В. В. Белокуров, О. Д. Тимофеевская, О. А. Хрусталев

КВАНТОВАЯ ТЕЛЕПОРТАЦИЯ — ОБЫКНОВЕННОЕ ЧУДО

Научно-издательский центр ”Регулярная и хаотическая динамика”

Ижевск 2000

УДК 530.1

Книга посвящена новейшим проблемам квантовой теории: квантовой логике, квантовой телепортации, квантовым компьютерам. Бурное развитие этих направлений превращает квантовую механику в основу технологий XXI века, развитие которых невозможно без обращения к принципиальным вопросам современной физики. Большое внимание уделено истории становления квантовой механики, что дает читателю возможность сформировать самостоятельное мнение о фундаментальных проблемах теории. Это позволит ему свободно ориентироваться в современных тенденциях развития квантовых технологий.

Для широкого круга читателей — студентов, аспирантов, научных работников и всех, интересующихся основами и новейшими достижениями квантовой механики.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЛИКАЯ СМУТА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

25 марта 1935 года в редакцию журнала "Physical Review" поступила рукопись статьи Эйнштейна, Подольского и Розена [**EPR 1935**], под названием "Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным?" Она увидела свет 15 мая 1935 года, но еще 4 мая в субботнем номере "The New York Times" появилась статья под энергичным заглавием "Einstein Attacks Quantum Theory". В ней говорилось, что прославленный профессор Эйнштейн, который приходится квантовой механике кем-то вроде дедушки, теперь доказал, что эта наука, хотя и правильна, но неполна. Текст репортера сопровождался якобы подлинными высказываниями одного из соавторов статьи – Подольского. Здесь же под заголовком "Raises Point of Doubt" было опубликовано интервью с Кондоном, в то время профессором Принстонского Университета. Оценивая то, что приписывалось Подольскому, Кондон вполне корректно заметил, что надо, прежде всего, разобраться в смысле содержащихся в статье понятий. Но далее репортер, ссылаясь на Кондона, сообщил читателям, что Эйнштейн в течение последних пяти лет, исходя из своей сугубо личной точки зрения, чрезвычайно взыскательно оценивает квантовую механику, привел уже ставший знаменитым афоризм Эйнштейна: "Господь не играет в кости" и заметил, что сам Кондон не находит нападки на статистическое толкование квантовой механики привлекательными. В письме, опубликованном в "The New York Times" 7 мая, Эйнштейн с возмущением писал о том, что заметка в газете была опубликована без согласования с авторами статьи, и заявил примерно следующее: "Я всегда обсуждал научные статьи лишь в соответствующей аудитории и возражал против предварительных сообщений о них в светской прессе."

Гнев Эйнштейна, конечно, был справедлив, но может быть, что невероятное доселе событие - публичное обсуждение научной статьи в газете (хотя и вполне респектабельной) до опубликования в научном журнале - просто было промыслом Бога, на которого он любил ссылаться в научных спорах, и который уготовил творению Эйнштейна долгий мирской путь.

На статью немедленно откликнулись выдающиеся современники: Бор, Шредингер, Фок - этот список можно дополнить столь же блестящими именами. Патриарх американской физики Раби попросил прислать к нему кого-нибудь из талантливых молодых людей, чтобы тот толково объяснил ему, в чем тут собственно дело. К удивлению классика пришел и вовсе мальчик в коротких штанишках - это был будущий Нобелевский лауреат Швингер. Такое событие тоже должно было произойти. Десять лет назад Паули утверждал, что квантовая теория – это игры молодых. Споры о статье знаменовали смену поколений в квантовой теории. Со временем выяснилось следующее: захватив один раз, статья уже не отпускала от себя. Более чем полувека спустя Швингер опубликует цикл статей, посвященных близкой к EPR теме - задаче о близнецах Вигнера (одну из этих статей он назовет так: "Спиновая когерентность и Шалтай-Болтай". Оказывается, что сохранить спиновую когерентность при разделении и воссоединении пучков - задача той же степени трудности, как и собрать Шалтая-Болтая после его знаменитого падения). Спустя примерно 30 лет после публикации работы Эйнштейна с соавторами сверстник Швингера, столь же знаменитый Фейнман (разделивший со Швингером Нобелевскую премию) подробно обсудит проблему EPR в своем известном курсе лекций.

Статья на долгие годы стала одной из наиболее часто цитируемых физических публикаций. Она, фактически породила особое, может быть слишком абстрактное направление в физике. Философы с восторгом обсуждали новейшее для них определение "физической реальности". Как обычно, когда классическое произведение перестали читать, возникла легенда о нем вместе с особой терминологией: EPR-пары, EPR-состояния... Близкие по духу работы Шредингера принесли и вовсе удивительную "Шредингерову кошку":

> Можно построить и совсем шутовские примеры. Посадим кошку в стальной сейф вместе с адской машиной (защищенной от кошки). В счетчик Гейгера положена крупинка радиоактивного вещества, столь малая, что за час может распасться один из атомов, но с той же вероятностью может не распасться ни один. Если атом распадается, то счетчик через реле приведет в действие молоточек, который разобьет колбу с синильной кислотой. Предоставив эту систему самой себе в течение часа, мы скажем, что кошка еще жива, если за это время не распался ни один атом. Первый же распад привел бы к отравлению кошки. Ψ-функция всей системы выразила бы это тем, что живая и мертвая кошка (с позволения сказать) смешаны или размазаны в одинаковых пропорциях. [**Schrödinger 1935a**]

Эйнштейну понравился пример Шредингера. Уже после дискуссии с Бором он писал его изобретателю:

> Как и прежде, так и теперь я убежден, что волновое представление материи не есть полное представления вещей, хотя оно и оказалось практически полезным. Очень красиво это показывает твой пример с кошкой (радиоактивный распад со взрывом). Одни части функции Ψ соответствуют живой кошке, а другие распыленной кошке, в одно и то же время. Если пытаться воспринимать Ψ-функцию как полное описание состояния (независимо от наблюдения), то это означает, что в данный момент кошка не жива и не распылена.
>
> **Эйнштейн – Шредингеру 9.8.1938**

Шредингеру принадлежит термин EPR-парадокс [**Schrödinger 1935b**]. В его докладе, представленном Кембриджскому Королевскому Обществу, говорится, что сообщение имеет своим намерением не разрешить парадокс, содержащийся в EPR, но скорее, насколько это возможно, добавить новые. Сами авторы EPR в это время расценивали свою статью не как занятную частность *), а как опровержение современной им квантовой механики. Лишь год спустя Эйнштейн [**Einstein 1936**] применил термин парадокс к изложенному в EPR результату.

Число публикаций, обсуждающих EPR-задачу, в настоящее время составляет несколько миллионов. Сейчас уже мало кто знает, о каком состоянии шла речь в знаменитой статье, но количество приписываемых ему необычных качеств поистине удивительно. К тому же произошло то, что уже часто случалось с формулами Эйнштейна, когда они из абстракных теоретических соотношений превращались в расчетные формулы техники. Наносекундные технологии, превратившие квантовую механику в инженерную науку, сделали в конце XX века выражение "EPR-состояние" столь же обычным, как и термин "колебательный контур" в его начале.

Именно это обстоятельство побудило нас освежить историю вопроса, собрать вместе разнообразные суждения о значении EPR-состояний для квантовой механики,

---

*) $\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\varsigma$ – $\pi\alpha\rho\alpha$ (возле) + $\delta o\xi\alpha$ (мнение) = необыкновенный, странный.

убрать чуждый точной науке налет мистики и, по возможности, полно и строго перечислить и обсудить их свойства, определяющие прикладное значение EPR-состояний.

Мы надеемся, что это принесет пользу, в первую очередь, молодежи, для которой понятие EPR-состояний будет столь же обычным, как понятия теории сопротивления материалов для их прадедов.

Ясно, что имевшая столь далеко идущие последствия статья Эйнштейна, Подольского и Розена не могла быть задумана и написана за несколько недель. Она явилась естественным завершением вполне определенного этапа развития квантовой механики. Попробуем выяснить, какие идеи определяли это развитие.

ПРЕДЫСТОРИЯ

Обычно считается, что затруднения науки, основанной на механике Ньютона, были связаны с открытием двух универсальных постоянных - скорости света в вакууме и минимального действия - постоянной Планка. Скорость света измерил в 1675 году Ремер, а все последствия этого были осознаны в XIX веке после работ Фарадея и Максвелла. Постоянная Планка была введена в теорию в 1900 году, после анализа свойств излучения абсолютно черного тела. После открытия конечности кванта действия в физику внедрилась мысль о том, что энергию механических систем нельзя задать произвольно. Она может принимать только вполне определенную дискретную последовательность значений. Это предположение немедленно привело к ряду великих открытий в таких совершенно не связанных друг с другом областях как теория твердого тела и модель атома. Эйнштейн блестяще преодолел затруднения классической физики, связанные с поведением теплоемкости при малых температурах, и ввел понятие о фотоне. Это, в частности, положило начало новому разделу физики XX-го века - охоте за элементарными частицами.

В 1913 году Бор согласовал открытый Резерфордом факт планетарного строения атома с комбинационным принципом Ритца, согласно которому все частоты линий излучения и поглощения атомов можно представить как разность значений некоторых функций, взятых в целочисленных точках:

$$\omega \quad = \quad \omega(m,n) \quad = \quad F(m) - F(n).$$

Чтобы объяснить эти факты, Бору пришлось ввести в физику новые понятия – о **стационарных орбитах**, по которым электроны могут двигаться не излучая, и **квантовых скачках** – переходах электронов с одной стационарной орбиты на другую, сопровождающихся излучением или поглощением фотонов. Существование счетного набора стационарных орбит связано с дискретностью значений энергии, которые могут принимать электроны. Эти значения Бор определил с помощью **условий квантования**. Зоммерфельд вскоре придал условиям Бора математическую законченность, после чего они стали известны как **условия Бора-Зоммерфельда**. Существование таких условий было довольно легко воспринято современниками, но описание квантовых скачков не удалось описать в терминах каких-либо причинных законов. Значительный прогресс в описании квантовых переходов связан с работами

Эйнштейна 1916-1917 годов, посвященных новому выводу формулы Планка. В основу рассуждений Эйнштейном было положено предположение о вероятностной природе излучения и поглощения фотонов атомами. Эти работы со своими априорными вероятностями знаменовали крушение классического детерминизма в физике.

В них же появились знаменитые коэффициенты Эйнштейна, которые представляют собой пример немногих не зависящих от частностей процесса точных параметров. Они сыграли весьма важную роль в открытии квантовой теории. К началу 20-х годов возникла надежда на быстрое решение задач, связанных с излучением и поглощением света атомами.

> ...благодаря превосходному сотрудничеству Гейгера и Боте закончен эксперимент по излучению. Результат таков: свет, испускаемый движущимися частичками каналовых лучей, строго монохроматичен, в то время как по волновой теории длина волны должна была бы быть различной и в различных направлениях.
>
> Тем самым надежно доказано, что волнового поля на самом деле не существует, и боровская эмиссия является мгновенным процессом в собственном смысле этого слова. Это мое самое сильное научное потрясение за многие годы. Эренфест с восторгом пишет об атомной теории Бора, который сейчас у него гостит. А если уж Эренфест убежден, то это что-то значит, так как этот парень куда какой скептик.
>
> **Эйнштейн Борну 30.12.21**
>
> Вся соль вот в чем: частицы каналовых лучей в соответствии с волновой теорией испускают по всем направлениям свет непрерывного спектра. Такая волна распространяется в диспергирующих средах со скоростью, являющейся функцией координат. Это должно приводить к отклонению волновых поверхностей, подобно тому, как это имеет место в случае рефракции в земных условиях. Однако экспериментальные результаты получаются бесспорно отрицательными.
>
> **Эйнштейн Борну январь 22 г.**

Почти столь же безоблачны и воспоминания Бора.

> Когда в 1920 г. при моем посещении Берлина я в первый раз встретился с Эйнштейном – что было для меня великим событием... фундаментальные вопросы и были темой наших разговоров. Обсуждения, к которым я потом часто мысленно возвращался, добавили к моему восхищению Эйнштейном еще и глубокое впечатление от его непредвзятой научной позиции. Его пристрастие к таким красочным выражениям, как "призрачные поля (Gespensterfelder), управляющие фотонами", не означали, конечно, что он склонен к мистицизму, но свидетельствовали о глубоком юморе, скрытом в его проницательных замечаниях. И все-таки между нами оставалось некоторое расхождение в отношении нашей точки зрения и наших видов на будущее.

После возвращения Бора на родину, в Копенгаген пришло письмо:

> Редко кто производил на меня столь блестящее впечатление, как Вы. Теперь я понимаю, почему Эренфест в таком восхищении от Вас.
>
> **Эйнштейн Бору 2.5.20**

Эйнштейн и Эренфест были знакомы с 1912 года, Эренфест с Бором – с 1918. Один из учеников Эренфеста – Крамерс долгие годы был ближайшим сотрудником Бора. После того как Эренфест сменил Лоренца на кафедре в Лейдене, этот город стал одним из центров квантовой механики, а Эренфест – многолетним умиротворителем споров между гигантами квантовой теории.

Первоначально, основные разногласия между Бором и Эйнштейном касались природы электромагнитного поля. Эйнштейн последовательно отстаивал точку зрения на электромагнитное поле как на газ особых элементарных частиц – фотонов *). Электромагнитным полям он отводил так поразившую Бора роль "призраков", которые не обладают ни энергией, ни импульсом, а лишь направляют куда надо обладающие этими величинами фотоны.

Бор считал классическое электромагнитное поле вполне реальной величиной. Поскольку Бор успешно проквантовал атом, то с его точки зрения можно было и не квантовать электромагнитное поле. Чтобы гарантировать, например, справедливость формулы Планка, нужно было лишь допустить, что процессы излучения и поглощения электромагнитного поля имеют вероятностную природу, причем этими вероятностями управляют коэффициенты Эйнштейна. В результате все физические процессы приобретали статистический характер, причем на уровне элементарных процессов классические законы сохранения оказывались не обязательными [**Bohr, Kramers, Slater 1924**]. Таким образом, драгоценные для физиков законы сохранения, возможность нарушения которых Парижская академия наук отказалась обсуждать еще в XVIII веке, были сведены на уровень некоторых средних характеристик. Это не нравилось Эйнштейну:

> Меня очень заинтересовала точка зрения Бора на излучение. Но я не хочу быть втянутым в отречение от строгой причинности, прежде чем для этого появятся более сильные мотивы. Мне непереносима мысль о том, что электрон может избирать **по своей свободной воле** (aus freien Entschluss) время и направление, в котором он может прыгнуть. Если это действительно так, я хотел бы стать не физиком, а холодным сапожником или даже распорядителем в казино.
>
> **Эйнштейн Борну 24.4.24**

Между тем, были и другие указания, что существование конечного кванта действия потребует более глубокого пересмотра понятий классической физики. В 1896 году Зееман открыл, что спектральные линии излучения атома, помещенного в магнитное поле, расщепляются на три или две составляющие в зависимости от направления испусксния лучей относительно магнитного поля. Это явление немедленно объяснил Лоренц. Расщепление линий объяснялось малыми колебаниями атомных электронов около равновесных орбит [**Лоренц 1953**]. Существенно, что объяснение Лоренца не требовало знания ни сил, определяющих орбиты в отсутствие магнитного поля, ни самих орбит. Лоренц пользовался, по существу чисто кинематическими закономерностями: унивесальностью поведения частицы при малых отклонениях от равновесия и вытекающей из теории Максвелла кинематической связью между свойствами движения частицы и характеристиками излучения. Опыты Зеемана блестяще подтвердили электронную теорию Максвелла-Лоренца. Однако при уточнении измерений было обнаружено, что многие спектральные линии расщепляются на большее число составляющих. В поисках объяснения этого явления Лоренц обратился к закономерностям расположения спектральных линий свободного атома. Они также плохо объяснялись теорией. Дело в том, что в 1885 году Бальмер открыл свою знаменитую формулу для частот линий излучения водорода, которая своей простотой и точностью, превосходила все характерные для XIX века стандарты и явилась предтечей комбинационного

---

*) Термин фотон ввел в 1926 году известный физико-химик G.N.Lewis.

принципа. Лоренц обратил внимание на то, что тенденции в характере расщепления линий можно связать со структурой серий спектральных линий. Можно было предположить, что скрытно содержащийся в формуле Бальмера квант действия *) управляет как структурой линий, так и кинематической связью излучения с динамическими переменными электронов.

Между прочим, теория Бора, Крамерса и Слетера, которая должна была описать взаимодействие атомов с электромагнитным излучением, во многом напоминала подход Лоренца к объяснению Зееман-эффекта. Взаимодействие атомов с электромагнитным излучением в этой теории описывается кинематическими соотношениями, максимально приспособленными к учету того, что электромагнитное поле состоит из фотонов. Для этого дифференциальные уравнения классической механики заменялись соответствующими разностными. Эта особенность новой теории позволила Борну [**Born 1924**] ввести термин **квантовая механика**. Статистический характер теория Бора, Крамерса и Слетера приобрела после того, как для описания переходов между состояниями атомов был использован формализм коэффициентов Эйнштейна.

Против таких построений не возражал даже Планк **) Они были опровергнуты экспериментально. В 1923 году Комптон наблюдал изменение частоты электромагнитного излучения при рассеянии его на свободных электронах. Это явление было немедленно объяснено им самим и Дебаем как рассеяние электрона на другой частице – фотоне. Если объяснения Комптона были бы правильными, то это означало, во-первых, первое прямое доказательство существования фотона и, во-вторых, было свидетельством сохранения импульса и энергии в элементарных взаимодействиях. Ждать ответа пришлось недолго. В апреле 1925 года Боте и Гейгер, осуществив эксперимент, основанный на технике совпадений, показали, что наблюдаемое вторичное излучение действительно связано с рассеянным электроном. Законы сохранения действовали и в микромире.

18 апреля 1925 года в письме Резерфорду Бор жаловался на невероятные трудности, с которыми столкнулась физика или, по крайней мере, та физика, в которую он верил. Это заставляло его чувствовать себя несчастным. Но

> ...никто не мог, ни на небе, ни на земле, ни под землею раскрыть сию книгу, ни посмотреть в нее
>
> **Откровение Святого Иоанна Богослова 5**.3

Всего лишь три месяца спустя Борн писал Эйнштейну:

> Новая работа Гайзенберга, которая скоро появится, выглядит очень мистической, но по существу очень верна и глубока.
>
> **Борн Эйнштейну 15.7.25**

Именно эта мистическая работа открыла новую эру физики. Однако, чтобы понять как и почему это случилось, нужно вернуться на несколько лет назад.

---

*) Формула Бальмера, разумеется, нисколько не умаляет значения гениального открытия 1900 года.

) Принцип сохранения энергии был принят Планком "как евангелие", как первый из "абсолютных" законов [Борн 1977**].

ЗОММЕРФЕЛЬД И ЕГО УЧЕНИКИ

> И большего было бы мало
> (Бог дал, человек не обузь!)...
> М. Цветаева

В 1906 году Рентген уговорил профессора Высшей Технической Школы в Аррау Зоммерфельда принять кафедру теоретической физики в Мюнхенском университете. Ученик великого Клейна был широко известен как специалист практически во всех областях математики. Клейн готовил ему кафедру прикладной математики в Геттингене, но Зоммерфельд предпочел стать физиком в Мюнхене. Может быть, его привлекала свобода в создании будущей научной школы. Дело в том, что

> Зоммерфельд счастливо сочетал в себе исследователя и педагога, что дано лишь немногим.
>
> [**Pauli 1951**]

Зоммерфельд был удивительно разносторонен. Он лучше всех знал о возможности технических приложений математики, и в то же время был одним из лучших специалистов в области дифференциальных уравнений математической физики. Обратившись к теоретической физике, он стал одним из лучших знатоков классификации спектров. Зоммерфельд воздвиг себе поистине нерукотворный памятник, дав жизнь удивительной постоянной с чарующим названием "постоянная тонкой структуры", странным обозначением – α и загадочным значением:

$$\frac{1}{\alpha} - 1 \quad = \quad 136 \quad = \quad \frac{1}{2} n^2 (n^2 + 1)$$

при n = 4.

Очарованной этой формулой Эддингтон в 20-ые годы построил теорию, объясняющую свойства пространства и факт существования протона и электрона (других элементарных частиц в то время не знали). К несчастью, более точное значение $\frac{1}{\alpha}$ оказалось равным 137.035989. История физики не знает столь катастрофической для теории относительной погрешности в сотую долю процента.

Секрет Зоммерфельда как воспитателя талантов определялся не только прекрасно организованным обучением, блестящим лекциям и семинарам, но еще и обаянием его личности и той заинтересованностью, с которой он относился к молодым людям. Борн рассказывал о зоологе, уже имевшем ученую степень, которому случилось однажды прослушать лекцию Зоммерфельда. Зоолог отказался от своей специальности и стал физиком-теоретиком.

Зоммерфельд всегда находил время для своих учеников. Часто его можно было увидеть в расположенном рядом с университетом Хофгартен-кафе, обсуждающим физические проблемы с кем-нибудь из сотрудников и покрывающим формулами мраморный столик. Говорят, что однажды на столике остался не взятый по какой-то причине интеграл. На следующий день Зоммерфельд, вернувшийся к тому же столику, обнаружил на мраморе законченное вычисление.

Принимая кафедру, Зоммерфельд привез вместе с собой своего первого ученика – будущего Нобелевского лауреата Дебая, а потом прославленные имена, чьи владельцы так или иначе были связаны с Мюнхеном, посыпались как из рога изобилия. Макс фон Лауэ, Эвальд – те, кто постарше, Эпштейн, Венцель, Фриц Лондон – среднее поколение, молодые – Гайтлер, Паулинг, Бете, Унзольд...

Вряд ли Зоммерфельд выделил чем-то особенным 1918 год, когда в Мюнхен приехал ученик из Вены.

> Паули, сын хорошо известного профессора фармакологии из Венского университета, окончил Венскую гимназию, и уже к тому времени тайком изучил трактат Эйнштейна.
>
> [**Sommerfeld 1949**]

Молодой человек не терял времени зря, и уже через год Зоммерфельд писал:

> Дорогой Эйнштейн!
>
> ...Рентген заявил о своей отставке. Надеюсь заполучить сюда Вина или Пашена.
>
> Паули заканчивает движение перигелия Меркурия и искривление света по Вейлю. Может быть ему удастся этим опровергнуть Вейля.
>
> [**Зоммерфельд Эйнштейну 24.10.19**]

Опровергнуть Вейля не удалось. Паули выяснил, как можно выбрать в этой теории такую метрику (Weltfunction), чтобы она объяснила и наблюдаемое движение перигелия Меркурия и предсказанное Эйнштейном отклонение луча света. Эти исследования выяснили главное – рядом с Зоммерфельдом работал зрелый ученый.

> Я занимался изданием физического тома "Математической энциклопедии". В нем еще отсутствовала статья по теории относительности. Поскольку Эйнштейн не захотел ее писать, я предложил Паули сделать эту работу вдвоем. Но когда он показал первый набросок своей работы, я нашел его в такой степени мастерской, работа 22-летнего Паули не превзойдена и по сей день.
>
> [**Sommerfeld 1949**]

Помимо публикации множества великих физических статей, Паули через 30 лет выполнит еще одну работу, которую больше никто не смог бы написать. В сборнике, изданном в честь известного психолога Карла Юнга, появится статья под названием "Влияние архитепических представлений на формирование естественнонаучных теорий у Кеплера" [**Pauli 1952**]. Дело в том, что крестным отцом Вольфганга был друг семьи, профессор Венского университета Эрнст Мах. Когда сопоставляешь сопровождающие жизнь Паули события, можно поверить в провидение.

Внешние события жизни Гайзенберга почти ничем не указывают на жизнь человека, создавшего теорию, не имеющую предшественниц, тем более его молодость прошла рядом со столь выдающимися личностями как Бор, Зоммерфельд, Паули. Однако, уже детство указывало на избранность мальчика. В школьной характеристике десятилетнего воспитанника Мюнхенской Максимилиановской гимназии *) говорилось, что "его взгляд устремлен к существенному, он не обременяет себя деталями и не расплываетсяя в них". В 13 лет мальчик попросил отца, руководившего единственной в Германии кафедрой классической филологии и византинистики, принести ему из университетской библитотеки какую-нибудь книгу по математике. Этой книгой оказалось сочинение Кронекера "De unitatis complexis". Приобщение Гайзенберга

---

*) В ней примерно на сорок лет раньше учился Планк. В 1949 году Нобелевский лауреат по физике Гайзенберг выступит на столетнем юбилее гимназии и будет говорить о связи западноевропейской цивилизации с цивилизациями древнегреческой и раннехристианской

к науке произошло в обычном для гениев возрасте, но, пожалуй, никто не начинал с чтения написанного по латыни трактата, в котором утверждалось, "Бог создал целые числа, остальное изобрел человек". Занятия математикой привели юношу к физике.

Летом 1920 года перед поступлением в Мюнхенский университет Гайзенберг был вынужден долго пролежать в постели с высокой температурой.

> В эти критические месяцы мне под руки попалась работа, содержание которой заворожило меня, хотя я понимал ее лишь наполовину. В этой книге, озаглавленной "Пространство, время, материя", математик Герман Вейль предлагал математическое описание принципов эйнштейновской теории относительности. Разбор развернутых там сложных математических методов и стоящих за ними абстрактных мыслительных построек теории относительности увлек и растревожил меня.

Вскоре после этого произошло еще несколько событий.

> Мой отец устроил мне встречу с профессором математики Фердинандом фон Линдеманом, который прославился окончательным математическим решением древней проблемы квадратуры круга. Я собирался просить у Линдемана разрешения посещать его семинар...

За разговором Линдеман спросил у юноши, какие книги тот проштудировал за последнее время. Узнав, какой была последняя книга,

> ... Линдеман завершил нашу беседу словами: "Ну, значит, Вы так или иначе уже погибли для математики". На том он со мной и расстался. После печального совещания с моим отцом было принято решение рискнуть в области математической физики. Была устроена встреча с Зоммерфельдом, который представлял тогда в Мюнхенском университете теоретическую физику и считался одним из самых блестящих преподавателей высшей школы и другом молодежи.

На книгу Вейля Зоммерфельд реагировал иначе:

> ... "У Вас слишком большие запросы, - заметил он - ... нельзя начинать с самого трудного в надежде, что более легкое само упадет вам в руки. Понимаю Вашу увлеченность проблематикой теории относительности; современная физика и в других областях тоже проникает в сферы, где под вопрос ставятся основные философские установки и где, стало быть, речь идет об открытиях самого волнующего рода. Но путь к ним длиннее, чем Вы себе представляете.

Далее разговор коснулся тем, которые еще долго преследовали будущего патриарха физики.

> ...не приходилось ли Вам в школе иметь дело с аппаратами и экспериментами?
>
> Я сказал, что да, и сообщил, что школьником с удовольствием мастерил небольшие приборы, моторы и индукционные искровые катушки. Но в целом мир приборов мне скорее чужд, и аккуратность, необходимая при выполнении даже относительно маловажных измерений, дается мне явно с большим трудом.
>
> - Однако Вам придется, даже занимаясь теорией, с крайней тщательностью работать над решением малых и на первый взгляд второстепенных задач...
>
> - Но стоящие за всем этим философские вопросы интересуют меня, может быть, еще больше, чем отдельные малые задачи, - робко возразил я. Зоммерфельда это, однако нисколько не обрадовало.
>
> - Вы, наверное знаете, что сказал Шиллер о Канте и его комментаторах: "Когда короли строят, у ломовых извозчиков много дела". Мы все первым делом ломовые извозчики! Но Вы скоро увидите, что Вам доставит радость тщательное

> и добросовестное исполнение такой работы, особенно если Вы сделаете что-то толковое.
>
> Зоммерфельд посоветовал мне, с чего начать занятия, и пообещал, что, возможно, уже очень скоро предложит мне небольшую задачку, касающуюся новейшей атомной теории...

Любопытно сравнить воспоминания Гайзенберга и Зоммерфельда.

> Отец Гайзенберга, профессор византийской литературы и языка в нашем университете, говорил мне, что его сын очень интересуется математикой и физикой. Когда я впервые встретился с молодым Гайзенбергом, он сказал, что прочел книгу Вейля "Пространство. Время. Материя" и что – как он думает – понял ее. Я не нашел ничего лучшего, как сказать ему: "Вот и хорошо, я как раз собираюсь прочесть курс элементарной механики в этом семестре. Вам следует аккуратно проделать упражнения; тогда Вы сами увидите, что поняли, а что нет".

[**Sommerfeld 1949**]

Если принять во внимание разницу восприятий маститого профессора и вчерашнего школьника, то можно сказать, что перед нами тождественные воспоминания. Далее Зоммерфельд вспоминал то, о чем Гайзенберг не писал.

> Уже в течение второго семестра, когда я читал курс гидродинамики, я дал согласие на публикацию его статьи о вихрях в "Physikalische Zeitschrift". Я сказал своему коллеге, профессору Гайзенбергу: "Вы принадлежите к безукоризненной семье филологов, сами вы являетесь прекрасным знатоком позднего греческого периода, Ваш тесть – специалист по Гомеру. Ну а теперь Вы имеете несчастье наблюдать за неожиданным возникновением физико-математического гения в вашей семье". Вскоре после этого я опубликовал в соавторстве с молодым Гайзенбергом статью по интенсивности мультиплетов с использованием принципа соответствия.

[**Sommerfeld 1949**]

Обращение к задачам атомной физики было неизбежным, потому что Зоммерфельд совершил еще один поступок с непредсказуемыми последствиями.

> Несколько дней спустя, войдя в университетскую аудиторию, где Зоммерфельд обычно читал свои лекции, я обнаружил в третем ряду темноволосого студента с неуловимым, несколько замкнутым выражением лица, который обратил на себя мое внимание еще в кабинете для семинарских занятий сразу после моего первого разговора с Зоммерфельдом. Зоммерфельд познакомил меня с ним, а затем на прощание добавил, что считает этого студента одним из своих наиболее одаренных учеников, у которого я могу многому научиться. Если я чего не понимаю в физике, то должен просто обратиться к нему. Его имя было Вольфганг Паули, и во все последующее время, до самой своей смерти, он исполнял для меня и для дела, которое я пытался делать в науке, роль всегда желанного, хотя зачастую и очень резкого критика и друга.

Юноши понравились друг другу. Пока Зоммерфельд

> произносил первые фразы своей лекции, Волфганг успел прошептать мне на ухо: "Правда, он похож на старого гусарского полковника?"

Сразу после лекции завязалась непринужденная беседа.

> Я рассказал... о своей беседе со стариком Линдеманом... Мой рассказ развеселил Вольфганга.

> - Это в точности соответствует моим впечатлениям,- сказал он. - Линдеман фанатик математической строгости. Все естествознание, включая математическую физику, для него туманная болтовня.
>
> Вейль действительно что-то понимает в теории относительности, а потому автоматически выбывает для Линдемана из рядов серьезных математиков.
>
> На мой вопрос о значении теории относительности и атомной теории Вольфганг отвечал подробнее. ”...Недавно я написал довольно большую статью об общей теории относительности, но, может быть, именно поэтому атомная теория сейчас кажется мне, в принципе, намного более интересной. В атомной физике существует множество еще не понятых экспериментальных результатов... Правда датчанину Нильсу Бору удалось связать удивительную стабильность атомов с квантовой гипотезой Планка, – тоже, между прочим, пока еще никем не понятой... Зоммерфельд надеется, что на базе экспериментов удастся выявить новые закономерности. Он верит в числовые соотношения, чуть ли не в числовую мистику своего рода, как некогда пифагорейцы с их гармонией колеблющихся струн. Мы называем эту сторону его науки ”атомистикой”... Возможно, здесь быстрее сориентируется тот, кто еще не очень хорошо знает предшествующую физику... Так что у тебя есть преимущество, – Вольфганг при этом ехидно усмехнулся, – но, разумеется, незнание еще не гарантия успеха”.
>
> Несмотря на эту маленькую шпильку, Вольфганг, ... подтвердил все мои соображения, которыми я обосновывал свой выбор. Я порадовался тому, что не пустился в чистую математику...

Скорее всего, ирония по поводу ”атомистики” была необходимой принадлежностью героических рассказов старого солдата молодому новобранцу. Сам Паули много лет спустя в своей Нобелевской лекции рассказ о своем открытии начал с годов ученичества у Зоммерфельда.

> Освоив еще в школе в Вене основы классической физики и новой тогда теории относительности Эйнштейна, в Мюнхенском университете на лекциях Зоммерфельда я познакомился со структуроя атома, довольно странной с точки зрения классической физики. Меня не миновало то потрясение, которое переживает каждый физик, привыкший мыслить классически, когда он впервые знакомится с ”Основным постулатом квантовой теории” Бора.

Не по годам мудрый студент быстро осознал, что на лекциях Зоммерфельда он узнает не только устройство атома, но в еще большей мере знакомится с новой научной концепцией.

> В подходе Бора... предпринимались попытки навести среди новых понятий абстрактный порядок с помощью некоего ключа для перевода классической механики и электродинамики на квантовый язык... В этом направлении шел Бор со своим принципом соответсвия. Зоммерфельд же ввиду трудностей, стоявших на пути использования кинематических модельных представлений предпочитал прямую, по возможности независимую от моделей, интерпретацию спектральных законов с помощью целых чисел, следуя как когда-то Кеплер при изучении планетной системы, внутреннему чувству гармонии. Оба эти подхода, на мой взгляд, не противоречивших один другому, оказали на меня влияние. Последовательность целых чисел 2,8,18,32,... выражавших длины периодов естественной системы химических элементов, подвебргалась в Мюнхене усиленному обсуждению вместе с

> замечанием шведского физика Ридберга, что они образуются по простой формуле $2n^2$, в которой n ппробегает ряд целых чисел. Зоммерфельд особенно пытался связать число 8 с числом вершин куба.

Теперь ироничный и все знающий ученик Зоммерфельда встретил достойного собеседника, а их учитель принял под свое крыло сразу двух гениев.
Итак под крылом Зоммерфельда оказались два совершенно непохожих друг на друга птенца.

> На зоммерфельдовском семинаре беседы с Вольфгангом Паули составляли важнейшую часть моих занятий. Однако образ жизни Вольфганга был почти диаметрально противоположен моему. В то время как я любил ясный день и все свободное время по возможности проводил за городом,... Вольфганг был типичным полуночником... Естественно,... что на семинар он... приходил, к досаде Зоммерфельда, только к полудню и лишь изредка по утрам. Такое различие наших жизненных стилей... не могло омрачить нашу дружбу. Наш общий интерес к физике был столь велик, что легко перевешивал различие интересов во всех других областях.
>
> ...Уже вскоре после начала моих занятий Зоммерфельд поставил передо мной задачу сделать из некоторых наблюдений, сообщенных ему знакомым физиком-экспериментатором, выводы об орбитах исследуемых электронов и их квантовых числах. Это оказалось несложным, однако полученные результаты были в высшей степени неожиданными. Помимо целых квантовых чисел мне пришлось допустить также и половины их, что полностью противоречило духу квантовой теории и зоммерфельдовской числовой мистике. Вольфганг посмеивался, что я, наверное, вскоре введу также и четверти, и восьмушки квантовых чисел, так что в конце концов вся квантовая теория рассыплется в прах у меня под руками. Но тем не менее экспериментальные данные выглядели именно таким образом, будто половинные квантовые числа имели полное право на существование...

Молодые люди шутя прошли мимо открытия половинного спина, что несколько позже принесло славу не одному физику. До таких мелочей им не было дела - ведь создавался новый мир.

> Вольфганг... решил проверить, ведут ли теория Бора и квантовые условия Бора–Зоммерфельда к экспериментально новым результатам в случае более сложной системы, рассчитать которую было возможно, используя математические методы, принятые в астрономии. Дело в том, что мы задумались над тем, не ограничены ли предыдущие успехи теории крайне простыми системами... В этой связи Вольфганг как-то спросил меня: "А, собственно, веришь ли ты, что в атоме есть такая вещь, как орбиты электронов?" Мой ответ, видимо, был довольно туманным: "...если существуют траектории электронов в камере Вильсона, то должны существовать, наверное, их орбиты в атоме *). Однако, должен признаться, что меня здесь все-таки берет сомнение... Мы рассчитываем орбиту по законам классической ньютоновой механики, а потом, введя квантовые условия, приписываем этой орбите стабильность... Стало быть, все представление об орбите электрона в атоме оказывается в каком-то смысле нелепостью. Но как же тогда быть?"

---

*) Позднее Гайзенберг услышит от Эйнштейна именно такое возражение против квантовой механики.

> Вольфганг кивнул. "Все это в целом действительно выглядит крайне загадочным. ...частота колебаний испускаемого света находится где-то посреди между частотами вращения электрона по орбите до таинственного скачка и после него. Все это, в сущности, полное безумие".
>
> - Пусть это и безумие, но нем есть своя система, - процитировал я.
>
> - Да, возможно...

Спустя много лет после описываемых здесь событий Зоммерфельд рассказал о гениальной педагогической ошибке.

> Разумеется я пытался привлечь как Паули, так и Гайзенберга к участию в лабораторных работах. Они работали втроем – со своим другом Отто Лапортом в совместном эксперименте, руководимом моим коллегой Вином (автором "закона смещения Вина"), Паули больше советовал, чем работал, чтобы исключить "Эффект Паули".
>
> [**Sommerfeld 1949**]

Здесь Зоммерфельд вспоминает более позднюю легенду о Паули, согласно которой его присутствие на достаточном (иногда довольно большом) расстоянии от опытной установки вызывало ее поломку. Однако, в этом рассказе много таинственного. Совместных публикаций Гайзенберга, Лапорта и Паули нет. С другой стороны, упоминание в связи с попыткой приобщения учеников Зоммерфельда к эксперименту имени Вина может (как будет видно из дальнейшего) прояснить многие события в истории квантовой механики.

Скорее всего, совместная работа экспериментатора и теоретиков происходила так, как об этом рассказал Гайзенберг.

> Когда ... спустя два или три часа после окончания лекции Зоммерфельда, в аудитории для семинарских занятий появлялся Вольфганг, то сцена нашего обоюдного приветствия разыгрывалась примерно следующим образом.
>
> Вольфганг: "А, вот и наш апостол природы. Доброе утро! Ты выглядишь так, словно опять несколько дней подряд жил согласно принципам своего святого патрона Руссо. Ведь это ему принадлежит знаменитое изречение: "Назад к природе; на деревья, обезьяны".
>
> – "Вторая часть не из Руссо, – отвечал я ему, – и по деревьям никто не лазал. А вот тебе следовало бы говорить не "доброе утро", а "добрый день". Сейчас 12 часов. Подчеркиваю, 12 часов. Но в следующий раз ты должен взять меня с собой в какое-нибудь ночное кафе, чтобы и у меня тоже, наконец, появились хорошие научные идеи".
>
> – "Кафе тебе определенно не поможет; однако ты бы лучше рассказал мне, что у тебя получается с работой Крамерса, о которой ты должен докладывать на следующем семинаре". Тут наш разговор быстро принимал деловой характер. Когда мы говорили о физике, к нам часто присоединялся наш друг, Отто Лапорт, который со своим рассудительным и трезвым прагматизмом был хорошим посредником между Вольфгангом и мной. Впоследствии он совместно с Зоммерфельдом опубликовал важные исследования по так называемой мультиплетной структуре спектров.
>
> Похоже благодаря его сотрудничеству случилось так, что однажды мы втроем, т.е. Вольфганг, Отто и я, предприняли путешествие в горы на велосипедах по дороге от Бенедиктберейна через Кессельберг к озеру Вальхензее и от него далее в Лойзахталь. Правда, это был единственный случай, когда Вольфганг рискнул

> сделать вылазку в мой мир. Но это наше предприятие благодаря долгим разговорам, которые мы вдвоем или втроем вели в продолжение нашего путешествия и после него в Мюнхене, еще долго приносило свои плоды.
>
> Вольфганг спросил меня – кажется, это было вечером на постоялом дворе в Грайнау, – понял ли я эйнштейновскую теорию относительности, игравшую такую большую роль на семинаре Зоммерфельда. Я смог ответить лишь, что не знаю, поскольку мне не ясно, что, собственно, означает слово ”понимание” в естествознании. ...я, пожалуй, все еще не понял, почему движущийся наблюдатель под словом ”время” имеет в виду нечто иное, чем покоящийся. Эта путаница с понятием времени меня по-прежнему беспокоит, оставаясь чем-то непостижимым. ...я хочу... подчеркнуть, что язык и мышление становятся ненадежными, если мы меняем такие основополагающие понятия, а ненадежность несовместима с пониманием.
>
> Мои сомнения показались Отто необоснованными. ”Конечно, в школьной философии все выглядит так, – сказал он, – словно понятия вроде ”пространства” и ”времени” уже получили твердый, не подлежащий изменениями смысл. Но это доказывает только, что школьная философия неверна. С красиво сформулированными общими фразами о ”сущности” пространства и времени мне решительно нечего делать. Ты, по-видимому, слишком уж много занимался философией. Но тебе следовало бы знать и такое достойное внимания определение: ”Философия есть систематическое злоупотребление изобретенной для этой цели номенклатурой”. По правде, следовало бы употреблять лишь слова и понятия, непосредственно соотносящиеся с чувственным восприятием, причем, естественно, непосредственное чувственное можно заменить более сложным физическим наблюдением.

Между тем для Паули пришло время защиты диссертации, что он и сделал летом 1921 года. Осенний семестр этого года он провел в Геттингене, работая ассистентом Борна:

> Паули меня замещает; несмотря на свой возраст (ему 21 год) это хорошо ему удается... Маленький Паули очень инициативен; такого хорошего ассистента мне в жизни больше не видать. К сожалению, летом он собирается к Ленцу в Гамбург.

Борн Эйнштейну 29.11.21

В Гамбург Паули уехал, опасаясь, что атмосфера Геттингена превратит его в математика.

Дела в Мюнхене шли своим чередом, и как-то после одного долгого разговора об атомной теории Бора

> Зоммерфельд... неожиданно спросил меня: ”Не желаете ли Вы лично познакомиться с Нильсом Бором? Он скоро прочтет в Геттингене цикл лекций о своей теории. Я туда приглашен и мог бы взять Вас с собой.” Мне пришлось несколько замедлить с ответом, потому что в те времена железнодорожное путешествие до Геттингена и обратно представляло для меня неразрешимую финансовую проблему. По-видимому, Зоммерфельд заметил как тень этой заботы пробежала по моему лицу. Во всяком случае он сказал, что берет на себя связанные с моей поездкой расходы...

Бор приехал в Геттинген, чтобы рассказать о достижениях своей школы. Однако, парадные лекции вскоре сменились более серьезным обменом мнений, потому что Бор познакомился здесь с питомцами Зоммерфельда. Прежде всего, в Геттингене появился Паули, который уже в то время знал все, о чем ему мог рассказать докладчик.

> На меня произвело сильное впечатление, что Бор тогда и в более поздних дискуссиях стремился найти **общее** объяснение **каждой** электронной оболочки, в котором в отличие от поисков Зоммерфельда, число 2 играло бы столь же существенную роль, как и число 8. ...Бор подчеркивал, что фундаментальное значение имеет вопрос, почему в основном состоянии атома все электроны не занимают самой внутренней оболочки. Согласно господствовавшей в то время точке зрения, которую разделял и Бор, причиной этой дублетной структуры считали ненулевой момент количества движения атомного ядра.

Паули эту точку зрения не разделял. До нас не дошло стенографически точное содержание его бесед с Бором, но известно, что уже осень 1922 года Паули провел в Копенгагене у Бора, помогая ему в издании на немецком языке большой статьи о строении атома.

В Геттингене же Бору довелось стать первым из великих физиков, кому пришлось вести не слишком легкие разговоры с Гайзенбергом.

> Бор говорил довольно тихим голосом, с мягким датским акцентом, и когда он разъяснял отдельные положения своей теории, то выбирал слова осторожно, гораздо осмотрительнее, чем мы привыкли слышать от Зоммерфельда... После каждой лекции начиналась дискуссия, и в конце третьей лекции я отважился сделать одно критическое замечание. Бор коснулся... работы Крамерса, о которой мне пришлось докладывать на зоммерфельдовском семинаре, и сказал в заключение: хотя принципы теории еще неясные, однако можно вполне положиться на то, что результаты Крамерса правильны... Тут я встал и выдвинул возражения, которые являлись результатом наших мюнхенских дискуссий... Наверное, Бор почувствовал, что за моими замечаниями стоят основательные занятия его теорией.
>
> Отвечал он нерешительно, так, словно замечание несколько обеспокоило его, а после дискуссии подошел ко мне и спросил, не сможем ли мы во второй половине дня прогуляться по Хайбергу, чтобы основательно обсудить поставленные мною вопросы.
>
> Эта прогулка оказала сильнейшее воздействие на мое последующее научное развитие, или даже, вернее сказать, все мое научное развитие, собственно, и началось с этой прогулки.

Дерзкий ученик Зоммерфельда оказался благодарным слушателем. Во время прогулки по горному склону Бор изложил юноше всю историю атомной физики, начиная с опытов Резерфорда. Когда беседа близилась к завершению

> ...я спросил Бора: ”Если внутреннее строение атомов столь мало поддается наглядному описанию, как Вы говорите, и если у нас, собственно, нет языка, на котором мы могли бы вести речь об их строении, то сможем ли мы вообще когда бы то ни было понять атомы?” Бор секунду помедлил, а потом сказал: ”Пожалуй, сможем. Но нам надо будет все-таки сначала узнать, что означает слово ”понимание”...
>
> Ну что же, – возобновил Бор нашу беседу, – мы говорили с Вами о таком множестве сложных вещей, и я рассказал Вам, как сам пришел в науку, но мне еще ничего не известно о Вас. Вы выглядите еще очень юным. Создается такое впечатление, как будто бы Вы начали с изучения атомной физики и лишь позднее

> освоили прежнюю физику и все прочее. Похоже, Зоммерфельд очень рано ввел Вас в этот приключенческий мир атомов... Вы должны как-нибудь посетить нас в Копенгагене, а то и приехать к нам на более долгое время...

Собеседники еще не знали, что только что закончился разговор будущих основателей "Копенгагенской школы", но тем не менее

> ...передо мной блеснуло будущее, полное новых надежд и возможностей, и уже проводив Бора домой, по пути к своей гостинице я еще долго расцвечивал его яркими красками...

Однако до поездки к Бору прошло еще полтора года, заполненных учебным семестром в Геттингене, докторской диссертацией, посвященной проблемам устойчивости ламинарного течения в жидкостях и последующим экзаменом. Устные докторские экзамены чуть было не обернулись для Гайзенберга катастрофой. Он прекрасно сдал Зоммерфельду экзамен по теоретической физике и предстал перед профессором Вином, чтобы отвечать на вопросы из физики экспериментальной. Вряд ли предварительное знакомство пошло молодому собеседнику на пользу. Вин интересовался устройством аккумуляторов и разрешющей силой микроскопа, телескопа и интерферометра Фабри-Перо и не получил ответа ни на один из этих вопросов. Вин настаивал на общей отрицательной оценке и лишь заступничество Зоммерфельда склонило его к наименьшему положительному баллу. Совокупность оценок оказалась следующей: основной экзамен по физике – III (низшая) степень, математика и астрономия I-ая и II-ая степени. Общая оценка – III степень. Дело спасло письменное сочинение Гайзенберга по гидродинамике, которое было оценено Зоммерфельдом как выдающееся. Это принесло в итоге степень Summa cum laude (С высшей похвалой). Однако, Вин столь яростно сопротивлялся дальнейшему пребыванию столь странного студента в Мюнхене, что после экзамена Гайзенберг нашел приют в Геттингене, где он сменил Паули. Борн описывал его появление так:

> он выглядел простоватым деревенским парнем с коротко остриженными светлыми волосами, ясными глазами и очаровательным выражением лица. К обязанностям ассистента он относился серьезнее, чем Паули, и стал мне хорошим помощником. Его невероятная быстрота и точность восприятия позволяли ему выполнять без особых усилий огромную работу. Покончив со своими гидродинамическими трудами, он работал в области атомной физики частично один, частично в сотрудничестве со мной и, кроме того, помогал мне в руководстве дипломниками.
>
> **Борн, Воспоминания.**

В июле 1923 года Вин не подозревал о своем вкладе в развитие квантовой теории. Юноше, которого Зоммерфельд слишком рано обучил атомной физике, даже катастрофы шли на пользу. Спустя три с небольшим года заполнивший пробелы в знакомстве с оптическими приборами Гайзенберг придумал свой знаменитый мысленный эксперимент с "микроскопом Гайзенберга", утвердивший в физике новое мировоззрение. Впрочем, приятные события приводили к тем же последствиям: спустя двадцать лет более удачные юношеские занятия гидродинамикой были применены к физике элементарных частиц – Гайзенберг построил гидродинамическую теорию множественного рождения.

Итак, Гайзенберг оказался ассистентом Макса Борна,*) и только в пасхальные каникулы 1924 года он смог подняться на паром, направляющийся в Данию. Паули откликнулся на путешествие своего друга письмом к Бору:

> Недавно я... видел Гайзенберга... Я всегда чувствую себя очень неловко с ним. Когда я размышляю о его идеях, они кажутся мне кошмарными, и про себя я страшно браню их. Дело в том, что он очень нефилософичен. Он не заботится о том, чтобы основные допущения были ясно разработаны и связаны с предшествующими теориями. Когда я разговариваю с ним, он мне очень нравится, и я вижу, что у него – по крайней мере в душе – есть куча новых аргументов... Поэтому я очень рад, что Вы пригласили его в Копенгаген... он усвоит философскую установку вашего мышления.

Паули Бору 11.2.24

Мало кто другой удостаивался столь лестного отзыва Паули. Может быть, это было выражением общего завораживающего впечатления от разговоров с юношей, интересы которого, кажется, лежали вне физики – литература, музыка, горные прогулки, но который, несомненно, очень скоро преобразует физику. Что касается укоров в нефилософичности, то надо принять во внимание, что это письмо писал крестник Маха. Кроме того, философию (как и ранее математику) Гайзенберг постигал практически недоступным для других способом: гимназист, втянутый в 1919 году в междуусобные бои в Мюнхене, после дежурств на телефонном узле читал Платона:

> ... в одно утро... я набрел на диалог "Тимей", причем как раз на то место, где говорилось о мельчайших частицах материи. Возможно, вначале это место захватило меня только потому, что было трудно для перевода или потому, что там говорилось о математических вещах, которые меня всегда интересовали.

Так или иначе, но образы Платона сопровождали Гайзенберга всю жизнь. Попав в Копенгаген, Гайзенберг быстро включился в работу. Вскоре Крамерс и Гайзенберг опубликовали работу о рассеянии света на атомах, которая до сих пор цитируется во всех серьезных руководствах по квантовой теории. Для Гайзенберга она имела тем большее значение, в ней речь шла не о конкретных вероятностях частных процессов, а об общих закономерностях взаимодействия атомов с излучением.

> Возобновляя в летний семестр 1925 года свою работу в Геттингене... я начал свои научные исследования с попытки угадать правильные формулы интенсивности линий спектра водорода, используя метод, сходный с тем, который был апробирован в нашей совместной с Крамерсом работе в Копенгагене. Эта попытка не удалась. Я увяз в непролазных дебрях сложных математических формул, из которых не находил никакого выхода. Однако в итоге этой попытки у меня

---

*) Комментируя уже цитированное письмо Эйнштейну, Борн вспоминал о своих ассистентах так: Отчет о "маленьком Паули" является неполным. Я вспоминаю, что он любил поспать и часто опаздывал на лекции, начинавшиеся в 11 часов. Поэтому мы в половине одиннадцатого посылали к нему нашу горничную, чтобы быть уверенными, что он уже не спит. Он был, без сомнения гением первого ранга, но мое опасение о том, что "такого хорошего ассистента мне в жизни больше не видать", оказались неоправданными. Его преемник Гайзенберг был столь же гениален, но более добросовестен: мне не нужно было его будить или напоминать ему об его обязанностях.

упрочилось мнение, что не следует задаваться вопросом об орбитах электронов в атоме и что совокупность частот колебаний и величин (так называемых амплитуд), определяющих интенсивность линий спектра, может служить полноценной заменой орбитам. Во всяком случае, эти величины можно было как-никак непосредственно наблюдать. Рассмотрение лишь этих величин в качестве определяющих параметров атома было вполне в духе той филисофии, которую представлял в качестве позиции Эйнштейна наш друг Отто Лапорт во время нашей велосипедной поездки вдоль Вальхензее. Моя попытка осуществить подобный план, исследуя атом водорода, провалилась из-за сложности проблемы. Я стал тогдва искать математически более простую механическую систему, где можно было бы справиться с расчетами. Такой системой явился маятник или, шире, так называемый ангармонический осциллятор, применямый в атомной физике, например в качестве модели внутримолекулярных колебаний.

23 ИЮЛЯ 1925 ГОДА – ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

> Моим планам скорее помогло, чем помешало, одно внешнее препятствие.
>
> В конце мая 1925 года я так неприятно заболел сенной лихорадкой, что вынужден был просить Борна об освобождении меня на 14 дней от моих обязанностей. Мне захотелось поехать на остров Гельголанд, чтобы на морском воздухе вдали от цветущих деревьев и лугов справиться со своей болезнью. На Гельголанде... у меня не было повода отвлекаться от своей проблемы, поэтому я продвигался вперед быстрее, чем это было возможно в Геттингене. ...через несколько дней стало ясно, чем именно следует заменить квантовые условия Бора-Зоммерфельда в такой физике, в которой должны фигурировать только наблюдаемые величины... Как-то вечером я продвинулся настолько далеко, что сумел с помощью довольно-таки громоздких, по теперешним масштабам, вычислений определить отдельные члены энергетической таблицы... Мною овладело такое возбуждение, что в последующих вычислениях я постоянно делал ошибки. Было поэтому уже три часа ночи, когда передо мной лежал окончательный результат расчетов. ... я уже не мог более сомневаться в математической непротиворечивости и согласованности наметившейся тут квантовой механики. У меня было ощущение, что я гляжу сквозь поверхность атомных явлений на лежащее глубоко под нею основание поразительной внутренней красоты, и у меня почти кружилась голова от мысли, что я могу теперь проследить всю полноту математических структур, которые там, в глубине, развернула передо мной природа.

Чтобы понять, что был причиной столь сильного волнения, перескажем содержание статьи Гайзенберга, которая поступила в редакцию журнала Zeitschrift für Physik 29 июля 1925 года. Этот день можно считать днем рождения современной квантовой теории. Значение этой статьи определяется, в первую очередь, тем, что в ней ”все расположено мерою, числом и весом”. Совсем еще молодой человек отмечал, что одной из отправных точек новой теории стал, среди прочего, анализ вопроса о сохранении энергии. Гайзенберг заметил, что эти трудности нельзя преодолеть, например, усовершенствованием уже известных правил квантования - они имеют чисто кинематическую природу и заключаются в следующем. Предположим, что кто-то сумел найти квантовый аналог классической траектории электрона - $x_{cl}(t)$. Какая квантовая величина будет соответствовать классическому квадрату координаты - $x_{cl}(t)^2$? Оказалось, что нельзя сопоставить квантовой траектории такие числа $x_q(t)$, чтобы квадратам этих чисел соответствовали числа $x_q(t)^2$. Точнее говоря, что-нибудь сопоставить можно, но если мы хотим сохранить главное достижение физики предшествующих трех столетий - учение о связи материальных зарядов и электромагнитного поля, следует согласовать частоты периодических движений электронов и линий излучения электромагнитного поля. После открытия Бальмера это стало сложной задачей.

Гайзенберг начал с того, что перефразировал формулу Ритца как "закон композиции частот" излучения атома:

$$\omega(m,n)+\omega(n,r) \quad = \quad \omega(m,r).$$

В такой форме соотношения между частотами не зависят от каких-либо соображений о происхождении линий. Это - чисто кинематический закон.

Между тем, в ньютоновой механике любое периодическое движение можно связать с набором частот, обладающих совсем другими свойствами: это совокупность основного тона Ω и обертонов:

$$\omega_n \quad = \quad n\Omega$$

Частота Ω зависит от энергии системы, которую можно связать с безразмерной переменной m, т.е. классические частоты можно также обозначать двумя индексами:

$$\omega_{cl} \quad = \quad \omega_{cl}(m,n).$$

Классические частоты обладают законом композиции

$$\omega_{cl}(m,n)+\omega_{cl}(m,r) \quad = \quad \omega_{cl}(m,n+r).$$

То, что индекс m теперь - непрерывно изменяющаяся величина не слишком существенно, главное, что закон композиции частот ω_{cl} отличается от закона композиции частот излучения атомов.

Сейчас нам придется заняться несложной математикой. Известно, что всякую периодическую функцию $F(t)$ можно представить в форме

$$F(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n exp(in\Omega t).$$

Теория рядов Фурье учит, что значения коэффициентов F_n и частоты $n\Omega$ взаимно однозначно связаны со свойствами функции $F(t)$. Чтобы отличить одну функцию от других, можно воспользоваться непрерывным индексом m. Переходя на физический язык, можно считать набор

$$\Big\{A(m,n),\omega_{cl}(m,n)=n\Omega(m)\Big\}$$

представителем переменной $A(t)$.

Изучение взаимодействия атомов с электромагнитным полем снабжает физиков наборами $\Big\{A(m,n), \omega_{mn}\Big\}$, в которых частоты удовлетворяют принципу Ритца. Представителями каких величин можно считать эти наборы? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно решить такую задачу: пусть переменным $A(t)$ и $B(t)$ соответствуют наборы $\Big\{A(m,n), \omega_{mn}\Big\}$ и $\Big\{B(m,n), \omega_{mn}\Big\}$. Каким должен быть представитель величины $f(A, B)$?

Пусть в классической консервативной системе существует периодически зависящая от времени динамическая переменная $F(t)$. Ее можно разложить в ряд Фурье

$$F(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(m,n) exp(i\omega_{cl}(m,n)t).$$

Если величину $F^2(t)$ определить как произведение рядов из правой части предыдущей формулы, то

$$F^2(t) \quad = \quad \sum_{n,r} F(m,n)F(m,r)exp(i\omega_{cl}(m,n)t + i\omega_{cl}(m,r)t).$$

В силу закона композиции классических частот $F^2(t)$ можно представить в виде ряда Фурье

$$F^2(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} F^{(2)}(m,n) exp(i\omega_{cl}(m,n)t),$$

где

$$F^{(2)}(m,n) \quad = \quad \sum_{r+p=n} F(m,r)F(m,p).$$

Полученные формулы являются частным случаем общего закона: если в начальный момент времени динамические переменные консервативной механической системы ϕ и F связаны соотношением $\phi = f(F)$, то получающиеся в результате эволюции системы величины $\phi(t)$ и $F(t)$ связаны тем же соотношением: $\phi(t) = f(F(t))$.

