Луи де Бройль

Избранные научные труды

Том 1

Становление квантовой физики
Работы 1921–1934 годов

Москва
Логос
2010

УДК 530.1
ББК 22.3
Б88

Издано при финансовой поддержке Федерального агентства по печати и массовым коммуникациям в рамках Федеральной целевой программы «Культура России»

Редакционная коллегия выражает благодарность Фонду Луи де Бройля за неоценимое содействие в подготовке и выпуске в свет настоящего издания

Б88 **Луи де Бройль.** Избранные научные труды. Т. 1. Становление квантовой физики: работы 1921–1934 годов. – М.: Логос, 2010. – 556 с.

ISBN 978-5-98704-505-3

Публикуются основополагающие научные труды выдающегося французского ученого, одного из создателей квантовой механики Луи де Бройля. Часть работ ученого выходит на русском языке впервые. В этот том вошли биография Луи де Бройля «Принц в науке», написанная его другом и единомышленником Ж. Лошаком, статьи 1921–1927 годов, книга «Магнитный электрон (теория Дирака)», диссертация Луи де Бройля и его Нобелевская лекция, по сей день представляющие большой интерес.

Для ученых-физиков, представителей других естественных и точных наук, философов и науковедов.

УДК 53
ББК 22.3

ISBN 978-5-98704-505-3

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Стендаль начинает свой роман «Пармская обитель» следующими словами: «15 мая 1796 года генерал Бонапарт вступил в Милан во главе молодой армии, которая перешла через мост у Лоди, показав всему миру, что спустя много столетий у Цезаря и Александра появился преемник».

Хочется по аналогии сказать, что 14 декабря 1900 года, совершая последнее открытие XIX века, Макс Планк высказал квантовую гипотезу и тем самым от имени будущей молодой армии физиков XX века заявил миру, что у Пифагора, Галилея, Ньютона и Максвелла появились преемники.

Планк сразу оценил величие своего открытия. Он сказал своему сыну, что нашел «нечто подобное закону всемирного тяготения». Но в то время только он один понимал это, и никакой армии у него тогда не было. До 1905 года никто за ним не пошел и даже не заметил его открытия, пока не появилась звезда науки XX века – Альберт Эйнштейн. Только с него началась новая физика и поднялась «великая армия» ученых, чьи имена хорошо известны, но все-таки перечислим их по очереди: Планк, Эйнштейн, Бор, де Бройль, Гейзенберг, Шредингер, Паули, Борн и некоторые другие.

Итак, герой настоящей книги влился в эту армию четвертым, когда уже знали закон черного излучения, закон квантов, кванты света (фотоны) и атом Бора. Луи де Бройлю предстояло получить следующий великий результат – ввести понятие волны для электрона и для всех материальных частиц.

Из-за войны он начал свою научную деятельность довольно поздно, в 1920 году, но с самого начала оказался в очень благоприятной среде. Он участвовал в семинаре Ланжевена, где царствовала теория относительности, и работал в лаборатории своего брата Мориса де Бройля, которая была одной из самых передовых в мире в области рентгеновских и гамма-лучей и одной из первых, принявшей идею фотона.

Де Бройль начал свои работы по основам квантовой теории два года спустя, в 1922 году. Ему было тридцать лет. Он сразу же взялся за решение коренных вопросов: связь между интерференцией и квантами света, связь между корпускулярными спектрами и фотоэффектом, черное излучение и кванты света (особенно роль теории относительности); он открыл спин фотона за два года до открытия спина электрона и показал, что спин фотона должен быть направлен вдоль светового луча. Все это привело его к идее описать фотон как настоящую частицу с массой покоя, и в 1923 году в продолжение этой идеи он открыл волновые свойства материи и написал знаменитую формулу для длины волны, связанной с любой материальной частицей. В 1924 году он защитил докторскую диссертацию.

Волна материи является одним из самых удивительных и глубоких открытий XX века (во что первоначально, кроме Эйнштейна, никто не верил). Мало кому удалось добавить столь новую черту к образу нашего мира. Среди самых плодотворных идей эта волна не только вошла в базисы всей квантовой теории, она легла в основы создания электронного микроскопа, транзистора (и тем самым всей электроники) и даже лазера, как это подчеркивал Альфред Кастлер. Всем известно, что вынужденное излучение открыл Эйнштейн, однако когерентность этого излучения была предсказана не им, а именно де Бройлем в его диссертации как следствие общих свойств открытой им волны.

За годы своей деятельной жизни де Бройль написал 240 статей (большинство из них научные, но многие – по философии науки), 37 научных книг, 10 книг по философии науки; опубликовано 88 его академических выступлений и различных научных лекций. Но известно, что этот список не полный: нередко наталкиваются на забытые статьи.

Де Бройль работал во всех областях квантовой теории и волновой механики. Трудно их перечислить. Ограничимся главными: основы волновой механики, теория квантования, роль потенциальных барьеров, принцип соответствия, соотношения Гейзенберга, системы частиц, теория Дирака, теория света и всех частиц со спином, как слияния частиц со спином одна вторая (четыре книги помимо статей). Гейзенберг сказал, что это открытие такого же значения, как сама волновая механика, квантовая теория поля, квантовая теория измерения, теория ядра, теория электронного микроскопа и т. д. К этому следует добавить статьи и книги, касающиеся обобщения квантовой теории. Такие обобщения пытались, каждый по-своему, делать и другие создатели квантовой физики, в том числе Эйнштейн, Дирак, Гейзенберг, Шредингер, Борн.

Я имел счастье быть учеником, позже сотрудником, а затем другом Луи де Бройля – одного из великих ученых XX века, труды которого опубликованы в этой книге.

Если только я могу себе позволить несколько тривиальное выражение, обещаю, дорогие читатели, что с ним вам никогда не будет скучно. Вы будете наслаждаться научными взглядами великого автора и элегантностью и простотой мысли человека, который глубоко знал науку и чувствовал, насколько она в конце концов «очень маленькая вещь» (по его собственным словам), чтобы пытаться улучшить ее с помощью ненужных усложнений.

Я радуюсь и даже горжусь тем, что это крупное собрание трудов моего учителя впервые появится в России – на родине моих родителей, и специально для этого издания написал предисловие на русском языке. И я сердечно благодарю моих старых друзей Леонида Уруцкоева, Николая Самсоненко и Юрия Рыбакова, которые приняли в этом деле важное участие.

Жорж Лошак,
президент Фонда Луи де Бройля

Жорж Лошак

Принц в науке

В чрезвычайной важности открытия
невольно убеждаешься, когда видишь,
что даже самые яростные его противники
вынуждены им пользоваться.

Ларошфуко

ВВЕДЕНИЕ

Данная книга не является биографией в обычном смысле слова – скорее это свидетельство о человеке, которого я знал в течение тридцати последних лет его жизни, который был для меня учителем и стал другом, несмотря на различия в возрасте, социальном положении и научной значимости. Я прочел каждую его работу и имел привилегию на тысячи часов разговоров, благодаря которым сумел понять не только суть его главных научных изысканий, но и все нюансы его научной мысли, а также вкусы, как научные, так и литературные, исторические, художественные. Я познал этого человека и его характер. Все это может придать интерес моему свидетельству. Но если я и стараюсь осторожно использовать слово «биография», то потому, что именно дружеские чувства мешают держать необходимую дистанцию и я не имею ни вкуса, ни способностей для этого неисчерпаемого жанра. Есть вещи, о которых он мне не говорил и о которых я не намерен распространяться. Но о некоторых вещах, рассказанных им, я умолчу нарочно.

Мое свидетельство будет принципиально научным. Я пишу эту книгу для того, чтобы помочь лучше понять работы Луи де Бройля. Именно этого желал он сам, ибо, когда однажды, задолго до его смерти, я поделился с ним намерением написать книгу о нем, он сказал: «*Надеюсь, что вы не потеряетесь в биографических деталях, которые никого не интересуют, и будете касаться только науки*». На это я ответил: «*Уверяю вас, я скажу не больше и не меньше того, что вы родились в Дьепе*» – и дал почитать отрывок, который он на следующей неделе с похвалой по-дружески прокомментировал. Но я не сдержу своего обещания касательно «*биографических деталей*», потому что вопреки мнению де Бройля читатель к ним любопытен и потому что эти детали иногда очень важны, так как помогают через представление о человеке лучше понять его творение. Сам Луи де Бройль, конечно же, понимал все это. Его отвращение к разговорам о своей персоне определялось такими чертами характера, как стеснительность и скромность, из-за которых он оказался малоизвестным, хотя был безусловной знаменитостью в научной среде. Отчасти – но только отчасти – эти качества предопределили его разрыв с физиками своего времени.

При жизни Луи де Бройля большинство физиков не испытывали к нему особого расположения, хотя так было не всегда. В наши дни о нем говорят с восхищением, часто – с особой теплотой, как будто желая принести извинения.

Эйнштейн был тоже далеко не всем приятен, но по другой причине. Физика была его царством – он доминировал во всех областях, в каждую из которых был способен внести свой собственный вклад, по ходу заметив: «Как-то размышляя над проблемой…» [1]. Никакой другой физик не был до такой степени велик и в то же время скромен, чтобы (даже в глубине души) не быть ревнивым и раздражительным и не презирать модные научные течения, возглавляемые не менее знаменитыми противниками с наивысшей репутацией в деле изучения самой современной теории начала XX века – квантовой механики (в которую, между прочим, он внес вклад больший, чем кто-либо другой). Эйнштейн искал истину совершенно иным путем. Физики видели в этом живой вызов их сообществу и в предвкушении провала посмеивались над его разочарованиями, забывая о победах, самая малая из которых принесла бы счастье и славу любому из них. С другой стороны, ученому многое прощалось; он стал символом своего времени благодаря духу борца и безграничной щедрости, которые позволяли ему свершать грандиозные дела и которыми, как он полагал, должен обладать всякий человека Добра. В этом смысле физики признавали Эйнштейна за *своего* и в общем и целом видели в нем только один «недостаток» – сверхинтеллигентность в сочетании с чрезмерной упрямостью. Сегодня его ошибки забыты, вспоминают только заслуги, а все разговоры о нем заканчиваются признанием того, что его критика квантовой механики, возможно, вполне обоснованна.

Неприятие Луи де Бройля в обществе было более глубоким. Он оказался непонятым, в частности, по той причине, что не принимал участия в общественной жизни, уверяя: «Это не моя стихия». Но ученый был действительно как будто из иной реальности: по научному мировоззрению, происхождению, воспитанию и характеру. Эйнштейн являлся высшим, но неудобным элементом научного мира – Луи де Бройль никогда не стремился стать его частью, несмотря на премии и почести, которые ему оказывали, на университетский статус и принадлежность к многочисленным академиям. Казалось бы, за одно только обладание престижными наградами и почетными степенями его должны были почитать, искренне уважать, но этого не происходило. Да он и не требовал этого.

Очевидная значимость этого человека для истории – по происхождению, по месту, которое он занимал в науке, – предполагала наличие в нем высокомерия аристократической касты и научной элиты. И окружающие ожидали от него пренебрежительного отношения. Ничем не опровергаемое предубеждение способствовало росту барьера непонимания. Надо признать, что при всех возможностях Луи де Бройль ничего не делал для устранения негативного отношения к себе. Скромный, поглощенный своими мыслями, на людях он скучал, говорил мало, а его отсутствующий вид часто принимали за желание выказать превосходство. Но это было совершенно не в его характере. Четко осознавая свое место в науке и в жизни, Луи де Бройль не испытывал необходимости самоутверждаться за счет принижения других. Он был по-своему внимателен к окружающим, правда, проявлял расположение так незаметно, что объекты его заботы иногда только случайно понимали это. Он не обедал в городе и почти никогда не принимал гостей, не ходил на спектакли и редко путешествовал. Он замыкался в себе, когда громко разговаривали, и не участвовал в коллективных дискуссиях, держась в стороне, иногда нашептывая какие-то замечания, которые в ходе разговора никто не слышал и не понимал. Его отношения с университетскими коллегами и академическими собратьями были любезными, но не более, и окружающие не могли исправить ситуацию. Лишь избранные входили в круг его доверия, и люди эти имели удовольствие наслаждаться богатством и глубиной бесед с ним, поскольку он был деликатным слушателем, блестящим и остроумным собеседником.

Луи де Бройль любил выражение «*что касается*». Это «что касается» всегда оставалось с ним, каких бы почестей он ни удостаивался и, наоборот, каким бы нападкам со стороны общественности ни подвергался. Он уважал институты и хранил преданность им, ценил свое знатное происхождение и был искренне привязан к семье, но в то же время не принадлежал ни к какой среде, компании, корпорации или школе. Так, испытывая чувство гордости за свою фамилию, Луи де Бройль ни в коей мере не проявлял надменности. Однажды он сказал мне: «С*емью не выбирают, но выбирают дело и друзей*» – и заметил, что «*не носит своих титулов*» и что на его визитной карточке указаны только университетские и академические звания. У него не было именных бланков, для официальных писем он использовал листы со штампом Академии наук, а для личной корреспонденции – обычную чистую бумагу.

На университетском приеме один собеседник спросил де Бройля, является ли тот выпускником Высшей нормальной школы или же Политехнической школы, и услышал следующее: «*О, вы знаете, я ниоткуда не выпускался*». Этот ответ был совершенно в духе де Бройля.

Он умудрился позаботиться о своих похоронах, оставив письмо, в котором указывал, что проводы в последний путь должны проходить «*в обстановке интимности, без гербов и речей*», имея в виду родовые гербы и выступления академиков с прощальным словом. Он покинул наш мир так же скромно, как жил.

Больше всего отделяла Луи де Бройля от остальных физиков его концепция науки, манера исследований и сам их объект. В эпоху триумфа формализма и чисто операционного и абстрактного образа физики он искал картину мира – *Weldbild,* как он часто называл ее на немецком языке. Под этим он понимал представление явлений в трехмерном пространстве, *пространстве физическом*, а не в абстрактных пространствах, математическую полезность которых он признавал, но которым отказывал во всяком физическом существовании и онтологическом значении.

В период торжествования формальной и дедуктивной науки он сам был «интуитивен», не любил Дюгема, но страстно восхищался Пуанкаре и Эйнштейном («…*Первоначальным эйнштейновским способом*, – говорил он, – *не тем искаженным позже его молодыми учениками-математиками*»). Дело не в том, что ему недоставало логики. Напротив, его рациональный ум был совершенно строг, но «*только одержимые фантазеры, мечтатели являются созидателями*», признавал Луи де Бройль.

Если он говорил: «*Это очень понятно*» – о работе, которую ему передавали, то это было наивысшей похвалой. Но необходимо было, чтобы в работе содержалась гениальная идея. И, напротив, он критиковал Бора за его теорию дополнительности (о которой еще будет сказано) и за склонность к светотени. Он горько упрекал себя за то, что некогда поддавался искушению этих миражей. Но Бор был идолом физиков, а Копенгаген являлся Меккой квантовой механики. Поэтому ученые, которые отказались от точки зрения формализма, идей дополнительности и проповедовали исследования «*понятных образов в реальном пространстве и во времени*» (их существование отвергали Бор и большинство физиков, занимавшихся квантовой механикой), просто не могли быть услышаны.

