_0(0)$ сравнивались с теоретическими результатами [16], полученными из уравнения максвелловского типа. Согласие между экспериментом и теорией оказалось очень хорошим. Для теоретического определения $\kappa_{B1}(T)$ требуется знать функцию c с чрезвычайно высокой точностью. Поскольку подгоночная формула (5.4.176), предназначенная для расчетов на ЭВМ, слишком груба для указанной цели (см. обсуждение, предшествующее формуле (5.4.178)), были использованы значения функции c , полученные в результате численного счета, а не подгоночная формула. Значение κ_{B1} при котором притяжение обращается в нуль, определялось из условия равенства d_1 и d_2 (рис. 11.5). В результате теоретического рассмотрения [17] получено значение $\kappa_B(0) = 1,073$. Это близко к экспериментальным данным. Эксперименты [18] показали, что чистый ниобий остается сверхпроводником II/1 рода даже при $T/T_c = 0,95$. Это также согласуется с предсказаниями теории [16].

Электронные состояния в центре вихря и энергия сердцевинны.

В разд. 9.1 показано, что притяженные объекты приводят к появлению самосогласованного потенциала, который оказывает влияние на квантовые состояния. Следовательно, на электроны вокруг вихря действует самосогласованный потенциал, создаваемый вихрем. Расчет этого самосогласованного потенциала представляет собой непростую задачу. Если считать, что V-взаимодействие ($V\psi_\uparrow^\dagger\psi_\downarrow^\dagger\psi_\downarrow\psi_\uparrow$) вносит определяющий вклад в формирование самосогласованного потенциала, и воспользоваться приближением Хартри, то для грубой оценки потенциала взаимодействия можно применить выражение $\Delta(x)(\psi_\uparrow^\dagger\psi_\downarrow^\dagger + \psi_\downarrow\psi_\uparrow)$. Таким образом, самосогласованный потенциал оказывается пропорциональным параметру порядка $\Delta(x)$. Используя эту грубую оценку для самосогласованного потенциала, получаем, что электронные состояния в окрестности центра вихря описываются собственными функциями уравнения Шредингера (см (5.4.15) и (5.4.32))

$$[E - \epsilon(\partial) \tau_3 + \Delta(x) \tau_1] \varphi^0(x) = 0, \quad (11.3.77)$$

где E — собственное значение энергии, а $\varphi^0(x)$ — волновая функция физического электрона. В большинстве подобных исследований авторы ограничивались случаем грязных сверхпроводников [19]. К сожалению, вычислить параметр порядка $\Delta(x)$, вообще говоря, трудно, хотя обычно предполагается, что энергия наиболее низколежащего электронного уровня в окрестности центра вихря значительно меньше Δ , поскольку $|\Delta(x)|$ должно обращаться в нуль в центре вихря и, следовательно, значительно меньше Δ для x вблизи центра вихря. Возбуждение электронов на низколежащие уровни может приводить к затуханию ультра-

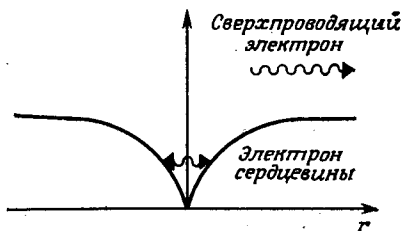


Рис. 11.6.

звуковых волн, распространяющихся в сверхпроводниках, которые находятся в смешанном состоянии. В рамках такого подхода было успешно объяснено поведение коэффициента затухания ультразвука [20] при $T \approx T_c$ или $H_{\text{ext}} \approx H_{c2}$.

Электроны, находящиеся в связанном состоянии вблизи центра вихря за счет самосогласованного потенциала, называются электронами сердцевины (рис. 11.6). Электроны сердцевины вносят вклад в энергию каждого отдельного вихря. Эта энергия называется энергией сердцевины и обозначается символом $E(n)$, так как она зависит от плотности вихрей n . Начнем с рассмотрения энергии сердцевины одного изолированного вихря и обозначим ее E_1 . На основании теоремы вириала мы можем ожидать, что энергия электронов сердцевины определяется произведением числа электронов и кинетической энергии одного электрона [3]:

$$E_1 = \frac{k_r^2}{2m} \pi r_0^2 n_s. \quad (11.3.78)$$

Здесь r_0 — радиус цилиндрической области, внутри которой заключены электроны сердцевины, k_r — среднее значение импульса, а n_s — плотность сверхпроводящих электронов (см. (11.3.41б)). Среднее значение импульса k_r находится из принципа неопределенности $2k_r r_0 \approx \hbar$. При этом из (11.3.78) для энергии сердцевины отдельного вихря получается выражение

$$E_1 = \frac{\pi \hbar^2}{8m} n_s = \frac{\hbar^2 c^2}{32e^2} \frac{1}{\lambda_L^2}. \quad (11.3.79)$$

Заметим, что в приведенном выше вычислении мы следовали хорошо известному методу оценки энергии основного состояния, используемому в квантовой механике. Если плотность вихрей возрастает и плотность тока вокруг находящейся в нормальном состоянии сердцевинки вихря падает, то $\Delta(x)$ сглаживается и энергия сердцевинки $E(n)$ может уменьшиться. Многовихревые эффекты начинают проявляться, когда становится существенным взаимодействие между вихрями. Изменение энергии сердцевинки, обусловленное многовихревыми эффектами, можно рассчитать следующим способом. Обозначим изменение энергии основного состояния электронов, обусловленное вихрями, через $E_{\text{core}}(x)$. Здесь уже не учитывается электромагнитная энергия, определяемая выражением (11.3.18). Поскольку все наблюдаемые величины являются некоторыми функционалами от линейного тока $J_{\mu}(x)$, это относится и к самосогласованному потенциалу. Таким образом, энергия сердцевинки зависит от электромагнитного поля, создаваемого током J_{μ} , а $E_{\text{core}}(x)$ становится функционалом от магнитного поля $\mathbf{H}(x)$, определяемого формулой (11.3.62): $E_{\text{core}}(x) = E_{\text{core}}(x; \mathbf{H})$. Поскольку вихри образуют решетку, для энергии сердцевинки на один вихрь мы можем записать выражение

$$E(n) = \int_{\Omega} d^3x E_{\text{core}}(x), \quad (11.3.80)$$

где Ω — объем элементарной ячейки решетки вихрей. Энергию $E(n)$ можно разделить на две части: одна из них определяется вкладом вихря, находящегося в ячейке Ω , а другая — вкладом остальных вихрей. Запишем $\mathbf{H}(x)$ в виде

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{h}(x - \xi_0) + \sum_{j \neq 0} \mathbf{h}(x - \xi_j), \quad (11.3.81)$$

где ξ_0 — координата вихря внутри ячейки Ω , и разложим $E_{\text{core}}(x)$ в ряд по $\mathbf{h}_{\text{int}}(x) \left(\equiv \sum_{j \neq 0} \mathbf{h}(x - \xi_j) \right)$:

$$E_{\text{core}}(x; H) = E_{\text{core}}(x; \mathbf{h}_0) + \int d^3y \mathbf{E}_{\text{core}}(x; \mathbf{h}_0; y) \mathbf{h}_{\text{int}}(y) + \dots, \quad (11.3.82)$$

где $\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}(x - \xi_0)$, $\mathbf{h}_{\text{int}}(x) = \sum_{j \neq 0} \mathbf{h}(x - \xi_j)$,

$$\mathbf{E}_{\text{core}}(x; \mathbf{h}_0; y) = \frac{\delta E_{\text{core}}(x; \mathbf{h}_0)}{\delta \mathbf{h}_0(y)}.$$

Отметим, что

$$E_1 = \int d^3x E_{\text{core}}(x; \mathbf{h}_0) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{\Omega} d^3x E_{\text{core}}(x; \mathbf{h}_0).$$

Поле $\mathbf{h}_0(\mathbf{x})$ вблизи центра вихря описывается хорошо локализованной функцией, а вдали от вихря спадает по экспоненциальному закону. Поэтому, если n не слишком велико, $E_{\text{core}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}_0)$ для \mathbf{x} из n -й ячейки приблизительно пропорционально $\mathbf{h}_0(\zeta_i)$, а $E_{\text{core}}(\mathbf{x}; \mathbf{h}_0; \mathbf{y})$ определяется в основном вкладом области $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \sim 0$ (центра вихря). Отсюда получаем

$$\int d^3y \mathbf{E}_{\text{core}}(\mathbf{x}; \mathbf{h}_0; \mathbf{y}) \mathbf{h}_{\text{int}}(\mathbf{y}) \approx \text{const} \cdot h^{\text{int}}(n),$$

$$\left(\int d^3x - \int_{\Omega} d^3x \right) E_{\text{core}}(\mathbf{x}; \mathbf{h}_0) \approx \text{const} \cdot h^{\text{int}}(n),$$

где

$$h^{\text{int}}(n) = \frac{\phi}{8\pi} \sum_i' h(\zeta_i). \quad (11.3.83)$$

Штрих у знака суммы показывает, что $h(\zeta_j)$ при $\zeta_j = 0$ не учитывается. Таким образом, $E(n) - E_1$ приблизительно пропорционально $h^{\text{int}}(n)$:

$$E(n) \approx E_1 - E_2 h^{\text{int}}(n). \quad (11.3.84)$$

Параметр E_2 можно считать не зависящим от n , поскольку коэффициенты в разложении (11.3.82) зависят только от h_0 . Члены более высокого порядка в (11.3.82), в которые $h^{\text{int}}(n)$ входят в более высокой степени, несущественны до тех пор, пока n не станет очень большим, поскольку $h(\zeta)$ — экспоненциально спадающая функция. Полная плотность энергии сердцевинки определяется выражением $n E(n)$.

Для вычисления термодинамического потенциала Гиббса необходимо учесть член, регулирующий термодинамику локального потока в состоянии теплового равновесия. Этот член должен быть пропорционален nh^{int} , так как в случае немагнитного сверхпроводника магнитное поле совпадает с магнитной индукцией. Поскольку термодинамический член может быть включен в член вида $nE_2 h^{\text{int}}$, входящий в выражение для энергии сердцевинки, при вычислении термодинамического потенциала Гиббса E_2 можно рассматривать в качестве термодинамического параметра; E_2 определяется из условия, что фазовый переход при H_{c2} является переходом второго рода.

Приведенная выше оценка энергии сердцевинки, конечно, очень груба. Тем не менее она позволила найти H_{c1} и H_{c2} для ванадия и ниобия, температурная зависимость которых оказалась в качественном согласии с экспериментом. Пока не будет получена более точная формула для энергии сердцевинки, выражение $nE(n)$, где $E(n)$ определено формулой (11.3.84), может использоваться в качестве грубой, но полезной оценки энергии сердцевинки.

Термодинамический потенциал Гиббса. Чтобы получить соотношение, связывающее внешнее магнитное поле H_{ext} с плотностью вихрей n , необходимо минимизировать термодинамический потенциал Гиббса.

Термодинамический потенциал Гиббса в смешанном состоянии дается выражением

$$G_s = \varepsilon + nE(n) - \frac{1}{4\pi} BH_{\text{ext}} - ST, \quad (11.3.85)$$

где $B = n\phi$, ε определяется формулой (11.3.65), $E(n)$ — энергия сердцевинки на один вихрь (11.3.84), а S — плотность энтропии. Поскольку в рамках термополевой динамики энтропия микроскопического происхождения уже учтена при вычислении ε , в S вносит вклад только движение вихрей. Поэтому членом ST можно пренебречь. Тогда из (11.3.85) получаем

$$G_s = \frac{1}{8\pi} n\phi \sum_j h(\zeta_j) + n \left(E_1 - \frac{\phi}{8\pi} E_2 \bar{h} \right) - \frac{1}{4\pi} n\phi H_{\text{ext}} = \\ - \frac{1}{4\pi} n\phi \left(\frac{1}{2} h(0) + \frac{4\pi}{\phi} E_1 - H_{\text{ext}} \right) + \frac{1}{8\pi} n\phi (1 - E_2) \bar{h}, \quad (11.3.86)$$

$$\text{где } \bar{h} \equiv \sum_j h(\zeta_j). \quad (11.3.87)$$

Плотность вихрей n определяется из условия

$$\frac{\partial}{\partial n} G_s = 0; \quad (11.3.88)$$

при этом H_{ext} представляется как функция от n :

$$H(n) = \frac{1}{2} h(0) + \frac{4\pi}{\phi} E_1 + \frac{1}{2} (1 - E_2) \left(1 + n \frac{\partial}{\partial n} \right) \bar{h}. \quad (11.3.89)$$

Если $n = 0$, то для $H(0)$ ($\approx H_{c1}$) получаем выражение

$$H(0) = \frac{1}{2} h(0) + \frac{4\pi}{\phi} E_1. \quad (11.3.90)$$

Отсюда находится приближенное значение H_{c1} . Теперь формула (11.3.89) записывается в виде

$$H(n) = H(0) + \frac{1}{2} (1 - E_2) \left(1 + n \frac{\partial}{\partial n} \right) \bar{h}. \quad (11.3.91)$$

Обозначим через n_c плотность вихрей n при $H_{\text{ext}} = H_{c2}$. Поскольку при $H_{\text{ext}} = H_{c2}$ $H_{c2} = B$, имеем соотношение

$$H_{c2} = n_c \phi, \quad \text{т. е. } H(n_c) = n_c \phi. \quad (11.3.92)$$

Отсюда, используя (11.3.91), находим

$$H_c \phi = H(0) + \frac{1}{2} (1 - E_2) \left[\left(1 + n \frac{\partial}{\partial n} \right) \bar{h} \right]_{n=n_c}. \quad (11.3.93)$$

С другой стороны, термодинамический потенциал Гиббса в нормальном состоянии дается формулой

$$G_n = \frac{1}{8\pi} (H_c^2 - H_{\text{ext}}^2). \quad (11.3.94)$$

Поскольку при $H_{\text{ext}} = H_{c2}$ $G_s = G_n$, из (11.3.94) и (11.3.86) с учетом формулы (11.3.90) получаем

$$H_c^2 = n_c \phi [2H(0) - n_c \phi] + n_c \phi (1 - E_2) [\hbar]_{n=n_c}. \quad (11.3.95)$$

Два соотношения (11.3.93) и (11.3.95) определяют одновременно n_c и параметр E_2 .

Условие $G_s = G_n$ при $n = n_c$ означает, что термодинамический потенциал Гиббса в нормальном и смешанном состояниях имеет

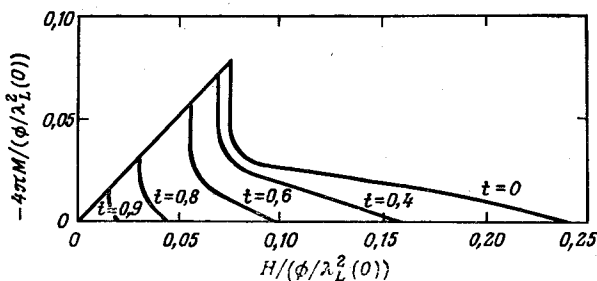


Рис. 11.7.

одинаковые значения. Условие же $H_{\text{ext}} = B (=n_c \phi)$ означает, что G_s и G_n имеют общую касательную при $H_{\text{ext}} = H_{c2}$. Из этого условия находится параметр E_2 .

Поскольку $E_1 \ll (\phi/2) h(0)$ при больших κ_B , имеем

$$H_{c1} \approx \frac{1}{2} h(0) \quad \text{при больших } \kappa_B. \quad (11.3.96)$$

Рассмотренный выше метод вычисления функций $H(n)$, H_{c1} , H_{c2} и параметра Маки $\kappa_1 = H_{c2}/2^{1/2} H_c$ при различных температурах был применен к ниобию. Результаты с разумной точностью согласуются с экспериментом¹⁾. На рис. 11.7 представлены типичные кривые намагничивания для сверхпроводника II/1 рода при различных температурах.

¹⁾ В работе [16] использовалось полученное экспериментально, а не теоретически (в рамках приближения Хартри) значение энергии конденсации. Это осуществлялось путем введения параметра $\delta = [H_{c2}/H_c]_{T=0}$. Из экспериментов было найдено, что $\delta \approx 2$. В теоретическом анализе [16] использовалось значение $\delta = 2,25$. Если воспользоваться энергией конденсации, найденной в рамках приближения Хартри (формула (5.1.192)), то теоретические результаты немного изменятся.

Параметры Маки. Имеются три параметра, которые часто используются при рассмотрении магнитных свойств сверхпроводников II рода. Они обозначаются символами $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ и определяются соотношениями [9]

$$H_{c2}/H_c = 2^{1/2}\kappa_1(t), \quad (11.3.97)$$

$$\left. \frac{\partial (4\pi M)}{\partial H} \right|_{H=H_c} = \frac{1}{\beta [2\kappa_2^2(t) - 1]}, \quad (11.3.98)$$

$$H_c / [\phi / \lambda_L^2(t)] = \kappa_3(t) / 2^{1/2} (2\pi), \quad (11.3.99)$$

где H — внешнее магнитное поле, а β — константа, зависящая от структуры решетки вихрей, определение которой дано ниже.