Экспериментальный анализ излучения и поглощения электромагнитного поля атомами снабжает физиков набором $\{F_{mn}, \omega_{mn}\}$. Если считать этот набор представителем величины $F(t)$, то возможность непротиворечивого определения F с помощью ряда Фурье взаимно однозначно связана с классическим законом композиции частот. Если считать, что механические частоты, связанные, например, с движением электрона в атоме совпадают с частотами электромагнитного излучения атома, т.е. представителем координаты электрона является набор $\{x_{mn}, \omega_q(m,n)\}$, то нельзя непротиворечиво определить функцию

$$x(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{mn} exp(i\omega_q(m,n)t).$$

Это позволило Гайзенбергу высказать в 1925 году ошеломляющее утверждение:

> в теории, согласованной с комбинационным принципом Ритца, не может быть классического понятия о траектории электрона внутри атома(in der Quantentheorie nict möglich war, dem Elektron einen Punkt im Raum als Funktion der Zeit mittels beobachtbarer Größen zuzuordnen).

Таким образом, квантовая теория должна искать свой способ определения координаты. Каким же должно быть это определение? Ответ Гайзенберга был гениально прост: раз частоты излучения атома нумеруются парами чисел, то парами целых чисел должны перечисляться и все динамические переменные, связанные с атомом.

Выясним, к чему это приводит. Пусть величины A и B определяются своими представителями

$$A \leftrightarrow \{A_{mn}, \omega_m - \omega_n\}; B \leftrightarrow \{B_{mn}, \omega_m - \omega_n\},$$

а набор $C_{mn}(t)$ вычисляется по формуле $C_{mn} = \sum_r A_{mr}B_{rn}$, то

$$C_{mn}(t) = \sum_r A_{mr}(t)B_{rn}(t) = e^{i\omega_m t}\sum_r A_{mr}B_{rn}e^{-i\omega_n t}.$$

Во всех случаях набор частот - это разности $\omega_m - \omega_n$. Очевидно, что величину C можно считать произведением A и B:

$$C \leftrightarrow \{(AB)_{mn}, \omega_m - \omega_n\}.$$

Гайзенберг обратил внимание на то, что умножение в его теории некоммутативно. Однако сейчас это не слишком существенно. Гораздо важнее непосредственное физическое следствие этого определения. Способ получения функций динамических величин показывает, как Гайзенберг устранил из теории понятие траектории частицы: поскольку представители переменных системы (в том числе и представители координаты) содержат два индекса и при вычислении представителей функций оба эти индекса существенны (в классическом случае это не так), то можно сказать, что при описании движения рассматриваются сразу все возможные (т.е. не рассматривается ни одна из отдельных) классические траектории.

Итак, получен способ определения функций от переменных системы в терминах их представителей. Но как определить эти переменные, т.е. какие представители следует сопоставить, например импульсу и координате? Гайзенберг пришел к определению импульса и координаты, исходя из наглядных физических соображений, вспомнив, чему он научился в Копенгагене.

В 1924 году Крамерс получил формулу для электрического дипольного момента атома, который индуцируется периодическим электрическим полем: если напряженность поля равна $\vec{E}cos2\pi\nu t$, то индуцированный дипольный момент $\vec{M}$ равен

$$\vec{M} = \vec{E}\frac{2}{h}\sum_\alpha\left\{\frac{\Gamma_a(n+\alpha,n)\nu_a(n+\alpha,n)}{\nu_a(n+\alpha,n)^2-\nu^2} - \frac{\Gamma_e(n,n-\alpha)\nu_e(n,n-\alpha)}{\nu_e(n,n-\alpha)^2-\nu^2}\right\}.$$

В этой формуле учитываются процессы двух типов: поглощение фотона частоты $\nu_a(n+\alpha,n)$ с последующим его излучением, и излучение и последующее поглощение фотона частоты $\nu_e(n, n-\alpha)$. Величины Γ_a и Γ_e - это соответствующие коэффициенты Эйнштейна. Поскольку при больших частотах фотона это выражение должно совпадать с формулой Томсона

$$\vec{M} \quad = \quad -\frac{e^2\vec{E}}{4\pi^2 m\nu^2},$$

то должны выполняться правила сумм Рейхе-Куна

$$\frac{8\pi^2 m}{e^2 h}\sum\Big(\Gamma_a\nu_a - \Gamma_e\nu_e\Big) \quad = \quad 1.$$

Если уточнить механизм излучения и поглощения фотонов, считая, что речь идет о дипольных переходах, то можно воспользоваться принципом соответствия и определить коэффициенты Эйнштейна в терминах коэффициентов Фурье траекторий электрона. (Разумеется речь идет пока о квазиклассических построениях). Гайзенберг постулировал такое правило сумм:

$$h = 4\pi m\sum_{\alpha=0}^{\infty}\Big\{|a(n,n+\alpha)|^2\omega(n,n+\alpha) - |a(n,n-\alpha)|^2\omega(n,n-\alpha)\Big\}.$$

Происхождение чисел $a(l,k)$, как уже было сказано связано с коэффицентами Фурье траектории, выделяемой числом l, но для Гайзенберга величины $a(l,k)$ это представители координаты электрона как динамической переменной – о траекториях теперь можно забыть. Эти числа можно дифференцировать по правилу:

$$\frac{da(k,l)}{dt} \quad = \quad i\omega(k,l)a(k,l).$$

После этого из суммы Гайзенберга можно удалить частоты – единственный намек на динамику и получить чисто кинематическое соотношение

$$\sum_k(q(n,k)p(k,n) - p(n,k)q(k,n)) \quad = \quad i\hbar,$$

которому должны удовлетворять правильным образом определенные импульс и координата.

Гайзенберг применил свой метод к нелинейному осциллятору. Приведем здесь выкладки для более простого случая – осциллятора гармонического. Классические уравнения движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x \quad = \quad 0$$

приводят к таким соотношениям между коэффициентами $a(m,n)$ и частотами $\omega(m,n)$:

$$(-\omega(m,n)^2 + {\omega_0}^2)a(m,n) = 0,$$

из которых следует, что

$$a(m,n) = 0, \quad \textit{если} \quad \omega(m,n) \neq \pm\omega_0.$$

Всегда можно выбрать такую нумерацию, чтобы выполнялись соотношения

$$\omega(n, n \pm 1) \quad = \quad \pm\omega_0.$$

В этом случае от нуля будут отличаться лишь коэффициенты $a(n, n \pm 1)$ и правило сумм Гайзенберга примет вид *)

$$|a(n+1, n)|^2 - |a(n, n-1)|^2 \quad = \quad \frac{\hbar}{2m\omega_0}.$$

Эти соотношения представляют собой уравнения в конечных разностях. Если считать, что числа n принимают значения $n = 0, 1, ...$, коэффициенты $a(m, m)$ действительны и справедливо начальное условие $a(0, -1) = 0$, то отличные от нуля представители координаты равны

$$a(n, n-1) = a(n-1, n) = \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega_0}}.$$

Энергии осциллятора должны соответствовать коэффиценты

$$H(k, n) = \frac{m}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\Big\{\frac{da(k, l)}{dt}\frac{da(l, n)}{dt} + {\omega_0}^2 a(k, l)a(l, n)\Big\}.$$

Эта сумма легко вычисляется и дает значения уровней энергии гармонического осциллятора:

$$H(k, n) = \delta_{kn}\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\hbar\omega_0.$$

Используя определение производной по времени, нетрудно проверить, что справедливы равенства

$$\frac{dH(k, n)}{dt} \quad = \quad 0,$$

означающие закон сохранения энергии.

Вот и все – квантовая механика была создана.

По пути из Гельголанда в Геттинген Гайзенберг заехал в Гамбург к Паули, ожидая подвергнуться самой строгой критике, но получил горячую поддержку. Его друг, уже обессмертивший свое имя *), одобрил младшего товарища. В течение двух недель они поддерживали оживленную переписку, пока 9 июля 1925 года Гайзенберг не прислал своему другу окончательный вариант рукописи. Ответ Паули был, по-видимому, неожиданным для него самого: "Это утренняя заря (Das Morgenröte) квантовой теории". После такого ответа Гайзенберг показал статью Борну, с просьбой сообщить, что он о ней думает. Борн вспоминал:

> После представления работы (Гайзенберга) к печати я думал о гайзенберговском формализме и обнаружил, что он идентичен матричному исчислению, хорошо известному математикам.

---

*) Обозначение $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ изобрел Дирак.

*) Содержащая формулировку принципа Паули [**Pauli 1925**] была получена редакцией 16 января 1925 года.

19 июля Борн и Паули встретились на вокзале в Ганновере, куда они приехали на заседание Германского Физического Общества. Борн рассказал о матрицах, о трудностях обращения с ними. В частности, было непонятно, а что делать с недиагональными матричными элементами. Борн предложил Паули сотрудничество, но услышал саркастический ответ: "Мне известна Ваша склонность к длинным и хитрым формулам. Своей бесполезной математикой Вы только испортите физические идеи Гайзенберга". Однако, Борн не остался без ассистента. Вскоре к нему подошел молодой человек, представившийся выпускником-математиком Геттингенского университета и сообщивший, что его очень заинтересовал рассказ о новом формализме физики. Это был Паскуаль Иордан, ставший вскоре одним из главных действующих лиц в квантовом спектакле. Очень быстро появилось первое строгое изложение идей "матричной механики" [**Born, Jordan 1925**]. Эта статья была образцом "Геттингенской учености" (Gelerhsamkeitsschwall der Göttingen). В ней физикам фактически предлагалось изучить университетский курс линейной алгебры: собственные значения и собственные векторы, каноническое преобразование матриц, приведение матрицы к диагональному виду, Гильбертова бесконечномерная квадратичная форма, коммутационные соотношения. Впрочем, физика также не была забыта: в статье был предложен способ описания в новой теории электромагнитного поля. Статья произвела большое впечатление. Вот что писал Бор в статье, посвященной шестидесятилетию Гайзенберга [**Bohr 1961**]

> ...Гайзенберг после получения письма от Иордана выразил свое настроение примерно следующими словами: "Сейчас ученые геттингенские математики так много говорят об эрмитовых матрицах, а я даже не знаю, что такое матрица".

Смешно было заподозрить любимого ученика Зоммерфельда в подобном невежестве, но милая шутка гения довольно дорого ему обошлась: редкая публикация, рассказывающая об этом времени, обходится без упоминания о том, что Гайзенберг не знал, что такое матрица (при этом по умолчанию предполагается, что автор статьи это знает). Скорее всего, Гайзенберг не слишком охотно публично разговаривал о своих научных занятиях. Посетив Кембридж и сделав там 28 июля 1925 года доклад под названием "Зоология термов и ботаника Зеемана", он ни словом не упомянул о своем открытии. Название доклада не говорит о желании Гайзенберга пошутить над англичанами. Он употреблял сугубо технические термины. 17 июля 1925 года Борн писал Эйнштейну: "...мои молодые люди – Гайзенберг, Иордан, Хунд – блестящи. Мне часто приходится очень здорово напрягаться, чтобы поспевать за ходом их рассуждений. Так называемой зоологической спектроскопией (Term-Zoologie) они овладели в совершенстве". Этот отрывок был снабжен в 1965 году таким комментарием: "выражение *зоологическая спектроскопия* употреблялось нами для описания процесса накопления экспериментальных данных о спектральных линиях и их разложении на *термы*, которые, в соответствии с картиной боровских ступеней энергии, определяют возбужденные состояния атомов. Для найденных при этом числовых закономерностей не имелось какой-либо удовлетворительной теории. Их приходилось воспринимать как эмпирические факты, аналогично тому как в зоологии систематизируют виды" *). Доклад в Кембридже лишний раз иллюстрирует, что ученик

---

*) Чуть позже Хунд станет Линнеем атомной физики, обобщив данные зоологии в знаменитые "правила Хунда".

Зоммерфельда был и королем и ломовым извозчиком. Итак, Англия не сразу ознакомилась с новым открытием. Известие о статье Гайзенберга доставил в Кембридж Фаулер – физик, хорошо разбиравшийся в проблемах новейшей физики. Он познакомил с этой работой своего аспиранта Дирака. Ровесник Гайзенберга Дирак в это время практически в одиночестве искал пути к объяснению атомных явлений. Много лет спустя он так оценил прочитанную им статью [**Dirac 1968**]:

> Мы оба были молодыми людьми и решали одновременно одну и ту же проблему. Он добился успеха там, где я потерпел неудачу.

Однако вскоре Дирак быстро наверстал задержку на старте. Характерная для гайзенберговской схемы некоммутативность и своеобразное правило дифференцирования по времени привели Дирака к мысли о возможности описания эволюции системы с помощью дифференциальных уравнений для некоммутирующих величин (q-чисел), аналогичных уравнениям Гамильтона-Якоби, в которых скобки Пуассона заменены на коммутаторы [**Dirac 1925**]. Поскольку коммутаторы удовлетворяют всем тем соотношениям, которые определяют скобки Пуассона, то внутренняя непротиворечивость таких уравнений (уравнений Гайзенберга) не вызывает сомнений. Более того, поскольку скобки Пуассона в классической механике можно взять в качестве определения канонически сопряженных величин, то в квантовой механике динамические переменные можно определять в терминах коммутаторов между ними. Квантовая механика после этого становилась самодостаточной, не нуждающейся для своего определения в существовании механики классической.

На Паули статья Борна и Иордана произвела удручающее впечатление. Он писал Кронигу:

> Гайзенбергова механика вновь подарила мне надежды и вкус к жизни. Здесь еще нет решения загадки, но мы получаем возможность двигаться вперед. Но для этого нужно, прежде всего освободить Гайзенбергову механику от геттингенской учености и с наибольшей возможностью прояснить ее физический смысл.

Паули искренне считал, что Борну следовало бы заниматься своими кристаллическими решетками, и его беспардонного вмешательства в игры молодых он так и не простил до конца. К огорчению Паули его друг переметнулся к геттингенцам, стал писать совместные с ними статьи [**Born, Heisenberg, Jordan 1925**] и, наконец, разразился письмом:

> Твои постоянные поношения Копенгагена и Геттингена превратились в скандал. Ведь ты же можешь допустить, что мы не собираемся по своей злобе разрушить физику. Ты, может быть, прав, считая нас ослами, которые ничего путного в физике не сделают. Но в таком случае ты и есть главный осел, потому что не сказал этого вовремя.

Паули принял вызов, и уже 17 января 1926 года журнал "Zeitschrift für Physik" получил его статью "О спектре водорода с точки зрения новой квантовой механики"[**Pauli 1926**]. Это – одна из красивейших и значительнейших работ в этой области. Прежде всего, Паули вновь подтвердил свою феноменальную эрудицию. Он воспользовался существованием не слишком хорошо известного интеграла движения в кулоновом поле (в наше время его называют вектором Лапласа-Рунге-Ленца), определил его квантовый аналог и выразил гамильтониан системы в терминах суммы квадратов этого вектора и вектора момента импульса. После этого вычисление гамильтоновой матрицы, не представляло труда. Столь же просто была решена задача о поведении атома водорода во внешних полях. Эти чисто вычислительные проблемы, хотя и были решены необычайно изящно *), составляли лишь надводную часть айсберга. Паули, по существу, первым иследовал связь кратности вырождения уровней и существования некоммутирующих интегралов движения. Иначе говоря, он восстановил в правах, казалось бы утраченный с потерей понятия о траектории электрона, симметрийный анализ физических систем. После работ Паули создание новой квантовой механики можно было считать завершенным.

В результате уже 27 января 1926 Бор поделился с тем же Резерфордом радостью: причины его горестей растаяли в воздухе.

Говорят, что когда о новой теории рассказали Гильберту, он заметил, что матрицы обычно возникают при решении краевых задач теории дифференциальных уравнений [**Reid 1970**], поэтому стоило бы подумать о развитии теории в этом направлении. 22 декабря 1925 в редакцию журнала ”Zeitschrift für Physik” поступила статья Ланцоша ”О полевом представлении новой квантовой механики”[**Lanczos 1926**], в которой показывалось, что матрицы квантовой механики можно рассматривать как координатную реализацию интегральных операторов, действующих на некоторую непрерывную функцию. 6 января 1926 года этот же журнал получил статью Борна и Винера [**Born, Wiener 1926**], в которой предлагалось новое представление квантовой теории в терминах общего понятия линейных операторов. Авторы полагали, что эта точка зрения будет особенно полезна при изучении апериодических движений.

В современном изложении, когда матрицы рассматриваются как координатные реализации линейных операторов в подходящих функциональных пространствах, определению Гайзенберга можно придать такой вид: в математическом аппарате новой теории с динамическими переменными системы должны быть связаны линейные операторы. Анализируя правило сумм в теории излучения атомов, Гайзенберг дал определение импульса и координаты, которое можно сформулировать примерно так: этим величинам сопоставляются линейные операторы $\hat{p}$ и $\hat{x}$, удовлетворяющие перестановочному соотношению

$$[\hat{x}, \hat{p}] \quad \equiv \quad \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} \quad = \quad i\hbar.$$

ЮНОША ПЕРЕД СТАРЦАМИ

> **17** [19]И, взяв его, привели в ареопаг и говорили: можем ли мы знать, что это за новое учение, проповедуемое тобою?
> [20]Ибо что-то странное ты влагаешь в уши наши. Посему хотим узнать, что это такое?.. [32]... одни насмехались, а другие говорили: об этом послушаем тебя в другое время.
>
> **Деяния апостолов 17,19-20,32**.

Итак, открытие Гайзенберга одобрили Бор и всегда скептический Паули, оно привлекло внимание молодых талантливых физиков, но его еще должны были одобрить в Берлине. Берлинский университет был тогда центром физической науки в

---

*) Дирак, применявший при решении этой задачи обычную технику учета сферической симметрии [**Dirac 1926**], не сумел довести вычисления до конца.

Германии, а центром научной жизни университета был физический коллоквиум, на который обычно приходили профессора физики в полном составе. Весной 1926 года Гайзенберг предстал перед этим собранием.

> Поскольку ... мне впервые представилась возможность лично познакомиться с носителями славных имен, я не пожалел усилий, чтобы как можно яснее изложить понятия и математические основы новой теории, столь непривычные для тогдашней физики, и мне удалось пробудить интерес некоторых присутствовавших, особенно Эйнштейна. Эйнштейн попросил меня после коллоквиума зайти к нему домой с тем, чтобы мы могли подробно обсудить новые идеи.
>
> По пути он осведомился о ходе моей учебы и о моих прежних интересах в физике. Однако стоило нам войти в его квартиру, он тут же начал разговор с вопроса, касающегося философских предпосылок моей работы: "То, что Вы нам рассказали, звучит очень непривычно. Вы предполагаете, что в атоме имеются электроны, и здесь Вы, наверное, совершенно правы. Но что касается орбит электронов в атоме, то Вы хотите их совсем упразднить, несмотря на то, что траектории электронов в камере Вильсона можно наблюдать непосредственно. Не могли бы Вы несколько подробнее разъяснить причины столь странного подхода?"
>
> Орбиты электронов в атоме наблюдать нельзя... но по излучению, исходящему от атома при разрядке, можно непосредственно заключить о частотах колебаний и о соответствующих амплитудах электронов в атоме. Знание всех колебаний и амплитуд в математическом выражении - это ведь и по понятиям прежней физики может служить чем-то вроде эрзаца знания электронных орбит. Поскольку же разумно включать в теорию только величины, поддающиеся наблюдению, мне казалось естественным допустить лишь эти данные, так сказать, в качестве представителей орбит электронов.
>
> - Но неужели Вы всерьез думаете, - возразил Эйнштейн, - что в физическую теорию можно включать лишь наблюдаемые величины?
>
> - А разве не Вы сами, - спросил я в изумлении, - положили именно эту идею в основу своей теории относительности? Вы ведь подчеркивали, что нельзя говорить об абсолютном времени потому, что это абсолютное время невозможно наблюдать...
>
> - Возможно, я и пользовался философией этого рода, - отвечал Эйнштейн, - но она тем не менее чушь. Или, сказал бы я осторожнее, помнить о том, что мы действительно наблюдаем, а что нет, имеет, возможно, некоторую эвристическую ценность. Но с принципиальной точки зрения желание строить теорию только на наблюдаемых величинах совершенно нелепо. Потому что в действительности все ведь обстоит как раз наоборот. Только теория решает, что именно можно наблюдать. Видите ли, наблюдение, вообще говоря, есть очень сложная система...
> Я был крайне поражен такой позицией Эйнштейна, хотя его аргументы были мне вполне понятны, и поэтому я переспросил: "Идея, что теория есть, собственно, лишь подытоживание наблюдений по принципу экономии мышления принадлежит, вообще говоря, физику и философу Маху; причем не раз утверждалось, что Вы в теории относительности опирались решающим образом именно на эту идею Маха. Но сказанное Вами сейчас идет, по-видимому, в прямо противоположном направлении. Что же я теперь должен думать, или, точнее, что Вы сами думаете по этому вопросу?.."

Молодой провинциал явно не поддавался мэтру, похоже, что конец разговора был скомкан.

> - Хорошо, пусть будет так, сказал Эйнштейн; - как-нибудь через несколько лет снова поговорим об этом. ...Очень может быть, что Вы и я знаем о природе что-то свое. Но кого это может интересовать? Поэтому, если Ваша теория верна, Вы должны рано или поздно суметь рассказать мне, как ведет себя атом, когда он, излучая, переходит из одного стационарного состояния в другое.
>
> -Может быть, - ответил я нерешительно. - Однако мне кажется, что Вы слишком жестко пользуетесь языком. Впрочем, признаю, что все мои сегодняшние ответы имели пока характер пустой отговорки. Давайте тогда подождем и посмотрим, как атомная теория будет развиваться дальше.
>
> Тут Эйнштейн оглядел меня несколько критическим взглядом. "Почему Вы, собственно, так упрямо верите в Вашу теорию, когда многие основополагающие вопросы еще совершенно неясны?"
>
> Разговор о критериях истины в физике продолжался еще некоторое время, а потом я простился с Эйнштейном и встретился с ним лишь спустя полтора года на Сольвеевском конгрессе в Брюсселе, где теоретико-познавательные и философские основы нашей теории стали предметом чрезвычайно острых дискуссий.

Нам неизвестно, мог ли Эйнштейн видеть удаляющегося юношу, который уносил его покой. Он еще не знал, что оставшуюся жизнь будет опровергать уродливое создание дерзких молодых людей, что опровержения будут лишь способствовать утверждению новой науки, а работы, которые, должны подтверждать его точку зрения, будут только раздражать. Четверть века спустя он напишет:

> Видел ли ты, как Бом (как впрочем и де Бройль 25 лет тому назад) верит в то, что квантовую теорию можно детерминистки истолковать по-другому? Это, по-моему, дешевые рассуждения, но тебе, конечно, лучше судить.
>
> **Эйнштейн Борну 12.5.52**

В 1965 году Борн так комментировал замечание своего друга "...о теории Давида Бома":

> ...хотя она полностью соответствует впрочем его образу мышления, ему казалось, что простое детерминистское истолкование квантово-механических формул является "несостоятельным". Сегодня об этих попытках Бома (а равно и близких к ним - де Бройля) едва ли и говорят *).

---

*) Здесь Борн немного ошибся. Стремление пересмотреть квантовую механику "в духе Бома" не прекращается. Более того сторонники этого направления старательно вносят в свои списки и Эйнштейна. Белл [**Bell 1987**], процитировав лишь начало комментария Борна ("хотя она полностью соответствует его образу мышления..."), утверждает, что " Борн также причисляет Эйнштейна к сторонникам скрытых переменных". Иногда создается впечатление, что радетелей "наглядности" в квантовой механики отличает не только свобода в цитировании, но и задор в суждениях. Крупнейшая фигура этого направления – Белл – в молодости прочитал книгу Бома, а фон Неймана прочитать не мог, потому что перевода "Математических основ квантовой механики" на английский еще не было. Наконец друг Белла, говорящий по немецки, ему эту книгу прочитал [**Jammer 1974**]. Теперь против Ильи Муромца устоять не мог никто. " Доказательство фон Неймана (о невозможности скрытых параметров) – если вы за него возьметесь – развалится на части. В нем ничего нет. Это не ошиб-

Сам же Эйнштейн спустя два десятилетия так подвел итоги споров:

> Для задуманного в твою честь сборника я написал "физическую" детскую песенку, которая немножко смутила Бома и де Бройля. Она имеет целью показать ненужность твоей статистической интерпретации квантовой механики... Может быть, это доставит тебе удовольствие. Нам всем, видимо, суждено отвечать за свои мыльные пузыри. Именно этот, "не играющий в кости Бог" предопределил, что на меня обижены не только "квантовые теоретики", но и верующие *атеистической церкви.*
>
> **Эйнштейн Борну 12.10.53**

СМЕРТЬ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ?
ШРЕДИНГЕР. 1926 ГОД

7 ^{15}Берегитесь лжепророков...^{16}По плодам их узнаете их.
Евангелие от Матфея.

Итак, квантовая механика торжествовала, однако, 27 января 1926 в журнал "Annalen der Physik" поступила статья Шредингера "Квантование как задача о собственных значениях" *), содержащая его знаменитое дифференциальное уравнение, которое возвращало к надежде сохранения идеи непрерывности и в атомном мире. Немедленно возник термин "волновая механика" – динамическая схема, в которой свойства частиц связывались с "волнами материи", которые были обязаны своим появлением гениальной догадке де-Бройля [**de Broglie 1925**]

О возникшем брожении умов лучше всего узнать от очевидцев. Вот как описывал это время Гайзенберг.

> В конце летнего семестра 1926 года Зоммерфельд пригласил Шредингера сделать сообщение о своей новой теории *)... В этот семестр я снова работал в Копенгагене и при исследовании атома гелия освоил методы Шредингера **)...

Особую важность семинару придавало появление живого классика – руководителя Института экспериментальной физики Мюнхенского университета Вильгельма Вина, крайне скептически настроенного в отношении зоммерфельдовской "атомистики".

> ... Мы были восхищены тем, что с решенными прежде задачами квантовой механики удалось изящно и просто расправиться обычными математическими методами. Но в заключение Шредингер заговорил о своем истолковании квантовой механики, в которое я поверить не мог. В ходе последовавшей дискуссии я высказал свои замечания, особенно указав на то, что шредингеровская трактовка лишает возможности понять даже закон излучения Планка. Мне однако не повезло с критикой. Вильгельм Вин очень резко ответил, что, хотя ему понятны мои

ка, это глупость! Можете так сослаться на меня: доказательство фон Неймана не ошибочное, оно глупое." (Интервью Белла, 1988 г. Цит. по [**Mermin 1993**])

*) Это – первая из цикла статей [**Schrödinger 1926a,b,c,d,e**].

*) Доклад состоялся 23 июля 1926 года и назывался так: "Фундаментальные идеи волновой атомной физики".

) Работа Гайзенберга "О спектрах атомных систем с двумя электронами [Heisenberg 1926**] поступила в редакцию Zeitschrift für Physik 24 июля 1926 года.

> сожаления по поводу того, что теперь с квантовой механикой покончено... но упомянутые мною трудности, без сомнения, будут разрешены Шредингером в самое ближайшее время. В своем ответе Шредингер не был столь категоричен, однако и он остался при убеждении, что теперь разрешение всех перечисленных мною проблем в духе его подхода - только вопрос времени. Своими аргументами я уже ни на кого не смог произвести впечатления. Даже благоволивший ко мне Зоммерфельд не смог устоять перед убедительной силой шредингеровской математики.

Профессор Вин, по-видимому, был доволен зрелищем поражения выскочки, которому он несколько лет назад не хотел ставить положительной оценки на докторском экзамене по физике. Наконец-то справедливость восторжествовала. Науку двигают вперед серьезные эрудиты, а самонадеянных юнцов, рано или поздно поставят на место. Вин был не одинок в "решительности и строгости" суждений.

Он не был даже первым. Шредингер еще до опубликования статьи разослал ее текст в рукописи наиболее именитым германским физикам. В результате уже 19 апреля 1926 года один из адресатов – Эйнштейн писал Шредингеру: "Замысел Вашей работы свидетельствует о подлинной гениальности".

Правда, тут же выяснилось, что Эйнштейн не совсем правильно прочитал формулы Шредингера и под присланным ему уравнением он понимал нечто другое, но это не поколебало восторженной оценки присланной работы. Письмо Эйнштейна к Шредингеру от 26 апреля до некоторой степени проясняет причины восторга:

> Я убежден, что вашей формулировкой условий квантования Вы добились решающего успеха. Я также убежден, что путь, избранный Гайзенбергом и Борном, уводит в сторону.

Судя по дальнейшей переписке (и не только с Эйнштейном) Шредингер вполне разделял как приговор Эйнштейна квантовой механике, так и убеждение, что в его статье создана новая теория. Правда, вскоре выяснилось, что квантовая механика скорее жива, чем мертва. Третья статья Шредингера из его цикла называлась: "Об отношении квантовой механики Гайзенберга-Борна-Иордана к моей" [**Schrödinger 1926c**]. Во введении к ней говорилось, что

> выявлена весьма тесная внутренняя взаимосвязь гайзенберговской квантовой механики и моей волновой механики. С формальной точки зрения ее, пожалуй, следует рассматривать как тождество (обеих теорий).

Однако это не поколебало уверенности первых адресатов Шредингера в том, что полученные им письма содержали новую теорию.

Что же содержала первая статья Шредингера, что вызывало восторг классиков? Ведь сам Планк писал Шредингеру 2 апреля 1926 года:

> Большое спасибо за отдельный оттиск. Читая Вашу статью с тем же напряжением, с каким любопытный ребенок выслушивает развязку загадки, над которой он долго мучился, радуюсь красотам, раскрывающимся перед моими глазами.

Правда и Планк нашел в статье описки, на этот раз настоящие:

> Я хотел бы только устранить маленькую эстетическую ошибку. Старик Якоби, при всем интересе, несколько огорчился бы изменению его фамилии.

Шредингер, написавший Jacobi через "k" отвечал Планку:

> Очень стыдно мне за ужасное "k", и я немедленно написал об этом в типографию; надеюсь, что удастся еще исправить. Благодарю Вас много раз – черт знает, как я с железной последовательностью исказил это священное имя в пяти местах. Это для меня ужасно тягостно.

Обратимся, наконец, к самой статье. В ней содержится ссылка на старые правила квантования Зоммерфельда (но не правила Гайзенберга-Борна-Иордана):

> Обычно форма квантовых правил связана с уравнением в частных производных Гамильтона
>
> $$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) \quad = \quad E. \qquad (1)$$

Итак, со священным именем обошлись, как обычно обходятся со священными именами: его просто убрали из названия своего собственного уравнения. Далее в статье следовало:

> ...положим
>
> $$S \quad = \quad \hbar \ln \Psi.$$
>
> Таким образом получаем уравнение
>
> $$H(q, \frac{\hbar}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial q}) \quad = \quad E. \qquad (1^{'})$$
>
> Мы не будем искать решение уравнения $(1^{'})$, а поставим следующую задачу. При пренебрежении изменениями массы уравнение $(1^{'})$ можно всегда свести, по крайней мере в случае одноэлектронной проблемы, к следующему виду: квадратичная форма от функции Ψ и ее первых производных равна нулю.
>
> Ищем такую действительную во всем конфигурационном пространстве однозначную ограниченную и всюду дважды дифференцируемую функцию Ψ, которая дает экстремальное значение интегралу от упомянутой квадратичной формы, распространенной по всему конфигурационному пространству. Эта вариационная проблема и заменяет у нас квантовые условия.

В случае задачи Кеплера уравнение $(1^{'})$ записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi^2 = 0, \qquad (1^{''})$$

а предложенная вариационная задача принимает вид

$$\delta \int\int\int dxdydz \Big[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi^2\Big] = 0. \qquad (3)$$

> Следовательно, должно быть, во первых, справедливо уравнение
>
> $$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi = 0, \qquad (4)$$
>
> и, во-вторых, должен равняться нулю распространенный по всей бесконечно удаленной замкнутой поверхности интеграл
>
> $$\int df \delta \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad = \quad 0. \qquad (5)$$

Итак, есть два уравнения - уравнение Гамильтона-Якоби $(1^{''})$, которое автор решать отказался, и уравнение вариационного принципа (4). Решения этого уравнения в настоящее время хорошо известны всем физикам, во многом благодаря блестящему анализу Шредингера *). Однако, что же делать с уравнением $(1^{''})$? Ведь отказ решать его не означает, что оно не имеет решений, а эти решения не имеют никакого отношения к решениям вариационного принципа. Между тем, решения уравнения (4) заведомо не удовлетворяют уравнению $(1^{''})$. Таким образом смысл вариационного принципа (3) пока не объяснен. Отсутствие связи между уравнением Гамильтона-Якоби и вариационным принципом (3) не было тайной для Шредингера, поскольку 28 февраля 1926 года статья была снабжена Добавлением при корректуре:

> В случае классической механики консервативной системы можно сформулировать нашу вариационную задачу изящнее, чем это было сделано, без непосредственной связи с уравнением Гамильтона... (ср.: *Гиббс.* Статистическая механика). Значение функции Ψ должно придавать "интегралу Гамильтона"
>
> $$\int d\tau \Big[\hbar^2 T\Big(q, \frac{\partial \Psi}{\partial q}\Big) + \Psi^2 V\Big] \qquad (23)$$
>
> стационарное значение при дополнительном нормирующем условии
>
> $$\int \Psi^2 d\tau \quad = \quad 1. \qquad (24)$$

Заметив, что уравнение (1) соответствует именно "случаю классической механики консервативной системы", остается лишь констатировать, что оба вариационных принципа - как (3) так и (23),(24)- приводят к уравнению для собственных векторов "матрицы энергии" квантовой механики в особой формулировке. Шредингер убедился в этом в третьей статье цикла. Не вдаваясь в детали, сформулируем не слишком строго чисто математический факт: если считать матрицу энергии координатной реализацией оператора Гамильтона в таком гильбертовом пространстве, где матрица координаты реализует оператор умножения функции на значение ее аргумента, то решение уравнения (3) будет собственным вектором оператора энергии. Такая постановка задачи несомненно представляет собой значительный шаг в развитии формализма квантования, но *пока Ψ-функция представляет собой лишь собственный вектор оператора энергии. Прямой физический смысл имеют лишь его собственные числа, собственные векторы пока можно рассматривать лишь как некоторые вспомогательные величины.*

Однако Шредингер решил придать Ψ-функции никоим образом не следующий из логики статьи физический смысл:

> Довольно естественно связывать функцию Ψ с некоторым колебательным процессом в атоме, в котором реальность электронных траекторий в последнее время неоднократно подвергалась сомнению.

Трудно понять, *как можно сказать что-либо о развитии физического процесса во времени, рассматривая не зависящие от времени уравнения*, но, скорее всего, именно этот пассаж в статье произвел впечатление на патриархов, уставших от "атомистики". Практически никто из них (кроме, может быть, Лоренца) не захотел заметить,

---

*) Правда, в статье содержится скромная сноска: "Я очень благодарен Герману Вейлю за его помощь в решении уравнения...". Вейль был одним из создателей спектральной теории дифференциальных операторов.

что статья не содержит новой теории и что еще не разу в истории физики формальная замена переменной в дифференциальном уравнении не приводила к появлению нового материального поля, а ведь именно такую интерпретацию искал Шредингер для своей функции Ψ. Патриархам непостижимым образом отказывал здравый смысл. Ведь каждый из них знал, что

> ...никто к ветхой одежде не приставляет заплат из небеленой ткани, ибо вновь пришитое отдерет от старого, и дыра будет еще хуже.
>
> Евангелие от Матфея **9**.16

Можно думать, Шредингер искренне считал, что он создал новую теорию атомных явлений. Во всяком случае, это вполне объясняет упорное нежелание замечать предшественников. В его статье нет ссылок ни на Гайзенберга, Борна и Иордана, и даже на Паули, который уже решил задачу Кеплера. Нет ссылок и на Ланцоша, чья статья, казалось бы, имеет непосредственное отношение к рассматриваемой проблеме. Ланцош будет упомянут лишь в подстрочном примечании третьей статьи цикла:

> Аналогичные соображения высказывает К.Ланцош в одной недавно появившейся интересной заметке..., в которой точно также уже содержится ценное осознание того обстоятельства, что гайзенберговская атомная динамика может быть истолкована в континуальном духе. Однако в остальных отношениях работа Ланцоша имеет с настоящей работой меньше общего, чем это может показаться на первый взгляд.

Это не совсем так. 31 мая 1926 года, т.е. еще до опубликования третьей статьи Шредингера (она поступила в редакцию 10 мая) в редакцию Известий Национальной Академии Наук США поступила статья Карла Эккарта: "Решение задачи о простом осцилляторе сочетанием методов теорий Шредингера и Ланцоша" [**Eckart 1926**].

Ссылка на Гайзенберга появилась во второй статье цикла:

> Я не могу здесь обойти молчанием то обстоятельство, что сейчас делаются попытки устранения трудностей квантовой теории со стороны Гайзенберга, Борна, Иордана и некоторых других выдающихся ученых, причем благодаря значительности достигнутых успехов нельзя сомневаться в том, что полученные результаты содержат по крайней мере известную долю истины. Однако по применямым методам предлагаемая попытка решения проблемы настолько отлична от подхода Гайзенберга, что мне не удалось найти звено, связующее эти два способа.

В этой статье цикла Шредингер, стараясь подкрепить свои идеи, подробно излагает оптико-механическую аналогию, открытую Гамильтоном. Но эта аналогия, во-первых, касалась геометрической оптики и, во-вторых, была полностью основана на понятиях классической механики. Таким образом, Шредингер пытается построить новую науку, лишь дополнив вполне законченную логическую схему некоторыми, к тому же не совсем ясными конструкциями.

Насколько неясно представлял Шредингер смысл своей собственной Ψ - функции, свидетельствует такое происшествие. Поскольку неудобно подставлять в уравнение Гамильтона-Якоби логарифм комплексного числа, Шредингер допустил возможность того, что Ψ - функция может быть комплексной лишь в четвертой статье цикла. Незадолго до этого он писал Лоренцу (письмо от 6 июня 1926 года):

> Неприятно – против этого даже следует возражать – применение комплексных чисел. Ψ – все-таки реальная функция.

Уже говорилось, по-видимому, из патриархов физики только Лоренц ясно сознавал, что существующее к тому времени стационарное уравнение Шредингера не принесло новой теории:

> Предположим, что фундаментальное уравнение, из которого выводится волновое уравнение, известно.

Лоренц Шредингеру 27.5.26

Фундаментального уравнения к этому времени действительно не существовало и его формулировка принесла подлинную муку. Во второй статье цикла во исполнение обещанного открытия колебательного процесса говорилось:

> ...для волновой функции Ψ имеет место уравнение
>
> $$div(grad\Psi) - \frac{1}{u^2}\Psi = 0,$$
>
> выполняющееся для процессов, зависимость которых от времени определяется множителем $e^{2\pi\nu i t}$.

У Шредингера не было никаких имеющих физический смысл доводов, которые позволили бы обосновать это уравнение, поэтому он избирает чисто формальный и совершенно фантастический способ получения уравнеия, содержащего время, с помощью удаления постоянной интегрирования из статического уравнения. В четвертом сообщении утверждалось, что волновые уравнения имеют вид

$$\triangle\psi - \frac{2(E-V)}{E^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\triangle\Psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E-V)\Psi = 0.$$

Первое из этих уравнений выполняется лишь для процессов с определенным значением E, и Ψ зависит от времени только через периодический множитель

$$\Psi \sim Rexp\Big(\pm\frac{2\pi i E t}{h}\Big). \quad (*)$$

Это требование эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad = \quad -\frac{4\pi^2E^2}{h^2}\Psi.$$

Исключение E приводит к уравнению

$$\Big(\triangle - \frac{8\pi^2}{h^2}V\Big)^2\Psi \quad + \quad \frac{16\pi^2}{h^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad = \quad 0. \quad (**)$$

> Этому уравнению должна удовлетворять каждая функция Ψ, при произвольном E, зависящая от времени в соответствии с (*), а следовательно, и каждая функция Ψ, разложимая в ряд Фурье... Уравнение (**) поэтому единственное и общее волновое для полевого скаляра Ψ.
>
> Легко видеть, что оно представляет собой уравнение колебаний мембраны очень простого типа с производными по координатам четвертого порядка и имеет вид, часто встречающийся в многочисленных задачах теории упругости.

Здесь немедленно выясняется, что предложенное уравнение в случае неконсервативных систем приводит к большим сложностям. Поэтому предлагается другой путь:

> Не следует повышать порядок волнового уравнения до четвертого для того, чтобы исключить из него параметр энергии. Для того, чтобы уравнение (**) правильно описывало физические явления, можно выразить требуемую зависимость Ψ от времени вместо соотношения (*) через
>
> $$\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad = \quad \pm\frac{2\pi i}{h}E\Psi.$$
>
> Это приводит к одному из уравнений
>
> $$\triangle\Psi - \frac{8\pi^2}{h^2}V\Psi \quad \pm\frac{4\pi}{h}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad = \quad 0.(***)$$
>
> Мы потребуем, чтобы комплексная волновая функция удовлетворяла одному из этих уравнений. Так как сопряженная комплексная функция Ψ^* не удовлетворяет этому уравнению, то следует рассматривать действительную часть комплексной волновой функции Ψ как волновую функцию (если это необходимо).

Логика обращения с волновой функцией вызывают в памяти незабвенного Градобоева. Правда, в дальнейшем при описании неконсервативных систем твердо избирается уравнение (***). Если вспомнить об уже существующих уравнениях Гайзенберга, можно понять, что иного выбора не было уже год назад.

После этого выясняется, что из уравнения (***) вытекает некоторое уравнение непрерывности. В таких случаях обычно оказывается возможным определить некоторые плотности распределения и плотности потока. Шредингер приступает к выяснению этого вопроса. Естественно звучит утверждение, что произведение $\psi\psi^*$ "представляет собой плотность электричества". При этом никак не комментируется то обстоятельство, что ранее в статье, обсуждавшей связь "механики Гайзенберга-Борна-Иордана и моей" говорилось следующее: в случае атома водорода

> механическое скалярное поле ψ задается посредством ряда дискретных собственных функций
>
> $$\Psi \quad = \quad \sum\nolimits_k c_k u_k(x) e^{\frac{2\pi i E_k t}{h}},$$

а в качестве "пространственной плотности электричества" предлагалась действительная часть выражения $\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$. Этот выбор делал излишней дискуссию в четвертом сообщении цикла, ну а во втором автора мало смущало, что выбранная

> ...пространственная плотность, если ее проинтегрировать по всему пространству, оказывается... равной нулю, а не конечной, не зависящей от времени величиной, нормированной на заряд электрона, какой она должна быть.

Цикл работ Шредингера принято относить к величайшим достижениям человеческой мысли.

> Создание им "волновой механики", занявшее несколько месяцев и выразившееся в публикации его четырех классических статей в журнале "Annalen der Physik", нельзя не рассматривать иначе, как яркую вспышку гения. В этих четырех статьях волновая механика представлена в законченной форме, причем они содержали и достаточное количество совершенно убедительных приложений.
>
> [**Heitler 1961**]

Сколько-нибудь внимательное чтение этих статей заставляет предположить, что удивительная скорость публикаций определялась тем обстоятельством, каждая из них содержала необоснованные анонсы, которые в следущей статье заменялись новыми. Волновая механика в этих статьях не только не была закончена, но и даже точно сформулирована. Феномен Шредингера, скорее всего, объясняют совсем другие аналогии.

Подобно тому, как угроза гибели Франции во время столетней войны заставила множество французских девушек поверить в то, что настали дни исполнения пророчества о деве, "которая спасет Францию", бурные события в физике в начале 20-го века вызвали деятельность удалых людей, которые творили физику в кратчайшее время с помощью подручных средств. Хрестоматийным примером здесь стало имя Руппа – физика, который очень быстро выполнил множество тонких экспериментов, каждый из которых был нобелиальным. Не остался равнодушным к пению Лорелейи и Эйнштейн [**Einstein 1926**]:

> ...Я указываю эксперимент, *отрицательный* результат которого был бы несовместим с классической волновой теорией. Этот эксперимент я задумал давно. Но только работа Е. Руппа дала мне уверенность в том, что эксперимент действительно можно осуществить на практике.

Карьера Руппа закончилась после того, как его лабораторию Руппа посетили ведущие физики Германии и вынесла рекомендацию не ссылаться более на публикации Руппа. Шредингер был намного удачливее коллеги-экспериментатора. Немалую роль в этом, по-видимому, сыграло и то обстоятельство, что его манеры были намного обходительнее, чем у юных учеников Зоммерфельда.

Вступая в переписку с Эйнштейном, Шредингер проявил заинтересованность инспирированной Руппом работой. Кроме того, классику было сообщено, что

> ... очень позабавило меня Ваше очаровательное объяснение меандров. Случайно несколько дней тому назад моя жена расспрашивала меня о "феномене чашки чая", но я не сумел дать разумного объяснения *). Она говорит, что теперь никогда не сможет помешивать чай, не вспомнив о Вас.
>
> Вас приветствует, глубокоуважаемый профессор,
> искренне преданный Вам Э. Шредингер.
>
> **Шредингер Эйнштейну 23.04.26**

Примеры из переписки с Планком блыи приведены раньше. Не удивительно, что Шредингеру удалось создать нечто в роде ордена уверенных в материальности Ψ-функции. Условием вступления в этот клуб была вера ("Како есть вера ваша?" – спрашивал еще Владимир Красное Солнышко), а одним из послушаний – нетерпимость к тем, дерзал указывать на противоречия веры. Таких примеров достаточно в тех немногих приведенных здесь выдержках из писем Шредингера. Подтверждением успешного распространения внедряемого стиля могут служить две выдержки из писем Эйнштейна. Вот письмо к Борну, написанное в 1922 году:

> Недавно я сел в лужу (эксперименты с излучением света каналовыми лучами). Но утешаю себя мыслью, что только мертвецы застрахованы от ошибок. Работы Бора внушают мне огромное уважение тем безошибочным инстинктом, которым они пронизаны.

---

*) Речь идет о том, что чаинки на дне чашки при помешивании собираются в середине

В 1928 году после вполне цивилизованной дискуссии на V-том Сольвеевском конгессе Эйнштейн сообщал Шредингеру:

> Философия успокоения Гайзенберга-Бора – или религия? – так тонко придумана, что представляет верующему до поры до времени мягкую подушку, с которой не так легко спугнуть его. Пусть спит.
>
> **Эйнштейн Шредингеру 31.5.28**

Вполне следуя этой традиции лидер современных противников Копенгагенской школы назвал доказательство фон Неймана о невозможности существования скрытых параметров "глупым".

При этом меньше всего Шредингер преуспел в толковании своего собственного изобретения: Ψ-функции. Главное(и великое) достижение Шредингера – открытие реализации операторов импульса и координаты как операторов дифференцирования и умножения. Это позволило создать мощный математический аппарат квантовой теории, где особенно выделяется созданная Шредингером (по образцу теории Релея) теория возмущений.

> Среди многих прекрасных результатов квантовой механики теория возмущений, развитая Шредингером, занимает выдающееся место. Она более проста, чем астрономическая теория возмущений классической механики и в своих приложениях не ограничивается проблемой двух тел.
>
> [**Sommerfeld 1956**]

Открытие Шредингера поставило вопрос об однозначности реализации как перестановочных соотношений Гайзенберга, так и его операторов

$$\hat{q}\psi(q) \quad = \quad q\psi(q), \qquad \hat{p}\psi(q) \quad = \quad -i\hbar\frac{d\psi}{dq}.$$

Точный математический анализ, прежде всего Вейля [**Weyl 1928**], показал, что эти вопросы можно решить только после привлечения дополнительного физического постулата *неприводимости*, запрещающего наличия в теории излишних переменных. На уровне физической строгости этот принцип можно сформулировать примерно так: если система описывается операторами $\hat{p}$ и $\hat{q}$, удовлетворяющим перестановочным соотношениям Гайзенберга, то любой оператор, коммутирующий и с $\hat{p}$ и с $\hat{q}$, должен быть кратен единичному.

> Постулат неприводимости позволяет нам заключить, что специальные операторы теории Шредингера являются следствиями перестановочных соотношений Гайзенберга.
>
> [**Weyl 1928**]

Строгое доказательство этого утверждения для систем со многими степенями свободы дал фон-Нейман [**v.Neumann 1928**].

В 1926 году важность требования неприводимости была совершенно неясна. Фундаментальное значение этого принципа было осознано только в 1927 после дискуссий Бора и Гайзенберга, приведших к формулировке *принципа дополнительности.*

Чтобы закончить обсуждение вопроса о соотношении "теории Шредингера" и "теории Борна-Гайзенберга-Иордана", подчеркнем еще раз, что "теории Шредингера" в 1926 году (как и в последующие годы) просто не существовало. Было установлено, что перестановочные соотношения Гайзенберга можно реализовать в терминах операторов Шредингера, что действительно явилось выдающимся вкладом в квантовую теорию.

Уместно привести оценку схемы Шредингера, принадлежащую Вейлю - человеку, в немалой мере способствовавшего рождению этого направления [**Weyl 1928**]:

> Другой подход (т.е. отличный от схемы Гайзенберга) к квантовой механике был найден Л. де Бройлем и Шредингером. Этот подход кажется мне менее убедительным...

Все это выяснилось в общих чертах уже к концу 1926 года, но в середине лета казалось, что дни квантовой механики с ее "атомистикой" сочтены. В июле 1926 года Бор получил письмо Гайзенберга о неудачном исходе дискуссии. Поняв всю серьезность положения, он немедленно пригласил Шредингера в Копенгаген, чтобы обсудить во всех деталях вопросы толкования квантовой и волновой механики.

ШРЕДИНГЕР В КОПЕНГАГЕНЕ

> **13** ...люди, которые из видимых совершенств не могли познать Сущего и, взирая на дела, не познали Виновника, [2] а почитали за богов, правящих миром, или огонь, или ветер, или движущийся воздух, или звездный круг, или бурную воду, или небесные светила.
>
> **Премудрость Соломона 13, 1-2**

Описать скрытые за стенами дома Бора великие события можно лишь обратившись к помощи Гайзенберга.

> Дискуссия между Бором и Шредингером началась уже на вокзале в Копенгагене и продожалась ежедневно с раннего утра до поздней ночи. Шредингер остановился в доме Бора, так что уже по чисто внешним обстоятельствам в споре не могло быть никакого перерыва. И хотя Бор в обхождении с людьми обычно был крайне предупредителен и любезен, здесь он предстал фанатиком, не собирающимся делать ни шагу навстречу своему собеседнику или позволить ему хотя маленькую неясность. Едва ли можно передать, как страстно велась дискуссия с обеих сторон, сколь глубоко коренились убеждения, угадывавшиеся за произносимыми фразами как у Бора, так и у Шредингера. ...я могу ... предложить лишь очень бледное отражение тех бесед, в которых с напряженнейшей силой шла борьба вокруг интерпретации недавно достигнутого математического описания природы.

Недостаток места и времени не позволяет воспроизвести весь рассказ Гайзенберга, мы ограничимся лишь фразами, передающими суть высказываний оппонентов.

Шредингер: Вы должны все-таки понять, Бор, что вся ваша идея квантовых скачков ведет к бессмыслице.

Бор: Да, во всем, что Вы говорите, Вы совершенно правы. Но это еще не доказательство, что квантовых скачков не существует. Это доказывает только, что мы не можем их себе представить, т.е. что наглядные понятия, с помощью которых мы описываем события повседневной жизни и эксперименты прежней физики, недостаточны для изображения процессов квантового перехода.

Шредингер: Меня в данный момент пока не интересует точное описание движения электронов в атоме, но в конце концов надо же будет когда-нибудь выяснить, как они ведут себя в стационарном состоянии или при переходе из одного состояния в другое. ...математический формализм волновой или квантовой механики выглядят так, будто на эти вопросы не существует никакого разумного ответа. Но стоит нам сменить образ, т.е. сказать, что нет никаких электронов-частиц, а есть электронные волны материи, все начинает выглядеть иначе.

Бор: К сожалению это не так. Противоречия не исчезают, они только отодвигаются в другую область. ...вспомните хотя бы о термодинамическом равновесии между атомом и полем излучения, например об эйнштейновском выводе закона излучения Планка. Решающим для вывода этого закона является то, что энергия атома принимает дискретные значения и время от времени прерывисто изменяются...

Шредингер: Я не понимаю, почему нельзя надеяться, что использование учения о теплоте в теории волн материи приведет к хорошему объяснению формулы Планка.

Бор: Нет, на это надеяться нельзя. Ведь уже 25 лет известно, что означает формула Планка.

Шредингер: Если нельзя избавиться от этих проклятых квантовых скачков, то я жалею, что вообще связался с квантовой теорией.

Бор: А вот мы, со своей стороны, очень благодарны Вам за то, что Вы сделали, поскольку Ваша волновая механика с ее математической ясностью и простотой представляет огромный прогресс по отношению к прежним формам квантовой механики.

> Спор продолжался... часами днем и ночью, однако согласие достигнуто не было. Через несколько дней Шредингер заболел, вероятно из-за крайнего перенапряжения; жар и простуда заставили его слечь в постель. Фрау Бор ухаживала за ним, приносила чай и сладости, но Нильс Бор сидел на краешке кровати и внушал Шредингеру: "Вы все-таки должны понять, что...". К подлинному взаимопониманию и нельзя было прийти, поскольку ни одна из сторон не могла предложить полной и цельной интерпретации квантовой механики. Но мы, копенгагенцы, к концу этого визита все же почувствовали большую уверенность в том, что мы на верном пути. Одновременно мы, конечно, понимали, как трудно будет даже лучших физиков убедить в необходимости отказаться от пространственно-временного описания атомных процессов.

Итак, 1926 год, несмотря на множество битв, не принес торжества квантовой механике. Вот как представлял положение дел Эйнштейн:

> Квантовая механика заслуживает всяческого уважения, по внутренний голос подсказывает мне, что это не настоящий Иаков. Теория дает много, но к таинствам Старого она не подводит нас ближе. Во всяком случае я убежден, что он не играет в кости.

Эйнштейн Борну 4.12.26

Говоря о событиях 1926 года мы не упомянули о крупнейшнем: статистической гипотезе Борна. Этот пробел будет заполнен в следующем разделе.

$|\Psi|^2$ И $\Delta p \Delta q$– ЗЛОКОЗНЕННЫЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ БОРНА И ГАЙЗЕНБЕРГА

> Глубокоуважаемый господин тайный советник!
>
> Позвольте мне еще немного поговорить о физике. Я хотел бы знать, как судят в Берлине и особенности Вы сами о состоянии дел в квантовой теории.

> Верно ли то, как говорят физики – сторонники матриц и q-чисел, что волновое уравнение описывает лишь поведение статистической совокупности, аналогично тому, как это делает так называемое дифференциальное уравнение в частных производных Фоккера? Я охотно этому бы поверил, ибо это представление действительно намного более удобно, если бы я только мог успокоить свою совесть тем, что не столь уж легкомысленно так просто отделываться от трудностей. Думаю, что я прав в том, что сами Вы, в свое время лишь после тяжелой борьбы выдвинули первое основополагающее предположение о дискретности, т.е. ”квантовую теорию”, – это совершенно ясно вытекает из того, что Вы долгое время преследовали ”второй вариант”. Мне думается, что при вновь возникших теперь точках зрения необходимо снова возобновить эту борьбу с той же серьезностью. У меня нет чувства, что именно так поступают те, кто уже сегодня решительно утверждает: нужно придерживаться дискретного обмена энергии.
>
> В вероятностных представлениях Борна самое подозрительное для меня то, что при ближайшем их проведении (сторонниками этих взглядов), естественно, получаются удивительные вещи: вероятности событий, казавшихся независимыми наивному представлению, при их наложении не просто перемножаются, а ”интерферируют амплитуды вероятности” совершенно таинственным образом (конечно, именно так, как мои амплитуды волн). В одной самой свежей работе Гайзенберга даже мои, столь осмеянные волновые пакеты, наконец нашли соответствующую трактовку как ”пакеты вероятности”. Это особенно комично. Это можно выразить и так: вероятность Борна (точнее: квадратный корень из нее) – двухмерный вектор, и сложение должно проводиться векториально. Полагаю, что умножение еще сложнее.
>
> Засим, по божьей воле, умолкаю. Если, действительно, нужно постараюсь привыкнуть и к таким вещам.
>
> Целую руку Вашей глубокоуважаемой супруге...

Это – не цитата из Чехова, а письмо Шредингера, отправленное 4 июля 1927 года из Цюриха, своему ученому соседу Планку. Событиями, которые потрясло нравственные устои общества и потребовало мобилизации его здоровых сил, по-видимому, явились публикация в журнале Zeitschrift für Physik двух статей – Борна [**Born 1926**], поступившей в редакцию 21 июля 1926 года, и Гайзенберга [**Heisenberg 1927**], появившейся в редакции 23 марта 1927 года *).

Сам Борн оценивал свой результат как третью формулировку квантовой механики (Ich möchte versuchen, hier eine dritte Interpretation zu geben und ihre Brauchbarkeit an den Stoßvorgängen zu erproben). Не обсуждая справедливости этого утверждения, заметим, статья Борна содержала важнейшее для дальнейшего развития квантовой теории вероятностное толкование волновой функции.

Отправной точкой исследований Борна стало желание понять на новом уровне строгости смысл эйнштейновых призрачных полей, точнее говоря, замечание Эйнштейна о соотношении электромагнитного поля и световых квантов. Эйнштейн считал, что поле ”прокладывает путь” световым квантам. Эти поля определяют вероятность найти в системе квант, который переносит вдоль заданного пути импульс

---

*) Правда, появление такого письма можно связать с еще и с тем, что в 1927 году Планк ушел в отставку, избрав своим преемником Шредингера.

и энергию. Сами же поля, поскольку они – призрачные – не обладают ни энергией, ни импульсом. После того, как де Бройль установил аналогию между частицами и волнами, и была введена в обращение Ψ-функция, Борн предположил, что Ψ-функция может быть "призрачным", или, лучше сказать, "ведущим полем" (Führungsfeld) частицы. В это случае квадрат модуля фурье-образа Ψ-функции должен иметь смысл вероятности того, что частица в "состоянии Ψ" будет обладать импульсом, совпадающим с аргументом фурье-образа. Такое заключение не может вызвать особые возражения. Но если это так, то квадрат модуля самой Ψ-функции, будучи фурье-образом своего образа Фурье, должен иметь смысл плотности вероятности того, что координаты частицы равны аргументу этой функции. Борн сформулировал содержание своей работы следующим образом:

> ведущее поле представляется скалярной функцией Ψ, зависимость которой от координат всех частиц и от времени устанавливается уравнением Шредингера. Пути частиц определяется не столь точно, как энергии и импульсы. Их можно охарактеризовать лишь вероятностью, определяемой значением аргументов функции Ψ. Можно, несколько парадоксально, высказать следующее: движение частицы описывается в терминах распределения вероятности, но сама эта вероятность изменяется во времени причинным образом (это означает, что знание состояния во всех точках в некоторый момент времени определяет состояния во все последующие значения времени).