Идеи Луи де Бройля квалифицировались как ретроградные, а слово это было едва ли не ругательством в век обожествления прогресса. Но как могли обвинять его, который открыл волновые свойства материи и способствовал величайшему прогрессу физики в прошлом веке? Его, сделавшего все для благоприятного развития науки и ее приложений? Как могли забыть, что он был одним из создателей Национального центра научных исследований во Франции (CNRS) и одним из инициаторов создания Европейского центра ядерных исследований (CERN), а также других крупнейших лабораторий?

Его упрекали в отказе от некоторых модных идей. Он был не ретроградом, но ученым, углубленным в историю, что не одно и то же! Луи де Бройль открыто обращался к прошлому, но всегда придерживался семейного девиза «Ради будущего». Предпочитая не следовать модному лозунгу «Сотрем грязь прошлого с доски», ученый отказывался от разрыва между прошлым, настоящим и будущим и не верил, в отличие от других, что ради прогресса наука должна отказаться от своего прошлого. Он полагал, что якорь современной науки находится в глубинах истории, и считал гениальным не научный переворот, но получение нового видения мира – коронацию старых идей, зревших в предыдущих поколениях, истинное значение которых вдруг озарялось новыми лучами. Иными словами, великий физик был рожден не для XX века.

Историческая мысль Луи де Бройля отражалась также в его концепции времени. Современная доктрина принадлежит Эйнштейну, который вывел ее из ньютоновского абсолютного времени (введя понятие его относительности) и показал, что его мера зависит от движения и что время органично связано с пространством в четырехмерном континууме пространство-время. По этой же причине время Эйнштейна обратимо, как, впрочем, и пространство. А необратимость может являться лишь коллективным эффектом, таким как представлял себе Больцман, – обязанным большой совокупности атомов, а не каждому из них. Концепция Луи де Бройля была иной. Будучи релятивистом, он не допускал, что пространство-время является физической реальностью, он видел в нем только удобную математическую фикцию, потому что «*время всегда мимолетно, а пространство – нет*». Необратимость в этой концепции является, таким образом, главной, а второй принцип термодинамики (принцип Карно) становится фундаментальным принципом физики на всех, даже микроскопических, уровнях. Это также было непонятно, потому что противоречило общим убеждениям.

Если Эйнштейн представлял время прочно связанным с пространством, то Луи де Бройль считал, что историческое время разворачивается в настоящем. Прежде историк, чем физик, он ценил прошлое, живя в настоящем. Сам он представлял, даже в контрасте со своей физикой и своей деятельностью, тонкий союз между минувшим и будущим. Одетый по прошлой моде, со знаменитым крахмальным отложным воротничком, с галстучной заколкой с жемчужиной, золотыми часами в герцогских гербах в жилетном кармашке, твердой шляпой и неизменным зонтиком, он ни на кого не был похож и казался сошедшим со страниц исторического романа. Прищур правого глаза, акцентировавший рассеянность взгляда, легкое шевеление губ и неосознанные жесты человека, теряющегося в обществе, погруженного в размышления, – все это делало его несовременным. Казалось, человек этот прибыл из прошлого, а на самом деле он шел на встречу с изобретателем или радиоинженером, электронщиком, чтобы исследовать новое экспериментальное или промышленное устройство – одно из тех, что сегодня стали привычными и используются в повседневной жизни и в индустрии. Луи де Бройль мог со знанием дела говорить с лучшими специалистами, потому что был в курсе их инноваций, теоретический фундамент которых часто находился в его трудах.

Луи де Бройль, которого считали немного философом, чаще встречался с представителями промышленности (из которых он, конечно, ни разу не «вытянул» ни сантима), чем с теоретиками. Будучи настоящим кладезем знаний по физике, он имел больше книг по истории, чем по науке. Обычно он ни слова не произносил без того, чтобы предварительно не отредактировать текст на бумаге, но обладал памятью «колокольной бронзы». Не имея возможности перечитывать поэмы, он был способен, меряя шагами свой кабинет, читать вслух тысячи стихов, которые знал наизусть. Говорил он только на французском, но владел несколькими языками: немецким, английским, итальянским. Сделав одно из величайших открытий в истории науки и являясь одним из отцов-создателей современной физики, он отвергал ее тогдашнее состояние, говоря как будто с извиняющейся улыбкой: «*Исток почти всегда не совпадает с течением реки*».

Все это вызывало недоумение или даже раздражение у современников де Бройля. Некоторые успокаивали себя тем, что идеи волн материи пришли в голову ученому, возможно, случайно: казалось невероятным, чтобы настолько странный человек мог быть великим физиком. Но его «странность» заключалась лишь в том, что он был наблюдателем, а это означало – как Ланцош сказал об Эйнштейне – быть физиком «космического» масштаба, открывателем великих законов, которые изменили наше видение мира. Такие физики редки. Назовем некоторых: это создатели квантовой теории Планк, Эйнштейн, Бор, Луи де Бройль, Гейзенберг, Шредингер, Паули и Дирак. Известны и другие великие теоретики, но только эти люди добились привилегии изменить наше видение мира.

Я имел счастье знать одного из них, и трудно передать мои впечатления, так как нелегко увидеть различие между человеком просто замечательным и великим, просто интеллигентным и гением, просто важной идеей и космической. Чтобы описать такую личность, как Луи де Бройль, надо хорошо понимать, что значит идея в науке. Идея, однако, это не что-то выдающееся на уже существующем пути и не проявление мощи для открытия эффекта, построения аппарата или установления уравнения. Идея – это нечто другое, почти неосязаемое, это вопрос, который никем ранее не ставился, внезапное сближение между понятиями, кажущимися совершенно различными. Идея – это способ смотреть сквозь вещи, или разглядывать их вблизи, или издалека, или под другим углом, или представлять их себе по-другому. Это новый взгляд на мир. Интересно, что, когда привыкаешь к этому новому взгляду, первое удивление и начальная невероятность уступают место очевидности, идея становится добром для всех, она входит в употребление. Она кажется само собой разумеющейся, и трудно представить время, когда она была неизвестна, воскресить в памяти пропасть, которую необходимо было преодолеть, чтобы выдвинуть ее, и забывается, что для этого необходим был гений. Ученый, который смог сделать такой шаг однажды и, возможно, не совершит второго шага того же порядка (Эйнштейн в своей жизни признавал только две идеи), станет выдающимся. Он навсегда останется в истории и будет стоять гораздо выше «обычного» крупного физика, хотя и в стороне. Именно это означает быть космическим разумом. Очень волнительно иметь возможность говорить о таком человеке.

ГЛАВА 1. История рода. Детство

Фамилия Бройль – во французском написании Broglie – произносится со смягчением glie, что не свойственно итальянской звуковой системе. Это произношение напоминает о пьемонтских корнях семьи. Прославленная французская ветвь берет начало в 1643 году (время кончины Людовика XIII), когда во Францию приехал 32-летний Франческо Мария Броглиа, сын Амедео Броглиа, графа Кортадона. Он желал присоединиться к Мазарини, который годом ранее стал наследником Ришелье. На французский манер итальянца начали называть Франсуа-Мари Бройль. Вскоре он добился успеха – получил титул «граф де Ревель» при помощи герцога де Савуа и заслужил звание «генерал-лейтенант». Ему не довелось дослужиться до маршала лишь потому, что он скоропостижно скончался в 1656 году при осаде Валенса (в графстве Пьемонт), унеся с собой обещания маршальского жезла. Но его старший сын, Виктор Морис граф де Бройль, маркиз Сенончес (1647–1727), стал маршалом Франции, первым из семейства получившим этот знак отличия при Людовике XV. Гийом, маркиз де Бройль, один из сыновей Виктора Мориса, тоже удостаивался званий, но был лишен их в результате дворцовых интриг; честь прославлять род Бройлей выпала его сыну от второго брака – Франсуа-Мари де Бройлю (1671–1745). Он стал вторым маршалом в семье и первым герцогом де Бройлем. Этот титул перешел по наследству Луи де Бройлю, седьмому потомку семейства. С тех пор земля в Нормандии при Берне, недалеко от Лизо, носит имя де Брогли, как, впрочем, и деревня, где находится большой и мрачный замок, который недолюбливал Луи де Бройль. Члены семьи произносили название деревни по-своему, а жители деревни – на французский манер.

Некогда Франсуа-Мари де Бройль выдвинул в качестве семейного девиза короткую, но емкую фразу

«РАДИ БУДУЩЕГО».

Луи де Бройль был настолько предан этому девизу, что письменно присвоил его фонду, который носит его имя.

Интересна биография второго герцога, Виктора-Франсуа де Бройля (1718–1804), старшего сына Франсуа-Мари. Блестящий военный участвовал во многих кампаниях, и в частности в Семилетней войне: он возглавлял войско в битве 1759 года у Бергена, закончившейся победой над прусскими войсками Фердинанда де Брунсуика. За это Людовик XV сделал командующего маршалом Франции. Таким образом, в 35 лет Виктор-Франсуа стал третьим маршалом в семье. Прославленное семейство увековечено на большой площади Трех Маршалов деревни де Бройль.

За победу над пруссаками Виктора-Франсуа де Бройля наградил также император Франсуа I Австрийский, который пожаловал ему титул «принц Священной империи» – «*фюрст*» по-немецки, со званием «*светлейший, возлюбленный и дорогой кузен*», как на то указывает дворянская грамота, перевязанная шелковым шнуром с большой восковой печатью и находящаяся в кожаном чехле.

Титул *принца* имеют все члены семьи, носящие ее фамилию, в противоположность герцогскому, который принадлежит только старейшему ее члену. Любопытно, что это почетное звание путали с титулом принца королевских кровей, а потому у некоторых визитеров Луи де Бройля возникало немало хлопот. Сколько раз я принимал телефонные звонки от людей, часто значительных, которые перед первым визитом к Луи де Бройлю из вежливости интересовались, как лучше обращаться к нему. Они полагали, что «профессор» – это слишком плоско, «господин непременный секретарь» – слишком длинно, и стремились узнать, как же точнее всего величать де Бройля. Они не желали понять, что его, как и всех, называли «господин», а, вероятнее всего, просто питали слабость к обращению «монсеньор», означавшему в Версале титул старшего брата короля. Однако ученый совершенно не хотел этого звания, ставшего в известной мере мещанским. Неиссякаемым источником путаницы и насмешек для его учеников были ситуации, когда во время университетских приемов кто-нибудь из приглашенных обращался к нему и произносил дрожащим голосом «сеньор», «светлость» (хотя «принц» или «граф» было бы уместнее). Луи де Бройль, безразличный к титулам и раздражавшийся от формальностей, принимал это с невозмутимым видом. Что мог он поделать с людьми! Следует отметить, что он хоть и не кичился своими высокими званиями и жил скромно, но все же уважал традиции и держал в своем кабинете в Нейли изображение герцога Виктора-Франсуа в напудренном парике и в блестящих латах. Этот портрет располагался за его спиной и висел над ним.

Большой интерес представляет эпизод биографии Виктора-Франсуа де Бройля. За несколько лет до революции, уже в преклонном возрасте, он проживал в отставке в Нормандии, пребывая в некоторой немилости. Для управления замком и его территориями он нанял бывшего адвоката парламента Руэна – Франсуа Мериме, потомки которого стали прославленными людьми. Прежде всего узнаваема фамилия одного из внуков Проспера Мериме (автор «Кармен» и «Коломбы»), который делал перепись национального имущества в целях его реставрации. Но вот что его особенно связывает с Луи де Бройлем: осуществляя ремонт замка, Франсуа Мериме пригласил из Каена молодого архитектора Жака Френеля, который затем женился на дочери Мериме. В этом браке родились четверо сыновей, кузенов Проспера Мериме; все они проявили себя как достойные люди, а один оказался настоящим гением. Это был Огюстен Френель, основатель волновой оптики, теории интерференции и дифракции, один из тех, кто серьезно повлиял на открытие Луи де Бройлем волновой механики. Огюстен родился в Бройли в 1788 году, на 100 с лишним лет раньше Луи де Бройля.

Луи де Бройль был очень чувствителен к таким совпадениям и видел в них знак судьбы. Глубоко восхищавшийся Френелем, он считал его как бы членом своей семьи (во всяком случае, уверен, семьи своих мыслей). Он часто писал о нем и держал в своем кабинете в академии беломраморный бюст Френеля, который стоял позади него по правую руку. Цитируя Френеля во время научных дискуссий, он не мог оставаться нейтральным, его выдавал голос, в котором звучали дружеские нотки. Он испытывал теплые, товарищеские и даже братские чувства. Луи де Бройль словно взывал к Френелю, когда, не произнося имени, указывал скромным жестом на его бюст и говорил: «*Он меня бы хорошо понял*».

Следы Френеля можно найти в деревне де Бройль. На доме, где он родился, на Церковной площади висит большая мраморная доска, украшенная горельефом и напоминающая об известном физике. Но эта доска всегда раздражала Луи де Бройля, потому что она прежде всего восхваляла линзовые фары (знаменитые линзы Френеля), и только в конце надписи кратко и как бы в дополнение говорилось о теории волн, его великом труде. Луи де Бройль видел в этом иллюстрацию предпочтений общественной власти, которая ставила прикладную науку выше фундаментальной, а ведь без нее первая не существовала бы.

Герцог Виктор-Франсуа в начале революции (год, следовавший за рождением Френеля) был призван на службу Людовиком XVI, назначен военным министром и поставлен во главе войск, охранявших Версаль от толп восставших. Но вскоре он ушел в отставку из-за нерешительности короля и покинул Францию. Он командовал эмигрантами в Кобленсе и умер в эмиграции. В то же самое время его сын, Виктор де Бройль (1756–1794), вставший на сторону революции, постепенно приближался к финалу своей трагической судьбы. Влюбленный в идеи свободы, он служил в Америке под командованием Лафайета и Рошамбо и был членом Общества Синсиннати, основанного Джорджем Вашингтоном и объединявшего высших офицеров, которые принимали участие в войне. Это общество имело французскую ветвь, к которой по наследственной привилегии принадлежал старший член семьи де Бройль (эта участь ожидала и Луи де Бройля). Во время революции Виктор де Бройль заседал в Учредительном собрании, которое он возглавил в 1791 году, и участвовал в принятии реформ. Он был маршалом лагеря в армии Рина, но в конце концов стал жертвой террора, был арестован и казнен на гильотине.

Карьера и судьба отца и сына, старого герцога и того, кто не успел им стать, иллюстрируют контрасты, характерные для семьи Луи де Бройля (мы увидим нечто похожее со стороны матери): сочетание строгого уважения традиций и авангардного духа. Еще недавно было очень интересно наблюдать, как по-разному воспринимали одну трагическую историю Луи де Бройль и его сестра Полина, графиня де Панж. Их отец написал рассказ об авантюрной жизни предков, который Полина читала с увлечением, «*гордая присутствием в своих венах крови этих героев*» [3]. Луи де Бройль испытывал иные чувства. Однажды он вспомнил известную картину, на которой изображен Руже де Лиль, исполняющий перед мэром Страсбурга *Военную песню армии Рина* (будущая «*Марзельеза*»), упомянул о присутствии при этом их предка, Виктора де Бройля, и добавил: «*Но это не помешало ему быть казненным на гильотине*». Помолчав и сделав вывод из этой истории, еще сказал: «*Не следовало бы ему туда ходить*». Однако было бы неправильно сделать вывод о Полине и Луи как о прогрессивной сестре и брате-«реакционере»: из них двоих он обладал, несомненно, большей храбростью. Добавим, что его сестра была по натуре скорее энтузиасткой, и Луи де Бройль говорил об этом только то, что сказал мне при других обстоятельствах: «*Выбирают друзей и выбирают то, что делают*».