Вычислим эти параметры. Для удобства в этом подразделе нормируем все величины так, чтобы они измерялись в единицах $[\phi / \lambda_L^2(t)]$, так что $G_s \rightarrow [\phi / \lambda_L^2(t)]^2 G_s$, $n\phi \rightarrow [\phi / \lambda_L^2(t)] n$, $H \rightarrow [\phi / \lambda_L^2(t)] H$ и т. д. При этом выражение для термодинамического потенциала Гиббса (11.3.85) принимает вид

$$G_s(n) = \frac{n}{8\pi} g(n) - \frac{n}{4\pi} H, \quad (11.3.100)$$

где H — внешнее магнитное поле. Величина $g(n)$ может рассматриваться как эффективная энергия каждого отдельного вихря в многоточечной системе. Из условия (11.3.88) находится H в зависимости от n (см. (11.3.91)):

$$H(n) = \frac{1}{2} \left(1 + n \frac{\partial}{\partial n} \right) g(n). \quad (11.3.101)$$

При $H = H_{c2}$ (т. е. при $n = n_c$) $G_s(n) = G_n(n)$ и $H_{c2} = B = n_c$, где $G_n(n)$ — термодинамический потенциал Гиббса для нормального состояния, определяемый формулой (11.3.94). В результате из (11.3.100) и (11.3.101) получаем

$$H_c^2 = n_c [g(n_c) - n_c], \quad (11.3.102)$$

$$n_c = \frac{1}{2} \left(1 + n_c \frac{\partial}{\partial n_c} \right) g(n_c), \quad (11.3.103)$$

откуда следует

$$g(n_c)/n_c = 1 + (H_c/n_c)^2, \quad (11.3.104)$$

$$\partial g(n_c)/\partial n_c = 1 - (H_c/n_c)^2. \quad (11.3.105)$$

Эти два соотношения определяют n_c и параметр E_2 . Параметр $\kappa_1(t)$ находится из соотношения (11.3.97), которое записывается в виде

$$\kappa_1(t) = 2^{-1/2} (n_c/H_c). \quad (11.3.106)$$

Параметр $\kappa_3(t)$ получают, используя выражение для энергии конденсации $H_c^2/8\pi$ (см. (11.3.75)), согласно формуле (11.3.99), принимающей вид

$$\kappa_3(t) = 2^{1/2} (2\pi) H_c. \quad (11.3.107)$$

Заметим, что из приведенных выше соотношений следует

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \kappa_1(t) \kappa_3(t), \quad (11.3.108)$$

$$R(t) \equiv 1 - (4\pi H_c^2/n_c) = \quad (11.3.109)$$

$$= \frac{1}{\kappa_1(t)} [\kappa_1(t) - \kappa_3(t)]. \quad (11.3.110)$$

Заметим также, что в проведенном рассмотрении структура $g(n)$ не конкретизируется. Воспользуемся теперь выражением (11.3.86), которое дает

$$g(n) = \sum_j h(\zeta_j) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \bar{h}(n), \quad (11.3.111)$$

где (см. (11.3.87))

$$\bar{h}(n) = \sum_j h(\zeta_j). \quad (11.3.112)$$

Согласно формуле (11.3.79), имеем

$$\varepsilon_1 = 1/4\pi. \quad (11.3.113)$$

Параметр ε_2 находится из соотношений (11.3.104) и (11.3.105). Используя равенство (11.3.66), мы можем вычислить $g(n)$ и определить ε_2 . В результате получаем

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 - 2\Sigma_1 + \Sigma_2}{2n_c - h(0) + 2\Sigma_1 + \Sigma_2}, \quad (11.3.114)$$

где

$$\Sigma_1 = n_c \sum_{l, m}' F(g), \quad (11.3.115a)$$

$$\Sigma_2 = n_c^2 \frac{\partial}{\partial n_c} \sum_{l, m}' F(g); \quad (11.3.115b)$$

в случае треугольной решетки g дается формулой (см. (11.3.70))

$$g^2 = 4\pi^2 n_c \frac{2}{3^{1/2}} (l^2 + m^2 - lm). \quad (11.3.116)$$

Штрих в (11.3.115) означает, что член, отвечающий $g = 0$ (т. е. $l = m = 0$), опускается. Вычисление величины $R(t)$, определяемой формулой (11.3.109), с помощью выражения (11.3.102) приводит к результату

$$R(t) = \frac{1}{2\varepsilon_1} [\varepsilon_1 + \Sigma_1 - \varepsilon_2 h(0) + \Sigma_2]. \quad (11.3.117)$$

Нас интересует ситуация при значениях T , близких к T_c (т. е. при $t \approx 1$). Не имеет смысла проводить рассмотрение точно при $T = T_c$, поскольку вычислить функцию s при $T = T_c$ чрезвычайно сложно. Это можно понять, если учесть, что мы имеем дело с рассмотрением коллективной моды в критической области. Лучшее, что мы можем сделать, — это выбрать значение T очень близким к T_c (например, при $t = 0,99$) и вычислить $R(t)$ с помощью формулы (11.3.117), используя выражения (5.4.179) для функции s и (5.4.193) для энергии конденсации. Мы приняли $VN(0) = 0,3$. Чтобы упростить расчет, используем равенство $n_c = (1/2\pi)\kappa_3^2$, полагая $\kappa_3 = \kappa_1$, и посмотрим, воспроизведется или нет условие

Таблица 11.1

κ_B	R	κ_B	R
1	-0,797	10	0,0185
2	-0,0217	10 ²	0,0228
3	-0,0033	10 ³	0,0229
4	0,0054	10 ⁴	0,0229
5	0,0102		

$\kappa_3 = \kappa_1$ в конечном результате для R . Результаты при $t = 0,99$ приведены в табл. 11.1. Они показывают, что при $t \approx 1$ $R(t)$ практически равно нулю. Из (11.3.110) следует, что этот результат действительно согласуется с соотношением

$$\kappa_1(t) = \kappa_3(t) \quad \text{при } t = 1. \quad (11.3.118)$$

Это соотношение было предсказано в рамках теории Гинзбурга—Ландау.

Параметр Гинзбурга—Ландау κ определяется как $\kappa_3(t)$ при $t = 1$. Если для энергии конденсации воспользоваться приближенным выражением (5.4.193), то получим

$$\kappa = 0,96\kappa_B = 0,96[\lambda_L(0)/\xi(0)]. \quad (11.3.119)$$

Обратим теперь внимание на κ_2 . Наклон кривой намагничивания дается формулой

$$\frac{\partial(4\pi M)}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H}(n - H) = \left(\frac{\partial H(n)}{\partial n}\right)^{-1} - 1, \quad (11.3.120)$$

а из (11.3.101) следует

$$\frac{\partial H(n)}{\partial n} = \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{2}n \frac{\partial^2}{\partial n^2}\right) g(n). \quad (11.3.121)$$

Из этих соотношений с учетом (11.3.106) получаем

$$\frac{\partial(4\pi M)}{\partial H} \Big|_{H=H_{c2}} = \frac{1}{\beta_1(t) [2\kappa_1^2(t) - 1]}, \quad (11.3.122)$$

где

$$\beta_1(t) = 1 + \frac{2\kappa_1^2(t)}{2\kappa_1^2(t) - 1} \frac{\kappa_1^2(t) n_c [\partial^2 g(n_c)/\partial n_c^2]}{1 - \kappa_1^2(t) n_c [\partial^2 g(n_c)/\partial n_c^2]}. \quad (11.3.123)$$

Выберем β так, чтобы при $t = 1$ $\beta = \beta_1$. При этом, согласно (11.3.98), имеем

$$\kappa_1(t) = \kappa_2(t) \quad \text{при } t = 1. \quad (11.3.124)$$

Таким образом, получаем

$$\kappa_1(t) = \kappa_2(t) = \kappa_3(t) = \kappa \quad \text{при } t = 1. \quad (11.3.125)$$

Из выражения (11.3.123) видно, что β немного больше единицы. Значение производной $\partial^2 g/\partial n^2$ при $n = n_c$ (а следовательно, β) зависит от деталей распределения очень малого по величине тока при поле H , близком к H_{c2} .

Анизотропные сверхпроводники. До сих пор мы рассматривали изотропные сверхпроводники. Однако, строго говоря, изотропные сверхпроводники встречаются крайне редко, поскольку почти все сверхпроводники обладают анизотропией свойств, обусловленной проявляющейся на микроскопическом уровне анизотропией сверхпроводящей электронной системы [21]. Поэтому проводилось много экспериментальных и теоретических исследований анизотропных сверхпроводников. В дихалькогенидах, таких, как NbSe_2 и TaS_2 , плоскости, образованные атомами халькогенов, упакованы вдоль оси c кристалла, а плоскости, в которых ионы металла образуют треугольную решетку, вставлены между халькогенными плоскостями с интервалом в две халькогенные плоскости. Следовательно, перенос электронов между ионами металла в плоскости происходит более интенсивно, чем между плоскостями. В NbSe_2 было обнаружено, что значение верхнего критического поля сильно зависит от угла между внешним магнитным полем и металлической плоскостью. Соединения типа A-15 V_3Si и Nb_3Sn известны как высокотемпературные сверхпроводники. В этих кристаллах выше температуры сверхпроводящего перехода происходит мартенситное превращение из кубической структуры в тетрагональную. Если, как считают некоторые авторы, основную роль в мартенситном превращении играет зонный эффект Яна—Теллера, то при мартенситном превращении следует ожидать существенного изменения электронной структуры в окрестности уровня Ферми. Такое изменение электронной структуры, естественно, оказывает влияние на сверхпроводящее состояние, и в результате появляется анизотропия в уравнении максвелловского типа, а также анизотропия свободной энергии смешанного состояния. Мы привели в качестве примера только не-

которые из многих типов анизотропных сверхпроводников. Даже в случае сверхпроводников с кубической симметрией, таких, как Nb и Pb—Tl, наблюдалась очень малая анизотропия поведения магнитных свойств. Эксперименты по рассеянию нейтронов и с применением метода декорирования показали, что имеется корреляция между решеткой вихрей и кристаллической решеткой.

Обобщим теперь уравнение максвелловского типа, чтобы учесть наличие анизотропии свойств [3]. Если мы рассматриваем анизотропную систему, то энергия голдстоуновского бозона f^0 перестает быть функцией p^2 . Она имеет вид

$$\omega_B^2(p) = (v_B(p)/c)^2 V_{ij}(p) p_i p_j, \quad (11.3.126)$$

где $V_{ij}(p)$ — не единичная матрица. Отсюда видно, что оператор $D(\partial)$ в уравнении (11.3.2) для $f(x)$ имеет следующую структуру:

$$D(\partial) = \partial_0^2 - (v_B(\partial)/c)^2 V_{ij} \partial_i \partial_j; \quad (11.3.127)$$

этот оператор может быть представлен в виде $D(\partial) = D^\mu(\partial) \partial_\mu$, где

$$D_B(\partial) = \{\partial_0, [v_B(\partial)/c]^2 V_{ij} \partial_j\}. \quad (11.3.128)$$

При таком определении $D_\mu(\partial)$ калибровочное условие $D^\mu(\partial) a_\mu = 0$ (см. (11.3.3)) остается в силе. Из закона сохранения $\partial^\mu J_\mu = 0$ в данном случае видно, что определение величины $\eta^{\mu\nu}(p)$ (см. (11.3.28)) должно быть модифицировано следующим образом:

$$\eta^{\mu\nu}(p) = \left(\begin{array}{c|c} -(v_B/c)^{-2} & 0 \\ \hline & V_{ij}(p) \end{array} \right). \quad (11.3.129)$$

Итак, уравнение максвелловского типа (11.3.40) остается справедливым даже в случае анизотропных сверхпроводников, если определить $\eta^{\mu\nu}(\partial)$ посредством формулы (11.3.129). Функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению $D(\partial) f = 0$, где $D(\partial)$ дается формулой (11.3.127). Уравнение максвелловского типа приводит к условию калибровки $D^\mu(\partial) a_\mu = 0$, где $D_\mu(\partial)$ имеет вид (11.3.128).

Для энергии статических объектов остается справедливой формула (11.3.18). Поэтому $h(r)$ описывает взаимодействие между вихрями даже в случае анизотропных сверхпроводников.

Если симметрия кристалла ниже кубической и он обладает столь сильной анизотропией, что $V_{ij}(p)$ при $p = 0$ намного отличается от единичной матрицы, то обычно основную часть эффектов, связанных с анизотропией, можно учесть, рассматривая только матрицу $V_{ij}(0)$. При этом всегда можно так нормировать V_{ij} , чтобы $\det |V_{ij}| = 1$. В подобных случаях мы можем использо-

вать функцию c , в которой \mathbf{p}^2 заменено на $V_{ij}p_i p_j$; кроме того, надо определить $\eta^{\mu\nu}$ согласно формуле (11.3.129). Матрица V_{ij} находится на основе информации об анизотропной структуре электронных энергетических зон. Первые расчеты подобного рода приведены в работах [22], в которых теоретически исследовались аномалии теплоемкости и коэффициента поглощения ультразвука [23], наблюдавшиеся у V_3Si в смешанном состоянии.

В случае кубических сверхпроводников с анизотропной поверхностью Ферми анизотропия исчезает при $\mathbf{p} = 0$ [$V_{ij}(0) = \delta_{ij}$]. Поэтому анизотропная структура функции c и матрицы $V_{ij}(\mathbf{p})$ при $\mathbf{p} \neq 0$ должна находиться на основе данных о структуре анизотропной поверхности Ферми. Такой расчет проведен в работе [24]. Оказывается, что уравнение максвелловского типа (11.3.40) с $\eta^{\mu\nu}$, даваемым формулой (11.3.129), приводит к анизотропии функции $h(\mathbf{r})$, описывающей взаимодействие между вихрями. Поскольку притяжение между вихрями в слабых полях определяет структуру решетки, образованной вихревыми нитями, мы можем предсказать структуру этой решетки, исследуя полученную теоретически функцию $h(\mathbf{r})$. В слабых полях при низких температурах возникает множество вихревых решеток с различной структурой, и теоретические результаты, касающиеся предпочтительных ориентаций вихревых нитей в решетке, хорошо согласуются с экспериментом [25] для Nb и Pb—Tl. Это важно, поскольку теоретические результаты основываются только на уравнениях максвелловского типа. Изучение анизотропного поведения H_{c1} и H_{c2} при низкой температуре требует вычисления термодинамического потенциала Гиббса [26]. Эти результаты находятся в качественном согласии с экспериментом¹⁾.

11.4. Магнитные сверхпроводники

Введение. До сих пор мы рассматривали сверхпроводимость, предполагая, что электронное взаимодействие проявляется в форме минимального взаимодействия, т. е. оно вводится путем замены

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu.$$

Если в систему входят элементы, характеризующиеся спином S , то необходимо добавить магнитное взаимодействие вида $-\mathbf{V} \cdot \mathbf{M}$, где $\mathbf{M} = g\mu_B S$, которое является взаимодействием F_{ij} -типа. Если спины выстраиваются за счет некоторого спин-спинового взаимодействия, то система находится в магнитоупорядоченном состоянии, рассмотренном в гл. 5. Мы сталкиваемся здесь со ста-

¹⁾ Вычисление термодинамического потенциала в области сильных полей, основанное на теории Гинзбурга—Ландау, приведено в работе [27].

рой проблемой сосуществования магнетизма и сверхпроводимости.

Происхождение магнетизма связано со спиновой симметрией, а сверхпроводимости — с фазовой симметрией. Поскольку эти симметрии независимы, с симметричной точки зрения допустимо состояние, в котором одновременно имеется упорядочение обоих типов. Однако ситуация не так проста, как это кажется на первый взгляд, поскольку взаимодействие между спиновой системой, ответственной за магнетизм, и электронами проводимости, ответственными за сверхпроводимость, может подавлять действие механизмов, обуславливающих возникновение каждого из указанных упорядоченных состояний.

Эти две системы (электронов проводимости и спиновая) взаимодействуют за счет а) спин-спинового взаимодействия, обусловленного обменом

$$H_I = g\mu_B I \psi^\dagger \sigma \psi S, \quad (11.4.1)$$

и б) электромагнитного (дипольного) взаимодействия

$$H_{EM} = -g\mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} - j(\psi, \psi^\dagger) \mathbf{A}. \quad (11.4.2)$$

Первое из них модифицирует как эффективное взаимодействие, обусловленное электрон-электронным рассеянием, так и спин-спиновое взаимодействие. Второе взаимодействие приводит к изменению вида уравнения Максвелла, рассмотренного в предыдущем разделе, вызывая некоторое взаимное влияние этих двух систем. В предыдущем разделе мы видели, что мейсснеровский ток, создаваемый сверхпроводящими электронами, способствует диамагнетизму, а магнитный ток $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ способствует парамагнетизму. Поэтому если говорить о магнитных свойствах, то парамагнетизм спиновой системы и диамагнетизм сверхпроводящей системы конкурируют друг с другом в уравнении Максвелла, приводя к различным необычным явлениям. В этом разделе мы сконцентрируем внимание главным образом на электромагнитных свойствах.

Исторические замечания. Ранние исследования в этой области касались в основном магнитных примесей, поэтому изучалось влияние взаимодействия типа (11.4.1). Взаимодействие между примесью и электронами проводимости описывается в общем виде [28] выражением

$$H_I = \int d^3x \left(\sum_i U_1(\mathbf{x} - \mathbf{R}_i) \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) + \sum_j U_2(\mathbf{x} - \mathbf{R}_j) S_j \psi^\dagger(\mathbf{x}) \sigma \psi(\mathbf{x}) \right), \quad (11.4.3)$$

где U_1 и U_2 — потенциалы, создаваемые немагнитной и магнитной примесями соответственно, S_j — спин j -го атома примеси,

а σ — спин электрона проводимости. Как выяснено в работе [29], эффекты, обусловленные магнитными и немагнитными примесями, довольно сильно различаются между собой. Первое серьезное исследование, основанное на методе функций Грина, было проведено Абрикосовым и Горьковым [30]. Они предсказали существование области с бесщелевым энергетическим спектром (см. обзор по этому вопросу [31]). Ими было также показано, что при достаточно большой концентрации примесей они разрушают коллективную моду (т. е. куперовские пары), приводя к подавлению сверхпроводящего состояния. Исследование тех случаев, когда магнитные ионы образуют периодическую решетку, требует более тщательного учета спин-спиновых корреляций между магнитными ионами.

Имеется много механизмов возникновения спин-спинового взаимодействия между магнитными ионами. Оно может быть связано со спиновым обменом между электронами проводимости и магнитными ионами ($s - f$ -взаимодействие). Это так называемый механизм РККИ [32]. Другой механизм имеет электромагнитную природу (магнитное дипольное взаимодействие). Андерсон и Сул [33] показали, что восприимчивости электронов проводимости в сверхпроводящем и нормальном состояниях сильно различаются, и это различие приводит к существенной модификации взаимодействия РККИ. Принимая, что спин-спиновое взаимодействие осуществляется с помощью тех же электронов проводимости, которые ответственны за сверхпроводимость, они предсказали возможность появления в сверхпроводниках небольших похожих на домены структур с ферромагнитным порядком. Сул и Маттиас [34] показали также, что могут сосуществовать сверхпроводящие доменные стенки и ферромагнитные домены.

Тройные редкоземельные соединения. Начиная примерно с 1977 г. широко ведутся экспериментальные и теоретические исследования различных магнитных сверхпроводников, представляющих собой тройные или псевдотройные соединения, содержащие редкоземельные ионы ($RE Rh_4B_4$, $RE Mo_6Se_8$, $RE Rh_x Sn_y$ и др., где RE — редкоземельные ионы). Эти соединения обладают многими необычными свойствами. В процессе охлаждения соединения $ErRh_4B_4$ [35] и $HoMo_6S_8$ [36] становятся нормальными ферромагнетиками, проходя через сверхпроводящее состояние (рис. 11.8). Такое явление носит название возвратной сверхпроводимости. Вблизи температуры возврата в нормальное состояние наблюдается сильно выраженный температурный гистерезис. Эксперименты по рассеянию нейтронов показали наличие длиннопериодической магнитной структуры (спиральной или синусоидальной) в узком температурном интервале, ограниченном снизу температурой возврата [37]. Кроме того, удельное сопротивление

этих соединений не возвращается к обычным значениям, характерным для нормального состояния. Такие соединения, как GdMo_6S_8 , TbMo_6S_8 , DyMo_6S_8 и т. д., также становятся сверхпроводниками при некоторой достаточно низкой температуре, а при дальнейшем

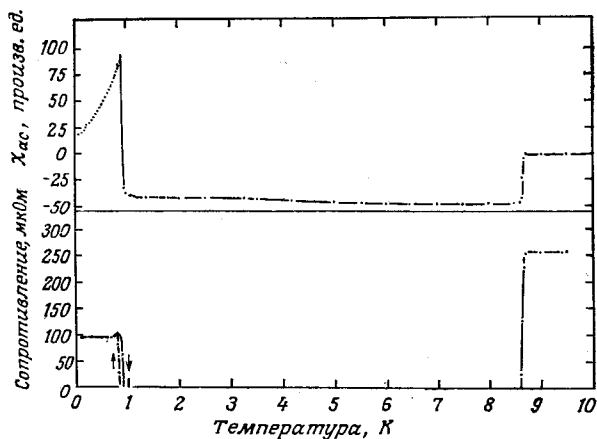


Рис. 11.8.

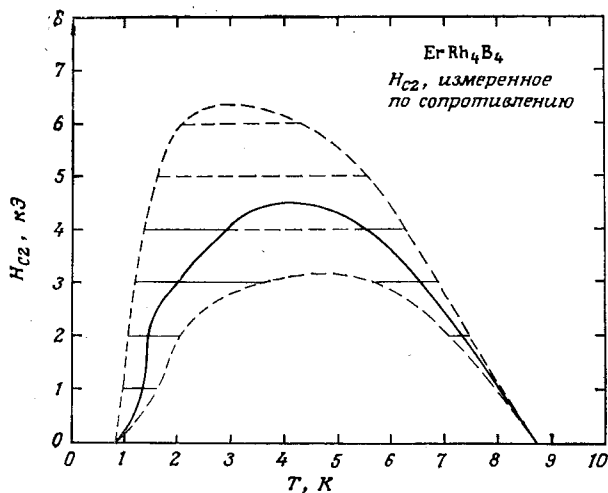


Рис. 11.9.