После того, как Ψ-функция получила вероятностную интерпретацию, нетрудно сформулировать правила вычисления чисел, которые можно толковать как средние значения физических величин. Предположим, что каким-то образом получено некоторое линейное дифференциальное уравнение (например, уравнение Шредингера), которому удовлетворяет Ψ-функция:

$$(\hat{T}\Psi)(x) \quad = \quad t\Psi(x).$$

Умножая обе части уравнения на $\Psi^*(x)$ и интегрируя, получим равенство

$$\int \Psi^*(x)(\hat{T}\Psi)(x)dx \quad = \quad \int t|\Psi(x)|^2 dx \quad = \quad t\int |\Psi(x)|^2 dx.$$

Если Ψ-функция нормирована на единицу, то $|\Psi(x)|^2$ имеет смысл плотности распределения переменной x. Правый интеграл в предыдущей строчке равен числу t, которое по смыслу равно некоторому точному значению величины T, с которой связан опрератор $\hat{t}$. Средний интеграл по смыслу равен равен среднему значению величины T, которое в данном случае равно своему точному значению. Равенство, связывающее эти величины с левым интегралом, показывает, как выразить среднее значение в другой форме. После этого можно отбросить условие, что Ψ – это собственный вектор оператора $\hat{T}$, и принять, как постулат, утверждение:

среднее значение величины T, с которой связан линейный оператор $\hat{T}$, вычисляется по формуле

$$\langle T\rangle \quad = \quad \int \Psi^*(x)(\hat{T}\Psi)(x)dx, \qquad \int |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

Каждое среднее значение зависит от двух величин – оператора $\hat{T}$, связанного с физической величиной, и независящей от этой величины Ψ-функции. Ее естественно связать с возможным состоянием системы. Непротиворечивость такого определения требует особого свойства квантовых состояний. Линейные операторы обладают свойством:

$$\hat{T}(c_1\Psi_1(x) + c_2\Psi_2(x)) \quad = \quad c_1\hat{T}\Psi_1(x) \quad + \quad c_2\hat{T}\Psi_2(x).$$

Если читать это равенство справа налево, требуя, чтобы все входящие в него функции связывались с каким-либо состоянием системы, то придется потребовать, чтобы состояния подчинялись *принципу суперпозиции*:

Если функции Ψ_1 и Ψ_2 соответствуют некоторым состояниям системы, то функция $c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$ также соответствует некоторому состоянию системы.

Получается, на первый взгляд, вполне удовлетворительная схема изложения квантовой механики, при которой прежде всего определяются волновые функции, постулируется принцип суперпозиции (с большими деталями, чем даны здесь). Она с теми или иными вариациями используется для введения в предмет в большинстве учебников.

> Эти утверждения составляют содержание так называемого *принципа суперпозиции состояний* – положительного принципа квантовой механики.

Ландау, Лифшиц 1989

Правда, именно при таком изложении квантовая механика становится мало похожей на классическую – сначала вводится понятие состояния, а затем уже все остальное. Классическая физика начинает с определения динамических переменных, и только потом переходит к понятию состояния.

Остается добавить, что принцип суперпозиции как самостоятельный принцип теории, становится излишним, если начать изложение квантовой механики с утверждения, что динамическим переменным должны соответствовать линейные операторы, действующие в гильбертовом пространстве. В этов случае принцип суперпозиции в определении области действия операторов.

В плодотворности своей точки зрения, Борн, пожалуй, менее, чем кого-нибудь, убедил своего друга Эйнштейна. Полемика продолжалась вплоть до 50-х годов. Борн писал Эйнштейну 4-го сентября 1950 года.

> Другое замечание относится к Ψ-функции... То, что Ψ описывает состояние *некой* системы – это только обиход речи (в английском переводе – To say that Ψ describes "state" of one single system is just a figure of speech"), как бывает в обиходной жизни: "Я (человек в возрасте 67 лет) ожидаю, что проживу 4-3 года". То же самое и высказывание об отдельной системе, однако бессмысленное с точки зрения эксперимента. Ведь подразумеветси конечно другое: возьми множество индивидуумов, каждому из которых 67 лет и подсчитай, какой процент из них проживет заданный срок. Именно таким образом я всегда понимаю интерпретацию $|\Psi|^2$.

Борн скорее неправ, чем прав. В его рассуждениях содержится типичная небрежность при определении понятий в "обиходной жизни". Ведь начало фразы о сроке жизни подразумевает наличие примерно таких сведений: "Я, профессор университета, проведший жизнь в среднем достатке, не болевший серьезными болезнями..." (а не: "Я, рудокоп на алмазной шахте в Намибии, мои предки всегда недоедали и были подвержены тяжелым тропическим болезням..."). Именно такого рода сведения выделяют отдельную систему и определяют статистику продолжительности жизни, и аналогичные сведения определяют набор квантовых чисел, выделяющих чистое состояние, которому соответствует волновая функция. Волновая функция определяет не абсолютную, а в некотором роде условную вероятность. По этой причине Гайзенберг также придерживался такой точки зрения:

> Я предпочитал исходить из того, что квантовая механика в тогдашней ее форме уже предписывала физическую интерпретацию для некоторых ее величин, – например для средних временных значений энергии, электрического момента, импульса..., по-видимому, уже не оставалось никакой свободы физических интерпретаций. Мне скорее казалось, что на основе уже достигнутой частной интерпретации есть возможность посредством четких логических умозаключений прийти и к верной общей интерпретации. По этой... причине – кстати сказать, совершенно напрасно – я довольно неодобрительно отнесся к работе Борна, самой по себе превосходной, где он трактовал процессы столкновения по методу Шредингера, выдвигая гипотезу, что квадрат шредингеровской волновой функции выражает меру вероятности нахождения электрона в данном месте. Я считал совершенно правильным тезис Борна, однако мне не нравилось, что он выглядел так, будто здесь еще сохранялась некоторая свобода истолкования. Я был убежден, что тезис Борна необходимым образом вытекает из уже установленной интерпретации специальных величин квантовой механики. Это убеждение еще более усилилось благодаря двум весьма плодотворным математическим исследованиям Дирака [**Dirac 1926**] и Иордана [**Jordan 1926**].

Можно понять причину того, что Гайзенберг недооценил эту работу: работы Иордана и Дирака фактически заложили основы математической формулировки квантовой механики как теории операторов в гильбертовом пространстве. Правда, как обычно, дело не обошлось без Паули. Иордан в своей статье упоминает о письме Паули *), в котором Паули предложил свое толкование Шредингеровой волновой функции: если функция $\phi_n(q)$ – нормированное на единицу решение (стационарного) уравнения Шредингера, то $|\phi_n(q)|^2dq$ – это вероятность того, что координата частицы принимает значения в интервале $(q, q+dq)$, при условии, что ее состояние определяется квантовым числом n. Паули, как сообщил Иордан, изобрел и более общую конструкцию: если q и β – две эрмитовы квантовомеханические величины, существует такая функция $\phi(q,\beta)$, что величина $|\phi(q_0,\beta_0)|^2dq$ является (относительной) вероятностью того, что при заданном значении величины β – β_0 – значения величины q, лежат в интервале (q_0, q_0+dq). Паули назвал функцию $\phi(q,\beta)$ *амплитудой вероятности* (Wahrscheinlichkeitsamplitude) и сформулировал условия, которым она должна удовлетворять:

1. Функция $\phi(q,\beta)$ не зависит от динамических свойств системы, устанавливая чисто кинематические соотношения между величинами q и β.

2. Если $\psi(Q_0,q_0)$ – амплитуда вероятности, вычисленная при значениях $Q=Q_0$ и $q=q_0$, то амплитуду $\Phi(Q_0,\beta_0)$ можно представить как интеграл

$$\Phi(Q_0,\beta_0) \quad = \quad \int \psi(Q_0,q)\phi(q,\beta_0)dq,$$

---

*) Письмо датировано 12 апреля 1926 г. и опубликовано Ван дер Варденом [**Van der Waerden 1973**]

в котором интегрирование по q распространяется по области определения этой переменной.

Иначе говоря, именно Паули ввел в квантовую механику идеи гильбертова пространства. Правда, систематическое использование этих понятий началось с работ Гильберта и фон Неймана

Однако среднестатистического физика формулировка Борна, по-видимому окончательно склонила в сторону квантовой механики: есть что-то, удовлетворяющее уравнению второго порядка (вместо t стоит x, но это не важно), возведем это что-то в квадрат и получим вероятность координаты. С тем, что частица в квантовой механике оказывается размытой, примириться было легче, чем с какими-то "волнами материи". О смысле Ψ-функции особенно и думать-то не надо. Поэтому, хотя построения Борна должны были подорвать толкование Шредингера в "его собственных обозначениях", этого не случилось. Этому в значительной мере способствовала связь Ψ-функции Борна с призрачными полями Эйнштейна, которая могла навести на мысль о связи этой функции с некоторыми материальными полями. Работа Борна нашла всеобщее признание, но может быть, именно кажущаяся простота толкования надолго задержала официальное признание заслуг его изобретателя. Это не способствовало добродушию Борна.

> В области квантовой механики, которую ты не жалуешь, все славопочитание перешло на Гайзенберга и Шредингера. При этом Гайзенберг даже не знал, что такое матрица (он был моим ассистентом, и я об этом могу судить). Кроме того, он был у нас в декабре – милый и умный, как когда-то, но заметно "нацистки" настроенный.

Борн Эйнштейну 31.3.48

Готовя переписку с Эйнштейном к изданию Борн (уже будучи Нобелевским лауреатом) пытался смягчить чудовищные обвинения:

> Мое суждение было, вероятно, неправильным. Он (Гайзенберг)
> разъяснил мне однажды, какими были его работы в годы гитлеризма и каковы были следовавшие из них отношения с правительством. Тем временем в 1969 г. появилось объективное изложение немецких работ по расщеплению ядра в годы войны, прежде всего английского историка Давида Ирвинга *), в которой находят подтверждение высказывания Гайзенберга и оправдывается его поведение.

По-видимому в ноябре 1954 года Борн получил поздравление:

А. Эйнштейн
Мерсерстрит, 112, Принстон, Нью-Джерси, США
без даты

> Дорогой Борн!
>
> Я был очень рад тому, что ты хоть и с непостижимым опозданием получил Нобелевскую премию за твой фундаментальный вклад в современную квантовую теорию. Твоя последовательная статистическая интерпретация описания сыграла решающую роль в прояснении понимания.
>
> Сказанное представляется мне совершенно несомненным, несмотря на нашу безрезультатную переписку по этому вопросу.
>
> Ну, а к тому же деньги в твердой валюте, они тоже не лишни, когда отправляешься на покой.

---

*) [**Ирвинг 1969**]

С сердечным приветом и пожеланиями тебе и твоей жене.

Твой А.Эйнштейн

Борн комментировал поздравление довольно сдержанно.

> То, что мне не была присуждена Нобелевская премия одновременно с Гайзенбергом (1932 г.), причинило мне в то время боль, несмотря на получение прекрасного письма от Гайзенберга, но это чувство было преодолено, поскольку я понимал превосходство Гайзенберга надо мной... Тем более неожиданным и радостным было известие о присуждении премии еще и потому, что эта премия присуждена мне не за мой вклад в совместную с Гайзенбергом и Иорданом работу, а за предложенное мною статистическое толкование шредингеровской волновой функции. То обстоятельство, что это признание пришло с опозданием в 28 лет, не удивительно, поскольку все великие физики первого периода развития квантовой теории были противниками статистического толкования (Планк, де Бройль, Шредингер и – последний в их числе – сам Эйнштейн). Шведской академии было не просто выступить против этих влиятельных голосов, так что мне оставалось ждать до тех пор, пока мои идеи не станут достоянием физиков, – не без помощи Нильса Бора и его копенгагенской школы, которой почти повсеместно сегодня приписывают созданное мною направление идей в физике.

Однако, вернемся к 1927, когда награды только ожидали участников и квантового строительства, и статьи оценивались, главным образом, по их научной ценности.

Результат Борна, как к нему ни относиться, стал отправной точкой рассуждений Гайзенберга. Пусть волновая функция ("ведущая функция" Борна или более близкое Гайзенбергу выражению "амплитуда вероятности" (Wahrscheinlichkeitsamplitude) – термин, навеянный Гайзенбергу работами Дирака [**Dirac 1926**], [**Dirac 1927**] и Иордана [**Jordan 1926**]) частицы с одной степенью свободы обозначается символом $S(\eta, q)$, где q – координата частицы, а η – параметр, выделяющий данную волновую функцию. Если

$$S(\eta,q) \quad \sim \quad exp\Big(-\frac{(q-q^{'})^2}{2{q_1}^2}-\frac{i}{\hbar}p^{'}(q-q^{'})\Big),$$

где параметр q_1 – это неопределенность координаты, $q^{'}$ – ее среднее значение, то плотность распределения координаты равна

$$S^*S \quad \sim \quad exp\Big(-\frac{(q-q^{'})^2}{{q_1}^2}\Big).$$

Амплитуда вероятности импульса определяется выражением

$$S(\eta,p) \quad = \quad \int S(\eta,q)S(q,p)dq,$$

где

$$S(q,p) \quad = \quad exp\Big(\frac{ipq}{hbar}\Big).$$

Вычисление интеграла приводит к выражению

$$S(\eta,p) \quad \sim \quad exp\big(-\frac{(p-p^{'})^2}{2{p_1}^2}+\frac{i}{\hbar}q^{'}(p-p^{'})\big),$$

где параметры p_1 и $p^{'}$ имеют смысл неоределенности и среднего значения импульса. Плотность распределения импульса определяется выражением

$$S^*S \quad \sim \quad exp\big(-\frac{(p-p^{'})^2}{{p_1}^2}\big).$$

Таким образом неопределенности распределений импульса и координаты связаны соотношением:

$$p_1q_1 \quad = \quad \hbar.$$

Если исследования Борна заменяли надуманные толкования Шредингера ясными физическими формулировками, то результат Гайзенберга не оставлял никаких надежд на возможное детерминистическое объяснение явлений в терминах той же Ψ-функции. Гайзенберг дал изящное доказательство того, что неопределенность координаты свободной частицы увеличивается с увеличением времени. Поскольку гамильтониан, описывающий эволюцию такой частицы, равен

$$\hat{H} \quad = \quad \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^{\,2},$$

то зависимость от времени операторов импульса и координаты определяется уравнениями

$$\frac{d\hat{\vec{q}}}{dt} \quad = \quad \frac{1}{m}\hat{\vec{p}}, \qquad \frac{d\hat{\vec{p}}}{dt} \quad = \quad 0,$$

имеющими решениями

$$\hat{\vec{q}} \quad = \quad \frac{1}{m}\hat{\vec{p}}_0t+\hat{\vec{q}}_0, \qquad \hat{\vec{p}} \quad = \quad \hat{\vec{p}}_0,$$

где операторы с индексами 0 означают соответствующие величины, заданные в момент $t=0$.

Чтобы перейти к средним значениям, воспользуемся тем, что определенная Дираком и Иорданом функция преобразования $S(q_0,q)$, переводящая матрицы, зависящие от q_0 в матрицы, зависящие от q, удовлетворяет уравнению

$$\big(-i\frac{t\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial q_0}+q_0\big)S(q_0,q) \quad = \quad qS(q_0,q).$$

Из них следует, что

$$S(q_0,q) \quad = \quad Cexp\frac{im\int(q-q_0)dq_0}{\hbar t}.$$

Значения $S(\eta,q)$ и $S(\eta,q_0)$ связаны соотношением

$$S(\eta,q) \quad = \quad \int S(\eta,q_0)S(q_0,q)dq_0,$$

поэтому если

$$S(\eta, q_0) \quad = \quad Cxp\Big(- \frac{(q_0 - q^{'})^2}{2{q_1}^2} - \frac{i}{\hbar}p^{'}(q_0 - q^{'})\Big),$$

то

$$S(\eta, q) \quad = \quad Cexp\frac{-(q - \frac{t}{m}p^{'} - i\beta q^{'})^2(1 - \frac{i}{\beta})}{2{q_1}^2(1+\beta^2)},$$

где

$$\beta \quad = \quad \frac{t\hbar}{m{q_1}^2}.$$

Таким образом плотность распределения координаты в момент t определяется формулой

$$S^*(\eta, q)S(\eta, q) \quad = \quad Cexp\frac{-(q - \frac{t}{m}p^{'} - q^{'})^2}{{q_1}^2(1+\beta^2)}.$$

Гайзенберг утверждал, что полученные им соотношения являются прямым следствием перестановочных соотношений между операторами импульса и координаты. Это действительно так, поскольку перестановочные соотношения определяют физический смысл связи Ψ-функции в координатном пространстве и ее фурье-образа. Однако, существует более ясное и (на первый взгляд) более точное доказательство этого утверждения [**Robertson 1929**]. Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ – самосопряженные операторы и $\langle A\rangle, \langle B\rangle$ – средние значения соответствующих наблюдаемых A и B. Если $[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hat{C}$, то операторы $\hat{a} = \hat{A} - \langle A\rangle\hat{E}$ и $\hat{b} = \hat{B} - \langle B\rangle\hat{E}$ также будут самосопряженными и будет справедливо соотношение $[\hat{a}, \hat{b}] = -i\hat{C}$. Средние значения квадратов величин a и b равны дисперсиям величин A и B:

$$\langle a^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = (\Delta A)^2, \qquad \langle b^2\rangle = \langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2 = (\Delta B)^2.$$

Пусть λ – действительное число и $\hat{D} = \hat{a} + i\lambda\hat{b}$. Справедливо соотношение

$$\langle\hat{D}^{+}\hat{D}\rangle \quad = \quad \lambda^2\langle b^2\rangle \quad + \quad \lambda\langle\hat{C}\rangle \quad + \quad \lambda^2\langle a^2\rangle \quad \geq \quad 0.$$

Левая часть этого неравенства достигает минимума при $\lambda = -\frac{\langle\hat{C}\rangle}{2\langle b^2\rangle}$, что приводит к неравенству

$$\Delta A\Delta B \quad \geq \quad \frac{1}{2}\langle\hat{C}\rangle.$$

Однако кажущаяся общность вывода Робертсона таит в себе опасность ошибок. Это связано с тем, что имеющими физический смысл величинами квантовая теория, как правило, связывает *неограниченные линейные операторы*, действие которых нельзя определить во всем пространстве состояний системы. Точное описание таких операторов требует введения понятий *область определения оператора* и *область значений оператора*. Перестановочные соотношения можно определить лишь для таких операторов, у которых совпадают области определения и значений. Операторы импульса и координаты, к счастью, таким свойством обладают. Год спустя аналогичный вывод соотношения неопределенностей несколько иного вида и на том же уровне строгости, что была у Робертсона, опубликовал Шредингер [**Schrödinger 1930**]. Однако при толковании смысла этих соотношений произошли удивительные события.

Для свободно движущейся частицы Шредингер получает те же соотношения, что и ранее Гайзенберг:

$$(\Delta q)^2 \quad = \quad (\Delta q_0)^2 \quad + \quad \frac{t^2}{m^2}(\Delta p_0)^2 \quad + \quad \frac{t}{m}(\langle\hat{q}_0\hat{p}_0\rangle - 2\langle q_0\rangle\langle p_0\rangle),$$

где Δx_0 означают неопределенности импульса или координаты в начальный момент времени ($t = 0$), а Δx – соответствующие величины при произвольном t. При этом неопределенности в начальный момент таковы, что

$$\Delta p_0 \Delta q_0 = \frac{\hbar}{2}.$$

Перед нами формула, определяющая зависимость от времени левой части равенства, причем все величины, содержащиеся в правой, кроме времени, – постоянные. Однако затем происходит нечто не совсем понятное. Шредингер находит минимум Δq как функции Δq_0. Он достигается при $(\Delta q_0)^2 = \frac{\hbar t}{2m}$, а

$$\Delta q \quad = \quad \sqrt{\frac{\hbar t}{m}}.$$

В качестве одной из интересных особенностей этой формулы Шредингер отмечает "пропорциональность неопределенности координаты квадратному корню из времени, которая напоминает хорошо известные классические законы флуктуации". Тем самым читателю внушается мысль, что соотношения неопределенностей можно объяснить в рамках классических понятий, привлекая некоторые статистические соображения. На то обстоятельство, что неопределенность импульса от времени не зависит, внимания не обращается. Равным образом не вызывает удивления и то, что постоянная Δq_0 начинает зависеть от времени. Это уже стиль мышления – чтобы создать впечатление универсальности классических закономерностей, можно забыть о логике. Нужно принять во внимание, что соотношение неопределенностей полностью подрывало возможность толкования Ψ как некоторого "поля материи", на котором настаивал Шредингер и которое так нравилось патриархам физики. Можно обратить добавить следующее: уравнения Гайзенберга для гармонического осциллятора интенгрируются столь же легко, как и для свободной частицы:

$$\hat{q}(t) \quad = \quad \hat{q}_0 cos\omega t \quad - \quad \hat{p}_0 \frac{q_0}{p_0} sin\omega t,$$

$$\hat{p}(t) \quad = \quad \hat{q}_0 \frac{p_0}{q_0} sin\omega t \quad + \quad \hat{p}_0 cos\omega t.$$

Нетрудно показать, что если осциллятор находится в основном состоянии, то для любого t

$$(\Delta q)^2 \quad = \quad (\Delta q_0)^2 \quad = \quad \frac{1}{2}{q_0}^2.$$

На зависимость неопределенности координаты осциллятора от времени "хорошо известные классические законы флуктуаций" почему-то не действуют. Впрочем, это происходит по совсем другой причине: в случае осциллятора приходится иметь дело со стационарным состоянием – состоянием в котором ничего не происходит. Про такие состояния будет сказано немного позднее. Дополнительным поводом для жалоб Шредингера было то обстоятельство, что Гайзенберг мимоходом разрушил его схему связи микро- и макросостояний.

> Переход от микро- к макромеханике уже обсуждался Шредингером [**Schrödinger 1926f**], однако я не думаю, что рассуждения Шредингера соответствуют сути дела, и вот почему: согласно Шредингеру, сумма собственных колебаний, соответствующих высоковозбужденным состояниям, должна образовывать не слишком большой волновой пакет, который периодически меняя свой размер, осуществляет периодическое движение классического электрона. Против этого можно сделать следующее возражение: если бы волновой пакет обладал описанными здесь свойствами, то испускаемое атомами излучение можно было бы разложить в ряд Фурье, в котором частоты обертонов являлись целыми кратными числами от основной частоты. Однако, согласно квантовой механике, частоты испускаемых спектральных линий никогда не бывают целыми кратными от основной частоты, за исключением особого случая гармонического осциллятора. Рассуждения Шредингера, таким образом, применимы лишь к рассмотренному им случаю гармонического осциллятора, *во всех других* случаях волновой пакет со временем расплывается по всему пространству в окрестности атома.

Степень беспокойства Шредингера можно оценить, зная, что еще год назад буквально то же самое и о той же самой статье писал Лоренц.

> Первой моей мыслью по ее прочтении было: теория, которая опровергает возражения таким поразительным и изящным способом, должна быть на верном пути. К сожалению, моя радость вскоре омрачилась. Я не вижу, как именно Вы сможете, в случае атома водорода, например, построить волновые пакеты, движущиеся как электроны (я имею здесь в виду очень высокие боровские орбиты). Вы не располагаете необходимыми для этого короткими волнами. В Вашем примере линейного осциллятора Вы имеете то преимущество, что располагаете сколь угодно короткими волнами.
>
> **Лоренц Шредингеру 19.7.26**

Проницательность Лоренца, конечно, удивить не может. Удивительно, что его письмо кончается так:

> Если нам придется отказаться от волновых пакетов и вместе с ними от основных идей Вашей теории преобразования классической механики в волновую, мы потеряем кое-что очень изящное. Меня бы очень обрадовало, если бы Вы смогли найти выход.

Шредингер сумел убедить патриархов в невозможном – своей способности "превратить классическую механику в волновую". Credo, quia absurdum est. Однако молодые люди, которые уже построили свою теорию, заставляли Шредингера волноваться.

Гайзенберг отстоял свое утверждение о ненаблюдаемости орбит атомных электронов. В скором времени Кеннард [**Kennard 1927**] и Дарвин [**Darwin 1927**] указали на еще одну систему с эквидистантными уровнями – электрон в однородном магнитном поле. Еще одна система с такими свойствами описана Гольдманом и Кривченковым [**Гольдман, Кривченков 1955**]. Дарвин в уже указанной работе дал численную оценку скорости расплывания волнового пакета в атоме. Он рассмотрел волновой пакет, который совершает периодическое движение вблизи классического пути и охватывает эффективно состояния с квантовыми числами от $n - k$ до

$n+k$. Если $\frac{1}{\omega}$ - период классического движения, то время t, в течение которого пакет проходит мимо определенного места, определено с точностью до Δt, причем эта непределенность удовлетворяет соотношению

$$\omega\Delta t \quad \sim \quad \frac{1}{k}.$$

Поскольку неопределенность энергии пакета – величина порядка $\Delta E \sim \omega kh$, то $\Delta E\Delta t \sim h$. Пакет целиком размазывается по орбите за время

$$\delta t \quad \sim \quad \frac{1}{kha},$$

где a характеризует степень отклонения уровней энергии от эквидистантности:

$$E_{n+\tau} - E_{n+\sigma} = (\tau-\sigma)\omega h + \frac{1}{2}ha(\tau^2-\sigma^2).$$

ПРИНЦИП ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

Проводив Шредингера, Бор и Гайзенберг вернулись к своим беседам о смысле квантовой механики.

> Я жил тогда на верхнем этаже институтского здания, в маленьком уютном чердачном помещении с косыми стенами, откуда открывался вид на деревья у входа в Феллед-парк. Часто Бор и поздним вечером еще раз заходил в мою комнату, и мы обсуждали всевозможные так называемые мысленные эксперименты, чтобы проверить, действительно ли мы полностью поняли свою теорию. Довольно скоро выяснилось, что Бор и я ищем разрешения трудностей в несколько различных направлениях. Усилия Бора были направлены на то, чтобы сохранить за обоими наглядными представлениями, корпускулярным и волновым, одинаковое право на существование, причем он пытался показать, что хотя эти представления взаимно исключают друг друга, однако они лишь вместе делают возможным полное описание процессов в атоме. Мне такой подход не нравился. К счастью, в своих беседах мы с Бором приходили, обычно к одинаковым заключениям относительно того или иного физического эксперимента и можно было надеяться, наши столь различные устремления в конечном итоге приведут к одному результату... Поскольку наши беседы затягивались до поздней ночи и, несмотря на месяцы непрерывного напряжения, не приводили к удовлетворительному результату, мы дошли до состояния истощения, которое ввиду разной направленности мысли, вызывали иной раз натянутость отношений. Поэтому Бор в феврале 1927 года решил взять отпуск, чтобы походить на лыжах по Норвегии, и я был тоже рад тому, что могу теперь в Копенгагене еще раз наедине с собой поразмыслить над этими безнадежно сложными проблемами.

И Бор, и Гайзенберг не понимали, как согласовать вывод квантовой механики о том, что электрон не может иметь определенной траектории с известными каждому физику фотографиями траекторий электронов в камере Вильсона. Это обстоятельство и стало предметом напряженных размышлений Гайзенберга.

> Кажется, ближе к полуночи в один из вечеров я неожиданно подумал о своем разговоре с Эйнштейном, и мне вспомнились его слова: "Только теория решает, что можно наблюдать". Мне стало ясно, что ключ к так долго не отпиравшейся двери следует искать именно в этом месте. Поэтому я предпринял ночную прогулку по Феллед-парку, чтобы обдумать выводы, следующие из высказываний Эйнштейна. ... Мы всегда бездумно повторяли: траекторию электрона в камере Вильсона можно наблюдать.... Возможно, наблюдались некие дискретные следы неточно определенных положений электрона. Ведь фактически в камере Вильсона видны лишь отдельные капельки воды, которые заведомо намного протяженнее, чем электрон. ...правильно поставленный вопрос должен гласить: можно ли в квантовой механике описать ситуацию, при которой электрон приблизительно – т.е. с известной неточностью – находится в данном месте и при этом приблизительно, т.е. опять-таки с известной неточностью – обладает заданной скоростью, и можно ли эти неточности сделать столь незначительными, чтобы не впадать в противоречие с экспериментом. Краткий расчет по возвращении в институт подтвердил, что математически представить такую ситуацию можно и что неточностям соотвествуют те соотношения, которые позднее были названы соотношениями неопределенностей квантовой механики.

Упомянутый краткий расчет, который оказался уже описанным выводом соотношения неопределенностей, был воспроизведен в предыдущем разделе. Однако чисто математический вывод не удовлетворил Гайзенберга. Он решил провести точные расчеты для простых экспериментов. Так появился на свет "микроскоп Гайзенберга" и другие мысленные эксперименты. Гайзенберг, верный духу своей работы 1925 года, сначала решил дать точные определения общепринятых терминов: положение, скорость, энергия... . В первую очередь его интересует положение. Здесь предлагается такое определение:

> ...если мы хотим уяснить, что следует понимать под словом "положение объекта", например электрона (по отношению к заданной системе отсчета), необходимо указать определенные эксперименты, при помощи которых намереваются определить "положение электрона", в противном случае это не имеет смысла.

В качестве возможного эксперимента обсуждается такой:

> Мы освещаем электрон и рассматриваем его в микроскоп. При таком способе максимально достижимая точность определения положения в основном задается длиной волны используемого света. Но в принципе можно построить, например, γ-лучевой микроскоп и с его помощью определить положение с желаемой точностью. Однако в этом измерении существенно побочное обстоятельство – эффект Комптона. ...В мгновение, когда определяется положение, иначе говоря, в мгновение, когда квант света отклоняется электроном, последний прерывно изменяет свой импульс (verändert das Electron seinen Impuls unstetig). Это изменение тем сильнее, чем меньше длина волны исследуемого света, иначе говоря, чем выше точность определения положения. Поэтому в то мгновение, когда известно положение электрона, импульс может быть определен лишь с точностью до величины, соответсвующей такому прерывному изменению, итак, чем точнее определяется положение, тем менее точно известен импульс, и наоборот.

Несмотря на существование различных изображений микроскопа Гайзенберга, сам он ничего не рисовал. Поэтому воспользуемся свободой выбора, изобразим этот прибор следующим образом. Чтобы лучше рассмотреть электрон в точке O, расположим линзу микроскопа так, чтобы точка О оказалась под центром линзы. По (волновой) теории Аббе разрешающая сила микроскопа (т.е. точность измерения x-координаты электрона) дается выражением

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2sin(\frac{\phi}{2})},$$

где λ – длина волны падающего на электрон света. Наблюдатель увидит вспышку, свидетельствующую о наличии электрона в точке О, если квант света после столкновения будет двигаться внутри конуса с раствором угла ϕ. Пусть $p^{'}$ – абсолютное значение импульса фотона после рассеяния, тогда значение x-составляющей его импульса будет заключено в интервале

$$-p^{'} sin\frac{\phi}{2} \leq p^{'}_{x} \leq p^{'} sin\frac{\phi}{2}.$$

Если пренебречь изменением длины волны света при рассеянии, то неопределенность импульса фотона, попавшего в микроскоп, будет равна

$$\Delta p = \frac{\lambda}{h} 2sin(\frac{\phi}{2}).$$

Для произведения неопределенностей импульса и координаты получаем формулу

$$\Delta p \Delta x = h.$$

Далее Гайзенберг утверждает, что

> говорить об энергии атома в определенный момент времени так же бессмысленно, как говорить о частоте световой волны в данное мгновение.

Его доводы использовали то обстоятельство, что энергию атома можно измерить, например в опытах, типа опытов Франка и Герца, в которых закон сохранения энергии позволяет связать измерение энергии атома с измерением энергии пучка прямолинейно движущихся электронов. Энергию в таких опытах можно в принципе можно измерить с любой степенью точности, если только отказаться от попытки одновременного определения положения электронов, т.е. от попытки выяснить, когда произошло столкновение электрона с атомом. Сходная ситуация возникает и опытах типа опытов Штерна и Герлаха, связанных с изменением энергии частиц в атомных пучках. Это изменение определяется воздействием некоторой силы. Изменение потенциальной энергии обусловленное отклоняющей силой должно быть много меньше разности энергий стационарных состояний атома, т.к. в противном случае нельзя будет сказать, о каком уровне энергии идет речь. Если E_1 – величина интервала энергии (эта величина задает и точность измерения энергии), а d – ширина пучка (ее можно измерить по размерам применямой в опыте диафрагмы), то отношение $\frac{E_1}{d}$ определяет максимальную величину отклоняющей силы. Изменение поперечного импульса – Δp – величина порядка $\frac{E_1 t_1}{d}$, поэтому угловое отклонение пучка – $\Delta \phi \sim \frac{E_1 t_1}{dp}$. Нижний предел этой величины определяется угловым отклонением при дифракции

$\sim \frac{\lambda}{d}$, где $\lambda = \frac{h}{p}$ – длина волны де Бройля. Таким образом получаетя соотношение, содержащее только величины $E_1 = \Delta E$ и $t_1 = \Delta t$:

$$\Delta E \Delta t \quad \sim \quad h$$

и означающее, что

> точность в определении энергии может быть достигнута только за счет соответствующей неточности в определении времени.

Дальнейшие события Гайзенберг изложил в статье, опубликованной в сборнике, посвященном памяти Паули.

> Я написал Паули письмо на 14 страницах; его в основном совпало с содержанием последующей работы о соотношении неопределенностей. Ответ Паули оказался намного оптимистичнее, чем я мог ожидать. "Да будет в квантовой теории день" – приблизительно так звучал его ответ, побудивший меня изложить все содержание моих размышлений в подробной работе. Через несколько дней я снова послал эту работу Паули, чтобы получить его критические замечания, так что после возвращения Бора я показал ему работу, уже одобренную Паули.
>
> Правда, Бор был тогда естественно недоволен некоторыми положениями работы, так что в она была отправлена лишь несколько позднее в исправленном виде.
>
> Между тем и Бор развил выдвинутое им понятие дополнительности настолько, что физическое содержание квантовой теории стало одинаково ясным с различных точек зрения. Если и оставались еще различия в понятиях, то они относились только к различной точке зрения или к различному языку, а не к физической интерпретации теории. Эта интерпретация приобрела теперь полную ясность, и Паули был первый вне копенгагенского кружка, кто безоговорочно согласился с новой интерпретацией, в которую он сам внес такой большой вклад.

Гайзенберг описывает здесь счастливый конец копенгагенских дискуссий и воздает должное Паули. Между тем споры собеседников, судя по всему, были весьма горячими, причем Бор был не менее тверд, чем в беседах со Шредингером:

> я помню, что это кончалось моими слезами, потому что я уже не мог противостоять давлению Бора.
>
> **Интервью с Гайзенбергом 25.02.1963. Archive for History of Quantum Physics.**

Полезно разобраться в причине столь жаркого противостояния, потому что это может послужить более глубокому пониманию смысла основных определений квантовой механики. Разумеется, Бор ни на минуту не сомневался в справедливости соотношений неоределенности и в их значении. 13 апреля 1927 года Бор писал Эйнштейну, коцепции классической физики предоставляют нам лишь выбор между Сциллой и Харибдой, в зависимости от того, какой способ описания явлений – непрерывный или дискретный мы выбираем. Бор утверждал, что соотношения непределенностей позволяют благополучно пройти мимо этих чудищ.

Если прервать изложение письма Бора на этом месте, можно подумать, придуманный копенгагенской школой принцип дополнительности является прямым следствием соотношения неопределенностей. Для широкой физической общественности, которой некогда и не интересно вникать в тонкости эпистемологии, такое утверждение кажется вполне приемлемым. Однажды эту точку зрения отстаивал даже

Фок [**Фок 1938**]. Правда, для этого были особые причины. В 1938 году в журнале "Под знаменем марксизма" разыгралась дискуссия, в которой физики поименно причислялись к материалистам или идеалистам. Фок попал в идеалисты, главным образом, по причине своих комментариев к спору Эйнштейна и Бора. Фок присоединился к точке зрения Бора, а материалистом журнал считал Эйнштейна. Дело было серьезным, и Фок хотел как можно доходчивее оправдаться. Недаром первый параграф его статьи назывался "Противоречит ли квантовая механика материализму?" Между прочим, знакомство с доводами Фока полезно и для современного читателя. Фок сожалел, что "философы-материалисты" или полностью отрицают квантовую механику, или признают большинство ее выводов, делая исключение лишь для принципа дополнительности. "Легче всего находит признание математический аппарат квантовой механики, притом тем легче, чем он сложнее." Пока соотношения между координатой $\hat{x}$ и $\hat{p}$ писались в виде перестановочных соотношений

$$\hat{x}\hat{p} \quad - \quad \hat{p}\hat{x} \quad = \quad i\hbar,$$

т.е. в виде соотношений между весьма сложными математическими образованиями, они возражений со стороны философов не вызывали. "Стоило, однако, Гайзенбергу перейти к вытекающим из них, но гораздо более простым соотношениям

$$\Delta x \Delta p \quad \geq \quad \frac{\hbar}{2}$$

как поднялась буря возражений". Хотя в настоящее время (1938 г.) соотношение неопределенностей можно считать включенными в общепризнанную часть квантовой механики, нельзя сказать, "что *непосредственные следствия соотношений неопределенностей, каким является, например, принцип дополнительности Бора*, также получили признание". Итак, Фок утверждает, что принцип дополнительности вытекает из неравенств Гайзенберга и формулирует его смысл следующим образом.

О ходе физических процессов (в том числе и процессов атомного масштаба) можно судить только по показаниям макроскопических (т.е. состоящих из множества атомов) измерительных приборов. Приборы эти могут быть устроены различным образом. Один из них, например, позволяет пользоваться в применению к нему и измеряемому объекту законом сохранения импульса, но зато не допускает точного положения объекта. Другие приборы, наоборот, позволяют точно измерять положение объекта в пространстве, но не допускает измерения его импульса. Но такое устройство, которое бы позволило точно измерить и одно и другое, в природе неосуществимо *). Следовательно, и сами понятия положения и количества движения не могут применяться одновременно: чем лучше применимо одно, тем хуже применимо другое. Оба понятия находятся друг к другу в *дополнительном отношении*. В этом и заключается принцип дополнительности Бора.

Принцип дополнительности представляет формулировку свойств измеряемых объектов и измерительных приборов, т.е. свойств материи.

---

*) В этом месте некий читатель-материалист снабдил библиотечный экземпляр журнал оптимистичной пометкой на полях: **"пока!"**.

Поскольку открытые квантовой механикой закономерности связаны с отказом от глубоко укоренившихся представлений классической физики, то в квантовой механике наряду с ее положительной частью – объяснением явлений – должна быть и отрицательная часть: формулировка тех ограничений, которым подвержены классические представления. Принцип дополнительности как раз и резюмирует эту "отрицательную часть" квантовой механики. Таким образом, принцип дополнительности аналогичен запретительным принципам термодинамики о невозможности вечных двигателей. Трудно переоценить эвристическую ценность утверждений такого типа. Фок указывает на одно из непосредственных следствий принципа дополнительности: *признания неабсолютного характера волновой функции.* В наше время даже само только что употребленное словосочетание кажется таинственным. Однако речь здесь идет о вполне конкретных вещах. Шредингер с первых своих работ пытался толковать свою Ψ-функцию в привычном классическом смысле как некоторое материальное поле. Принцип дополнительности, будучи следствием соотношения неопределенностей, делает такое толкование невозможным, хотя бы в силу непостоянства непределенностей импульсов и координат частицы, которую должна представлять волновая функция связанная с материальным полем. Волновая функция должна содержать, кроме сведений о самом процессе еще и сведения о способах измерения, которые теперь считаются неотделимыми от описания физического процесса. Это утверждение и означает признание неабсолютного характера волновой функции и оно служит прекрасным примером того, сколь продуктивны удачно сформулированные "отрицательные" выводы (в данном случае – в квантовой механике). По-видимому именно простота рассуждений в терминах запретительных принципов побудила Кеннарда [**Kennard 1927**] сразу же после появления статьи Гайзенберга назвать полученные в ней соотношения "истинным ядром новой теории".

Изложенное выше может служить прекрасным введением в принцип дополнительности, но причины разногласий между Бором и Гайзенбергом можно понять лишь после дополнительных разъяснений.

Гайзенберг, открыв соотношение неопределенностей, считал, что для объяснения всех явлений, с которыми придется столкнуться квантовой механике, достаточно или корпускулярного или волнового языка. Он исходил из убеждения, что математический аппарат теории, сам приведет к нужным выводам, поэтому постройте правильный аппарат и будьте спокойны. Но математика, говорил Бор, не способна доказать ни одной физической истины, она может только предоставить некий формализм, выражающий те или иные соотношения между физическими данными. Между тем все мысленные эксперименты с частицами, доказывающие существование соотношений неопределенности, используют соотношения де-Бройля-Эйнштейна $\lambda = \frac{h}{p}$ или $\nu = \frac{E}{h}$, которые связывают корпускулярные и волновые характеристики квантовых объектов и выражают, таким образом, **корпускулярно-волновой дуализм**. Иначе говоря, осмысленное толкование соотношений неопределенностей связано именно с корпускулярно-волновым дуализмом. Чтобы лучше усвоить это понятие, полезно обсудить еще некоторые мысленные эксперименты. Пусть частица, которая первоначально двигалась в у-направлении, обладая импульсом p, проходит сквозь щель ширины Δx в непрозрачном экране, расположенном в плоскости $z - x$. Положение частицы в x-направлении определено с точностью Δx. Пока использовалась терминология классической механики. Однако, она окажется бесполезной при попытке описания поведения частицы после прохождения экрана, когда окажется, что она явным образом отклоняется от прямолинейного пути. Все станет на свои места после привлечения языка волновой оптики. Известно, что она предсказывает явление интерференции, причем угол α, определяющий первый интерференционный минимум, задается формулой $sin\alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x}$, где λ – длина падающей на экран волны. Связи $sin\alpha = \frac{\Delta p}{p}$ и $\lambda = \frac{h}{p}$ приводят к формуле Гайзенберга $\Delta x \Delta p \sim h$. Таким образом обоснование соотношения неопределенностей требует обращения к корпускулярно-волновому дуализму. Иордан вспоминал в 1971 году как Паули убедил спорящих, что их разногласия сводятся лишь к тому, в каком порядке следует перечислять основные понятия теории *). Если перейти на более формальный язык, то можно понять, что спор Бора и Гайзенберга шел о том, каким числом переменных следует описывать системы, имеющие аналоги в классической физике: таким же, как в классике, или вдвое меньшим. Результатом примирения явилась набранная особым образом фраза в статье Гайзенберга:

> **Для всех понятий, которые в классичекой теории применяются для описания механической системы, можно точно определить соответствующие аналоги в атомных процессах**.

Можно заметить, что даже для основателя операционализма Бриджмена [**Bridgman 1936**] определение Гайзенберга казалась слишком операционалистским и позитивистским: ”некоторые философские оправдания предположения матричной механики, оказываются, скорее необходимой принадлежностью ее математического аппарата.” В качестве иллюстрации к этому утверждению, можно заметить, что хотя соотношения непределенностей действительно являются прямым следствием перестановочных соотношений для импульса и координаты, эти утверждения ни в коем случае не эквивалентны. Из соотношения неопределенностей нельзя вывести перестановочные соотношения. Последние эквивалентны совсем другому – утверждениям о свойствах симметрии импульса и координаты: возможностям их сдвига и образования линейных комбинаций. В первые годы жизни квантовой теории такие важные свойства этих величин стояли на втором плане. Свидетельством окончательного примирения Бора и Гайзенберга явилась статья, содержащая следующее утверждение [**Heisenberg 1929**]:

> Поскольку соотношения неопределенностей выражают лишь границы применимости понятий о частице, только этих соотношений недостаточно для полной интерпретации формализма. Бор показал, что для точного определения границ применимости классических понятий необходимо и достаточно одновременного использования корпускулярных и волновых представлений.

Можно предположить, что причина разногласий Бора и Гайзенберга была связана с тем, что они при анализе следствий соотношений неопределенности рассматривали разный круг задач, что приводило к различным внешним проявлениям следствий соотношений неопределенностей.

В задачах, соответствующих финитному классическому движению, можно рассматривать соотношение неоределенностей как механизм, приводящий к появлению

---

*) Пользовавшийся репутацией язвительного спорщика Паули, по-видимому, был искусным дипломатом. Уже в середине 50-х годов Борн попросит Паули быть арбитром в его споре с Эйнштейном о смысле волновой функции, и разговоры двух гениев доставят им удовольствие.

дискретных уровней энергии, причем внешне это будет проявляться именно как следствие уменьшения числа независимых переменных. Рассмотрим, например, атом водорода с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \frac{e^2}{|\vec{r}|},$$

где $\vec{p}$ – импульс, а $\vec{r}$ – радиус-вектор электрона. Если считать, что средние значения импульса и координат электрона равны нулю, то при вычислении средней энергии электрона можно будет заменить значения квадрата импульса и радиуса электрона их неопределенностями и связать эти величины соотношением

$$\Delta p \Delta r = \hbar.$$

Энергию электрона можно выразить как функцию одной переменной, например, Δr:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m(\Delta r)^2} - \frac{e^2}{\Delta r}.$$

Предполагая, как принято, что основное состояние атома определяется минимимальным значенем энергии, найдем радиус орбиты электрона в этом состоянии. Нетрудно убедиться в том, что он окажется равным боровскому радиусу.

$$\frac{dH}{d(\Delta r)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta r = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

По этому образцу нетрудно получить достаточно много полезных эвристических оценок. Все они основаны на том, что в случае конечных средних значений координат среднюю энергию системы можно рассматривать как функцию меньшего числа переменных.

В случае инфинитного движения, когда нет внутренних причин, определяющих, например, неопределенность координаты, значение этой величины зависит от деталей экспериментальной установки. В этом случае для описания поведения частицы лучше всего подходит одновременное использование корпускулярного и волнового языка. Рассмотрим случай, когда некоторая (фотон, электрон и т.п.) находится в "состоянии с определенным импульсом", т.е. среднее значение ее импульса равно

$$\langle\vec{p}\rangle \equiv \vec{p} = (p_x, p_y, p_z),$$

а неопределенности составляющих импульса – Δp_i – малы по сравнению с величиной среднего импульса: $\frac{\Delta p_i}{|\vec{p}|} \sim 0$. Если представить волновую функцию частицы в форме интеграла Фурье

$$\Psi(\vec{r}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{2}{3}} \int d\vec{k} e^{i\frac{\vec{r}\vec{k}}{\hbar}} C(\vec{k}),$$

то функция $C(\vec{k})$, будет иметь острый максимум в точке $\vec{k} = \vec{p}$. Пока частицу можно считать свободной, т.е. она удалена достаточно далеко от других частиц и находится вне электромагнитных полей, зависимость волновой функции от времени определяется изменением коэффициентов $C(\vec{k})$:

$$C(\vec{k}) \Rightarrow C(\vec{k}, t) = e^{-i\frac{\vec{k}^2 t}{2m\hbar}} C(\vec{k}).$$

Если функция $C(\vec{k},t)$ такова, что функция имеет в момент $t = t_0$ максимум в точке $\vec{r} = \vec{r}_0$, то положение масимума в момент времени t определяется формулой

$$\vec{r} \quad = \quad \vec{r}_0 + \frac{\vec{p}}{m}(t - t_0),$$

т.е. центр волнового пакета в первом приближении движется по траектории классической свободной частицы с импульсом $\vec{p}$. В отличие от случая финитных движений рассматриваемый волновой пакет не расплывается в течение достаточно длительного промежутка времени. Если Δr – начальная неопределенность сферически симметричного волнового пакета, то изменением неопределенности координат частицы можно будет пренебречь, если будет выполняться неравенство [**Goldberger, Watson 1964**]

$$\frac{(t - t_0)\hbar}{2m(\Delta r)^2} \quad \ll \quad 1.$$

Если определить длину пробега частицы $L = v(t - t_0)$, это неравенство можно записать в форме

$$\frac{L}{\Delta r} \quad \ll \quad \frac{\hbar}{2p\Delta r}.$$

Если неопределенность координат будет величиной порядка сантиметров, то расстояние, на котором можно будет пренебречь расплыванием пакета с достаточно большой средней энергией, будет простираться на километры. Рассмотрим движение частицы в свободном от внешних полей пространстве, разделенном на части непрозрачными экранами с отверстиями. Мы уже знаем, движение частиц в этом случае можно будет рассматривать как прямолинейное. Неопределенности координат в этом случае будут задаваться геометрией экранов. Пусть волновой пакет распротраняется вдоль оси z, причем в плоскости $z = 0$ раположен непрозрачный экран с щелью $|x| < \frac{a}{2}$. На экран падает частица с со средним импульсом $\vec{p} = (0, 0, p)$ и неопределенностями импульса $\Delta p_{x,y} = 0$. Это означает, что слева от экрана х-координата частицы совершенно произвольна: $\Delta x = \infty$. Чтобы проникнуть в область справа от экрана, частице нужно пройти сквозь отверстие. Это автоматически уменьшит неопределенность ее x-координаты: справа от экрана $\Delta x \sim a$. Это приведет к увеличению неопределенности x-составляющей импульса: $\Delta p_x \sim \frac{\hbar}{a}$. Таким образом справа от экрана частица практически с равной вероятностью может двигаться по любому лучу, расположенному внутри угла 2θ, определяемому уравнением

$$sin\theta \quad = \quad \frac{\Delta p_x}{p} \quad \sim \quad \frac{\hbar}{2ap}.$$

Сопоставляя с частицей волну де Бройля длины

$$\lambda \quad = \quad \frac{\hbar}{p},$$

получим выражение для угла θ:

$$sin\theta \quad = \quad \frac{\lambda}{2\Delta x}.$$

Из теории дифракции классических волн известно, что именно эта формула определяет положение первого дифракционного минимума. Таким образом угол раствора конуса в котором может распространяться частица за экраном определяется законами дифракции. Эйнштейн пытался обойти соотношение неопределенностей с помощью более изобретательных измерений, использующих закон сохранения импульса. Пусть частица проходит сквозь щель, которую можно закрывать или открывать при помощи затвора. Измерение изменения импульса затвора после прохождения частицы сквозь щель даст нам независимое измерение импульса, что позволяет надеяться на уменьшение нижней грани произведения $\Delta x \Delta p$. Величину Δp можно связать с изменением энергии затвора: $\Delta E = v\Delta p$. Поскольку $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, где Δx – ширина щели, Δt – длительность движения затвора, то величины, определяющие измерение, связаны соотношением $\Delta p \Delta x = \Delta E \Delta t$. Поскольку правая часть этого равенства – величина порядка $\hbar$, то усовершенствование измерения не улучшает точности совместного определения импульса и координаты.

Можно показать, что если частица проходит сквозь дифракционную решетку, то расположение массимально вероятных путей распространения частицы определяется формулой расположения максимумов при дифракции классической волны на такой же решетке [**Epstein, Ehrenfest 1924**].

Если частица проходит сквозь решетку по траектории, изображенной на рис. ("), то импульс первоначально покоящейся решетки – P_x равен

$$P_x \quad = \quad psin\phi_0 - psin\phi.$$

Решетка после столкновения с частицей движется с некоторой постоянной скоростью, что позволило Эпштейну и Эренфесту рассмотреть появление штрихов решетки напротив точки $x = 0$ как периодический процесс. В этом случае должно выполняться (хотя бы в первом приближении) условие квантования

$$\int P_x dx \quad = \quad P_x d \quad = \quad n\hbar.$$

В этом выражении d – период решетки. Определяя длину волны де Бройля $\lambda = \frac{\hbar}{p}$, получим связь между направляющими косинусами лучей наивероятнейшего направления движения частицы

$$sin\phi \quad - \quad sin\phi_0 \quad = \quad n\frac{\lambda}{d},$$

которая определяет положение дифракционных максимумов в классической волновой теории. Необходимо заметить, что при таком объяснении эффекта дифракции существенно использовались предположения:

а) эксперимент осуществляется так, что остается неизвестной щель, сквозь которую прошла частица, и

б) в эксперименте не измеряется точное значение импульса, который частица передает решетке.

Эту особенность Бор назвал "неконтролируемым взаимодействием объекта с измерительным прибором", включив ее в число основных составляющих содержащихся в принципе дополнительности.

Вскоре Эйнштейн предложил мысленный эксперимент, призванный опровергнуть утверждение Бора о том, что в опытах, демонстрирующих дифракцию, нельзя установить путь, по которому частица прошла сквозь решетку. Представим себе два экрана: A_1, содержащий отверстие, сквозь которое может проходить пучок частиц, и A_2, на который попадают частицы, прошедшие сквозь решетку. Решетка D подвешена на пружинных весах S на равных расстояниях от экранов и содержит две щели S_1 и S_2. В положении равновесия одна из этих щелей расположена выше, а другая – ниже отверстия O, причем середина части решетки, разделяющая эти щели, расположена как раз против щели O. Пусть частица попадает на экран A_2 в точке, расположенной между проекциями на этот экран щелей O_1 и O_2. Если частица прошла сквозь щель O_1, то она должна передать решетке импульс, направленный вверх, если же ее путь лежал через щель O_2, то решетка должна получить импульс, направленный вниз. Следя за пружинными весами, можно различить эти случаи. При повторении таких опытов плотность распределения координат на экране A_2, будет такой, как предписывается теорией дифракции на решетке с постоянной d, но неопределенность координаты частицы определяется совсем другой величиной – шириной щели a. Бор, комментируя рассуждения Эйнштейна, заметил что неопределенность импульса решетки, приобретенного в ходе эксперимента, равна

$$\Delta p \quad = \quad 2psin\frac{\omega}{2}.$$

Неопределенность координаты (например центра тяжести) решетки – величина порядка

$$\Delta x \quad = \quad \frac{\hbar}{\Delta p} \quad = \quad \frac{\lambda}{2sin\frac{\omega}{2}}.$$

Полученная таким образом величина обратна числу штрихов на единицу длины, необходимому для получения соотвествующей дифракционной картины.

Таким образом измерение импульса решетки приводит к оценке числа штрихов на единицу длины и ничего не говорит о ширине штриха.

Первое знакомство широкой общественности с принципом дополнительности состоялось 16 сентября 1927 года на международном конгрессе, посвященном памяти А.Вольта, созванном по случаю столетия со дня смерти великого физика. На этом конгрессе были практически все ведущие физики мира, кроме Эйнштейна, несмотря на полученное им персональное приглашение. Бору была предоставлена четырехкратная норма времени (1 час), а дискуссия по его докладу заняла всю заключительную часть конгресса. Доклад "Квантовый постулат и новейшее развитие атомной теории" был повторен в октябре 1927 года на V Сольвеевском конгрессе и напечатан в журналах Nature [**Bohr 1928a**] и Naturwissenschaten [**Bohr 1928b**]. Русский перевод был в это же время опубликован в "Успехах физических наук" [**Бор 1928**] Этот доклад воспризведен во втором томе собрания сочинений Бора – [**Бор 1971**].

Свою точку зрения Бор, пожалуй, лучше всего изложил в 1949 году в его статье, посвященной 75-летию Эйнштейна [**Bohr 1949**]:

> В своем докладе я развил точку зрения, которую можно охарактеризовать словом "дополнительность"; эта точка зрения позволяет, с одной стороны, охватить характерную для квантовых процессов черту неделимости и, с другой стороны,

> разъяснить существующие в этой области постановки задачи о наблюдении. Для этого решающим является признание следующего основного положения: *как бы далеко ни выходили явления за рамки классического физического объяснения, все опытные данные должны описываться при помощи классических понятий.*

Бор продолжал:

> *Поведение объектов невозможно резко отграничить от их взаимодействий с измерительными приборами, фиксирующими условия, при которых происходят явления.* В самом деле, неделимость типичных квантовых эффектов проявляется в том, что всякая попытка подразделить явления требует изменения экспериментальной установки и тем самым влечет за собой новые возможности принципиально неконтролируемого взаимодействия между объектами и измерительными приборами. Вследствие этого данные, полученные при разных условиях опыта не могут быть охвачены одной-единственной картиной; эти данные должны скорее рассматриваться как *дополнительные* в том смысле, что только совокупность разных явлений может дать более полное представление о свойствах объекта.

Далее Бор следующим образом оценил квантовую теорию:

> Этот формальный аппарат представляет собой чисто символическую схему , позволяющую делать предсказания результатов опытов, производимых в определенных условиях, которые должны характеризоваться при помощи классических понятий. Эта схема связана с классической теорией принципом соответствия.

Эти рассуждения кажутся несколько странными, но следует помнить, что главную опасность для квантовой теории в это время представляла Ψ-функция со свойствами материального поля.

АРЬЕРГАРДНЫЕ БОИ
СОЛЬВЕЕВСКИЕ КОНГРЕССЫ 1927 -1930

Спустя двадцать лет после V Сольвеевского конгресса Бор вспоминал [**Бор 1971**], что Эренфест юмористически отразил характер дискуссий на конгрессе, выписав на доске цитату из Библии, в которой описывалось смешение языков, нарушившее строительство Вавилонской башни. Может быть, эта надпись была примерно такой:

> **11** [3]И сказали (они)друг другу: наделаем кирпичей и обожжем огнем. И стали у них кирпичи вместо камней, а земляная смола вместо извести. [4]И сказали они: построим себе город и башню, высотою до небес, и сделаем себе имя, прежде нежели рассеемся по лицу всей земли. [5] И сошел Господь посмотреть город и башню, которые строили сыны человеческие. [6] И сказал Господь: вот, один народ, и один у них язык; и вот начали они делать, и не отстанут они от того, что задумали делать; [7] сойдем же и смешаем там язык их, так чтобы один не понимал речи другого. [8] И рассеял их Господь оттуда по всей земле...
>
> **Бытие XI. 1-9**

На этом собрании состоялась первая после конференции в Комо встреча Эйнштейна и Бора. Она ожидалась с нетерпением, потому что в сознании физической общественности именно в Брюсселе новая теория должна была отстоять право на существование. Ожидания оправдались вполне. Свое выступление Эйнштейн начал фразой, которую мог бы произнести король Лир: "*Я должен принести извинения, что выступаю в дискуссии, не внеся существенного вклада в развитие квантовой механики.*" Однако это не помешало Эйнштейну задать слушателям задачу - первой в последовательности искушений новой теории [**Einstein 1928**]. Пусть на экран S с небольшим отверстием O падает пучок электронов. Прошедшие сквозь отверстие частицы регистрируются расположенной за экраном фотопленкой P, имеющей вид полусферы. Эйнштейн утверждает, квантовая механика может объяснить это явление с двух точек зрения, по-разному оценивающих применимость теории.