Сын этого самого Виктора де Бройля, тоже Виктор, ввел в семью другую знаменитую линию, женившись на Альбертине де Стайёль (дочь мадам де Стайёль), которая является матерью Луи де Бройля. Таким образом, в его жилах текла также кровь отца мадам де Стайёль, известного министра Людовика XVI, Некера, бывшего образцом интеллигентности и порядочности, но плохо вознагражденного смутной эпохой.

Мы приближаемся к современности. Третий герцог является прадедом Луи де Бройля. Он был большим государственным деятелем, состоял в палате пэров при Людовике XVIII, затем при Шарле X. Он проявил храбрость во время Ста дней, один бросившись на защиту маршала Нея. Он принадлежал, вместе с Руайе-Колларом и Гизо, к группе избранных *доктринеров* и был противником реакционных мер. При Людовике-Филиппе он последовательно занимал посты министра образования (именно он восстановил Высшую нормальную школу), затем министра иностранных дел, где серьезно отличился, и, наконец, президента Совета. Его карьера была сокрушена революцией 1848 года, хотя он и стал впоследствии депутатом от Майена, выступал одновременно против социализма и реакции. Решительный сторонник Наполеона III, он посвятил последние годы жизни изучению философии и литературы. Являлся также членом Французской академии.

Его старший сын, Альберт де Бройль (1821–1901), четвертый герцог и дед Луи де Бройля, сделал дипломатическую карьеру, затем ушел из общественной жизни в революцию 1848 года. Благодаря изданным им важным историческим трудам он был избран в возрасте 40 лет во Французскую академию. Альберт де Бройль вернулся к политической жизни в 1871 году. Став депутатом от Ора, некоторое время занимал пост посла Франции в Лондоне. Он победил Тьера и стал (1873) президентом Совета и министром иностранных, а затем внутренних дел при Макмахоне. Будучи консерватором, он присоединился к республиканцам, но одновременно и к легитимистам, которые упрекали его в связях с бонапартистами и попытках примирения различных монархических тенденций. Его кабинет пал. Призванный во власть в 1877 году, он столкнулся с враждебной республиканской палатой и ушел в отставку, чтобы посвятить себя историческим исследованиям. Он также был членом Французской академии.

Об отце Луи де Бройля, которого он потерял в юношеском возрасте, известно много меньше. Виктор де Бройль (1846–1906), пятый герцог, не был счастлив. Он подавал большие надежды: получил первую премию общего конкурса по философии и плодотворно трудился на поприще литературных исследований. В 20 лет отправился в Соединенные Штаты, чтобы изучать там общественные институты. Казалось, ему обещано солидное политическое будущее, которое предсказывали еще в юности благодаря карьере отца, герцога Альберта. Но разочарованный, связанный семейными обязательствами Виктор занялся своими замками и землями. Еще одним его увлечением была история (как знать, возможно, замок де Бройля с его архивами и великолепной библиотекой способствовал этому). Он считался депутатом от Майена, однако вел достаточно уединенный образ жизни и так и не смог реализовать себя в полной мере. Умер преждевременно от диабета.

Теперь нам следует обратить внимание на предков по линии матери Луи де Бройля. Это замечательные личности. Луи, так же как его брат и сестры, сохранил хорошие воспоминания о своей бабушке Селестине д'Армайе. Она представляла собой значительное свидетельство эпохи. Интеллигентная, словно уменьшившаяся с возрастом, строгая, одетая в черное, с гладко зачесанными на прямой пробор волосами, она как будто имела основание вести себя в соответствии с афоризмом: «*Когда колеблешься между двумя решениями, будь уверен, что не ошибешься, выбрав наиболее неприятное*» [3]. Властная, отважная женщина, она без колебаний, как мне говорил Луи де Бройль, отправилась в Версаль делать внушения руководителям Коммуны, желавшим помешать ее въезду в Париж.

Пытаясь мысленно нарисовать картину столь далеких событий по свидетельствам человека, который являлся участником этих событий, я испытал ощущение, как будто перенесся назад во времени и сам являюсь творцом истории. Это впечатление усилилось, когда Луи де Бройль рассказал, что его бабушка, говоря о своей семье и о собственной бабушке, цитировала ее воспоминания о дворе Людовика XVI. Таким образом, суммируя воспоминания этих трех личностей, я создавал для себя образ Людовика XVI. Связь с монархическим прошлым и принадлежность к аристократии не мешала Селестине д'Армайе иметь на своем камине две бронзовые статуэтки: Вольтера и Руссо – и одновременно предостерегать свою семилетнюю внучку Полину от зла, с которым она могла бы столкнуться в работах этих двух писателей, хотя сама Селестина их «*очень уважала*» [3]. Я видел эти статуэтки, которые стояли на камине в кабинете Луи де Бройля в Нейли и символично соседствовали с часами Людовика XVI.

Селестина д'Армайе была дочерью Филиппа де Сегура (1780–1873), портрет которого видели в вестибюле дома в Нейли. Генерал при Империи, затем во время Реставрации, Филипп де Сегур обладал солидной независимостью духа. С одной стороны, он охотно примкнул к императору в период Ста дней (за что его упрекали и из-за чего последовала преждевременная отставка), а с другой стороны, преданный Наполеону, де Сегур провоцировал его на дуэль: он дал императору, кажется, весьма неблагоприятное описание в своей «*Истории Наполеона и Великой армии*». Таким образом, генерал де Сегур исполнил важную историческую роль (так же как и его отец, Луи-Филипп де Сегур, 1753–1830). Июльская монархия заставила вновь засиять его звезду. Он стал пэром Франции и членом Французской академии.

В семействе де Сегур также имелся один маршал Франции – Филипп-Анри де Сегур (1724–1801), отец Луи-Филиппа де Сегура и дед генерала. Но у генерала был старший брат, Октав-Анри Габриэль де Сегур (1778–1818), который заслуживает упоминания, хотя и не был прямым родственником Луи де Бройля. Действительно, этот человек (покончил счеты с жизнью, бросившись в Сену в приступе отчаяния) был сыном Евгения де Сегура, двоюродного брата бабушки д'Армайе, который женился на Софье Растопчиной, дочери московского губернатора, ставшей графиней де Сегур. Таким образом, графиня де Сегур стала кузиной бабушки Луи де Бройля. Можно сделать вывод, что если талантов и не хватало в семье, то они вошли в нее вместе с мадам де Стайёль.

Селестина де Сегур, будущая бабушка Луи де Бройля, вышла замуж за Луи д'Армайе, анжувинского дворянина. После лет, проведенных в белой униформе австрийской армии, он мечтал о сельской жизни, однако этому воспротивилась молодая жена. Жизнь в Париже, которую она навязала Луи, способствовала тому, что он стал любителем искусств. Он имел хороший вкус и золотые руки, благодаря чему завоевал уважение и дружбу знаменитых антикваров и хранителей музеев. У Луи д'Армайе и Селестины де Сегур родилась девочка, Полина; она вышла замуж за Виктора де Бройля и стала, таким образом, принцессой, а затем герцогиней де Бройль. Красивая и интеллигентная женщина, увлеченная литературой и историей, она любила литературные салоны и приемы, которые с детства так раздражали ее знаменитого отпрыска. Последний, впрочем, унаследовал от своей матери фрондерский и независимый дух, а также вкус к насмешкам, которые им обоим были свойственны до преклонного возраста.

Это краткое описание семьи де Бройля можно резюмировать словами, приписываемыми Леону Блюму: «*В этой семье талант был наследственным, пока в ней не появился гений*». Если действительно среди предков, включая его брата, в семействе имелись замечательные особы, то статус Луи де Бройля был другого измерения. Невозможно сравнивать блестящих военных, квалифицированных историков, великих политиков или крупного физика, каким был его старший брат, с человеком, благодаря которому наше видение Вселенной стало совершенно иным. Последний из де Бройлей был великолепнейшим и исключительным цветком.

Всегда кажется, что гений появляется неведомо откуда, но Луи де Бройль, возвысивший свою фамилию, не казался «*выходящим ниоткуда*»: он получил прекрасное наследство.

«*Я провел свое детство,* – говорил он, – *и всю мою первую юность в достаточно закрытой среде, но в ней интеллектуальные интересы были очень велики. Эти интересы нисколько не были научными, но скорее литературными и, главным образом, историческими*» [4, 5].

Можно сказать, он всегда «купался» в истории: его родственники в ней участвовали, а в семье было принято ее изучать. Даже литературный стиль Луи де Бройля свидетельствовал об отличных знаниях, прекрасном языке, хороших манерах и строгости мысли, которые культивировала его семья; давало знать о себе и хорошее воспитание, полученное благодаря общению с благородными людьми, которые часто бывали в замке, и изучению историй, описанных в трудах, которые заполняли его библиотеку.

Можно прибавить к этому наследию, доставшемуся от семьи, его независимость духа (гордая традиция), фрондерское поведение, природную авторитарность и волю к власти, даже некоторую агрессивность. Эти черты своей личности Луи де Бройль подавлял образованием и самоконтролем, оставляя на первом плане исключительную любезность и приветливость, которые, впрочем, были для него совершенно естественными. Но этот конфузливый человек, мечтатель, скромный и молчаливый, со слабым рукопожатием, с голосом, достаточно громким, немного ломким, тон которого никогда не повышался, – человек этот имел железную волю и был мало склонен оставлять завоеванную территорию. При видимой мягкости и дружелюбности, услужливой внимательности и либеральном духе Луи де Бройль был тигром, и для этого имелось две причины.

Первая причина – наследственность (как же можно в это не поверить!). Ведь он родился в семье, в которой было столько военачальников (четверо из них маршалы: три де Бройля и один Сегур) и политических деятелей. Это была семья, которая командовала.

Вторую причину можно назвать основной. Все великие научные деятели были также великими хищниками. Надо отстраниться от образа людей, движимых исключительно любовью к науке и разумом, приносящих жертвы только богу Рациональности, с альтруизмом радующихся чужим открытиям и обливающихся слезами перед крупицей истины. Конечно, многие люди науки заслуживают самых добрых слов, но встречаются также ученые, которые, надев нужную маску, защищают какую-либо концепцию, а другие наивно принимают на веру их лицемерные аргументы. Наука является местом столкновения противоположных идей, которые эксперимент далеко не всегда разделяет без жертв. Школы и блестящие индивидуумы сталкиваются здесь не только для открытия *истины*, но и чтобы добиться триумфа *их истины* и спорят из-за власти, которую хотят сохранить или завоевать.

Помимо знаний, воображения, духа наблюдения, анализа и синтеза, которых требует наука, ничто не делается без характера, без способности слушать только себя, залога свободы духа, который помогает расцвету других качеств. Ничто не создается без стремления к победе и признанию. Эту главную позицию каждый моделирует в своем характере. Один хочет быть «королем» (как Эйнштейн), другой – «вожаком стаи» или скорее школы (как Бор), третий предпочитает «спрятаться в пещеру» и размышлять о мире (как Планк) или «притаиться на высоких ветвях», выхватывая добычу получше (как Шредингер). Кто-то все время лает (не упоминаю никого), а кто-то продвигается вперед и углубляется в лес, не обращая внимания на ропот толпы, в поисках добычи, о существовании которой догадывается лишь он один (как Луи де Бройль). Все являются грабителями и стремятся доминировать, начиная с мягкого гениального пророческого Эйнштейна с его библейским языком и белоснежной шевелюрой. Но если бы он не был львом, он не был бы Эйнштейном.

Однако вернемся к «маленькому Луи», как называли в семье этого последнего ребенка; уже при рождении мальчик получил столько, что многие подозревали: это не случайно и по провидению ему будет дано еще больше. Луи де Бройль говорил, что, при воспоминании условий, в которых прошли его детство и юность, ему требовалось усилие, чтобы осознать, что речь идет о нем. Ему казалось, что все это происходило в другое время и в другом мире. Эту жизнь он воскрешал с удивлением и некоторой дистанцией, забавлявшей графиню де Панж в четырех книгах [3], приятных и поучительных, которые являются одним из источников информации для данной главы. Другим источником были воспоминания, которые я слышал от самого Луи де Бройля. Их забавно сравнивать, мы видели, как брат и сестра излагали одинаковые события прошлого: она – немного с ностальгией, он – более иронично и зачастую строго.

В начале века в Париже де Бройли считались одной из наиболее элегантных и закрытых семей. Наследники великих традиций, люди, принадлежавшие к этому роду, сохраняли манеры XVIII столетия. Они проживали в центре Парижа в доме, напоминавшем богато обставленный замок и доставшемся от семьи д'Армайе (деда-коллекционера), который вклинился между домом 48 по улице Ла Боэте и улицей Бом. В доме жили также 15 слуг, выполнявших всю необходимую работу. Два лакея, которые сменяли друг друга в течение дня, обязаны были ожидать в вестибюле каждого из двух входов прибытия возможного визитера. В дни приемов они носили панталоны, туфли с застежками, шелковые носки и белые перчатки. Прислуги, хлопочущей по дому, не хватало даже в обычные дни, поэтому приходили дополнительные работники. Это были штопальщица, серебряных дел мастер, протиравший столовые приборы, вышивальщица, которая завершала незаконченные женские работы, и часовщик, который каждую неделю заводил ценные часы. Этот обычай сохранялся и позже, в замке Сан-Амадур в Майене, куда приезжал часовщик из Краона, расположенного в нескольких километрах от замка.

Поскольку абсолютно всю работу по дому выполняла прислуга, то члены семьи стали неспособны делать что-либо самостоятельно, даже одеваться или причесываться, и сформировалась зависимость, о которой графиня де Панж вспоминает немного болезненно и от которой Луи де Бройлю не удалось освободиться. Он никогда не мог приготовить ванну, выбрать необходимые предметы туалета или привести в действие что бы то ни было в доме. Ему требовалось, чтобы зажигали лампу для работы на исходе дня, а затем ее выключали. Немного забавно, что, сохраняя привычки семейной строгости, он никогда не уходил из своего кабинета в академии, не выключив свет, или всегда по окончании лекции заботливо вытирал большую черную доску амфитеатра Дарбу в Институте Пуанкаре, чего, кстати, не делал ни один преподаватель.

Ежедневные трапезы на улице Ла Боэте, проходившие в определенное время, имели вид дворцовых церемоний. Они начинались с торжественного входа членов семьи, в порядке присутствия, с бабушкой Селестиной во главе, которая следовала за величественным метрдотелем. Детей допускали в столовую только после семи лет и в сопровождении воспитателей. Обычно на столе присутствовала серебряная посуда, а если кого-то приглашали, то использовали посуду из позолоченного серебра.

Пища была роскошная, мясная, тяжелая, в традициях Версаля. Следили за ее разнообразием и качеством. Зимой каждую неделю присылали дичь с семейной охоты в Нормандии или в Анжу.