понижении температуры в них возникает антиферромагнитный порядок. Этот антиферромагнитный порядок сосуществует со сверхпроводимостью. Сверхпроводящее состояние соединений как ферромагнитного, так и антиферромагнитного типа характеризуется необычной температурной зависимостью верхнего критиче-

ческого поля H_{c2} (рис. 11.9). А именно, H_{c2} сильно уменьшается вблизи температуры магнитного фазового перехода [38] (см., например, обзоры экспериментальных результатов Ишикавы и др. [39]). В этих соединениях при замещении магнитных редкоземельных ионов на немагнитные изменение T_c обычно мало, что свидетельствует о слабости обменного взаимодействия между спинами электронов проводимости и редкоземельных ионов. Расчеты в рамках зонной теории [40] также показали, что это обменное взаимодействие в рассматриваемых тройных соединениях является крайне слабым. Поэтому следует ожидать, что решающую роль играет электромагнитное взаимодействие между незатухающим током и редкоземельными магнитными ионами. Точнее говоря, микроскопическая картина такова. Электроны, ответственные за сверхпроводимость, — это в основном $4d$ -электроны Rh и Mo. Притяжение типа БКШ действует между электронами проводимости, а между электронами проводимости и спинами редкоземельных ионов существует крайне слабое s - f взаимодействие¹). Электромагнитное поле взаимодействует как с электронами проводимости, так и с магнитными моментами редкоземельных ионов. Взаимное влияние этих двух систем, обусловленное электромагнитным взаимодействием, рассматривается в следующем разделе.

Уравнение максвелловского типа. Описывая сверхпроводящее состояние, обобщим уравнение максвелловского типа, включив в него магнитное взаимодействие [41]. Чтобы сократить рассмотрение, мы не будем приводить полного микроскопического вывода, а ограничимся лишь кратким изложением. Магнитная индукция $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{a}$ определяется суммой магнитного поля \mathbf{H} , создаваемого незатухающим током \mathbf{J} , и магнитного момента редкоземельных ионов \mathbf{m} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{m}, \quad (11.4.4)$$

$$4\pi\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (11.4.5)$$

Незатухающий ток \mathbf{J} определяется выражением (11.3.36).

Из соотношений (11.4.4) и (11.4.5) следует

$$\begin{aligned} (\partial^2 g_{\mu\nu}^v - \partial_\mu \partial_\nu) a_\nu(x) = \frac{1}{\lambda_L^2} \int d^3y c(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \eta_\mu^v(\partial) \left(a_\nu(y) - \frac{\hbar c}{e} \partial_\nu f(y) \right) - \\ - 4\pi g_{\mu i}^i (\nabla \times \mathbf{m})_i, \quad (11.4.6) \end{aligned}$$

¹) Тем не менее в реальных соединениях именно оно определяет структуру и основные характеристики неоднородного состояния. Подробнее см. обзор [56*]. — *Прим. перев.*

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор. Магнитный момент \mathbf{m} определяется выражением

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = g_{\mu_B} \sum_n S_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n), \quad (11.4.7)$$

где S_n — спин, локализованный в узле \mathbf{R}_n кристаллической решетки. В статическом случае уравнение (11.4.6) можно представить в виде

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_L^2} \int d^3y c(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\mathbf{B}(\mathbf{y}) - \frac{\hbar c}{e} \nabla \times \nabla f(\mathbf{y}) \right] + 4\pi \nabla^2 \mathbf{m}. \quad (11.4.8)$$

Здесь и далее \mathbf{m} — поперечная составляющая намагниченности. Энергия дается формулой

$$E = E[f] - \frac{1}{2} \int d^2x \mathbf{m}(\mathbf{x}) \gamma_0(\nabla) \mathbf{m}(\mathbf{x}) + E_{\text{core}}, \quad (11.4.9)$$

где

$$E[f] = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left[\frac{1}{2} f_{ij} f_{ij} - \left(a_i - \frac{\hbar c}{e} \partial_{ij} \right) 4\pi J_i - 8\pi \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \right], \quad (11.4.10)$$

а E_{core} — энергия сердцевины вихря. Приведенное выше выражение для $E[f]$ отличается от (11.3.11) тем, что в нем добавлен последний член, описывающий магнитное дипольное взаимодействие. Второй член в (11.4.9) отвечает взаимодействию между спинами редкоземельных ионов, обусловленному всеми возможными механизмами (в том числе и слабым s — f -взаимодействием), за исключением магнитного дипольного взаимодействия, описываемого последним членом в выражении (11.4.10) для $E[f]$. Дифференциальный оператор $\gamma_0(\nabla)$ определяет величину спин-спинового взаимодействия между редкоземельными ионами.

Используя уравнение (11.4.8), можно вывести формулу

$$E[f] = \frac{1}{2} \frac{\hbar c}{e} \int d^3x \nabla f \cdot \mathbf{J} = \frac{\hbar c}{8\pi e} \int d^3x \mathbf{H} \cdot \nabla \times \nabla f, \quad (11.4.11)$$

имеющую такой же вид, как и полученное выше соотношение (11.3.18) для немагнитного случая. Но в данном случае \mathbf{H} не совпадает с магнитной индукцией \mathbf{B} . Магнитный момент $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ вычислен в гл. 5 в рамках приближения среднего поля. Он дается формулой (5.3.21):

$$|\mathbf{m}(\mathbf{x})| = g_{\mu_B} J N B_J [g_{\mu_B} J \beta |\mathbf{H}_m(\mathbf{x})|], \quad (11.4.12)$$

где

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \gamma_0(\nabla) \mathbf{m}(\mathbf{x}). \quad (11.4.13)$$

Здесь предполагается, что \mathbf{m} и \mathbf{B} параллельны друг другу, N — число магнитных ионов в единичном объеме, B_J — функция Бриллюэна, а $\beta = 1/(k_B T)$; \mathbf{H}_m — молекулярное поле, действующее

щее на редкоземельные ионы. В линейном приближении из (11.4.13) следует закон Кюри

$$m(\mathbf{x}) = \frac{C}{T} \mathbf{H}_m(\mathbf{x}), \quad (11.4.14)$$

где C — постоянная Кюри. Объединяя уравнения (11.4.8) и (11.4.14), можно найти $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ и $m(\mathbf{x})$.

Для реальных расчетов требуется знание характеристической функции бозонов $c(\mathbf{x})$. До сих пор в большинстве расчетов использовалась приближенная формула (5.4.179). Слабое s — f -взаимодействие может слегка изменить параметр ξ_0 и спиновое взаимодействие $\gamma_0(k)$, поскольку оно влияет на величину Δ . Мы рассматриваем ξ_0 , λ_L и $VN(0)$ в качестве параметров теории.

Эффект экранировки и фаза с периодическими упорядоченными спинами. При решении уравнений (11.4.8) и (11.4.14) удобно воспользоваться фурье-представлением. Определим величину $\gamma_0(\mathbf{p})$ посредством соотношения $\gamma_0(\mathbf{p}) \exp[i\mathbf{p}\mathbf{x}] = \gamma_0(\mathbf{V}) \exp[i\mathbf{p}\mathbf{x}]$. Если из (11.4.8) и (11.4.14) исключить \mathbf{V} , то получим

$$[T - C\tilde{\gamma}(\mathbf{p})] m(\mathbf{p}) = 0, \quad (11.4.15)$$

где

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{p}) = \gamma(\mathbf{p}) - \frac{4\pi c(\mathbf{p})}{\lambda_L^2 \mathbf{p}^2 + c(\mathbf{p})}, \quad (11.4.16)$$

$$\gamma(\mathbf{p}) = \gamma_0(\mathbf{p}) + 4\pi. \quad (11.4.17)$$

Из уравнения (11.4.15) видно, что эффективное обменное взаимодействие описывается величиной $\tilde{\gamma}$, а не γ . Согласно соотношению (11.4.16), это эффективное взаимодействие экранируется незатухающими токами. Этого и следовало ожидать, исходя из того, что благодаря незатухающим токам сверхпроводник становится диамагнитным.

Обычно полагают, что $\gamma_0(\mathbf{p})$ имеет вид $[(T_m/C) - 4\pi - (D/C) \mathbf{p}^2]$, откуда следует

$$\gamma(\mathbf{p}) = \frac{T_m}{C} - \frac{D}{C} \mathbf{p}^2. \quad (11.4.18)$$

Если мы рассматриваем ферромагнитный сверхпроводник, то $T_m > 0$. В этом случае $\gamma(\mathbf{p})$ имеет максимум при $\mathbf{p} = 0$, что показано штриховой кривой на рис. 11.10. В сверхпроводящем состоянии $\tilde{\gamma}(\mathbf{p})$ сильно экранируется в области малых \mathbf{p} . Это показано на том же рисунке с помощью сплошной кривой. Следовательно, $\tilde{\gamma}$ имеет максимум при некотором ненулевом значении $|\mathbf{p}|$ (например, $Q|\mathbf{p}|$). Величина Q порядка $(4\pi C/D)^{1/4} \lambda_L^{1/2}$. Исходя из (11.4.15), можно видеть, что при понижении температуры (при $T = C\tilde{\gamma}(\mathbf{p})$, где $|\mathbf{p}| = Q$) появляется бесконечно малый маг-

нитный момент $\mathbf{m}(\mathbf{p})$ с $|\mathbf{p}| = Q$. Это показывает ¹⁾, что в сверхпроводящем состоянии возникает спиновый порядок с периодом, определяемым волновым вектором Q [42] (в рамках теории Гинзбурга—Ландау возможность спирального спинового состояния описана в работах [43]). Как упомянуто выше, результаты экспериментов по дифракции нейтронов показали, что в HoMo_6S_8 возникает периодическое спиновое упорядочение, а в ErRh_4V_4 проявляются большие спиновые флуктуации периодического типа.

Наличие спин-периодической фазы оказывает также влияние на электромагнитное поле вследствие его связи с магнитным моментом. Фактически если исключить \mathbf{m} из обоих уравнений (11.4.8) и (11.4.14), то в получившемся уравнении для $B(\mathbf{p})$ появляется множитель $[T - C\tilde{\gamma}(\mathbf{p})]$ (помимо обычного множителя, связанного с плазменной модой), характеризующий влияние спиновых волн на электромагнитное поле.

В ферромагнитном образце обычно имеется множество блоховских стенок. Структура магнитных моментов в блоховской стенке напоминает магнитную спиральную структуру. Поэтому проведенное выше рассмотрение позволяет предположить, что внутри блоховской стенки имеется область, которая остается сверхпроводящей даже при температуре ниже температуры возврата в нормальное состояние T_M [44]. Это могло бы объяснить, почему удельное сопротивление ErRh_4V_4 и HoMo_6S_8 не возвращается к значению, характерному для нормального состояния при $T < T_M$.

Многие тройные соединения являются сверхпроводниками II рода, если температура близка к температуре сверхпроводящего перехода T_c . Теоретическое рассмотрение смешанного со-

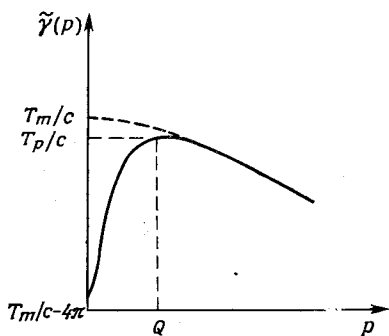


Рис. 11.10.

¹⁾ Мы обнаружили спин-периодическую фазу довольно случайным образом. Когда в конце 1978 г. мы изучали смешанное состояние в ErRh_4V_4 , оказалось, что наш компьютер не может выполнить до конца всю программу расчета. Затем выяснилось, что трудности в счете связаны с наличием особенности у корреляционной функции, что свидетельствовало о существовании спин-периодической фазы [42]. Позднее мы узнали, что примерно в это же время спин-периодическую фазу обнаружил Сул (см. работу Сула [43]). Сразу же после того как мы закончили наш препринт о спин-периодической фазе, нами был получен от Блаунта и Вармы препринт [43], из которого следовало, что они независимо от нас получили тот же результат.

стояния этих сверхпроводников включает те же этапы, что и в немагнитном случае (исследование магнитных свойств магнитных сверхпроводников в рамках теории Гинзбурга—Ландау см. в работе [45]). При вычислении термодинамического потенциала Гиббса мы должны учитывать изменение энтропии за счет локализованных спинов. Энергия сердцевин равна $nE(n)$, где $E(n)$ дается формулой (11.3.84) $E(n) = E_1 - E_2 h_{\text{int}}$. Но определение h_{int} (см. (11.3.83)) должно быть модифицировано следующим образом:

$$h_{\text{int}} = \frac{\phi}{8\pi} \sum_j b(\xi_j), \quad (11.4.19)$$

где $b(\mathbf{x})$ — магнитная индукция в точке \mathbf{x} при наличии единственного вихря, расположенного в начале координат. В немагнитном случае b равно магнитному полю h , создаваемому отдельным вихрем, и, следовательно, выражение (11.4.19) согласуется с (11.3.83). В магнитных сверхпроводниках $b(\xi)$ экспоненциально спадает, а $h(\xi)$ ведет себя по-другому из-за наличия магнитного момента. Рассмотрение, следующее за формулой (11.3.80), доказывает справедливость выражения (11.4.19) для h_{int} .

Особое свойство магнитных сверхпроводников обусловлено квантованием потока. Рассмотрим один вихрь с единичным потоком. Поскольку за часть этого потока ответствен магнитный момент, магнитное поле ослабляется и может даже сменить направление, если магнитный момент достаточно велик. Эта инверсия магнитного поля, приводящая к инверсии тока, способствует усилению притяжения между вихрями, поскольку межвихревое взаимодействие, согласно формуле (11.4.11), определяется магнитным полем. Благодаря этому появляется тенденция к изменению рода сверхпроводника в направлении $\text{II}/2 \rightarrow \text{II}/1 \rightarrow \text{I}$ [41, 46].

Влияние экранировки на $\tilde{\gamma}$ и усиление эффекта инверсии магнитного поля представляют собой два существенных механизма, основываясь на которых можно понять многие необычные явления. Влияние экранировки на $\tilde{\gamma}$ подтверждено в экспериментах по затуханию ультразвука [47].

Рассматривая смешанное состояние магнитных сверхпроводников в сильных полях, следует проявлять особую осторожность при учете эффекта насыщения магнитного момента вихрей. Даже если магнитный сверхпроводник находится в антиферромагнитном состоянии, спиновое упорядочение может стать ферромагнитным, если внешнее магнитное поле ($< H_{c2}$) оказывается достаточно сильным. Отражением этого изменения спинового порядка является провал на графике зависимости H_{c2} от температуры вблизи точки Нееля.

Чтобы анализировать магнитные свойства магнитных сверхпроводников, полезно заметить, что температурная зависимость магнитной индукции \mathbf{B} в них до некоторой степени схожа с той, которая имеет место в немагнитном случае. Грубо говоря, резкие изменения магнитного поля $H = B - 4\pi m$ связаны с поведением магнитного момента. Поэтому обычно полезно строить график не только зависимости H от T , но также и B от T . Например, график зависимости H_{c2} от T следует дополнить графиком зависимости B_c от T , где B_c — магнитная индукция при $H = H_{c2}$ (т. е. при $n = n_c$).

В некоторых условиях следует ожидать, что вихревое состояние в ферромагнитном сверхпроводнике окажется устойчивым в отсутствие внешнего поля. Чтобы исследовать механизм, ответственный

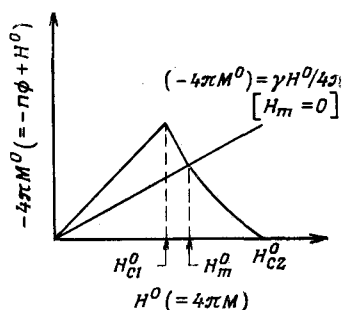


Рис. 11.11.

за существование спонтанно возникающих вихрей [48], положим температуру равной нулю. Если в образец через единичную площадку проникают n вихрей, то для усредненного молекулярного поля, действующего на редкоземельный ион, можно записать выражение

$$H_m = n\phi - 4\pi M + \gamma M. \quad (11.4.20)$$

Если поле H_m положительно, то образец намагничен однородно, а значение намагниченности насыщения

равно $Ng\mu_B J$. Вычисление свободной энергии показывает, что в ферромагнитном сверхпроводнике $4\pi M$ играет роль внешнего поля для орбитального движения электронов. Обозначим через H_{c2}^0 и H_{c1}^0 верхнее и нижнее значения критического поля некоторого образца, аналогичного данному, но в котором отсутствуют спины, ответственные за образование магнитоупорядоченного состояния. Если $4\pi M$ удовлетворяет условию

$$H_{c1}^0 < 4\pi M < H_{c2}^0, \quad (11.4.21)$$

то в образце могут спонтанно возникнуть вихри. Намагниченность стабилизируется магнитным полем, создаваемым током вихрей, а вихри самосогласованным образом стабилизируются намагниченностью. Таким образом, для устойчивости спонтанных вихрей необходимо, чтобы одновременно удовлетворялись два условия, (11.4.21) и $H_m > 0$ (рис. 11.11). Эти условия выполняются, если n и M велики.

На рис. 11.12 показаны типичные графики зависимости намагниченности M от внешнего магнитного поля H при различных температурах вблизи точки перехода в магнитоупорядоченное состояние. Сплошные линии соответствуют сверхпроводящему со-

стоянию, а штриховые — нормальному состоянию. Поскольку вблизи точки магнитного перехода намагниченность увеличивается, закон квантования потока указывает на появление инверсии поля, приводящей к притяжению между вихрями и превращающей образец в сверхпроводник II/1 рода. Поэтому кривые намагничивания на рис. 11.12 демонстрируют наличие перехода первого рода при $H = H_{c1}$.

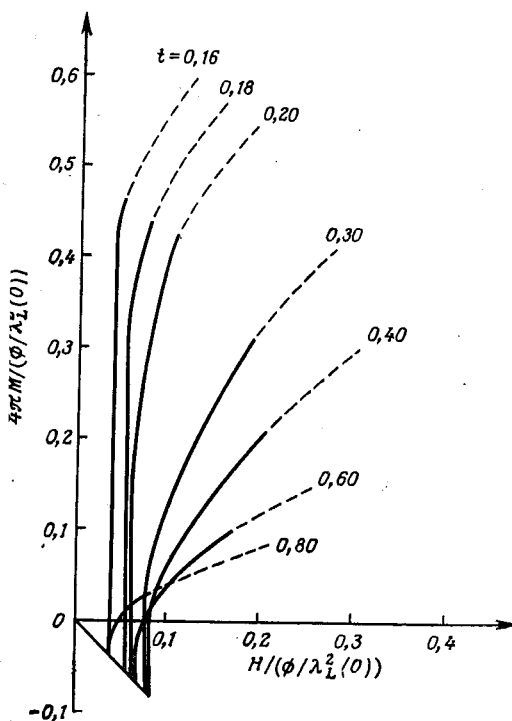


Рис. 11.12.

Поскольку существует много возможных типов фаз, таких, как мейсснеровское состояние, спин-периодическое сверхпроводящее состояние, состояние со спонтанными вихрями, нормальное ферромагнитное состояние и т. д., фазовая диаграмма оказывается весьма сложной. Были проведены соответствующие теоретические расчеты для магнитных сверхпроводников как ферромагнитного, так и антиферромагнитного типа [49].