1. *Первая точка зрения.* Волны де Бройля-Шредингера соответствуют не одному электрону, а облаку электронов, распределенному в пространстве. Квантовая теория ничего не говорит об отдельных процессах. Она дает информацию лишь относительно бесконечного множества элементарных процессов.
2. *Вторая точка зрения.* Квантовая теория претендует на полное описание отдельных процессов. Каждая частица, падающая на экран, не характеризуется положением и скоростью, а описывается пакетом волн де Бройля-Шредингера, имеющим малую протяженность и малый разброс по направлениям. Этот волновой пакет дифрагирует и после дифракции его части попадают на пленку P.

Согласно первой, чисто статистической точке зрения, $|\Psi|^2$ выражает вероятность того, что в рассматриваемом участке пространства, например, в том месте, где находится пленка, имеется *одна* из частиц электронного облака.

Согласно второй точке зрения, $|\Psi|^2$ выражает вероятность того, что *определенная* частица в рассматриваемый момент времени находится в заданном месте (например, там, где расположена пленка). Теория, таким образом, рассматривает отдельные процессы и претендует на полное описание всех фактов и закономерностей.

Вторая точка зрения гораздо радикальнее первой в том смысле, что она содержит все результаты, которые получаются в теории, основанной на первой точке зрения; в то же время обратное утверждение неверно. Только в силу второй точки зрения из теории следует, что законы сохранения выполняются и для элементарных процессов. Только в силу второй точки зрения теория сумела объяснить результат эксперимента Гейгера и Боте. Только она позволила объяснить, почему в камере Вильсона капельки, образующиеся при пролете α-частицы, располагаются почти вдоль прямых.

Все же я не могу не высказать некоторые возражения против второй точки зрения. Рассеянные волны, достигшие пленки P, не имеют никакого избранного направления. Если считать, что $|\psi|^2$ задает просто вероятность пребывания некоторой частицы в данный момент времени на рассматриваемом участке пленки, то отсюда бы следовало, что *один и тот же* элементарный процесс процесс оказывает действие в *двух или многих* местах пленки. Однако интерпретация, согласно которой $|\Psi|^2$ выражает вероятность того, что *определенная* частица находится во вполне определенном месте, предполагает совершенно особый механизм действия на расстоянии, не позволяющий волнам, непрерывно распределенным в пространстве, оказывать свое действие одновременно в *двух* участках пленки. Я считаю, что это возражение не снимается тем, что волна Шредингера описывает не только процесс распространения, но и позволяет указывать положение частицы во время этого процесса. Думаю, что у де Бройля были основания для попыток в этом

> направлении. Если оперировать только с волнами Шредингера, то вторая интерпретация $|\Psi|^2$, насколько я понимаю, приводит к противоречию с постулатом относительности.

Итак, Эйнштейна беспокоит не столько статистический стиль квантовой механики, сколько привнесение в теорию представления о дальнодействии и отход от причинного описания явлений. Очевидно, что опасения Эйнштейна излишни, поскольку соотношение между вероятностями появления электрона в точках А и В устанавливается вовсе не наблюдением электрона в точке А. Оно определяется еще в момент прохождения электрона сквозь щель в экране. Именно здесь (говоря не слишком строго) взаимодействие электрона с экраном преобразует плоскую волну, описывающую движение электрона до экрана, в сферическую, которая определяет вероятности направлений, в которых движется электрон. Если принять это событие в качестве начального условия процесса, разворачивающегося за экраном, мысли о возможном нарушении причинности возникать не должно. Однако приверженцев Копенгагенской школы вопросы причинности мало беспокоили. Они полагали, что причинность в новой теории отходит на второй план вместе с понятием траектории. Главной задачей дискуссии было утверждение принципа дополнительности. Это и определяло направление споров, о которых подробно и очень интересно рассказал Бор в 1949 году.

Конгресс не мог не стать новым Вавилоном, потому что его участники говорили, по крайней мере, на двух языках - языке волновой механики с ее туманной Ψ-функцией и языке принципа дополнительности, разработанном Бором и Гайзенбергом.

Прежде чем обратиться к фукидидовским воспоминаниям Гайзенберга, о конгрессе, приведем его оценку тезисов Бора, представленных научной общественности в 1927 году *). Гайзенберг, ручаясь за точность своих воспоминаний, утверждал, что Бор отстаивал следующее:

1. Неделимость кванта действия (квантовый постулат).
2. Дискретность (неделимость) элементарных процессов.
3. Неконтролируемость взаимодействия между объектом и измерительным аппаратом.
4. Невозможность точного пространственно-временного, а значит и причинного описания процессов.
5. Отказ от классического способа описания явлений.

Заметим, что Гайзенберг ничего не говорит об утверждении принципа дополнительности, которое очень многим казался почти главным: основного положения: *как бы далеко ни выходили явления за рамки классического физического объяснения, все опытные данные должны описываться при помощи классических понятий.* Скорее всего это связано с его недоверием к столь сильному утверждению. Однако, в Брюсселе это утверждение было не очень существенным. Более впечатляющим были пророческие (и потому туманные) речи приверженцев волновой механики и хладнокровные запреты сторонников Копенгагенской школы. Вот как описывал это Гайзенберг:

> Все мы жили в одном отеле, и самые острые дискуссии проходили не в конференцзале, а в ресторане отеля... Спор обычно начинался уже ранним утром тем, что

---

*) Разговор Гайзенберга с Джаммером, 26 июля 1971 года.

> Эйнштейн объявлял нам за завтраком новый мысленный эксперимент, с его точки зрения опровергавший соотношения неопределенностей. Мы, естественно, тут же начинали его анализировать, и по пути в конференц-зал, куда я обычно сопровождал Бора и Эйнштейна, достигали предварительной ясности насчет постановки вопроса и выдвинутой позиции. Потом в течение дня на эту тему велось много бесед, и, как правило, все заканчивалось тем, что Нильс Бор вечером за ужином был уже в состоянии доказать Эйнштейну, что очередной предложенный им эксперимент тоже не ведет к отмене соотношения неопределенностей. Эйнштейн казался несколько обеспокоенным, но уже на следующее утро у него за завтраком был готов новый мысленный эксперимент... ...друг Эйнштейна Пауль Эренфест... сказал: "Эйнштейн, мне стыдно за тебя; ведь ты споришь против новой квантовой теории теперь точно так же, как твои противники против теории относительности"...

Этот рассказ вызывает восхищение творческой обстановкой конгресса, но он же и порождает сомнение в необходимости решать фундаментальные вопросы науки на митинге. По крайней мере, Эйнштейна дискуссии на конгрессе убеждали лишь на несколько часов, и, может быть, спустя много лет, в 1948 году, он думал именно об этих спорах:

> Несколько раз он (Эйнштейн) вспоминал Бора, которого он очень любит и которым восхищается, но с которым он расходится во многих фундаментальных вопросах. Он говорил, что Бор мыслит очень ясно, но на письме он очень темен, и что **он думает о себе как о пророке** [**Shankland 1963**].

БОМБА В ЗДАНИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

По стилю статья трех авторов мало напоминала блестящие по наглядности *мысленные эксперименты* Эйнштейна, которыми он почти десять лет проверял на прочность созданную в 1925 году новую квантовую механику. В этой статье безоговорочно принимается математический формализм квантовой теории, чтобы потом подорвать изнутри ее логическую структуру.

Может быть, эта особенность статьи определялась составом авторского коллектива. Эйнштейн появился в Принстоне в 1933 году вместе со своим берлинским сотрудником Мейером. Однако тот вскоре получил постоянную должность в одном из американских университетов, и Эйнштейну пришлось искать новые молодые силы. В это время в Пристоне после непродолжительного пребывания в Харьковском физико-техническом институте оказался Борис Подольский. Он уже встречался с Эйнштейном, плодом их сотрудничества была статья, опубликованная в "Physical Review" [**ETP 1931**]. В Европе Подольский сотрудничал с Дираком и Фоком. Результатом их совместной деятельности были фундаментальные статьи в области новейшей тогда квантовой электродинамики. Натан Розен только что (в 1934 году) получил под руководством Слетера свою Ph.D.-степень в Массачузетском Политехническом Институте. Помимо квантовой механики Розен занимался и последним любимым детищем Эйнштейна - единой теорией поля. Естественно, что Эйнштейн пригласил нового многообещающего сотрудника Принстонского университета к сотрудничеству. Таким образом к 1935 году около Эйнштейна появились талантливые молодые люди, которые были в курсе новейших достижений квантовой теории.

Результатом их сотрудничества стала, пожалуй, самая известная в наше время физическая статья [**EPR 1935**].

Основная идея статьи принадлежала Эйнштейну.

Она подводила итог его почти десятилетним размышлениям о новой квантовой механике. Спустя 10 лет после публикации EPR Эйнштейн писал (в письме, датированом 10 ноября 1945 года) другу молодости Эпштейну (которому принадлежит, в частности, объяснение эффекта Штарка): "Я пришел к этой мысли, исходя из простого мысленного эксперимента".

Опишем придуманный Эйнштейном эксперимент. Это позволит читателю проследить за тем, как эвристические соображения превратились в математические формулы, т.е. в точные утверждения квантовой механики.

Представим себе, ящик B с идеально отражающими внутренними стенками, снабженный заслонкой, управляемой часовым механизмом. Ящик содержит низкочастотное электромагнитное поле и может передвигаться без трения в горизонтальном направлении по рельсам K, с которыми можно связать систему отсчета. На одном из концов рельсов S можно поместить или абсолютно поглощающий экран или абсолютно отражающее зеркало. Пусть на B сидит наблюдатель. Он снабжен устройством, которое позволяет в точно определенное время открыть заслонку и отправить фотон в сторону S. После этого наблюдатель может

1) немедленно жестко связать свою систему отсчета B с неподвижной системой K, или,

2) дав возможность B свободно двигаться, измерить его импульс, используя эффект Допплера для излучения с произвольно малой частотой.

Наблюдатель может предсказать

в первом случае время появления фотона в S,

во втором – энергию этого фотона.

Таким образом, с фотоном в точке S можно сопоставить ту или иную характеристику в зависимости от расположения духа наблюдателя удаленного от S наблюдателя. Единственное объяснение этого явления – предположение о том, что измерение в B может физически влиять на фотон в S, требует допущения или действия на расстоянии или действия, распространяющегося быстрее света.

Эйнштейн допускал логическую возможность таких механизмов, но это настолько противоречило его физической интуиции, что не мог отнестись к ним серьезно.

Ящик с фотоном пришел в рассуждения Эйнштейна не случайно, его привели предыдущие дискуссий с Бором. Разрешение ящику двигаться превратило действующие лица мысленного эксперимента в две частицы из EPR. Ключевая в EPR процедура редукции волнового пакета навеяна выступлением Эйнштейна на Сольвеевском конгрессе в 1927 году.

Сразу же после публикации EPR ее русский перевод (так же как и перевод ответа Бора), выполненный при участии и под редакцией Фока был напечатан в "Успехах физических наук" [**УФН 1936**]. При изложении EPR мы будем подробно цитировать этот перевод, надеясь что это с максимальной точностью донесет до читателя содержание и стиль классической работы.

Авторы EPR, прежде всего, замечают, что для суждения об успехе физической теории мы можем задать себе два вопроса

1) Правильна ли теория? и

2) Является ли данное теорией описание полным?

После десяти лет безуспешных прямых опровержений квантовой механики Эйнштейн решил заняться второй задачей. Для этого ему было необходимо дать определение полноты теории. В EPR оно формулируется так:

> каждый элемент физической реальности должен иметь отражение в физической теории.

После этого следует дать точное определение физической реальности:

> если мы можем, без какого бы то ни было возмущения системы предсказать с достоверностью (т.е. с вероятностью равной единице) значение некоторой физической величины, то существует элемент физической реальности, соответствующий этой физической величине.

Хотя этот критерий далеко не исчерпывает всех возможных способов распознания физической реальности, он, как достаточное условие, находится в согласии как с классическим, так и с квантово-механическим представлением о реальности.

Далее в статье приводится краткий набросок квантовой механики, как она представляется авторам EPR. **Основным понятием теории** авторы считают понятие

> "состояния", которое по предположению полностью характеризуется волновой функцией ψ. Последняя является функцией переменных, выбранных для описания поведения частицы. Каждой физически наблюдаемой величине А ставится в соответствие оператор... Если ψ есть собственная функция оператора $\hat{A}$, т.е. если
>
> $$\psi' \quad \equiv \quad A\psi \quad = \quad a\psi, \qquad (1)$$
>
> где a-число, то физическая величина A имеет с достоверностью значение a, коль скоро частица находится в состоянии ψ. Если ψ удовлетворяет уравнению (1), то согласно нашему критерию реальности для частицы в состоянии ψ существует элемент физической реальности, соответствующий физической величине A.

Авторы рассматривают случай одного измерения и выбирают

$$\psi(x) \quad = \quad e^{\frac{i}{\hbar}p_0 x}, \qquad (2)$$

где – p_0-некоторое постоянное число. Так как оператор, соответствующий количеству движения частицы, равен

$$p \quad = \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (3)$$

то

$$\psi' \quad = \quad p\psi \quad = \quad -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad = \quad p_0\psi. \qquad (4)$$

Таким образом в состоянии, которое определяется уравнением (2), количество движения имеет с достоверностью значение p_0. Значит, в этом случае имеет смысл говорить, что количество движения частицы в состоянии ψ реально.

С другой стороны, если уравнение (1) не выполняется, мы больше не можем говорить о том, что физическая величина A имеет определенное значение, так обстоит дело, например, с координатой частицы. Оператор $\hat{q}$, соответствующий координате, есть оператор умножения на независимую переменную. Таким образом

$$\hat{q}\psi \quad = \quad x\psi \quad \neq \quad a\psi. \qquad (5)$$

Согласно квантовой механике, мы можем только сказать, что относительная вероятность того, что измерение координаты дает результат, лежащий между a и b, равна

$$P(a,b) \quad = \quad \int_a^b \psi^* \psi dx \quad = \quad \int_a^b dx \quad = \quad b-a. \qquad (6)$$

Так как эта вероятность не зависит от a, а зависит только от разности $b-a$, мы видим, что все значения координаты равноправны.

> ...Обычно в квантовой механике из этого делается следующий вывод: если количество движения частицы известно, то ее координата не имеет физической реальности. В квантовой механике доказывается и более общее положение: если операторы, соответствующие двум физическим величинам, скажем A и B, не коммутируют, т.е. если $AB \neq BA$, то точное знание одной из этих величин исключает точное знание другой. Кроме того, каждая попытка экспериментально определить вторую величину изменит состояние таким образом, что уничтожит знание первой.

Сопоставляя это утверждение со своим определением реальности, авторы приходят к выводу, что или

> 1) квантово-механическое описание реальности посредством волновой функции неполно или
>
> 2) когда операторы, соответствующие двум физическим величинам, не коммутируют, эти величины не могут одновременно быть реальными.

В квантовой механике предполагается, что волновая функция

> действительно дает полное описание физической реальности для системы в состоянии, которому она соответствует.

На первый взгляд это предположение вполне приемлемо,

> так как сведения, которые можно вывести из знания волновой функции кажутся точно соответствующими тем, которые можно получить при помощи измерений, не изменяя состояния системы.

Однако, в следующем разделе статьи авторы показывают, что такое предположение противоречит принятому ими критерию реальности. Противоречие обнаруживается при анализе поведения системы, состоящей из двух подсистем I и II, которые взаимодействуют лишь от момента $t=0$ до $t=T$. Предполагается, что состояния обеих подсистем до момента $t=0$ были известны. В этом случае поведение объединенной системы $I+II$ в любой момент времени $t>0$ определяется уравнением Шредингера. Это означает, что в любой момент времени $t>0$ и, в частности $t>T$, известна волновая функция большой системы $\Psi(x_1,x_2)$. Что же можно сказать о состояниях каждой из подсистем в соответствующие моменты времени? В EPR на это дается такой ответ:

> ...мы не можем...вычислить того состояния, в котором каждая из двух систем остается после взаимодействия. Согласно квантовой механике это состояние может быть найдено только с помощью последующих измерений, путем процесса, известного под названием "редукции волнового пакета".

Авторы описывают этот процесс следующим образом.

> Пусть A - физическая величина, относящаяся к первой подсистеме, $a_1, a_2, a_3, ...$ и $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), ...$-собственные числа и собственные векторы оператора A. Волновую функции $\Psi(x_1, x_2)$ можно представить в форме
>
> $$\Psi(x_1, x_2) \quad = \quad \sum_n u_n(x_1)\psi_n(x_2). \qquad (7)$$
>
> Предположим, что величина А измерена, причем найдено, что она имеет значение a_k. Отсюда выводят заключение, что после измерения первая система остается в состоянии, описываемом волновой функцией $u_k(x_1)$, тогда как вторая система остается в состоянии с волновой функцией $\psi_k(x_2)$. Это и есть процесс редукции или сведения волнового пакета: волновой пакет, даваемый бесконечным рядом (7), сводится к одному слагаемому $\psi_k(x_1)u_k(x_2)$.

Последовательность функций $u_n(x_1)$ определяется выбором физической величины А. Если вместо нее мы бы выбрали другую величину, скажем В, имеющую собственные значения $b_1, b_2, b_3, ...$ и собственные функции $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), ...$, мы бы получили вместо уравнения (7) разложение

$$\Psi(x_1, x_2) \quad = \quad \sum_s v_s(x_1)\phi_s(x_2). \qquad (8)$$

> Если теперь измеряется величина В, причем она оказывается равной b_r, то мы заключаем, что после измерения первая система остается в состоянии, которое описывается функцией $v_r(x_1)$, а вторая система остается в состоянии, которое описывается функцией $\phi_r(x_2)$.

Заметим, что авторы EPR принимают, как очевидное, утверждение: существует вполне определенное состояние каждой из подсистем (с которым можно сопоставить ψ-функцию) при заданном состоянии большой системы. После этого немедленно можно сказать следующее:

> в результате двух различных измерений, произведенных над первой системой, вторая система может оказаться в двух разных состояниях, описываемых различными волновыми функциями. С другой стороны, так как во время измерения эти две системы не взаимодействуют, то в результате каких бы то ни было операций над первой системой во второй уже не может получиться никаких реальных изменений. Это, конечно, является лишь другой формулировкой того, что понимается под отсутствием взаимодействия между двумя системами. Таким образом одной и той же реальности (вторая система после взаимодействия с первой) можно сопоставить две различные волновые функции (в нашем примере ψ_k и ϕ_r).
>
> Но ведь может случиться, что две волновые функции ψ_k и ϕ_r являются собственными функциями двух некоммутирующих операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$, причем ψ_k соответствует собственному значению p_k, а ϕ_r соответствует собственному значению q_r.
>
> В таком случае, измерив А и В, мы будем в состоянии предсказать с достоверностью и без какого бы то ни было возмущения второй системы или значение величины P(т.е. p_k) или значение величины Q(т.е. q_r).

> Согласно нашему критерию реальности в первом случае мы должны считать элементом реальности величину P, а во втором случае элементом реальности будет величина Q. Но, как мы видели, обе волновые функции ψ_k и ϕ_r относятся к одной и той же реальности.

В качестве примера авторы рассматривают случай, когда подсистемы - это частицы одной степени свободы, а волновая функция системы равна

$$\Psi(x_1, x_2) = C\delta(x_1 - x_2 + x_0),$$

где x_0- некоторая константа. Эту функцию можно представить в форме

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_p(x_1)\psi_p(x_2)dp,$$

где

$$u_p(x_1) \sim e^{\frac{i}{\hbar}px_1},$$

$$\psi_p(x_2) \sim e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_2-x_0)}.$$

Пусть величиной A будет количество движения первой частицы, тогда функции u_p, будут собственными функциями A, соответствующими собственным значениям p. Функция ψ_p - это собственная функция оператора количества движения второй частицы $P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2}$, соответствующая собственному значению $-p$.

С другой стороны волновую функцию системы можно представить в форме

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(x_1)\phi_x(x_2)dx,$$

где

$$v_x(x_1) \sim \delta(x_1 - x),$$

а

$$\phi_x(x_2) \sim \delta(x - x_2 + x_0).$$

Поэтому в качестве B можно взять координату первой частицы, тогда функция v_x, будет собственным вектором B, соответствующим собственному значению x, а ϕ_x - собственной функцией оператора координаты второй частицы $Q = x_2$, соответствующей собственному значению $x + x_0$. Так как

$$QP - PQ = i\hbar,$$

то функции ψ_p и ϕ_x действительно являются собственными функциями двух некоммутирующих операторов.

> Выше мы показали, что или
>
> 1) квантово-механическое описание реальности посредством волновой функции не является полным или
>
> 2) если операторы, соответствующие двум физическим величинам, не коммутируют, эти две величины не могут одновременно обладать реальностью.

> Исходя затем из предположения, что волновая функция действительно дает полное описание физической реальности, мы пришли к выводу, что две физические величины с некоммутирующими операторами могут быть реальными одновременно. Таким образом отрицание предположения 1 приводит к отрицанию единственного остающегося предположения 2. Итак, мы вынуждены заключить, что квантово-механическое описание физической реальности посредством волновых функций не является полным.

АНАЛИЗ БОРА

В Европе быстро откликнулись на статью в американском журнале. В выпуске Nature, датированном 22 мая 1935 года, был опубликован обзор статьи трех авторов. Розенфельд, бывший в то время ассистентом Бора, вспоминал [**Rosenfeld 1967**]:

> Эта атака обрушилась на нас как гром среди ясного неба. Новая забота пришла в самое неподходящее время. Тем не менее, как только Бор услышал мой пересказ доводов Эйнштейна, все остальное было отложено в сторону.

Уже 29 июня 1935 Бор года послал письмо редактору журнала Nature [**Bohr 1935a**]. В письме отвергалось предложенное в EPR определение физической реальности, на том основании, что оно становится неопределенным, будучи примененным к задачам атомной физики, и сообщалось, что подробное обсуждение проблемы, детали которого должны быть опубликованными Physical Review, показывает, что в определение физической реальности следует включить и процедуру измерения соответствующих величин. Отсутствие такого условия в EPR не позволяет согласиться с ее выводами.

Рассказывая о статье Бора [**Bohr 1935b**] мы, как и в случае EPR, будем подробно цитировать ее перевод из [**УФН 1936**]. Бор напоминает, что

> характерной чертой существующей математической формулировки квантовой механики является ... то, что если мы имеем две канонически сопряженные величины, то при описании состояния механической системы невозможно приписать им обеим определенные значения.

Далее Бор приписывает авторам EPR не совсем то, что они утверждали:

> В силу этого они считают существующую математическую формулировку неполной и выражают убеждение, что можно построить более удовлетворительную теорию.

Напомним, что авторы EPR утверждали, что несовместимость канонически сопряженных величин может не сохраняться при сужении большой системы на подсистему, и видят порок теории именно в этом обстоятельстве.

Бор, не желая опровергать формулы, сопоставляет математические построения EPR с конкретной экспериментальной установкой, фактически возвращая нас к (неизвестному ему) мысленному эксперименту Эйнштейна.

> Тот частный случай квантово– механического состояния двух свободных частиц для которого... авторы дают явное аналитическое выражение, может быть воспроизведен, по крайней мере принципиально, при помощи простой экспериментальной установки,

состоящей

> из жесткой диафрагмы с двумя параллельными щелями, весьма узкими по сравнению с расстоянием между ними, причем сквозь каждую из этих щелей проходит независимо друг от друга по одной частице с заранее измеренным количеством движения.

Диафрагма эта не связана жестко с остальными частями прибора и может менять свое количество движения. Если измерить количество движения этой диафрагмы до и после прохождения частиц, то можно будет узнать

> сумму составляющих количества движения обеих частиц в направлении, перпендикулярном к щели, и разность их начальных координат, отсчитываемых в том же направлении. При этом канонически сопряженные величины, т.е. разность составляющих их количеств движения и сумма их координат останутся, конечно, совершенно неизвестными.
>
> При таком расположении опыта ясно, что если затем произвести единственное измерение либо положения, либо количества движения одной из частиц, то тем самым будет автоматически определено с любой желаемой точностью положение или, соответсвенно количество движения другой частицы.
>
> Это будет по крайней мере в том случае, если длина волны, соответствующая свободному движению каждой из частиц, мала по сравнению с шириной щели.
>
> Как указано названными авторами, на этой стадии опыта мы имеем полную возможность свободно выбирать тот или иной вариант опыта, смотря по тому, какую из названных величин мы желаем определить, причем ни в том, ни в другом случае мы не трогаем непосредственно ту частицу, которой мы интересуемся.

Пока рассуждения Бора следуют EPR, причем кажется, что все трудности уже позади, нужно только описать установку, которая будет измерять характеристики одной из частиц. Но именно в этом месте нас ожидает непредвиденное (”Господь изощрен, но не злобен” *) – говорил Эйнштейн в 1921 году). Дело в том, что

> та ”свобода выбора” которую нам предоставляет эта постановка опыта, как раз и означает, что нам надлежит остановиться на одной из двух разных экспериментальных манипуляций, допускающих однозначное применение одного из двух дополнительных классических понятий.

Вернемся к аргументации Бора. Он замечает, что измерить положение одной из частиц - значит

> установить, как она будет себя вести по отношению к какому-нибудь прибору, неподвижно скрепленному с подставкой, определяющей систему отсчета... такого рода измерение дает нам знание того положения, которое занимала относительно этой системы отсчета наша диафрагма после того, как частицы прошли сквозь щели.

Измерение сопровождается

> совершенно неопределенным переносом количества движения от первой частицы к упомянутой подставке.
>
> Что лишает нас
>
> всякой будущей возможности применить закон сохранения количества движения к системе, состоящей из диафрагмы и обеих частиц.

---

*) Raffinert ist der Herr Gott, aber boshaft ist Er nicht.

В результате возникает ситуация, полностью чуждая классической механике – справедлив закон сохранения некоторой величины (в данном случае импульса), но система находится в таком состоянии, когда эта величина не имеет точного значения (т.е. вектор состояния системы не является собственным вектором соответствующего оператора). Это приводит к потере

> той единственной основы, которая могла позволить нам однозначно применить понятие количества движения к предсказаниям, относящимся к поведению второй частицы. И наоборот, если бы мы пожелали измерить количество движения одной из частиц, мы потеряли бы вледствие неизбежного в таком измерении и поддающегося учету смещения всякую возможность судить по поведению этой частицы о положении диафрагмы относительно остального прибора и лишили бы себя всякой основы для предсказаний, относящихся к локализации частицы.

Таким образом хитроумную конструкцию, основанную на законе сохранения количества движения разрушает механизм, уже неоднократно обсуждавшийся в дискуссиях Эйнштейна и Бора:

> конечность взаимодействия между объектом и измерительным прибором, обусловленная самим существованием кванта действия, влечет за собой - вследствие невозможности контролировать обратное действие объекта на измерительный прибор (а эта невозможность будет иметь место, если только прибор удовлетворяет своему назначению) - необходимость окончательного отказа от классического идеала причинности и радикальный пересмотр наших взглядов на проблему физической реальности.

Выяснив, что предложенный Эйнштейном механизм извлечения информации требует большего, чем может дать квантовая механика, Бор переходит к анализу предложенного в EPR критерия реальности. Он утверждает, что этот критерий содержит существенную неоднозначность, и, чтобы придать своим рассуждениям большую ясность, рассматривает несколько примеров измерительных установок.

> Начнем с простого случая частицы, проходящей сквозь щель в диафрагме, которая может составить часть более или менее сложной экспериментальной установки. Даже если бы количество движения этой частицы до ее падения на диафрагму было вполне известно, дифракция плоской волны (дающей символическое представление состояния частицы) от краев щели повлечет за собой неопределенность в количестве движения частицы после ее прохождения сквозь диафрагму, причем эта неопределенность будет тем большей, чем уже щель. ...ширину щели (по крайней мере, если она все еще велика по сравнению с длиной волны) можно принять за меру неопределенности Δq в положении частицы относительно диафрагмы в направлении перпендикулярном к щели.
>
> Далее, из де-бройлевского соотношения между количеством движения и длиной волны легко усмотреть, что неопределенность Δp в количестве движения частицы в этом направлении сязана с Δq соотношением Гайзенберга
>
> $$\Delta p \Delta q \quad \sim \quad \hbar.$$
>
> ...неопределенность Δp неразрывно связана с обменом количества движения между частицей и диафрагмой. Для наших рассуждений фундаментальную важность приобретает в связи с этим вопрос о том, в какой мере может быть учтено таким образом количество движения, в какой мере оно может быть принято во внимание

при описании того явления, которое мы изучаем при помощи данной постановки опыта, первым этапом которого можно считать прохождение частицы сквозь диафрагму.

...предположим сперва, что наша диафрагма, так же как и другие части прибора, например,

вторая диафрагма с несколькими щелями, параллельными первой, и

фотографическая пластинка

жестко связаны с подставкой, которая и определяет пространственную систему отсчета. Тогда количество движения, передаваемое частицей диафрагме, а также и другим частям прибора, будет уходить в их общую подставку. Таким образом в этом случае мы сознательно отказываемся от всякой возможности учитывать реакцию частицы на отдельные части прибора и принимать эти реакции в расчет в наших предсказаниях, относящихся к окончательному результату опыта, – например, к фотографической пластинке.

Невозможность более подробного анализа взаимодействий, происходящих между частицей и измерительным прибором, не является, очевидно, особенностью именно данной постановки опыта, но представляет существенное свойство всякой постановки, пригодной для обсуждения явлений рассматриваемого типа, в которых мы сталкиваемся со своеобразной чертой индивидуальности, совершенно чуждой классической физике. В самом деле, если бы у нас была какая-нибудь возможность учитывать количество движения, передаваемое частицей отдельным частям прибора, то это сразу позволило бы нам выводить заключения, относящиеся к "ходу" такого рода явлений. Например, мы могли бы тогда указать, сквозь какую именно щель во второй диафрагме прошла частица на своем пути к фотографической пластинке, - а этого никак нельзя согласовать с тем фактом, что вероятность частицы попасть на данный участок поверхности пластинки определяется не наличием той или иной щели в отдельности, а расположением всех щелей во второй диафрагме, которых можно достигнуть сопоставленная частице волна, претерпевшая дифракцию от щели в первой диафрагме.

...мы могли бы воспользоваться другой экспериментальной
установкой, в которой первая диафрагма уже не будет жестко связана с остальными частями прибора. В такой установке мы имели бы по крайней мере принципиальную возможность измерить с любой желаемой точностью количество движения диафрагмы до и после прохождения частицы, а значит и указать и наперед количество движения последней после ее прохождения сквозь щель. В самом деле,такого рода измерения предполагают только возможность однозначного применения классического закона сохранения количества движения, причем применять его нужно, например, к процессу столкновения между диафрагмой и каким-нибудь пробным телом, количество движения которого надлежащим образом контролируется до и после столкновения.

Правда, такого рода контроль будет существенно зависеть от изучения хода в пространстве и времени некоторого такого процесса, к которому были бы применимы представления классической механики; однако, если все пространственные размеры и промежутки времени взяты достаточно большими, то это, очевидно, не связано ни с какими ограничениями точности в определении количества движения пробных тел, а связано только с отказом от точного контроля их локализации в пространстве и времени. Последнее обстоятельство представляет полную аналогию с тем отказом от учета количества движения закрепленной диафрагмы, с которым мы встретились выше при обсуждении первоначальной установки. Такого рода отказ обусловлен в конце концов требованием чисто классического описания измерительного прибора; это требование влечет за собой необходимость ввести в описание действия прибора известные допуски, соответствующие соотношениям неопределенности квантовой механики.

... Наиболее существенная разница между обеими рассмотренными установками заключается в следующем. В той установке, которая пригодна для измерения количества движения первой диафрагмы, мы уже не можем использовать эту диафрагму как измерительный прибор и употреблять ее с той же целью, как в первоначальной установке. Поскольку мы интересуемся положением диафрагмы относительно прибора, мы должны считать ее как и частицу, проходящую сквозь щель, объектом исследования; это означает, что мы должны явным образом принять во внимание квантово-механическое соотношение неопределенности для ее положения и количества движения.

В самом деле, даже если бы мы знали то положение (относительно пространственной системы отсчета, т.е. подставки), которое занимала диафрагма до первого измерения ее количества движения, и даже если бы мы точно установили ее положение после второго измерения, то все же, пользуясь второй установкой мы, теряем возможность судить о положении диафрагмы в тот момент, когда сквозь щель проходила частица; это будет потому, что в каждом процессе столкновения диафрагмы с пробными телами она подвергается смещению, которое не поддается контролю. Поэтому вся наша установка в ее втором варианте, очевидно, непригодна для изучения тех явлений, которые изучались при помощи ее первого варианта. В частности, можно показать следующее. Предположим, что количество движения первой диафрагмы измерено с точностью, достаточной, чтобы судить о том, прошла или нет частица сквозь какую-нибудь определенную щель во второй диафрагме. В таком случае даже минимальная неопределенность в положении первой диафрагмы, совместная с наличием такого рода сведений о ее количестве движения, сотрет всю интерференционную картину, определяющую расположение тех зон на фотографической пластинке, куда возможно попадание частицы. Между тем, наличие нескольких щелей во второй диафрагме непременно привело бы к такого рода интерференционному эффекту, если бы взаимное расположение всех частей прибора было бы фиксировано. Предположим, что мы пользуемся установкой, пригодной для измерения количества движения первой диафрагмы. Ясно, что даже если мы измерим это количество движения до прохождения частицы сквозь щель, мы имеем после этого прохождения свободный выбор между двумя возможностями
узнать количество движения частицы, либо
ее начальное положение по отношению к остальной части прибора.

В первом случае нам достаточно произвести еще одно определение количества движения диафрагмы, тем самым лишив себя навсегда возможности узнать ее точное положение в то время, как сквозь нее проходит частица.

Во втором случае достаточно определить положение диафрагмы относительно системы отсчета, с чем сопряжена потеря возможности учета количества движения, переданного диафрагме частицей. Если диафрагма обладает достаточно большой массой по сравнению с массой частицы, мы можем сделать так, чтобы после первого определения момента количества движения диафрагмы она оставалась в покое в некотором неизвестном положении относительно других частей прибора; тогда последующая фиксация положения может просто состоять в установлении жесткой связи между диафрагмой и подставкой.

В рассматриваемых явлениях мы имеем дело отнюдь не с каким-либо неполным описанием, с произвольным выхватыванием разных элементов физической реальности за счет других таких элементов, но с рациональным проведением различия между существенно разными экспериментальными установками и процессами измерения, из которых одни допускают однозначное применение пространственной локализации, а другие - законное применение теоремы о сохранении количества движения. Если и остается какой-нибудь произвол, то он относится только к нашей свободе выбора использования различных измерительных приборов, характерной для самого понятия об эксперименте. С каждой постановкой опыта связан отказ от одной из двух сторон описания физических явлений; эти две стороны будут здесь как бы дополнительной одна к другой, когда их сочетание характеризует методы классической физики.

Отказ этот существенно обусловлен тем, что в области квантовых явлений невозможен точный учет обратного действия объекта на измерительные приборы, т.е. учет переноса количества движения в случае измерения положения и учет смещения в случае измерения количества движения. В связи с этим никакие сравнения и аналогии между квантовой механикой и обыкновенной статистической механикой не смогут передать сути дела, – как бы ни были полезны такие аналогии для формального изложения теории.

С нашей точки зрения мы видим теперь, что формулировка вышеупомянутого критерия физической реальности, предложенного Эйнштейном, Подольским и Розеном, содержит двусмысленность в выражении "без какого бы то ни было возмущения системы". Разумется, в случае, подобном только что рассмотренному, нет речи о том, чтобы в течение последнего критического этапа процесса измерения изучаемая система подверглась какому-либо механическому возмущению. Но и на этом этапе речь идет по существу о возмущении в смысле влияния на самые условия, определяющие возможные типы предсказаний будущего поведения системы. Так как эти условия составляют существенный элемент описания всякого явления, к которому можно применять термин "физическая реальность", то мы видим, что аргументация упомянутых авторов не оправдывает их заключения о том, что квантовомеханическое описание существенно неполно.

Напротив того, как вытекает из наших предыдущих рассуждений, это описание может быть охарактеризовано как разумное использование всех возможностей однозначного толкование измерений, совместимого с характерным для квантовых явлений конечным и не поддающимся учету взаимодействием между объектом и измерительными приборами. В самом деле, только это взаимное исключение всяких двух экспериментальных манипуляций, которые позволили бы дать однозначное определение двух взаимно-дополнительных физических величин, – только это взаимное исключение и освобождает место для новых физических законов, совместное существование которых могло бы на первый взгляд

> показаться противоречащим основным принципам науки. Именно эту совершенно новую ситуацию в отношении описания физических явлений мы и пытались характеризовать термином дополнительность.

Бор не пытается найти неточность в рассуждениях EPR. Он просто замечает, доводы этой статьи не согласуются с понятием **дополнительности**, которое для Бора являлось неотъемлемым свойством новой философии природы. Концепция **дополнительности** для Бора означала среди прочего отказ от классического понятия причинности и коренной пересмотр классического понятия физической реальности.

Большинство опровержений EPR были именно такого рода. Эйнштейн говорил одному из своих учеников Гофману, что хранит огромное число писем от физиков, в которых доказывается, что он неправ.

> Эйнштейна восхищало, что все эти ученые были совершенно уверены в том, что его доводы ошибочны, но все они черпали свою уверенность из разных источников.
>
> [**Hoffmann 1973**]

Между тем и авторы EPR и Бор были едины в одном: если нам известно, что состояние системы двух частиц задается волновой функцией $\Psi(x_1, x_2)$, то состояние каждой из частиц еще нуждается в определении. Необходимая для этого процедура "редукции волнового пакета" изложена в EPR со школьной непосредственностью: напиши формулу, а потом зачеркни ненужное. Недаром откликнувшийся по свежим следам на EPR молодой американский физик Фарри [**Furry1936**] счел необходимым особо обсудить этот вопрос:

> эта процедура общеизвестна и воспринята физиками. Она применяется и EPR, но автор не сумел найти в литературе точное описание применения к обсуждаемому случаю. Это можно сделать следующим образом: если M - наблюдаемая, связанная с системой I, и ψ_μ - собственная функция, соответствующая собственному значению μ, то можно представить $\Psi(x_1, x_2)$ рядом ортогональных функций $\psi_\mu(x_1)$, коэффициенты при которых являются функциями x_2:
>
> $$\Psi(x_1, x_2) \quad = \quad \sum_\mu \psi_\mu(x_1)\zeta_\mu(x_2), \qquad (*)$$
>
> где
>
> $$\zeta_\mu(x_2) \quad = \quad \int {\psi_\mu}^*(x_1)\Psi(x_1, x_2)dx_1. \qquad (**)$$
>
> Статистическую информацию о системе II после измерения величины M с результатом μ можно получить в результате следующей процедуры. Предположим, что совершено большое число измерений объединенной системы I+II, позволяющих задать волновую функцию системы в форме $(*)$. Каждое из этих измерений сводится к определению значений M, заданной в системе I и некоторой величины F, заданной в системе II. В результате будут получены относительные частоты различных значений δ величины F, соответствующие значению μ, найденному для величины M. Эти частоты по определению пропорциональны величинам $|\langle\Psi|\psi_\mu\chi_\delta\rangle|^2$ (χ_δ - собственные функции F, принадлежащие собственным значениям δ) и эти величины в силу (**) равны $|\langle\zeta_\mu|\chi_\delta\rangle|^2$. Поскольку это справедливо для всех величин F, можно заключить, что измерение, проведенное в системе I и приведшее к

> значению μ для величины M, позволяет заключить, что система II находится в состоянии, определяемом с точностью до нормировки волновой функцией (**).

Легко заметить, что содержащееся в последней фразе утверждение никак не следует из предыдущих рассуждений, в которых предполагалось, что производятся совместные измерения в системах I и II. Ссылка на произвольность величины F не может отменить необходимость совместного измерения в двух системах. Рассуждения Фарри лишь подчеркивают сложность понятия *редукция волнового пакета.* В них ясно все, кроме исходного положения: предлагается измерять значения некоторой величины в подсистеме II при условии, что некоторая величина, относящаяся к системе I имеет точное значение. Однако, логически нельзя исключить такой возможности: ни в системе I, ни в системе II нет величин, имеющих точные значения.

Анализ Бора, опровергая понятие физической реальности по EPR, также ничего не говорит о том, как надо описывать состояния подсистем.

Для нас, несомненно, будет полезно узнать мнение еще одного конгениального Эйнштейну и Бору собеседника, которого в нашем случае можно считать заочным третейским судьей. Публикуя переводы статей Эйнштейна и Бора в "Успехах физических наук", Фок снабдил публикацию своим предисловием. По его мнению развернувшуюся полемику можно,

> если угодно, рассматривать как спор о физическом смысле волновой функции... Эйнштейн говорит, что основным понятием теории является понятие состояния, описываемого волновой функцией. Эйнштейн понимает слово "состояние" в том смысле, какой ему обычно приписывается в классической физике, т.е. в смысле чего-то вполне объективного и совершенно независящего от каких бы то ни было сведений о нем. Отсюда и проистекают все парадоксы... В квантовой механике понятие о состоянии сливается с понятием "сведения о состоянии, получаемые в результате определенного максимально- точного опыта". Эйнштейн показывает, что не трогая системы, можно придать ее волновой функции тот или иной вид. Если считать вместе с Эйнштейном, что волновая функция описывает объективное состояние, то конечно, его результат будет иметь характер парадокса. Ведь невозможно себе представить, чтобы объективное состояние системы (что бы мы под этим не подразумевали) менялось в результате каких бы то ни было операций, произведенных не над ней, а над другой системой, которая с ней вовсе не взаимодействует. Но хотя в результате таких операций не может меняться "объективное состояние" системы, зато могут меняться "сведения о состоянии", т.е. состояния в квантовом смысле. Поэтому все парадоксы исчезают, коль скоро мы откажемся от проводимого Эйнштейном неверного "объективного" толкования волновой функции и примем правильное ее толкование, т.е. будем считать, что она описывает "состояние в квантовом смысле" или "сведения о состоянии, получаемые в результате определенного максимально-точного опыта".

Мы еще вернемся к понятию "максимально-точного" опыта. Сейчас для нас важно следующее утверждение Фока:

> сведения о системе не обязаны быть максимально-точными. Это значит, что система не обязана иметь определенную (хотя бы неизвестную) волновую функцию.

В этом случае

> мы... можем только построить (по Нейману) некоторый "статистический оператор", который позволяет вычислить вероятности и математические ожидания для всех математических величин, соответствующих имеющимся сведениям.

> Таким образом с максимально-точными сведениями о системе мы можем сопоставить волновую функцию (это будет так называемый случай чистого состояния, reiner Fall), а с менее точными сведениями мы волновую функцию сопоставить не можем (это будет так называемый случай смеси состояний, Gemisch).
>
> С этим обстоятельством связана характерная особенность квантово-механического описания сложной системы, состоящей из двух или нескольких подсистем (случай, рассмотренный Эйнштейном).

Итак, Фок утверждает, что еще до публикации EPR, трудности, упоминаемые в этой статье были квантовой механикой благополучно разрешены. В совершенстве владеющий математическим аппаратом физики Фок обычно не ошибался.

ПОСЛЕ БИТВЫ
ЧТО ГОВОРИЛИ О КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ ЭЙНШТЕЙН И БОР ПОСЛЕ 1935 ГОДА

В 1936 году Эйнштейн опубликовал в "Журнале Франклинского Института" статью под заглавием "Физика и реальность" [**Einstein 1936**]. Этой публикации, несомненно, придавалось большое значение, поскольку статья была напечатана на немецком языке оригинала с последующим английским переводом. Она была практически немедленно опубликована в русском переводе [**Эйнштейн 1937**]. Мы еще вернемся к этой статье, чтобы обсудить содержащееся в ней изобретение: квантовые ансамбли, которые описывает Ψ-функция. Пока же можно сказать, что несмотря на содержащееся в ней косвенное признание убедительности доводов Бора, окончательный приговор был по-прежнему суров. Эйнштейн формулирует символ веры физика:

> найдется ли физик, который верит в то, что мы никогда не проникнем в смысл изменений, происходящих в отдельной системе, не поймем структуру этой системы с ее причинными связями, несмотря на то, что эти изменения происходят, благодаря удивительным изобретениям камеры Вильсона и счетчика Гейгера, на наших глазах? В это можно поверить не входя в противоречие с логикой, но утверждение, что я не смогу перейти к более полной концепции, полностью противоречит моему научному инстинкту.

Выясняется, что квантовая механика, мало отвечает только что сформулированному идеалу науки, поэтому мнение мэтра о квантовой механике не слишком благоприятно для последней:

> Квантовая механика, несомненно, владеет красивейшими элементами истины, и она будет пробным камнем любой будущей теории, из которой квантовую механику можно будет вывести как предельный случай (как электростатика выводится из уравнений Максвелла). Однако я уверен в том, что квантовая механика не может быть исходной точкой поиска новой теории, как мы не можем, например, вывести основы механики исходя из термодинамики. ...мы непременно встретимся с противоречиями, если только попытаемся считать квантовую теорию полным описанием индивидуальных систем и процессов.

Бор возвращался к спорам с Эйнштейном лишь в юбилейных статьях, в которых практически ничего не говорилось о том, как влияли эти споры на точку зрения самого Бора. Тем более любопытно познакомиться с отголоском дискуссии Бора и

Эйнштейна – вполне дружелюбным разговором двух классиков физики Бора и Фока, состоявшемся в 1957 году. Как читатель уже мог убедиться, в 1936 году Фок полностью разделял взгляды Бора. Однако последующие размышления несколько изменили его взгляды на основы квантовой механики. Во время пребывания в Копенгагене Фок подробно обсудил с Бором интересующие его вопросы.

> С самого начала было ясно, что наши расхождения во взглядах не касаются физических основ интерпретации квантовой механики. ...После нескольких личных бесед я представил Бору записку с изложением своей точки зрения. Эта записка, написанная на английском языке и озаглавленная "Мой ответ профессору Нильсу Бору", была изучена Бором и его сотрудниками чрезвычайно внимательно. Ответ Бора был опубликован в 1959 году [**Бор 1959**].

Познакомимся с доводами Фока и мы. Вот как понимает Фок принцип дополнительности:

> Введенное Вами понятие дополнительности - весьма глубокое, и, возможно, оно связано с философским понятием диалектики. ...В атомной физике дополнительность относится к ограничениям, налагаемым соотношением Гайзенберга на *классическое* описание явлений, что же касается описания квантовомеханическими средствами, то никаких ограничений на уточнение такого описания свойств атомных объектов не налагается. (Под "свойствами атомных объектов"я разумею такие свойства, как заряд, масса, спин, степени свободы, вид волнового уравнения в данном поле и т.п.) Разумеется все эти свойства проявляются только в экспериментах, допускающих классическое описание с учетом дополнительности. Но обнаруживаемые в таких экспериментах распределения вероятностей могут быть вычислены со все большей и большей точностью по мере того, как мы все глубже и глубже проникаем в природу атомных объектов и используем все более утонченные квантовомеханические средства для их описания. Мне кажется, что при разъяснении понятия дополнительности непременно нужно подчеркивать, что для нашего познания природы и свойств атомных объектов нет никаких ограничений.

Не менее интересна и оценка Фоком "неконтролируемого взаимодействия":

> По моему мнению, взаимодействие между атомным объектом и измерительным прибором имеет два аспекта, а именно: а) гносеологический аспект и б) физический аспект.
>
> а) Всегда существует граница между той частью экспериментальной установки, которая описывается квантовомеханическими
> средствами и рассматривается как объект, подлежащий изучению, и той ее частью, которая описывается классическими средствами и рассматривается как измерительный прибор. Эта граница обязана своим происхождением применяемому способу описания, и когда мы говорим о "неконтролируемом взаимодействии" по обе стороны границы, эти слова не следует понимать буквально.
>
> б) Существует физическое взаимодействие между упомянутыми двумя частями экспериментальной установки. Это взаимодействие никоим образом не является неконтролируемым, но для того, чтобы его исследовать, необходимо провести новую границу, включив в квантово-механическую часть кое-что из того, что раньше относилось к классической части устройства (и добавив, если

> нужно, новую классическую часть). Если отобрать те случаи, в которых промежуточная часть (сперва трактовавшаяся как классическая, а затем как квантово-механическая) определенным образом прореагировала (например, произошло почернение фотопластинки), то получится уточненная теория первоначального измерительного прибора. Но при этом возникает новая "гносеологическая граница".
>
> На что я особенно хотел бы обратить внимание - это возможность исследовать физические процессы в любом месте экспериментальной установки. То обстоятельство, что где-то все приходится проводить "гносеологическую границу" такой возможности не исключает.

Ответ Бора позволил Фоку заключить, что

> Бор отказывается от понятия "неконтролируемое взаимодействие" (в его статье этот термин не употребляется ни разу) ...

Читатель сам может убедиться в том, что Бор значительно смягчил толкование понятия дополнительности:

> В области классической физики все стороны поведения данного объекта могут быть в принципе обнаружены при помощи **одной** экспериментальной установки, хотя на практике часто бывает удобно применять для изучения разных сторон явления разные установки. В самом деле, полученные таким образом данные просто складываются и могут быть скомбинированы в одну связную картину поведения изучаемого объекта. Напротив, в квантовой физике данные об атомных объектах, полученные при помощи разных экспериментальных установок, находятся в своеобразном дополнительном отношении друг к другу. Действительно, следует признать, что такого рода данные, хотя и кажутся противоречащими друг другу при попытке скомбинировать их в одну картину, на самом деле исчерпывают все, что мы можем узнать о предмете. Отнюдь не ограничивая наши стремления задавать природе вопросы в форме экспериментов, понятие **дополнительности** просто характеризует возможные ответы, получаемые в результате такого исследования, в том случае, когда взаимодействие между измерительным прибором и объектом составляет нераздельную часть явления.

За два года до бесед Бора с Фоком произошел случай, показывающий, что Бор не любил возвращаться к разговорам о принципе дополнительности. Любимый ученик Гайзенберга Вайцзекер в 1955 году писал статью, посвященную семидесятилетию Бора. По молодости Вайцзекер не мог присутствовать на докладе в Комо, однако уже в 1930 году он присоединился к Лейпцигскому кружку Гайзенберга. Вот как описывал это время основатель кружка:

> Высокоодаренные молодые люди из самых разных стран съезжались к нам, чтобы принять участие в развитии квантовой механики или приложить ее к изучению структуры материи. Эти активные, открытые для всего нового физики обогатили наши семинарские дискуссии и почти каждый месяц расширяли применения новых идей. Швейцарец Феликс Блох заложил основу понимания электрических свойств металлов, Лев Ландау из России и Рудольф Пайерлс спорили о математических проблемах квантовой электродинамики, Фридрих Хунд разрабатывал теорию химической связи, Эдвард Теллер рассчитывал оптические свойства молекул. В возрасте едва лишь 18 лет к этой группе присоединился Карл Фридрих Вайцзекер и внес философскую ноту в эти беседы...

Навещал Гайзенберга и Бор, так что Вайцзекер воспринял принцип дополнительности в юности и буквально из первых рук. Работая над юбилейной статьей он перечел ранние работы Бора и открыл, что уже 25 лет неверно понимает смысл дополнительности. Вайцзекер обратился к Бору с просьбой точнее сформулировать высказывания того времени. Бор ответил на это твердым отказом.

Как всегда, одним из самых ясных, а в этом случае и самым оригинальным, было суждение Паули, в данном случае об EPR-проблеме. В 1947 году он опубликовал [**Pauli 1947**] рецензию на книгу известного философа Райхенбаха [**Reichenbach 1944**], посвященною философским проблемам квантовой механики. Добросовестно, как и подобало крестнику Маха, разбирая философские построения Райхенбаха, Паули в конце рецензии коснулся чисто физической задачи.

> Завершим этот обзор кратким упоминанием о применении этих (т.е. сформулированных Райхенбахом) принципов к задаче о системах с корреляциями. Дискуссия о свойствах таких систем была начата Эйнштейном, Фоком и Подольским (discussion was started by Einstein, Fock and Podolsky). Обсудим состояние системы, состоящей из двух частиц, у которой сумма $p_1 + p_2$ импульсов p_1 и p_2 (в некотором определенном направлении) и разность $q_1 - q_2$ их координат (в том же направлении) имеют определенные значения. Значения индивидуальных ипульсов p_1 и p_2 или координат q_1 и q_2 в таком состоянии не определено. Если все же измеряется импульс p_1 или (по выбору экспериментатора, координата q_1), то это измерение, естественно, не может повлиять на состояние второй частицы (this meauserement certainly does not disturb the other particle). Но после этого измерения становится известным (predictable) значение p_2 (или q_2 соотвественно). Мы согласны с выводом автора (в противоположность мнению Эйнштейна, Фока и Подольского) что это не противоречит требованию причинности (does not contain any causal anomaly). Нелзя говорить, что это – измерение p_1 (или q_1), потому что перед этим измерением значения указанных величин были неопределимы (indeterminable). Только после измерения частицы 1 утверждения "p_2 имеет определеное значение" или "q_2 имеет определенное значение" становятся осмысленными (истинными или ложными).

Мы воспроизвели выдержку из статьи Паули в том виде, как она напечатана во втором томе его избранных трудов [**Pauli 1964**], и не знают, как она выглядела в журнале Dialectica. Точно также им осталась недоступной книга Райхенбаха. Поэтому им неизвестно, какие ученые упоминались в этих публикациях в качестве инициаторов дискуссии о свойствах "систем с корреляциями", они не знают, имеем ли мы дело с чьей-то опиской или с шуткой гения. Важно обратить внимание на два обстоятельства.

Во-первых, при описании эффектов в рассматриваемой системе Паули рассуждает в терминах матрицы плотности. Это не удивительно, потому что именно в книге Паули [**Pauli 1933**] содержится одно из лучших изложений теории статистического оператора.

Во-вторых, Паули фактически предлагает способ вычисления матрицы плотности одной из подсистем большой системы, при условии, что система подверглась воздействию, выделяющему определенное состояние второй подсистемы. Техническую сторону этой мы обсудим несколько позднее.

Постараемся выяснить, как предположения работы трех авторов согласуются с основными положениями квантовой механики, известными до 1935 года. Без этого трудно понять, насколько были потрясены устои считавшейся завершенной теории.

После работы Борна [**Born1926**] считалось, что любые средние значения величины A можно вычислить по формуле

$$\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle \quad = \quad \int dx \Psi(x)^* \hat{A} \Psi(x), \qquad (1)$$

где $\hat{A}$ – оператор, соответствующий величине A, функция Ψ квадратично интегрируема и ее можно нормировать условием

$$\int dx \Psi(x)^* \Psi(x) \quad = \quad 1. \qquad (2)$$

Поскольку в формуле (1) содержатся как характеристика физической величины - оператор $\hat{A}$, так и не зависящий от A объект - функция Ψ, удовлетворяющая условию (2), то естественно принять функцию Ψ в качестве характеристики состояния системы. Это соглашение можно сформулировать так:

Число $\langle\Psi|A|\Psi\rangle$ равно среднему
значению величины A в состоянии Ψ.

Известно, что совокупность квадратично интегрируемых функций,
образует пространство Гильберта, поэтому с переменными физической системы можно связать линейные операторы, определенные в гильбертовом пространстве.

Возможные состояния системы (или хотя бы часть возможных состояний) естественно связать с векторами этого пространства. Определение (1) показывает, что если $\hat{A}$ - самосопряженный (или эрмитов) оператор, то среднее значение связанной с A физической величины всегда действительно. Физические величины, связанные с эрмитовыми операторами, следуя Дираку, называют *наблюдаемыми*.

В общем случае нельзя ожидать, что любая величина в любом состоянии имеет точное значение. В теории вероятностей степень размытости действительной величины определяется ее дисперсией. Перенесем эти понятия в квантовую механику.

Для дальнейшего существенно, что дисперсию наблюдаемой A в состоянии Ψ можно представить как квадрат некоторого вектора:

$$D_\Psi(A) \quad \equiv \quad \langle\Psi|\hat{A}^2|\Psi\rangle\rangle \quad - \quad (\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle)^2 \quad = \quad \langle\Psi^{'}|\Psi^{'}\rangle, \qquad (3)$$

где

$$\Psi^{'} \quad = \quad \hat{A}|\Psi\rangle \quad - \quad |\Psi\rangle\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle. \qquad (4)$$

Формула (3) означает, что дисперсия наблюдаемой в любом состоянии неотрицательна, поэтому в качестве определения понятия точного значения можно принять утверждение:

Наблюдаемая A имеет точное значение в состоянии ψ в том и только в том случае, если ее дисперсия в этом состоянии равна нулю.

Поскольку квадрат вектора в гильбертовом пространстве равен нулю в том и только том случае, когда сам вектор равен нулю, то можно сказать, что величина A имеет точное значение в состоянии ψ в том и только в том случае, если равен нулю вектор ψ', т.е. вектор ψ является собственным вектором оператора $\hat{A}$:

$$D_{\psi}(A)=0 \quad \leftrightarrow \quad \hat{A}\psi \quad = \quad a\psi. \qquad (5)$$

Известно, что для любого вектора ψ гильбертова пространства можно найти некоторый самосопряженный оператор A, для которого ψ является собственным вектором. Поэтому понятие *элемент физической реальности*, введенное в EPR, совпадает с понятием "волновая функция", которое содержится в формулах (1) и (2) Можно сказать, что

> **любой вектор гильбертова пространства, в котором действуют операторы, связанные с физическими переменными системы, является** *элементом физической реальности* **в EPR-смысле**.

При описании процесса *редукции волнового пакета* в EPR предполагается, что *элемент физической реальности* выделяется в результате измерения некоторой физической величины. Всякая ли величина пригодна для этой цели? Естественно обратиться к наблюдаемым с чисто дискретным спектром, на математическом языке – к самосопряженным операторам, собственные векторы которых образуют базис в гильбертовом пространстве. Пусть u_n - собственный вектор такого оператора $\hat{A}$, т.е.

$$\hat{A}^{+}=\hat{A}, \qquad \hat{A}u_n=u_n a_n, \qquad (6)$$

$$(a_n)^{*}=a_n, \quad a_j\neq a_k \quad \rightarrow \quad \langle u_j|u_k\rangle=\delta_{jk}. \qquad (7)$$

Если собственное число a_l вырождено, то совокупность собственных векторов, принадлежащих этому числу можно попарно ортогонализовать.