Любая поездка проходила почти как королевская. На каникулы отправлялись поездом, занимая специальный багажный вагон и несколько купе, расположенных в других вагонах. Часть багажа отправляли обычно «малой скоростью», так как брали с собой целую армию прислуги и везли все: белье, серебряную и обычную посуду, швейную машинку, все необходимое для вышивания и даже некоторую мебель. Это делало место отдыха более привлекательным.

Семья издавна каждый год ездила в Дьеп, где находился трехэтажный особняк, шикарно обставленный и всегда готовый принять хозяев. Но сюда требовалось хотя бы частично привнести парижский комфорт.

В этом доме (улица Агуадо, 62) 15 августа 1892 года родился последний, младший в семье – Луи Виктор Пьер Раймонд де Бройль. Имена, составляющие его собственное, он унаследовал:

– Луи – от деда д’Армайе;

– Виктор – от отца и по семейной традиции;

– Пьер – от крестного отца, маркиза де Люппе, женатого на его старшей сестре;

– Раймонд – от крестной матери, Раймонды де Галар.

Луи был последним из пяти детей. Между некоторыми из них была большая разница в возрасте.

Старшая, Альбертина де Бройль – Титин в семейных альбомах, – стала маркизой де Люппе. Она была на 20 лет старше Луи де Бройля и обожала его настолько, что в конце своей жизни он неизменно вспоминал о ней с большим чувством. «*Она была очень ученой во всем, что касалось доколумбовских цивилизаций, и ее уважали наиболее знаменитые специалисты*», – говорил мне Луи де Бройль, полагавший, что она сделала бы блестящую карьеру, если бы не ее бесхарактерность, а также время и среда, где подобное еще не было принято.

В 1875 году, тремя годами позже рождения Альбертины, появился на свет Морис де Бройль. Он стал крупным физиком и сыграл важную роль в жизни брата.

Жизнь следующего брата, Филиппа, оборвалась рано. Он умер от аппендицита, который еще не умели оперировать.

Двое следующих детей появились гораздо позже. Так, Полина де Бройль родилась через 16 лет после своей сестры, в 1888 году – в год строительства Эйфелевой башни. Она принадлежала уже к другой эпохе и, несомненно, имела иной характер, в связи с чем предпочла оставить некоторые традиции и жить в ногу со временем. Полина была остроумна и говорила с юмором. Она стала графиней де Панж, написала много работ и защитила диссертацию в Сорбонне. Получала различные литературные премии и была членом жюри премии Фемина.

В 1892 году, когда Альбертина уже вышла замуж, Морис, морской офицер, нес службу, Филиппа давно не было, а четырехлетняя Полина оставалась единственным ребенком в доме, родился ее брат Луи. Хрупкий, несколько капризный, очень подвижный («*Я не виноват, что так быстро бегаю*», – защищался он), словоохотливый шалун, этот ребенок очень рано проявил свой независимый нрав, с подтверждением чего мы еще встретимся.

«*Луи был очаровательным беби, курчавый, живой, с глазами, полными лукавства*», – говорила о нем сестра Полина [3]. Оба ребенка воспитывались окруженные няньками и прислугой, в роскоши, которая отдаляла их от остального мира.

Каждый день четырехместная карета с раскрывающимся верхом, запряженная двумя лошадьми, ради эффектности нанятая за большие деньги, увозила их в парк де Багатель. Они имели привилегию разделять этот парк вместе с двумя детьми из других семей благодаря дружбе, которую некогда дед Луи де Бройля поддерживал с владельцем этих мест – знаменитым любителем искусств и английским филантропом сэром Ричардом Уоллесом (*фонтаны* которого еще можно обнаружить в Париже). Дети бегали одни в громадном парке, заполненном статуями (которые впоследствии были убраны). В 1890-х годах эти кварталы Парижа были очень пустынны. Луи де Бройль показывал мне фото начала века, которое он снял сам. На нем улица Елисейские Поля в один из дней недели абсолютно пустая, без машин и прохожих.

Безлюдность парка была в тягость детям, и воспитатели перевели их в более привычную часть Булонского леса, посещения которого продолжались недолго. Полине внушали страх даже игры с девочками, носившими странную фамилию (Драке дель Кастильо), но, слава богу, они были из хорошей семьи и жили на Елисейских Полях.

Это замкнутое и ограниченное приличиями воспитание кажется удивительным для того, кто знал Луи де Бройля уже взрослым – такого безразличного к условностям, титулам и иерархии, мало заботившегося о внешнем виде и формулах вежливости (конечно, в рамках приличий) и оценивавшего людей только по их внутреннему миру. Иногда он обращал внимание на экзотично звучавшие фамилии, стараясь их точно запомнить, чтобы не ошибиться в произношении. Он не придавал значения происхождению людей, их политическим взглядам, цвету кожи или принадлежности к религии и относился к людям в соответствии с их достоинствами и недостатками. Однако было забавно отмечать, когда он делился со мной своими воспоминаниями, каким неожиданным образом он подчеркивал особенности своего воспитания и правил поведения. Так, он рассказал мне, что после смерти отца, в 1906 году, мать записала его для окончания среднего образования в лицей Жансон-де-Сайи. И это было важно для него, поскольку заставило выйти из обычного круга своих знакомств. «*Я познакомился*, – говорил он мне, – *со многими людьми, очень удаленными от моей семейной среды, такими как сыновья банкиров или промышленников*». Мне, привыкшему к гораздо более широкому кругу общения, его новые знакомства не показались случайными. Лицей Жансон считался открытым учебным заведением, но, похоже, лишь для весьма ограниченного круга французского населения. Мне было забавно, как Луи де Бройль, конечно, знавший об этом, вдруг это забывал и оценивал свое прошлое в соответствии с детскими впечатлениями.

На его детство наложили отпечаток два переезда, один из которых произошел до его рождения, когда мать получила в наследство замок Сант-Амадур, расположенный в Анжу, вблизи Бретани [3]. Его отец был избран депутатом, и семья часть года находилась там, немного отдаляясь от парижской роскоши. Жизнь протекала между Сант-Амадур и улицей Ла Боэте, и в ней не было места для Дьепа. Дом на улице Агуадо продали, и Луи де Бройль понемногу забыл о своем месте рождения. Однако он сохранил приятное воспоминание о чуть печальной и однообразной доброте замка Сант-Амадур. Он любил уединенную деревенскую жизнь, спокойствие и тоскливость, которую расхваливал мне.

«*Что вы хотите*, – говорил он, – *сегодня, когда культура не находится в упадке, ей определенно не хватает двух вспомогательных средств – праздности и скуки? Там же не нужно было делать ничего, только читать и размышлять*». Он говорил мне о своей матери: «*Образованная женщина, ей нечего было делать, кроме как много читать. Только светские заботы занимали ее время. Сегодня все или почти все обязаны работать, чтобы жить, и редкие праздные люди тратят время на путешествия, если они потеряли вкус к учебе, и, конечно, больше нет людей светских, но образованных, которые оживляли парижские салоны и принимали писателей, художников и ученых*». Эта цитата, которую я нахожу в моих записях, интересна тем, что она единственная из известных мне, где Луи де Бройль отмечает позитивную сторону светской жизни, которая, вообще-то, заставляла его скрежетать зубами. В другой раз, когда он порицал по своему обычаю салонную жизнь, я скромно высказал, что «*...несмотря ни на что, литературные салоны...*», но он грубо оборвал меня: «*Вы так думаете! Это только пустословие. Когда пишут, то пишут в одиночку, не нуждаясь в салоне. Писатели бывали там, чтобы только развлечься*».

В тишине Сант-Амадура Луи де Бройль познал прелести чтения и учебы. Как и множество детей, он интересовался естественными науками. В то время как его сестра Полина приобщалась к геологии и собирала полезные ископаемые в окрестных карьерах, он учился распознавать растения, насекомых и птиц. В отличие от многих других он не терял вкуса к этому занятию и продолжал упражняться в этом всю свою жизнь, методически наблюдая природу во время своих прогулок в Булонском лесу или даже через окно. Я слышу его, говорящего мне с любовью «*о дятле, спускающемся по деревьям в поисках насекомых под корой*». Он читал книги по ботанике, энтомологии и орнитологии. Более двух десятков из них находится в его архивах, с закладками, написанными им собственноручно. Он имел и книги, часто очень красивые, по зоологии и теории эволюции, которыми также живо интересовался. Жизнь в Сант-Амадуре пробудила в нем глубокий интерес к природе, но об этом он почти никогда не говорил.

После смерти герцога Альберта, в 1901 году, произошел второй переезд семьи в Бройли. Это случилось, когда отец Луи де Бройля принял наследство и занял семейное поместье. Семья отныне чередовала свое пребывание в Бройли и в Сант-Амадуре и намного меньше бывала в Париже. Особняк на улице Боэте был продан и заменен немного более скромным особняком в сквере Мессин, около парка Монсо. В Париж прибывали ненадолго и лишь зимой. В связи с принятием Виктором де Бройлем титула герцога де Бройль вынужденно все реже посещал семейный замок.

Луи де Бройлю никогда не нравилось бывать в этой мрачной крепости, тем более что она была перегружена историей. Имение получило историческую значимость задолго до того, как перешло во владение семейства де Бройль. Очень старое поместье, построенное Гийомом де Конкерантом под именем Шамбре, было местом проживания Жан-сан-Терра, и Столетняя война наложила свой отпечаток. Крепость выдерживала осады и не раз переходила из рук в руки. Суровость нескончаемых крепостных стен и тяжесть ощущений, несомненно, связанных с этим воспоминанием, особенно ассоциировались с последним (до де Бройлей) владельцем замка – маршалом де Помпоном, братом великого Арнольда. Это место было достойно маршала Франсуа-Мари де Бройля, который получил его от Луи XV вместе с титулом герцога и правом присвоить фамилию своему новому владению. Эта монаршая милость была отступлением от традиций времени, согласно которым название поместья служило приставкой к фамилии владельца. Второй герцог (Виктор-Франсуа) доставил сюда трофеи Бергена (из них восемь пушек исчезло во время Революции). В XIX веке, при прадеде Луи де Бройля, третьем герцоге, политические и философские дебаты доктринеров занимали место патриотических од во славу оружия и следовали английской моде, подобно плющу, взбирающемуся по башням и деревьям, приближаясь к стенам.

Все эти обстоятельства вызывали отвращение Луи де Бройля, хотя соответствовали его характеру, также достаточно суровому. Любопытно, что он никогда или почти никогда не упоминал о тысячах книг, хранившихся в замке, в частности об исторической библиотеке с собранными в ней за несколько веков сокровищами. Не рассказывал о развлечениях детей, которых показывал мне на фотографиях. Тем более не говорил о комнатах, остававшихся ледяными, несмотря на огонь в каминах, и о длинных коридорах, по которым зимой передвигались не иначе как закутавшись в широкие плащи. Он поведал о жутком детском страхе, охватившем его, когда в одном из коридоров он встретил старшего брата Мориса, переодетого призраком, – завернутого в белую простыню, широко размахивающего руками и испускающего заунывные вопли.

Что его в высшей степени раздражало (уже 70 лет спустя), так это светские приемы. «*Отдаете ли вы себе отчет,* – говорил он мне, – *что летом во все дни устраивались обеды для мужчин во фраках и женщин в вечерних туалетах*». Он произносил слова «*во все дни*» с легкой дрожью возмущения в голосе. Помимо традиционных приемов устраивали обеды по любому случаю, поскольку граф питал нереализованную надежду попасть в академию.

Когда юный Луи достиг возраста, при котором мог принимать участие в этих обедах, нередко случалось так, что он тихо покидал прием, чтобы, удалившись в комнату, предаться чтению. Его мать, герцогиня, посылала за Луи своего камердинера Николя, но тот, потакавший своему хозяину, возвращался ни с чем, будто его не нашел.

Между тем как раз перед переездом в замок в семье произошло событие, которое должно было предопределить будущее Луи де Бройля. В 1898 году его старший брат Морис, в то время гардемарин, вернувшись из плавания, взял шестимесячный отпуск и решил посвятить себя науке. Это было возвратом к потаенным мечтам, так как он выбрал морскую карьеру лишь потому, что мореходное училище было ближе всего к науке из тех учебных заведений, куда он мог поступить, не слишком нарушая семейную традицию. Портом его приписки был Тулон, и ему было поручено установить там радиосвязь на военных кораблях. Выполняя задание, он познакомился с Леопольдом Бризаром, преподавателем физики в городском лицее, который давал ему советы. Бризар окончательно отвернул Мориса от карьеры морского офицера, открыв перед ним перспективы новой физики электронов и *X*-лучей, которые вскоре, уже в XX веке, привели к громадному научному взрыву. Молодой и блестящий протеже Бризара загорелся новыми идеями. По возвращении в Париж Морис самостоятельно собрал в своей комнате рентгеновскую установку, генерирующую *X*-лучи в условиях, о приемлемости которых предпочитали не думать: физики в то время еще не знали, что излучение может стать причиной болезни. Но поскольку Морис де Бройль прожил 85 лет, надо думать, что опасность его миновала. Он начал блестящую научную карьеру, однако разочаровал семью. Домашние, обеспокоенные его мечтательным характером и выбором мореходного училища, надеялись, что он станет хотя бы адмиралом. Увы! Но разве можно было об этом догадаться? А сейчас он походил на одержимого изобретателя, немного маниакального, как и его покойный дед д'Армайе. За помощью в «исследованиях», не имея лаборанта (сегодня этот сотрудник носит гордое название «технический агент»), он обращался к своему камердинеру Алексису Каро, преданность и умелые руки которого всегда ценил по достоинству. Это непредвиденное продвижение пробудило в нем ум и воображение. Став для Мориса де Бройля ценным сотрудником, Алексис Каро следовал за ним в научной деятельности и получил несколько патентов на изобретения.

Прошло 15 долгих лет, прежде чем Луи де Бройль последовал примеру своего брата. До этого он был лишь блестящим и прилежным юношей, который внимал наставникам. Первым учителем был «*священник с длинной бородой, бывший миссионер*» [3], аббат Рейнал Дюпюи. Это имя я узнал случайно от сестры францисканки, матери Мари Ина Бержерон. Не знаю, что осталось от его обучения, но, без всякого сомнения, не катехизис. Юный Луи не был исключением в семье де Бройль, которая мало следовала религии [3]. Можно даже добавить: тот, кто сегодня кажется воплощением традиций начала века этой семьи, на самом деле является таковым гораздо в меньшей степени по сравнению с его окружением. Пригород Сен-Жермен считал семейство де Бройль скорее подозрительным, потому что они не были легитимистами и надеялись только на реформу Конституции. Герцог Виктор даже поддерживал Поля Домье, отстаивая свои убеждения в палате в жарких спорах с правыми.

Казалось, что Луи де Бройль и его сестра Полина должны перенять семейный факел, дабы преуспеть в политических играх. В этих играх они имитировали современные дебаты, на которых им приходилось присутствовать благодаря отцу. Луи де Бройль, мальчик, исполненный жизни и веселья, блестяще и комично имитировал услышанных трибунов и в домашних спектаклях выдвигал проекты фантастических законов. Он придумал с сестрой воображаемое королевство, престол которого занимали их родители, герцог и герцогиня, а премьер-министром был он сам. В то время Полина вряд ли могла быть премьером, она занимала пост морского министра в призрачном правительстве. И это было не так плохо.