Вычисление параметров κ_1 , κ_2 и κ_3 было обобщено на случай магнитных сверхпроводников в работе [50].

Было указано также, что в области вблизи поверхности или в тонкой пленке магнитного сверхпроводника ферромагнитного

типа ферромагнитное упорядочение может сосуществовать со сверхпроводимостью при температуре (например, T_s), более высокой, чем T_m [51]. Такая поверхностная сверхпроводимость кратко рассматривается в гл. 12.

Параметр порядка. Мы завершаем этот раздел кратким замечанием, касающимся щели Δ в электронном энергетическом спектре. Для простоты рассмотрим предельный случай неупругого электронного рассеяния, обусловленного спинами (предельный случай упругого рассеяния рассмотрен в работе [52]). Чтобы оценить Δ , дополним гамильтониан БКШ следующим членом, описывающим взаимодействие:

$$\frac{I}{2} \int d^3y \psi^\dagger(x) \sigma^i \psi(x) \chi^{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi^\dagger(y) \sigma^j \psi(y),$$

где $\chi^{ij}(\mathbf{x})$ — восприимчивость локализованных спинов относительно поля, сопряженного параметру порядка. В приближении Хартри—Фока получаем следующее уравнение для щели [53]:

$$\Delta(q) = \frac{V}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\Delta(k)}{E_k} \left(1 - \frac{3I^2}{V} \chi(\mathbf{q} + \mathbf{k})\right) \text{th} \frac{\beta E_k}{2}, \quad (11.4.22)$$

где $\Delta(k)$ — энергетическая щель, зависящая от k^2 , $\chi(\mathbf{k})$ — фурье-образ $\chi(\mathbf{x})$:

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \chi(\mathbf{k}), \quad (11.4.23)$$

$E_k = [\epsilon_k^2 + \Delta^2(k)]^{1/2}$, а V — константа связи, характеризующая взаимодействие БКШ.

Выберем $\chi(\mathbf{k})$ следующим образом:

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{C}{Dk^2 + T - T_m}. \quad (11.4.24)$$

Это выражение с учетом (11.4.18) можно записать в виде

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(T/C) - \gamma(\mathbf{k})}. \quad (11.4.25)$$

В случае немагнитных сверхпроводников мы использовали приближение (см. (5.4.40)), при котором интегрирование по угловым переменным, имеющееся в уравнении для щели, заменялось на интегрирование по поверхности Ферми. Если воспользоваться тем же приближением в случае уравнения (11.4.22), то это приводит к появлению инфракрасной расходимости при $T = T_m$, в результате чего Δ обращается в нуль при T , близких к T_m . Поскольку инфракрасная расходимость логарифмическая, следует проверить, приводит или нет более точное вычисление к ослаблению эффекта, обусловленного этой расходимостью. Тщательное рассмотрение интегрирования в уравнении (11.4.22) показывает,

что подобная инфракрасная расходимость не должна существовать (тот же результат был получен в пределе упругого рассеяния [52]).

Будем использовать следующее приближение:

1. Область интегрирования заключена в пределах $\varepsilon_F - \omega_D < \varepsilon < \varepsilon_F + \omega_D$, где ω_D — дебаевская энергия; $\omega_D \ll \varepsilon_F$.

2. Вблизи поверхности Ферми $\Delta(k)$ — гладкая функция только от k и, следовательно, может быть приближенно заменена на $\Delta(k_F)$.

3. Плотность состояний в рассматриваемом интервале является гладкой функцией от ε : $N(\varepsilon) \approx N(0)$.

Поскольку T_c значительно меньше ω_D , имеем $|T - T_m| \ll \omega_D$ при $T \leq T_c$. В этом случае уравнение (11.4.22) принимает вид

$$1 = VN(0) \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + \Delta_R^2)^{1/2}} \operatorname{th} \left(t_D \frac{(\varepsilon^2 + \Delta_R^2)^{1/2}}{2t} \right) \times \\ \times \left(1 + A \ln \left| \frac{a(t - t_m) + b\varepsilon^2}{1 + a(t - t_m)} \right| \right), \quad (11.4.26)$$

где $t_D = \omega_D/k_B T_{c0}$ (T_{c0} — критическая температура при $I^2 = 0$), $\Delta_R \equiv \Delta(k_F)/\omega_D$, $t = T/T_{c0}$, $A = (3I^2/V)(C/4Dk_F^2)$, $a = T_{c0}/4Dk_F^2$, $b = \omega_D^2/16\varepsilon_F^2$. Поскольку $b \neq 0$, Δ может оставаться конечным при $t = t_m$. Имея в виду ErRh_4B_4 и HoMo_6S_8 , выберем в качестве пробных следующие типичные значения параметров: $VN(0) = 0,3$, $c (= 4\pi C/T_m) = 2$, $3I^2/V = 1$. В качестве грубого приближения для Dk_F^2/T_m имеет смысл воспользоваться выражением $(2\pi)^2 \times (\text{радиус взаимодействия спинов/постоянная решетки})^2$. Этот параметр может иметь любое значение больше 5, хотя представляется вероятным, что оно превышает 30. Отметим, что при росте этого параметра A уменьшается, а Δ увеличивается. Если мы выберем $Dk_F^2/T_m \approx 5$ или 10, то параметр порядка заметно уменьшается вблизи $T = T_m$, хотя он нигде не обращается в нуль. Если же A на порядок меньше (т. е. Dk_F^2/T_m на порядок больше), то уменьшение параметра порядка почти незаметно [54].

В приведенном выше рассмотрении мы использовали восприимчивость относительно поля, сопряженного параметру порядка, описывающую нормальное состояние. Если воспользоваться такой восприимчивостью для мейсснеровского состояния, то величину $\gamma(\mathbf{k})$, определяемую выражением (11.4.25), следует заменить на $\tilde{\gamma}(\mathbf{k})$, в которой учтено экранирование флуктуаций в системе локализованных спинов, обусловленное незатухающими токами. Если параметры выбираются таким образом, что в сверхпроводящем состоянии не появляется спин-периодическая фаза, зависимость Δ от t оказывается более гладкой, чем та, которая дается уравнением (11.4.26). Но в том случае, когда возникает спин-пе-

риодическая фаза ($T_p > T_M$), знаменатель в выражении для χ обращается в нуль при $T = T_p$, и интегрирование в уравнении (11.4.22) при $T < T_p$ приводит к инфракрасной расходимости, обусловленной наличием спин-периодической фазы. Не очевидно, что эта расходимость исчезнет при более точном вычислении параметра порядка. В любом случае следует ожидать появления в системе некоторой анизотропии, что позволит легко исключить инфракрасную расходимость.

В качестве заключительного замечания укажем, что, согласно [33, 35], сосуществование спин-периодической фазы со сверхпроводимостью возможно также благодаря s - f -взаимодействию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Matsumoto H., Semenoff G., Tachiki M., Umezawa H.*, Fortschr. Phys., **28**, 67 (1980);
Nozieres P., Pines D., Nuovo Cim., **10**, 470 (1958).
2. *Matsumoto H., Umezawa H.*, Fortschr. Phys., **24**, 357 (1977).
3. *Matsumoto H., Tachiki M., Umezawa H.*, Fortschr. Phys., **25**, 273 (1977).
4. *Kubo R.*, J. Phys. Soc. Jap., **12**, 570 (1957).
5. *Leplae L., Mancini F., Umezawa H.*, Phys. Rep., **10C**, 152 (1974).
6. *Eilenberger G.*, Zs. Phys., **214**, 195 (1968).
7. *Pesch W., Kramer L.*, J. Low Temp. Phys., **15**, 367 (1974).
8. *Горьков Л. П.*, ЖЭТФ, **34**, 735 (1958); **36**, 1918; **37**, 1407 (1959).
9. Superconductivity, ed. R. G. Parks, Marcel Dekker, New York, 1969. [Имеется перевод двух обзоров из этого сборника: *Коэн М., Глэдстоун Г., Ненсен М., Шриффер Дж.* Сверхпроводимость полупроводников и переходных металлов. — М.: Мир. 1972.]
10. *De Lillo S., Mancini F.*, Physica, **92B**, 239 (1977);
Mancini F., Marinaro M., Zannetti M., Physica, **93B**, 291 (1978);
De Lillo S., Mancini F., Umezawa H., Physica, **95B**, 53 (1978).
11. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П.*, ЖЭТФ, **36**, 319 (1959).
12. *Krägeloh U.*, Phys. Stat. Sol., **42**, 559 (1970);
Essman U., Trauble H., Phys. Lett., **A24**, 526 (1967);
Seeger A., Comm. Sol. St. Phys., **3**, 97 (1970);
Schelten J., Ullmaier H., Schmatz W., Phys. Stat. Sol. (b), **48**, 619 (1971);
Finnemore D. K., Clem J. R., Tromberg T. K., Phys. Rev., **B6**, 1056 (1972);
Kumpf V., Phys. Stat. Sol. (b), **44**, 829 (1971);
Auer J., Ullmaier H., Phys. Rev., **B7**, 136 (1973).
Wollan J. J., Haas K. W., Clem J. R., Finnemore D. K., Phys. Rev., **B10**, 1874 (1974).
13. *Eilenberger G., Büttner H.*, Zs. Phys., **224**, 335 (1969);
Leplae L., Mancini F., Umezawa H., Lett. Nuovo Cim., **3**, 153 (1970);
Dichtel K., Phys. Lett., **35A**, 285 (1971);
Brandt E. H., Phys. Lett., **39A**, 193 (1972);
Hubert A., Phys. Stat. Sol. (b), **53**, 147 (1972);
Jacobs A. E., J. Low Temp. Phys., **10**, 137 (1973);
Leplae L., Srinivasan V., Umezawa H., Phys. Lett., **45A**, 177 (1973);
Mancini F., Phys. Lett., **45A**, 179 (1973);
De Cesare L., Mancini F., Phys. Stat. Sol. (b), **65**, 419 (1974);
Leplae L., Srinivasan V., Umezawa H., Lett. Nuovo Cim., **9**, 711 (1974);
Mancini F., Scarpetta G., Srinivasan V., Umezawa H., Phys. Rev., **B9**, 130 (1974).
14. *Leplae L., Shah M. N., Umezawa H.*, Physica, **80B**, 493 (1975).

15. Christen D. K., Spooner S., Thorel P., Kerchner H. R., J. Appl. Cryst., **11**, 680 (1978).
16. Mancini F., Tachiki M., Umezawa H., Physica, **94B**, 1 (1978).
17. Mancini F., Teshima R., Umezawa H., Sol. St. Commun., **24**, 561 (1977).
18. Wollan J. J., Haas K. W., Clem J. R., Finnemore D. K., Phys. Rev., **B10**, 1874 (1974).
19. Caroli C., de Gennes P. G., Matricon J., Phys. Lett., **9**, 307 (1964); Caroli C., Matricon J., Phys. Kondens. Mat., **3**, 380 (1965).
20. Maki K., Phys. Rev., **156**, 437 (1967); Kagiwada R., Levy M., Rudnick I., Kagiwada H., Maki K., Phys. Rev. Lett., **18**, 74 (1967).
21. Anisotropy effects in superconductivity, ed. H. W. Weber, American Elsevier, New York, 1977.
22. Tachiki M., Koyama T., Phys. Rev., **B15**, 3339 (1977); Tachiki M., Umezawa H., Phys. Rev., **B15**, 3332 (1977).
23. Muto Y., Toyota N., Noto K., Akutsu K., Isino M., Fukase T., J. Low Temp. Phys., **34**, 617 (1979); Toyota N., Fukase T., Tachiki M., Muto Y., Phys. Rev., **B21**, 1827 (1980).
24. Koyama T., Tachiki M., Matsumoto H., Umezawa H., Phys. Rev., **B20**, 918 (1979).
25. Thorel P., Christen D. K., J. Appl. Cryst., **11**, 654 (1978); Christen D. K., Kerchner H. R., Sekula S. T., Thorel P., Phys. Rev., **B21**, 102 (1981).
26. Koyama T., PhD Thesis, Tohoku University, 1979.
27. Takanaka K., Prog. Theor. Phys., **46**, 357; 1301 (1971); **49**, 64 (1973); Rogers M., Kahn R., Deirieu J. M., Phys. Lett., **A50**, 291 (1974).
28. Herring C., Physica, **24**, 1845 (1958).
29. Suhl H., Matthias B. T., Phys. Rev. Lett., **2**, 5; Phys. Rev., **114**, 977 (1959).
30. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., ЖЭТФ, **39**, 1781 (1960).
31. Maki K. in: Superconductivity, ed. R. D. Parks, Marcel Dekker, New York, 1969, p. 1035.
32. Ruderman M. A., Kittel C., Phys. Rev., **96**, 99 (1954); Kasuya T., Prog. Theor. Phys., **16**, 45 (1956); Yosida K., Phys. Rev., **106**, 893 (1957).
33. Anderson P. W., Suhl H., Phys. Rev., **116**, 898 (1959).
34. Suhl H., Matthias B. T., Phys. Rev., Lett., **4**, 51 (1960).
35. Fertig W. A., Johnston D. C., Delong L. E., McCallum R. W., Maple M. B., Matthias B. T., Phys. Rev. Lett., **38**, 987 (1977).
36. Ishikawa M., Fisher O., Sol. St. Commun., **23**, 37; **24**, 747 (1977).
37. Moncton D. E., J. Appl. Phys., **50**, 1880 (1979); Moncton D. E., MoWhan D. B., Schmidt P. H., Shirane G., Thomlinson W., Maple M. B., MacKay H. B., Woolf L. D., Fisk Z., Johnston D. C., Phys. Rev. Lett., **45**, 2060 (1980); Lynn J. W., Shirane G., Thomlinson W., Shelton R. N., Phys. Rev. Lett., **46**, 368 (1981).
38. Ott H. R., Fertig W. A., Johnston D. C., Maple M. B., Matthias B. T., J. Low Temp. Phys., **83**, 159 (1978).
39. Ishikawa M., Fisher O., Muller J., J. de Phys., **C6**, 1379 (1978); Maple M. B., J. de Phys., **C6**, 1374 (1978); Ishikawa M., Maple M. B. — in: Ternary superconductors, eds. G. K. Shenoy, B. D. Dunlap and F. Y. Fradin, North-Holland, New York, 1981.
40. Jarlborg J., Freeman A. J., Watson-Yang T. J., Phys. Rev. Lett., **39**, 1032 (1977); Freeman A. J., Jarlborg T., Watson-Yang T. J., J. Mag. Magn. Mat., **7**, 296 (1978); Freeman A. J., Jarlborg T., J. Appl. Phys., **50**, 1876 (1979); Jarlborg T., Freeman A. J., Phys. Rev. Lett., **44**, 178 (1980).

41. *Tachiki M., Matsumoto H., Umezawa H.*, Phys. Rev., **B30**, 1915 (1979).
42. *Matsumoto H., Umezawa H., Tachiki M.*, Sol. St. Commun., **31**, 157 (1979);
Tachiki M., Kotani A., Matsumoto H., Umezawa H., Sol. St. Commun., **31**, 927 (1979).
43. *Suhl H.* — in: Felix Bloch Festschrift, 1980;
Blount E. I., Varma C. M., Phys. Rev. Lett., **42**, 1079 (1979).
44. *Matthias B. T., Suhl H.*, Phys. Rev. Lett., **4**, 51 (1960);
Tachiki M., Kotani A., Matsumoto H., Umezawa H., Sol. St. Commun., **32**, 599 (1979).
45. *Krey U.*, Int. J. Magn., **3**, 65 (1972); **4**, 153 (1973).
46. *Adrian H., Miller K., Saemann-Ischenko G.*, Phys. Rev., **B22**, 4424 (1980).
47. *Tachiki M., Koyama T., Matsumoto H., Umezawa H.*, Sol. St. Commun., **34**, 269 (1980);
Schneider S. C., Levy M., Johnston D. C., Matthias B. T., Phys. Lett., **A80**, 72 (1980);
Toyota N., Wood S. B., Muto Y., Sol. St. Commun., **37**, 547 (1981).
48. *Tachiki M., Matsumoto H., Koyama T., Umezawa H.*, Sol. St. Commun., **34**, 19 (1980);
Kuper C. G., Reuzen M., Ron A., Phys. Rev. Lett., **44**, 1545 (1980).
49. *Matsumoto H., Umezawa H., Teshima R., Tachiki M.*, University of Alberta preprint, 1981;
Sakai O., Tachiki M., Koyama T., Matsumoto H., Umezawa H., Phys. Rev., **B24**, 3830 (1981).
50. *Matsumoto H., Umezawa H., Tachiki M.*, University of Alberta preprint, 1981.
51. *Tachiki M., Kotani A., Takahashi S., Koyama T., Matsumoto H., Umezawa H.* Sol. St. Commun, **37**, 113 (1981);
Kotani A., Tachiki M., Matsumoto H., Umezawa H., Phys. Rev., **B23**, 5960 (1981);
Kotani A., Takahashi S., Tachiki M., Matsumoto H., Umezawa H., Sol. St. Commun, **37**, 619 (1981).
52. *Lee Ting-Kuo*, Sol. St. Commun., **34**, 9 (1980).
53. *Maekawa S., Tachiki M.*, Phys. Rev., **B18**, 4688 (1978).
54. *Semenoff G., Matsumoto H., Teshima R., Tachiki M., Umezawa H.*, University of Alberta preprint, 1979.
55. *Bulaevskii L. N., Rusinov A. I., Kulic M.*, Sol. St. Commun., **30**, 59 (1979);
J. Low Temp., Phys., **39**, 255 (1980);
Machida K., Matsubara T., Sol. St. Commun., **31**, 791 (1979).
- 56*. *Буздин А. И., Булаевский Л. Н., Кулич М. Л., Панюков С. В.*, УФН, **44**, вып. 4 (1984).

ЯВЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ГРАНИЧНОЙ
ПОВЕРХНОСТЬЮ

12.1. Введение

В гл. 10 рассматривается общий формализм, применяемый для изучения макроскопических явлений с топологическими особенностями. Там же показано, как можно подойти к описанию макроскопических явлений при наличии двумерных (поверхностных) особенностей. Этот метод затем применен к границам зерен в кристаллах.

Наиболее интересная область применения этого формализма — изучение макроскопических явлений, связанных с границами упорядоченных систем. Явления, связанные с граничной поверхностью, обычно сводят либо к граничной задаче (при этом граница представляется оболочкой, в которую заключена рассматриваемая упорядоченная система), либо просто к двумерной задаче, ограничиваясь только поверхностью. Обычно считается также, что с этими поверхностями связаны определенные потенциальные барьеры. Но существует и иной подход к исследованию этих явлений. Он основан на той точке зрения, что реальные системы редко находятся в оболочке. Поскольку их граничные поверхности образуются самосогласованным образом самими системами, эти поверхности попадают в категорию поверхностных особенностей, рассматриваемых в гл. 10. Когда метод, описанный в гл. 10, применяется к граничным явлениям, нужно знать граничное условие, с помощью которого устанавливается природа двумерной особенности.

Изложенная выше точка зрения на естественную границу приводит к следующему приближенному методу изучения упорядоченных систем конечного размера. Сначала рассмотрим упорядоченную систему бесконечного размера. Затем создадим замкнутую двумерную особенность с помощью бозонного преобразования и изучим эффекты, связанные с этой особенностью. Отметим, что двумерная особенность, естественно, создает самосогласованный потенциал, обсуждаемый в гл. 9, который влияет на квантовые возбуждения. Мы не рассматриваем систему вне граничной поверхности, ограничиваясь волновыми функциями внутри замкнутой области. Заметим, что голдстоуновские квантовые состояния с волновыми функциями внутри ограниченной области, находящиеся под действием самосогласованного потенциала, могут

иметь энергетическую щель порядка $1/L$, где L — линейный размер внутренней области.