Таким образом действие самосопряженного оператора с чисто дискретным спектром можно определить формулой

$$\hat{A}\psi \quad = \quad \sum_{l} u_l a_l \langle u_l|\psi\rangle. \qquad (8)$$

Объединяя слагаемые с одинаковыми a_l, можно представить это выражение следующим образом:

$$\hat{A}\psi \quad = \quad \sum_{n} a_n \hat{P}_n \psi, \qquad (9).$$

Операторы $\hat{P}_n$ в этой формуле действуют следующим образом:

$$\hat{P}_n\psi \quad = \quad \sum_{s:(a_s=a_n)} u_s\langle u_s|\psi\rangle. \qquad (10)$$

Легко убедиться в том, что операторы P_n проецируют произвольный вектор гильбертова пространства в подпространство M_n - совокупность векторов, натянутых на собственные векторы $\hat{A}$, принадлежащие собственному значению a_n. Размерность этого пространства равна кратности вырождения собственного значения a_n и ее можно выразить формулой $dimM_n=Tr\hat{P}_n$, где символ $Tr\hat{O}$ означает след оператора $\hat{O}$. Операторы $\hat{P}_n$ удовлетворяют соотношениям:

$$\hat{P}_n^+ = \hat{P}_n, \quad \hat{P}_m\hat{P}_n = \delta_{mn}\hat{P}_m, \quad (\sum_n \hat{P}_n)\psi = \psi \quad \leftrightarrow \sum_n \hat{P}_n = \hat{E}, \tag{11}$$

где $\hat{E}$ - единичный оператор. Зная перечисленные свойства проекционных операторов, можно непосредственно пользоваться операторной формулой

$$\hat{A} \quad = \quad \sum_n a_n\hat{P}_n, \tag{12}$$

которая реализует "спектральное представление" оператора A. Используя спектральное представление оператора, нетрудно представить произвольную функцию оператора $\hat{A}$ как оператор:

$$f(\hat{A}) \quad = \quad \hat{f}(A) \quad = \quad \sum_n f(a_n)\hat{P}_n. \tag{13}$$

В частности,

$$(\hat{A} - c\hat{E})^2 \quad = \quad \sum_n (a_n - c)^2 P_n. \tag{14}$$

С помощью равенства (14) нетрудно получить выражение для дисперсии наблюдаемой A в состоянии ψ:

$$D_\psi(A) \quad = \quad \sum_n (a_n - \langle A\rangle)^2 ||P_n\psi||^2, \tag{15}$$

где $\langle A\rangle$ – среднее значение A в состоянии ψ.

Дисперсия определяется рядом, каждое из слагаемых которого неотрицательно, поэтому, если наблюдаемая A имеет в состоянии ψ точное значение, то каждое из слагаемых этого ряда должно быть равно нулю:

$$D_\psi(A) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \forall n \quad (a_n = \langle A\rangle) \quad \textit{или} \quad \hat{P}_n\psi = 0). \tag{16}$$

Таким образом, если дисперсия наблюдаемой равна нулю, то ее среднее значение должно быть равно одному из собственных чисел, скажем a_k, а поскольку все числа a_n различны, то справедливо следующее:

$$D_\psi(A) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \exists k \quad (\langle A\rangle = a_k, \quad \hat{P}_n\psi = 0, \quad \textit{если} \quad n \neq k). \tag{17}$$

Иначе говоря, если наблюдаемая A имеет в состоянии ψ точное значение, то оно равно одному из собственных чисел оператора $\hat{A}$ – a_k, а вектор этого состояния ψ лежит в подпространстве M_k – совокупности векторов, натянутых на собственные векторы оператора $\hat{A}$, принадлежащие собственному значению a_k. Наименьший произвол в определении вектора состояния достигается в том случае, когда все собственные значения оператора невырождены. В этом случае все подпространства M_k одномерны, поэтому

$$D_\psi(A) = 0, \quad \forall n \quad TrP_n = 1 \quad \leftrightarrow \quad \exists k \quad (\langle A\rangle = a_k, \psi = u_k e^{i\alpha}). \tag{18}$$

Таким образом для того, чтобы однозначно выделить в результате измерения *элемент физической реальности в смысле EPR*, т.е. луч в пространстве состояний, следует измерять наблюдаемую с достаточно точно определенными свойствами: ее *спектр должен быть дискретен и невырожден.*

В первом разделе EPR рассматривались состояния, которые выделялись в результате измерения импульса (*количества движения*) или координаты частицы. В классической механики эти величины изменяются непрерывно, поэтому результат их измерения всегда содержит некоторую неточность, которую, в принципе, можно сделать сколь угодно малой. Это хорошо согласуется с общими положениями теории вероятности: при измерении случайной величины с непрерывной функцией распределения значение этой величины всегда содержит некоторую неточность. Точное значение такой наблюдаемой можно понимать как предел результатов последовательных измерений с последовательно уменьшающейся ошибкой.

Непрерывность спектра импульса и координаты в квантовой механике является прямым следствием определения этих величин. Это свойство импульса и координаты проявляется в том, что формальные собственные векторы соответствующих операторов или не интегрируемы квадратично, или вообще не являются функциями в классическом смысле. Изобретенные Дираком обобщенные функции, когда δ-функция уравнивается в правах с классическими функциями и в то же время понимается как несобственный предел соответствующих классических функций, можно понимать как некоторую кодировку, с помощью которой в непрерывный спектр вводится понятие точного значения. Допуская в математический аппарат квантовой механики обобщенные функции "с точностью в смысле физиков", можно ослабить условие дискретности спектра наблюдаемой. Однако, требование невырожденности спектра остается в силе и при таких вольностях. К счастью спектр как импульса, так и координаты невырожден. Это означает, что измеряя наблюдаемые $\hat{p}$ или $\hat{q}$, мы действительно выделяем *элементы физической реальности.*

Приведем необходимые формулы. Пусть $u_p(x)$ и $\phi_q(x)$- формальные решения уравнений

$$\hat{p}u_p(x) = pu_p(x), \quad -\infty < p < \infty, \qquad (19)$$

$$\hat{q}\phi_q(x) = q\phi(x), \quad -\infty < q < \infty, \qquad (20)$$

т.е.

$$u_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\frac{px}{\hbar}}, \qquad (21)$$

$$\phi_q(x) = \delta(x-q). \qquad (22)$$

В этом случае известные формулы преобразований Фурье можно записать в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_p(x)F(p)dp, \qquad (23)$$

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} u_p{}^*(x)f(x)dx. \qquad (24)$$

Известно, что для справедливости этих формул достаточно квадратичной интегрируемости функций f и F, причем преобразование Фурье - унитарная операция:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(p)|^2 dp. \qquad (25)$$

Приведенные формулы можно рассматривать как непрерывный аналог разложения вектора гильберотова пространства по ортономированному базису. После представления функций f и F в виде повторных интегралов, незаконной с точки зрения классической математики перестановки порядков интегрирования и сравнения полученных формул с определением δ-функции,

$$G(y) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-y^{'})G(y^{'})dy^{'}, \qquad (26)$$

можно получить непрерывные аналоги соотношений ортонормировки и полноты:

$$\int_{-\infty}^{\infty} {u_p}^*(x)u_{p'}(x)dx \quad = \quad \delta(p-p^{'}), \qquad (27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_p(x){u_p}^*(x^{'})dp \quad = \quad \delta(x-x^{'}). \qquad (28)$$

Аналогичные соотношения для функций ϕ_q непосредственно следуют из определения δ-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} {\phi_q}^*(x)\phi_{q'}(x)dx \quad = \quad \delta(q-q^{'}), \qquad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_q(x){\phi_q}^*(x^{'})dq \quad = \quad \delta(x-x^{'}). \qquad (30)$$

В EPR рассматриваются двухчастичные волновые функции. Чтобы определить их, нужно выбрать наблюдаемую с невырожденным спектром. Роль такого оператора может играть пара одночастичных операторов. Например – операторы импульсов каждой из частиц – $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$. Поскольку эти операторы коммутируют, у них существуют общие собственные векторы:

$$\hat{p}_1\Psi(x_1,x_2) = p_1\Psi(x_1,x_2), \quad \hat{p}_2\Psi(x_1,x_2) = p_2\Psi(x_1,x_2). \qquad (31)$$

Решение этой системы уравнений – вектор

$$\Psi(p_1,p_2|x_1,x_2) \quad = \quad u_{p1}(x_1)u_{p_2}(x_2). \qquad (32)$$

Этот вектор является, кроме того, собственным вектором оператора полного импульса $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$:

$$\hat{P}\Psi(p_1,p_2|x_1,x_2) \quad = \quad (p_1+p_2)\Psi(p_1,p_2|x_1,x_2). \qquad (33)$$

Однако, спектр оператора $\hat{P}$ вырожден: общее решение уравнения

$$\hat{P}\Psi(x_1, x_2) \quad = \quad P\Psi(x_1, x_2) \qquad (34)$$

имеет вид

$$\Psi(P|x_1, x_2) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_p(x_1)u_{P-p}(x_2)C(p)dp \qquad (35)$$

с произвольной функцией $C(p)$. Чтобы фиксировать функцию $c(p)$ нужно дополнить определение функции ψ так, чтобы она была собственным вектором еще одного оператора, коммутирующего с оператором полного импульса. Таковым является, например, оператор относительного расстояния $\hat{Q}$:

$$\hat{Q} \quad = \quad \hat{q}_1 - \hat{q}_2. \qquad (36)$$

Вектор $\Psi(P|x_1, x_2)$ будет решением уравнения

$$\hat{Q}\Psi(P|x_1, x_2) \quad = \quad -x_0\Psi(P|x_1, x_2), \qquad (37)$$

в том случае, если $C(p) = Cexp(i\frac{px_0}{\hbar})$. Собственные векторы операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ – функции $\Psi(P, x_0|x_1, x_2)$, нормированные условием

$$\langle\Psi_{P,x_0}|\Psi_{P',y_0}\rangle \quad = \quad \delta(P - P^{'})\delta(x_0 - y_0), \qquad (38)$$

с точностью до фазового множителя определяются интегралом

$$\Psi(P, x_0|x_1, x_2) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} u_p(x_1)u_{P-p}(x_2)e^{i\frac{px_0}{\hbar}} \qquad (39)$$

Их можно, например выбрать в форме

$$\Psi(P, x_0|x_1, x_2) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\frac{P(x_1+x_2)}{\hbar}}\delta(x_1 - x_2 + x_0). \qquad (40)$$

С точностью до нормировки EPR-волновая функция $\Psi(x_1, x_2)$ совпадает с $\Psi(0, x_0|x_1, x_2)$.

Таким образом, EPR-волновая функция строится по общим рецептам квантовой механики, ничем не отличаясь от множества других функций.

В составных системах можно выделить два вида наблюдаемых с дискретным невырожденным спектром, пригодных для выделения лучей в пространстве состояний. Это может быть

1) совокупность наблюдаемых, каждая из которых зависит только от переменных, относящихся только к одной из подсистем, или

2) совокупность наблюдаемых, которые могут зависеть от переменных, относящихся к различным подсистемам.

Волновые функции первого типа представляют собой мономы, построенные из произведения функций, как в уравнении (32). EPR-волновые функции дают пример векторов состояний второго типа. В первом случае волновая функция описывает такое состояние, в котором каждая из подсистем имеет, по крайней мере, одну наблюдаемую, принимающую точное значение. Во втором случае может случиться так, что ни в одной из подсистем не окажется величины с точным значением, хотя величины, связывающие подсистемы друг с другом имеют точные значения. Шредингер, верный своему обычаю считать Ψ-функцию первичным понятием и вводить новые термины, придумал для указанных волновых функций чрезвычайно популярное в настоящее время название. По-немецки оно звучало "Verschränkung" и было переведено на английский словом "entanglement". По-русски оно чаще всего звучит "запутанный", состояния с приведенной выше волновой функцией называют "запутанными состояниями".

(Такая возможность коренным образом отличает квантовую механику от классической)

Это обстоятельство было отмечено еще в 1927 г. (всего через год после статистической гипотезы Борна) Ландау [**Landau1927**]. Изложим коротко аргументы этой работы. Пусть состояние системы I+II определяется волновой функцией $\Psi(x_1, x_2)$, где x_i-совокупность переменных связанных с i-той подсистемой. Пусть наблюдаемой A соответствует интегральный оператор

$$\hat{A}\Psi(x_1, x_2) = \int A(x_1, x_2; y_1, y_2)\Psi(y_1, y_2)dy_1dy_2. \qquad (40)$$

Среднее значение наблюдаемой A в состоянии Ψ в силу (1) равно

$$\langle\Psi|A|\Psi\rangle = \int \Psi^*(x_1, x_2)A(x_1, x_2; y_1, y_2)\Psi(y_1, y_2)dy_1dy_2. \qquad (41)$$

Если величина A зависит только от переменных системы I, то ядро оператора $\hat{A}$ равно

$$A(x_1, x_2; y_1, y_2) = A_1(x_1; y_1)\delta(x_2 - y_2). \qquad (42)$$

В этом случае среднее значение A вычисляется по формуле

$$\langle\Psi|A|\Psi\rangle = \int A_1(x_1; x_2)\rho_1(x_2; x_1)dx_1dx_2, \qquad (43)$$

где

$$\rho_1(x_1, x_2) = \int \Psi(x_1, y)\Psi^*(x_2, y)dy. \qquad (44)$$

Функция ρ_1 сводится к произведению двух функций в том и только в том случае, если форму произведения имеет исходная функция. Если

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2), \qquad (45)$$

то

$$\rho_1(x_1, x_2) = {\Psi_1}^*(x_1)\Psi_1(x_2) \qquad (46)$$

и формула среднего значения (43) сводится к (1). В общем случае это не так.

Если средние значения величин, относящихся к подсистемам, вычисляются иначе, чем средние величин, относящихся к большой системе, то теория наталкивается на практически непреодолимую логическую трудность. Прежде всего, никто и никогда не имел дела с "первосистемой", в которой должна задаваться волновая функция. Здесь напрашивается аналогия с абсолютными пространством и временем, в рамках которых начиналось построение механики. Этими понятиями можно было оперировать (и вполне успешно) лишь до некоторого срока, который определялся как уровнем эксперимента, так и степенью логической строгости теории. Даже если согласиться с тем, что при решении любой задачи можно начать с утверждения о том, что состояние системы задается волновой функцией, перенести это понятие на подсистемы удается лишь с помощью громоздкой и малообоснованной процедуры редукции волнового пакета (что-то в роде эпициклов Птолемея, исправляющих круговые орбиты). Среди многих странностей, этой процедуры, пожалуй, наибольшее впечатление производит неизбежное допущение того, что состояние некоторой подсистемы, макроскопичеки удаленной от другой, может влиять на состояние последней. Грубо говоря, атом водорода на Юпитере может влиять на состояние атома водорода на Земле. В последующих разделах этот вопрос будет рассмотрен подробнее. Пока лишь заметим, что после 1935 года Эйнштейн в письме к Борну говорил о "spooky action at a distance" (A.Einstein, in *Born-Einstein Letters*, Walker, New York, 1971, p.158), но к этому времени он уже причислен к "старым ворчунам".

Между тем небольшая модификация формул позволяет единообразно вычислять средние значения как в больших системах, так и в их подсистемах.

Если определить ядро

$$B(x_1,x_2) \quad = \quad \int A_1(x_1;y)\rho_1(y;x_2)dy, \qquad (47)$$

то выражение для среднего значения примет вид

$$\langle\Psi|A|\Psi\rangle \quad = \quad \int B(x;x)dx. \qquad (48)$$

Если сопоставить с ядром ρ_1, определенным формулой (44), оператор $\hat{\rho}_1$, а с ядром B (формула (47)) оператор $\hat{B}$, то правая часть формулы (48) определяет числовую функцию оператора $\hat{B}$:

$$tr\hat{B} \quad = \quad \int B(x;x)dx. \qquad (49)$$

Формула (48) определяет оператор $\hat{B}$ как произведение

$$\hat{B} \quad = \quad \hat{A}_1\hat{\rho}_1, \qquad (50)$$

поэтому среднее значение A можно определить формулой

$$\langle\Psi|A|\Psi\rangle \quad = \quad tr(\hat{A}_1\hat{\rho}_1). \qquad (51)$$

Остается только заметить, что если определить оператор $\hat{\rho}$ как интегральный оператор с ядром

$$\rho(x_1,x_2;y_1,y_2) \quad = \quad \Psi(x_1,x_2)\Psi^*(y_1,y_2), \qquad (52)$$

то, исходя из формулы (1), среднее значение общего оператора $\hat{A}$ можно будет представить следующим образом:

$$\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle \quad = \quad Tr(\hat{A}\hat{\rho}), \qquad (53)$$

где след оператора $\hat{B}$ с ядром $B(x_1, x_2; y_1, y_2)$ определяется формулой

$$Tr\hat{B} \quad = \quad \int B(x_1, x_2; x_1, x_2)dx_1dx_2. \qquad (54)$$

Заметим, что средние значения величин A и A_1 выражаются, по существу одной и той же формулой

$$\langle B\rangle \quad = \quad Tr(\hat{B}\hat{\rho}). \qquad (55)$$

Итак, исследования Ландау показали, что выражающие средние значения формулы содержат как оператор физической величины, определенной в системе, так и некоторый другой оператор ρ, не зависящий от величины $\hat{B}$. С оператором ρ, который обычно называют "матрицей плотности" или "статистическим оператором" можно связать состояние системы. Эта точка зрения была последовательно развита фон-Нейманом. После его работ стало ясно, что в свободной от противоречий квантовой теории состояние системы определяется оператором, который лишь иногда можно задать вектором гильбертова пространства, в котором действуют операторы физических величин. Таким образом утверждение EPR, что *квантово-механическое описание физической реальности посредством волновых функций не является полным*, было строго обосновано к 1927 году. Однако, на вопрос *Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным?* следует ответить положительно. Просто под физической реальностью следует понимать не совсем то, что понимал Эйнштейн. Поэтому не будет излишей осторожностью пусть временное изменение вывода EPR:

Если считать процедуру редукции волнового пакета правильной, то

1) квантово-механическое описание реальности посредством волновой функции не является полным или

2) если операторы, соответствующие двум физическим величинам, не коммутируют, эти две величины не могут одновременно обладать реальностью.

ЧТО ТАКОЕ СОСТОЯНИЕ?
ОКАЗЫВАЕТСЯ, ЭТО – ОБЪЕКТИВНОЕ ПОНЯТИЕ

7 [37] Так сделал он десять подстав: у всех одно литье, одна мера, один вид.

Третья книга царств

20 [10] Неодинаковые весы, неодинаковая мера, то и другое – мерзость пред Господом.

Притчи Соломона

Исчерпывающий ответ на этот вопрос дал фон Нейман. Причем ответ снова был получен только после того, все было расположено "мерою, числом и весом". Отправной точкой рассуждений фон Неймана был математически строго сформулированный кинематический постулат Гайзенберга:

> Физической величине F соответствует линейный оператор $\hat{F}$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Действительным величинам соответствуют самосопряженные операторы, а функциям величин – соответствующие операторные функции:

$$T \leftrightarrow \hat{T}, \qquad T = T^{\star} \leftrightarrow \hat{T}^{+} = \hat{T}, \qquad f(T) \leftrightarrow f(\hat{T}).$$

Для того, чтобы можно было сопоставлять выводы теории с результатами экспериментов, нужно построить функцию, которая сопоставляла бы с операторами некоторые, вообще говоря, комплексные числа:

$$\hat{F} \to \langle \hat{F} \rangle.$$

Эти числа в дальнейшем будут иметь смысл средних значений соответствующих физических величин. Потребуем, чтобы функция $\langle \hat{F} \rangle$ удовлетворяла следующим естественным с точки зрения здравого смысла условиям:

1. $\langle \hat{E} \rangle \quad = \quad 1$ – среднее значение единицы равно единице.
2. $\langle \hat{F} \rangle^{\star} \quad = \quad \langle \hat{F}^{+} \rangle$ – средние значения комплексно сопряженных величин комплексно сопряжены.
3. $\langle a_1\hat{F}_1 + a_2\hat{F}_2 \rangle \quad = \quad a_1\langle \hat{F}_1 \rangle \quad + \quad a_2\langle \hat{F}_2 \rangle$ – среднее суммы равно сумме средних.
4. $F \geq 0 \quad \to \quad \langle \hat{F} \rangle \geq 0$ – среднее значение неотрицательной величины неотрицательно.

Эти условия практически однозначно определяют операцию вычисления среднего. Чтобы убедиться в этом, предположим, что нам известна матрица оператора $\hat{F}$ в некотором базисе $\{\phi_n\}$:

$$F_{mn} \quad = \quad \langle \phi_m | \hat{F} \phi_n \rangle.$$

В этом случае оператор $\hat{F}$ можно представить как сумму

$$\hat{F} \quad = \quad \sum_{mn} F_{mn} \hat{P}_{mn},$$

в которой операторы $\hat{P}_{mn}$ действуют следующим образом:

$$\hat{P}_{mn} | \phi_k \rangle \quad = \quad | \phi_m \rangle \delta_{nk}.$$

Это означает, что среднее значение величины F всегда можно представить в форме

$$\langle \hat{F} \rangle \quad = \quad \sum_{mn} F_{mn} \langle \hat{P}_{mn} \rangle.$$

Если определить оператор ρ, матрица которого в базисе $\{\phi_n\}$ равна

$$\rho_{mn} \quad = \quad \langle \hat{P}_{nm} \rangle,$$

то среднее значение $\langle \hat{F} \rangle$ представится формулой

$$\langle\hat{F}\rangle \quad = \quad Tr\hat{F}\hat{\rho}.$$

Условия 1-4 уточняют свойства оператора $\hat{\rho}$.

1.
$$\langle\hat{E}\rangle \quad = \quad 1 \qquad \to Tr(\hat{E}\hat{\rho}) = Tr(\hat{\rho}) = 1-$$

след оператора $\hat{\rho}$ равен единице.

2.
$$\langle\hat{F}^{+}\rangle = Tr\hat{F}^{+}\hat{\rho} = \sum_{mn}(F^{+})_{mn}\rho_{nm} =$$
$$\sum_{mn}(F_{nm})^{*}\rho_{nm} = (\sum_{mn}F_{nm}(\rho_{nm})^{*})^{*} = (\langle\hat{F}\rangle)^{*}.$$

Это означает, что должны выполняться соотношения

$$\hat{\rho}_{nm} \quad = \quad (\hat{\rho}_{mn})^{*},$$

т.е. оператор $\hat{\rho}$ должен быть самосопряженным:

$$\hat{\rho}^{+} \quad = \quad \hat{\rho}.$$

3. Рассмотрим наблюдаемую P, которой соответствует оператор $\hat{P}$, определенный формулой
$$\hat{P}u \quad = \quad |\Psi\rangle\langle\Psi|u\rangle, ||u||^{2} \quad = \quad 1.$$

Поскольку оператор $\hat{P}$ самосопряжен и выполняется соотношение $\hat{P}^{2} = \hat{P}$, то среднее значение наблюдаемой P должно быть неотрицательным. Это означает, что для любого вектора Ψ должно выполняться соотношение

$$Tr(\hat{P}\hat{\rho}) \quad = \quad \langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle \qquad \geq \qquad 0.$$

Определение среднего значения в терминах следа автоматически предполагает, что среднее суммы равно сумме средних. Условия 1)-3) выделяют вполне определенный класс операторов. Теперь можно дать такое определение состояния:

с каждым состоянием ρ квантовой системы взаимно однозначно сопоставляют линейный оператор $\hat{\rho}$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и обладающий следующими свойствами:

$$1. \qquad \hat{\rho}^{+} \quad = \quad \hat{\rho},$$
$$2. \qquad \langle\Psi|\hat{\rho}|\Psi\rangle \geq 0 \qquad \vee\, \Psi \in \mathcal{H},$$
$$3. \qquad Tr\hat{\rho} \quad = \quad 1.$$

Среднее значение величины F в состоянии ρ равно

$$\langle\hat{F}\rangle_{\rho} \quad = \quad Tr(\hat{F}\hat{\rho}).$$

Оператор $\hat{\rho}$ называют *статистическим оператором* или *матрицей плотности*. Основанием для сопоставления матриц плотности с возможными состояниями системы служит только что приведенная формула среднего значения, содержащая оператор той величины, среднее которой мы хотим вычислить, и не зависящий от этой величины (т.е. общий для всех величин) оператор, который естественно связать со свойствами системы, т.е. ее состоянием.

Определенная в них процедура определения средних, опирающаяся лишь на утверждение, что в квантовой механике физическим величинам соответствуют линейные операторы, т.е. на чисто кинематическое понятие, делает определение состояния объективным, причем способ определения состояния в квантовой физике мало чем отличается от аналогичного классического определения.

Отметим два важных обстоятельства. Из математики известно, что ократоры, удовлетворяющие соотношениям 1–3, имеют чисто дискретный спектр. Это означает, что всякую матрицу плотности можно представить в форме

$$\hat{\rho} \quad = \quad \sum_n p_n \hat{P}_n.$$

Операторы $\hat{P}_n$ – самосопряженные попарно ортогональные проекционные операторы, реализующие раздожение единицы. Числа p_n удовлетворяют неравенствам
$0 \leq p_n \leq 1$, причем $\sum_n p_n Tr \hat{P}_n = 1$.

Если F – наблюдаемая с чисто дискретным спектром, т.е.

$$\hat{F} \quad = \quad \sum_n f_n \hat{P}_n,$$

то среднее значение F в состоянии $\hat{\rho}$ можно представить в форме

$$\langle F \rangle_\rho \quad = \quad \sum_n f_n Tr(\hat{P}_n \rho.$$

Это означает, что $Tr(\hat{P}_n \rho$ – это вероятность того, что наблюдаемая F принимает в состоянии ρ значение f_n. Поскольку все числа f_n различны, то можно установить взаимно однозначное соответствие между этими числами и подпространствами, выделяемыми соответствующими проекционными операторами. Таким образом, можно утверждать, что если $\hat{P}$ – некоторый проекционный оператор, то величина

$$Tr(\hat{P}\hat{\rho})$$

представляет собой вероятность того, что орератор $\hat{\rho}$ действует в подпространстве $M = \hat{P}\mathcal{H}$, выделяемым оператором $\hat{P}$.

Теперь придать физический смысл коэффициентам p_n в спектральном представлении матрицы плотности. Это – вероятность обнаружить систему в состоянии $\hat{P}_n$, если она с достоверностью находится в состоянии $\hat{r}ho$.

Понятие о матрице плотности было сформулировано фон Нейманом в 1927 году [**Neumann 1927**]. Чтобы оценить значение этой работы, достаточно заметить в ней впервые было дано строгое определение состояния. **До открытия фон Неймана понятия состояния системы не существовало**, а были лишь различной строгости "наглядные" определения. Казалось бы, как в любой точной науке, открытия такого уровня должны повсеместно приветствоваться и внедряться. Однако, соображения наглядности привели к, может быть быть бессознательному искажению истины. Лишь немногие физики уровня Дирака, Паули, Фока вполне осознали значение понятия матрицы плотности и внесли весомый вклад в его развитие. Чтобы создать возможно более ясное представление о массовой оценке места матрицы плотности в квантовой механике, приведем суждения, содержащиеся в двух блестящих популярных книгах Пенроуза. В первой [**Penrose 1989**] после рассказа о трудностях, принесенных в науку Шредингеровой кошкой, говорится что

> некоторые считают, что сложные системы не следует понимать не как "состояния", а необходимо обратиться к их обобщению, которое принято называть "матрицей плотности" (von Neumann 1955). Оно содержит как классические вероятности, так и квантовые амплитуды. В результате для представления (физической) действительности используется сразу большое число различных состояний. Матрицы плотности удобны, но они, сами по себе не могут решить глубоких проблем квантовых измерений.

В более поздней книге [**Penrose 1994**] возраст матрицы плотности был несколько увеличен.

> Это понятие было введено в 1932 году выдающимся венгерско-американским математиком фон Нейманом... Идея матрицы плотности весьма элегантна. Прежде всего, вместо любого индивидуального состояния $|\Psi\rangle$ можно ввести объект, который записывают в форме $|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Предположим, что кто-то захотел определить матрицу плотности, которая описывает некоторую смесь состояний $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ с относительными вероятностями a и b. Подходящей конструкцией будет оператор
>
> $$\hat{D} \quad = \quad a|\alpha\rangle\langle\alpha| + b|\beta\rangle\langle\beta|.$$

Прежде всего бросается в глаза стремление забыть точную дату открытия фон Неймана, связав ее с появлением немецкого и англиийского изданий его классической книги. Ведь если помнить о точной дате – осени 1927 года (рукопись фон Неймана появилась в редакции 11 ноября 1927 года), "наглядность" квантовой механики, связанная с борновским толкованием $|\Psi(q)|^2$ как плотности распределения координаты в состоянии, которое определяется функцией $\Psi(q)$ и сведения содержания квантовой механики к принципу суперпозиции окажется ребенком, умершем во младенчестве. Стремлением сохранить "наглядность" объясняется и настойчиво повторяемое утверждение о том, смысл матрицы плотности состоит в том, что она сочетает "классические" вероятности с квантовыми амплитудами. Свойства матрицы плотности действительно таковы, что ее спектр чисто дискретен и соответствующие собственные числа можно истолковать как некоторые вероятности. Но такое толкование основано на внутренних свойствах статистического оператора, имеющего чисто квантовую природу. Вместо того, чтобы изучить возможности, которые предоставляет идея рассматривать состояния физической системы как операторы приверженцы наглядности говорят о связях матрицы плотности с некоторыми классическими закономернсотями.

Между тем в том же 1927 году на Сольвеевском конгрессе обсуждался вопрос, который, судя по воспоминаниям Бора, так не был решен, именно в силу ограниченности толкования состояния в рамках Ψ-функции.

Речь идет о мысленно эксперименте Эйнштейна, в котором появление электрона в некоторой точке экрана связана с его внезапным исчезновением в другой. Уже говорилось, почему это обстоятельство не опровергает принципа причинности. Однако, в Брюсселе речь шла совсем о другом [**Bohr 1947**]:

> Разумеется все мы поняли, что в приведенном выше примереположение не представляет аналогии статистическому рассмотрению сложных механических систем. Положение это скорее напоминало то, которое явилось предпосылкой для выводов, сделанных ранее самим Эйнштейном об определенной направленности индивидуальных излучательных эффектов, выводов, стоящих в столь резком противоречии с простой волновой картиной.

Ручь идет о знаменитой статье Эйнштейна [**Einstein 1916**], посвященной квантовой теории излучения. Эйнштейн, в частности, обсуждает в ней эффекты, связанные с законом сохранения импульса.

> При потере энергии в результате спонтанного излучения в случае резонатора Планка последний в целом не получает никакого импульса, так согласно классической теории спотанное излучение имеет вид сферической волны. Однако,... мы можем прийти к непротиворечивой квантовой теории лишь в том случае, если мы предположим, что процесс спонтанного излучения также является направленном. Тогда в каждом элементарном процессе спонтанного излучения ($Z_m \to Z_n$) молекуле передается импульс, величина которого равна $(\epsilon_m - \epsilon_n)/c$. Если молекула изотропна, то мы должны считать равновероятными все направления спонтанного излучения. В случае неизотропной молекулы мы придем к такому же утверждению, если ее ориентация меняется с течением времени по закону случая.

Таким образом для получения формулы Планка помимо предположений о механизме излучения и поглощения фотонов требуется и чисто техническое соглашение о некоторой процедуре усреднения. Это вполне допустимо в полуэмпирических построениях, но точная теория более основательных аргументов. По сути дела обоснованного ответа Эйнштейн, видимо, не получил. Даже если кто-либо придумал приемлемую процедуру усреднения, стало ясно, что квантовая механика не может убедительно объяснить изотропности спонтанного излучения свободным атомом. Однако снова можно повторить, что raffinert ist der Herr Gott, aber boshaft ist Er nicht.

Квантовая механика, заставив думать о законах сохранения в каждом элементарном акте, снабдила нас новым типом состояний. Именно их открыл фон Нейман. Чтобы не иметь дело с технически трудным законом сохранения импульса, будем считать ядра атомов бесконечно тяжелыми. Это не избавит от небходимости учитывать закон сохранения момента количества движения, просто вычисления станут проще. Рассмотрим для простоты водородоподобный атом и пренебрежем эффектами, связанными со спином электрона. Собственные векторы гамильтониана в этом случае можно занумеровать числами n, l, m, где числа l выделяют собственные векторы с определенным моментом количества движения, а m – проекции момента на определенную ось (например ось Oz). При фиксированных l числа m, изменяясь на единицу, заключены между $-l$ и l. Собственные значения гамильтониана зависят от чисел n и l. Таким образом каждый уровень энергии $(2l+1)$-кратно вырожден и это вырождение является прямым следствием сферической симметрии гамильтониана. Матрицу плотности атома с определенной энергией можно определить ядром

$$\rho_{nl}(\vec{r},\vec{r}^{\,'}) \quad = \quad R_{nl}(r)R_{nl}(r^{'})\rho_l(\vec{n},\vec{n}^{\,'}),$$

где

$$\rho_l(\vec{n},\vec{n}^{\,'}) \quad = \quad \sum_{m,m'} Y_{lm}(\vec{n})C_{mm'}{Y^*}_{lm'}(\vec{n}^{\,'}).$$

Среди возможных ядер указанного типа есть и сферически симметричное:

$$\rho_l(\vec{n},\vec{n}^{'}) \quad = \quad \frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\vec{n})Y^{*}{}_{lm}(\vec{n}^{'}) \quad = \quad \delta(\vec{n}-\vec{n}^{'}).$$

В этом случае полная матрица плотности принимает вид

$$\rho_{nl}(\vec{r},\vec{r}^{'}) \quad = \quad \frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} \Psi_{nlm}(\vec{r})\Psi^{*}_{nlm}(\vec{r}^{'}).$$

Полученная формула реализует спектральное разложение матрицы плотности и вычисления вероятностей переходов из этого состояния во все возможные происходит по формуле

$$W = \frac{1}{2l+1}\sum_{m',m} W(m',m),$$

которую обычно сопровождают примерно таким заклинанием: "нужно вычислить вероятности переходов при определенных начальных и конечных значений проекций момента импульса, а потом просуммировать по конечным значениям проекций момента количества движения и усреднить по начальным". Последняя часть этого рецепта, если считать, что существуют только волновые функции, выглядит чисто внешним внешним дополнением к формализму, и эту процедуру можно только угадать. Отметим два важных обстоятельства. Из математики известно, что ооераторы, удовлетворяющие соотношениям 1–3, имеют чисто дискретный спектр. Это означает, что всякую матрицу плотности можно представить в форме

$$\hat{\rho} \quad = \quad \sum_n p_n\hat{P}_n.$$

Операторы $\hat{P}_n$ – самосопряженные попарно ортогональные проекционные операторы, реализующие раздожение единицы. Числа p_n удовлетворяют неравенствам
$0 \le p_n \le 1$, причем $\sum_n p_n Tr\hat{P}_n = 1$.

Если F – наблюдаемая с чисто дискретным спектром, т.е.

$$\hat{F} \quad = \quad \sum_n f_n\hat{P}_n,$$

то среднее значение F в состоянии $\hat{\rho}$ можно представить в форме

$$\langle F\rangle_\rho \quad = \quad \sum_n f_n Tr(\hat{P}_n\rho.$$

Это означает, что $Tr(\hat{P}_n\rho$ – это вероятность того, что наблюдаемая F принимает в состоянии ρ значение f_n. Поскольку все числа f_n различны, то можно установить взаимно однозначное соответствие между этими числами и подпространствами, выделяемыми соответствующими проекционными операторами. Таким образом, можно утверждать, что если $\hat{P}$ – некоторый проекционный оператор, то величина

$$Tr(\hat{P}\hat{\rho})$$

представляет собой вероятность того, что орератор $\hat{\rho}$ действует в подпространстве $M = \hat{P}\mathcal{H}$, выделяемым оператором $\hat{P}$.

Теперь можно придать физический смысл коэффициентам p_n в спектральном представлении матрицы плотности. Это – вероятность обнаружить систему в состоянии $\hat{P}_n$, если она с достоверностью находится в состоянии $\hat{r}ho$.

Понятие о матрице плотности было сформулировано фон Нейманом в 1927 году [**Neumann 1927**]. Чтобы оценить значение этой работы, достаточно заметить в ней впервые было дано строгое определение состояния. **До открытия фон Неймана понятия состояния системы не существовало**, а были лишь различной строгости "наглядные" определения. Казалось бы, как в любой точной науке, открытия такого уровня должны повсеместно приветствоваться и внедряться. Однако, соображения наглядности привели к, может быть быть бессознательному искажению истины. Лишь немногие физики уровня Дирака, Паули, Фока вполне осознали значение понятия матрицы плотности и внесли весомый вклад в его развитие. Чтобы создать возможно более ясное представление о массовой оценке места матрицы плотности в квантовой механике, приведем суждения, содержащиеся в двух блестящих популярных книгах Пенроуза. В первой [**Penrose 1989**] после рассказа о трудностях, принесенных в науку Шредингеровой кошкой, говорится что

> некоторые считают, что сложные системы не следует понимать не как "состояния", а необходимо обратиться к их обобщению, которое принято называть "матрицей плотности" (von Neumann 1955). Оно содержит как классические вероятности, так и квантовые амплитуды. В результате для представления (физической) действительности используется сразу большое число различных состояний. Матрицы плотности удобны, но они, сами по себе не могут решить глубоких проблем квантовых измерений.

В более поздней книге [**Penrose 1994**] возраст матрицы плотности был несколько увеличен.

> Это понятие было введено в 1932 году выдающимся венгерско-американским математиком фон Нейманом... Идея матрицы плотности весьма элегантна. Прежде всего, вместо любого индивидуального состояния $|\Psi\rangle$ можно ввести объект, который записывают в форме $|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Предположим, что кто-то захотел определить матрицу плотности, которая описывает некоторую смесь состояний $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ с относительными вероятностями a и b. Подходящей конструкцией будет оператор
>
> $$\hat{D} \quad = \quad a|\alpha\rangle\langle\alpha| + b|\beta\rangle\langle\beta|.$$

Прежде всего бросается в глаза стремление забыть точную дату открытия фон Неймана, связав ее с появлением немецкого и англиийского изданий его классической книги. Ведь если помнить о точной дате – осени 1927 года (рукопись фон Неймана появилась в редакции 11 ноября 1927 года), "наглядность" квантовой механики, связанная с борновским толкованием $|\Psi(q)|^2$ как плотности распределения координаты в состоянии, которое определяется функцией $\Psi(q)$ и сведения содержания квантовой механики к принципу суперпозиции окажется ребенком, умершем во младенчестве. Стремлением сохранить "наглядность" объясняется и настойчиво повторяемое утверждение о том, смысл матрицы плотности состоит в том, что она сочетает "классические" вероятности с квантовыми амплитудами. Свойства матрицы плотности действительно таковы, что ее спектр чисто дискретен и соответствующие собственные числа можно истолковать как некоторые вероятности. Но такое толкование основано на внутренних свойствах статистического оператора, имеющего чисто квантовую природу. Вместо того, чтобы изучить возможности, которые предоставляет идея рассматривать состояния физической системы как операторы приверженцы наглядности говорят о связях матрицы плотности с некоторыми классическими закономернсотями.

Между тем в том же 1927 году на Сольвеевском конгрессе обсуждался вопрос, который, судя по воспоминаниям Бора, так не был решен, именно в силу ограниченности толкования состояния в рамках Ψ-функции.

Речь идет о мысленно эксперименте Эйнштейна, в котором появление электрона в некоторой точке экрана связана с его внезапным исчезновением в другой. Уже говорилось, почему это обстоятельство не опровергает принципа причинности. Однако, в Брюсселе речь шла совсем о другом [**Bohr 1947**]:

> Разумеется все мы поняли, что в приведенном выше примереположение не представляет аналогии статистическому рассмотрению сложных механических систем. Положение это скорее напоминало то, которое явилось предпосылкой для выводов, сделанных ранее самим Эйнштейном об определенной направленности индивидуальных излучательных эффектов, выводов, стоящих в столь резком противоречии с простой волновой картиной.

Ручь идет о знаменитой статье Эйнштейна [**Einstein 1916**], посвященной квантовой теории излучения. Эйнштейн, в частности, обсуждает в ней эффекты, связанные с законом сохранения импульса.

> При потере энергии в результате спонтанного излучения в случае резонатора Планка последний в целом не получает никакого импульса, так согласно классической теории спотанное излучение имеет вид сферической волны. Однако,... мы можем прийти к непротиворечивой квантовой теории лишь в том случае, если мы предположим, что процесс спонтанного излучения также является направленном. Тогда в каждом элементарном процессе спонтанного излучения $(Z_m \to Z_n)$ молекуле передается импульс, величина которого равна $(\epsilon_m - \epsilon_n)/c$. Если молекула изотропна, то мы должны считать равновероятными все направления спонтанного излучения. В случае неизотропной молекулы мы придем к такому же утверждению, если ее ориентация меняется с течением времени по закону случая.

Таким образом для получения формулы Планка помимо предположений о механизме излучения и поглощения фотонов требуется и чисто техническое соглашение о некоторой процедуре усреднения. Это вполне допустимо в полуэмпирических построениях, но точная теория более основательных аргументов. По сути дела обоснованного ответа Эйнштейн, видимо, не получил. Даже если кто-либо придумал приемлемую процедуру усреднения, стало ясно, что квантовая механика не может убедительно объяснить изотропности спонтанного излучения свободным атомом. Однако снова можно повторить, что raffinert ist der Herr Gott, aber boshaft ist Er nicht.

Квантовая механика, заставив думать о законах сохранения в каждом элементарном акте, снабдила нас новым типом состояний. Именно их открыл фон Нейман. Чтобы не иметь дело с технически трудным законом сохранения импульса, будем считать ядра атомов бесконечно тяжелыми. Это не избавит от небходимости учитывать закон сохранения момента количества движения, просто вычисления станут проще. Рассмотрим для простоты водородоподобный атом и пренебрежем эффектами, связанными со спином электрона. Собственные векторы гамильтониана в этом случае можно занумеровать числами n, l, m, где числа l выделяют собственные векторы с определенным моментом количества движения, а m – проекции момента на определенную ось (например ось Oz). При фиксированных l числа m, изменяясь на единицу, заключены между $-l$ и l. Собственные значения гамильтониана зависят от чисел n и l. Таким образом каждый уровень энергии $(2l+1)$-кратно вырожден и это вырождение является прямым следствием сферической симметрии гамильтониана. Матрицу плотности атома с определенной энергией можно определить ядром

$$\rho_{nl}(\vec{r}, \vec{r}^{'}) \quad = \quad R_{nl}(r) R_{nl}(r^{'}) \rho_l(\vec{n}, \vec{n}^{'}),$$

где

$$\rho_l(\vec{n}, \vec{n}^{'}) \quad = \quad \sum_{m,m'} Y_{lm}(\vec{n}) C_{mm'} {Y^*}_{lm'}(\vec{n}^{'}).$$

Среди возможных ядер указанного типа есть и сферически симметричное:

$$\rho_l(\vec{n}, \vec{n}^{'}) \quad = \quad \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\vec{n}) {Y^*}_{lm}(\vec{n}^{'}) \quad = \quad \delta(\vec{n} - \vec{n}^{'}).$$

В этом случае полная матрица плотности принимает вид

$$\rho_{nl}(\vec{r}, \vec{r}^{'}) \quad = \quad \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \Psi_{nlm}(\vec{r}) \Psi^*_{nlm}(\vec{r}^{'}).$$

Полученная формула реализует спектральное разложение матрицы плотности и вычисления вероятностей переходов из этого состояния во все возможные происходит по формуле

$$W = \frac{1}{2l+1} \sum_{m',m} W(m', m),$$

которую обычно сопровождают примерно таким заклинанием: "нужно вычислить вероятности переходов при определенных начальных и конечных значений проекций момента импульса, а потом просуммировать по конечным значениям проекций момента количества движения и усреднить по начальным". Последняя часть этого рецепта, если считать, что существуют только волновые функции, выглядит чисто внешним внешним дополнением к формализму, и эту процедуру можно только угадать.

Это с некоторым удивлением отметил в своей знаменитой монографии Дирак[**Dirac 1958**]. В разделе, посвященном ансамблю Гиббса, говорится, что до сих пор автор предполагал, что движение системы задано настолько полно и точно, насколько это возможно сделать, не нарушая общих принципов теории. В классической теории это означало бы, очевидно, что значения всех координат и импульсов заданы. Может случиться однако, что нас интересует движение, которое задано не с такой максимальной полнотой. В классической механике для этого существует способ так называемого *ансамбля Гиббса*, идея которого заключается в следующем. Мы рассматриваем все динамические координаты и импульсы как декартовы координаты в некотором *фазовом пространстве*, число измерений которого вдвое больше числа степеней свободы системы. Любое состояние системы может быть изображено точкой в этом пространстве. Допустим теперь, что нам неизвестно, в каком именно состоянии находится система, а известна лишь вероятность того, что система находится в том или ином состоянии из некоторого множества состояний. Можно было бы изобразить такое состояние системы в виде жидкости в фазовом пространстве, масса которой в произвольном объеме фазового пространства равна полной вероятности того, что система находится в каком-либо из состояний, изображаемых точками этого объема. Введем плотность ρ этой жидкости... То требование, что полная вероятность нахождения системы в каком-либо состоянии равна единице, приводит к условию нормировки для ρ

$$\int\int \rho dq dp \quad = \quad 1,$$

где интегрирование производится по всему фазовому пространству. Если β есть некоторая функция динамических переменных, то ее среднее значение равно

$$\langle\beta\rangle \quad = \quad \int\int \beta\rho dq dp \quad = \quad 1.$$

Такая совокупность динамических систем и есть ансамбль Гиббса.

...в квантовой механике существует соответсвующая плотность ρ с аналогичными свойствами. Она была впервые введена фон Нейманом. То, что она существует, является даже несколько неожиданным фактом, поскольку понятие о фазовом пространстве в квантовой механике уже не имеет смысла ввиду того, что координатам q и импульсам p невозможно приписать одновременно определенные численные значения.

Отметим два важных обстоятельства. Из математики известно, что оераторы, удовлетворяющие соотношениям 1–3, имеют чисто дискретный спектр. Это означает, что всякую матрицу плотности можно представить в форме

$$\hat{\rho} \quad = \quad \sum_n p_n \hat{P}_n.$$

Операторы $\hat{P}_n$ – самосопряженные попарно ортогональные проекционные операторы, реализующие раздожение единицы. Числа p_n удовлетворяют неравенствам $0 \leq p_n \leq 1$, причем $\sum_n p_n Tr\hat{P}_n = 1$.

Если F – наблюдаемая с чисто дискретным спектром, т.е.

$$\hat{F} \quad = \quad \sum_n f_n \hat{P}_n,$$

то среднее значение F в состоянии $\hat{\rho}$ можно представить в форме

$$\langle F\rangle_\rho \quad = \quad \sum_n f_n Tr(\hat{P}_n\rho.$$

Это означает, что $Tr(\hat{P}_n\rho$ – это вероятность того, что наблюдаемая F принимает в состоянии ρ значение f_n. Поскольку все числа f_n различны, то можно установить взаимно однозначное соответствие между этими числами и подпространствами, выделяемыми соответствующими проекционными операторами. Таким образом, можно утверждать, что если $\hat{P}$ – некоторый проекционный оператор, то величина

$$Tr(\hat{P}\hat{\rho})$$

представляет собой вероятность того, что оператор $\hat{\rho}$ действует в подпространстве $M = \hat{P}\mathcal{H}$, выделяемым оператором $\hat{P}$.

Теперь придать физический смысл коэффициентам p_n в спектральном представлении матрицы плотности. Это – вероятность обнаружить систему в состоянии $\hat{P}_n$, если она с достоверностью находится в состоянии $\hat{r}ho$.

Понятие о матрице плотности было сформулировано фон Нейманом в 1927 году [**Neumann 1927**]. Чтобы оценить значение этой работы, достаточно заметить в ней впервые было дано строгое определение состояния. **До открытия фон Неймана понятия состояния системы не существовало**, а были лишь различной строгости "наглядные" определения. Казалось бы, как в любой точной науке, открытия такого уровня должны повсеместно приветствоваться и внедряться. Однако, соображения наглядности привели к, может быть быть бессознательному искажению истины. Лишь немногие физики уровня Дирака, Паули, Фока вполне осознали значение понятия матрицы плотности и внесли весомый вклад в его развитие. Чтобы создать возможно более ясное представление о массовой оценке места матрицы плотности в квантовой механике, приведем суждения, содержащиеся в двух блестящих популярных книгах Пенроуза. В первой [**Penrose 1989**] после рассказа о трудностях, принесенных в науку Шредингеровой кошкой, говорится что

> некоторые считают, что сложные системы не следует понимать не как "состояния", а необходимо обратиться к их обобщению, которое принято называть "матрицей плотности" (von Neumann 1955). Оно содержит как классические вероятности, так и квантовые амплитуды. В результате для представления (физической) действительности используется сразу большое число различных состояний. Матрицы плотности удобны, но они, сами по себе не могут решить глубоких проблем квантовых измерений.

В более поздней книге [**Penrose 1994**] возраст матрицы плотности был несколько увеличен.

> Это понятие было введено в 1932 году выдающимся венгерско-американским математиком фон Нейманом... Идея матрицы плотности весьма элегантна. Прежде всего, вместо любого индивидуального состояния $|\Psi\rangle$ можно ввести объект, который записывают в форме $|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Предположим, что кто-то захотел определить матрицу плотности, которая описывает некоторую смесь состояний $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ с относительными вероятностями a и b. Подходящей конструкцией будет оператор
>
> $$\hat{D} \quad = \quad a|\alpha\rangle\langle\alpha| + b|\beta\rangle\langle\beta|.$$

Прежде всего бросается в глаза стремление забыть точную дату открытия фон Неймана, связав ее с появлением немецкого и англиийского изданий его классической книги. Ведь если помнить о точной дате – осени 1927 года (рукопись фон Неймана появилась в редакции 11 ноября 1927 года), "наглядность" квантовой механики, связанная с борновским толкованием $|\Psi(q)|^2$ как плотности распределения координаты в состоянии, которое определяется функцией $\Psi(q)$ и сведения содержания квантовой механики к принципу суперпозиции окажется ребенком, умершем во младенчестве. Стремлением сохранить "наглядность" объясняется и настойчиво повторяемое утверждение о том, смысл матрицы плотности состоит в том, что она сочетает "классические" вероятности с квантовыми амплитудами. Свойства матрицы плотности действительно таковы, что ее спектр чисто дискретен и соответствующие собственные числа можно истолковать как некоторые вероятности. Но такое толкование основано на внутренних свойствах статистического оператора, имеющего чисто квантовую природу. Вместо того, чтобы изучить возможности, которые предоставляет идея рассматривать состояния физической системы как операторы приверженцы наглядности говорят о связях матрицы плотности с некоторыми классическими закономернсотями.

Между тем в том же 1927 году на Сольвеевском конгрессе обсуждался вопрос, который, судя по воспоминаниям Бора, так не был решен, именно в силу ограниченности толкования состояния в рамках Ψ-функции.

Речь идет о мысленно эксперименте Эйнштейна, в котором появление электрона в некоторой точке экрана связана с его внезапным исчезновением в другой. Уже говорилось, почему это обстоятельство не опровергает принципа причинности. Однако, в Брюсселе речь шла совсем о другом [**Bohr 1947**]:

> Разумеется все мы поняли, что в приведенном выше примереположение не представляет аналогии статистическому рассмотрению сложных механических систем. Положение это скорее напоминало то, которое явилось предпосылкой для выводов, сделанных ранее самим Эйнштейном об определенной направленности индивидуальных излучательных эффектов, выводов, стоящих в столь резком противоречии с простой волновой картиной.

Ручь идет о знаменитой статье Эйнштейна [**Einstein 1916**], посвященной квантовой теории излучения. Эйнштейн, в частности, обсуждает в ней эффекты, связанные с законом сохранения импульса.

> При потере энергии в результате спонтанного излучения в случае резонатора Планка последний в целом не получает никакого импульса, так согласно классической теории спотанное излучение имеет вид сферической волны. Однако,... мы можем прийти к непротиворечивой квантовой теории лишь в том случае, если мы предположим, что процесс спонтанного излучения также является направленном. Тогда в каждом элементарном процессе спонтанного излучения $(Z_m \to Z_n)$ молекуле передается импульс, величина которого равна $(\epsilon_m - \epsilon_n)/c$. Если молекула изотропна, то мы должны считать равновероятными все направления спонтанного излучения. В случае неизотропной молекулы мы придем к такому же утверждению, если ее ориентация меняется с течением времени по закону случая.

Таким образом для получения формулы Планка помимо предположений о механизме излучения и поглощения фотонов требуется и чисто техническое соглашение о некоторой процедуре усреднения. Это вполне допустимо в полуэмпирических построениях, но точная теория более основательных аргументов. По сути дела обоснованного ответа Эйнштейн, видимо, не получил. Даже если кто-либо придумал приемлемую процедуру усреднения, стало ясно, что квантовая механика не может убедительно объяснить изотропности спонтанного излучения свободным атомом. Однако снова можно повторить, что raffinert ist der Herr Gott, aber boshaft ist Er nicht.

Квантовая механика, заставив думать о законах сохранения в каждом элементарном акте, снабдила нас новым типом состояний. Именно их открыл фон Нейман. Чтобы не иметь дело с технически трудным законом сохранения импульса, будем считать ядра атомов бесконечно тяжелыми. Это не избавит от небходимости учитывать закон сохранения момента количества движения, просто вычисления станут проще. Рассмотрим для простоты водородоподобный атом и пренебрежем эффектами, связанными со спином электрона. Собственные векторы гамильтониана в этом случае можно занумеровать числами n, l, m, где числа l выделяют собственные векторы с определенным моментом количества движения, а m – проекции момента на определенную ось (например ось Oz). При фиксированных l числа m, изменяясь на единицу, заключены между $-l$ и l. Собственные значения гамильтониана зависят от чисел n и l. Таким образом каждый уровень энергии $(2l+1)$-кратно вырожден и это вырождение является прямым следствием сферической симметрии гамильтониана. Матрицу плотности атома с определенной энергией можно определить ядром

$$\rho_{nl}(\vec{r}, \vec{r}^{'}) \quad = \quad R_{nl}(r) R_{nl}(r^{'}) \rho_l(\vec{n}, \vec{n}^{'}),$$

где

$$\rho_l(\vec{n}, \vec{n}^{'}) \quad = \quad \sum_{m,m'} Y_{lm}(\vec{n}) C_{mm'} {Y^*}_{lm'}(\vec{n}^{'}).$$

Среди возможных ядер указанного типа есть и сферически симметричное:

$$\rho_l(\vec{n}, \vec{n}^{'}) \quad = \quad \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\vec{n}) {Y^*}_{lm}(\vec{n}^{'}) \quad = \quad \delta(\vec{n} - \vec{n}^{'}).$$

В этом случае полная матрица плотности принимает вид

$$\rho_{nl}(\vec{r}, \vec{r}^{'}) \quad = \quad \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \Psi_{nlm}(\vec{r}) \Psi^*_{nlm}(\vec{r}^{'}).$$

Полученная формула реализует спектральное разложение матрицы плотности и вычисления вероятностей переходов из этого состояния во все возможные происходит по формуле

$$W = \frac{1}{2l+1} \sum_{m',m} W(m', m),$$

которую обычно сопровождают примерно таким заклинанием: "нужно вычислить вероятности переходов при определенных начальных и конечных значений проекций момента импульса, а потом просуммировать по конечным значениям проекций момента количества движения и усреднить по начальным". Последняя часть этого рецепта, если считать, что существуют только волновые функции, выглядит чисто внешним внешним дополнением к формализму, и эту процедуру можно только угадать.

СОСТАВНЫЕ СИСТЕМЫ

Предположим, что в нашем распоряжении есть две физические системы I и II. С переменными F_1 первой системы с k степенями свободы можно связать линейные операторы $\hat{F}_1$

$$F_1 \leftrightarrow (\hat{F}_1)\xi(q) \quad = \quad \int F_1(q,q^{'})\xi(q^{'})dq^{'}, \quad q = (q_1, ...q_k),$$

действующие в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций

$$\mathcal{H}_1 = \{\xi(q) : \int |\xi(q)|^2 dq < \infty\}.$$

Переменные системы II l степеней свободы связаны с операторами

$$F_2 \leftrightarrow (\hat{F}_2)\phi(r) \quad = \quad \int F_1(r,r^{'})\xi(r^{'})dr^{'}, \quad r = (r_1, ...r_l),$$

определенными в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}_2 = \{\phi(r) : \int |\phi(r)|^2 dr < \infty\}.$$

Переменные F объединения систем I и II – системы I+II с k+l степенями свободы – это операторы

$$F \leftrightarrow (\hat{F})\Psi(x) \quad = \quad \int F_1(x,x^{'})\Psi(x^{'})dx^{'}, \quad x = (q,r),$$

действующие в пространстве

$$\mathcal{H} = (\Psi(x) : \int |\Psi(x)|^2 dx < \infty).$$

При описании объединенных систем, прежде всего, возникает такой вопрос: насколько однозначно состояния подсистем I и II определяют состояние большой системы I+II. Ответ оказывается не совсем простым, оказывается, что *если состояния подсистем описываются произвольными матрицами плотности* ρ_1 *и* ρ_2, *то нельзя однозначно восстановить матрицу плотности большой системы по матрицам плотности подсистем.* По счастью в достаточно реалистической ситуации, *когда одна из подсистем находится в чистом состоянии, состояние большой системы однозначно определяется состояниями подсистем.* Приведем соответствующие формулы.

Пусть матрица плотности системы I задается ядром

$$\rho_1(q,q^{'}) \quad = \quad \xi(q)\xi^*(q^{'}),$$

а состояние системы II определяется матрицей плотности с произвольным ядром

$$\rho_2(r,r^{'}).$$

В этом случае матрица плотности системы I+II определяется ядром

$$\rho(x,x^{'}) \quad = \quad \xi(q)\xi^*(q^{'})\rho_2(r,r^{'}).$$

Следующий, не менее важный вопрос: можно ли определить состояние подсистемы (например системы I), если известно состояние большой системы I+II? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что состояние системы ранее было определено после анализа формулу для средних значений связанных с системой величин. Переменные, определенные в системе I – это операторы с ядром

$$F_1(x,x^{'}) \quad = \quad f(q,q^{'})\delta(r-r^{'}).$$

Средние значения величин такого рода равны

$$\langle F_1\rangle_\rho \quad = \quad \int F_1(x,x^{'})\rho(x^{'},x)dxdx^{'} \quad =$$

$$\int f(q,q^{'})\delta(r-r^{'})\rho(q,r;q^{'},r^{'})dqdq^{'}drdr^{'} \quad = \quad \int f(q,q^{'})\rho_1(q,q\prime)dqdq^{'},$$

где

$$\rho_1(q,q^{'}) \quad = \quad \int \rho(q,r;q^{'},r)dr.$$

С ядром $\rho_1(q,q^{'})$ можно связать оператор $\hat{\rho}_I$, действующий в пространстве $\mathcal{H}_1$. Нетрудно показать, что этот оператор обладает всеми свойствами, которые требуются от матрицы плотности:

$$1. \qquad \hat{\rho}_I^+ \quad = \quad \hat{\rho}_I,$$

$$2. \qquad \langle g|\hat{\rho}|g\rangle \geq 0 \qquad \vee\, g \in \mathcal{H}_I,$$

$$3. \qquad Tr\hat{\rho}_I \quad = \quad 1.$$

Это означает, что с оператором $\hat{\rho}_1$ можно связать некоторое состояние системы I, подсистемы большой системы I+II. Способ вычисления ядра ρ_1 можно символически представить формулой

$$\hat{\rho}_I \quad = \quad Tr_{II}\hat{\rho}.$$

Все изложенное выше можно сформулировать как правило:
если система I+II находится в состоянии $\hat{\rho}_{I+II}$, то состояние системы I определяется матрицей плотности $\hat{\rho}_I = Tr_{II}\hat{\rho}_{I+II}$.