Женитьба старшего брата Мориса интересует нас по причине его влияния на будущее Луи де Бройля, а также потому, что дает возможность добавить несколько штрихов к описанию его характера. В 1904 году Морис женился на молодой и очаровательной Камилле де Рошетайле, богатой наследнице, это давало надежду на уменьшение расходов по содержанию замка. Семейство Рошетайле отличалось от семейства де Бройль во многих отношениях. Эти люди вели жизнь одновременно более роскошную и простую, менее светскую и более открытую внешнему окружению. Были привязаны к религии, но не фанатично, любили путешествия. Некоторые интересные факты, касающиеся Луи де Бройля, относятся к этому времени.

Вот один из них, связанный с визитом в Париж короля Испании Альфонса XIII. Де Бройли видели его на Елисейских Полях, с балкона семьи Драке дель Кастильо [3]. Луи и его сестра Полина обрадовались, как и любой ребенок в подобной ситуации. Однако он рассказал мне об эпизоде, забытом сестрой. Во время визита короля проходила месса в испанской капелле на проспекте Фридланд и госпожа де Рошетайле (мать Камиллы) привела туда детей. Графиня де Панж сохранила об этом трогательные воспоминания. А Луи де Бройль вспоминал, как сбежал, потому что месса ему наскучила. В одной из своих книг графиня де Панж пишет об этом, но, мне кажется, не очень точно рисует характер брата. Она считала почти невообразимым, что этот мальчик, живость которого заполняла весь дом, впоследствии станет строгим ученым. Правда же заключается в том, что он не изменялся. Конечно, он старался сдерживать ребяческие манеры (правда, не всегда это удавалось), но, даже став глубоко мыслящим ученым, «официальным» лицом, тем не менее сохранил дух фрондерства, любовь к насмешкам, привычку к имитации и шутливому неуважению, которые его характеризовали. Он продолжал подшучивать над близкими, над великими мира сего, включая тех, кого уважал и кем восхищался (а тем более тех, кого держал на прицеле). И никто не был достоин снисхождения. Он так же весело шутил над Декартом и Галилеем, как будто они находились в соседней комнате. Таким образом, его беспощадность была естественной, а не приобретенной с возрастом. Она всегда была в нем и существовала наряду с живостью и лукавством, как показывают две следующие забавные истории, произошедшие, когда ему было 15 лет.

Первая связана с госпожой Рошетайле, с которой он прогуливался однажды. Они проходили мимо витрины антикварной лавки, где продавались предметы религиозного культа. Желая угодить чем-нибудь душе юного нечестивца, госпожа Рошетайле выразила желание подарить ему один из предметов и предложила выбрать. Юноша охотно согласился, и они вошли в магазин, но набожная дама не заметила, что все эти предметы не являлись предметами христианского культа. Луи де Бройль не упустил такой возможности и унес с собой… маленького бронзового Будду, которого хранил 80 лет, до конца своих дней. Он держал его перед собой в Нейли на секретере напротив письменного стола и рассказал мне эту историю со сдержанным ликованием. Он обратил мое внимание на то, что рядом с Буддой находятся мраморные часы, которые в противовес часам Людовика XVI, стоящим на камине, недорогие, но очень хорошо показывают время. Я, напротив, считал их неточными, но оказалось, что он постоянно выставлял их на пять минут вперед, чтобы прибывать на встречи вовремя. Направив свой взгляд на стенку, чуть в тени, по левую сторону секретера, он показал мне очень темную картину, которая являлась объектом следующей забавной истории.

Эта маленькая картина оказалась всего лишь бумажной репродукцией, которую он купил в магазине музея Лувра, когда ему было 15 лет – в том же году, к которому относится первая история. Это был один из «*Философов*» Рембрандта. Мужчина с белой бородой в просторном черном одеянии и с беретом на голове сидел в кресле перед громадной книгой, лежавшей на аналое. Сцена освещалась справа через единственное окно, свет из которого контрастировал с сумраком остальной части картины. Позади философа находилась темная сводчатая ниша. Слева был узкий коридор с тремя ступенями в глубине. Еще левее широкая, немного нереальная винтовая лестница поднималась к потолку напротив окна, освещавшего ее. Трудно представить себе более суровый и мрачный образ, но это была единственная репродукция, купленная 15-летним мальчиком, по крайней мере единственная сохранившаяся с той поры. На обороте картины имелась надпись, сделанная рукой Луи де Бройля: «*Размышляющий философ Рембрандта* (*sic*)».

Таким образом, среди предметов, находившихся в кабинете, три оказывались связанными воедино для того, кто владел тайной их происхождения. Позади ученого – портрет третьего маршала; перед ним – философ и маленький Будда, символы *традиции, уединенного размышления и свободы духа.* И эту свободу символизировал маленький Будда, а не кукиш в кармане религии или некоторые другие проявления атеизма. Это выражало только отказ от цепей какой-либо системы. Три символа, окружавшие Луи де Бройля, полностью характеризовали его, без противопоставления его привязанности к традиции и необходимости свободы.

В 1908 году Луи де Бройль окончил лицей Жансон-де-Сайи. Решение направить его на учебу в лицей было принято по настоянию двоюродного брата, Пьера де Люппе. Выбор учебного заведения оставался за братом Морисом, который остановился на лицее Жансон исключительно потому, что преподавателем физики туда только что был назначен Бризар. Таким образом Морис приближал своего брата к началу научных исследований, и, как оказалось, его преподавателем стал именно Бризар [4]. Об этом он говорил мне несколько раз. Луи де Бройль был отличником по физике и средним учеником по математике и химии. Его слабым местом было черчение. Он считался блестящим учеником по философии и литературе, которая была его первым выбором. Однако – опять же по настоянию брата – он выбрал для первой ступени бакалавриата латинский и науки. На следующий год он прошел вторую ступень одновременно по математике и философии. Тогда ему исполнилось 16 лет.

Загадочный эпизод, датируемый тем же годом, что и предыдущие случаи, волновал Луи де Бройля настолько, что он оставил мне его описание на двух страницах. Прибыв на обед в числе еще нескольких персон к госпоже Рошетайле (дом 29 по улице Шатобриан), он услышал, как хозяйка объявила о визите некой мадам де Тебес, популярной хиромантки. Во время кофепития прорицательница уединялась поочередно с каждым из приглашенных. Когда настала очередь юного Луи, она воскликнула: «*Ваша рука очень необычна. Она интереснее всех, что я видела этим вечером… Но мне трудно объяснить вам почему… Вы станете известным своими работами по механике*». Луи де Бройль не увлекался паранормальными явлениями, и слепая вера в сверхспособности вызывала у него недоумение, он относился к этому со скептицизмом и все же мучился вопросом, что же хотела сказать прорицательница. Слово «механика» тогда в его понимании означало лишь автомобильную механику, которой он совсем не интересовался. Позже это предсказание, совпавшее с действительностью, его очень озадачило.

Я не случайно назвал адрес дома, где с Луи де Бройлем произошла странная история. По этому адресу, на улице Шатобриана, находилась лаборатория Мориса де Бройля, работы которого начали приносить свои плоды. Упомяну, что лаборатория выходила окнами также на улицу Лорда Байрона. В 1908 году Морис должен был защищать свою докторскую диссертацию по ионизированным газам. Его работы уже привлекли внимание известных ученых: Ланжевена, Перрена, мадам Кюри, Бореля, Пенлеве. Юный брат был пока только зрителем. В следующем году он получил диплом бакалавра, имел вкус к учебе, но еще находился в поисках призвания. Он записался в Сорбонну на историю, возможно, под влиянием своего племянника Шарля де Люппе, который был его ровесником (напомню, что между Луи и его старшей сестрой Альбертиной существовала большая разница в возрасте). Юноши блестяще прошли свой лиценциат вместе.

Луи де Бройль выбрал своим главным предметом историю средних веков, что «*позволило узнать прелести палеографии и византийской истории*» [5, 6]. На устном экзамене по современной истории преподаватель, забавляясь, долго расспрашивал его о событиях, в которых участвовали члены его семьи. Шарль де Люппе продолжил свое обучение и после бакалавриата окончил Школу права, а Луи де Бройль оставил занятия историей, хотя и продолжал всю жизнь интересоваться ею. В то время он, по его собственным словам, «*немного плавал*» [5, 6], занимался год правом, изучал иностранные языки, искал себя. Неожиданно он вернулся в науку и за два года получил первую ученую степень.

И вот отсюда я начну разговор о науке, стараясь, чтобы никто из многочисленных читателей не закрыл на этом месте книгу. А потому буду выражаться достаточно понятно, делая некоторые редкие уточнения или ссылки для тех, кто пожелал бы углубить познания. Конечно, здесь не будет математики, за исключением одной или двух знаменитых формул, которые я воспроизведу, чтобы читатель увидел их хотя бы раз (даже не понимая их!). И только глава 4, в которой я изложу содержание докторской диссертации Луи де Бройля, будет чуть плотнее заполнена новыми концепциями, но и там я постараюсь в простых понятиях изложить наиболее важные физические идеи, философские тенденции и черты характера Луи де Бройля, проявлявшиеся в его работе.

ГЛАВА 2. Наука – смысл жизни

Физика в начале прошлого века находилась в возбужденном состоянии. Но любопытно, что, например, Бризар, преподававший в лицее, досконально знал обо всех новостях физики, а из Сорбонны доносились лишь слухи о них. Это вызвало у Луи де Бройля настороженность по отношению к университету, сохранявшуюся всю жизнь. Так, он рассказывал мне насмешливым тоном юного студента, как Габриэль Липпман рассуждал о теории относительности. Этот достойный физик, получивший недавно Нобелевскую премию за изобретение метода цветной фотографии, но не веривший в теорию относительности, выдвигал против нее достаточно экстравагантные аргументы. Так, он отрицал *релятивистское отставание часов,* согласно которому наблюдатель, движущийся относительно другого, отмечает, что время у него движется медленнее, чем у другого наблюдателя. Это именно то, что Луи де Бройль использует однажды в волновой механике. Однако Липпман хвастался, что, сверив свои карманные часы с часами салона, он прокатился «*очень быстро*» на карете вокруг сада и не обнаружил никакого отставания своих часов. Ему охотно верили: эффект требовал скоростей, близких к скорости света, равной 300 000 километрам в секунду!

20-летний Луи де Бройль буквально кипел от возмущения, которое порой охватывало его даже спустя 60 лет, перед степенным скептицизмом профессоров, поскольку сам стоял на позициях теории относительности, уже известной ему в то время. Он получал знания скорее из книг, чем на лекциях, и мог бы присоединиться к словам математика Абеля, который на вопрос, как он, такой юный, достиг столь значительных познаний в математике, отвечал: «*Читая авторов и никогда учебники*».

Луи де Бройль именно так изучал механику – по трудам Аппеля и Пуанкаре, а оптику – по только что переведенному с немецкого языка трактату Друде, который одним из первых начал преподавать максвелловскую электромагнитную теорию света. Размышляя над этими трудами еще тогда (с его слов, в 1911 году), он был поражен аналогией между оптикой и механикой, которая будет положена в основу всех его работ. Вот о чем идет речь.

Геометрическая оптика, которая описывает распространение световых пучков, основана *на принципе Ферма,* согласно которому свет всегда следует по наиболее короткому пути, или, точнее, по пути, где *время* движения минимально. Это объясняет то, что в однородной среде свет движется по прямой линии. С другой стороны, механика, по крайней мере в движениях, при которых сохраняется энергия, подчиняется *принципу Мопертюи,* который также является принципом кратчайшего пути, но немного более абстрактным. Движение материальной точки должно давать минимальное значение величины, называемой *действием,* определяемым на каждом малом элементе траектории как произведение длины этого элемента, массы материальной точки и ее скорости (полное действие есть сумма всех этих малых действий). В частности, если точка не подвержена воздействию никаких сил, она будет двигаться по прямой линии, согласно *принципу инерции* Галилея.

Де Бройлю[1] сразу пришла в голову идея объединить оптику и механику в одну теорию на основе одного принципа наименьшего действия. В этом он имел известных предшественников, Мопертюи в XVIII веке и Гамильтона в XIX веке, которым не хватало двух основных элементов: относительности и квантов. Мы еще вернемся к этим вопросам, оставив их на потом, как это делал де Бройль. В то время он был, по его же словам, «*всего лишь хрупким подростком, будущее которого находилось еще на коленях богов*» [8]. Он был молодым человеком с незаурядными мечтами и живым воображением, познания которого не поражали значительностью, но который уже впечатлял товарищей своими способностями. Один из них, русский студент, сделал такое предсказание:

«*Однажды вы станете принцем науки*».

Именно в это время совершился поворот в жизни де Бройля, вызванный *Сольвеевским конгрессом 1911 года.* На этом конгрессе происходило нечто очень волнующее, не зря его признали значительным научным событием. Необходимо, чтобы читатель понимал это, иначе важность труда де Бройля ускользнет от него. И поэтому далее мы опишем новый период истории эволюции современной науки. Она явится противовесом семейной истории, описанной в предыдущей главе, хотя протекала в течение тех же трех веков.

---

[1] Некоторые читатели будут шокированы тем, что я пишу «де Бройль», приставляя частицу и не говоря о титуле и имени, что не принято (во Франции). Но отныне я пишу о человеке науки и следую обычаю, принятому в научной среде.

Современная наука начала развиваться в XVII веке, и главным образом благодаря Ньютону. Конечно, были и другие великие ученые. Сам Ньютон говорил: «*Если я видел далеко, так это потому, что стоял на плечах гигантов*» (имея в виду Галилея и Кеплера), но именно он основал экспериментальный метод изучения природы и математическую физику, то есть науку, которую мы знаем. К тому же он был гениальным математиком, но нас интересуют его работы по оптике, механике и гравитации [9, 10]. Картина мира, вытекающая из его работ, представляет собой *пространство, заполненное движущимися материальными частицами.* Его механика базируется на описании частиц, испытывающих действие сил (это знаменитая формула $F = ma$, которая не была записана им, но содержится в словесной форме в его труде). Его оптика развивает *корпускулярную теорию света*, отождествляющую световой пучок с потоком частиц.

Эта картина мира в действительности не соответствует философии Ньютона, который полагал, что пространство заполнено эфиром (он уже знал, что речь не идет об обыкновенной жидкости), и отвергал идею действия на расстоянии, выдвинутую им, однако, для обоснования своей теории гравитации. Он прибегнул к этому, поскольку не нашел подходящей модели эфира и был за то, чтобы не выдвигать гипотез, которых не требует эксперимент. Инициатор феноменологии, он предпочитал прибегать к формулам, которые согласовывались бы с фактами, даже если они противоречили его пониманию явлений, и не отступал от эксперимента, жертвуя на первый взгляд правдоподобными аргументами, которые только и использовали до него.

И хотя современники, предрассудки которых он задел, вступили с ним в спор, его метод одержал победу. Теории Ньютона показали необычайную плодотворность и дееспособность, и, как происходит в подобных случаях, его громадный авторитет охранял науку в течение двух столетий в форме, которую ученый ей придал. В то же время его собственные сомнения и вопросы канули в забытье. Эта ситуация сродни сегодняшнему положению дел: физика застыла в состоянии, в котором нам ее оставили Эйнштейн и другие гении, основатели современной науки. Развитие науки уступило место развитию только ее приложений, что дает иллюзию прогресса, скрывая отсутствие новых идей.