Другим интересным приложением, в котором используются поверхностные особенности, является расчет макроскопических токов, текущих через контакт двух систем. Обычно в явлениях такого рода микроскопически рассчитывается туннельный ток. Но их можно рассматривать также как макроскопические явления, возникающие благодаря наличию двумерной особенности (контакта).

В этой главе мы не рассматриваем проблему исследования систем конечного размера. Вместо этого мы сконцентрируем внимание на некоторых типичных поверхностных явлениях, упомянутых выше. В следующем разделе мы изучим звуковую волну на поверхности кристалла как пример явления, связанного с существованием границы. В разд. 12.3 мы рассмотрим в качестве примера контактного явления эффект Джозефсона. В разд. 12.4 будет рассмотрено поведение поверхностных магнитных полей в сверхпроводниках.

12.2. Звуковые волны на поверхности кристалла

В разд. 10.2 мы рассмотрели одномерные и двумерные особенности в кристаллах. Здесь мы применим тот же метод к звуковым волнам на поверхности кристалла.

Осциллирующие двумерные особенности. Волну на поверхности кристалла можно рассматривать как волну, связанную с осциллирующей двумерной границей [1]. В разд. 10.2 форма двумерной особенности описывается функцией $y(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$, где τ — времениподобный, а σ_1 и σ_2 — пространственноподобные параметры. Рассмотрим поверхность, которая лежит на плоскости (x_1, x_2) , т. е. $y_3 = 0$. Когда эта поверхность осциллирует таким образом, что направление распространения совпадает с осью x_1 , то y_3 не равно нулю: $y_3 = \text{Re}(Ae^{i\xi})$ (рис. 12.1), где A — амплитуда, а

$$\xi = q\sigma_1 - \omega\tau. \quad (12.2.1)$$

Таким образом, колеблющаяся поверхность определяется соотношениями

$$y_0 = \tau, \quad y_1 = \sigma_1, \quad y_2 = \sigma_2, \quad y_3 = \text{Re}(Ae^{i\xi}). \quad (12.2.2)$$

Принимая, что одномерные особенности равномерно распределены по поверхности, мы используем соотношение (10.2.45), т. е.

$$\phi^i = \sum_{\lambda} a^{i\lambda} y_{\lambda}. \quad (12.2.3)$$

Подставляя его в уравнение (10.1.44), мы можем вычислить $G_i^{\mu\nu}$, а затем с помощью уравнения (10.1.20) вычислить $G_{\mu\nu}^{i+}$. Результат имеет вид

$$G_i^{\mu\nu}(x) = \sum_{\rho, \lambda} \varepsilon_{\rho\lambda}^{\mu\nu} a^{i\rho} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \theta(x_3 - A \cos \eta), \quad (12.2.4)$$

$$G_{\mu\nu}^{i+}(x) = \left(a_\mu^i \frac{\partial}{\partial x^\nu} - a_\nu^i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \theta(x_3 - A \cos \eta), \quad (12.2.5)$$

где $a_\mu^i = \sum_\lambda a^{i\lambda} g_{\lambda\mu}$ и

$$\eta = qx_1 - \omega t. \quad (12.2.6)$$

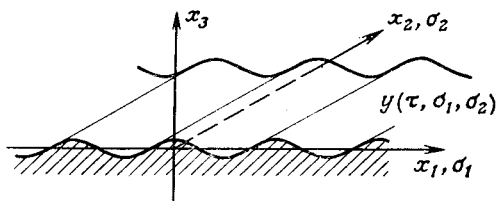


Рис. 12.1.

Из выражения (12.2.5) видно, что $G_{\mu\nu}^{i+}(x) \neq 0$ только в области $x_3 = A \cos \eta$, которая содержит осциллирующую двумерную особенность.

В дальнейшем мы будем считать, что осцилляции малы, и выражение (12.2.5) можно разложить в ряд по степеням A . Мы будем учитывать только члены до первого порядка по A . Тогда из уравнения (12.2.5) получаем

$$G_{\mu\nu}^{i+}(x) \approx H_{\mu\nu}^i(x) + AK_{\mu\nu}^i(x), \quad (12.2.7)$$

где

$$H_{\mu\nu}^i(x) = (a_\mu^i \delta_{\nu 3} - a_\nu^i \delta_{\mu 3}) \delta(x_3), \quad (12.2.8)$$

$$K_{\mu\nu}^i(x) = - \left(a_\mu^i \frac{\partial}{\partial x^\nu} - a_\nu^i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \text{Re}(e^{i\eta}) \delta(x_3). \quad (12.2.9)$$

Поля смещений. Поле смещений $f(x)$ определяется выражением (10.2.5), т. е.

$$\partial_\mu f_i(x) = \sum_{k, l} \sum_{\lambda, \rho} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Delta_{ih}(p) C_{kl}^{\lambda\rho}(p) i p_\lambda G_{\rho\mu}^{i+}(p) e^{ipx}. \quad (12.2.10)$$

Потребовав, чтобы зависимость от времени в характеристиках рассматриваемых явлений возникала только за счет осцилляций,

получаем, что $f_i = 0$, если $A = 0$. Тогда выражения (12.2.7) и (12.2.10) дают

$$a^{i0} = 0. \quad (12.2.11)$$

При этом выражение (12.2.8) соответствует (10.2.64). Мы уже вычислили поле смещений, возникающее благодаря двумерной особенности, описываемой уравнением (10.2.64). В разд. 10.2 сказано, что выражение (10.2.67) автоматически удовлетворяет условию свободной границы $\sigma_{i3} = 0$. Это согласуется с представлением, что рассматриваемая граница самосогласованным образом поддерживается свободной до тех пор, пока какая-то внешняя сила не заставит ее двигаться.

Для простоты мы не учитываем влияние поверхностной деформации. Так, мы потребуем, чтобы при $A = 0$ выполнялось равенство $\mathbf{f} = 0$, откуда, согласно (10.2.65), следует

$$a^{13} = a^{21} = a^{31} = a^{32} = a^{11} = a^{22} = 0. \quad (12.2.12)$$

Таким образом, не равны нулю только члены a^{i3} ($i = 1, 2, 3$).

Обратимся теперь к членам первого порядка по A . В качестве расчетного приема уберем сначала в выражении (12.2.9) символ Re и вещественную часть выражения возьмем только в конце вычислений. Эта операция оправдывается тем обстоятельством, что теория линейна по $\mathbf{K}_{\mu\nu}^i$. Фурье-компоненты $\mathbf{K}_{\mu\nu}^i(x)$ будем обозначать символами $\mathbf{K}_{\mu\nu}^i(p)$. Не равные нулю компоненты имеют вид

$$\mathbf{K}_{03}^i(p) = -\mathbf{K}_{30}^i(p) = i(2\pi)^3 a^{i3} \omega \delta(p_0 - \omega) \delta(p_1 - q) \delta(p_2), \quad (12.2.13a)$$

$$\mathbf{K}_{13}^i(p) = -\mathbf{K}_{31}^i(p) = i(2\pi)^3 a^{i3} q \delta(p_0 - \omega) \delta(p_1 - q) \delta(p_2). \quad (12.2.13б)$$

Подставляя эти выражения в (12.2.10) и принимая во внимание соотношение (10.2.27), получаем

$$\partial_1 f_i(x) = \text{Re} \left(-iA \sum_{k,l} \sum_j C_{kl}^{j3} a^{i3} \frac{q}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \mathbf{I}_1(x) \delta_{ik} + \mathbf{J}_{ik}(x) \} \right), \quad (12.2.14a)$$

$$\partial_2 f_i(x) = 0, \quad (12.2.14б)$$

$$\begin{aligned} \partial_3 f_i(x) = & \text{Re} \left(A\omega^2 \sum_l a^{l3} \{ \mathbf{I}_1(x) \delta_{il} + \mathbf{J}_{il}(x) \} + \right. \\ & \left. + iA \sum_{k,l} \sum_j C_{kl}^{j1} a^{l3} \frac{q}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \mathbf{I}_1(x) \delta_{ik} + \mathbf{J}_{ik}(x) \} \right), \quad (12.2.14в) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_i(x) = \frac{\omega}{q} \frac{\partial}{\partial x_1} f_i(x). \quad (12.2.14г)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_1(x) &\equiv \int \frac{d^4p}{2\pi} \frac{1}{p_0^2 - v_t^2 p^2} \delta(p_0 - \omega) \delta(p_1 - q) \delta(p_2) e^{ipx} = \\ &= -\frac{1}{2K_t v_t^2} e^{K_t x_3} e^{i\eta}, \end{aligned} \quad (12.2.15)$$

$$\begin{aligned} J_{ik}(x) &\equiv (v_l^2 - v_t^2) \int \frac{d^4p}{2\pi} p_i p_k \frac{\delta(p_0 - \omega) \delta(p_1 - q) \delta(p_2)}{(p_0^2 - v_t^2 p^2)(p_0^2 - v_l^2 p^2)} e^{ipx} = \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{K_t} (q\delta_{i1} - iK_t \delta_{i3}) (q\delta_{k1} - iK_t \delta_{k3}) e^{K_t x_3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{K_l} (q\delta_{i1} - iK_l \delta_{i3}) (q\delta_{k1} - iK_l \delta_{k3}) e^{K_l x_3} \right) e^{i\eta}. \end{aligned} \quad (12.2.16)$$

При интегрировании надо учитывать, что $I_1(x) \rightarrow 0$ и $J_{ik}(x) \rightarrow 0$ при $x_3 \rightarrow -\infty$. В приведенных выше выражениях использованы следующие обозначения:

$$K_t^2 = q^2 - \frac{\omega^2}{v_t^2}, \quad (12.2.17a)$$

$$K_l^2 = q^2 - \frac{\omega^2}{v_l^2}, \quad (12.2.17b)$$

где v_t и v_l — поперечная и продольная скорости фононов соответственно.

Теперь мы можем вывести дисперсионное соотношение для поверхностной волны. Потребуем, чтобы поверхность, заданная уравнением $x_3 = 0$, была свободной. После некоторых громоздких преобразований выражений (12.2.14) условия на свободной поверхности

$$\sigma_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при } x_3 = 0 \quad (12.2.18)$$

приводят к уравнению

$$\begin{pmatrix} (q^2 + K_t^2)^2 - 4K_t K_l q^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_l^2 K_t^2 & 0 \\ 0 & 0 & (q^2 + K_l^2) - 4K_t K_l q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{13} \\ a^{23} \\ a^{33} \end{pmatrix} = 0. \quad (12.2.19)$$

Первая, вторая и третья строки матричного уравнения соответствуют условиям $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = 0$ и $\sigma_{33} = 0$ соответственно. Из уравнения (12.2.19) следует

$$(q^2 + K_t^2)^2 = 4K_t K_l q^2, \quad (12.2.20)$$

$$a^{23} = 0. \quad (12.2.21)$$

Поверхностная волна возникает тогда и только тогда, когда выполняются эти условия. Если учесть соотношения (12.2.17),

можно получить следующее дисперсионное соотношение для поверхностной волны:

$$\omega = qv_i\alpha, \quad (12.2.22)$$

где α удовлетворяет уравнению

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 8\alpha^2 \left[3 - 2 \left(\frac{v_t}{v_l} \right)^2 - 16 \left[1 - \left(\frac{v_t}{v_l} \right)^2 \right] \right] = 0. \quad (12.2.23)$$

Заметим, что α зависит только от отношения поперечной и продольной скоростей звука. Соотношение (12.2.22) вместе с уравнением (12.2.23) представляет собой хорошо известный результат для поверхностных волн, полученный Рэлеем [2].

Из приведенного выше вывода дисперсионного соотношения следует, что $0 < \alpha^2 < 1$ (ср. с (12.2.17)). Можно доказать, что уравнение (12.2.23) всегда имеет два вещественных решения (α и $-\alpha$), удовлетворяющих условию $0 < \alpha^2 < 1$.

В частном случае $\lambda = \mu$ уравнение (12.2.23) вместе с условием $0 < \alpha^2 < 1$ дает

$$\omega = \pm (0,9194) qv_l. \quad (12.2.24)$$

Поучительно сравнить приведенный выше вывод уравнения для поверхностной волны с общепринятым.

1. В приведенном выше выводе функции $\partial_{\mu} f_i(x)$ однозначны, а функции $f_i(x)$ — нет. Следовательно, $f_i(x)$ нельзя выразить в виде фурье-образа. В общепринятом же выводе предполагается однозначность функций $f_i(x)$.

2. В общепринятом методе вводится линейная комбинация продольных и поперечных компонент, чтобы удовлетворить условиям на свободной поверхности. Другими словами, соотношения, возникающие в результате условия существования свободной границы, формулируются в терминах поперечных и продольных компонент, и при выводе дисперсионного соотношения необходима процедура диагонализации. В приведенном здесь выводе дисперсионного соотношения поверхностная волна описывается в терминах a_{iz} , и матричное уравнение (12.2.19) оказывается диагональным.

Хотя в этом разделе рассматривались только линейные поверхностные волны, можно получить и нелинейные свойства поверхностных волн, если воспользоваться полным выражением для $G_{\mu\nu}^{i+}(x)$ (12.2.5).

Закончим этот раздел двумя замечаниями. Во-первых, двумерная особенность порождает самосогласованный потенциал. Под влиянием этого потенциала и границы фононы, находящиеся вблизи поверхности, становятся поверхностными фононами. Этот метод получения поверхностных фононов до сих пор не разрабатывался. Во-вторых, когда приведенное выше рассмотрение по-

верхностных волн применяется к осциллирующей границе зерен, может возникнуть поверхностная волна, распространяющаяся вдоль границы зерен. Волны такого вида не рассматривались.

12.3. Эффект Джозефсона

Общий анализ эффекта Джозефсона основан на рассмотрении микроскопического туннелирования куперовских пар. В этом разделе мы исследуем эффект Джозефсона как макроскопическое явление¹⁾, вызванное поверхностной особенностью, связанной с контактом. Оставляя в стороне случай контакта произвольной формы (см. [4]), мы рассмотрим только случай плоского контакта.

Уравнения максвелловского типа (11.3.40) в кулоновской калибровке сводятся к (11.3.43) и (11.3.47), т. е.

$$\partial^2 \mathbf{a}^c(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_L^2} \int d^3 y c(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\mathbf{a}^c(\mathbf{y}) - \frac{\hbar c}{e} \nabla f_s(\mathbf{y}) \right], \quad (12.3.1a)$$

$$a_0^c(\mathbf{x}) = - \frac{1}{\lambda_L^2} \frac{\hbar c}{e} \int d^3 y c(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}). \quad (12.3.16)$$

Здесь

$$g(\mathbf{y}) = \left(-D(\partial) + \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{c}(\partial) \right)^{-1} f_s, \quad (12.3.2)$$

где $f_s = (1/c) \partial f_s / \partial t$ и

$$f_s = \left(1 - \frac{1}{v^2} \nabla^2 \right) f. \quad (12.3.3)$$

В разд. 11.3 показано, что f_s — сингулярная часть f :

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] f_s = [\partial_\mu, \partial_\nu] f. \quad (12.3.4)$$

Из соотношения $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{a}^c$ следует

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar c}{e} \frac{m^2}{m^2 - \partial^2} \nabla \times \nabla f_s, \quad (12.3.5)$$

где m^2 определяется равенством $m^2(\mathbf{k}^2) = \frac{1}{\lambda_L^2} c(\mathbf{k}^2)$. Заметим,

что из соотношения $\mathbf{E} = -\nabla a_0 + \partial_0 \mathbf{a}^c$ следует

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\hbar c}{e} m^2 \left(\frac{1}{D(\partial) - m^2} \nabla \partial_0 f_s - \frac{1}{\partial^2 - m^2} \partial_0 \nabla f_s \right) = \\ &= \frac{\hbar c}{e} m^2 \frac{1}{[D(\partial) - m^2][\partial^2 - m^2]} \{ (\partial^2 - m^2) [\nabla, \partial_0] f_s - \\ &\quad - \{ 1 - (v_B/c)^2 \} \nabla^2 \partial_0 \nabla f_s \}, \quad (12.3.6) \end{aligned}$$

¹⁾ Предварительное рассмотрение этого вопроса дано в работе [3]. В данном разделе используется постановка вопроса, приведенная в работе [4]. Прекрасные обзоры по эффекту Джозефсона см. в работах [5].

где $\partial_0 = - (1/c) (\partial/\partial t)$. Поскольку (12.3.3) дает

$$\partial_i f_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\nabla^2 \partial_i - \sum_j \partial_j \partial_i \partial_j \right) f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j \partial_j [\partial_i, \partial_j] f,$$

выражение (12.3.6) принимает вид

$$\mathbf{E} = \frac{\hbar c}{e} \frac{m^2}{m^2 - D(\partial)} [\partial_0, \nabla] f + \frac{\hbar c}{e} \frac{[1 - (v_B/c)^2]}{m^2 - D(\partial)} \frac{m^2}{m^2 - \partial^2} \partial_0 \sum_j \partial_j [\partial_i, \partial_j] f \quad (12.3.7)$$

(здесь использовано выражение (12.3.4)).

Выражения для плотности тока и заряда имеют вид

$$4\pi \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} + \partial_0 \mathbf{E}, \quad (12.3.8a)$$

$$4\pi J_0 = \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (12.3.8b)$$

Мы рассматриваем только явления, в которых имеется слабая зависимость от времени, т. е. предполагается, что $p_0^2 \ll m^2$. Тогда из выражений (12.3.5) и (12.3.7) следует

$$\mathbf{H} \approx \frac{\hbar c}{e} \frac{m^2}{m^2 - \nabla^2} \nabla \times \nabla f, \quad (12.3.9a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\hbar c}{e} \frac{m^2}{m^2 + \omega^2} [\partial_0, \nabla] f + \frac{\hbar c}{e} \frac{[1 - (v_B/c)^2]}{m^2 + \omega^2} \frac{m^2}{m^2 - \nabla^2} \partial_0 \sum_j \partial_j [\partial_i \partial_j] f, \quad (12.3.9b)$$

где $\omega^2 = - (v_B/c)^2 \nabla^2$.