Приведем несколько примеров. Пусть система из двух частиц находится в чистом состоянии с матрицей плотности, определяемой ядром

$$\rho_{I+II}(x,x^{'}) \quad = \quad \Psi(x)\Psi^*(x^{'}),$$

$$\Psi(x) \quad = \quad C_1\phi_a(q)\phi_b(r) \quad + \quad C_2\phi_a(r)\phi_b(q),$$

в котором функции $\phi_{a,b}$ нормированы на единицу, но не обязательно ортогональны.

$$\langle\phi_{a,b}|\phi_{a,b}\rangle \quad = \quad C_{ab}.$$

Состояния отдельных частиц определяются статистическими операторами

$$\rho_I(q,q^{'}) \quad = \quad Tr_{II}\rho I+II \quad = \quad \int \Psi(q,r)\Psi^*(q^{'},r)dr \quad =$$

$$|C_1|^2\phi_a(q)\phi_a^*(q\prime) + |C_2|^2\phi_b(q)\phi_b^*(q\prime)+$$

$$C_1C^*{}_2C^*{}_{ab}\phi_a(q)\phi^*{}_b(q^{'}) + C_2C^*{}_1C_{ab}\phi_b(q)\phi^*{}_a(q^{'}),$$

$$\rho_{II}(r,r^{'}) \quad = \quad Tr_I\rho I+II \quad = \quad \int \Psi(q,r)\Psi^*(q,r^{'})dq \quad =$$

$$|C_1|^2\phi_b(r)\phi_b^*(r\prime) + |C_2|^2\phi_a(r)\phi_a^*(r\prime)+$$

$$C_1C^*{}_2C^*{}_{ab}\phi_b(r)\phi^*{}_a(r^{'}) + C_2C^*{}_1C_{ab}\phi_a(r)\phi^*{}_b(r^{'}).$$

Если $|C_1{}^2|^2 = |C_2 2|^2$ (в этом случае всегда можно считать, что $C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm C_2$), то системы I и II находятся в одинаковых состояниях.

Полученная структура статистических операторов малых систем позволяет понять, как технически выполняется принцип неразличимости. Обычно говориться, что две одинаковые частицы неразличимы в том случае, если их волновая функция симметрична или антисимметрична по своим переменным. Однако, после разложения волновой функции большой системы по функциям из одночастичного базиса, истинность принципа эквивалентности оказывается под угрозой. Во всяком случае, если справедливо правило редукции волнового пакета, то можно утвеждать, что после того как измерение покажет, что частица 1 находится в состоянии с квантовыми числами a, частица 2 окажется в состоянии с квантовыми числами b, т.е. частицы оказываются вполне различимыми. Поскольку кажется, что нет никаких никаких сил, способных помешать любому желающему зачеркнуть в сумме одно слагаемое и оставить другое, то перед нами опровержение принципа эквивалентности.

Все встает на свои места после обращения к матрице плотности, т.е. праильному описанию состояний подсистем. Матрицы плотности обеих частиц оказываются и равными (в операторной записи)

$$\hat{r}ho_{I,II} \quad = \quad \frac{1}{2}\hat{P}_a \quad + \quad \frac{1}{2}\hat{P}_b,$$

где $\hat{P}_{a,b}$ – проекционные операторы, выделяющие состояния с квантовыми числами a или b. Это означает, что ни одной из частиц нельзя приписать ни одного из квантовых чисел. Каждая из частиц с равной вероятностью $\frac{1}{2}$ обладает и тем и другим квантовым числом. Числа a и b определяют состояние большой системы и равновероятно распределены между отдельными частицами.

Если считать принцип неразличимости фундаментальным законом природы, то процедуру редукции волнового пакета следует признать неудовлетворительной. Редукция матрицы плотности, как способ описания состояний подсистем вполне согласуется с принципом неразличимости.

Обращение к матрице плотности позволяет прояснить темное, на первый взгляд, место принципа неразличимости. Если электроны во всей Вселенной (в том числе и в неизвестным нам ее частях) неразличимы, то как понять, каккой электрон входит в состав атома водорода, спектр которого изучается в заданнои месте в заданный момент времени? Чтобы ответить на этот вопрос, вернеся к исходной матрице плотности с неортогональными функциями $\phi_{a,b}$. Уточним предроложения о свойствах этих функций. Пусть параметры a и b – векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, – равные средним значениям координат частиц в соответствующих состояниях. Тогда интеграл перекрытия можно считать функцией относительного расстояния между частицами: $C_{ab} = C(|\vec{a} - \vec{b}|)$, которая мала, если относительное расстояние между частицами значительно превосходит неопределенность координат каждой из частиц: $C(|\vec{a} - \vec{b}|) \sim 0$, если $|\vec{a} - \vec{b}| >> r_{a,b}$. Величины $r_{a,b}$ можно определить следующими соотношениями: $\phi_{a,b} \sim 0$, если $|\vec{a}, \vec{b} - \vec{r}| >> r_{a,b}$.

Пусть $q \equiv \vec{r}_1, r \equiv \vec{r}_2$, и реализуется только что описанный случай. Тогда матрицы плотности каждой из частиц определяется ядрами

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_I(\vec{r}_1, \vec{r}_1^{'}) &= |C_1|^2 \phi_a(\vec{r}_1) \phi^*{}_a(\vec{r}_1^{'}) + |C_2|^2 \phi_b(\vec{r}_1) \phi^*{}_b(\vec{r}_1^{'}), \\
\hat{\rho}_{II}(\vec{r}_2, \vec{r}_2^{'}) &= |C_2|^2 \phi_a(\vec{r}_2) \phi^*{}_a(\vec{r}_2^{'}) + |C_1|^2 \phi_b(\vec{r}_2) \phi^*{}_b(\vec{r}_2^{'}).
\end{aligned}$$

Если

$$\vec{r}_1, \vec{r}_1^{'} \sim \vec{a}, \quad \vec{r}_2, \vec{r}_2^{'} \sim \vec{b},$$

то

$$\hat{\rho}_I = |C_1|^2 \hat{P}_a, \hat{\rho}_{II} = |C_1|^2 \hat{P}_b.$$

Эти матрицы будут проекционными при условии $|C_1|^2 = 1$. Чтобы обеспечить эту возможность матрицу плотности многочастичной системы нормируют на число частиц. В нашем случае – это условие $Tr \rho_{I+II} = 2$.

Возможность разделения системы на подсистемы естественно приводит к понятию **условной матрицы плотности**, которое позволяет подробно и точно обсудить взаимоотношение подсистем. Оно обобщает определение вероятностей в терминах следа произведения матрицы плотности и проекционного оператора.

Пусть величине F, определенной в системе I+II соответствует интегральный оператор с ядром

$$F(q, r; q^{'}, r') = f(q, q^{'}) P(r, r^{'}),$$

где $\hat{P}(r,r')$ – ядро некоторого проекционного оператора, действующего в подсистеме II. Ее среднее значение в состоянии ρ равно

$$\langle\hat{F}\rangle_{\rho} \quad = \quad \int f(q,q^{'})P(r,r^{'})\rho(q^{'},r^{'};q,r)dqdrdq^{'}dr^{'} \quad = \quad \int f(q,q^{'})\rho_{I/II}(q^{'},q)dqdq^{'}.$$

Ядро

$$\rho_{I/II}(q,q') \quad = \quad \int P(r,r^{'})\rho(q,r^{'};q^{'},r)drdr^{'}$$

после нормировки на единицу определяет некоторый оператор,

$$\hat{\rho}_{I/II} \quad = \quad Tr_{II}(\hat{P}_{II}\rho_{I+II}),$$

который после соответствующей нормировки будет обладать свойствами статистического оператора. Формула вычисления среднего значения показывает, что ему можно придать смысл матрицы плотности, определяющей состояние подсистемы I при условии, что состояния подсистемы II лежат в подпространстве ее состояний, выделяемом оператором $\hat{P}_{II}$.

С помощью условной матрицы плотности весьма просто описывается влияние измерений, проводимых в одной подсистеме, на состояние второй подсистемы. Если представить ядро оператора $\hat{P}_{II}$ в форме

$$P_{II}(r,r^{'}) \quad = \quad \sum_i \phi_i(r)\phi_i{}^*(r^{'}),$$

то

$$\rho_{I/II}(q,q') \quad = \quad \sum_i \int \phi_i{}^*(r)\rho(q,r;q^{'},r^{'})\phi_i(r^{'})drdr^{'}.$$

Если большая система находится в чистом состоянии, т.е.

$$\rho(q,r;q^{'},r^{'}) \quad = \quad \Psi(q,r)\Psi^*(q^{'},r^{'}),$$

то

$$\rho_{I/II}(q,q') \quad = \quad \sum_i u_i(q)u_i{}^*(q^{'}),$$

$$u_i(q) \quad = \quad \int \phi_i{}^*(r)\Phi(q,r)dr$$

Если оператор $\hat{P}_{II}$ выделяет чистое состояние, т.е.

$$P_{II}(r,r^{'}) \quad = \quad \phi_i(r)\phi^*(r^{'}),$$

то в чистом состоянии окажется и система I:

$$\rho_{I/II}(q,q') \quad = \quad u_(q)u^*(q^{'}).$$

Рассмотрим в качестве примера EPR-систему. Если $q = x_1$ и $r = x_2$, то измерению координаты второй частицы соответствует проекционный оператор с ядром

$$P(x_2, x_2^{'}) \quad = \quad \delta(x_2 - x_{02})\delta(x_2^{'} - x_{02}).$$

Поскольку EPR-волновая функция равна

$$\Psi(x_1, x_2) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{P(x_1+x_2)}{\hbar}} \delta(x_1 - x_2 + x_0),$$

то

$$u(x_1) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{P(2x_1-x_0)}{\hbar}} \delta(x_1 - x_{02} + x_0),$$

Частица I находится в состоянии с определенной координатой $x_{01} = x_0 - x_{02}$ и средним импульсом, равным 2P. Однако, вопреки утверждению EPR импульс этой частицы не имеет точного значения.

ЖИЗНЬ И РАЗМНОЖЕНИЕ ШРЕДИНГЕРОВЫХ КОШЕК ИЛИ ЧТО ТАКОЕ КВАНТОВЫЕ АНСАМБЛИ

> – А простите... это ты... это вы...– он сбился, не зная, как обращаться к коту, на "ты" или на "вы", вы – тот самый кот, что садились в трамвай?
> Я, – подтвердил польщенный кот и добавил: – Приятно слышать,что вы так вежливо обращаетесь с котом. Котам обычно почему-то говорят "ты", хотя ни один кот никогда ни с кем не пил брудершафта.
>
> М.Булгаков

Приобретенных нами познаний достаточно для того, чтобы рассказать о судьбе Шредингеровой кошки, которая так нравилась Эйнштейну. Уже в декабре 1950 года он писал Шредингеру следующее.

> Дорогой Шредингер!
>
> Ты единственный (рядом с Лауэ) из современных физиков, кто понимает, что нельзя обходить вопрос о реальности, оставаясь честным. Большинство не дают себе отчета, какую рискованную игру они ведут с реальностью - реальность как нечто независимое от констатации. Они как-то думают, что квантовая теория дает описание действительности, притом полное описание. Это представление, однако, красивейшим образом опровергается твоей радиоактивной системой: атом + счетчик Гейгера, усилитель + взрывчатка + кошка - в одном ящике, причем ψ-функция системы содержит кошку как в живом виде, так и в распавшейся на составные части. Создается ли состояние кошки физиком, который в определенное время исследует вопрос? На самом деле никто не сомневается, что наличие или отсутствие кошки - нечто независимое от акта наблюдения. Но тогда описание с помощью ψ-функции неполное, и должно существовать более полное описание. Кто хочет рассматривать квантовую теорию (в принципе) как окончательную,

> тот должен полагать, что более полное описание бесцельно, потому что для него невозможно установить законов. Если бы это было так... это было бы очень печально.

За пятнадцать лет шутовской пример Шредингера приобрел в памяти Эйнштейна характер катастрофы, но все же попробуем выяснить, о какой ψ-функции здесь говорится. Очень трудно описать все многообразие состояний кошки, но сейчас интересны главные: *кошка жива* и *кошка мертва*. Эти состояния связаны с двумя состояниями колбы: *колба цела* и *колба разбита*. Векторы состояний кошки и колбы лежат в двухмерных гильбертовых пространствах H_1 и H_2. Их можно считать пространствами функций $u(\sigma)$ и $w(\sigma)$ дискретной переменной, принимающей два значения. В каждом из этих пространств можно выбрать базисы $f(s,\sigma)$, состоящие из собственных векторов операторов $\hat{M}_1, \hat{M}_2$ с собственными значеними $s=\pm 1$. Установим такое соответствие:

$$u(1,\sigma) \quad \leftrightarrow \quad \textit{кошка} \quad \textit{жива}; \qquad u(-1,\sigma) \quad \leftrightarrow \quad \textit{кошка} \quad \textit{мертва};$$

$$w(1,\sigma) \quad \leftrightarrow \textit{колба} \quad \textit{разбита}; \qquad w(-1,\sigma) \quad \leftrightarrow \textit{колба} \quad \textit{цела}.$$

Произвольный вектор состояния системы "кошка + колба" можно представить в форме

$$\Psi(\sigma_1,\sigma_2) \quad = \quad \sum_{s_1,s_2} u(s_1,\sigma_1)w(s_2,\sigma_2)c(s_1,s_2).$$

Несовместимость кошки и синильной кислоты означает, что вектор Ψ должен иметь вид

$$\Psi(\sigma_1,\sigma_2) \quad = \quad \sum_{s_1+s_2=0} u(s_1,\sigma_1)w(s_2,\sigma_2)c(s_1,s_2) \quad =$$

$$u(1,\sigma_1)w(-1,\sigma_2)a \quad + \quad u(-1,\sigma_1)w(1,\sigma_2)b, \quad |a|^2+|b|^2=1.$$

Состояние кошки описывается матрицей плотности

$$\rho_1(\sigma,\sigma\prime) \quad = \quad \sum_{\sigma_2} \Psi(\sigma,\sigma_2)\Psi(\sigma^{'},\sigma_2)^* \quad =$$

$$u(1,\sigma)u^*(1,\sigma^{'})|a|^2 \quad + \quad u(-1,\sigma)u^*(-1,\sigma^{'})|b|^2.$$

Вероятность найти кошку живой равна $|a|^2$.
Колба имеет матрицу плотности

$$\rho_2(\sigma,\sigma\prime) \quad = \quad \sum_{\sigma_1} \Psi(\sigma_1,\sigma)\Psi(\sigma_1,\sigma^{'})^* \quad =$$

$$w(-1,\sigma)w^*(-1,\sigma^{'})|a|^2 \quad + \quad w(1,\sigma)w^*(1,\sigma^{'})|b|^2.$$

Вероятность того, что колба цела равна вероятности обнаружить кошку живой.
Шредингер считал, что в его примере

> неопределенность, ограниченная первоначально атомными размерами, превращается в макроскопическую неопределенность, которая поддается разрешению прямым наблюдением. Это препятствует нам выдавать в такой наивной форме "размытую модель" за отображение действительности. Сама по себе она не содержит чего-либо неясного или непротиворечивого. Это различие между сдвинувшейся или не резко сфокусированной фотографией и снимком облаков или дымовых туманов.

Между тем этот пример только подтверждает здравый смысл квантовой механики, как и утверждения Эйнштейна о том, что волновая функция не дает полного описания действительности. Однако, все встает на свои места, если обратиться к матрице плотности. Последовательное использование этого формализма делает излишним тревожный вопрос: "Создается ли состояние кошки физиком, который в определенное время исследует содержимое сейфа? " Понятие матрицы плотности, фактически для того и было определено, чтобы никто не сомневался "что наличие или отсутствие кошки - нечто независимое от акта наблюдения."

Итак парадокс Шредингера был вполне уловлетворительно разрешен за несколько лет до того, как был изобретен. Одним из странных обстоятельств является существование в наше время таких рассуждений [**Peres 1974**] :

> Рассмотрим парадокс Шредингера: пусть некоторое автоматическое устройство, запускаемое распадом радиоактивного ядра, убивает кошку. Вначале все ядра целы и кошка жива. Через некоторое время, в силу уравнения Шредингера, ядра оказываются в суперпозиции состояний: начального (когда кошка жива) и совокупности ортогональных к начальному состояний (им соотвествует мертвая кошка). Как чувствует себя кошка? Решение этого парадокса состоит в том, что суперпозиция состояний относится не к единичному ядру, но к большому числу одинаково приготовленных ядер и столь же большому числу кошек. По прошествии времени t доля живых кошек будет равна $e^{-\lambda t}$. Мы не в состоянии предсказать заранее, какая кошка выживет, в каждый момент кошка будет, несомненно, или жива или мертва. Любая попытка определить состояние индивидуальной системы, которое справедливо для ансамблей, ведет к парадоксам и противоречиям.

Когда вдруг слышишь подобные рассуждения, то единственной здоровой реакцией может быть только оцепенение. Однако, такой ход мыслей освящен именем Эйнштейна. Именно он в 1936 году заложил основы современного понятия о квантовых ансамблях. [**Einstein 1936**]. Мы уже говорили о статье в Journal of the Franklin Institute. Приведем здесь свой, может быть,несколько фукидидовский перевод отдельных мест английского текста, касающихся квантовой механики. Эйнштейн напоминает, что существование кванта действия приводит к тому, что энергия системы может принимать только вполне определенные дискретные значения. При попытках объяснить это явление теория теряет возможность описать переход системы из одного состояния в другое в терминах причинных законов. Удается лишь сформулировать некоторые статистические закономерности, аналогичные законам распада радиоактивных ядер. Первые два десятилетия XX века физики тщетно пытались дать последовательное объяснение квантовых свойств систем и явлений, пока эти попытки не увечались успехом с помощью двух совершенно различных теоретических подходов.

> Первый из них принадлежит Гайзенбергу и Дираку, второй де Бройлю и Шредингеру. Математическая эквивалентность этих была вскоре доказана Шредингером

*). Я попытаюсь изложить ход мысли Шредингера, который ближе физическому способу мышления, и сопроводить изложение некоторыми общими соображениями.

Первый вопрос: как сопоставить дискретную последовательность значений энергии H_σ с системой, энергия которой определяется по правилам классической механики (с помощью функции Гамильтона, которая зависит от координат q_r и соотвествующих импульсов p_r)? Поскольку постоянная Планка связывает с энергией частоту $H_\sigma/\hbar$, то системе достаточно приписать дискретную последовательность частот. Уместно вспомнить, что в акустике набор дискретных частот связан с *линейным дифференциальным уравнением*, а именно, *с периодическими решеними этого уравнения.* Это привело Шредингера к мысли сопоставить частоты с уравнением в частных производных, которое соответствует классической функции Гамильтона $H(q_r, p_r)$. Он преуспел в этом, показав, что те теоретические значения энергии H_σ, которые требует статистическая теория **), получаются вполне удовлетворительно из условия периодичности решения. Поскольку с решением уравнения Шредингера – $\Psi(q_r, t)$ невозможно связать какое-либо движение материальных точек, согласованное с классической механикой, то Ψ-функция не определяет *точную* картину зависимости q_r от времени t.

Однако, как показал Борн, функция Ψ допускает такую физическую интерпретацию: $\Psi^*\Psi$ (квадрат абсолютного значения комплексной функции Ψ) – это плотность вероятности распределения координат q_r в момент времени t.

Говоря не совсем точно, но наглядно, можно сформулировать следующее: уравнение Шредингера определяет, как изменяется во времени плотность распределения статистического ансамбля рассматриваемых систем.

Вольность обращения с Ψ-функцией превосходит все примеры Шредингера. Это не удивительно: Эйнштейн, как и Шредингер хочет связать с ней некое материальное поле. Далее Эйнштейн объясняет, почему статистическая интерпретация, предложенная Борном, является единственно возможной.

Волновая функция Ψ ни в коей мере не описывает одну систему, она связана с "ансамблем систем" в смысле статистической механики. Если, исключая отдельные случаи, Ψ-функция снабжает нас только статистическими данными, то причина этого лежит не только в том, что операция измерения привносит неизвестные элементы, которые можно понять только статистически, но именно в том обстоятельстве, что Ψ-функция не описывает состояния одной системы.

Такое истолкование объясняет следующий парадокс, недавно продемонстрированный мной и моими сотрудниками. Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем A и B, которые взаимодействуют друг с другом только в течение некоторого конечного промежутка времени. Предположим, что мы знаем Ψ-функцию системы перед взаимодействием. Уравнение Шредингера снабдит нас Ψ-функцией после взаимодействия. Выполним измерения, которые позволят найти состояние

---

*) Эйнштейн своим авторитетом укрепляет миф об эквивалентности *частных* результатов Шредингера квантовой теории

**) Как мы уже знаем, уравнение Шредингера не соотвествует классической функции Гамильтона. Мы знаем также, что Шредингер в своем первом сообщении ни словом не обмолвился о статистичности и был полон негодования наблюдая за работой Борна.

> системы A с максимально возможной точностью. Тогда аппарат квантовой механики позволит определить Ψ-функцию системы B на основании результатов измерения подсистемы A и знания о Ψ-функции всей системы. Это определение, однако, приводит к результату, который зависит от того, в терминах каких величин мы определили состояние подсистемы A (например координат или импульсов). Поскольку подсистема B находится только в одном состоянии, и это состояние не может зависеть от того, какие измерения произведены в системе A, может быть сколь угодно далеко отстоящей от системы B, можно заключить, что Ψ-функция не определяет однозначно состояние системы. Сопоставление различных Ψ-функций с одним и тем же состоянием системы B снова показывает, что Ψ-функцию нельзя рассматривать как величину, дающую полное описание отдельной системы. Трудности преодолеваются после сопоставления Ψ-функции с ансамблем систем. *)

Такая точка зрения заставляет Эйнштейна следующим образом определить измерение.

> Операция измерения системы A влечет за собой переход к более узкому кругу систем. Новый ансамбль (как и Ψ-функция) зависит от критериев, которые определяют сужение ансамбля.

Если вспомнить, как теория ансамбля объясняет парадокс кошки, то можно сказать, что теперь парадоксов в квантовой механике не существует. Правда, такое толкование волновой функции может показаться по-детски прямолинейным, но всегда можно объяснить, почему волновая функция связана с ансамблем и более правдоподобно. Прекрасный пример дают блестящие по стилю лекции Мандельштама Л.И.Мандельштамом [**Мандельштам 1939**].

Сначала излагаются идеи, под которыми подписался бы и сам Гайзенберг.

> В настоящее время установили (или думают, что установили), что $|\Psi|^2 dx$ – вероятность нахождения частицы в интервале $(x, x + dx)$. А что такое x? x – координата. ... и в первом утверждении, и во втором есть... самообман. Если я в классике говорю, что x есть координата данной материальной точки, то за этим определением стоит вполне ясный, конкретный рецепт: если я установлю соответствующим образом твердый масштаб с нанесенными по определенному рецепту делениями, то x – это число на том делении, с которым в данный момент совпадает моя точка. Понятие "совпадает" для макромира считается известным. И поскольку это так, мы действительно установили рецепт для перехода от символа x к реальным объектам (материальная точка, твердое тело – масштаб и т.д.). Такого рода рецепты мы называем измерениями.

Если речь идет о молекулярных вопросах, такие рецепты не выполнимы принципиально, а не только практически (*элементарность* понятия "совпадение" стоит под вопросом из-за воздействия прибора).

> Поэтому, назвав x координатой, я не установил связи x с природой, я только сделал вид, что установил эту связь сославшись на макромир. С такими "определениями" теория еще висит в воздухе. Правильнее было бы даже и называть x не координатой, а, например, квазикоординатой.

---

*) Эйнштейн в 1936 году принимает точку зрения, которую он отвергал в 1927, считая неинтересной.

> Далее, говорят, что $|\Psi|^2$ – вероятность. Допустим, что мы знаем, как измерить x (хотя в действительности, на нашей стадии рассмотрения, – не знаем). Тогда создается впечатление, что смысл $|\Psi|^2$ уже вполне ясен. Однако здесь имеется недоговоренность, и, прежде чем перейти к рассмотрению этих воросов, нужно остановиться еще на одной стороне дела.

Еще одно утверждение, с которым согласится каждый: "Волновая механика" – говорит Мандельштам – "статистическая теория", и объясняет, что под этим нужно понимать.

> ...говорить о статистике и о вероятности можно, только имея определенную совокупность повторных опытов (каждый индивидуальный опыт есть ее элемент), причем повторение должно происходить при одних и тех же условиях. Именно к такой совокупности относятся вероятностные высказывания, о которых говорилось выше. Необходимо подчеркнуть, что и всякая классическая теория по существу также является статистической, и в этом пункте нет принципиального отличия волновой механики. Если бы теория давала высказывания только для одного опыта, она не имела бы ценности. Но классика, например классическая механика, утверждала, что возможны сколь угодно узкие распределения для всех исследуемых величин. Таким образом, разница – в *типе* статистике, а не в самой статистичности. В обоих случаях, и в классической теории, и в волновой механике, мы имеем дело с большой совокупностью элементов и некоторым признаком. Назовем эту совокупность, над которой проделывается статистическая обработка, коллективом. Коллектив должен быть как-то выделен, иначе теряет смысл любого вопроса о нем. Так вот, говорят, что $|\Psi|^2$ – но в каком коллективе? Если это не указать, то возможны всякие неясности и парадоксы... Замечу, что полемика Эйнштейна и Бора вызвана именно грубой ошибкой в вопросе о коллективе. Я не встречал достаточно четкого определения коллектива, в котором берется Ψ-функция.

Далее следует упоминание о принципе дополнительности:

> *последнее звено ... измерительных рецептов обязательно макроскопическое.* Это мне кажется основным положением теории.

и, наконец:

> ...волновая механика утверждает, что для *определения микромеханического коллектива, к которому и относится Ψ-функция, достаточно указать (фиксировать) макроскопические параметры.* Таким образом, предпосылкой применения волновой механики является экспериментальная установка, *контролируемая классическими измерениями.*

Между утверждениями, которые можно считать почти непреложными истинами, содержатся и те, смысл которых не определяется. "... говорят, что $|\Psi|^2$ – но в каком коллективе? " Почему очевидно, Ψ-функция должна быть связана с каким-либо коллективом? Ведь характер связи, да и ее наличие еще необходимо установить.

"... *определения микромеханического коллектива, к которому и относится Ψ-функция, достаточно указать (фиксировать) макроскопические параметры*". Но ведь принцип дополнительности говорит лишь о том, что последнее звено измерений должно быть макроскопическим. Ни Бор, ни Гайзенберг с их трезвым мышлением не могли придумать микроколлективов. Таким образом утверждение о коллективах, если оно и есть в волновой механике, должно было проникнуть в неё позже. Но где и когда? В лучших традициях ”волновой механики” считается, отвечать на такие вопросы не нужно.

Самое поразительное здесь, что при анализе EPR-парадокса Мандельштам совершенно правильно указал на ошибку авторов. Но произошло это потому что он обратился к результатам фон-Неймана.

> Рассматриваемое Эйнштейном состояние систем I и II описывается волновой функцией $\Psi(y,z)$, но по отношению к каждой из систем в отдельности оно является смесью.

На этом можно остановиться, но Мандельштам ищет в задаче ансамбль.

> Уточнить это описание можно, выделяя подсовокупность, описываемую волновой функцией $\psi(x)$.

Благодаря фон-Нейману мы знаем, что такой функции не существует. Бор показал, что ни одна из двух частиц не обладает определенным импульсом или координатой, анализируя свой мысленный эксперимент. Им не нужно было обращаться к понятиям, которые, слава Богу, в это время не существовали. Мандельштам обращается к анализу подсовокупностей на языке ансамблей и получает тот же результат:

> Физически неправильно, когда Эйнштейн говорит: ”Мы измеряем систему II, не затрагивая систему I”. Спрашивается, откуда система II получила свой импульс? От столкновения с системой I. Значит, если мы берем только те случаи, когда система II обладает некоторым определенным импульсом, то мы берем тем самым лишь определенные удары со стороны системы I. Если же у системы II определенная координата, то она получила от системы I другие удары, или, точнее, удары, получаемые ею от системы I, не являются определенными. Таким образом, здесь просто неправильно применена теория вероятностей, и никакого повода к пересмотру волновой механики возражение Эйнштейна не дает.

Все это напоминает рассмотренный ранее анализ Фарри и грешит теми же неточностями. Трудно сказать, как бы реагировал на него Эйнштейн. Пожалуй, точнее всего считать этот анализ примером того, как совершенно излишнее и не определенное точно понятие способно запутать ясный вопрос.

Примерно к таким же выводам пришел и Фок, который специально изучал смысл утверждений, на которых покоится учение о квантовых ансамблях [**Фок 1952**]. Обычно при определении квантовых ансамблей принимается тот или другой набор из трех утверждений.

(а) Ансамбль есть набор частиц, которые независимо друг от друга находятся в одном и том же состоянии, характеризуемом волновой функцией Ψ.

(б) Состояние частицы следует понимать как принадлежность к определенному ансамблю.

(в) Волновая функция не относится к отдельной частице.

Очевидно, что пары (а)-(в), как и (а)-(б), противоречат друг другу. При определении ансамбля нельзя сохранить все три утверждения.

Пусть ансамбль определяется одним только утверждением (а). В этом случае обращение к ансамблю может принести только изменения терминологии (например, вместо вероятности можно будет говорить о числе случаев). Никаких новых свойств или закономерностей обращение к ансамблю не выявит.

Остается последняя возможность: справедливы утверждения (б) и (в), т.е. *ансамбль должен быть определен независимо, а волновую функции частицы можно* *определить только исходя из свойств ансамбля.* Примерно так определял ансамбль Мандельштам, употребляя слово "статистический коллектив". Фок замечает, что

> ...статистический коллектив есть собрание элементов, которые можно сортировать по определенному признаку. Таким признаком является значение той или иной физической величины. Но в отличие от классического квантовомеханический объект может и вообще не обладать определенными значениями той физической величины, по которым должна производиться сортировка в данном коллективе.
>
> Поэтому в качестве элемента статистического коллектива нельзя брать самый объект, а приходится брать результат некоторого измерения той величины, по значениям которой производится сортировка.

Если считать, что любое измерение всегда, в конце концов, макроскопично, то квантовый ансамбль (как предполагает, например Мандельштам) всегда определен по отношению к классическому прибору.

Теперь остается вспомнить, что над объектом в одном и том же исходном состоянии можно производить измерения разных величин. При этом используются *разные классические приборы* и получаются *разные статистические коллективы.* Это можно выразить формулой

$$\textbf{статистический коллектив} \equiv \Big(\text{состояние объекта, тип прибора}\Big).$$

Ясно, что множество в правой части бесконечно.

> Таким образом, если понимать ансамбль в смысле статистического коллектива, то волновой функции соответсвует не один ансамбль, а бесконечное множество ансамблей.

Если принять понятие статистического коллектива за первичное, то волновая функция станет чисто символическим вспомогательным понятием, координирующем распределение вероятностей во множестве статистических коллективов. Не говоря о невероятном усложнении картины, становится крайне сомнительным, можно ли вообще найти волновую функцию исходя из заданного множества статистических коллективов. Ни Эйнштейн, ни Мандельштам к такой задаче и не приступали. Каждый подтвердил свои знания, сформулированные в некоторых правилах обращения с волновой функцией, усвоенные еще до открытия золотых россыпей квантовых ансамблей,

В истории с ансамблями поражает одно обстоятельство: никто из творцов этих понятий не задумался, как, исходя из некоторого статистического коллектива, можно получить понятие о существовании недоступных классической физике стандартов точности. В начале XX века размышления над этим обстоятельством привели к открытию квантовой механики, а в его конце – к созданию новых технологий, в значительной степени изменивших образ жизни человечества. Произошло это потому, что никто, слава Богу, при проектировании новых экспериментов об ансамблях не думал. Если принять точку зрения первичности ансаблей, то вся деятельность в этом направлении может стать чем-то похожей на контрабанду.

Все встает на свои места, если вновь вспомнить об основах квантовой теории. Приняв в качестве кинематического постулата сопоставление физических величин и линейных операторов, **квантовая теория строго установила существование физических величин, принимающих только дискретные значения**. В классической механике таких величин просто не может быть, поскольку все они должны быть достаточно гладкими функциями непрерывно изменяющихся координат и импульсов.

Желая получить максимальную информацию о системе, следует измерять величину с чисто дискретным спектром (каких в классической механике нет). Если измерение покажет, что она имеет точное значение (для такого умозаключения не нужно использовать какие-либо физические модели – это дело науки об обработке результатов измерений), то естественно считать, что эксперимент указал на такое состояние системы, свойства которого уже нельзя уточнить. Это и есть *чистое состояние.* Если определить плотность распределения измеряемой величины, то в найденном чистом состоянии она сведется к δ-функции. *Пока в теории нет никакой статистичности, которую не знают в классической механике.* Если построить теорию, в которой фигурировали бы только одновременно измеряемые с произвольной точностью величины, то получилась бы динамическая схема, в которой есть состояния, в которых все наблюдаемые имеют точные значения, спектр этих наблюдаемых дискретен. Однако, такая конструкция ничем не может ни в чем походить на классическую динамику. Классическая динамика для своей формулировки требует существования, по крайней мере, двух независимых величин, совместное изменение которых определяет эволюцию системы. В схеме, содержащей только соизмеримые величины, в силу уравнений Гайзенберга не было бы никаких изменений во времени. Упрямец может попытаться заменить уравнения Гайзенберга другими уравнениями, но вряд ли из этого может получиться что-либо путное. Причина этого снова кроется в чисто математической теореме: два коммутирующих оператора можно рассматривать как две функции одного оператора. Именно наличие наблюдаемых с некоммутирующими операторами (т.е. наблюдаемых, которые нельзя одновременно измерить сколь угодно точно) вносит в теорию статистичность, которая не сводится к классической. Однако, это обстоятельство не препятствует физикам искать (и находить) состояния, в которых некоторые величины имеют точные значения. Именно такие состояния можно определить в терминах Ψ-функций. Если это квадратично интегрируемая функция $\Psi(\vec{r})$, на которую оператор координаты действует как оператор умножения, то $|\Psi(\vec{r})|^2$ будет иметь смысл плотности распределения координат. Однако, во избежание недоразумений было бы предусмотрительно снабжать функцию Ψ дополнительным индексом, который указывает на значение наблюдаемой с дискретным спектром $\hat{F}$, определяющего эту функцию:

$$\Psi(\vec{r}) \quad \Longrightarrow \Psi_f(\vec{r}),$$

и говорить следующее:

$|\Psi_f(\vec{r})|^2$ есть плотность распределения координаты при условии, что наблюдаемая $\hat{F}$ с чисто дискретным невырожденным спектром имеет точное значение f.

МИНИ – EPR

Предположим, что в нашем распоряжении есть парапозитроний – связанное состояние электрона и позитрона с наименьшей возможной энергией и нулевым полным моментом количества движения (в данном случае – полным спином). Хотя электрон и позитрон аннигилируют, порождая фотоны, все же эта система живет достаточно долго (скорость распада позитрония – величина порядка $0.8 \cdot 10^{10} \frac{1}{сек.}$) и может быть подвергнута внешним воздействиям. Пусть в момент $t = 0$ покоящийся парапозитроний расщеплятся (например, с помощью пары фотонов) на электрон и позитрон, так что их полный импульс и полный спин равны нулю. В нерелятивистском приближении прстранственные и спиновые переменные разделяются, так что волновая функция системы принимает вид:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \sigma_1, \sigma_2) \quad = \quad \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2)$$

(индекс 1 относится к электрону, 2 к позитрону). Волновая функция χ – это собственный вектор квадрата полного спина и проекции спина на некотрую ось (пусть это будет ось Oz):

$$\hat{S}_z\chi \quad = \quad 0, \qquad \hat{S}^2\chi \quad = \quad 0.$$

Вот ее явный вид:

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(u_+(\sigma_1)u_-(\sigma_2) - u_-(\sigma_1)u_+(\sigma_2)), \qquad (*)$$

где

$$\sigma_z u_\pm \quad = \quad \pm u_\pm,$$

После развала позитрония электрон и позитрон летят в противоположные стороны, и к некоторому моменту времени t_0 их можно считать независимыми системами в смысле определения EPR. Пусть в момент t_0 измеряется ориентация спина электрона. Какие последствия это будет иметь для позитрона? Будем рассуждать по способу EPR. Если известно, что спин электрона направлен вдоль оси Oz (т.е.$\chi_1(\sigma_1) = u_+(\sigma_1)$), то взглянув на формулу (*), следует заключить, что спин позитрона в этот момент направлен в противоположную сторону (т.е.$\chi_2(\sigma_2) = u_-(\sigma_2)$). Что будет, если спин электрона окажется направленным вдоль оси Ox? Чтобы можно было сделать какие-нибудь выводы, необходимо выразить функцию χ в терминах собственных функций операторов $\sigma_{ax}, a = 1, 2$. Здесь справедливы такие формулы: если

$$\sigma_x v_\pm \quad = \quad \pm v_\pm,$$

то

$$u_\pm \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(v_+ \pm v_-),$$

поэтому

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(v_+(\sigma_1)v_-(\sigma_2) - v_-(\sigma_1)v_+(\sigma_2)). \qquad (**)$$

Таким образом на вопрос: "Что будет, если спин электрона окажется параллельным оси Ox?" следует ответить: "Спин позитрона будет антипараллелен оси Ox". В духе EPR можно рассуждать так: установим на пути электрона фильтры Штерна-Герлаха, выделяющие состояния, в которых спин параллелен оси Oz или Ox (Такие аппараты прекрасно описаны в курсе Фейнмана [**Фейнман 1978**]). Эти измерения будут выделять два различных состояния позитрона: со спином антирараллельным оси Oz или Ox. Однако, если электрон достигает этих фильтров к моменту t_0, то никакое изменение состояния электрона не может влиять на состояние позитрона, который в момент t_0 будет находиться в одном-единственном состоянии (например, $\chi_2(\sigma_2)$). Ошибка такого рассуждения прячется в самом его начале: если спины электрона и позитрона объединены в синглет, то ни одна из этих частиц не может находится в состоянии с определенной ориентацией спина. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим наблюдаемую $\vec{m}\hat{\vec{\sigma}}$. Ее среднее значение в состоянии χ равно нулю при любых $\vec{m}$, а среднее ее квадрата всегда равно единице. Таким образом, дисперсия $\vec{m}\hat{\vec{\sigma}}$ при любом $\vec{m}$ равна 1. При любом расположении фильтра Штерна-Герлаха на его выходе будет два пучка. Это означает, что если спиновое состояние системы "электрон + позитрон" описывается функцией χ, определяемой (*), то ни электрон, ни позитрон не обладают волновой функцией. Эти рассуждения станут особенно наглядными, если последовательно изложить их на языке матрицы плотности.

Спиновая матрица плотности ρ, описывающая спиновые состояния частицы со спином $\frac{1}{2}$ – это эрмитова матрица второго порядка с равным единице следом:

$$\rho \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{c}{2} & \frac{1}{2}(a-ib) \\ \frac{1}{2}(a+ib) & \frac{1}{2}-\frac{c}{2} \end{pmatrix}.$$

Это выражение удобно записать следующим образом:

$$\hat{\rho} \quad = \quad \frac{1}{2}(\hat{E}+r\vec{n}\hat{\vec{\sigma}}),$$

где $\hat{E}$ – единичная матрица второго порядка, $\vec{n}$ – вектор единичной длины, r – положительное число. Чтобы выяснить, к чему приводит условие положительной определенности матрицы плотности, заметим, что эрмитова матрица

$$\hat{P}(\vec{m}) \quad = \quad \frac{1}{2}(\hat{E}+\vec{m}\hat{\vec{\sigma}})$$

обладает свойством

$$\hat{P}(\vec{m})^2 \quad = \quad \hat{P}(\vec{m}),$$

т.е. это – неотрицательно определенная величина. Условие

$$Tr(\hat{P}(\vec{m})\hat{\rho}) \geq 0$$

приводит к неравенствам $0 \leq r \leq 1$. Физический смысл параметров, содержащихся в матрице плотности, определяется формулой для среднего значения спина:

$$\langle\hat{s}_\alpha\rangle_\rho \quad = \quad \frac{1}{2}rn_\alpha.$$

Величину r обычно называют "коэффициентом поляризации". Если коэффициент поляризации равен единице, выполняется равенство $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ и матрица плотности описывает состояние, в котором спин с определенностью направлен вдоль оси $\vec{n}$. При меньших значениях параметра r матрица плотности описывает смешанное состояние, в котором спин не имеет определенной поляризации. В частности, при $r = 0$ матрица плотности пропорциональна единичной

$$\hat{\rho} \quad = \quad \frac{1}{2}\hat{E}.$$

В этом случае среднее значение проекции спина на любое направление равно нулю, т.е. – это "состояние с полностью неполяризованным спином". В классической физике одночастичные состояния такого типа невозможны, они могут появиться только при описании большой совокупности частиц. В квантовом случае они возникают естественно, как, например, в рассматриваемом случае. Спиновая матрица плотности системы "электрон + позитрон" определяется ядром

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2; \sigma^{'}{}_1, \sigma^{'}{}_2) \quad = \quad \chi(\sigma_1, \sigma_2)\chi^*(\sigma^{'}{}_1, \sigma^{'}{}_2).$$

Спиновые матрицы плотности электрона и позитрона равны

$$\rho_1(\sigma, \sigma^{'}) \quad = \quad \sum_{\sigma_2} \chi(\sigma, \sigma_2)\chi^*(\sigma^{'}, \sigma_2) \quad =$$

$$\frac{1}{2}(u_+(\sigma)u^*{}_+(\sigma^{'}) \quad + \quad u_-(\sigma)u^*{}_-(\sigma^{'})) \quad = \quad \frac{1}{2}\hat{E}.$$

Точно такой же вид имеет и ρ_2 – спиновая матрица плотности позитрона:

$$\rho_2(\sigma, \sigma^{'}) \quad = \quad \sum_{\sigma_1} \chi(\sigma_1, \sigma)\chi^*(\sigma_1, \sigma^{'}) \quad =$$

$$\frac{1}{2}(u_+(\sigma)u^*{}_+(\sigma^{'}) \quad + \quad u_-(\sigma)u^*{}_-(\sigma^{'})) \quad = \quad \frac{1}{2}\hat{E}.$$

МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ ЗАВИСИТ ОТ НАБЛЮДАЕМЫХ СИСТЕМЫ

Уже говорилось о том, что наибольшую информацию о системе дают измерения наблюдаемых с чисто дискретным спектром. Пусть F - такая наблюдаемая:

$$\hat{F} \quad = \quad \sum_n f_n \hat{P}_n.$$

где

$$\hat{P}_n|\Psi\rangle \quad = \quad \sum_{\alpha \in \Delta_n} |g_{n\alpha}\rangle\langle g_{n\alpha}|\Psi\rangle,$$

$$\hat{F}|g_{n\alpha}\rangle \quad = \quad |g_{n\alpha}\rangle f_n, \quad \alpha \in \{1, ..., s_n\} \quad = \Delta_n,$$

$$\forall|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \qquad |\Psi\rangle \quad = \quad \sum_n \sum_{\gamma \in \Delta_n} |f_{n\gamma}\rangle\langle f_{n\gamma}|\Psi\rangle.$$

Среднее значение F и ее дисперсия в состоянии ρ равны:

$$\begin{aligned}\langle F\rangle_\rho &= \sum_n f_n Tr(\hat{\rho}\hat{P}_n),\\ D_\rho(F) &= \sum_n (f_n - \langle F\rangle)^2 Tr(\hat{\rho}\hat{P}_n).\end{aligned}$$

Поскольку проекционные операторы соответствуют неотрицательно определенным величинам, то слагаемые ряда, определяющего дисперсию, неотрицательны. Если дисперсия F равна нулю, то равно нулю и каждое слагаемое определяющего дисперсию ряда. Поскольку все числа f_n различны, то равенство дисперсии нулю имеет сильные следствия: среднее значение наблюдаемой равно одному из значений ее спектра:

$$D_\rho(F) = 0 \quad \leftrightarrow \langle F\rangle_\rho = f_k,$$

а вероятность получить при измерении другие значения спектра равна нулю:

$$n \neq k \rightarrow Tr(\hat{P}_n\rho) = 0.$$

Матрицу плотности всегда можно представить в форме

$$\hat{\rho} = \sum_l p_l \hat{Q}_l,$$

где неотрицательные числа $p_l \geq 0$ и проекционные операторы $\hat{Q}_l$ таковы, что

$$\sum_l p_l Tr\hat{Q}_l = 1.$$

Действие операторов $\hat{Q}_l$ можно описать формулой

$$\hat{Q}_l|\Psi\rangle = \sum_{\gamma\in\delta_l} |e_{l\gamma}\rangle\langle e_{l\gamma}|\Psi\rangle,$$

где совокупность векторов $|e_{l\gamma}\rangle$ образует базис в пространстве состояний:

$$\forall \quad |\Psi\rangle \in \mathcal{H} \qquad |\Psi\rangle = \sum_l \sum_{\gamma\in\delta_l} |e_{l\gamma}\rangle\langle e_{l\gamma}|\Psi\rangle.$$

Вероятности $Tr(\hat{Q}_l\hat{P}_n)$ можно представить формулой

$$Tr(\hat{Q}_l\hat{P}_n) = \sum_{\alpha\gamma} |\langle n\alpha|l\gamma\rangle|^2$$

Если дисперсия F равна нулю, то разложение векторов $|e_{l\gamma}\rangle$ по базису $|f_{n\alpha}\rangle$ содержит только векторы с индексом k:

$$|e_{l\gamma}\rangle = \sum_\alpha |f_{k\beta}\rangle C^{(l)}_{\beta\gamma},$$

поэтому матрицу плотности можно представить в форме

$$\hat{\rho} \quad = \quad \sum_{\alpha} p_{\alpha} P_{k\alpha}.$$

Нетрудно показать, что операторы $\hat{F}$ и $\hat{\rho}$ в этом случае коммутируют:

$$[\hat{F}, \hat{\rho}] \quad = \quad 0.$$

Справедлива следующая теорема: *если операторы с чисто дискретными спектрами коммутируют, то их можно представить как функции одного оператора с чисто дискретным невырожденным спектром.* Предположим, что спектр $\hat{F}$ невырожден, тогда можно высказать следующее:

если наблюдаемая F с чисто дискретным невырожденным спектром имеет в состоянии $\hat{\rho}$ точное значение, то матрица плотности этого состояния является функцией оператора $\hat{F}$, если значение F равно f_k, то матрица плотности равна

$$\hat{\rho} \quad = \quad \hat{P}_k.$$

Действует такая матрица плотности по формуле

$$\forall \Psi \in \mathcal{H} \quad \hat{\rho}|\Psi\rangle \quad = \quad |f_k\rangle\langle f_k|\Psi\rangle.$$

Иначе говоря, матрица плотности является в этом случае оператором проектирования на одномерное подпространство пространства $\mathcal{H}$, которое определяется вектором $|f_k\rangle$. Можно сказать, что состояние в этом случае определяется вектором $|f_k\rangle$, который естественно назвать *вектором состояния.* Итак, состояние иногда можно связать с вектором в пространтстве $\mathcal{H}$. По установившейся традиции такое состояние называют *чистым.* Полезно выяснить, много ли существует чистых состояний.

Заметим, что если матрица плотности сводится к оператору $\hat{P}_k$, то она удовлетворяет соотношению

$$\hat{\rho}^2 \quad = \quad \hat{\rho}.$$

Очевидно, что этому соотношению удовлетворяет любой проекционный оператор, независимо от размерности пространства, на которое он проецирует, эта размерность определяется значением следа оператора. Если добавить к числу условий, которым удовлетворяет матрица плотности, требование, чтобы она была проекционным оператором, то условие $Tr(\hat{\rho}) = 1$ приведет к тому, что матрица плотности будет проецировать все пространство $\mathcal{H}$ на некоторый единичный вектор $|\phi\rangle$. Этот вектор всегда можно включить в некоторый базис $|g_n\rangle$, считая, например, что $|\phi\rangle = |g_1\rangle$. Тогда наблюдаемая G, которой соответствует оператор с чисто дискретным невырожденным спектром

$$\hat{G} \quad = \quad \sum_{n} g_n \hat{R}_n,$$

будет иметь в состоянии ϕ точное значение g_1.

Итак, справедливо следующее утверждение:

Чистое состояние - это состояние, в котором имеет точное значение хотя бы одна наблюдаемая с чисто дискретным невырожденным спектром.

Чистых состояний столько, сколько существует одномерных подпространств в пространстве $\mathcal{H}$,

т.е. любой единичный вектор пространства $\mathcal{H}$ определяет состояние, в котором имеет точное значение, некоторая наблюдаемая с чисто дискретным невырожденным спектром. Пространство $\mathcal{H}$ можно назвать *пространством чистых состояний.* Обычно из этого определения выбрасывают прилагательное, что может привести к недоразумениям, потому что усечение определения выбрасывает целый класс состояний, в которых ни одна из наблюдаемых не имеет точного значения. Именно такая оплошность была допущена в EPR, когда авторы определили состояния как то что, *по предположению полностью характеризуется волновой функцией* Ψ.

Но может быть, эта неточность не слишком существенна: ведь в процессе эволюции, который управляется линейным унитарным оператором, векторы снова переходят в векторы. Тогда можно было бы потребовать, чтобы все состояния изначально были чистыми. Такое требование, как легко понять, согласуется с определением физической реальности, данной в EPR.

Однако, такая реальность не реализуется в квантовом мире.

ЧТО МОЖНО УЗНАТЬ О СИСТЕМЕ С ПОМОЩЬЮ ИЗМЕРЕНИЙ

Любой процесс измерения можно описать примерно так: рассматривается большая система I+II. Находятся значения величины B, относящейся к системе II, после чего высказывается суждение о значении величины A, относящейся к системе I. Наибольший интерес представляет случай, когда большая система находится в чистом состоянии с волновой функцией $\Psi(z,\xi)$. В этом состоянии имеет точное значение некоторая наблюдаемая C, оператор которой действует в пространстве $\mathcal{H}_{I+II}$ и его спектр невырожден. Матрица плотности нашего состояния задается ядром

$$\rho(z,\xi;z^{'},\xi^{'}) \quad = \quad \Psi(z,\xi)\Psi^{*}(z^{'},\xi^{'}), \quad ||\Psi||^{2}=1.$$

Матрицы плотности подсистем определяются ядрами

$$\hat{\rho}_{1}(z,z^{'}) \quad = \quad \int \rho(z,\xi;z^{'},\xi)d\xi,$$

$$\hat{\rho}_{2}(\xi,\xi^{'}) \quad = \quad \int \rho(z,\xi;z,\xi^{'})dz.$$

Если функция Ψ представляется как произведение нормированных на единицу функций:

$$\Psi(z,\xi) \quad = \quad u(z)v(\xi),$$

то каждая из подсистем находится в чистом состоянии, т.к.

$$\rho_{1}(z,z^{'}) \quad = \quad u(z)u^{*}(z^{'}),$$

$$\rho_2(\xi,\xi^{'}) \quad = \quad v(\xi)u^*(\xi^{'}).$$

Оказывается, что это - как показал фон-Нейман, единственный случай, когда подсистемы наследуют чистоту большой системы. Это становится очевидным после разложения волновой функции большой системы по собственным векторам матриц плотности подсистем.

Пусть u - собственный вектор оператора $\hat{\rho}_1$, принадлежащий положительному собственному значению:

$$\int \rho_1(z,z^{'})u(z^{'})dz^{'} \quad = \quad \lambda u(z), \lambda > 0.$$

В этом случае функция

$$v(\xi) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int dzu^*(z)\Psi(z,\xi)$$

является собственным вектором оператора $\hat{\rho}_2$ с тем же собственным значением:

$$\int \rho_2(\xi,\xi^{'})v(z^{'})d\xi^{'} \quad = \quad \lambda v(\xi), \quad \lambda > 0,$$

причем

$$\int |v(\xi)|^2 d\xi \quad = \quad \int |u(z)|^2 dz.$$

Если нормировать функции u и v на единицу, то $\Psi(z,\xi)$ можно представить в форме

$$\Psi(z,\xi) \quad = \quad \sum_n \sqrt{\lambda}_n u_n(z)v_n(\xi),$$

где λ_n - ненулевые собственные значения операторов $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$. Числа λ_n положительны и сумма их равна единице:

$$\sum_n \lambda_n \quad = \quad 1.$$

Матрицы плотности каждой из подсистем можно представить так:

$$\rho_1(z,z^{'}) \quad = \quad \sum_n \lambda_n u_n(z){u^*}_n(z^{'}),$$

$$\rho_2(\xi,\xi^{'}) \quad = \quad \sum_n \lambda_n v_n(\xi){v^*}_n(\xi^{'}).$$

Операторы ρ_1 и ρ_2 будут проекционными только в том случае, если соответствующие суммы сведутся к одному слагаемому и единственное отличное от нуля число λ будет равно единице.

Системы функций u_n и v_n можно дополнить до базисов $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ и определить в малых системах I и II наблюдаемые с чисто дискретными невырожденными спектрами, которым соответствуют операторы

$$\hat{A} \quad = \quad \sum_n a_n \hat{P}_n, \quad \hat{P}_n f = f_n \langle f_n | f \rangle,$$

$$\hat{B} \quad = \quad \sum_n a_n \hat{Q}_n, \quad \hat{Q}_n g = g_n \langle g_n | g \rangle.$$

Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют, поэтому А и В можно измерить одновременно. Однако, если имеет точное значение определенная в большой системе наблюдаемая $\hat{C}$, то ни $\hat{A}$, ни $\hat{B}$ не могут принимать точных значений. Зная состояние Ψ можно лишь связать друг с другом те вероятности, с которыми каждая из этих наблюдаемых принимает соответствующие значения.

До сих пор говоря об измерении, мы подразумевали "мгновенную фотографию" системы, на которой более или менее отчетливо видны каждая из подсистем. Однако всякое измерение - это некоторый физический процесс, при котором сначала "приготовляются" состояния систем I и II, причем взаимодействие между I и II в это время столь мало, что им можно пренебречь (пусть это происходит пока время изменяется в промежутке $T_i \geq 0$), начиная с момента $t = 0$ начальная матрица плотности большой системы I+II $\hat{\rho}_i$, переходит к моменту $t = T_f$ в матрицу $\hat{\rho}_f$. Можно считать, что к этому времени взаимодействием подсистем снова можно пренебречь, и достаточно быстрое измерение величины B позволит высказать некоторое суждение о значениях величины A. Связь между матрицами плотности $\rho(0)$ и $\rho(T_f)$ устанавливают уравнения Гайзенберга. Если гамильтониан системы (по крайней мере, между $t = 0$ и $t = T_f$) не зависит от времени, то

$$\hat{\rho} \quad \equiv \quad \hat{\rho}(T_f) \quad = \quad exp(-i\frac{\hat{H}T_f)}{\hbar}\hat{\rho}(0)exp(i\frac{\hat{H}T_f}{\hbar}).$$

Если начальное состояние - чистое:

$$\hat{\rho}(0) \quad = \quad \Psi \otimes \Psi^*,$$

то чистым будет и конечное состояние:

$$\hat{\rho}(T_f) = \Psi^{'} \otimes \Psi^{'*}, \quad \Psi^{'} = exp(i\frac{\hat{H}T_f}{\hbar})\Psi = \hat{U}\Psi.$$

Фон-Нейман показал, что всегда можно подобрать исходное состояние Ψ и оператор $\hat{U}$, чтобы представить функцию $\Psi^{'}$ в форме полярного разложения по заданным функциям $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. Если считать, что индексы m и n изменяются в пределах $-\infty < m, n < \infty$, то любой вектор состояния можно задать рядом

$$\Phi(z, \xi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f_m(z) g_n(\xi) c_{mn}.$$

Если теперь определить унитарный оператор $\hat{U}$ соотношением

$$\hat{U}\Phi(z, \xi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f_m(z) g_{n+m}(\xi) c_{mn},$$

а начальное состояние – формулой

$$\Psi(z,\xi)=f(z)g(\xi), \quad f(z)=\sum_m f_m(z)c_m, g(\xi)=g_0(\xi),$$

то

$$\Psi^{'}(z,\xi)=\sum\nolimits_m f_m(z)g_m(\xi)c_m.$$

Состояние подсистемы I определяется матрицей плотности с ядром

$$\rho_1^{'}(z,z^{'}) \quad = \quad \sum_m f_m(z)f_m^*(z^{'})|c_m|^2,$$

т.е.

$$\hat{\rho}_1^{'} \quad = \quad \sum_m \langle f_m|\hat{\rho}_1|f_m\rangle \hat{P}_m,$$

где

$$\hat{\rho}_1 \quad = \quad f\otimes f^*.$$

Итак, фон Нейман, дав общее определение состояния в квантовой механике, описал и процесс измерения. Эти внутренне непротиворечивые, апеллирующие лишь к математическому аппарату квантовой механики, доводы, по существу, завершили процесс построения квантовой теории, и фон Нейман по праву должен быть поставлен в ряд создателей новой науки.

Заметим, что изложенные здесь работы разрешили спор Эйнштейна и Бора еще до его начала, о чем совершенно справедливо сказал Фок. Более того, работы фон Неймана показывают, что квантовая механика не так уж сильно изменяет представления классической физики.