По правде говоря, только механика Ньютона оставалась незыблемой до начала прошлого века. В оптике разноголосица мнений слышна была уже в его эпоху. Развернулось противостояние, в котором через два века решающую роль сыграли Эйнштейн и де Бройль. Первым голосом в этом хоре был трактат Гюйгенса [11], знаменитый и сегодня, в котором он отстаивал *волновую теорию.* Для него свет являлся протяженными в пространстве волнами, распространяющимися как упругие возмущения эфира. Исходя из этого, он получил некоторые результаты, например законы отражения и преломления света и первую теорию двойного лучепреломления кристаллами (а именно – исландским шпатом). В противоположность Ньютону он пришел к принципу Ферма, используя другой принцип, который сам провозгласил. *Принцип Гюйгенса* описывал распространение волны в предположении, что все элементы ее фронта в каждый момент времени ведут себя как источники сферических волн, формирующих будущую волну.

С XIX века принцип Гюйгенса играет важную роль в теории волн, но он не был замечен вовремя, как, впрочем, и вся теория в целом, к тому же и принцип Ферма был понят позднее. Таким образом, долгое время корпускулярная теория Ньютона преобладала над волновой. Однако и она вначале была отвергнута, так как именно в оптике Ньютон развил свой экспериментальный метод вопреки своим современникам, склонным к описательным гипотезам и не заботившимся о проверке метода. Тем не менее все закончилось признанием ценности его опыта по разложению белого света призмой и восстановлению белого света из цветных лучей.

Ньютон отказывался принять волновую теорию света из-за аргументов, которые впоследствии были опровергнуты, но в то время казались определяющими. Главным из них был следующий: непонятно, как волны, расссеиваясь по всему пространству, образуют пучки лучей. Он высказал возражение, что световая волна должна бы, огибая препятствия, подобно звуковой, проникать в область тени предметов, что, казалось, противоречило фактам. И этот эффект существовал (*внутренняя дифракция*, которую наблюдал Гримальди в XVII веке). Однако Ньютон его игнорировал, и Френель объяснял это предубеждением Ньютона против волновой теории [12]. Ответ на возражение Ньютона заключается в *периодичности* световых волн, отсутствующей в теории Гюйгенса и введенной в начале XIX века Юнгом и Френелем. Прямолинейное распространение объясняется в этом случае интерференцией вторичных волн Гюйгенса. Они складываются в направлении распространения пучка и взаимно уничтожаются на образующей пучок фронтальной поверхности. Только столетие спустя, после Гюйгенса и Ньютона, Френель смог это доказать. Что касается явления огибания препятствий световыми волнами (общее для всех волн), то его эффект уменьшается с уменьшением длины волны. Так, звук огибает значительные препятствия, а длинные радиоволны – порядка километра – охватывают целые страны, но световые волны, в миллион раз более короткие, испытывают только слабые явления дифракции, которые лишь немного смазывают поверхности световых пучков.

Эти явления были известны во времена Френеля, но о них почти ничего не знали в тот период, когда жил и работал Ньютон, хотя первым *явлением интерференции были кольца Ньютона* (этот пункт заслуживает уточнения, поскольку сыграл очень важную роль в исследованиях де Бройля). Кольца Ньютона наблюдаются при освещении стеклянной линзы, находящейся в контакте с плоской отражающей поверхностью. Они имеют ту же природу, что и цветные полосы, которые наблюдаются на пятне бензина, растекающемся по поверхности воды. Эти полосы появляются из-за того, что световые волны отражаются на первой поверхности (поверхность пятна) и, проходя сквозь пятно, отражаются от поверхности воды и, возвращаясь обратно с некоторой задержкой относительно первых волн, интерферируют с ними. Если отставание равно целому числу длин волн, интенсивности складываются и свет становится ярче. Если разность хода равна полуцелому числу длин волн, интенсивности вычитаются и свет становится слабее. Когда толщина тонкого слоя повсюду различна, как это часто бывает, то имеются области, где волны складываются, и области, где они вычитаются, и, таким образом, наблюдаются темные и светлые полосы. А поскольку результат зависит от длины волны и, следовательно, от цвета, то происходит окрашивание полос в цвета радуги.

Именно такое объяснение предложил Ньютон, но связал его не с волнами, а с периодическими изменениями в *частицах*, приписывая им *способности* отражения и прохождения. Идея *периодического процесса, связанного с частицей,* вновь появится у де Бройля.

Теория волн должна была возродиться через столетие после Ньютона – с Юнгом и Френелем. Последний за десять лет создал такую волновую оптику, которая нам известна, и корпускулярная теория была отодвинута ею на задний план.

Носителем волн у Френеля являлся эфир, «доживший» до Эйнштейна. Но даже без эфира пространство не было полностью пустым, потому что в нем распространялись волны. Отныне не все физические объекты были составлены из тесно локализованных частиц. Успех волновой оптики был первой брешью в картине мира Ньютона, прорехой, которую де Бройлю придется заделывать синтезом корпускул и волн, и в то время она быстро увеличивалась.

Действительно, в период деятельности Френеля (20-е годы позапрошлого века) Ампер, продолжив работы Эрстеда по действию электрического тока на магнит, провел серию знаменитых экспериментов и заложил основание теории электричества и магнетизма. Он использовал законы ньютоновского вида (например, закон Кулона с зависимостью от $1/r^2$), но добавил свою ложку дегтя, означавшую конец действию на расстоянии и появлению идеи поля, связанного с именами Фарадея и Максвелла.

Фарадей, гениальный экспериментатор, открыл многочисленные явления, одним из которых было возникновение электрического тока при изменении магнитного потока в цепи. Его первые работы проходили в одно время с работами Ампера. Он изучал линии магнитных сил, образованные на листе бумаги насыпанными железными опилками, как это до сих пор демонстрируют на уроках физики. Но в конце концов он сделал решительный концептуальный шаг. Вместо того чтобы видеть в этих линиях только проявление силы, производимой магнитом, он стал рассматривать их как эффект изменения *свойств самого пространства*. Сила не была больше для Фарадея аналогом действия ньютоновской гравитации на расстоянии, он рассматривал ее как результат действия локальной причины – магнитного поля, линии сил которого изображают его пространственное распределение. И таким же образом он вообразил, что электрический заряд создает вокруг себя *электрическое поле*, действующее на другие заряды.

Основателем математической теории поля стал Максвелл, величайший после Ньютона физик. Мы обязаны ему знаменитыми *уравнениями Максвелла*, датируемыми 60-ми годами позапрошлого века, которые Больцман приветствовал стихами Гете: «*Не был ли Богом тот, писавший эти знаки?*» Эти уравнения описывают *электромагнитное поле* и включают в себя всю науку об электричестве. Кроме решений, отвечающих ожидаемым явлениям, Максвелл нашел другие, соответствующие *электромагнитным волнам*, которые будет наблюдать Герц в 1888 году, а именно радиоволны. Наиболее удивительным теоретическим результатом Максвелла было вычисление скорости распространения этих волн, равной скорости света, и сделанный им отсюда вывод, что свет образован такими волнами. Так возникла *электромагнитная теория света,* впоследствии хорошо подтвержденная экспериментально. Совокупность электромагнитных волн, лишь часть из которых была известна Максвеллу, простирается от радиоволн до гамма-лучей. В этих пределах находятся инфракрасные лучи, видимый свет, ультрафиолетовые и *X*-лучи (рентгеновские лучи). Все полотно физики, охватывающее электричество, магнетизм и волновую оптику Френеля, отныне принадлежало миру полевой теории и ускользало от ньютоновского описания. Характеризуя это открытие, Эйнштейн в 1931 году по случаю 100-летия Максвелла писал:

«*...До Максвелла физическая реальность для представления природных явлений задумывалась в виде материальных точек. После Максвелла физическая реальность представлялась уже в форме непрерывных полей, не сводимых к механическому объяснению... Это изменение нашего понимания действительности является более глубоким и более плодотворным, чем все то, которое претерпела физика после Ньютона*» [13].

Идеи Максвелла были восприняты многими физиками со скептицизмом. Можно подумать, что атомные теории, развивавшиеся в то же самое время (в частности, благодаря самому Максвеллу), должны были получить общий толчок своему развитию как логическое следствие корпускулярного представления Ньютона. Но этого не происходило. В то время как новаторы – Френель, Карно, Максвелл, Больцман – были одновременно сторонниками световых волн и атомов, консерваторы отказывались от атомов и волн вовсе. Можно даже сказать, что если теория поля долгое время оставалась неизвестной, то атомная теория встретила наибольшую оппозицию.

Главные противники атомизма рекрутировались в термодинамике, что было удивительно, ведь ее основателями являлись как раз атомисты. К ним относятся следующие ученые: Карно, открывший второе начало; Джоуль (вместе с Майером), открывший первое начало; Клаузиус, который ввел понятие энтропии[2]. Раскол термодинамиков на противников атомизма (большинство)

[2] Термодинамика базируется на двух величинах – энергии и энтропии – и двух началах. Согласно первому всякая изолированная система сохраняет свою энергию, а согласно второму ее энтропия может только увеличиваться, что приводит к необратимости природных процессов.

и его приверженцев (меньшинство) имеет в корне своем противостояние, которое мы вновь встречаем в современной физике. Это противостояние между физиками-формалистами, сторонниками дедуктивной науки, основанной на абстрактных принципах, и физиками-моделистами, которые испытывают необходимость в представлении конкретной картины мира. Формалисты XIX века считали атомы полезными в начале развития термодинамики, но затем отбросили их как ненужный шлак или украшение, портящее красоту здания. Существование атомов противоречило их духу, в чем они дважды ошибались. С одной стороны, их доводы будут опровергнуты значением атома, которое он получил в XX веке, а с другой стороны, их система переоценивала энергию по отношению к энтропии и они не замечали, что второе начало означает необратимость природных процессов.

В противоположность энергетистам атомисты не успокаивались, утверждая, что имеет место только механическое представление микроскопических движений, ответственных, по их мнению, за тепловые явления, изучаемые термодинамикой. Невозможно выразить их идеал лучше, чем это сделал Луи де Бройль:

«*В тот день завеса прорвалась, и мы наконец заметили с облегчением физическую реальность, которая скрывалась за столь абстрактными формами классической термодинамики*» [14].

В действительности же главное противоречие возникло не между сторонниками и противниками новых теорий, а между концепциями корпускул и поля. Эйнштейн в цитируемом отрывке о Максвелле шел к главному, задерживаясь только на вступлении непрерывного в «ньютонов мир» дискретного и на воскрешении спора между бесконечно делимым миром Анаксагора и заполненным атомами миром Демокрита. Эта интерпретация не является личным мнением Эйнштейна, так как в 1871 году об этом говорил Максвелл в приветственном выступлении на открытии кафедры экспериментальной физики лаборатории Кавендиша, обрисовывая задачи физики в XX веке:

«*Две теории строения материи с переменным успехом противопоставляются с древних времен: теория плоской Вселенной и теория Вселенной, заполненной атомами, движущимися в пустоте… В применении динамических принципов к движению громадного количества атомов ограничение наших возможностей вынуждает нас оставить всякую попытку описания точной истории каждого атома и довольствоваться вычислением среднего состояния совокупности достаточно большого их количества, чтобы быть видимым… Единственный эффективный способ, имеющийся в нашем распоряжении, заставляет применять математические методы, принадлежащие к области вычисления вероятностей*» [13].

Теперь мы окажемся в конце XIX века и прикоснемся к истинно современной науке, к которой относится труд Луи де Бройля. Классическая механика Ньютона продолжала развиваться по большой части благодаря расцвету небесной механики и *аналитической динамики* Лагранжа, Гамильтона и Якоби, труды которых несколькими десятилетиями позднее послужили каркасом волновой и квантовой механики. В то же время благодаря работам Герца, Лоренца и пионеров радио электромагнетизм приобрел значимость. Но в каких бы то ни было формах электромагнетизм и механику можно было вписать в общую картину детерминизма благодаря когорте физиков, в то время еще порицаемых. Наиболее известными из них были Клаузиус, Максвелл, Гиббс и особенно Больцман, фигура которого доминировала в атомной теории. Именно ему принадлежит гениальная идея связать необратимость природных явлений, требуемую вторым началом, с *молекулярным беспорядком* и выразить энтропию в понятиях *вероятности* молекулярных движений.

Первый экспериментальный удар в пользу атомизма был произведен в конце XIX века. И осуществили его благодаря великолепному инструменту, трубке Крукса, предшественнице наших телевизионных трубок. Этот прибор тесно связан с открытиями *электрона, X-лучей и радиоактивности*[3] – тремя событиями, которые обеспечили триумф атомной гипотезы. Существование электрона как атома электричества сделало правдоподобным существование атомов вообще, и это предположение окрепло, когда были открыты радиоактивные излучения α- и β-излучения, тоже по своей природе корпускулярные. Что касается *X*-лучей, то в них распознали электромагнитное излучение с очень короткой длиной волны. Макс фон Лауэ (сотрудник и зять Планка) доказал это в 1912 году, проведя опыты по дифракции *X*-лучей на кристаллической решетке и подтвердив существование самой решетки, которое прежде только предполагали. Подобный эксперимент с электронами докажет позднее существование волны де Бройля.

Современная физика находилась еще в зародышевой форме, когда впечатляющие открытия следовали одно за другим, но данное событие ознаменовало встречу *атомизма и электричества.* Если в атомизме господствовал Больцман, то Лоренц был Больцманом в электромагнетизме со своей теорией электронов, которую он создал в 90-е годы XIX века. Лоренц предположил, что электромагнитное поле производится в материи и взаимодействует с ней на атомном уровне посредством движущихся элементарных электрических зарядов. Эти заряды он назвал *электронами* еще до того, как был открыт электрон в современном его понимании (ученый обозначал этим словом любой электрический заряд). Он различал два вида полей: тонкое микроскопическое («истинное») поле, которое быстро меняется, подобно молекулярному движению, и распространяется в межатомной пустоте, и макроскопическое поле, медленно меняющееся и усредненное по микроскопическому (поле Максвелла).

[3] 1. Электрон появился, когда Жан Перрен доказал, что катодные лучи трубки Крукса являются электрическими зарядами. 2. Рентген открыл *X*-лучи, которые испускала стеклянная стенка трубки под ударами электронов. 3. Поскольку в то же время наблюдалась флуоресценция стенок, Пуанкаре задался вопросом, не является ли флуоресценция и испускание *X*-лучей общим явлением. И хотя это было неверно, к счастью, Беккерель попытался обосновать предположение Пуанкаре, изучая флуоресценцию соли урана. Он не обнаружил *X*-лучей, но открыл радиоактивность.

Эти идеи соответствовали направлению физики, которое так привлекало де Бройля: статистическая термодинамика и теория электронов объясняли макроскопические эффекты, пытаясь обнаружить за видимостью объектов микроскопический мир, скрытая структура которого ускользала от наблюдений. Сегодня это называют теориями со *скрытыми параметрами*. Они подтверждены, и уже давно нет сомнений в существовании атомов и электронов. Но когда де Бройль попытался объяснить аналогичным образом квантово-механические законы, он вызвал всеобщее возмущение ортодоксальных физиков, которые видели в нем человека отсталых взглядов. Они забыли, что некогда их коллеги считали Больцмана таким же отсталым и испытывали к нему лишь пренебрежение; что физики XVII века с презрением относились к Ньютону, когда он утверждал, что цветные лучи уже присутствуют в белом свете до его разложения.