Рассмотрим теперь плоскую особенность, соответствующую плоскому контакту:

$$y_0 = \tau, \quad y_1 = \sigma_1, \quad y_2 = \sigma_2, \quad y_3 = 0. \quad (12.3.10)$$

Функция ϕ в (10.1.44) зависит от τ и σ_1 :

$$\phi = \phi(\tau, \sigma_1). \quad (12.3.11)$$

Для простоты будем считать, что толщина контакта много меньше длины когерентности, так что можно принять, что существует единственная двумерная особенность. Когда толщина контакта недостаточно мала, нужно ввести сингулярную область, являющуюся тонким слоем, определяемым тремя параметрами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Если мы допустим справедливость выражений (12.3.10), (12.3.11), то $G^{\mu\nu}$ можно получить из (10.1.44). Необращающиеся в нуль компоненты $G^{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}^+$ равны $G^{02} = -G^{20}$, $G^{21} = -G^{12}$, $G_{13}^+ = -G_{31}^+$ и $G_{03}^+ = -G_{30}^+$:

$$G_{02}(x) = G_{31}^+(x) = \partial_1 \phi(t, x_1) \delta(x_3), \quad (12.3.12a)$$

$$G_{12}(x) = G_{30}^+(x) = \partial_0 \phi(t, x_1) \delta(x_3). \quad (12.3.12b)$$

Поскольку $G_{\mu\nu}^{\dagger} = [\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] f$, из (12.3.9) получаем

$$H_1(x) = H_3(x) = 0, \quad (12.3.13a)$$

$$H_2(x) = \frac{\hbar c}{e} \frac{m^2}{m^2 - v^2} [\partial_1 \phi(t, x_1) \delta(x_3)], \quad (12.3.13b)$$

$$E_1(x) = \frac{\hbar c}{e} \frac{[1 - (v_B/c)^2]}{m^2 + \omega^2} \frac{m^2}{m^2 - v^2} [\partial_1 \partial_0 \phi(t, x_1) \partial_3 \delta(x_3)], \quad (12.3.14a)$$

$$E_2(x) = 0, \quad (12.3.14b)$$

$$E_3(x) = -\frac{\hbar c}{e} \frac{m^2}{m^2 + \omega^2} [\partial_0 \phi(t, x_1) \delta(x_3)] - \frac{\hbar c}{e} \frac{[1 - (v_B/c)^2]}{m^2 + \omega^2} \times \\ \times \frac{m^2}{m^2 - v^2} [\partial_0 \partial_1^2 \phi(t, x_1) \delta(x_3)]. \quad (12.3.14b)$$

Тогда из выражения (12.3.8б) следует, что плотность заряда равна

$$J_0 = \frac{\hbar c}{e} \frac{m^2}{m^2 + \omega^2} [\partial_0 \phi(t, x_1) \partial_3 \delta(x_3)]. \quad (12.3.15)$$

Из закона сохранения тока следует, что изменение во времени величины J_0 создает ток

$$J_3^s(x) = -\frac{\hbar c}{e} \frac{m^2}{m^2 + \omega^2} [\partial_0^2 \phi(t, x_1) \delta(x_3)], \quad (12.3.16a)$$

$$J_1^s(x) = J_2^s(x) = 0. \quad (12.3.16b)$$

Величины J_0 и \mathbf{J}^s существуют в очень узкой области вблизи $x_3 = 0$ (т. е. $|x_3| \lesssim (v_B/c) \lambda_L$). Заметим, что $(v_B/c) \lambda_L$ много меньше, чем λ_L (например, для чистого ванадия и ниобия $v_B/c = 10^{-4}$). Поскольку ток \mathbf{J}^s , создаваемый осциллирующими локальной плотности заряда J_0^s , локальный, он не дает вклада в джозефсоновский ток, если размер образца металла в направлении x_3 много больше $(v_B/c) \lambda_L$. Рассчитывая ток \mathbf{J} по формуле (12.3.8а), легко видеть, что \mathbf{J} состоит из двух частей:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^c + \mathbf{J}^s. \quad (12.3.17)$$

Здесь \mathbf{J}^c — стационарный ток

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^c = 0. \quad (12.3.18)$$

Из выражения (12.3.16 а) можно видеть, что ток \mathbf{J}^s создает только первый член правой части соотношения (12.3.14в), в то время как остальные слагаемые \mathbf{E} вместе с магнитным полем \mathbf{H} создают ток \mathbf{J}^c , который вызывает объемный джозефсоновский ток.

Согласно выражению (12.3.12), поскольку $G_{\mu\nu}^{\dagger}$ имеет фурье-образ, его имеют и функции $\partial_1 \phi$ и $\partial_0 \phi$. Следовательно, ϕ имеет вид

$$\phi(t, x_1) = 2 [N x_1 + N_0 c t + \phi_F(t, x_1)], \quad (12.3.19)$$

где $\phi_F(t, x_1)$ — функция имеющая фурье-образ:

$$\phi_F(t, x_1) = \int dp_0 \int dp_1 \exp(ip_1 x_1 - ip_0 ct) \bar{\phi}(p_0, p_1). \quad (12.3.20)$$

Выражения (10.1.12) и (12.3.12) приводят к соотношению

$$\partial_\mu f(x) = -\delta(x_3) \phi(t, x_1) \delta_{\mu 3} + \partial_\mu \bar{f}(t, x_1, x_3), \quad (12.3.21)$$

где

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_3) = [\Theta(x_3) - \Theta(-x_3)] (Nx_1 + N_0 ct) + \\ + \frac{i}{\pi} \int dp_0 dp_1 dp_3 \frac{\alpha(p^2) p_3}{p_0^2 - \alpha(p^2) p} \bar{\phi}(p_0, p_1) e^{ipx}. \end{aligned} \quad (12.3.22)$$

Здесь $\mathbf{p} = (p_1, p_3)$ и $\alpha(p^2) = [v_B(p^2)/c]^2$. Первый член правой части (12.3.21) является единственным, обладающим топологической особенностью, поскольку только он дает вклад в $G_{\mu\nu}^+ = [\partial_\mu, \partial_\nu] f$. Роль члена $\partial_\mu \bar{f}$ состоит в том, чтобы обеспечить возможность для f удовлетворять волновому уравнению для коллективной моды $D(\partial) f = 0$. Рассчитав $[\partial_\mu, \partial_\nu] f$ с помощью выражения (12.3.21), легко воспроизвести соотношения (12.3.12). Из соотношений (12.3.5) и (12.3.7) видно, что вклад в наблюдаемые \mathbf{H} и \mathbf{E} дает только топологическая особенность. Таким образом, \bar{f} не дает вклада в наблюдаемые эффекты.

Первый член в правой части выражения (12.3.21) указывает на то, что $2\phi(t, x_1)$ есть разность фаз параметра порядка по обе стороны контакта. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \partial_3 f(x) = f(+\infty) - f(0_+) + f(0_-) - f(-\infty),$$

и граничные условия $f(\pm\infty) = 0$ приводят к тому, что

$$\phi(t, x_1) = f(x)|_{x_3=0_+} - f(x)|_{x_3=0_-}. \quad (12.3.23)$$

Поскольку $\phi(t, x_1)$ — интеграл от плотности распределения вихрей, отсюда следует, что интеграл от плотности распределения равен половине разности фаз.

Рассмотрим случай, когда периодическая конфигурация движется вдоль контакта (рис. 12.2). В этом случае функция $\phi(t, x_1)$ периодична по x_1 и становится функцией от $x_1 - g(t)$, где $g(t)$ — функция только t :

$$\phi(t, x_1) = \phi[x_1 - g(t)], \quad (12.3.24a)$$

$$\phi[x_1 + u - g(t)] = \phi[x_1 - g(t)] + \pi n. \quad (12.3.24b)$$

Здесь n — целое число. При выводе выражения (12.3.24b) мы учли тот факт, что 2ϕ — разность фаз параметра порядка и, следовательно, $\exp[2i\phi]$ должна быть периодической. Период u мы опре-

делим ниже. Условие (12.3.24а) вместе с (12.3.19) приводит к требованию выбора $g(t)$ в виде

$$g(t) = -\frac{N_0}{N} ct + g_F(t); \quad (12.3.25)$$

здесь $g_F(t)$ — функция, имеющая фурье-образ; кроме того, функция $\phi_F(t, x_1)$ должна иметь вид

$$\phi_F(t, x_1) = -Ng_F(t) + \tilde{\phi}_F[x_1 - g(t)], \quad (12.3.26)$$

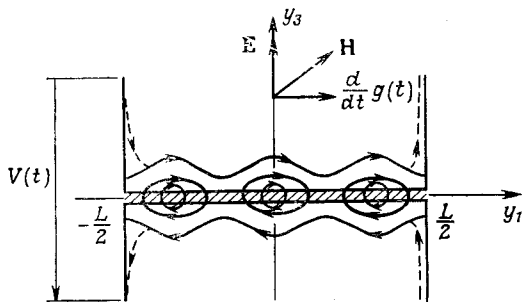


Рис. 12.2.

где $\tilde{\phi}_F(x_1)$ имеет фурье-образ. Таким образом,

$$\phi(t, x_1) = 2 \left(N [x_1 - g(t)] + \int dp a(p) \exp \{ip [x_1 - g(t)]\} \right), \quad (12.3.27)$$

где $a(p)$ — фурье-амплитуда функции $\tilde{\phi}_F(x_1)$.

Периодическое условие (12.3.24б) приводит к тому, что

$$N = \pi n/2u, \quad (12.3.28а)$$

$$a(p) = \sum_l a_l \delta \left(p - \frac{2\pi l}{u} \right). \quad (12.3.28б)$$

Здесь l пробегает все целочисленные значения. Кроме того, поскольку $\tilde{\phi}_F$ вещественно, $a_l^* = a_{-l}$. Таким образом, находим

$$\phi(t, x_1) = 2 \left[\frac{\pi n}{2u} [x_1 - g(t)] + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cos \left(\frac{2\pi l}{u} [x_1 - g(t)] + \delta_l \right) \right], \quad (12.3.29)$$

где $g(t)$ — функция вида (12.3.25). Выше использовано обозначение

$$a_l = \frac{1}{8} b_l e^{i\delta_l}. \quad (12.3.30)$$

Среднее от $\partial_0 \phi(t, x_1)$ по оси x_1 равно

$$\bar{\phi}_0(t) \equiv \frac{1}{u} \int_0^u dx_1 \partial_0 \phi(t, x_1) = \quad (12.3.31)$$

$$= \frac{\pi n}{cu} \frac{d}{dt} g(t). \quad (12.3.32)$$

Если среднее электрическое поле определить выражением

$$\bar{E}_i(x_3, t) = \frac{1}{u} \int_0^u dx_1 E_i(x), \quad (12.3.33)$$

то из (12.3.14) получим

$$\bar{E}_1(x_3, t) = \bar{E}_2(x_3, t) = 0, \quad (12.3.34a)$$

$$\bar{E}_3(x_3, t) = -n \frac{\pi \hbar}{eu} \frac{d}{dt} g(t) \left(\frac{m^2}{m^2 + \omega^2} \delta(x_3) \right), \quad (12.3.34b)$$

где учтено соотношение (12.3.32). Заметим, что m^2 и ω^2 — функции ∇^2 . Если мы учтем, что $\omega(\mathbf{p}^2) = 0$ для $\mathbf{p}^2 = 0$, то увидим, что электрическое поле (12.3.34) создает потенциал

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \bar{E}_3(x_3, t) = -n \frac{\pi \hbar}{eu} \frac{d}{dt} g(t), \quad (12.3.35)$$

который равен $(-\hbar c/e) \bar{\phi}_0(t)$. Если внешний потенциал $V(t)$ задан, уравнение (12.3.35) определяет функцию $g(t)$. В частности, если $V(t)$ — постоянная величина, равная V_0 , из уравнения (12.3.35) следует

$$g(t) = -\frac{eu}{\pi \hbar} \frac{1}{n} V_0 t = \quad (12.3.36)$$

$$= -\frac{e}{2\hbar} \frac{V_0}{N} t. \quad (12.3.37)$$

Сравнивая это с уравнением (12.3.25), получаем

$$V_0 = 2 \frac{\hbar c}{e} N_0, \quad (12.3.38a)$$

$$g_F(t) = 0. \quad (12.3.38b)$$

Магнитное поле находится из соотношения (12.3.13). Это магнитное поле сосредоточено в области $|x_3| \lesssim \lambda_L$. Из (12.3.29) следует

$$\bar{\phi}_1(t) \equiv \frac{1}{u} \int_0^u dx_1 \partial_1 \phi(t, x_1) = \quad (12.3.39)$$

$$= n\pi/u. \quad (12.3.40)$$

Таким образом, из (12.3.136) получаем

$$\bar{H}_2(x_3, t) \equiv \frac{1}{u} \int_0^u dx_1 H_2(x) = \quad (12.3.41)$$

$$= \frac{\hbar c}{e} \frac{n\pi}{u} \frac{m^2}{m^2 - \nabla^2} \delta(x_3). \quad (12.3.42)$$

Полный поток, проходящий через слой с границами $x_1 = 0$ и $x_1 = u$, равен

$$u \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \bar{H}_2(x_3, t) = n\phi, \quad (12.3.43)$$

где ϕ — единичный поток $\pi\hbar c/e$. Это означает, что поток квантуется.

Эту ситуацию интуитивно можно представить следующим образом: когда к системе приложен внешний электрический потенциал $V(t)$, он приводит к появлению зависящей от времени плотности заряда вблизи границы $x_3 = 0$ (см. (12.3.15)), в то же время он вызывает движение групп вихрей вдоль контакта. Эти вихри создают объемный джозефсоновский ток, а изменение со временем локальной плотности заряда создает локальный ток \mathbf{J}^s . Сравнивая выражения (12.3.13) и (12.3.14), мы видим, что $\partial_0 \mathbf{E}$ много меньше, чем $\nabla \times \mathbf{H}$ при $p_0^2 \ll m^2$. Поскольку мы пренебрегаем \mathbf{J}^s , из соотношения (12.3.8а) следует

$$4\pi \mathbf{J}^c \approx \nabla \times \mathbf{H}. \quad (12.3.44)$$

Согласно (12.3.9а), фурье-амплитуда \mathbf{H} содержит множитель $1/[m^2(p^2) + p^2]$, где $p^2 = p_1^2 + p_3^2$. Допустим, что множитель имеет полюс при $p^2 = -m_0^2$, где m_0^2 — положительное число. Тогда можно записать

$$\frac{1}{p^2 + m^2(p^2)} = \frac{Z(p^2)}{p^2 + m_0^2}, \quad (12.3.45)$$

где $Z(p^2)$ — некоторая функция. $Z(-m_0^2)$ обозначим просто через Z . В работе [4] рассчитаны магнитное поле \mathbf{H} и ток \mathbf{J}^c , исходя из уравнения (12.3.45); они экспоненциально затухают с расстоянием от поверхности.

Ток в цепи, проходящий через контакт длины L , определяется выражением

$$j_{\text{net}} = \int_{a-L/2}^{a+L/2} dx_1 [J_3^c(x)]_{x_3=0}. \quad (12.3.46)$$

Расчет дает

$$j_{\text{net}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u}{2\pi l} j_F(l) \left[\sin \left(\frac{\pi l L}{u} - \frac{2\pi l}{u} g(t) + \bar{\delta}_l \right) + \sin \left(\frac{\pi l L}{u} + \frac{2\pi l}{u} g(t) - \bar{\delta}_l \right) \right], \quad (12.3.47)$$

где

$$\bar{\delta}_l = \delta_l + (2\pi l/u) a, \quad (12.3.48)$$

$$j_F(l) = -\frac{\phi Z}{4u^2} \frac{m_0^2}{m_l} l^2 b_l, \quad (12.3.49)$$

а m_l определяется соотношением

$$m_l^2 = m_0^2 + (2\pi l/u)^2. \quad (12.3.50)$$

Согласно выражению (12.3.43), полный поток, проходящий через контакт, дается выражением $\Phi(L) = \pi \phi L/u$. Мы можем выразить j_{net} в терминах $\Phi(L)$ вместо L/u следующим образом:

$$j_{\text{net}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{n\phi L}{\pi l} \frac{j_F(l)}{\Phi(L)} \sin \left(\frac{\pi l}{n\phi} \Phi(L) \right) \cos \left(-\frac{2\pi l}{u} g(t) + \bar{\delta}_l \right). \quad (12.3.51)$$

Это выражение описывает картину фраунгоферовой дифракции для Φ , которую предсказал Джозефсон [6] и которая наблюдалась в эксперименте Роуэлла [7]; при этом $j_F(l)$ считалась феноменологической константой. Зависимость $\bar{\delta}_l$ от a может быть включена в $g(t)$, поскольку, согласно (12.3.35), внешний потенциал $V(t)$ определяет не функцию $g(t)$, а только ее производную по времени.

Когда внешний потенциал определяется выражением

$$V(t) = V_0 + V_1 \cos vt, \quad (12.3.52)$$

из выражения (12.3.35) следует

$$g(t) = -\frac{u}{\pi n} \frac{e}{\hbar} \left(V_0 t + \frac{V_1}{v} \sin vt \right), \quad (12.3.53)$$

что согласуется с соотношением (12.3.25). В этом случае из выражения (12.3.51) следует

$$j_{\text{net}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{n\phi L}{\pi l} \frac{j_F(l)}{\Phi(l)} \sin \left(\frac{\pi l}{n\phi} \phi(L) \right) \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s \left(-\frac{2eV_1}{\hbar cv} \frac{l}{n} \right) \times \\ \times \cos \left(-svt + \frac{2eV_0}{\hbar c} \frac{l}{n} t + \bar{\delta}_l \right), \quad (12.3.54)$$

где J_s — функция Бесселя. Этот результат показывает, что постоянный ток через контакт возникает тогда и только тогда, когда

$$2eV_0/\hbar c = nvs/l, \quad (12.3.55)$$

т. е. когда $2eV_0/\hbar c$ является гармоникой или субгармоникой частоты v .

Статический эффект Джозефсона можно изучать, положив в приведенных выше выражениях $V(t) = 0$.

12.4. Поверхностное магнитное поле в сверхпроводниках

Полубесконечные немагнитные сверхпроводники. В качестве типичного примера проникновения внешнего воздействия через поверхность твердого тела рассмотрим проникновение внешнего статического магнитного поля через граничную поверхность сверхпроводника.

Рассмотрим сверхпроводник, ограниченный плоскостью $x_3 = 0$ и заполняющий полупространство $x_3 > 0$. Предположим также, что внешнее статическое поле \mathbf{H} направлено параллельно поверхности. Поскольку плоскость $x_3 = 0$ является поверхностной сингулярностью, выберем y_μ и ϕ в виде

$$y_\mu = (\tau, \sigma_1, \sigma_2, 0), \quad (12.4.1)$$

$$\phi = v_\lambda y^\lambda. \quad (12.4.2)$$

Тогда из выражений (10.1.20) и (10.1.44) видно, что не равные нулю компоненты $G_{\mu\nu}^+$ равны

$$G_{23}^+(x) = -G_{32}^+(x) = -v_2 \delta(x_3), \quad (12.4.3a)$$

$$G_{13}^+(x) = -G_{31}^+(x) = -v_1 \delta(x_3), \quad (12.4.3б)$$

$$G_{03}^+(x) = -G_{30}^+(x) = v_0 \delta(x_3). \quad (12.4.3в)$$

Поскольку внешнее электрическое поле отсутствует, положим $G_{0\mu}^+ = 0$. Тогда имеем $v_0 = 0$.

Вспомним теперь уравнение максвелловского типа (11.3.43), которое в статическом случае имеет вид

$$\nabla^2 \mathbf{a}(x) = \frac{1}{\lambda_L^2} \int d^3y c(x-y) \left(\mathbf{a}(y) - \frac{\hbar c}{e} \nabla f(y) \right). \quad (12.4.4)$$

С другой стороны, поскольку $G_{\mu\nu}^+ = [\partial_\mu, \partial_\nu] f$, из соотношений (12.4.3) следует

$$\nabla f(x) = -(v_1 \mathbf{e}^1 + v_2 \mathbf{e}^2) \theta(x_3), \quad (12.4.5)$$

так как это дает

$$\nabla \times \nabla f(\mathbf{x}) = (v_2 \mathbf{e}^1 - v_1 \mathbf{e}^2) \delta(x_3). \quad (12.4.6)$$

Здесь \mathbf{e}^1 и \mathbf{e}^2 — единичные векторы в направлениях x_1 и x_2 соответственно.