ВТОРОЙ СПОСОБ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЙ

Можно теперь забыть о подсистеме II, о том, что знания о величине A из первой подсистемы добываются измерением совсем другой величниы из другой подсистемы, и сказать следующее: измерялась величина A, а результатом измерения является изменение состояния системы I (которую теперь можно обозначить символом S): матрица плотности этой системы, которую по забывчивости можно обозначить просто символом $\hat{\rho}$ переходит в $\hat{\rho}^{'}$:

$$\hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho}^{'}=\sum_m \langle f_m|\hat{\rho}f_m\rangle P_m.$$

Это позволило фон Нейману [**V. Neumann 1932**] (стр. 261 русского перевода) заметить, что

> мы пришли к двум фундаментально различным типам воздействий, которые могут быть оказаны на систему S... Во-первых, это - произвольные изменения, вызываемые измерениями, которые передаются формулой

$$\hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho}^{'} \quad = \quad \sum_1^{\infty}\langle\phi_n|\hat{\rho}\phi_n\rangle\hat{P}[\phi_n] \qquad (A)$$

Во-вторых, - автоматические изменения, вызываемые течением времени, которые передаются формулой

$$\hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho}_t \quad = \quad e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\hat{\rho}e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \qquad (B)$$

Возникновение двух способов описания воздействий фон Нейман объясняет так:

> ... надо было бы ожидать, что уже (B) будет достаточно, чтобы описать воздействие, вызываемое измерением: ведь физическое воздействие не может быть ничем, как производящимся время от времени включением в наблюдаемую систему известных энергетических связей, т.е. введением надлежащей (предписанной наблюдателем) временной зависимости $\hat{H}$. Почему же в таком случае нам нужен для измерения особый процесс (A)? Причина состоит в следующем: при измерении мы не можем рассматривать систему S саму по себе, напротив, для того, чтобы проследить аналитически ее взаимодействие с измерительным аппаратом M, надо рассматривать систему S+M. Теория измерения является утверждением относительно S+M, она должна описывать, каким образом состояние S связано с известными свойствами состояний M (а именно, с положениями известных стрелок, так как наблюдатель отсчитывает по ним). Кроме того, кажется в некоторой мере произвольным, не надо ли включить в M и самого наблюдателя и не поставить ли на место зависимости между состояниями S и положениями стрелок M и химическими изменениями в его глазу или даже в мозгу (т.е. тем, что он "увидел" или "воспринял").

Прежде чем исследовать этот вопрос подробнее, фон Нейман замечает, что

> два воздействия (A) и (B) отличаются друг от друга фундаментальным образом ... (B) не приводит к увеличению существующей в $\hat{\rho}$ статистической неопределенности, тогда как (A) приводит к такому увеличению: (B) переводит чистые состояния в чистые же:
>
> $$\hat{P}[\phi] \Rightarrow \hat{P}[e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\phi],$$
>
> а (A) вполне может перевести чистое состояние в смесь.
>
> В этом смысла можно сказать, эволюция согласно (A) является статистической, а согласно (B) - причинной.
>
> Далее, ... (B) просто унитарное преобразование всех ρ:
>
> $$\rho_t \quad = \quad \hat{S}\rho\hat{S}^{-1},$$
>
> $\hat{S}$ унитарно... Поэтому (B) обратимо... Фундаментальным образом по-иному ведет себя (A): переход
>
> $$\hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho}' \quad = \quad \sum_n^{\infty}\langle\phi_n|\hat{\rho}\phi_n\rangle\hat{P}[\phi_n]$$
>
> не является безусловно обратимым.

Далее фон Нейман подробно обсуждает смысл полученного.

> Сравним... эти соотношения с теми, которые действительно осуществляются в природе или при ее наблюдении. ...само по себе безусловно верно, что измерение или связанный с ним процесс объективного восприятия является по отношению к внешнему физическому миру новой, не сводящейся к нему сущностью. ...такой

> процесс выводит нас из внешнего физического мира или, правильнее, вводит в неконтролируемую... мысленную внутреннюю жизнь индивидуума. Однако имеется, несмотря на это, фундаментальное для всего естественнонаучного мировоззрения требование, так называемый принцип психофизического параллелизма, согласно которому должно быть возможно так описать... внефизический процесс субъективного восприятия, как если бы он имел место в физическом мире,- значит сопоставить его последовательным этапам физические процессы в объективном внешнем мире, в обычном пространстве...

Предположим, вслед за фон-Нейманом, что измеряется температура. Известно, что температуру окружающей среды измеряет термометр. Можно продолжить анализ, и связать температуру с длиной столбика ртути в термометре и сказать, что наблюдатель видит эту длину. После этого можно перейти к анализу того, что мы назывем зрением, включить в рассмотрение источник света, учесть свойства рассеяния и поглощения фотонов на пути к сетчатке глаза и сказать: измерение температуры сводится к регистрации изображения столбика ртути сетчаткой глаза наблюдателя. Наконец, привлекая наши познания в физиологии, можно проследить за процессами в нервной системе наблюдателя, которые инициируются поглощением фотонов, и прийти к выводу, что измерение температуры сводится к регистрации химических изменений в нервных клетках наблюдателя.

> Однако в любом случае, сколь далеко ни продолжали бы мы вычисления - до ртутного сосуда термометра, до его шкалы, до сетчатки или до клеток мозга, - в некоторый момент мы всегда должны делить мир на две части - наблюдаемую систему и наблюдателя. В первой из них мы можем, по крайней мере принципиально, сколь угодно подробно исследовать все физические процессы; в последней это бессмысленно.
>
> Квантовая механика описывает как раз те события, которые разыгрываются в наблюдаемой части мира за то время, пока она не приходит во взаимодействие с наблюдаемой частью, с помощью процессов (B), как скоро, однако, такое взаимодействие возникает, т.е. производится измерение, она предписывает использование процесса (A).
>
> Тем самым двойственность оправдана. При этом, однако, возникает опасность нарушения принципа психофизического параллелизма, если только мы не покажем, что (понимаемую в указанном выше смысле) границу между наблюдаемой системой и наблюдателем можно смещать произвольным образом.
>
> Чтобы обсудить последний вопрос, разделим мир на три части I, II и III. Пусть I означает собственно наблюдаемую систему, II - измерительный инструмент, а III - собственно наблюдателя. Нам надо показать, что границу можно провести с равным успехом как между I и I+II, так и между I+II и III.
>
> В приведенном примере
>
> I - это исследуемая система, II - термометр, III - система ”свет + наблюдатель” или
>
> I - ”наблюдаемая система + термометр”, II -”свет + глаз наблюдателя”, III - наблюдатель, начиная от его сетчатки, и наконец,
>
> I - все вплоть до сетчатки наблюдателя, II - сетчатка, нервы, мозг наблюдателя, III - его абстрактное ”Я” (sein abstractes ”Ich”).

> Высокий тенор Берлиоза разносился в пустынной аллее, и по мере того, как Михаил Александрович забирался в дебри, в которые может забираться, не рискуя свернуть себе шею, лишь очень образованный человек, - поэт узнавал все больше и больше интересного и полезного и про египетского Озириса, благостного Бога и сына Неба и Земли, и про финикийского Бога Фаммуза, и про Мардука, и даже про менее известного грозного Бога Вицлипуцли, которого весьма почитали ацтеки в Мексике. И вот как раз в то время, когда Михаил Александрович рассказал поэту о том, как ацтеки лепили из теста фигурку Вицлипуцли, в аллее показался человек.
>
> **М. Булгаков**

Появление в физической статье ссылки на "абстрактное Я" может удивить современного читателя. Здесь полезно помнить, что создатели квантовой теории получали более основательное гуманитарное образование, чем мы. О том, какое значение имели для Гайзенберга сочинения Платона, уже говорилось. Шредингер написал в 1948 году статью под названием "2400 лет квантовой теории", в которой тщательно исследовал связь квантовой теории с атомистическим учением Левкиппа из Милета и его ученика Демокрита. У нас нет сведений об особой привязанности фон Неймана к древнегреческой философии, но вызывает соблазн связать его схему измерений с именем самого древнего из них - Анаксагора из Клазомен, ученик Анаксимена Милетского.

> Он... впервые присоединил к материи ум, начав свое сочинание - а оно написано приятным и исполненным величия слогом - так: "Все вещи были вперемешку, затем пришел ум и их упорядочил". Поэтому его назвали "Умом" ($No\upsilon\varsigma$):
>
> Анаксагор, отважный герой, - Умом его звали
> Ибо учил он, что Ум, от спячки внезапно проснувшись,
> Все воедино связал, что прежде в смешении было.
>
> Говорят, что во время переправы Ксеркса ему было двадцать лет, а всего он прожил семьдесят два.
>
> Он учил, что Солнце - раскаленная глыба, по величине больше Пелопоннеса, а на Луне есть поселения...
>
> Движущая причина - Ум; тяжелые тела, как земля, (при возникновении мира) заняли нижнее место, легкие, как-то: огонь, - верхнее, а вода и воздух - среднее...
>
> Когда он скончался, ... похоронили его с почестями, а на могиле высекли надпись:
>
> Истины высший предел и границы Вселенной достигший
> Здесь, под этой плитой, Анаксагор погребен.

Однако, не все были высокого мнения об Анаксагоре. Платон заметил, что

> ...получив в наследство огромное состояние (Анаксагор) не радел о нем и утратил его полностью: столь неразумно он умствовал.

Таким образом, идеи связать ум с чисто физическими явлениями имеют долгую историю. Уже Аристотель дал практически чисто физическое определение того, что можно назвать ощущением, с телом [$A\rho\iota\sigma\tau o\tau\epsilon\lambda\eta\varsigma$]:

> ... ощущение бывает, когда (существо) приводится в движение и что-то испытывает, оно и есть, по-видимому, некоего рода превращение.

Поэтому обращение фон Неймана к ”абстрактному Я” его современников не смущало. В 1939 году вышла книга Лондона и Бауэра [**London, Bauer 1939**], посвященная ”непротиворечивому и простому изложению теории фон Неймана”. Один из авторов – Фриц Лондон – ученик Зоммерфельда, прославившийся своими работами в области свертекучести, защитил в 1921 году докторскую диссертацию Summa cum laude на чисто философскую тему [**London 1923**]. Таким образом книгу писали специалисты одинаково хорошо ориентирующиеся и в физике и в психологии. Чтобы исключить не слишком убедительные обращения в последнюю минуту к ”абстрактному Я”, авторы предложили последовательно рассматривать составную систему, состоящую из *объекта* (x), *измерительного аппарата* (y), *наблюдателя* (z). Состояния такой системы авторы представляют волновой функцией

$$\Psi(x, y, z) \quad = \quad \sum \psi_k u_k(x) v_k(y) w_k(z),$$

где функции w_k описывают состояния наблюдателя. Брауэр и Лондон считают, что входящий в рассматриваемую триаду наблюдатель обладает не свойственной приборам ”способностью интроспекции”. Он может мгновенно оценить свое собственное состояние и в силу присущего ему ”имманентного сознания” создает свой собственный объективный мир. Иначе говоря, существует некий внутренний голос, говорящий: ”ты находишься в состоянии w_k”, после чего наблюдатель может сделать такое заключение: ”я вижу, что величина G, связанная с аппаратом, принимает значение g_k, поэтому значение характеризующей объект величины F равно f_k”. Таким образом

> вовсе не таинственное взаимодействие между прибором и объектом порождает новую реальность, которая приводит при измерении к новой волновой функции системы. Это всего лишь мое собственное сознание расстается со старой функцией $\Psi(x, y, z)$ и порождает на основании своих сознательных наблюдений новую действительность, приписывая системе новую волновую функцию $u_k(x)$.

Возможную связь квантовой физики с деятельностью мозга в последнее время осуждается физиологами, причем результаты этих исследований могут послужить основой совершенно нового взгляда на проблему. В 1986 крупнейший физиолог Экклз опубликовал статью [**Eccles 1986**] под названием ”Do mental events cause neural events analogously to the probability fields of quantum mechanics?” В ней говорится, что если не материальные душевные события, такие как намерение выполнить действие, могут эффективно воздействовать на нейронные события в мозгу, то это должно происходить на самом тонком и пластичном уровне событий. Опираясь на последние данные о структуре нейронов Экклз указывает на возможные области синапсов, с помощью которых может происходить такое воздействие. При этом происходящие там процессы могут иметь квантовую природу. В более поздней работе Экклза [**Beck, Eccles 1992**] анализ микроструктуры коры головного мозга сочетается с конкретной квантовой моделью. Здесь не место оценивать перспективы этих исследований, отметим только, что если ”абстрактное Я” будет иметь квантовую природу, установленные фон Нейманом границы возможностей квантовой механики придется отодвигать в еще неизвестную нам область.

КВАНТОВАЯ УГАДАЙКА

> А у людей она слыхала,
> Что это зло еще не так большой руки;
> Лишь стоит завести Очки.
> Очков с полдюжины себе она достала...
> И.В.Крылов

Когда Паули говорил, квантовая механика – это игры молодых, вряд ли он предполагал, что примерно через три четверти века на страницах научных журналов появятся статьи с описанием времяпрепровождения милых подростков – Алисы (которая живет в Амстердаме), Боба (из Бостона) и их друзей.

Однажды Алиса и Боб придумали такую игру: Алиса пишет на листке бумаги любое целое число x_1, начиная от 0 и кончая $2L-1$, и посылает письмо почтой в Бостон. Боб тем временем придумал функцию $f(x)$, область определения которой – целые числа из промежутка [0,2L-1]. Он отправляет в Амстердам число $f(x_1)$. Взглянув на него, Алиса отправляет Бобу число x_2, чтобы получить взамен $f(x_2)$. Алиса должна как можно скорее угадать вид функции $f(x)$. Конечно, если функция произвольна, то Алисе и Бобу придется обменяться 2L посланиями, и в игре самым интересным будут прогулки на почту. Поэтому Алиса и Боб несколько ограничили выбор возможных функций. Во-первых, они должны принимать только два значения – 0 и 1. Во-вторых, функции должны быть двух видов: **постоянные** или **уравновешенные** – принимающие значение 1 ровно в L точках.

Игра в таком виде не выглядит очень умной, но для науки интересны как раз такие развлечения: глупейшая игра в "орла-решку" принесла ей значительно больше пользы, чем умнейшие шахматы. Поэтому отнесемся к развлечению Алисы и Боба со всей серьезностью. Алиса всегда может угадать функцию после L+1 попыток. Наихудшей для нее окажется, например, такая серия посланий: все первые L из них содержат единицы. Тогда только (L+1)-первое письмо позволит сделать выбор в пользу той или иной функции. Число попыток уменьшилось, не слишком сильно: всего в два раза.

Чтобы улучшить положение вещей, Алиса и Боб решили сначала прибегнуть к экономичной позиционной системе записи чисел, а затем обратиться к квантовой механике. Зная от знакомых математиков об удобствах двоичной системы, они решили записывать целые числа как суммы

$$x \quad = \quad C_0 2^{n-1} \quad + \quad C_1 2^{n-2} \quad + \quad C_2 2^{n-3} \quad + \quad ... \quad + C_{n-1},$$

в которых каждое из чисел C_i может принимать два значения – 0 или 1. При фиксированном значении n, наименьшее из таких чисел равно 0, а наибольшее – $2^n - 1$. Здесь существенно, что большой набор из $N = 2^n$ чисел можно перечислить значительно более короткими последовательностями $C = \{C_0, ..., C_{n-1}\}$.

Конечно, если обращаться с этими последовательностями поэлементно, как предписывает классическая математика, число необходимых для управления ими операций будет расти с увеличением n экспоненциально, но от знакомых физиков Алиса и

Боб узнали, что квантовая механика позволяет работать с такими последовательностями как с элементарными объектами – ведь в ней имеют физический смысл линейные операторы.

Следуя ходу мыслей этих молодых людей, предположим, сначала для простоты, что в распоряжении Алисы и Боба имеется физическая система, переменные которой можно описать как линейные операторы в двумерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_2$, и что имеются веские физические основания для предпочтительного выбора одного из возможных базисов этого пространства. Можно обозначить векторы этого базиса символами $\{|s\rangle, s = 0, 1\}$, и сопоставить с ними числа 0 и 1:

$$|0\rangle \quad \leftrightarrow \quad 0, \qquad |1\rangle \quad \leftrightarrow \quad 1.$$

Таким образом, числа 0 и 1 сопоставляются с номерами векторов некоторого вполне определенным образом выбранного базиса. Этот базис иногда называют **вычислительным**.

Получив в распоряжение две (не идентичные) физические системы, каждую из которых можно реализовать в двумерном гильбертовом пространстве, Алиса и Боб могут объединить эти системы, а вычислительный базис в объединенном четырехмерном гильбертовом пространстве выбрать так, чтобы он соответствовал прямому произведению вычислительных базисов в каждом из подпространств. Эту процедуру удобно представить формулой

$$H \quad = \quad \mathcal{H}(\mathit{0}) \otimes \mathcal{H}(\mathit{1}).$$

В этой формуле символ $\mathcal{H}$ означает двумерное гильбертово пространство, а аргумент у символа указывает на номер сомножителя. Таким образом, вычислительный базис в пространстве H состоит из векторов

$$|0,0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |1,0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad |0,1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle, \quad |1,1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle.$$

Алиса и Боб сопоставили эти векторы сначала с последовательностями, а потом и с числами:

$$|0,0\rangle \leftrightarrow \{C_0 = 0, C_1 = 0\} \leftrightarrow x = 0,$$
$$|0,1\rangle \leftrightarrow \{C_0 = 0, C_1 = 1\} \leftrightarrow x = 1,$$
$$|1,0\rangle \leftrightarrow \{C_0 = 1, C_1 = 0\} \leftrightarrow x = 2,$$
$$|1,1\rangle \leftrightarrow \{C_0 = 1, C_1 = 1\} \leftrightarrow x = 3.$$

Можно нумеровать эти векторы и одним числом:

$$|C_0, C_1\rangle \quad = \quad |2C_0 + C_1\rangle \quad = \quad |x\rangle.$$

Получив в свое распоряжение две квантовые системы и построив четырехмерное гильбертово пространство, Алиса и Боб решили поиграть в угадайку с применением только что созданного ими механизма. Правда им пришлось подумать над тем, как задавать и где хранить значения функции $f(x)$, но вскоре этот вопрос разрешился. Раз функция f принимает только два значения, хранить их можно в двумерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Это означает, что базис в четырехмерном гильбертовом пространстве нужно нумеровать как прямое произведение вычислительных базисов подпространств –

$$|x\rangle \otimes |s\rangle \quad x = 0, 1; \quad s = 0, 1.$$

Поскольку едиственная доступная Алисе и Бобу операция в гильбертовом пространстве – это унитарное преобразование, то задавать функцию f они решили с помощью унитарного оператора $\hat{U}_f$:

$$\hat{U}_f |x\rangle \otimes |s\rangle \quad = \quad |x\rangle \otimes |s \oplus f(x)\rangle,$$

где символ $a \oplus b$ означает сложение по модулю 2:

$$a \oplus 0 = 0, \qquad a \oplus 1 = 1 - a.$$

В результате действия оператора $\hat{U}_f$ на вектор $|x, s\rangle$ получается другой вектор из вычислительного базиса $|x, s^{'}\rangle$. Таким образом, $\hat{U}_f$ – действительно унитарный оператор. Нетрудно выяснить, как действует этот оператор на векторы несколько более общего вида. Пусть

$$|\phi_b\rangle \quad = \quad |0\rangle b_0 \quad + \quad |1\rangle b_1, \quad |b_0|^2 + |b_1|^2 = 1,$$

тогда

$$\hat{U}_f |x\rangle \otimes |\phi_b\rangle \quad = \quad |x\rangle \otimes (|f(x)\rangle b_0 + |1 \oplus f(x)\rangle b_1.$$

Если взять вектор

$$|\phi\rangle \quad = \quad (|0\rangle - |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

то

$$\hat{U}_f |x\rangle \otimes |\phi\rangle \quad = \quad |x\rangle \otimes |\phi\rangle (-1)^{f(x)}.$$

Действительно, если $f(x) = 0$, то

$$|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle \quad = \quad |0\rangle - |1\rangle,$$

если же $f(x) = 1$, то

$$|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle \quad = \quad -(|0\rangle - |1\rangle).$$

Можно взять и более общий вектор в первом из подпространств. Если

$$|\Phi\rangle \quad = \quad \sum_x |x\rangle d(x),$$

то

$$\hat{U}_f |\Phi\rangle \otimes |\phi\rangle \quad = \quad |\Phi_f\rangle \otimes |\phi\rangle,$$

где

$$|\Phi_f\rangle \quad = \quad \sum_x |x\rangle d(x)(-1)^{f(x)}.$$

Если $d_0 = d_1 = \frac{1}{2}$, то в случае постоянной функции $f(x)$

$$|\Phi_f\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)\frac{(-1)^{f(0)}}{\sqrt{2}},$$

если же $f(x)$ – сбалансированная функция, то

$$|\Phi_f\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)\frac{(-1)^{f(0)}}{\sqrt{2}}.$$

В зависимости от типа функции $f(x)$ вектор $|\Phi_f\rangle$ пропорционален одному из векторов

$$|\Phi_\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Эти векторы, как и пара $|0\rangle, |1\rangle$, образует базис. Нетрудно найти явный вид унитарного преобразования $\hat{H}$, которое связывает эти базисы (его называют *преобразованием Адамара* и обозначают символом $\hat{H}$):

$$\hat{H}|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}} = |\chi_+\rangle, \qquad \hat{H}|1\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}} = |\chi_-\rangle.$$

Выражая векторы $|\chi_\pm\rangle$ в терминах векторов вычислительного базиса, получим равенства

$$\hat{H}|\chi_+\rangle = |0\rangle, \qquad \hat{H}|\chi_-\rangle = |1\rangle.$$

Полезно привести более компактное определение преобразования Адамара:

$$\hat{H}|x\rangle = \sum_s |s\rangle\frac{(-1)^{xs}}{\sqrt{2}}$$

Проследим с наибольшей возможной полнотой за последовательностью действий Алисы и Боба. Чтобы записать значения функции $f(x)$, нужно взять состояние $|\Phi_0\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$. Но как его получить. Прежде всего, нужно уметь отличать одно состояние от другого. Для этого нужно заставить их различным способом реагировать на внешние воздействия. Это произойдет, например, в том случае, если энергии состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ станут различными. Для определенности предположим, что попавшие к Алисе и Бобу системы – это тяжелые частицы (может быть включенные в состав более сложной системы) со спином S, равным $\frac{1}{2}$. Они обладают магнитным моментом $\vec{\mu} = \mu\vec{S}$, ориентацией которого можно управлять с помощью внешнего магнитного поля. Если находящиеся в распоряжении Алисы и Боба частицы обладают различными магнитными моментами, то они смогут различить и находящиеся в их руках подпространства, образующие пространство состояний их системы. Итак, Алиса и Боб добывают магнит, с помощью которого делают энергию состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ различными. Если магнитные моменты обеих частиц одинаково ориентированы относительно своих спинов, то состоянием с наименьшей энергией (которое и будет начальным состоянием системы) будет состояние, в котором оба спина ориентированы одинаково. Итак, результат первого действия Алисы и Боба:

1. Система приведена в состояние

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle.$$

Для дальнейшего описания поступков наших молодых людей, полезно ввести специальные термины. Игра Алисы и Боба связана с обменом информацией. Неделимая единица классической информации - **бит** - величина, принимающая два значения 0 и 1. Естественно связать квантовую единицу информации – **квантовый бит** или **кубит** с простейшей нетривиальной квантовой системой. Переменные в такой системе – операторы в двумерном гильбертовом пространстве. Произвольный вектор такого пространства можно представить в форме

$$|\psi\rangle \quad = \quad |0\rangle a \quad + \quad |1\rangle b.$$

где $|0\rangle$ и $|1\rangle$ – нормированные на единицу ортогональные векторы. Если вектор ψ нормирован на единицу, то

$$|\psi|^2 \quad = \quad |a|^2 \quad + \quad |b|^2 \quad = \quad 1.$$

Таким образом **кубит – это произвольный нормированный на единицу вектор двумерного гильбертового пространства**.

Зная слово кубит, следующее действие Алисы и Боба можно описать так:

2. Состояние первого кубита не изменяется, состояние второго кубита с помощью соответствующей унитарной операции переводится в $|1\rangle$.

Третий шаг:

3. Каждый из кубитов, независимо от другого, подвергается преобразованию Адамара. Эта операция выглядит так:

$$\hat{H} \otimes \hat{H}|\Phi_0\rangle \quad = \quad |\chi_+\rangle \otimes |\chi_-\rangle \quad = \quad |\Phi_1\rangle.$$

4. Чтобы записать функцию $f(x)$, Алиса и Боб прибегают к преобразованию двух кубитов, которое не сводится к прямому произведению преобразований:

$$|\Phi_1\rangle \quad \Longrightarrow \quad |\Phi_2\rangle \quad = \quad \hat{U}_f|\Phi_1\rangle.$$

5. Совершается преобразование, изменяющее состояние только первого кубита:

$$|\Phi_2\rangle \quad \Longrightarrow \quad |\Phi_3\rangle \quad = \quad \hat{H} \otimes \hat{E}|\Phi_2\rangle \quad = \quad |\xi\rangle \otimes |\chi_-\rangle.$$

Первый кубит переходит в состояние $|\xi\rangle$, которое, в зависимости от типа функции, совпадает с одним из векторов вычислительного базиса – $|0\rangle$ или $|1\rangle$. Чтобы узнать, какой именно это вектор, нужно измерить наблюдаемую $\hat{T}$, которая определяет вычислительный базис. Если векторы вычислительного базиса соответствуют, например, собственным значениям $\hat{T}$, равным ±1, то полученное в результате измерения значение t укажет на тип функции.

Хотя совместный труд Алисы и Боба показал, что для квантовой механике можно найти несколько неожиданное поле деятельности, такое ее применение не кажется полезным – слишком много действий необходимо совершить, чтобы решить совсем простую задачу.

Однако, эффективность "квантового чтения мыслей" невероятно возрастает при переходе к бо́льшей области определения функции.

Если Алиса и Боб обзаведутся n квантовыми системами, работу которых можно описать в рамках двумерного гильбертового пространства, то объединяя эти системы, они смогут построить $N = 2^n$-мерное гильбертово пространство H с вычислительным базисом

$$|x\rangle \quad = \quad |x_0\rangle \otimes ... \otimes |x_{n-1}\rangle, \qquad x = 2^{n-1}x_0 + 2^{n-2}x_1 + ... + x_{n-1}.$$

Как и прежде, для работы с функцией f, принимающей только два значения – 0 и 1 – нужно добавить еще одно двумерное гильбертово пространство и перейти в пространство с базисом

$$|x,s\rangle \quad = \quad |x\rangle \otimes |s\rangle, \quad s = 0,1.$$

С функцией $f(x)$ снова связывается унитарный оператор $\hat{U}_f$:

$$\hat{U}_f|x,s\rangle \quad = \quad |x\rangle \otimes |s \oplus f(x)\rangle.$$

Как и раньше справедлива формула

$$\hat{U}_f|x\rangle \otimes |\phi\rangle \quad = \quad |x\rangle \otimes |\chi_+\rangle(-1)^{f(x)}.$$

На вектор

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle \otimes |\phi\rangle, \quad |\Phi\rangle \quad = \quad \sum_x |x\rangle C(x)$$

оператор $\hat{U}_f$ действует следующим образом:

$$\hat{U}_f|\Psi\rangle \quad = \quad |\Phi_f\rangle \otimes |\phi\rangle, \quad |\Phi_f\rangle = \sum_x |x\rangle C(x)(-1)^{f(x)}.$$

В пространстве H можно определить оператор, обобщающий преобразование Адамара

$$\hat{H}^{(n)}|x_0, x_1, ..., x_{n-1}\rangle \quad = \quad \hat{H}|x_0\rangle \otimes \hat{H}|x_1\rangle \otimes ... \otimes \hat{H}|x_{n-1}\rangle.$$

Прямое вычисление показывает, что действие этого оператора можно представить формулой

$$\hat{H}^{(n)}|x\rangle \quad = \quad \sum_{y=0}^{N} |y\rangle \frac{(-1)^{x \cdot y}}{\sqrt{N}},$$

где $N = 2^n$, а

$$x \cdot y \quad = \quad x_0 y_0 \oplus x_1 y_1 \oplus ... \oplus x_{n-1} y_{n-1}.$$

Игра Алисы и Боба снова сводится к последовательности действий: Выберем начальное состояние системы в форме

$$|\Phi_0\rangle \quad = \quad \left(\Pi_{i=0}^{n-1} \otimes |0_i\rangle\right) \otimes |1\rangle.$$

Этот вектор преобразуется в

$$|\Phi_1\rangle \quad = \quad \hat{U}_f \otimes (\hat{H}^n \otimes \hat{H})|\Phi_0\rangle \otimes |1\rangle \quad = \quad \Big(\sum_{y=0}^{N-1} |y\rangle F(x,y)\Big) \otimes |\chi_-\rangle,$$

где

$$F(x,y) \quad = \quad \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}(-1)^{x\cdot y}(-1)^{f(x)}.$$

Нетрудно показать, что в случае постоянной функции $f(x)$ получается вектор, пропорциональный $|0\rangle \otimes |\chi_-\rangle$, а если функция $f(x)$ сбалансирована, то $|\Phi_1\rangle = |\xi\rangle \otimes |\chi_-\rangle$, где $\langle\xi|0\rangle = 0$, т.е. полученый вектор ортогонален указанному выше.

Это означает, что если измерение наблюдаемой $\hat{T}$, определяющей базис $|x_0, x_1, ...x_{n-1}\rangle$, даст значение t_0, то функция $f(x)$ постоянна, противоположный исход измерения будет означать, что Боб придумал сбалансированную функцию.

Легко заметить, что все использованные Алисой и Бобом преобразования сводятся к последовательностям преобразований в двумерных гильбертовых пространствах (число этих пространств равно $n+1$). Если считать каждое из этих преобразований некоторым элементарным преобразованием, то каждое из больших преобразований требует примерно n преобразований элементарных. Таким образом, M – число операций, которые требует квантовая игра Алисы и Боба – величина порядка

$$M \quad = \quad O(n) \quad = \quad O(log_2 N).$$

При достаточно больших N эта величина значительно меньше числа операций в классической игре.

Нетрудно заметить, что игра Алисы и Боба, независимо от числа аргументов функции начинается с того, что

система приводится в состояние
$|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes ... \otimes |0\rangle$.

После этого она напоминает танец, в котором повторяются одни и те же фигуры:

каждый из кубитов переводится в то или
иное состояние независимо от других,

последовательно производятся операции
с выбранной парой кубитов.

После многократного повторения указанных операций производится измерение некоторой связанной с системой наблюдаемой.

Такая последовательность действий определяет работу устройств, называемых **квантовыми компьютерами**. Не нужно думать, что именно Алиса и Боб изобрели эти устройства. Скорее всего они затеяли свою игру после того как подслушали разговоры взрослых. О возможности и необходимости создания вычислительных машин, работающих по законам квантовой механики, физики и математики начали говорить еще в шестидесятые годы. Огромное влияние на развитие теории квантовых вычислений оказали провидческие работы Фейнмана. Обширная литература по этим вопросам собрана в сборниках [**Квантовые вычисления I,II 1999**]. Однако, все это направление долгое время считалось чисто академическим и далеким от повседневной жизни, пока вдруг не случилось непредвиденное.

КВАНТОВЫЙ КОМПЬЮТЕР – ЧУДО ИЛИ НОЧНОЙ КОШМАР?

> **34** [21] Ибо очи Его над путями человека,
> и Он видит все шаги его.
> **Книга Иова**

Все началось после того, как Алиса и Боб обнаружили, что их переписку читает подруга Алисы – чрезвычайно любопытная Ева из Эдема. Хотя в письмах не было ничего, что нужно было скрывать, Алиса и Боб решили их кодировать. Им было известно, что главное в тайнописи – надежно хранить ключ от кода, а как его спрячешь от всезнайки Евы? Однако, друзья математики посоветовали им пользоваться двумя ключами, а хранить только один. Это будет удобно для них и оставит Еве не слишком много надежд на раскрытие кода. Алиса и Боб решили остановиться на RSA-коде, придуманном Ривестом, Шамиром и Адлеманом [**RSA 1978**].

Работает этот код следующим образом. Алиса и Боб выбирают два простых числа p и q и вычисляют их произведение $N = pq$. Это не слишком трудно сделать даже в том случае, если числа очень большие. Потом они обзаводятся еще одной парой чисел, меньших n: числом d, взаимно простым с числом $(p-1)(q-1)$ и таким числом e, чтобы выполнялось равенство $de \equiv 1 mod (p-1)(q-1)$. Все это – также не слишком трудные задачи. После этого пара чисел $\{N, e\}$ ни от кого не прячется, – их может знать даже Ева – а пара $\{N, d\}$ хранится как зеница ока. Предположим, что Боб захотел написать Алисе письмо. Делает он это так: сначала переводит текст письма, т.е. последовательность букв T_n, заменяет понравившейся ему последовательностью $T_u = \{n_1, ..., n_K\}$, состоящей из целых чисел $\{1, ..., N\}$. После этого Боб приступает к шифровке, заменяя каждое число n_i на число $e_i = {n_i}^e \quad mod n$. Именно такой текст получает Алиса. Она немедленно заменяет каждое из чисел тарабарского текста числом ${e_i}^d \quad mod n$ и получает числа n_i (т.е. последовательность T_u), потому что

$$e_i^d \quad mod N \quad = \quad {n_i}^{ed} \quad mod N \quad = \quad n_i.$$

Теперь остается только превратить полученную последовательность в письмо Боба T_n.

Код Алисы и Боба использует то обстоятельство, что посторонним доступно только значение числа N, а числа p и q, реализующие его разложение на простые сомножители, остаются для окружающих тайной. Может показаться, что Ева легко найдет эти числа: ведь алгоритм разложения натурального числа в произведение простых чисел был известен еще Евклиду. Все дело в том, что время (пропорциональное числу необходимых элементарных операций) нужное для реализации алгоритма Евклида чрезвычайно быстро растет с увеличением значения числа. Даже самые изощренные усовершентствования алгоритма Евклида дают такую оценку необходимого времени: если n - наибольший показатель в двоичном разложении числа N, то время T, необходимое для разложения N на простые сомножители, – величина порядка

$$T \quad \equiv \quad Cexp\Big(an^{1/3}(ln(n))^{2/3}\Big).$$

Когда Ривест, Шамир и Адлеман в 1977 году придумали свою схему кодировки, они бросили вызов желающим принять участие в соревновании на самое быстрое разложение на множители 129-значного числа, известного теперь как число RSA-129. Вызов ждал желающих 17 лет. За это время быстродействие компьютеров возросло примерно в 2000 раз. Но даже после этого факторизация RSA-129 потребовала усилий 1600 объединенных в сеть компьютеров.

Таким образом, Алиса и Боб, прибегнув к RSA-коду, уже не опасались происков любопытной Евы. Оказалось, что они рано успокоились. Ева, много раз слышавшая от Алисы и Боба о чудесах квантовой механики, решила выяснить, не поможет ли эта наука и ей. Она познакомилась с молодым математиком Шором и попросила его решить задачу о разложении натурального числа на простые сомножители на квантовом копьютере. Шор эту задачу решил [**Shor 1974**]. Полученные Шором результаты буквально вызвали взрыв в теории квантовых компьютеров. Из чисто академического направления, лежащего на стыке физики и математики, она превратилась в самостоятельную быстро развивающуся науку, привлекающую все большее молодых ученых. Алгоритм Шора в настоящее время подробно описан во многих обзорных статьях, многие из которых вошли в сборники [**Квантовые вычисления I,II 1999**]. Здесь мы коснемся лишь его квантовой части – задаче о вычислении периода функции. Ее можно сформулировать следующим образом: пусть известно, что функция $f(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$f(x+r) \quad = \quad f(x).$$

Нужно найти число r – **период** функции. Известно, что эффективным средством изучения свойств периодических функций является аппарат **преобразований Фурье**. Естественно возникает вопрос, а нельзя ли определить **квантовое преобразование Фурье**? Проще всего это сделать в гильбертовом пространстве H, построенного прямым произведением n двумерных гильбертовых простанств. Определяя в этом пространстве базис $|x\rangle$, где

$$x \quad = \quad 2^{n-1}x_{n-1} + 2^{n-2}x_{n-2} + ... + x_0,$$

определим преобразование Фурье его векторов:

$$\hat{F}|x\rangle \quad = \quad \sum_{y=0}^{N-1} |y\rangle exp(2\pi i \frac{yx}{N}) \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Тогда преобразование Фурье произвольного вектора определится формулой

$$\hat{F}|\Psi\rangle \quad = \quad \sum_x \hat{F}|x\rangle\langle x|\Psi\rangle.$$

Оператор $\hat{F}^{-1}$ следующим образом действует на $|x\rangle$:

$$\hat{F}^{-1}|x\rangle \quad = \quad \sum_{y=0}^{N-1} |y\rangle exp(-2\pi i \frac{yx}{N}) \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Чтобы определить квантовое преобразование Фурье функции $f(x)$, переходят к прямому произведению гильбертовых пространств $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1$ с тем, чтобы во втором пространстве записывать значения функций. Если определить вектор

$$|\Psi_f\rangle \quad = \quad \sum_x |x\rangle \otimes |f(x)\rangle$$

и произвести преобразование Фурье в первом подпространстве:

$$\hat{F}|\Psi_f\rangle \quad = \quad \sum_x \hat{F}|x\rangle \otimes |f(x)\rangle,$$

то получится выражение

$$|F\Psi_f\rangle \quad = \quad \sum_x \sum_y |y\rangle exp(2\pi i \frac{yx}{N}) \frac{1}{\sqrt{N}} \otimes |f(x)\rangle \quad = \quad \sum_y |y\rangle \otimes |g(y)\rangle,$$

в котором функция $g(y)$ равна

$$g(y) \quad = \quad \hat{F} f(y) \quad = \quad \sum_x f(x) exp(2\pi i \frac{xy}{N}) \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

По существующему, по крайней мере, два столетия определению это и есть определение Фурье-образа функции f.

Нетрудно сформулировать алгоритм определения периода функции. Сначала выбирается гильбертово пространство $H = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Пространство $\mathcal{H}_1$ – 2^n-мерное гильбертово пространство $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{H}_2$, в котором будут записаны значения аргумента x, пространство $\mathcal{H}_2$ – аналогичное 2^m-мерное гильбертово пространство, предназначенное для записи значений функции $f(x)$.

После этого следуют четыре шага алгоритма.

1 Система приводится в состояние

$$|\Psi_0\rangle \quad = \quad |0\rangle \otimes |0\rangle.$$

2 Вектор $|\Psi_0\rangle$ преобразуется в вектор

$$\Psi_1 \quad = \quad |x\rangle \otimes |f(x)\rangle \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

3. В первом подпространстве системы производится преобразование Фурье:

$$\Psi_2 \quad \Rightarrow \quad \Psi_3 \quad = \quad |\hat{F}x\rangle \otimes |f(x)\rangle \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

4. В пространстве H выбирается вектор $|\Psi(a,c)\rangle \quad = \quad |a\rangle \otimes |c\rangle$ и измеряется наблюдаемая $\hat{P}_{\Psi(a,c)}$ в состоянии Ψ_3.

В результате измерения можно будет узнать вероятность того, что функция $\hat{F}f$ принимает значение c в точке a.

Эта вероятность равна

$$W \quad = \quad |\langle\Psi(a,c)|\Psi_3\rangle|^2.$$

Подставляя явные выражения входящих в скалярное произведение векторов, получим

$$W \quad = \quad |\frac{1}{N}\sum_x \langle c|f(x)\rangle exp(2\pi i\frac{xa}{N})|^2 \quad = \quad |\frac{1}{N}\sum_{x:f(x)=c} exp(2\pi i\frac{xa}{N})|^2.$$

Пусть $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ – совокупность корней уравнения $f(x) = c$. Тогда

$$W \quad = \quad \frac{1}{N^2}|\sum_{s=1}^{m} exp(2\pi i\frac{x_s a}{N})|^2.$$

Поскольку

$$x \quad = \quad 2^{n-1}x_{n-1} + 2^{n-2}x_{n-2} + ... + 2x_1 + x_0,$$
$$y \quad = \quad 2^{n-1}y_{n-1} + 2^{n-2}y_{n-2} + ... + 2y_1 + y_0,$$

то множитель при $2\pi i$ в экспоненте $exp(2\pi i\frac{xy}{2^n})$ содержит много целочисленных слагаемых, которые не вносят вклада в экспоненту. Полезно удалить эти слагаемые с самого начала. При выполнении этой операции удаление будем обозначать стрелкой $\Rightarrow$. Заметим, что

$$\frac{yx}{2^n} \quad = \quad y_{n-1}\frac{1}{2}x \quad + \quad \frac{1}{2^n}z_1 x \quad \Rightarrow \quad y_{n-1}\frac{1}{2}x_0 \quad + \quad \frac{1}{2^n}z_1 x.$$

Переменная y_{n-1} входит только в первое слагаемое. Продолжая этот процесс, можно осуществить полную редукцию:

$$\frac{yx}{N} \quad \Rightarrow \quad y_{n-1}f_{n-1}(x) + y_{n-2}f_{n-2}(x) + ... + y_0 f_0(x).$$

При этом функция f_0 зависит от всех переменых x: $f_0(x) = f_0(x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_0)$, функция f_1 теряет зависимость от x_{n-1} – $f_1(x) = f_1(x_{n-2}, ..., x_0)$. Потеря аргументов продолжается с увеличением номера функции, так что $f_{n-1}(x) = f_{n-1}(x_0)$.

Теперь экспоненту можно представить в форме произведения

$$exp(2\pi i\frac{yx}{N}) \quad = \quad \Pi_{k=0}^{n-1} exp(2\pi i y_k f_k(x)),$$

а суперпозицию базисных векторов превратить в прямое произведение:

$$\sum_y |y\rangle exp(2\pi i\frac{yx}{N}) \quad = \quad \Pi_{k=0}^{n-1}\otimes\sum_{y_k}|y_k\rangle\frac{exp(2\pi i y_k f_k(x))}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку каждое из чисел y_k принимает лишь два значения, то нетрудно представить результат преобразования Фурье в виде n прямых произведений

$$\hat{F}|x\rangle = (|0\rangle + |1\rangle e^{2\pi i f_{n-1}})\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes (|0\rangle + |1\rangle e^{2\pi i f_{n-2}})\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes ... \otimes (|0\rangle + |1\rangle e^{2\pi i f_0})\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Функции f_k представляют собой двоичные дроби:

$$f_{n-1} = \frac{1}{2}x_0 = 0.x_0, \quad = \quad f_{n-2} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2^2}x_0 = 0.x_1x_0, ...$$

$$f_0 = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2^2}x_{n-2} + ... + \frac{1}{2^n}x_0 = 0.x_{n-1}x_{n-2}...x_0,$$

поэтому первый сомножитель в прямом произведении равен

$$(|0\rangle + |1\rangle e^{2\pi i f_{n-1}})\frac{1}{\sqrt{2}} \quad = \quad (|0\rangle + |1\rangle e^{\pi x_0})\frac{1}{\sqrt{2}} \quad = \quad (|0\rangle + |1\rangle(-1)^{x_0})\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Это, как было известно уже Алисе и Бобу, – результат применения преобразования Фурье к вектору $|x_0\rangle$:

$$(|0\rangle + |1\rangle e^{2\pi i f_{n-1}})\frac{1}{\sqrt{2}} \quad = \quad \hat{H}|x_0\rangle.$$

Второй сомножитель выглядит почти так же:

$$(|0\rangle + |1\rangle e^{2\pi i 0.x_1x_0})\frac{1}{\sqrt{2}} \quad = \quad (|0\rangle + |1\rangle e^{\frac{\pi i x_0}{2}}(-1)^{x_1})\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Преобразование Адамара присутствует и в нем, но применяется оно не сразу к вектору $|x_1\rangle$, а только после некоторого преобразования, затрагивающего два вектора – $|x_0\rangle$ и $|x_1\rangle$:

$$(|0\rangle + |1\rangle e^{2\pi i 0.x_1x_0})\frac{1}{\sqrt{2}} \quad = \quad \hat{H}_1\hat{R}_{0,1}|x_0, x_1\rangle.$$

В такой же форме можно представить и остальные сомножители прямого произведения. Вот типичный пример:

$$(|0\rangle + |1\rangle e^{2\pi i 0.x_kx_{k-1}...x_0})\frac{1}{\sqrt{2}} \quad = \quad \hat{H}_k\hat{R}_{k,k-1}\hat{R}_{k,k-2}...\hat{R}_{k,0}|x_0, ...x_k\rangle.$$

Каждый из сомножителей получается в результате последовательных одно- и двухбитных преобразований – элементарных операций, которые выполняет квантовый компьютер. Нетрудно найти полное число таких операций:

$$N_{on} \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1}(i+1) \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}.$$

Таким образом **для преобразования Фурье вектора из N-мерного пространства квантовому компьютеру требуется** $N_{on} \sim (lnN)^2$ **операций**.

КАК ДЕЛАТЬ ПОДАРКИ

Милая девушка Алиса обзавелась некоторой квантовой системой в неизвестном для нее состоянии $|\phi\rangle$. Она хочет подарить эту систему своему другу Бобу. Если эта система способна к перемещениям, проще всего было бы просто послать ее в Бостон посылкой, но Алиса почему-то не может этого сделать. Вместо этого она может послать вторую такую же систему. Эта дополнительная система (ancilla) находится в известном состоянии $|a_0\rangle$, но никто не знает, как связаны имеющиеся в распоряжении Алисы состояния. Чтобы помочь беде, Алиса заставляет свои системы взаимодействовать между собой, после чего первоначальная система оказывается в известном состоянии $|\phi_0\rangle$, а дополнительная – в состоянии $|a\rangle$, которое хотя и неизвестно, но содержит в себе всю информацию о состоянии $|\phi\rangle$. Получив посылку, Боб может повторить действия Алисы в обратном порядке и получить желаемое состояние $|\phi\rangle$.

Предположим, что система, которой обзавелась Алиса – это частица со спином $\frac{1}{2}$ или фотон с определенным импульсом. Если ось Oz направить вдоль импульса фотона, то остающиеся степени свободы фотона будут связаны с двумя различными поляризациями фотона. В любом случае вектор состояния системы можно представить в форме

$$|\phi\rangle \quad = \quad |\uparrow\rangle C(\uparrow) \quad + \quad |\downarrow\rangle C(\downarrow).$$

Коэффициенты $C(\uparrow,\downarrow)$ связаны соотношением

$$|C(\uparrow)|^2 \quad + \quad |C(\downarrow)|^2 \quad = \quad 1.$$

Если $|\phi\rangle$ – это состояние фотона, то величина $|C(\uparrow,\downarrow)|^2$ определяет относительную вероятность того, что фотон пройдет сквозь анализатор, который пропускает только те кванты, которые находятся в состояниях $|\uparrow,\downarrow\rangle$.

В качестве дополнительной системы Алиса может выбрать систему из двух частиц того же сорта, какая уже есть у нее. Операторы, связанные с переменными в такой системе, определены в четырехмерном гильбертовом пространстве. Обозначим переменные функций в этом пространстве символами 2 и 3 и выберем в качестве базиса следующие векторы:

$$|\Psi^{\pm}{}_{23}\rangle \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle \pm (|\uparrow_3\rangle|\downarrow_2\rangle),$$

$$|\Phi^{\pm}{}_{23}\rangle \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle \pm (|\downarrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle)$$

и приведем нашу дополнительную систему в состояние $|\Psi^{-}{}_{23}\rangle$.

Большая система ”1+2+3” в этом случае будет находиться в состоянии

$$|\Psi_{123}\rangle \quad = \quad |\phi_1\rangle|\Psi^{-}{}_{23}\rangle \quad =$$

$$\frac{1}{2}\Big(|\Psi^{-}{}_{12}\rangle|\phi_1(3)\rangle + |\Psi^{+}{}_{12}\rangle|\phi_2(3)\rangle + |\Phi^{-}{}_{12}\rangle|\phi_3(3)\rangle + |\Phi^{+}{}_{12}\rangle|\phi_4(3)\rangle\Big),$$

где

$$|\phi_1\rangle \quad = \quad -|\uparrow\rangle C(\uparrow) - |\downarrow\rangle C(\downarrow) \quad = \quad \hat{U}_1|\phi\rangle,$$

$$\begin{aligned}|\phi_2\rangle &= -|\uparrow\rangle C(\uparrow)+|\downarrow\rangle C(\downarrow) &= \hat{U}_2|\phi\rangle,\\ |\phi_3\rangle &= \uparrow\rangle|C(\downarrow)+|\downarrow\rangle C(\uparrow) &=| \quad \hat{U}_3|\phi\rangle,\\ |\phi_4\rangle &= -|\uparrow\rangle C(\downarrow)+|\downarrow\rangle C(\uparrow) &= \hat{U}_4|\phi\rangle.\end{aligned}$$

При любом состоянии $|\phi\rangle$ система "1 + 2" с равной вероятностью $\frac{1}{4}$ находится в каждом из состояний $|\Psi^{\pm}{}_{12}\rangle, |\Phi^{\pm}{}_{12}\rangle$. Если Алиса с достоверностью переведет ее в одно из этих состояний, то Боб с достоверностью получит некоторое состояние $\hat{U}_i|\phi\rangle$. Если Алиса сообщит ему номер своего состояния, то Боб, применив к имеющемуся у него вектору операцию $\hat{U}_i^{-1}|\phi\rangle$, получит слепок состояния $|\phi\rangle$. Полезно вспомнить, что Алиса в результате описанной операции лишилась хоть и неизвестного, но, может быть, дорогого ей состояния.Это обстоятельство отражает существенное отличие квантовой информации от классической: квантовой информацией можно обменяться, но ее нельзя дублировать.

Заметим, что авторы мысленного эксперимента считают, передача Алисой номера оставшегося в ее руках состояния, может считаться чисто классической информацией, поэтому телепортация требует использования как квантового так и классического каналов информации.

ТРЕХЧАСТНЫЕ СИСТЕМЫ. ТЕЛЕПОРТАЦИЯ

Мы уже видели, как Бауэр и Лондон пытались решить проблему измерений, дополнив двухчастную систему "объект+прибор" еще одним объектом с особыми свойствами. Это не слишком помогло делу, но навело на мысль, что в системе, состоящей из трех равноправных подсистем, можно будет наблюдать довольно неожиданные явления.

Предположим для определенности, что экспериментатор может тем или иным способом объединять три исходные системы, $\Sigma_i, i = 1, 2, 3$, получая, например, системы

$$U_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

или

$$U_2 = \Sigma_{12} \cup \Sigma_3,$$

где система Σ_{12} имеет столько же независимых переменных, как и объединение подсистем 1 и 2, но отличается от него свойствами. Список возможных объединений можно продолжить.

Состояния каждой их таких систем можно описать с помощью матрицы плотности

$$\rho(x; x^{'}), \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Разным способам объединения соответствуют разного вида ядра ρ.

Пусть имеется проекционый оператор $\hat{P}_{12}$, определенный в объединении систем 1 и 2, т.е. ядро этого оператора имеет вид

$$P_{12}(x_1, x_2; y_1, y_2) \quad = \quad \Phi(x_1, x_2)\Phi^*(y_1, y_2).$$

Нетрудно показать, что оператор

$$\hat{R}(3) \quad = \quad Tr_{(1,2)}\Big(\hat{P}_{12}(1,2)\hat{\rho}(1,2,3)\Big)\Big/Tr(\hat{P}_{12}(1,2)\hat{\rho}(1,2,3))$$

с ядром

$$R(x_3,x^{'}{}_3) \quad = \quad C\int\Phi^*(y_1,y_2)\rho(y_1,y_2,x_3;z_1,z_2,x^{'}{}_3)\Phi(x_1,x_2)dydz$$

представляет собой некоторую матрицу плотности.

Ее естественно назвать "условной матрицей плотности" системы Σ_{123} при условии, что подсистема Σ_{12} находится в состоянии $\hat{P}_{12}$. Особый интерес представляет случай, когда большая система находится в чистом состоянии:

$$\rho(x;x^{'}) \quad = \quad \Psi(x)\Psi^*(x^{'}).$$

Состояние системы Σ_3 тогда также будет чистым:

$$R(x_3,x^{'}{}_3) \quad = \quad u(x_3)u^*(x^{'}{}_3), \quad ||u||^2 = 1,$$

где

$$u(x_3) \quad = \quad D\int\Phi^*(x_1,x_2)\Psi(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2.$$

Чрезвычайно важно следующее обстоятельство: в состоянии большой системы с волновой функцией Ψ подсистема Σ_3 может находиться в смешанном состоянии. Таким образом процедура построения условной матрицы плотности представляет собой "квантовый способ очищения".

Пусть функция Ψ представляется в форме

$$\Psi(x_1,x_2,x_3) \quad = \quad f(x_1)F(x_2,x_3),$$

тогда

$$u(x_3) \quad = \quad \int dx_1 f(x_1)\int dx_2 D\Phi^*(x_1,x_2)F(x_2,x_3).$$

Если внутрений интеграл сводится к δ-функции:

$$D\int\Phi^*(x_1,x_2)F(x_2,x_3) \quad = \quad \delta(x_1-x_3),$$

то условная матрица плотности определяет такое (чистое) состояние системы Σ_3, в котором первоначально находилась система Σ_1. Система Σ_1 в условной матрице плотности объединена с системой Σ_2 в состояние $\hat{P}_{12}$, т.е. ее состояние является смешанным.

Таким образом, только что описанное построение условной матрицы плотности (если оно возможно), определяет желанный всем фантастам процесс телепортации: нечто, находившееся в заданном месте, исчезает, появляясь немедленно в другом месте в том же самом состоянии, что и раньше.

В столь общей постановке задача, разумеется неразрешима – нам просто не хватит функций, чтобы построить δ-функцию. Однако, можно рассмотреть задачу более ограниченную: рассмотрим системы, которые характеризуются как непрерывными, так и дискретными переменными. Последние могут характеризовать, например, некоторые внутренние степени свободы систем. Можно ли телепортировать структуры, связанные с этими дискретными переменными? Для определенности предположим, что все переменные x имеют одинаковую природу: $x = (z, \sigma)$ и что

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) \quad = \quad f(x_1)F(x_2, x_3) \quad = \quad f(z_1, \sigma_1)F(z_2, \sigma_2; z_3, \sigma_3),$$

причем непрерывные и дискретные переменные в функции F факторизуются:

$$F(z_2, \sigma_2; z_3, \sigma_3) \quad = \quad V(z_2, z_3)v(\sigma_2, \sigma_3).$$

Таким же свойством пусть обладает и функция Φ:

$$\Phi(x_1, x_2) \quad = \quad \phi(z_1, z_2)\xi(\sigma_1, \sigma_2).$$

В этом случае

$$u(x_3) \quad = \quad u(z_3, \sigma_3) \quad = \quad \sum_{\sigma_1} \int dz_1 f(z_1, \sigma_1) W(z_1, z_3) \chi(\sigma_1, \sigma_3),$$

где

$$W(z_1, z_3) \quad = \quad C_1 \int dz_2 \phi^*(z_1, z_2) V(z_2, z_3),$$

$$\chi(\sigma_1, \sigma_3) \quad = \quad C_2 \sum_{\sigma_2} v^*(\sigma_1, \sigma_2)\xi(\sigma_2, \sigma_3).$$

Поскольку сумма содержит лишь конечное число слагаемых, можно распорядиться функциями v и ξ так, чтобы выполнялось равенство

$$\chi(\sigma_1, \sigma_3) \quad = \quad \delta_{\sigma_1 \sigma_3}.$$

Если функция f факторизуется:

$$f(x) \quad = \quad g(z)\varsigma(\sigma),$$

то факторизуется и функция u:

$$u(z, \sigma) \quad = \quad G(z)\varsigma(\sigma).$$

Таким образом, только что построенная условная матрица плотности позволяет телепортировать дискретные степени свободы системы.

В качестве примера рассмотрим случай, когда все три подсистемы Σ_i представляют собой нерелятивистские частицы со спином $\frac{1}{2}$. Переменные z, будут составляющими радиса-вектора частиц: $z \equiv \vec{r}$, а σ – спиновыми переменными, принимающими значения ± 1.

Пусть оператор $\hat{P}_{12}$ выделяет синглетное спиновое состояние:

$$\Phi(x_1, x_2) \quad = \quad \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2),$$

где

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{\frac{1}{2}}(\sigma_1)\chi_{-\frac{1}{2}}(\sigma_2) - \chi_{\frac{1}{2}}(\sigma_2)\chi_{-\frac{1}{2}}(\sigma_1)).$$

$$(\frac{1}{2}\sigma_3\chi_{\pm\frac{1}{2}})(\sigma) \quad = \quad \pm\frac{1}{2}\chi_{\pm\frac{1}{2}}(\sigma).$$

Пусть таким же свойством обладает и функция F:

$$F(x_1, x_2) \quad = \quad V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2),$$

т.е. функция v совпадает с χ. Прямой подсчет показывает, что

$$\sum_{\sigma_2} \chi(\sigma_1, \sigma_2)\chi(\sigma_3, \sigma_2) \quad = \quad \delta_{\sigma_1\sigma_3}.$$

Таким образом телепортация частицы со спином $\frac{1}{2}$ возможна, хотя бы в принципе. Нужно только выяснить, как можно реализовать соответствующие состояния. Однако для выяснения этих вопросов полезно обсудить блестящий эксперимент по телепортации фотона, осуществленный в Инсбруке в 1997 году [**Bouwmeester et al. 1997**].

ТЕЛЕПОРТАЦИЯ ФОТОНА

1. Приготовление начального состояния.

Импульс ультрафиолетового излучения проходит сквозь нелинейный кристалл, порождая пару фотонов 2 и 3. Состояние поляризации этой пары описывается функцией $w(\sigma_2, \sigma_3)$. При этом функция w должна быть антисимметрична по своим переменным, т.е. $w = \chi$. После отражения от стоящего за кристаллом зеркала этот же импульс порождает еще одну пару фотонов 1 и 4. После того как фотон 1 пройдет сквозь поляризатор, его спиновое состояние будет описываться функцией $v(\sigma_1)$. Фотон 4 временно выбывает из игры, но не навсегда. Его регистрация позднее позволит установить, что поляризационное состояние описывается функцией

$$\Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad = \quad v(\sigma_1)\chi(\sigma_2, \sigma_3).$$

Выделение каждого из фотонов позволяет учесть законы сохранения при рождении каждой пары, т.е., в конечном счете, регистрация направления распространения фотонов.

2. Построение условной матрицы плотности.

Привести фотоны в состояние $\hat{P}_{12}$ можно следующим образом. После соответствующих отражений эти фотоны можно направить на фотоделитель так, чтобы они подошли к нему с разных сторон. Пусть в эксперименте регистрируется случай, когда фотоны в конце эксперимента оказываются по разные стороны от фотоделителя. Амплитуда соответствующего процесса будет суперпозицией амплитуд процесса, при котором оба фотона отражаются от фотоделителя, и процесса, при котором каждый из фотонов проходит сквозь фотоделитель. Известно, что если поляризационная функция фотонов перед достижением фотоделителя окажется симметричной по своим переменным, то результирующая амплитуда будет равна нулю. Таким образом, регистрация фотонов по разные стороны фотоделителя будет означать, что исходная поляризационная функция соответствующих фотонов была антисимметричной, т.е.

$$\hat{P}_{12} \quad = \quad \chi(1,2) \otimes \chi(1,2).$$

3. Регистрация телепортации.