Теория Лоренца принесла вскоре значительные успехи в объяснении разложения света призмой на цвета, увлечения света движущимися средами (это предсказал Френель и наблюдал Физо) и открыла влияние магнетизма на источники света (эффект Зеемана). Но вместе с ней появились и большие трудности, которые вскоре спровоцировали научную революцию XX века. Главная из них была концептуальной: сопоставление атомной дискретности и непрерывности теории полей. До этого мир атомов и мир полей существовали раздельно, и было уже возмутительно иметь два образа мира, объясняющих одни и те же известные явления. По Лоренцу, эти два мира были взаимно проникающими, так как корпускулы (то есть электроны) были одновременно источниками и объектами действия полей. Вот что об этом говорил де Бройль:

«*Очевидно, что с некоторой точки зрения идеи Лоренца ознаменовывали возврат назад, определенный отказ от идей, руководивших самим Максвеллом, так как идеи Лоренца отвергали построение отдельной теории электромагнитного поля, вводя в это поле электрон как чуждое тело. Лоренц сам признавал это, когда писал в 1895 году, развивая теорию электронов: “Однако в гипотезе, которую я предлагаю, имеется в некотором смысле возврат к прежней теории электричества. Главная из идей Максвелла остается, но нельзя отрицать, что, допуская существование ионов, мы не так далеко уходим от электризованных частиц, о которых рассуждали прежде”*» [16].

Между тем трудность имела не только философский характер, ибо проявляла себя в необходимости заставить сосуществовать теорию поля с механикой точки, что ставило перед физикой сразу две проблемы: создание электродинамики движущихся тел и объяснение явлений излучения и поглощения света. Это были проблемы высокого уровня: первая привела к зарождению теории относительности, а вторая – к теории квантов.

Электродинамика движущихся тел была связана с проблемой *эфира*, заполняющего все пространство и являющегося носителем световых волн. Однако эта концепция противопоставляла друг другу два заслуживающих доверия эксперимента: уже упомянутое исследование Физо и опыт Майкельсона.

Эксперимент Физо (1851) доказывал, что материя увлекает свет при своем движении, но, согласно теории Лоренца, сам эфир не должен увлекаться и остается неподвижным. Но тогда было необходимо, чтобы движущееся тело ощущало *эфирный ветер*, как автомобиль ощущает воздушный поток. Однако это не так, как показал эксперимент Майкельсона (1881): эфирного ветра нет, и, даже против всякого ожидания и элементарного здравого смысла, *скорость источника света не влияет на скорость излучаемого им света.* Некоторые теоретики, такие как сам Лоренц, принялись искусственными усложнениями усовершенствовать теорию, пока в 1905 году неизвестный 26-летний физик, который должен был стать величайшим научным гением века, Альберт Эйнштейн, не создал в качестве ответа *теорию относительности.*

Принцип относительности постулирует, что законы физики должны быть едины для всех наблюдателей, движущихся прямолинейно и равномерно относительно друг друга. Таких наблюдателей называют галилеевыми. Подобный закон уже существовал в механике Ньютона (принцип инерции Галилея), но не в теории Максвелла. Эйнштейн возвел его в ранг всеобщего закона и решился модифицировать наиболее древнюю науку механику, чтобы согласовать ее с новейшей теорией электромагнетизма, а это привело к отказу от идей Ньютона о времени, пространстве и абсолютном движении. Он оставил гипотезу эфира и провозгласил принцип, который на первый взгляд, но только на первый, противоречил принципу относительности: *скорость света в пустоте остается одинаковой относительно всех галилеевых наблюдателей.* Это приводило к удивительным следствиям:

- *лоренцеву сокращению* – кажущемуся уменьшению размеров движущихся объектов;
- *релятивистскому замедлению хода часов,* о котором мы уже говорили и которое сыграет важную роль в рассуждениях де Бройля;
- *увеличению массы движущихся тел,* с таким замечанием Эйнштейна, *достойным интереса*: частота волны *увеличивается* со скоростью (вместо ее уменьшения), как частота хода часов, и увеличивается по закону увеличения массы. Мы увидим роль, которую сыграет это замечание в процессе открытия волновой механики;
- наконец, в постскриптуме к работе о теории относительности Эйнштейн показал, что любой перенос энергии соответствует переносу массы, согласно ставшему знаменитым соотношению $E = mc^2$.

Теория относительности произвела одну из двух научных революций, подготовленных электромагнетизмом Максвелла и теорией электронов Лоренца. Другая революция обязана теории *квантов*, разработанной Максом Планком в последние годы XIX века. Легенда представляла Планка степенным старым профессором, который плохо оценивал значение своего труда. Надо было никогда не видеть Планка, чтобы утверждать подобное! Он был одним из величайших термодинамиков своего времени (и именно поэтому открыл кванты) в расцвете сил, и его открытие явилось результатом божественного озарения, достойного озарения Кеплера, Максвелла или де Бройля. Рассказывают, что он поделился своей идеей с сыном: «*Я думаю, что нашел нечто того же порядка, что и гравитация Ньютона*».

Перед Планком стояла задача исследовать *излучение абсолютно черного тела* – равновесное излучение, устанавливающееся в печи при постоянной температуре в процессе обмена энергией со стенками. Это была модель, к которой издавна прибегали, чтобы понять, как вещество испускает и поглощает свет. Некоторые результаты были уже достигнуты, но наиболее тонкая задача состояла в том, чтобы показать, как энергия распределяется между различными частотами излучения. Используя классические законы, Вин получил общий закон и ввел в него неизвестную функцию, которую оставалось отыскать. Сначала эти поиски привели к катастрофическому результату: *закону Рэлея – Джинса*, который остается в истории науки как рухнувшая вершина классической физики. Закон, точный при низких частотах (красное и инфракрасное излучение), приписывал более высоким частотам очень высокие энергии, что приводило к абсурдным следствиям («ультрафиолетовая катастрофа»): материальное тело должно было светить ночью при любой температуре и излучать бесконечную энергию. Этот результат вызвал шок, потому что закон Рэлея – Джинса имел наилучшее теоретическое обоснование и, таким образом, потерпел сокрушительное фиаско.

В то же самое время Вин нашел другое решение, которое, несмотря на сомнительное основание, оказалось лучшим. Точный при высоких частотах, его закон хуже работал при низких, но все-таки не приводил к абсурду. Планк воспринял его всерьез и попытался улучшить. Он получил, как скромно выражался позднее, «*удачную интерполяцию*» между законом Вина и законом Рэлея – Джинса: это был его знаменитый *закон излучения абсолютно черного тела*, представленный Немецкому физическому обществу 19 октября 1900 года. Друг Планка, Рубенс, той же ночью сравнил его с экспериментальными результатами и обнаружил совершенное согласие с законом во всем спектре частот [15].

Грандиозный труд Планка начался с теоретического осмысления его формулы. Он нашел свой закон из рассуждений об энтропии излучения, и Больцман по этому поводу сделал замечание большой важности [16, 17]. Он предложил ввести *дискретности,* чтобы использовать их в вычислениях и, таким образом, иметь возможность связать энтропию с вероятностью, как он уже сделал для газов. Вот это и реализовал Планк. Он пришел к необычному заключению, что вещество излучает и поглощает свет дискретными порциями, *квантами,* энергия которых зависит не от интенсивности излучения, а от его частоты ν, в соответствии с гениально простой формулой, представленной Немецкому физическому обществу 14 декабря 1900 года в виде *закона квантов*:

$$E = h\nu,$$

где h – знаменитая *постоянная Планка*[4].

[4] Данная постоянная очень мала: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Эта величина является произведением энергии на время, таким образом, h – то же самое действие, что и в принципе наименьшего действия.

Квант энергии *hν* тем больше и его тем труднее испустить или поглотить, чем выше частота. Поэтому закон Планка лучше описывает излучение более высоких частот и согласуется с законом Вина, что позволяет избежать фиолетовой катастрофы закона Рэлея – Джинса, хотя и приводит к нему при низких частотах. Закон квантов подрывал основы механики и электромагнетизма. Механики – потому что она не допускает скачкообразного изменения движения на конечную величину. Электромагнетизма – так как никакая волновая теория не допускает того, чтобы волна передавалась или поглощалась порциями, зависящими от частоты; к тому же Планк полагал, что интенсивность волны должна непрерывно меняться.

В этом имелось логическое противоречие, но Планку до этого не было дела, и никто его в этом не упрекал: никто не придавал значения его теории, хотя все признавали точность его формулы, касающейся излучения. И лишь пятью годами позднее, в 1905 году, когда появилась теория относительности, Эйнштейн, по словам Бессо [18], «*разбудил красавицу в спящем лесу*». Он сделал шаг, на который не осмеливался Планк, анализируя закон Вина (а не закон Планка!). Он выдвинул гипотезу, что энергия должна распределяться в волне в виде малых зерен, каждое из которых переносит энергию порциями $E = h\nu$, которые он считал *квантами света* и назвал *фотонами.* Казалось, что происходит возврат на два века назад, к корпускулярной теории Ньютона, но в совершенно новом виде. В связи с этим предоставим слово Луи де Бройлю:

«*Поскольку после успеха идей Френеля и Максвелла, после столь тщательно проверенных объяснений всей совокупности явлений физической оптики с позиций волновой теории света не могло быть и речи об ее оставлении, то стало необходимым вернуться обратно, но уже с синтетической теорией, объединяющей волны и частицы и, несомненно, аналогичной теории корпускул Ньютона. Небольшая гениальная статья Эйнштейна, в которой вновь был поставлен вопрос о природе света, явилась громом среди почти ясного неба, но кризис, вызванный ею полвека спустя, все еще не закончился*» [19].

Гипотеза фотона казалась настолько нелепой, что даже Планк не хотел ее принять[5]. Годами позднее, когда значение других идей Эйнштейна было признано и когда наиболее крупные ученые (сам Планк, Пуанкаре, Мария Кюри, Нернст…) оказали ему поддержку, все они тем не менее отмечали ограниченность некоторых его представлений и заявляли, что он был блестящим физиком, *хотя* и выдвигал авантюрные идеи о природе света. Так продолжалось до открытия эффекта Комптона в 1923 году. *Но первым теоретиком, который поддержал гипотезу фотона и развил теорию, стал Луи де Бройль.*

[5] Тем не менее как редактор журнала *«Annalen der Physik»*, куда статья Эйнштейна была представлена для публикации, Планк без колебаний опубликовал ее, несмотря на свое несогласие. Все меняется, когда научным журналом начинает руководить великий физик.

Весьма удивительно, что потребовалось так много времени для признания идеи Эйнштейна, из которой он вывел закон *фотоэлектрического эффекта*[6] (экспериментально доказав который, Милликен получил Нобелевскую премию). В фотоне сомневались, потому что полагали, что Эйнштейн отказывается от волновой теории, хотя он, напротив, показывал, что образы волны и частицы дополняют друг друга. И что два неполных закона, Рэлея – Джинса и Вина, отвечают соответственно чисто волновому свету (доминирующему при длинных волнах) и чисто корпускулярному свету (при коротких длинах волн), а закон Планка, удовлетворяющий всему спектру, описывает смесь волн и частиц.

В статье 1909 года, ставшей знаменитой, Эйнштейн изучал флуктуации излучения абсолютно черного тела, вызываемые случайным характером атомных излучений. Он показал, что в соответствии с законом Планка два вида флуктуаций различной природы накладываются друг на друга: с одной стороны, тепловое движение фотонного газа, а с другой – беспорядочная интерференция волн. Невозможно было привести лучшее доказательство смешения двух антагонистических понятий волн и частиц. Всю жизнь де Бройль был проникнут этой идеей, и в течение 35 лет нашего сотрудничества он по крайней мере раз в год упоминал об этом результате. Но в 1909 году ему было всего 17, и эту статью он прочитал гораздо позднее.

И вот мы возвращаемся в 1911 год, к Сольвеевскому конгрессу. Потрясение, подорвавшее устои физики, там ощутили еще сильнее. Видные ученые признавали с некоторой растерянностью, что наука, наследниками которой они являются, которая изобрела экспериментальный метод и математическую физику, охватила пространство, время, материю, детерминизм, случайность, симметрию, ввела понятия инерции и силы, частиц и полей, открыла гравитацию, электромагнетизм, энергию, энтропию, атом, *X*-лучи, радиоактивность, электрон… – эта наука начала давать трещины. Два с половиной века прогресса физики казались разлетевшимися осколками, что, впрочем, было неверно, ведь классическая физика всегда оставалась хозяйкой в своей области. Только ее универсальность оказалась под вопросом.

В то время как профессора Сорбонны еще с подозрением всматривались в слишком новые теории Максвелла, Больцмана и Лоренца, другие предвидели их пределы и задавались вопросом о квантах. Удача приведет де Бройля уже в юном возрасте в эту атмосферу научной революции. За десять лет теория квантов достигнет значительного прогресса. Ее востребованность в теории излучения постепенно становилась настоятельно необходимой, и такие физики, как Эйнштейн и Нернст, пытались расширить область ее применения. Если от работ Эйнштейна по фотоэлектрическому эффекту и ионизации газов отмахивались, потому что они предполагали существование фотонов, то, на-

[6] Фотоэлектрический эффект заключается в выбивании электронов из вещества под действием света.

против, его теория теплоемкости (зависимость изменения температуры тела от подвода тепла) производила сильное впечатление. Она была основана на гипотезе, что колебания атомов в твердых телах, которые аккумулировали теплоту, подчиняются законам квантов. Эйнштейн объяснял этим значительные отклонения при низких температурах от классического закона теплоемкостей Дюлонга и Пти и предлагал общий закон, более соответствующий эксперименту.

Мысли о наступившем кризисе в физике не покидали ученых, и Нернст смог убедить богатого промышленника и щедрого мецената Эрнста Сольвея созвать совет физиков для решения насущных вопросов. *Первый Сольвеевский конгресс* проходил в Брюсселе с 30 октября по 3 ноября 1911 года под названием «*Теория излучения и кванты*». Там собралась почти вся элита физиков. Президентом был Лоренц, героем дня – Планк. Конечно же, присутствовали Пуанкаре, Зоммерфельд, Вин, Нернст, Резерфорд, Перрен, Мария Кюри, Эйнштейн (тогда очень молодой)… Их было два десятка. Публикацию сообщений [20, 21] обеспечивали Морис де Бройль и Поль Ланжевен.