Используя соотношения (12.4.4) — (12.4.6), мы можем рассчитать вектор-потенциал $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, магнитное поле $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{x})$ и ток $4\pi \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{x})$. В результате имеем

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{2\hbar c}{e} (v_1 \mathbf{e}^1 + v_2 \mathbf{e}^2) \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{c(k) \sin(kx_3)}{k[\lambda_L^2 k^2 + c(k)]}, \quad (12.4.7)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{2\hbar c}{e} (v_2 \mathbf{e}^1 - v_1 \mathbf{e}^2) \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{c(k) \cos(kx_3)}{\lambda_L^2 k^2 + c(k)}, \quad (12.4.8)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar c^2}{2\pi e} (v_1 \mathbf{e}^1 + v_2 \mathbf{e}^2) \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{kc(k) \sin(kx_3)}{\lambda_L^2 k^2 + c(k)}. \quad (12.4.9)$$

Из этих выражений видно, что \mathbf{h} и \mathbf{j} перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости, параллельной поверхности $x_3 = 0$; они сосредоточены в слое, примыкающем к поверхности. Заметим, также, что \mathbf{a} , \mathbf{h} и \mathbf{j} зависят только от x_3 .

В приведенных расчетах выполняется интегрирование по всему пространству ($-\infty < x_3 < \infty$), хотя образец занимает только полупространство $x_3 > 0$. Это соответствует ситуации, когда ток и магнитное поле отражаются от поверхности; вклад от области $x_3 < 0$ можно заменить вкладом от области $x_3 > 0$ с помощью замены переменной $x_3 \rightarrow -x_3$ и тем самым

описать отраженное поле и ток (рис. 12.3). При этом отражении полярные векторы, такие, как ток, изменяют свое направление, в то время как аксиальные векторы, такие, как магнитное поле, не меняют. Изменение условия отражения на границе требует изменения особенности.

Согласно выражению (11.3.11), свободная энергия единицы объема равна

$$F_s = F_{s0} + \frac{\hbar c}{2e} \frac{1}{V} \int d^3x \left(\nabla f(\mathbf{x}) - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \frac{1}{8\pi V} \int d^3x \mathbf{h}^2(\mathbf{x}), \quad (12.4.10)$$

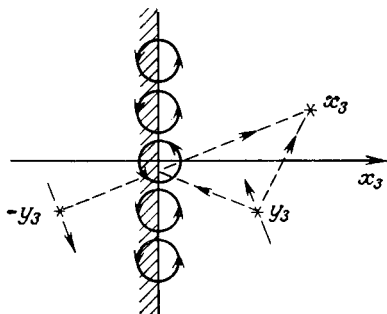


Рис. 12.3.

где V — объем образца, а F_{s0} — энергия мейсснеровского состояния. В действительности всегда имеется поверхность, даже если нет внешнего магнитного поля. В приведенных выше расчетах \mathbf{a} , \mathbf{h} и \mathbf{j} влиянием этой поверхности пренебрегали.

Самосогласованный потенциал, обусловленный поверхностной особенностью, воздействует на электроны и создает энергию сердцевин вихрей. Следовательно, мы можем предположить, что внешнее магнитное поле мало влияет на энергию сердцевин. По этой причине в выражении (12.4.10) энергией сердцевин вихрей пренебрегалось.

Из соотношений (12.4.7)—(12.4.9) следует

$$F_s = F_{s0} + \frac{\hbar^2 c^2 v^2}{4e^2 L} \int_0^\infty dk \frac{c(k)}{\lambda_L^2 k^2 + c(k)}, \quad (12.4.11)$$

где

$$v = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}, \quad (12.4.12)$$

а L — линейный размер образца в направлении x_3 . Термодинамический потенциал равен

$$G_s = F_s - \frac{1}{4\pi} BH, \quad (12.4.13)$$

где H — внешнее поле, а B — индукция:

$$B = \frac{1}{V} \int d^3x h(x_3) - \frac{\hbar c}{2e} \frac{v}{L} \quad (12.4.14)$$

($h(x_3) = |\mathbf{h}(\mathbf{x})|$). Условие устойчивости

$$\frac{\partial}{\partial v} G_s = 0 \quad (12.4.15)$$

приводит к выражению

$$H = \frac{2\hbar c v}{e} \int_0^\infty dk \frac{c(k)}{\lambda_L^2 k^2 + c(k)} = \quad (12.4.16)$$

$$= h(0), \quad (12.4.17)$$

откуда следует, что индуцированное магнитное поле $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ на поверхности $x_3 = 0$ равно приложенному полю [8]. Выражение (12.4.17) определяет параметр v при заданном H . Заметим, что выражение (12.4.17) не вводится как внешнее граничное условие. Это промежуточный результат наших расчетов, причем он отражает тот факт, что поверхностное состояние самосогласованным образом контролируется всей системой, которая подстраивает себя под внешние условия.

Определим теперь глубину проникновения выражением

$$\lambda = \frac{1}{h(0)} \int_0^{\infty} dx_3 h(\mathbf{x}). \quad (12.4.18)$$

Тогда из (12.4.8) следует

$$\lambda = \lambda_L g(\kappa_B), \quad (12.4.19)$$

где $g(\kappa_B)$ определяется равенством

$$\frac{1}{g(\kappa_B)} = \kappa_B \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{c(k)}{\lambda_L^2 k^2 + c(k)}, \quad (12.4.20)$$

причем при $T = 0$ $\kappa_B = \lambda_L/\xi_0$. Сравнивая выражения (12.4.16) и (12.4.19), получаем соотношение между H и v :

$$H = \frac{\hbar c}{2e} \frac{v}{\lambda}. \quad (12.4.21)$$

Если учесть соотношения (12.4.8), (12.4.9) и (12.4.21), то магнитное поле $\mathbf{h}(x_3) = |\mathbf{h}(\mathbf{x})|$ и плотность тока $j(x_3) = |\mathbf{j}(\mathbf{x})|$ можно записать в виде

$$h(x_3) = \frac{2\lambda H}{\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{c(k) \cos(kx_3)}{\lambda_L^2 k^2 + c(k)}, \quad (12.4.22)$$

$$j(x_3) = \frac{c\lambda}{2\pi^2} H \int_0^{\infty} dk \frac{kc(k) \sin(kx_3)}{\lambda_L^2 k^2 + c(k)}. \quad (12.4.23)$$

Расчет проделан в работе [8], в которой для бозонной характеристической функции $c(k)$ использовано соотношение в форме (5.4.179), а значение $VN(0)$ взято равным 0,32. Расчет показал, что глубина проникновения возрастает при уменьшении κ_B (следовательно, $\kappa = 0,95\kappa_B$) и $\lambda/\lambda_L \rightarrow 1$ при $\kappa_B \rightarrow \infty$. Было показано также, что, если κ_B невелико (например, $\kappa_B < \kappa_{BC}$), магнитное поле $\mathbf{h}(x_3)$ меняет знак на некотором расстоянии от поверхности и ведет себя как затухающая осциллирующая функция. Эта ситуация, более явно выраженная при малых κ_B , аналогична той, которая существует в сверхпроводниках II/1 рода. Как было показано в разд. 11.3, магнитное поле каждого вихря меняет знак на некотором расстоянии от центра вихря, вызывая притяжение между вихрями. Фактически критическое значение κ_{BC} очень близко к граничному значению κ_B , соответствующему переходу от сверхпроводника II/1 рода к сверхпроводнику II/2 рода. Например, $\kappa_{BC} \approx 1,2$ при $T = 0$. Расчет $j(x_3)$ показывает [8], что ток исчезает на границе $x_3 = 0$, возрастает на расстоянии λ и затем снова

убывает до нуля. Мы обнаруживаем, что для образцов с $\kappa_B < \kappa_{BC}$ ток меняет знак и ведет себя как затухающая осциллирующая функция, так же как и магнитное поле.

С учетом соотношений (12.4.22), (12.4.23), (12.4.17) ток в цепи рассчитывается по формуле

$$J \equiv \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx_3 j(x_3) = \frac{cH}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{c(k)}{\lambda_L^2 k^2 + c(k)} [1 - \cos(k\lambda)] = \quad (12.4.24)$$

$$= \frac{c}{4\pi\lambda} [H - h(\lambda)]. \quad (12.4.25)$$

Критический ток можно получить, если положить $H = H_c$.

Распределение плотности термодинамического потенциала как функции x_3/λ_L приведено в работе [8]. При его рассмотрении обнаруживается замечательный результат: для любого значения H всегда существует область вблизи поверхности, в которой термодинамический потенциал для сверхпроводящего состояния меньше, чем для нормального состояния, откуда следует, что сверхпроводящее состояние локально выгоднее [8]. Это создает поверхностный барьер, препятствующий проникновению макроскопического потока. Наличие поверхностного барьера приводит к метастабильным состояниям и мешает внешнему полю H проникать внутрь, до тех пор пока H не превосходит критическое значение H_s , которое больше H_c . Поле H_s интенсивно изучалось Де Женом и др. [9]. В нескольких работах [8, 10] рассчитана величина H_s как функция κ_B .

Полубесконечные магнитные сверхпроводники. Случай особых магнитных сверхпроводников, таких, как ErRh_4B_4 , HoMo_6S_8 , рассмотрен в разд. 11.4. Соотношение (11.4.8) является модифицированным уравнением максвелловского типа. Было приведено также выражение для термодинамического потенциала Гиббса. Как было подчеркнуто, процессы в этих системах жестко регулируются двумя механизмами: незатухающим током в системе, экранирующим осцилляции магнитного момента [3], и законом квантования потока, вследствие которого магнитные моменты коренным образом меняют магнитное поле. Эти механизмы стремятся создать обращение магнитного поля (и тока), что приводит к сильному притяжению между вихревыми нитями. Таким образом, эти механизмы стремятся установить сверхпроводимость II/1 или I рода.

С другой стороны, рассмотрение приведенного выше немагнитного случая показало, что внутреннее магнитное поле $h(x_3)$ в сверхпроводниках II/1 рода ведет себя как затухающая осциллирующая функция от x_3 . Таким образом, мы видим, что такое осциллирующее поведение $h(x_3)$ усиливается в рассматриваемых

магнитных сверхпроводниках. Детальный анализ этого поведения приведен в работе [11]. Приведенный там расчет показал, что вблизи поверхности ферромагнитное состояние сосуществует со *сверхпроводимостью* при температуре ниже некоторого критического значения T_s ; T_s всегда выше T_p — критической температуры перехода в спин-периодическое сверхпроводящее состояние, а также выше температуры спонтанного рождения вихревых нитей. Сосуществование поверхностного ферромагнетизма со сверхпроводимостью можно понять следующим образом: экранирование спиновых флуктуаций незатухающим сверхпроводящим током ослабляется из-за наличия поверхностной особенности, следствием чего является усиление магнитного эффекта.

Тонкие пленки. Для изучения сверхпроводников в виде тонких пленок может быть применен метод, аналогичный описанному выше. Рассмотрим пленку толщиной $2a$, локализованную в слое $-a \leq x_3 \leq a$. Принимая, что слабое внешнее магнитное поле \mathbf{H} приложено в плоскости поверхности и направлено параллельно поверхности, введем две поверхностные особенности в плоскостях $x_3 = \pm a$. Тогда уравнение (12.4.6) приводится к виду

$$\nabla \times \nabla f(x_3) = (v_2 e^1 - v_1 e^2) [\delta(x_3 + a) + \delta(x_3 - a)]. \quad (12.4.26)$$

Будем считать, что магнитное поле зеркально продолжено за плоскости $x = \pm a$; тогда мы можем выполнить пространственное интегрирование по всему пространству, предполагая, что поверхностные особенности образуют периодическую структуру с периодом $2a$, что позволяет учесть эффекты многократного отражения. Таким образом, $a(x_3)$, $h(x_3)$ и $j(x_3)$ становятся периодическими функциями переменной x_3 с периодом $2a$.

Мы обнаружили, что в случае рассмотренных выше магнитных сверхпроводников поверхностный эффект усиливается и возможно сосуществование ферромагнетизма и сверхпроводимости. Это дает основание ожидать, что в тонких пленках такого рода материалов можно наблюдать «сверхпроводящий ферромагнетизм». Согласно расчетам в работе [12], это действительно происходит при $a \lesssim \lambda_L$. Критическая температура T_s , ниже которой это происходит, ниже температуры T_m (фиктивной температуры Кюри для нормального состояния массивного образца, см. разд. 11.4), но выше, чем T_p . Если $a \gg \lambda_L$, то области спонтанного намагничивания, ограниченные размерами λ_L и расположенные вблизи поверхностей, далеко разнесены в пространстве, так что T_s перестает зависеть от a и совпадает со значением T_s для изученного выше полубесконечного образца. Если a становится сравнимой с λ_L , области намагничивания начинают взаимодействовать друг с другом, в результате чего T_s приобретает осциллирующую зависимость от a . Если $a/\lambda_L \ll 1$, то T_s существенно возрастает с умень-

шением a , поскольку влияние экранирования значительно ослабляется всюду внутри пленки. В пределе $a/\lambda_L \rightarrow 0$ T_s стремится к T_m .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wadati M., Matsumoto H., Umezawa H., Phys. Rev., **B18**, 4077 (1978); Wadati M., Phys. Rep., **50**, 87 (1979).
2. Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc., **17**, 4 (1887); Stroh A. N., J. Math. Phys., **41**, 77 (1962); Barnett D. M., Lothe J., Vishioka K., Asaro R. J., J. Phys., **F3**, 1083 (1973).
3. Leplae L., Umezawa H., Mancini F., Phys. Rep., **10C**, 151 (1974).
4. Mancini F., Matsumoto H., Wadati M., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **62**, 12 (1979).
5. Anderson P. W., Progress in low temperature physics, Vol. 5, ed. C. J. Gorter., North-Holland, Amsterdam, 1967, ch. 1; Josephson B. D. — in: Superconductivity, ed., R. D. Parks., Dekker, New York, 1969, ch. 9; Solymar L., Superconductive tunneling and applications, Wiley Interscience, 1972. [Имеется перевод: Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. — М.: Мир, 1974.]
6. Josephson B. D., Phys. Lett., **1**, 251 (1962).
7. Rowell J. M., Phys. Rev. Lett., **11**, 200 (1963).
8. Mancini F., Umezawa H., Physica, **95B**, 45 (1978).
9. Groupe de Superconductivite d'Orsay. Quantum fluids, ed. D. F. Brewer, North-Holland, Amsterdam, 1968.
10. Marticon T., Saint-James D., Phys. Lett., **24A**, 241 (1967).
11. Tachiki M., Kotani A., Takahashi S., Koyama T., Matsumoto H., Umezawa H., Sol. St. Commun., **37**, 113 (1981); Kotani A., Tachiki M., Matsumoto H., Umezawa H., Phys. Rev., **B23**, 5960 (1981).
12. Kotani A., Takahashi S., Tachiki M., Matsumoto H., Umezawa H., Sol. St. Commun., **37**, 619 (1981).

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой книге мы пытались изложить квантовую теорию поля в форме, удобной для исследования проблем многих частиц. Поскольку понятия упорядоченных состояний и протяженных объектов играют ключевую роль во многих областях физики, в том числе в физике твердого тела, физике высоких энергий и в космологии, рассмотрению этих понятий мы уделили особое внимание. Чтобы ограничить объем книги, мы постарались не рассматривать те понятия, которые содержатся в большинстве стандартных учебников по физике твердого тела и проблемам многих частиц. Несмотря на это, книга оказалась довольно большой. Кроме этих общеизвестных понятий опущено много важных вопросов. Это обусловлено либо соображениями, связанными с объемом книги, либо тем, что формулировки этих вопросов еще недостаточно устоялись. Ниже перечислены некоторые из этих вопросов.

Критические явления. Поскольку структура термополевой динамики в целом сходна со структурой обычной квантовой теории поля, в которой первоначально возникла формулировка понятия ренорм-группы, мы, очевидно, можем сформулировать метод ренорм-группы применительно к критическим явлениям с использованием термополевой динамики. Однако, поскольку имеется много прекрасных статей и книг по применению метода ренорм-группы к критическим явлениям, в данной книге мы этот вопрос не рассматриваем. При подготовке книги мы планировали сделать следующее. Используя модель взаимодействующих спинов, мы хотели в явном виде вычислить амплитуду, а также вещественную и мнимую части частот коллективных мод вблизи точки фазового перехода. Для интерпретации поведения коллективных мод (голдстоуновских бозонов) можно построить качественную картину механизма критических явлений: уменьшение скорости коллективных мод в критической области и нарушение симметрии, возникающие при фазовом переходе второго рода. На основе этих интуитивных представлений мы хотели распространить метод ренорм-группы на динамические явления. Но это потребовало бы значительных усилий и времени, что оказалось неприемлемым.

Эффект Кондо. Эффект Кондо — результат взаимодействия между электронами, описываемыми с помощью квантовых полей, и спином примеси, описываемым с помощью квантовомеханического оператора. Следовательно, гильбертово пространство является прямым произведением фоковского пространства квантового поля и пространства спинов, отвечающего спину примеси. По-видимому, это явление — хороший пример расширенного представления (см. гл. 9), включающего квантовомеханические представления и представление пространства Фока.

Теория лазера и эффект Рамана. Поскольку преобразование бозонов тесно связано с когерентным представлением, теория лазера, по-видимому, согласуется с задачей данной книги. Фактически рассмотрение этих вопросов входило в первоначальный план книги.

Приложение теории солитонов. Когда топологические объекты связывают фермионы (например, нуклоны), мы можем сформулировать теорию тяжелых ядер, включающую как поверхностные волны и вращательные моды, так и оболочечную структуру. Когда мы рассматриваем связанные кварки, то приходим к модели мешков в квантовой хромодинамике. В физике твердого тела существует множество приложений теории протяженных объектов, связывающих фермионы. В связи с магнитными и тепловыми свойствами полимеров большое внимание привлекли вопросы о модах с нулевой энергией у связанных фермионов. Объединение рассмотрения, проведенного в гл. 9, с термополевой динамикой, изложенной в гл. 4 и 5, может дать хороший аппарат для анализа солитонных явлений в физике твердого тела.

Некоторые фундаментальные вопросы. Что касается движения протяженных объектов, то в этой книге мы обсудили кратко лишь свободное их движение. В физике твердого тела само по себе движение объектов очень важно для понимания физических явлений. Для расчета сопротивления в смешанном состоянии сверхпроводников требуется знать поток вихрей. Было снято несколько фильмов, иллюстрирующих движение дислокаций в кристаллах. В физике твердого тела так много проблем подобного рода, что мы здесь даже не пытаемся их перечислить.

Для статических явлений, как мы видели, физически реализуемое состояние протяженного объекта в принципе получается при минимизации свободной энергии по всем возможным выборам формы особенностей (хотя в реальных расчетах эта процедура требует применения метода проб и ошибок). Но мы еще не нашли эффективного способа описания коллективных движений протяженных объектов. Мы можем создать объекты произвольной формы

(т. е. особенности) с помощью методов, описанных в этой книге. Если есть несколько объектов произвольной формы, то вследствие взаимодействия они движутся с изменением формы. Остается открытым вопрос о том, каким образом законы, управляющие этим движением, могут быть получены из исходных уравнений поля.

Если эту проблему решить, то можно задаться вопросом, можно ли объяснить движение топологических объектов на геометрическом языке, поскольку большую часть классических движений в классической теории можно описать на этом языке. Мы могли бы попытаться провести исследование сингулярных объектов (таких, как черные дыры) и их взаимодействия с квантами в общей теории относительности, расширив круг идей, изложенных в данной книге. Если эти вопросы удалось бы решить, концепции этой книги можно было бы распространить и на космологию, что привело бы к единому взгляду и подходу в широкой области физики, включающей физику твердого тела, физику высоких энергий и космологию.