Приведенные ранее выкладки позволяют утверждать, что одновременная регистрация фотонов 1, 2 и 3 при условии, что фотоны 1 и 2 окажутся по разные стороны фотоделителя, обнаружит, что фотон 3 поляризован, причем эта поляризация совпадает с первоначальной поляризацией фотона 1. Чтобы обнаружить поляризацию фотона 3, можно заставить его пройти сквозь поляризационный фотоделитель, по-разному пропускающий фотон в том или ином направлении, в зависимости от поляризации фотона.

В Инсбрукском эксперименте нужные события выделялись с помощью детекторов фотонов f1, f2, d1, d2. Из соображений технических удобств эти детекторы выделяли совпадения или антисопадения событий. Совпадение показаний счетчиков (т.е. их одновременное срабатывание) f1 и f2 укажет на то, что фотоны 1 и 2 находятся в состоянии $\hat{P}_{12}$.

Детекторы d1 и d2, были установлены после поляризационного фотоделителя, сквозь который проходил фотон 3. Эти детекторы регистрируют ортогональные друг к другу линейные поляризации фотонов.

Пусть первоначальный фотон 1 поляризован линейно в некотором известном экспериментаторам направлении, и детектор d1 выделяет именно это направление поляризации. Совпадение показаний счетчиков (f1,f2,d1) и антисовпадение показаний (f1,f2,d2) укажет на телепортацию поляризации фотона 1 к фотону 3. Первоначально поляризационное состояние этого фотона было полностью неопределенным.

Аналогичным образом можно зафиксировать телепортацию фотонов с круговой поляризацией.

ТЕЛЕПОРТАЦИЯ ЧАСТИЦ НЕНУЛЕВОЙ МАССЫ

Инсбрукский эксперимент может послужить образцом для схем телепортации частиц с ненулевой массой покоя. Для примера, рассмотрим задачу телепортации электрона. Пара "электрон + позитрон" с равным нулю полным спином естественным образом возникает при распаде парапозитрония – основного состояния связанных электрона и позитрона. Выделить такую систему не слишком сложно. Если к этой паре добавить электрон с волновой функцией $f(\vec{r})\xi(\sigma)$, то возникнет трехчастичная система в состоянии

$$\Psi(\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2;\vec{r}_3,\sigma_3) \quad = \quad u(\vec{r}_1)\xi(\sigma_1)u_p(\vec{r}_2)u_e(\vec{r}_3)\chi(\sigma_2,\sigma_3).$$

Пусть электрон 1 и позитрон 2 направляются навстречу друг другу так, что они могут образовать парапозитроний с волновой функцией

$$\Phi(\vec{r}_1,\sigma_1;\vec{r}_2,\sigma_2) \quad = \quad F(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\chi(\sigma_2,\sigma_3).$$

Состояние электрона 3 при условии, что электрон 1 и позитрон 2 образовали парапозитроний, определяется волновой функцией

$$v(\vec{r}_3,\sigma_3) \quad = \quad g(\vec{r}_3)\xi(\sigma_3).$$

Таким образом спиновое состояние электрона 1 телепортируется к электрону 3, который первоначально был полностью неполяризован.

По такому же образцу можно телепортировать состояния, связанные с произвольным моментом количества движения. Если системы 2 и 3, каждая из которых обладает моментом количества движения j, то часть ее волновой функции, связанную с мометом можно представить в форме

$$F(\omega_2,\omega_3) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{(2j+1)}}\sum_{m=-j}^{j}(-1)^{j-m}\psi_m(\omega_2)\psi_{-m}(\omega_3).$$

Выражение для построенной по приведенным выше образцам условной матрицы плотности содержит интеграл

$$\int F(\omega_1,\omega)d\omega F^*(\omega,\omega_2) \quad = \quad \frac{(-1)^{2j}}{2j+1}\sum_{m=-j}^{j}\psi(\omega_1)\psi^*(\omega_2).$$

Правая часть равенства с точностью до множителя представляет собой ядро единичного оператора в пространстве, связанном с моментом количества движения.

МОЖНО ЛИ ОБРАТИТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ?

> ...предложение отправить Канта в Соловки не только не поразило иностранца, но даже привело в восторг.

– Именно, именно, – закричал он – ему там самое место! Ведь говорил я ему тогда за завтраком: ”Вы, профессор, воля ваша, что-то нескладное придумали! Оно, может, и умно, но больно непонятно. Над вами потешаться будут”.

М.А.Булгаков

Естественно, что основным стимулом построений фон Неймана были чисто физические соображения. Прежде всего - это явное желание согласовать теорию измерений с принципом дополнительности и убеждение в том, что всякое измерение необратимо.

Попробуем разобраться в необходимости первого и справедливости второго.

Очевидно, что теория фон Неймана не имеет никакого отношения к принципу дополнительности с его апелляцией к классической физике. Это - самодостаточная квантовая схема, основанная на анализе свойств динамических переменных - линейных операторов в гильбертовом пространстве, которые определяются своими перестановочными соотношениями. Однако фон Нейман считает, что принцип дополнительности необходим ему для обоснования необходимости завершения цепи измерений ”абстрактным Я” [**Нейман 1964**, стр.308]:

> Бор первый указал как на то, что возникшую в результате открытия квантовой механики с формальной точки зрения неизбежную двойственность в описании природы можно оправдать и с точки зрения природы вещей, так и на связь с принципом психофизического параллелизма.

Статья, на которую ссылается фон Нейман - публикация доклада Бора на открытии 18-го Скандинавского собрания естествоиспытателей [**Бор 1971**, стр. 62-71]. В интересующей нас части доклада говорилось:

> Не опасаясь быть ложно понятым, будто я намерен ввести некоторую мистику, не имеющую ничего общего с духом науки, хочу указать здесь на своеобразный параллелизм, существующий между возобновленной дискуссией о реальности причинных законов и издавна продолжающейся дискуссией о свободе воли. В то время как чувство свободы воли господствует в духовной жизни, требование причинности лежит в основе упорядочения ощущений. Вместе с тем в обоих случаях имеем некоторую идеализацию, естественные границы которой можно изучить более детально и которая означает, что чувство свободы воли и требование причинности одинаково незаменимы в отношениях между субъектом и объектом; это составляет ядро проблемы познания.

Бросается в глаза, что рассуждения фон Неймана о возможных типах эволюции в квантовой механике содержат не только бесспорные результаты, которые основаны на формализме изобретенной им самим матрице плотности, но и утверждения, внушенные тем, что можно назвать ”общим мнением”, в основе которых лежат предпосылки, не связанные непосредственно с ”мерой, числом и весом”.

По-видимому, по этой же причине фон Нейману стали со временем приписывать утверждения, которых он никогда не делал, например, о необходимом участии в измерениях макротел. Можно думать, что это происходило оттого, фон Нейман слишком доверял сообразительности читателя. Вот его блестящий анализ измерения из монографии 1932 года. Как наблюдаемый объект, так и наблюдателя (т.е. I и II) будет достаточно охарактеризовать одной непрерывно пробегающей от $-\infty$ до $+\infty$ переменной q или r, т.е. мы будем представлять их как линейно двигающиеся точки. Их волновые функции будут иметь вид $\psi(q)$ и $\eta(r)$. Мы примем, что их массы m_1 и m_2 столь велики, что кинетической энергией

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1}(\frac{\partial}{\partial q})^2 \quad - \quad \frac{\hbar^2}{2m_2}(\frac{\partial}{\partial r})^2$$

в операторе энергии можно будет пренебречь, и в $\hat{H}$ останется только ответственная за измерение энергия взаимодействия, для которой мы выберем специальную форму $-i\hbar q\frac{\partial}{\partial r}$.

Зависящее от времени дифференциальное уравнение Шредингера для волновой функции $\psi_t = \psi_t(q, r)$ системы I+II имеет вид:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(q,r) \quad = \quad iq\frac{\partial}{\partial r}\psi_t(q,r),$$

т.е.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\frac{\partial}{\partial r}\right) \quad = \quad 0,$$

что приведет к

$$\psi_t(q,r) \quad = \quad f(q, r - tq).$$

Если для $t = 0$ $\psi_0(q,r) = \Phi_(q,r)$, то мы получим $f(q,r) = \Phi(q,r)$ и, следовательно,

$$\psi_t(q,r) \quad = \quad \Phi(q, r - tq).$$

Если, в частности, начальные состояния систем I и II представляются функциями $\phi(q)$ и $\xi(r)$, то, в духе нашей вычислительной схемы (если выбрать участвующее в ней время t равным 1), будет

$$\Phi(q,r) \quad = \quad \phi(q)\xi(r), \quad \Phi^{'}(q,r) \quad = \quad \psi_1(q,r) \quad = \quad \phi(q)\xi(r-q).$$

Покажем теперь, что найденные результаты могут послужить для измерения координаты системы I системой II, т.е. что координаты q и r взаимно связаны. (Поскольку q и r обладают непрерывным спектром, т.е. только сколь угодно точно, но не абсолютно точно измеримы, то это может удаться только приближенно.)

Допустим для этой цели, что $\xi(r)$ отлична о нуля только в очень узком интервале $-\epsilon < r_0 < \epsilon$ (т.е. что координата r наблюдателя до измерения известна очень точно). Кроме того, ξ должна, естественно, быть нормированной:

$$||\xi|| = 1, \quad т.е. \quad \int |\xi(r)|^2 dr = 1.$$

Вероятность того, что q лежит в интервале $q_0 - \delta < q < q_0 + \delta$, а r – в интервале $r_0 - \delta^{'} < r < r_0 + \delta^{'}$, будет тогда составлять

$$\int_{q_0-\delta}^{q_0+\delta}\int_{r_0-\delta^{'}}^{r_0+\delta^{'}} |\Psi^{'}(q,r)|^2 dq dr \quad = \quad \int_{q_0-\delta}^{q_0+\delta}\int_{r_0-\delta^{'}}^{r_0+\delta^{'}} |\phi(q)|^2 |\xi(r-q)|^2 dq dr.$$

Если q_0 и r_0 отличаются друг от друга больше чем на $\delta + \delta^{'} + \epsilon$, то она обратится в нуль, т.е. q и r связаны столь сильно, что их разность никогда не может стать $> \delta + \delta^{'} + \epsilon$. Для случая же $r_0 = q_0$ она, если мы выберем $\delta^{'} \geq \delta + \epsilon$, будет из-за допущений относительно ξ равняться $\int_{q_0-\delta}^{q_0+\delta} |\phi(q)|^2 dq$. Так как, однако, мы можем выбрать δ, $\delta^{'}$ и ϵ сколь угодно малыми (они должны быть только бо́льшими нуля!), то это значит, что q и r связаны сколь угодно сильно, а плотность вероятности имеет требуемое квантовой механикой значение $|\phi(q)|^2$.

Ясно, что предположение о больших массах системы и аппарата были сделаны только для упрощения анализа и не связаны ни с какими предположениями о макроскопичности измерения.

Анализ проблемы измерений, научивший тому, что сначала следует рассматривать составную (замкнутую) систему с унитарной эволюцией, и показавший, что к эволюции неунитарной приводит удаление внешних по отношению к выделенной системе переменных, стал основой современного способа описания незамкнутых систем. По глубине и значению для развития теории эти работы стоят рядом с гениальными исследованиями Больцмана в области кинетических уравнений.

Однако, экстраполяция конкретного механизма неунитарной эволюции

$$\hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad \sum_n \langle \phi_n | \hat{\rho} \phi_n \rangle \hat{P}[\phi_n]$$

на произвольные типы измерений в произвольных системах может оказаться преждевременной.

Нетрудно привести простой пример другого типа эволюции.

В квантовой оптике рассматриваются системы, матрица плотности которых изменяется со временем по закону

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_f(t) \quad = \quad \lambda \hat{a}^+ \hat{\rho}_f \hat{a} \quad - \quad \frac{\lambda}{2}\Big(\hat{a}\hat{a}^+ \hat{\rho}_f + \hat{\rho}_f \hat{a}\hat{a}^+\Big).$$

Это уравнение имеет решение

$$\hat{\rho}_f(t+\tau) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{\lambda\tau} - 1)^n}{n!} \hat{B}_n^+ \hat{\rho}_f(t) \hat{B}_n,$$

где

$$\hat{B}_n \quad = \quad \hat{a}^n exp\Big(- \frac{\lambda\tau}{2} \hat{a}\hat{a}^+ \Big).$$

Переход $\hat{\rho}(t)$ в $\hat{\rho}(t+\tau)$ нельзя описать известными нам формулами. Можно обобщить рассуждения фон Неймана на такой случай [**Helliwig, Kraus, 1969, 1970**], [**Kraus, 1971**]: в начальный момент времени $t = 0$ система I(объект) + II(аппарат) находится в состоянии

$$\hat{\rho}_0 \quad = \quad \hat{\rho}_{0I} \otimes \hat{\rho}_{0II}.$$

Матрица плотности системы I в этом случае равна

$$\hat{\rho} \quad = \quad Tr_{II} \hat{\rho}_0. \quad = \quad \hat{\rho}_{0I}.$$

Взаимодействие между малыми системами приводит к моменту времени T матрицу плотности большой системы к

$$\hat{\rho}_T \quad = \quad \hat{S}\hat{\rho}_0\hat{S}^+,$$

где $\hat{S}$ – оператор эволюции. Пусть в момент времени T в системе II производится измерение, которое можно описать некоторым проекционным оператором, $\hat{P}_{II}$. Состояние системы I после этого измерения будет определяться условной матрицей плотности

$$\hat{\rho}_I \quad = \quad Tr_{II}(\hat{P}_{II}\hat{\rho}_T)/Tr(\hat{P}_{II}\hat{\rho}_T).$$

Преобразование $\hat{\rho}_{0I} \to \hat{\rho}_I$ обычно называют **квантовой операцией**. Квантовую операцию можно описать весьма изящной формулой:

$$\hat{\rho}_I \quad = \quad \mathcal{E}(\hat{\rho}_{0I}) \quad = \quad \sum_i \hat{A}_i\hat{\rho}_{0I}\hat{A}_i^+.$$

Пусть в подсистемах I и II выделены базисы ϕ_m и χ_α, так что с оператором $\hat{T}$ в большой системе можно сопоставить матрицу

$$\hat{T} \quad \Leftrightarrow \quad T_{m\alpha n\beta}.$$

Пусть начальному состоянию системы ρ_0 соответствует матрица $\rho_{Imn}\rho_{II\alpha\beta}$, оператору эволюции – $S_{m\alpha n\beta}$. Состояние систему в момент T описывается матрицей

$$\hat{\rho}_{Tm\alpha n\beta} \quad = \quad \sum_{lk\gamma\kappa} S_{m\alpha l\gamma}\rho_{Ilk}\rho_{II\gamma\kappa}S^*{}_{n\beta k\kappa}.$$

Матрицу оператора $\hat{P}_{II}$ можно представить в форме

$$\hat{P}_{\alpha\beta} \quad = \quad \sum_{a\in K} u_{a\alpha}u^*{}_{a\beta},$$

$$\sum_\alpha u_{a\alpha}u^*{}_{b\alpha} \quad = \quad \delta_{ab},$$

где $K = (1, 2...N)$ множество чисел. Поэтому оператору $Tr_{II}(\hat{P}_{II}\hat{\rho}_T)$ соответствует матрица

$$\rho_{mn} \quad = \quad \sum_a\sum_{kl}\sum_{\beta\gamma} D_{amk\beta}\rho_{Ikl}\rho_{II\beta\gamma}D^*{}_{aln\gamma},$$

где

$$D_{amk\beta} \quad = \quad \sum_\alpha u^*{}_{a\alpha}S_{m\alpha k\beta}.$$

Поскольку матрицу плотности $\rho_{II\beta\gamma}$ можно представить в форме

$$\rho_{II\beta\gamma} \quad = \quad \sum_c w_{c\beta}p_c w^*{}_{c\gamma}, \quad p_c \geq 0, \quad \sum_c p_c = 1,$$

то

$$\rho_{mn} \quad = \quad \sum_{ac} p_c A_{acmk} \rho_{Ikl} A_{acln},$$

где

$$A_{acmk} \quad = \quad \sum_{\alpha} D_{amk\alpha} w_{c\alpha}.$$

Остается объединить пары индексов (a, c) в один индекс i, определить матрицы

$$A_{imk} \quad = \quad \sqrt{p_c} A_{acmk},$$

и сопоставить с этими матрицами операторы $\hat{A}_i$ в подпространстве I. В результате получится обещанная формула квантовой операции (формула Крауса):

$$\hat{\rho}_I \quad = \quad \sum_i \hat{A}_i \hat{\rho}_{0I} \hat{A}_i^+.$$

Чтобы избежать возможных недоразумений, полезно запомнить, что операторы $\hat{A}_i$, как правило, не унитарны и не приводят к разложению единицы, поскольку в общем случае справедлива формула

$$\sum_i \hat{A}_i^+ \hat{A}_i \quad \leq \quad \hat{E}.$$

Таким образом, кажется, что более тщательный вывод формул фон Неймана подтверждает заключение о необратимости измерений. Правда, глядя на формулу Крауса, можно заметить, что если бы каждый из операторов $\hat{A}_i$, был кратен некоторому унитарному:

$$\hat{A}_i \quad = \quad C_i \hat{U}, \quad \hat{U}^+ \quad = \quad \hat{U}^{-1}, \quad \sum_i |C_i|^2 \quad = \quad 1,$$

то начальная и конечная матрицы плотности связывались бы соотношением

$$\hat{\rho}_I \quad = \quad \hat{U} \hat{\rho}_{0I} \hat{U}^+, \quad \hat{U}\hat{U}^+ \quad = \quad \hat{E},$$

означающим, что начальное состояние системы однозначно определяется ее конечным состоянием.

Разумеется, можно привести множество примеров измерений, противоречащих высказанным предположениям. Среди них – способ определения энергии атома, когда измерительным аппараторм служит центр масс атома. Однако, нетрудно заметить, что измерения, как правило, оказываются необратимыми в силу своей универсальности – возможности применить их к любой физической системе. Может быть, следует сформулировать задачу несколько иначе: пусть оператор $\hat{\rho}_0$ описывает некоторый ограниченный круг состояний. Эти состояния можно выделить, например, таким образом: пусть $\hat{P}_M$ – проекционный оператор, выделяющий некоторое подпространство из пространства состояний системы, и $\hat{\rho}_0$ удовлетворяет соотношению:

$$\hat{\rho}_0 \quad = \quad \hat{P}_M \hat{\rho}_0 \hat{P}_M.$$

В этом случае действие операторов $\hat{A}_i$ в подпространстве M можно свести к унитарным операторам

$$\hat{A}_i \hat{P}_M \quad = \quad d_i \hat{U}_i \hat{P}_M.$$

Если определить операторы

$$\hat{P}_i \quad = \quad \hat{U}_i \hat{P}_M \hat{U}_i^+,$$

то нетрудно установить следующее: операторы $\hat{P}_i$ – проекционные: $\hat{P}_i^2 = \hat{P}_i$, а матрицу $\hat{\rho}$ можно представить в форме

$$\hat{\rho} \quad = \quad \sum_i \hat{P}_i (|d_i|^2 \hat{U}_i \hat{\rho}_0 \hat{U}_i^+) \hat{P}_i.$$

Полученная формула удивительным образом напоминает спектральное разложение оператора в сумму попарно ортогональных операторов. Предположим, что операторы $\hat{P}_i$ также обладают этим свойством:

$$\hat{P}_i \hat{P}_j \quad = \quad \delta_{ij} \hat{P}_i.$$

Если не обращать внимания на сложности, связанные с учетом конечности областей определения, можно получить формальное равенство

$$\hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j \quad = \quad |d_j|^2 \hat{U}_j \hat{\rho}_0 \hat{U}_j^+.$$

Чтобы обойти трудности, обусловленные конечностями этих областей, определим квантовую операцию

$$\mathcal{R}(\hat{\rho}) \quad = \quad \sum_j \hat{U}_j^+ \hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j \hat{U}_j \quad + \quad \hat{Q} \hat{\rho} \hat{Q},$$

где

$$\hat{Q} \quad = \quad \hat{E} - \sum_j \hat{P}_j.$$

Простые выкладки показывают, что произведение операций $\mathcal{E}$ и $\mathcal{R}$ не изменяет матрицу ρ_0:

$$\mathcal{R} \otimes \mathcal{E}(\hat{\rho}_0) \quad = \quad \hat{\rho}_0.$$

Таким образом, зная результат измерения $\mathcal{E}$, можно восстановить начальную матрицу плотности $\hat{\rho}_0$. Этот результат можно сформулировать таким образом: **измерение**(т.е. квантовая операция) $\mathcal{E}$ обратимо на подпространстве M.

Правда, в приведенном доказательстве остались некоторые пробелы. Пока еще неизвестно, когда проекционные операторы $\hat{P}_i$ попарно ортогональны. Все вопросы разрешаются, если сформулировать критерий обратимости операции $\mathcal{E}$ [**Bennet et all 1996**]:

квантовая операция E обратима на подпространстве M в том и только в том случае, если справедливы соотношения

$$\hat{P}_M \hat{A}_i^+ \hat{A}_j \hat{P}_M \quad = \quad m_{ij} \hat{P}_M,$$

с положительно определенной матрицей m_{ij}.

Эти соотношения равносильны как условиям существования операторов $\hat{U}_j$, так и попарной ортогональности операторов $\hat{P}_j$.

Полезно привести уравнение, описывающее эволюцию матрицы плотности подсистемы. На первый взгляд оно выглядит несколько необычно, но эта необычность связана с явным учетом влияния одной подсистемы на эволюцию другой. Если справедлива формула Крауса, то матрица плотности в момент t должна представляться выражением

$$\hat{\rho}_I(t) \quad = \quad \sum_i \hat{A}_i(t)\hat{\rho}_{0I}\hat{A}_i^+(t),$$

причем

$$\sum_i \hat{A}_i(t)\hat{A}_i^+(t) = \hat{E}.$$

Найдем изменение матрицы плотности за бесконечно малое время dt:

$$\delta\hat{\rho}_I \quad = \quad \sum_i \delta\hat{A}_i\hat{\rho}_{0I}\hat{A}_i^+ \quad + \quad \sum_i \hat{A}_i\hat{\rho}_{0I}\delta\hat{A}^+{}_i.$$

Условие нормировки суммы операторов $\hat{A}_i(t)$, которое будет выполняться в любой момент времени требует соблюдения соотношения

$$\sum_i \hat{A}_i^+\delta\hat{A}_i \quad + \quad \delta\hat{A}^+{}_i\hat{A}_i \quad = \quad 0.$$

Для дальнейшего удобно выделить среди индексов i значение 0, а оставшиеся обозначать буквами $\{a, b, ...\}$. Изменение матрицы плотности будет пропорционально dt, если

$$A_0 \quad = \quad \hat{E} \quad + \quad \hat{B}_0 dt,$$
$$A_a \quad = \quad L_a\sqrt{dt}$$

при условии, что

$$\hat{B} \quad + \quad \hat{B}^+ \quad = \quad -\sum_a \hat{L}_a^+\hat{L}_a.$$

Представляя $\hat{B}$ в форме

$$\hat{B} \quad = \quad \hat{K} \quad - \quad i\hat{H},$$

получим *уравнение Линдблада*:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} \quad = \quad -i[\hat{H}, \hat{\rho}] \quad + \quad \sum_a \Big(\hat{L}_a\hat{\rho}\hat{L}_a^+ + -\frac{1}{2}\hat{L}_a^+\hat{L}_a\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{L}_a^+\hat{L}_a\Big).$$

Если все операторы $\hat{L}_a$ равны нулю, то уравнение сводится к обычному уравнению для матрицы плотности. Дополнительные слагаемые описывают изменения состояния системы I, вызываемые взаимодействием с резервуаром. *Операторы Линдблада*

$\hat{L}_a$ и оператор $\hat{K}$, который определяет скорость распада состояний системы I, связаны соотношением

$$\hat{K} \quad = \quad -\frac{1}{2}\sum_a \hat{L}_a^+ \hat{L}_a.$$

ДЕТИ И ЭЙНШТЕЙН

> **63** ^{8} ...подлинно они народ Мой, дети, которые не солгут...
>
> **Книга пророка Исаии.**

Однажды Алиса послала (классической почтой) в подарок Бобу альбом репродукций своего земляка Эшера [**Esher 1971**]. Досконально изучив произведения этого странного художника, Боб внимательно прочитал и одну из напечатанных в этом альбоме статей, посвященных творчеству Эшера. Статья была написана известным математиком Коксетером, и в ней говорилось о математических истоках вдохновения художника. Были приведены слова самого художника:

> Хотя в области точных наук я не более, чем невинное дитя, часто кажется, что математики мне ближе, чем мои друзья художники.

Коксетер полностью присоединялся к мнению Эшера, считая, например, что гравюры "Мёбиусов лист I" и "Мёбиусов лист II" могут служить замечательным введением в элементарный курс топологии. Однако, у Боба возникли совсем другие ассоциации. Он написал Алисе, что литография "Водопад", на которой не было платоновских многогранников, а поражал зрителя поток воды, который низвергался вниз, чтобы потом, вопреки законам тяготения, естесвеннейшим образом вновь подняться к уступу, почему-то напомнила ему о квантовой механике.

Объедив свои усилия, Алиса и Боб пришли к заключению, что странный плод фантазии Эшера заставляет Боба думать об Эйнштейновских рассуждениях по поводу квантовой реальности, и Бобу теперь (вопреки первоначальной вере) все чаще кажется, что квантовую механику нельзя свести к классической.

Дело в том, что Боб, после того как у него прошло потрясение после знакомства с соотношением неопределенностей Гайзенберга, рассудил следующим образом. Раз соотношения неопределенностей отменить нельзя, то с этим ничего не поделаешь. Но, может быть, можно поступить следующим образом: выделим из переменных системы совместимые наблюдаемые, которым соответствуют коммутирующие операторы, и ограничимся ими. Все эти переменные, как и мы знаем, будут функциями одной наблюдаемой с чисто дискретным невырожденным спектром. Боб решил, что ему ничто не может помешать рассмотреть классическую систему (может быть с большим числом степеней свободы) и состояние квантовой системы описать с помощью классических – "скрытых" переменных. Он уже попробовал описать чисто классически систему, где единственная переменная это – спин $\frac{1}{2}$, и него все получилось (Эти исследования были напечатаны: см. [**Kochen, Specker 1967**]). Но дальше дела пошли хуже – вместо ясных мыслей или формул на бумаге появлялись одни только странные фигуры. Боб спросил Алису, не может ли она что-нибудь посоветовать. Алиса, будучи девушкой рассудительной, посоветовала Бобу мыслить логически. Тогда Боб спросил: "А что такое квантовая логика?" Вскоре молодые люди выяснили, что квантовая логика появилась в 1936 году, когда Биркгоф и фон Нейман опубликовали статью под названием "Логика квантовой механики" [**Birkhoff, Neumann 1936**]. Однако на возможность существования особой квантовой логики фон Нейман, по-видимому впервые, обратил внимание еще в своей знаменитой книге [**Neumann 1932**]:

> Наряду с физическии величинами $\mathcal{R}$ существует еще нечто, являющееся предметом физики: именно альтернативные свойства системы $\mathcal{S}$. Альтернативным свойством будет, например, что некоторая величина $\mathcal{R}$ принимает определенное значение λ, или что значение величины $\mathcal{R}$ положительно, или что значения двух одновременно измеримых величин $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$ равняются одновременно λ и μ, или что сумма квадратов этих значений больше 1 и т.п. Величинам отвечают, как мы только что установили, гипермаксимальные эрмитовы операторы ("самосопряженные операторы" в принятой теперь терминологии) $\hat{R}$, $\hat{S}$,..., что же будет соответствовать альтернативным свойствам?
>
> Мы можем сопоставить каждому альтернативному свойству S величину, определив ее так: каждое измерение, разрешающее альтернативу наличия или отсуствия свойства $\mathcal{S}$, рассматривается как измереие этой величины; при этом ее значение равно 1, если $\hat{S}$ имеет место, и нулю в противном случае. Величину, которая соответствует альтернативному свойству $\hat{S}$, будем также обозначать через $\hat{S}$. Такие величины принимают лишь значения 0 и 1, и обратно, любая величина $\mathcal{R}$, принимающая лишь эти значения, соответствует альтернативному свойству $\mathcal{S}$, которое, очевидно, состоит в следующем: "Значение величины $\mathcal{R}$ не равно 0". Поэтому для величин $\mathcal{S}$, сопоставляемых альтернативным свойствам, этот признак является характерным.
>
> То обстоятельство, что $\mathcal{S}$ принимает лишь значения 0,1, может быть сформулировано также следующим образом: его подстановка в полином $F(\lambda) = \lambda - \lambda^2$ тождественно обращает последний в нуль. Если величине $\mathcal{P}$ соответствует оператор $\hat{S}$, то величине $F(\hat{S})$ соответствует оператор $\hat{F}(P) = \hat{P} - \hat{P}^2$; поэтому наше условие гласит: $\hat{P} - \hat{P}^2$, или $\hat{P} = \hat{P}^2$. Иными словами: оператор $\hat{P}$ величины $\mathcal{P}$ - это проекционный оператор.
>
> Итак, альтернативным свойствам $\mathcal{P}$ сопоставляются проекционные операторы $\hat{P}$ или замкнутые линейные многообразия M, если рассматривать наряду с проекционными операторами $\hat{P} = P_{\mathcal{M}}$ и принадлежащие им линейные многообразия $\mathcal{M}$.

После этого нетрудно определить *логические операции.*

Пусть переменным некоторой системы соответствуют линейные операторы, действующие в n-мерном гильбертовом пространстве **H**.

Если высказываниям p и q соответствуют подпространства M_p и M_q то

1 логической операции "AND" соответствует операция пересечения подпространств:

$$p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad M_{p\wedge q} \quad = \quad \{x | x \in M_p, x \in M_q\};$$

2 логической операции "OR" соответсвует операция объединения подпространств:

$$p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad M_{p\vee q} \quad = \quad M_p \oplus M_q \quad = \quad \{x | x = y\alpha + z\beta, \alpha, \beta \in \mathbf{C}, y \in M_p, z \in M_q\};$$

3 логической операции "NOT" соответствует операция перехода к ортогональному подпространству:
если $p^{'} = NOT$ p, то

$$M_{p'} \quad = \quad \{x | \langle x | y \rangle = 0, y \in M_p\};$$

4 с тривиальным утверждением 1, которое *всегда верно*, сопоставляется все гильбертово пространство $\mathcal{H}$:

$$M_1 \quad = \quad \mathcal{H};$$

5 с абсурдным утверждением 0, которое *всегда неправильно*, сопоставляется **нулевой вектор** пространства:

$$M_0 \quad = \quad 0;$$

6 логическая операция *импликации* "$\rightarrow$" сопоставляется с теоретико – множественным соотношением "включения" $\subset$:

$$p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad M_p \subset M_q.$$

Альтернативные свойства не являются специфической особенностью квантовой механики. В классической физике можно определить аналогичные величины. Оказывается, что построенная таким образом логика классической физики определяется соотношениями, характерными для Булевых алгебр с их свойствами дистрибутивности:

$$a \cap (b \cup c) \quad = \quad (a \cap b) \cup (a \cap c),$$
$$a \cup (b \cap c) \quad = \quad (a \cup b) \cap (a \cup c).$$

В квантовой логике закон дистрибутивности в его общей форме отсутствует. В этом легко убедиться на примере простейшего двухмерного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Пусть M и $M_\perp$ – его взаимно ортогональные подпространства, а N – еще одно одномерное подпространство, не совпадающее ни с M, ни с $M_\perp$. Тогда

$$N \cap (M \cup M_\perp) \quad = \quad N \cap \mathcal{H} \quad = \quad N.$$

но

$$N \cap M \quad = \quad 0 \quad = \quad M_\perp.$$

Недистрибутивность исчисления в квантовой логике означает, что законы классической физики не могут быть справедливы в квантовой механике.

Однако, сторонники всеобщей справедливости классических законов могут также сослаться на строгий математический факт. **Дистрибутивность операций квантовой логики может оказаться справедливой для некоторых вполне определенных множеств.** Чтобы описать их, полезно дать дополнительные определения. Подпространства M и N называют *совместимыми*, если выполняется соотношение

$$(M \cap N) \cup (M \cap N_\perp) \quad = \quad M.$$

Из только что приведенного равенства следует, что

$$(N \cap M) \cup (N \cap M_\perp) \quad = \quad N.$$

Таким образом, соотношение совместимости симметрично, поэтому его обычно обозначают символом

$$M \leftrightarrow N.$$

Можно сформулировать удобный признак совместимости. Для этого вводят понятие *разделенности.*Подпространства M и N называют разделенными, если $M \in N_\perp$, где $N_\perp$ – ортогональное дополнение к пространству N. Из только что приведенного соотношения следует соотношение $N \in M_\perp$, так что соотношение разделенности симметрично. Его обычно обозначают символом $M \perp N$. Пусть существуют три попарно разделенных подпространства M_1, N_1 и K. Подпространства M и N совместимы, если

$$M \quad = \quad M_1 \cup K, \quad N \quad = \quad N_1 \cup K.$$

Оказывается, что для совместимых подпространств дистрибутивный закон справедлив: если L, M и N попарно совместимы, то

$$L \cap (M \cup N) \quad = \quad (L \cap M) \cup (L \cap N),$$

$$L \cup (M \cap N) \quad = \quad (L \cup M) \cap (L \cup N).$$

С набором совместимых подпространств можно связать соответствующие проекционные операторы и построить некоторые наблюдаемые. Все они будут попарно коммутировать и их можно будет представить как функции одного и того же оператора:

$$\hat{T}_i \quad = \quad f_i(\hat{R}).$$

Иначе говоря, операторам $\hat{T}_i$ соответствуют одновременно измеряемые величины. Поскольку операции с этими величинами дистрибутивны, то можно подумать, что все происходящее с совместимыми величинами можно свести к операциям классической физики. Алиса и Боб стали искать простые, но не совсем тривиальные наборы совместимых величин и набрели на пример, придуманный Коэном и Шпекером:рассмотрим систему, динамические переменные которой представляют собой три составляющие момента количества движения $\hat{J}_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ и система находится состоянии с квантовым числом $j = 1$. В этом случае операторы момента количества движения связаны соотношением

$$\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 \quad = \quad 2\hat{E}$$

Квадраты составляющих момента количества движения в случае, если число $j = 1$, обладают замечательным свойством: они попарно коммутируют.

$$\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 \quad = \quad 2\hat{E} \quad \Rightarrow [\hat{J}_\alpha^2, \hat{J}_\beta^2] = 0.$$

Это означает, что квадраты составляющих можно представить как функции некоторой наблюдаемой с невырожденным спектром:

$$\hat{J}_\alpha^2 \quad = \quad F_\alpha(\hat{U}),$$

и поэтому они будут соизмеримы. Таким образом существуют состояния, в которых каждая из величин $\hat{J}_1^2$, $\hat{J}_2^2$ и $\hat{J}_3^2$ имеет точное значение, причем две из них принимают значение 1, а третья – 0. Отложив в сторону статью Коэна и Шпекера, Алиса и Боб решили представить все это как можно наглядней. Они представили себе три взаимно ортогональных единичных вектора, вписанными в сферу единичного радиуса. Концы базисных векторов определяют на сфере три точки, разделенные углами, равными $\frac{\pi}{2}$. С двумя из этих точек можно сопоставить числа 1, а с одной – 0. Алиса и Боб решили покрасить точки, соответствующие единицам, красной краской, а точку, связанную с нулем – зеленой. В дальнейшем Алиса и Боб употребляли выражения не только "красная" и "зеленая" точка, но также "красный" и "зеленый" вектор. Может быть, нас это не запутает. Проделав все это Алиса и Боб увидели, что можно рисовать что-то a la Esher, заставляя каждую зеленую точку порождать около себя две красные точки. Для этого нужно мысленно построить ортогональный репер, один вектор которого – это зеленый вектор, совпадающий с зеленым вектором первоначального репера, а красные векторы повернуть на некоторый угол по сравнению с первоначальными. Точно таким же образом можно заставить и красную точку породить две точки, только на этот раз красную и зеленую. квантовая живопись понравилась молодым людям.

Однако вскоре они обнаружили, что если в их картине найдутся две точки разного цвета, угол между которыми меньше, чем $tan^{-1}(0.5)$, то всегда можно найти такую последовательность точек, которую нельзя раскрасить по принятому правилу: кисточка рано или поздно наткнется на уже окрашенную точку, а правила раскраски потребуют покрасить ее в другой цвет. Многократно сталкиваясь с такой оказией, Алиса и Боб решили разобраться во всем досконально и обратились к статье Мермина [**Mermin 1993**]). Следуя его рецептам, они выбрали три попарно ортогональных вектора, обозачили два красных вектора как $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, зеленый вектор назвали $\vec{e}_3$ и предположили, что существует красный вектор

$$\vec{a} \quad = \quad \vec{e}_2 D \quad + \quad \vec{e}_3.$$

Поскольку Алису и Боба интересовали только направления векторов, они мало заботились об их нормировке.

После этого открытия посыпались как из рога изобилия.

1 Поскольку не может быть двух перпендикулярных зеленых векторов, то любой вектор вида

$$\vec{c} \quad = \quad \vec{e}_1 C + \vec{e}_2$$

красный. **2** Поскольку $\vec{a}$ и $\vec{e}_1$ – красные векторы, то вектор

$$\vec{d} \quad = \quad \vec{e}_1/C - \vec{a}/D$$

красный.

3 Красные векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ ортогональны, поэтому любая их линейная комбинация, в частности

$$\vec{g} \quad = \quad \vec{c} \quad + \quad \vec{d} \quad = \quad (C + 1/C)\vec{e}_1 - \frac{1}{D}\vec{e}_3$$

красный вектор.

4 Поскольку $C + 1/C \geq 2$, то можно выбрать такое число D ¡ 0.5, что вектор $\vec{e}$ будет пропорционален разности

$$\vec{g} \quad \sim \quad \vec{e}_1 \quad - \quad \vec{e}_3.$$

5 Если изменить в предыдущих рассуждениях знак C на обратный, то можно найти еще один красный вектор

$$\vec{h} \quad = \quad -\vec{e}_1 \quad - \quad \vec{e}_3.$$

6 Любая линейная комбинация векторов $\vec{g}$ и $\vec{h}$, в том числе и вектор

$$\vec{e}_3 \quad = \quad -\frac{1}{2}\vec{g} \quad -\frac{1}{2}\vec{h} - -$$

красный вектор. Но кто-то, Алиса или Боб, уже выкрасил его в зеленый цвет.

Остается только заметить, что красный вектор $\vec{a}$, из-за которого и возникли все неприятности, образует с зеленым вектором $\vec{e}_3$ угол $\theta = tan^{-1}(D)$. Поэтому большое полотно можно создать только при условии, что в $(2-3)$-плоскости не окажется красных точек, образующих с осью Oz угол, меньший чем $\frac{\pi}{8} < tan^{-1}(0.5)$. Принимая вторую сторону угла за новую ось Oz, и продолжая покраску, можно убедиться в том что она не закончится преждевременно, если только ось Oy не будет того же цвета, что и ось Oz. Продолжая те же самые действия в (1-2)-плоскости, придется потребовать, чтобы и ось Ox оказалась зеленой. Но все происходящее снова противоречит правилам окраски. Таким образом на сфере всегда можно найти некоторую конфигурацию точек, которую нельзя раскрасить, пользуясь принятыми правилами: рано или поздно найдется точка, которая потребует разных цветов.

Алиса и Боб, хорошенько обдумав происшедшее, сообщили Еве, что доказали невозможность введения в квантовую механику скрытых параметров, однако Ева из их рассказа ничего не поняла. Пришлось снова обратиться к Коэну и Шпекеру. Выяснилось, что судьба квантовой механики с результатом решения головоломки была связана именно в их статье [**Kochen, Specker 1967**]. Коэн и Шпекер рассуждали так: целью определения скрытых параметров является замена квантовой логики чем-то другим. Для этого, как минимум, нужно определить на множестве элементов, образующих квантовую логику (т.е. подпространств гильбертового пространства)

$$QL \quad = \quad \{A, B, ..., M, ...\}$$

некоторую функцию $h(M)$, которая сохраняла бы операции квантовой логики:

$$h(M \oplus N) \quad = \quad h(M) \quad + \quad h(N), \quad h(M \otimes N) \quad = \quad h(M)h(N),$$

и принимала вполне определенные значения на нулевом и единичном элементах:

$$h(0) = 0, h(\mathcal{H}) = \infty.$$

Функций с такими свойствами существует сколько угодно, но для успешного возвращения блудного сына (квантовой механики) в лоно классических теорий нужно, чтобы функция h принимала значения 0 или 1 на любом элементе QL. В этом случае язык квантовой логики можно будет перевести на язык классических теорий - булеву алгебру.

Коэн и Шпекер показали, что это невозможно, приведя свой знаменитый ныне контрпример. Они рассмотрели совокупность подпространств трехмерного евклидова пространства E_3. В этом случае достаточно изучить поведение функции h на трех попарно ортогональных направлениях, s_1, s_2, s_3 т.е. свести множество элементов QL к точкам на единичной сфере. Функция h должна обладать такими свойствами:

$$h(s_1) \cup h(s_2) \cup h(s_3) \quad = \quad h(s_1 \cup s_2 \cup s_3) \quad = \quad h(E_3) \quad = \quad 1.$$

$$h(s_\alpha) \cap h(s_\beta) \quad = \quad h(s_\alpha \cap s_\beta) \quad = \quad h(0) \quad = \quad 0.$$

для $\alpha \neq \beta$.

Таким образом, функция $h(s)$ принимает значение 1 в точности на одном из попарно ортогональных направлений.

Выяснив эти свойства функции h, Коэн и Шпекер приступили к построению своего знаменитого графа. Они сопоставили точкам a на сфере точки u(a) на плоскости, причем точки u(a), соответствующие ортогональным точкам на сфере соединяли на графе ребрами. Коэн и Шпекер построили граф Γ_2, состоящий из 117 точек. Он получился после объединения 15 графов Γ_1 и отождествления некоторых точек в получившейся после объединения диаграмме. Можно показать, что не существует функции h, которая приписывала бы точкам графа значения 0 или 1. Обратившись к графу Γ_1, можно установить, что равенство $h(a_0) = 1$ означает, что и $h(a_9) = 1$. Поскольку точки p_0, q_0, r_0 графа Γ_2 расположены в вершинах одного треугольника, то значение функции h в одной из этих точек равно единице. Пусть $h(p_0) = 1$. В этом случае должны выполняться равенства $h(q_0) = h(r_0) = 0$. Поэтому $h(p_1) = 1$. Передвигаясь по графу Γ_2 можно установить равенства

$$h(p_2) \quad = \quad h(p_3) \quad = \quad h(p_4) \quad = \quad h(q_0) \quad = \quad 1.$$

Но равенства $h(p_0) = 1$ и $h(q_0) = 1$ взаимно исключают друг друга. Полученное противоречие показывет, что не существует функции h, сопоставляющей с точками графа Γ_2 числа 0 или 1.

Коэн и Шпекер нашли конкретную физическую систему, к которой можно непосредственно применить только что приведенные чисто математические рассуждения. Это – атом ортогелия в состоянии 2^3S_1 – состояния атома гелия с полным спином $S = 1$ с наименьшей возможной энергией. Орбитальный момент атома в этом состоянии равен нулю. Атом в таком состоянии *метастабилен*, т.е. в первом приближении можно считать, что он живет сколь угодно долго. Если поместить атом гелия в слабое электрическое поле E с ромбической симметрией, то эффективный гамильтониан атома примет вид

$$\hat{H} \quad = \quad \hat{H}_0 \quad + \quad \hat{H}_S,$$

где гамильтониан свободного атома $\hat{H}_0$ не содержит спиновых переменных, а оператор $\hat{H}_S$ равен выражению

$$\hat{H}_S \quad = \quad a\hat{S}_x^2 \quad + \quad b\hat{S}_y^2 \quad + \quad c\hat{S}_z^2,$$

в котором числа a, b, c не равны друг другу. Спектр этого оператора не вырожден (собственные значения $\hat{H}_S$ равны a+b,b+c,c+a), и операторы $\hat{S}^2_{x,y,z}$ можно считать его функциями.

$$\begin{aligned}
\hat{S}^2_x &= (a-b)^{-1}(c-a)^{-1}(\hat{H}_S-(b+c)(\hat{H}_S-2a),\\
\hat{S}^2_y &= (b-c)^{-1}(a-b)^{-1}(\hat{H}_S-(c+a)(\hat{H}_S-2b),\\
\hat{S}^2_z &= (c-a)^{-1}(b-c)^{-1}(\hat{H}_S-(a+b)(\hat{H}_S-2c),
\end{aligned}$$

Измеряя поправку к энергии основного состояния, можно найти собственные значения операторов квадратов составляющих спина. Например, если $\Delta E =$ a+b, то значения $\hat{S}^2_x$ и $\hat{S}^2_y$ равны 1, а $\hat{S}^2_z$ – нулю. Узнав о работе Коэна и Шпекера Алиса и Боб, по их совету, решили поговорить с физиком X, не сомневающимся в том, что скрытые переменные существуют, и что они определяют значения измеряемых значений всех наблюдаемых системы. Они выбрали направление s – одно из 117 направлений из графа Коэна и Шпекера, и задали X вопрос: "Может ли составляющая полного спина ортогелия, быть нулю вдоль оси s?" После утвердительного ответа Алиса и Боб сообщили ему, что именно вдоль этого направления спин ортогелия не может иметь определенного направления.

Работы Коэна и Шпекера (мы лишены возможности сделать какой-либо обзор работ в этом направлении) внесли окочательную ясность в понятие физической реальности. По мере понимания квантовой теории это понятие все дальше отходит от классических представлений, которые так страстно отстаивал Эйнштейн. Молодые создатели квантовой теории, взяв за основной метод исследования оценку всего мерой, числом и весом, пришли к неожиданному, но вполне обоснованному выводу – свойства состояния физической системы определяются не только конкретными значениями связанных с системой наблюдаемых, но и всей совокупностью альтернативных свойств системы. Квантовая логика еще столь мало разработана, что трудно оценить все последствия нового мышления. Это будет содержанием игр молодых людей следующих поколений. Но сколь бы далеко ни отошли мы от истока квантовой науки, останется непреложным следующее: ее развивали не только гениальные изобретения Паули, Гайзенберга и фон Неймана, но и яростный критицизм Эйнштейна.

ЛИТЕРАТУРА

Бор 1928 – Н.Бор, УФН **8**,306-337.

Бор 1959 – Успехи физических наук **67**,вып.1, 37-42.

Бор 1971 – Н.Бор, Избранные научные труды, т.2, "Наука", Москва.

Борн 1977 – М.Борн, Размышления и воспоминания физика, Наука, Москва,1977.

Борн - Эйнштейн – Переписка А. Эйнштейна и М. Борна. Эйнштейновский сборник, 1971; Эйнштейновский сборник, 1972.

Гайзенберг 1989 – В. Гейзенберг, Физика и философия. Часть и целое, Москва,

Зоммерфельд 1956 – А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, т.2, Москва, ГТТИ, 1956.

Квантовые вычисления I 1999 – Квантовые вычисления: за и против, Ижевск.

Квантовые вычисления II 1999 – Квантовый компьютер и квантовые вычисления, Ижевск.

Ландау, Лифшиц 1989 – Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Квантовая механика, издание четвертое, Москва, "Наука".

Мандельштам 1939 – Л.И.Мандельштам, Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике (1939), Наука, Москва, 1972.

УФН 1936 – Успехи Физических Наук, т.16, вып.4.

Фок 1938 – В.А.Фок, Под знаменем марксизма, **1**, 149.

$\mathbf{A}\rho\iota\sigma\tau\mathbf{o}\tau\epsilon\lambda\eta\varsigma$ – Аристотель, О душе. 416b,33-35. Сочинения т.1,Москва, 1976.

$\Theta o\upsilon\kappa\upsilon\delta\iota\delta\upsilon$ – Фукидид, История, 1991, Наука, Ленинград.

F.Beck, J.C.Eccles 1992 – Quantum aspects of brain activity and role of consciouness, Proc. Natl. Acad. Sci USA, **89**, 11357-11361.

Bell,1987 – J.S. Bell, Speakable and unspeakable in quantum mechanics, (10. Einstein–Podolsky–Rosen experiments). Cambridge University Press, 1987.

Bennett et al. 1993 – Charles H. Bennet, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres and William K. Wooters, Phys. Rev. Letters **70**, 1895.

Bennett et al. 1996 – C.H. Bennet, D.P. DiVincenco, J.A. Smolin, W.K. Wootters, Phys. Rev. A**54**, 3824.

Birkhoff, Neumann 1936 – G.Birkhoff, J.Neumann, Annals of Math. **37**, 823.

Bohr 1928a – N.Bohr, Nature **121**, 580-590. Русский перевод: [Бор 1971].

Bohr 1928b – N.Bohr, Naturwissenschaften **16**, 245-257. Русский перевод: [Бор 1971].

Bohr 1935a – N.Bohr, Quantum mechanics and physical reality, Nature **136**, 65. Русский перевод: [Бор 1971].

Bohr 1949 – N.Bohr, Discussion with Einstein on Epistomolgical Problems in Atomic Physics. "A.Einstein, philosopher- scientist", Evanston, 1949. Русский перевод: [Бор 1971].

Bohr,Kramers,Slater 1924 – Bohr, Kramers, Slater Philosophical Magazin, **47**, 485; Zeits. f. Phys. **24**, 69.

Born 1924 – M.Born, Zeits.f.Physik **26**, 379. Русский перевод в [**Борн,1977**].

Born, Jordan 1925 – M. Born, P. Jordan, Zs. Phys., **34**, 858.

Born, Heisenberg, Jordan 1926 – M.Born, W.Heisenberg,P.Jordan, Zs. f. Phys. **35**, 557.

Born, Wiener 1926 – M.Born,N.Wiener, Zeits.f.Physik **36**, 174.

Born 1926 – M.Born, Zeits.f.Physik **37**, 863.

Born 1926 – M. Born, Zs. f. Phys. **38**, 803, поступила в редакцию 21 июля 1926 г.

Bridgman 1936 – P.W. Bridgman, The Nature of Physical Theory, Dover, New York.

Dirac 1925 – P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc. **A109**, 642.

Dirac 1926 – P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc. **A113**, 621, поступила в редакцию 2 декабря 1926 г.

Dirac 1927 – P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc. **A114**, 243.

Dirac 1958 – P.A.M.Dirac, The principles of quantum mechanics, Oxford. Русский перевод: П.Дирак, Принципы квантовой механики, Москва, 1979.

Eccles 1986 – J.G. Eccles, Proc.R.Soc.Lond **B227**,411-421.

Einstein 1928 – *Electrons et protons.* Rapports et discussions du cinquieme Conseil de physique. Bruxelles du 24 an 29 octobre sous de l'Institut International de physique Solvay, p. 253-256. Paris, Gautier-Villars et C^{ie}, editeurs 1928. Русский перевод: А.Эйнштейн, Собрание научных трудов, т.III, "Наука", Москва, 1966.

Einstein 1936 A.Einstein, Physics and reality, Journal of the Franklin Institute, **221**,349. Русский перевод:А.Эйнштейн, Под знаменем марксизма, стр. 126-151, 1937.

EPR 1935 – Einstein A., Podolsky B., Rosen N., Phys. Rev. **47**, 777.

ETP 1931 – Einstein A., Tolman R. C., Podolsky B., Phys. Rev. **37**, 780.

Epstein, Ehrenfest 1924 – P.Epstein, P Eherenfest, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **10**, 133.

Esher 1971 – The world of M.C.Esher, Harry N. Abrams, Incorporated, New York.

Furry 1936 – W.H.Furry, Phys. Rev. **49**,393,476.

Goldberger, Watson 1964 – Collision Theory. Русский перевод: Теория столкновений, 1967.

Heisenberg 1925 – W. Heisenberg, Zeits.f.Physik, **33**, 879, поступила в редакцию 29 июля 1925 г.

Heisenberg 1927 – W.Heisenberg, Zeits.f.Physik, **43**, 172, поступила в редакцию 23 марта 1927 г.

Heisenberg 1929 – W.Heisenberg, Die Naturwissenschaften **17**, 490.

Heitler 1961 – W.Heitler, Erwin Schrödinger, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, v.7. London 1961. Русский перевод: Эрвин Шредингер, Новые пути в физике, Наука, Москва, 1971.

Hellwig, Kraus 1969 – K.-E. Hellwig, K. Kraus, Commun. Math. Phys., **11**, 214.

Hellwig, Kraus 1970 – K.-E. Hellwig, K. Kraus, Commun. Math. Phys., **16**, 142.

Hilbert, Nordheim, Neumann 1927 – D.Hilbert, L.Nordheim, J von Neumann, Math. Ann. **98**, 1.

Hoffmann 1973 – Hoffmann Banesh, Albert Einstein: creator and rebel, London 1973. Русский перевод: Альберт Эйнштейн: творец и бунтарь, Прогресс, 1983.

Jammer 1974 – M.Jammer, The Philosophy of Quantum Mechanics, Willey, New York.

Jordan 1926 – P.Jordan, Zeits.f.physik, **40**, 809, поступила в редакцию 18 декабря 1926 г.

Kennard 1927 – Kennard, Zeits. f. Phys. **44**, 326.

Kochen, Specker 1967 – S. Kochen, E.P.Specker, Journ. of Mathematics and Mechanics, **17**, 59.

Kraus 1971 – K. Kraus, Annals of Phys. **64**, 311.

Lanczos 1926 – K.Lanczos, Zeits.f.Physik **35**, 812.

Landau 1927 – L.Landau, Zeits.f.Physik **45**, 430.

London 1923 – F.London. Über die Bedingungen der Möglichkeit einer deduktiven Theorie, Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung **6**, 335-384 (1923).

London, Bauer 1939 – F.London, E.Bauer, La Theorie de l'Observation en Mecanique Quantique, Paris. Английский перевод в Quantum Theory and Measurement. J.A.Wheeler, W.H. Zurek, eds., 1983.

Mermin 1993 – N.David Mermin, Rev. Mod. Phys. **65**, 803.

Neumann 1927a – J von Neumann, Gött. Nach. pp. 1 – 57. Поступила в редакцию 20 мая 1927 г.

Neumann 1927b – J von Neumann, Gött. Nach. pp. 245 – 272. Поступила в редакцию 11 ноября 1927 г.

Neumann 1932 – Johann v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932. Русский перевод: Иоганн фон Нейман, Математические основы квантовой механики, Москва, 1964.

Pauli 1925a – W. Pauli, Zeits.f.Physik **31**, 373. Поступила в редакцию 2 декабря 1924 года.

Pauli 1925b – W. Pauli, Zeits.f.Physik **31**, 765. Поступила в редакцию 16 января 1925 года.

Pauli 1933 – W. Pauli, Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik. In Handbuch der Physik, H.Geiger und Sheel, vol. 24, Springer-Verlag. Русский перевод: В.Паули, Общие принципы волновой механики, ОГИЗ, Москва, 1947.

Pauli 1947 – Dialectica **1**, 176.

Pauli 1948 – W. Pauli, Naturwiss. **35**, 129. Русский перевод в книге: В. Паули, Физические очерки, Наука, Москва, 1975.

Pauli 1951 – W. Pauli, Z. Naturforsc. **6a**, 468. Русский перевод в книге: В. Паули, Физические очерки, Наука, Москва, 1975.

Pauli 1964 – W. Pauli, Collected Scientific Papers, vol 1-2, New York.

Penrose 1989 – R. Penrose, The Emperor's New Mind, Oxford University Press, New York, Oxford.

Penrose 1994 – R. Penrose, Shadows of the Mind, Oxford University Press, Oxford, New York, Melbourne.

Peres 1974 – A.Peres, Am. Journ. Phys. **42**, 886.

Reid 1970 – Hilbert, Springer. Русский перевод: Констанс Рид, Гильберт, Москва, 1977.

Robertson 1929 – H.R.Robertson, Phys. Rev. **34**, 163.

RSA 1978 – R. Rivest, A. Shamir, A. Adleman, Communications of the ACM, **21**,120.

Shor 1994 – P.W.Shor, Algorithms for quantum computation: discrete logarithm and factoring. Proceedings of the 35th Annual Symposium on Fondations of Computer Science IEEE. Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 124.

Schrödinger 1926a – E. Schrödinger. Ann.Physik,**79**,361, поступила в редакцию 27 января 1926 г.

Schrödinger 1926b – E. Schrödinger. Ann.Physik,**79**,489, поступила в редакцию 23 февраля 1926 г.

Schrödinger 1926c – E. Schrödinger. Ann.Physik,**79**,734, поступила в редакцию 18 марта 1926 г.

Schrödinger 1926d – E. Schrödinger. Ann.Physik,**80**,437, поступила в редакцию 10 мая 1926 г.

Schrödinger 1926e – E. Schrödinger. Ann.Physik,**81**,109, поступила в редакцию 21 июня 1926 г.

Schrödinger 1930 – E. Schródinger. Sitzungsber. Preuss. Akad., 296.

Schrödinger 1935a – E. Schrödinger. Die Naturwissenschaften, **48**,807, поступила в редакцию 29 ноября 1935 г.

Schrödinger 1935b – E. Schrödinger, Proc. Cambr. Phil. Soc. **31**,555, 1935, получена 14 августа, доложена 28 октября 1935.

Shankland 1963, – R.S.Shankland, Conversations with Albert Einstein, Amer.J.Phys **31**,45 -57. Русский перевод: УФН, 711, 1965. Разговор 4-го февраля 1950 г.

Sommerfeld 1949 – A. Sommerfeld, Journ. of Phys. **12**, 315. Русский перевод: А. Зоммерфельд, Пути познания в физике, Москва, Наука, 1973.

Stoner 1924 – E.C.Stoner, Phil. Mag. **48**, 719.

Reichenbach 1944 – Hans Reichenbach, Philosophic Foundations of Quantum Mechanics, University of California Press, Berkeley and Los Angeles.

Rosenfeld 1967 – L.Rosenfeld: in Niels Bohr, His Life and Work as seen by his friends and colleagues, edited by L.Rosenfeld (North-Holland, Amsterdam,1967).

Weyl 1928 – Г. Вейль, Теория групп и квантовая механика, Наука, Москва, 1986 – русский перевод английского издания книги H. Weyl, The theory of group and quantum mechanics, Dover, 1931. Первое, немецкое издание, вышло в свет в 1928 году.