В этой книге мы видели, что системы, в которых сосуществуют макрообъекты и кванты, можно описывать в рамках квантовой теории поля. При этом квантовомеханические операторы, связанные с протяженными объектами, естественным образом включаются в теорию. Но до сих пор еще не известно, где лежит граница между макроскопическими и микроскопическими объектами. Нейтронная звезда, очевидно, макроскопический объект. Но если уменьшать по одному количество нуклонов, то мы достигнем в конце концов однонуклонного состояния, являющегося, очевидно, микроскопическим. Между ними, например в тяжелых ядрах, наблюдаются некоторые макроскопические явления типа деформации ядра или поверхностных колебательных мод, хотя тяжелое ядро — еще квантовая частица. Квантовая теория поля как теория, описывающая одновременно и макроскопические и микроскопические объекты, находится еще на ранней стадии своего развития.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатический множитель** 84
Адлера теорема 249
Андерсона — Сула механизм 459
**Андерсона — Хиггса — Киббла меха-
низм** 181
Анизотропные сверхпроводники 455
Асимптотическое поле 366
 — условие 75, 349
- Бете — Солпитера амплитуда** 78
 — — уравнение 78, 139
 — — — для магнона 145
 — — — (N, θ) -модели 78, 81
 — — — сверхпроводящего элек-
трона 161
 — — — составной частицы 80
 — — — фазона 165, 171
 — — — неоднородное 81
 — — — однородное 79
 — — — при конечных температурах
136, 137
БКШ модель 159
**Блоховская стенка в магнитных сверх-
проводниках** 464
Блоховский член в намагниченности
159
**Боголюбова преобразование для бо-
зонов** 32, 37, 44
 — — — фермионов 36, 44
 — — с учетом влияния термостата
107, 108, 110, 115, 124
Бозонное поле, сдвиг (трансляция)
37, 38, 45, 241, 247, 249, 312, 341
 — преобразование 312, 342, 420
 — — в квантовой электродинамике
422
 — — для фононов 384, 386
 — — параметры 414
 — — при наличии топологических осо-
бенностей 374, 383, 399, 414, 473
 — — теорема 312, 340, 341
Бозоны 22
 — конденсация 38, 239, 310, 329,
343, 376, 386
 — характеристическая функция 183,
435
Брауера степень 407
Бриллюэна функция 153, 462
- Бьянки тождество** 402
Бюргерса вектор 384, 389, 391, 393
- Вакансия в решетке** 398
Вакуум 25, 28, 39
 — зависящий от температуры 108
 — устойчивость 77, 95
Ван Хова модель 4
Вершинная функция 100
Вигнеровское вращение 360, 365, 370
Вихри в сверхпроводниках 439
 — — — взаимодействие 441, 445
 — — — инверсия магнитного поля
465
 — — — спонтанное образование 466
 — — — электроны сердцевины 343,
447
 — — — энергия сердцевины 449, 465
Внутреннее произведение векторов
состояния 26
 — — волновых функций 51
Возратная сверхпроводимость 459
Волновой пакет 21, 28, 88, 247
Входящие поля 9, 76, 93
Выходящие поля 76, 93
- Гамильтониан в слабом смысле** 354,
355
 — для гейзенберговских полей 41, 42
 — — модели *Ван Хова* 44
 — — — *Гейзенберга* 148, 149, 153
 — — физических частиц 40
 — при наличии протяженных объек-
тов 354, 355
 — термостата 107
**Гейзенберга модель для локализо-
ванных спинов** 148
 — уравнение 41, 45
 — — в термополевой динамике 113,
123
 — — для коллективизированных элек-
тронов 142, 143, 215
 — — — модели БКШ 160, 161
 — — — — *Гейзенберга* 150, 154
 — — — — *Ли* 82
 — — — (N, θ) -модели 62
 — — — электромагнитного поля 282
Гейзенберговские поля 9, 41

- Гельмгольца свободная энергия 113
 — — — в модели БКШ 185
 Гиббса термодинамический потенциал в магнитных сверхпроводниках 465
 — — — смешанного состояния 450
 Гильбертово пространство, сепарабельное 24, 27
 Глубина проникновения 490
 — — лондоновская 181, 435
 Голдбергера — Треймана соотношение 253, 255
 Голдстоуна теорема 10, 143, 230, 238
 Голдстоуновские бозоны 10, 14, 143, 176, 230, 239, 241, 249, 284, 420
 — — инфракрасные 262
 — — комплексные 261
 — — квантовые состояния 473
 Голдстоуновского типа модель 241
 Горькова уравнения 437
 Границы зерен 390
 — — плоские 394
 — — соотношение непрерывности 394
 — — типа кручения 393
 — — — наклона 393
 Дайсона теорема 249
 — уравнение 216
 Дайсоновский член в намагниченности 159
 Двумерная особенность 381
 — — осциллирующая 474
 — — сферическая 396
 Двухточечные функции 100, 144, 187, 201
 — — для магнона 158, 207, 213, 221
 — — — плазмона 289
 — — — плотности заряда 174, 187
 — — — тока 187
 — — — фазона 210
 — — правила умножения 121
 — — при конечных температурах 114—116, 120, 131, 134
 — — спектральное представление 101, 131
 Деформация группы 257
 Джозефсона эффект 479
 — — периодическая конфигурация в контакте 282
 Дивизор 49, 56
 — для плазмонов 289
 Динамическая матрица колебаний решетки 271
 — перестройка симметрии 11, 226, 237, 257
 — — — в кристаллах 274
 — — — калибровочной 292, 302
 — — — $O(n)$ 261
 — — — спиновой 143, 243
 — — — $SU(2)$ 246, 247
 — — — $SU(2) \times SU(2)$ 261
 — — — $SU(n)$ 261
 — — — трансляционной 324
 — — — фазовой 177, 178, 241
 Динамическое отображение 9, 46, 90, 227, 338
 — — в кристаллах 274
 — — — случае бозонного преобразования 313
 — — — нормального металла 302, 421
 — — — сверхпроводника 176, 178, 242, 291, 293
 — — — термополевой динамике 124, 130
 — — для модели голдстоуновского типа 242
 — — — (N, θ) -модели 63, 71
 — — — спиновых операторов 155
 Дисциплинация 394
 Дислокация 388
 — винтовая 389
 — краевая 389
 Диэлектрическая проницаемость 427, 428
 — — тензор 426
 Длина когерентности 183
 Древесное приближение 316
 «Духи» 282, 300, 420
 Звуковые волны на поверхности кристалла 474
 — — — поля смещений 475
 Импульса оператор для физических частиц 41, 47
 — — — — с учетом влияния термостата 107
 Индефинитная метрика 283
 Инстантон 414
 — Полякова 418
 — t' Хофта 418
 Калибровка 399
 — кулоновская 438, 479
 Калибровочная инвариантность 186
 Калибровочное преобразование 182, 197, 280, 298
 — — матрица 400, 418
 — — условие 286, 299
 Калибровочные поля 416
 — — теория 416
 Квант потока 440

- Квантование потока 383, 424, 440
 — — в джозефсоновских контактах 485
 — — — магнитных сверхпроводниках 465
 Квантовая координата 320, 344, 348, 357
 Квантовомеханические объекты 329, 366
 Киральная $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия 253
 Классические объекты 329, 366
 Когерентное представление 343
 — состояние 38, 312
 Коллективная мода 10
 Константы перенормировки 335
 Координатное пространство и пространство симметрии, взаимное соответствие 420
 Критическая температура сверхпроводников 164
 Критические значения χ_B 445
 Кубо — Мартина — Швингера соотношение 128
 Кулоновская калибровка 438, 479
 Кюри закон 463
 Кюри-вейсовское поведение зонных электронов 224
- Ламе* коэффициент 387
Лемана — Симанзика — Циммермана формула 99
 — — — в компактной форме 99
 — — — при конечных температурах 128
Ли модель 82
 Лоренцева «поворота» оператор 355, 357
- Магнетизм и сверхпроводимость, взаимность влияние 458
 Магнитные примеси в сверхпроводниках 458
 — — — *Абрикосова — Горькова* теория 459
 — сверхпроводники 457
 — антиферромагнитный порядок 460
 — дипольное взаимодействие 458
 — обменное взаимодействие 458
 — — — экранировка 463
 — спин-периодическая фаза 464
 — фазовая диаграмма 467
 — энергетическая щель 468
 Магноны 143, 145, 148, 157, 208, 209
 — энергетический спектр 158, 214, 220
Маки параметры 452
Максвелла уравнение, классическое 423, 425, 461
 Максвелловского типа уравнение 423
 — — — в сверхпроводниках 429, 433, 436, 438, 440, 479
 — — — — анизотропных 456
 — — — — магнитных 461
 Матрица приведения к эрмитову виду 50
Мацубары формализм для температурных функций *Грина* 11
 Мейсснеровский ток 425
 Мейсснеровское состояние 443
 Минимальное взаимодействие 421
 Модули упругости 277
 Модуль сдвига 387
 Монополь 398, 410, 413
Мории — Кавабаты метод 224
- Намагниченность в системе коллективизированных электронов 144, 220
 — — — локализованных спинов 152, 159
 — — — — приближение среднего поля 153, 462
 Намагничивание кривая в магнитных сверхпроводниках 466
 — — — сверхпроводниках II/1 рода 445, 451
 Нейтронов рассеяние на спиновых волнах 209
 Нётеровский генератор 194, 229
 — ток 194, 197
 Низких энергий теоремы 249
 — — — для магнонов 248, 249, 251
 — — — — пионов 249, 252
 — — — и низкие температуры 256
 Нормальное произведение 46
 (N, θ)-модель 62
 [0]-множество 25
- Обобщенные координаты 325, 358, 369
 Оптические моды 278
 Особенности типа расходимости 347, 374
 — топологические 347, 374
- Параметр порядка 262, 400
 — — в сверхпроводниках 242, 432
 — — условие однозначности 402
 Парастатистика 22
 Перенормировка вакуумного среднего 335
 — вершины 334
 — волновой функции 333
 — константы связи 219
 — химического потенциала 142, 143

- 159, 220
 — энергии 141, 160, 162, 332
 Перестройка симметрии *см.* Динамическая перестройка симметрии
 Петлевое разложение 202
 Плазменные колебания 181, 186
 — — уравнения 190, 287, 424
 — — энергия 181, 190
 Плазмон 181, 186, 190, 286, 420
 Плотное множество 27
 Поверхностная сверхпроводимость 468, 492
 Поверхностное магнитное поле в сверхпроводниках 487, 491
 Поверхностные волны 15
 — фононы 478
 Подгруппа устойчивости 244, 259
 Подстановка для физических полей 227
 Полярон 141
 Правило сумм 56, 58
 Представление взаимодействия 84
 Причинность 58, 59
 Пространственный сдвиг 47
- Редукции формула 98
 РККИ механизм 459
 Рождения и уничтожения бозонов операторы 22
 — — волновых пакетов операторы 29
 — — операторы, проектирование 60
 — — фермионов операторы 23
 — — физических частиц операторы 47
 Рэлеевская волна 15, 478
- Самосогласованные вычисления 43, 63, 73
 Самосогласованный метод 42
 — потенциал 14, 316, 317, 337, 343, 375
 — — вихрей в сверхпроводниках 446
 — — двумерной особенности 478
 — — поверхность кристалла 473
 Сверхпроводники 54, 280 *см. также*
 Анизотропные сверхпроводники,
 Магнитные сверхпроводники
 — бесконечная проводимость 429
 — влияние кулоновского взаимодействия 179
 — I рода 443
 — II рода 444
 — — затухание ультразвука 447
 — II/1 рода 444
 — II/2 рода 444
 Свободное движение двух вихрей 372
 — — протяженных объектов 366, 381
- Связывающие поля 76, 93, 241
 Сжатые группы 247, 257
 Синус-Гордона модель 340
 Синусоидальное спиновое упорядочение 347
 Слабые соотношения 42
 S-матрица 76, 88, 93, 99
 Смешанное состояние 443, 464
 Собственная энергия 140, 141
 — — коллективизированных электронов 215
 — — фотона 186, 295, 305, 433
 Солитон 15, 337
 Составная частица 43, 71, 73, 76, 82
 Спектральное представление 100, 169, 207
 — — двухточечных функций 101, 131, 201, 207, 212
 — — неприводимой части собственной энергии 140
 — — при конечных температурах 131
 Спиновая симметрия 204
 Спин-периодическая фаза 464, 470
 Спиральные спиновые структуры 347
 Спонтанное нарушение симметрии 10, 11, 230 *см. также* Динамическая перестройка симметрии
 Стонеровский континуум 221, 222
 s — f-взаимодействие 463, 470
 — в магнитных сверхпроводниках 459
- Термополевая динамика 11, 110
 Термополевой дублет 115, 120, 123, 124, 139, 144, 145, 150, 160, 205
 Термостат 106, 107
 Тильда операция 110
 — — правило подстановки 127, 132
 Тонкие пленки, сверхпроводимость 492
 Топологические квантовые числа 382, 383, 398, 406, 410, 424
 — — особенности 13, 347, 374, 375, 377
 — — двумерные 381
 — — кольцевые 380
 — — линейные 378
 — — полное условие 377, 379
 Топологический заряд 376, 391
 — объект 13
 — — с неабелевой симметрией 398
 Точечная группа 268
 Точечные дефекты 396
 Трансляционная мода 320, 344
 Тройные редкоземельные соединения 459
- Унитарно неэквивалентные представления 24, 31, 35, 37, 38

- Уорда — Такахаши соотношения 43, 192, 195, 198, 228, 232
 — — — для спиновой симметрии 205, 206, 212
 — — — фазовой симметрии 200
 — — — компактная запись 196
 — — — обобщение 197
 — — — при конечных температурах 198
 Упорядочения оператор в термодинамической динамике 154, 160, 187
 Упорядоченные состояния 10, 11, 14, 143, 163, 227, 239, 310
 Упругие постоянные 277
 Уравнение для щели в сверхпроводниках 163
 — — — обобщение 173
 Уравнения свободного поля для физических полей 48
 — — — и статистика 59
 — — — типа 1 48, 53, 58, 59, 104
 — — — типа 2 48, 53, 56, 59, 103
 Условие свободной поверхности 395

 Фазовое преобразование в модели голдстоуновского типа 241
 — — — — Ли 82
 — — — нормальных металлах 298
 — — — (N, θ) -модели 64, 70, 71
 — — — сверхпроводниках 242, 280, 284
 Фазон 177, 181, 241, 285
 — энергия 182
 Фермионы, определение 22
 Ферромагнетизм коллективизированных электронов 142, 204
 Физические кванты 9, 39
 — поля 9, 47
 — состояния 283, 300
 — частицы 9, 39, 45, 47
 — — представления 39, 42, 46, 90, 102
 — — — в (N, θ) -модели 74
 — — — — теории возмущений 83, 85
 — — — и вариационный принцип 89
 — — — при конечных температурах 109
 Фока пространство 27, 63
 — — расширенное 325, 351
 Фононы 138, 266, 280
 — акустические 268, 278
 — оптические 278
 — уравнение 268, 270, 276
 Франка формула для большеугловых границ зерен 393
 Фраунгоферова дифракция для джозефсоновского тока 486
 Химический потенциал 113, 149, 220
 — — затравочный 159
 — — перенормировка 142, 143, 159, 220

 Цепочечное приближение 146, 161, 166, 433, 437
 (с_q)-превращения 358, 364

 Числа заполнения оператор 22, 24, 109
 Чисто калибровочная теория 416

 Энергетическая щель в сверхпроводниках 162
 — — — магнитных 468
 Энергия конденсации 184, 443
 — основного состояния в термодинамической динамике 113
 — протяженных объектов 344
 — сердцевин вихря 448
 — — — в магнитных сверхпроводниках 465
 Энтропия 113, 185

 Янга — Миллса теория 416
 Янга — Фельдмана уравнение 311

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Введение	9
1.1. Квантовая теория систем многих тел	9
1.2. План книги	15
1.3. Обозначения	17
Глава 2. Квантовая теория систем многих тел	21
2.1. Представление чисел заполнения; операторы рождения и уничтожения	21
2.2. Унитарно неэквивалентные представления	24
2.3. Пространство Фока	25
2.4. Некоторые примеры унитарно неэквивалентных представлений	31
2.5. Представление физических частиц и динамическое отображение	39
2.6. Свободные поля для физических частиц	47
Литература	61
Глава 3. Представление физических частиц, S-матрица и составные частицы	62
3.1. (N, θ) -модель	62
3.2. Представление физических частиц и вычисления по теории возмущений	83
3.3. Представление физических частиц и вариационный принцип	89
3.4. Общий анализ представления физических частиц	90
3.5. Формула редукции и формула Лемана—Симанзика—Циммермана (ЛСЦ)	96
3.6. Спектральные представления двухточечных функций	100
Литература	104
Глава 4. Квантовая теория поля при конечных температурах	106
4.1. Термополевая динамика	106
4.2. Динамическое отображение при конечных температурах, правило подстановки тильды и соотношение Кубо—Мартина—Швингера	122
4.3. Спектральное представление двухточечных функций	131
4.4. Уравнение Бете—Солпитера при конечных температурах	136
Литература	137
Глава 5. Некоторые примеры вычислений в рамках термополевой динамики	138
5.1. Электрон-фононная система	138

5.2. Модель контактного взаимодействия в ферромагнетизме коллективизированных электронов	142
5.3. Модель Гейзенберга в ферромагнетизме локализованных спинов	148
5.4. Сверхпроводимость	159
5.5. Плазменные колебания в нормальных металлах	186
Литература	191
Глава 6. Инвариантность и нётеровский ток	192
6.1. Нётеровский ток и соотношения Уорда—Такахаша	192
6.2. Соотношения Уорда—Такахаша при конечных температурах	198
6.3. Простой пример соотношения Уорда—Такахаша	199
6.4. Пример петлевого разложения; ферромагнетизм зонных электронов	202
Литература	224
Глава 7. Динамическая перестройка симметрии и динамическое отображение	226
7.1. Общее рассмотрение	226
7.2. Фазовая симметрия	240
7.3. Динамическая перестройка спиновой симметрии	243
7.4. Перестройка симметрии и теоремы для низких энергий	249
7.5. Перестройка симметрии и сжатие группы	257
7.6. Инфракрасный эффект голдстоуновских бозонов и параметр порядка	262
7.7. Кристаллы	264
Литература	278
Глава 8. Квантовая электродинамика твердых тел. I. Перестройка калибровочной симметрии и динамическое отображение	288
8.1. Сверхпроводимость	288
8.2. Квантовая электродинамика нормальных металлов	298
Литература	309
Глава 9. Протяженные объекты квантовой природы	310
9.1. Простое рассмотрение	310
9.2. Простой пример	329
9.3. Общее рассмотрение бозонного преобразования	340
9.4. Асимптотическое условие и асимптотический гамильтониан	348
9.5. (sq)-превращение и обобщенная координата	358
Литература	372
Глава 10. Протяженные объекты с топологическими особенностями	374
10.1. Общие соображения	374
10.2. Протяженные объекты в кристаллах	385
10.3. Топологические особенности, связанные с неабелевыми группами симметрии	398
Литература	419
Глава 11. Квантовая электродинамика твердых тел. II. Макроскопические явления	420
11.1. Вывод классического уравнения Максвелла	420
11.2. Проводимость и диэлектрическая проницаемость	425
11.3. Сверхпроводимость	429
11.4. Магнитные сверхпроводники	457
Литература	470

Глава 12. Явления, связанные с граничной поверхностью	473
12.1. Введение	473
12.2. Звуковые волны на поверхности кристалла	474
12.3. Эффект Джозефсона	479
12.4. Поверхностное магнитное поле в сверхпроводниках	487
Литература	493
Глава 13. Заключительные замечания	494
Предметный указатель	497

Х. Умэдзава, Х. Мацумото, М. Татнки

ТЕРМОПОЛЕВАЯ ДИНАМИКА
И КОНДЕНСИРОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