Луи де Бройль имел возможность читать материалы конгресса еще до подачи в издательство и переживать ценнейшие минуты этого совещания, отображенные в рукописях. Их привозил в Париж брат, и благодаря счастливому случаю Луи изучал изложенные на 450 страницах доклады. Попытаемся кратко резюмировать их содержание. Текст был написан или аннотирован рукой величайших физиков. Ему, научившемуся разгадывать древние манускрипты, приходилось на этот раз расшифровывать историю по ходу ее движения и испытывать радостное чувство сопричастности к одному из величайших научных событий современности. Разве мог он не ощутить потребность тоже «выйти на арену»? По словам брата, эти материалы спровоцировали в нем «*внутренний государственный переворот*» [4]. Он станет физиком! С колебаниями покончено, как и с исследованиями в различных направлениях. Отныне он нашел свое место. Он вошел в физику, как приобщаются к религии, и почти по-монашески посвятил себя науке. Я не знаю, с этого времени или, может, чуть позже, но он покончил с мыслью о женитьбе и семейной жизни. Он был помолвлен, хотя это плохо сочеталось с его образом вечно зябнущего и даже пугливого холостяка. Конечно, речь шла о молодом человеке из знатной семьи, в которой было принято организовывать помолвки и устраивать свадебные церемонии, рассказывал он мне. Но этот человек порвал со светской жизнью: она оказалась несовместимой с концентрацией мыслей, которая отныне была необходима. Он оставил и развлечения – бридж, шахматы, в которых всегда отличался. Эти игры приносили удовольствие, но заставляли терять время – «*надо было выбирать*», сказал он мне. Он перестал читать трактаты, забыл о привлекательности поверхностных бесед, ограничил число выходов в свет и визитов. «*Я был очень блистателен*», – сказал он мне однажды тоном, с каким предаются далеким воспоминаниям, как будто речь шла о ком-то другом. Нельзя сказать, что Сольвеевский конгресс породил в нем другого человека, но он разбудил и выкристаллизовал строгую личность, которую мы знали. Из всего того, что велела ему оставить научная страсть, выжила лишь одна история. По случаю своего восьмидесятилетия де Бройль поведал ученикам и друзьям:

«*В течение 19-го года моей жизни я забросил историю. О! Я не могу сказать, что совсем ею не интересовался, так как строил всю свою последующую жизнь на знаниях, почерпнутых из чтения обширного материала во всех областях, и в особенности из истории*».

Но история была интимной частью его жизни, секретным садом. В его кабинете находились только научные книги.

Между тем энтузиазм, испытанный Луи де Бройлем при чтении трудов Сольвеевского конгресса, абсолютно не соответствовал атмосфере дискуссий на конгрессе, которая скорее была осторожной. Эрнст Сольвей собрал ученых с именем, людей зрелого возраста и более опытных, чем он сам. И почти все они сдержанно относились к новым теориям. Лоренц в своем докладе на открытии конгресса, полный интеллигентности и знания, защищал классическую точку зрения. Только скрепя сердце он принимал идеи Планка и очень осторожно двигался по территории квантов. Цитируя рассуждение Эйнштейна по поводу флуктуаций малого зеркала в излучении абсолютно черного тела, где происходит суперпозиция соударений фотонов и интерференция волн, Лоренц считал «находчивыми» вычисления, но отказался от признания фотона и пытался – безуспешно – дать другое объяснение.

Идея фотона была также отвергнута Планком и Джинсом. Зоммерфельд рассматривал кванты Планка «*скорее как форму объяснения, чем как физическую реальность*», а лорд Рэлей, отсутствовавший на конгрессе, признавался в письме: «*…мне не нравится такое разрешение трудности*». Нернст поддерживал модель взаимодействия, способного избежать понятия квантов. Пуанкаре, также весьма озабоченный, предпочел избавиться от них, потому что их дискретность ему казалась провозглашавшей конец *дифференциальным уравнениям* в физике. Но по возвращении в Париж Пуанкаре заявил, что путем общих рассуждений он пришел к заключению, что «*закон квантов является, кажется, единственным, который приводит к полученному экспериментально закону излучения*». Он изложил вычисления в своей последней работе (вскоре умер по причине трагической медицинской ошибки[7]). Эта поддержка новой механики была символическим усилием от автора книги «*Новые методы небесной механики*» – одного из маяков классической механики.

А Эйнштейн? Он был впервые приглашен на конгресс наряду со знаменитыми физиками. И хотя наиболее дорогая ему идея фотона не была воспринята, присутствие на конгрессе явилось для него посвящением. Пуанкаре держался с ним снобом, кажется, по причине теории относительности (Леонардо похожим обра-

[7] Прооперированный по поводу простаты, он долго оставался в неподвижном состоянии и умер от закупорки сосудов.

зом относился к Микеланджело). Однако кое в чем Эйнштейн был, безусловно, триумфатором – это в вопросе об атомах. Несмотря на название конгресса, разговор шел только об излучении. Всплыла также недавняя победа атомной гипотезы, в частности, в связи с экспериментами Жана Перрена по *броуновскому движению.* Они подтверждали теорию Эйнштейна, которая уже сама по себе могла бы принести ему Нобелевскую премию. Несмотря на это, Эйнштейн предпочитал оставаться в стороне, выступал мало, не отвечал на критику, направленную на него со всех сторон. Вот что рассказывал мне о нем де Бройль:

«*Это был еще очень молодой скромный человек, весьма смущенный знаменитыми личностями, среди которых оказался впервые, и пытавшийся скрыть это. Оставаясь наедине с листом бумаги, он выражал себя свободно, но на конгрессе держался скромно и незаметно. Впрочем, у него всю жизнь был такой характер, и другие научились выслушивать его, когда его репутация была утверждена*».

Эйнштейн предстал во всем величии только в конце конгресса, выступив с докладом о теплоемкостях. Выходя за строгие рамки изложения, он развил свои идеи по теории квантов и фотону. Они составят его славу впоследствии, но в тот день лишь привлекли внимание и не более. Чтобы понять дистанцию, отделявшую его от остальных участников, приведу его единственный комментарий по поводу Сольвеевского конгресса:

«*Этот конгресс выглядел как стенания на развалинах Иерусалима. Из него не следовало ничего позитивного. Мои нерешительные выступления вызвали большой интерес, но никакой серьезной критики. Я сам мало что вынес оттуда, так как все, что слышал там, мне было известно*» [18].

Это не было претензией, ведь из его предыдущих работ с очевидностью следовало, что он уже давно понял смысл дискуссий и направлялся к главному, тогда как другие еще терялись в частных моделях.

Этот очень молодой человек, признанный, но непопулярный, открывший теорию относительности, кванты света, эквивалентность массы и энергии, имел горячего поклонника в лице простого студента-физика, который был на 13 лет его моложе и на тот момент гораздо менее образован, чем любой участник Брюссельского конгресса. Однако этот студент обладал неоспоримым преимуществом – молодостью. Вот как проиллюстрировал ситуацию Планк, задумываясь об эволюции атомной науки:

«*Новая научная истина никогда не торжествует, победив своих противников и приведя их к свету. Но, скорее всего, она побеждает потому, что в конце концов эти противники умирают и вырастает новое поколение, которому эта истина близка*» [15].

Луи де Бройль – юный студент, о котором шла речь, – всю свою жизнь питал глубокое уважение к Эйнштейну, который был его могущественным покровителем в молодости и постоянной поддержкой в одинокие годы зрелого возраста. Но юному студенту предстояло пережить десятилетие войны, прежде чем он смог заняться наукой.

В завершение рассказа я хотел бы опровергнуть два мифа. Прежде всего, Луи де Бройль не был в Брюсселе на первом Сольвеевском конгрессе и не просил о приглашении на него по той простой причине, что не имел никакого научного звания. Графиня де Панж допустила ошибку [3], перепутав первый конгресс с третьим, о котором мы еще поговорим. Второй миф касается того, что «Луи де Бройль был по профессии историком и самоучкой в физике». Абсурдность очевидна. История не была его профессией. Ко времени главного поворота в судьбе он только заканчивал обучение по этой дисциплине, а затем прошел такой же полный курс обучения физике в Сорбонне. Наконец, не имеет никакого смысла отличать самоучек от ученых. В конечном счете все являются самоучками, потому что все получают гораздо больше знаний в процессе самостоятельного чтения и во время семинаров, чем на учебных занятиях факультетов.

ГЛАВА 3. Война. Эйфелева башня. Улица лорда Байрона. Первые работы

Луи де Бройль отправился на военную службу в 1913 году, и эта «временная неприятность» затянулась… на шесть лет. Но ему повезло быть задействованным в деле обеспечения радиовещания. Об этом он оставил мне следующий рассказ.

«*Родившись в Дьепе в 1892 году, я должен был отправиться на военную службу в 21 год, в октябре 1913-го. Мой брат Морис, который был на 17 лет старше меня, посвятил несколько лет службе как офицер флота в области использования радиопередач. Друг моего брата, генерал Феррье, большой специалист в области беспроволочного телеграфа, использовал свое влияние, чтобы меня назначили в полк телеграфистов на мосту Валерьен. В этом полку царила достаточно строгая дисциплина, но было много инженеров и почтовых служащих, что позволило завести приятных друзей. В июне 1914 года благодаря генералу Феррье я был назначен на пункт беспроволочного телеграфа Эйфелевой башни, расположенный под землей в середине Марсового поля, антенны которого размещались на башне. Я должен был оставаться там до 1915 года, чтобы затем вернуться к гражданской жизни. Но 1 августа 1914 года разразилась страшная война, длилась четыре года и унесла столько жизней. Все это время до моей демобилизации в 1919 году я жил в подземном помещении радиопередатчика Эйфелевой башни, мог следить за прогрессом радиотелеграфии и содействовать этому по мере возможностей. Вначале радиопередачи осуществлялись почтовыми служащими, которых мы называли сверхштатниками. Прием осуществлялся детекторными приемниками, но эти приемы были нестабильные и не очень качественные. Однажды генерал Феррье принес нам несколько экземпляров ламповых триодов, то есть* *ламп с тремя электродами, недавно изобретенных для приема радиосигналов Ли де Форестом. Эти лампы, в сравнении с детекторными радиоприемниками, позволяли осуществлять более стабильный прием слабых радиосигналов. Офицеры радиоустановки Эйфелевой башни, зная о моей подготовленности одновременно в научных и технических областях, обязали меня заняться изучением ламповых триодов и устройств, в которых их использовали. Вскоре эти устройства стали применять на всех полях военных действий, но слишком часто они приходили в негодное состояние. Таким образом, я был вынужден изучать "болезни" радиоприемников, направляемых мне, и в какой-то мере "диагностировать" эти болезни, зачастую до их демонтажа. Таким образом, в то время я выполнял работы, которые не каждый мог выполнить*».

В начале войны Луи де Бройль был рядовым сапером, но службу закончил унтер-офицером. В то же время Морис де Бройль покинул свою лабораторию и был вновь призван на службу в качестве морского офицера в Сан-Мари де ла Мер. Ему была поручена организация работы станций беспроволочного телеграфа. Для этого ему предстояло отправиться в Лондон в 1916 году с целью объединить достижения военной науки в этой области. Именно там он встретил своего друга Линдемана, одного из участников Сольвеевского конгресса 1911 года.

Было бы несправедливо говорить, что братья де Бройль стремились оставаться подальше от войны благодаря семейным связям. Их компетенция, редкая в то время, очень пригодилась в передовой научно-технической области беспроволочного телеграфа (TSF), игравшей такую же важную роль в Первой мировой войне, что и электроника с ядерной физикой во Второй мировой. Менее сведущие в научных вопросах члены семьи служили наравне со всеми. Так, воевал и получил награду Жан де Панж (муж Полины). Был награжден и старший сын Альбертины, Шарль де Люппе, который погиб в первые же месяцы войны. В большом зале Юридической школы есть мемориальная доска, где значится его имя вместе с именами других учеников. На одной старой фотографии слушатели этой школы Луи де Бройль и Шарль де Люппе сидят бок о бок.

Как и все его современники, Луи де Бройль сохранил незабываемые впечатления о военных годах. Именно там расширилось его мировоззрение, там он познал радость товарищества и в полной мере ощутил горести военной службы. Он навсегда сохранил теплые отношения с товарищами по службе на Эйфелевой башне, имена которых с радостью вспоминал. Это были те немногие люди, с которыми он когда-то был на ты, и он гордился их дальнейшей работой на PTT (служба почты, телеграфа, телефона). Однажды, погрузившись в воспоминания, он вынул из ящика старое письмо одного из них, датированное концом 1929 года, и с наслаждением прочел начало:

«*Мой дорогой Луи!*

Конечно, ты всегда был шутником, но на этот раз с Нобелевской премией. Это твоя наилучшая шутка…»

Письмо лежало так, чтобы его можно было сразу же найти, хотя обычно он не хранил там никаких, даже семейных, писем, но только представлявшие исторический интерес. Это было одно из них.

Повседневная служба была утомительна, но Луи де Бройль иногда соприкасался со жгучими событиями современности. Вот как об этом рассказала графиня де Панж:

«*В воскресенье 10 ноября 1918 года в 8 часов вечера ему посчастливилось поймать по радио шифрованные телеграммы немецкого правительства и его представителей с сообщением, содержащим знаменитую фразу **“Ваши высочества уполномочены подписать мирные соглашения”***» [3].

Чрезвычайно важной для его будущей карьеры оказалась исключительная «техническая стажировка», которую он невольно прошел на Эйфелевой башне и которую сегодня могли бы назвать передовой лабораторией. Те, кто судил о Луи де Бройле исключительно по его рассеянному виду и склонности к обобщенным идеям, представляли его отрешенным от дел… и ошибались. На протяжении всей войны он сохранял постоянный интерес к применению достижений физики, в частности радио, эволюция которого проходила на его глазах, вплоть до последнего изобретения в области волноводов, гиперсокочастотных трубок, полупроводников и мазеров. Его известность избавляла от покупки книг. Он получал их в качестве дара на память. Он часто принимал инженеров и экспериментаторов, которые рассказывали о последних изобретениях и открытиях и приглашали посетить их завод или лабораторию, если он пожелает. Такие встречи были ему дороже, чем визиты теоретиков, формализм которых его раздражал. Ученые не знали, что он уделяет внимание областям техники и эксперимента; они считали его одиночкой, который закопался в книгах и не интересуется научными новинками, поскольку не видели его там, «где необходимо было присутствовать», в частности в Орсе и в ЦЕРНе. Немало его коллег даже не подозревали, что в течение многих лет он был председателем жюри Большой премии по электричеству (*медаль Блонделя*), что он должен был выступать перед партером специалистов, мало расположенных слушать «технологическую дребедень», и что каждый год он излагал детали работ лауреатов, посвященных поочередно то *сильным, то слабым токам.* И вообще никому не известно, что именно он 9 декабря 1949 года в своем послании Международной конференции по культуре в Лозанне первым выдвинул идею создания большой европейской международной лаборатории (ЦЕРН), так как ни одна страна Европы уже не могла в одиночку проводить некоторые исследования по физике.

Когда Луи де Бройль служил на Эйфелевой башне и приобщался к технике, он проникся идеей реальности существования волн. С некоторой смесью интеллектуального удовлетворения и инстинктивного отвращения он поведал мне однажды о размышлении, которое хорошо выражало его отношение к чистой науке:

«*Когда днями и ночами пачкаешь руки, пытаясь запустить громадные генераторы, служившие источниками энергии для радиопередатчиков, не так уж легко поверить, что волна является лишь вероятностью присутствия*».

Он отправился в 1913 году на мост Валерьен с одной книгой Планка «*Термодинамика*», недавно появившейся на французском языке [23], которая произвела на него сильное впечатление. Он много размышлял об идеях Планка, который первым понял, что «*величина энтропии в процессах есть мера их необратимости*», и для которого второе начало было всемирным законом. Для Больцмана, напротив, энтропия была чисто статистической величиной. А элементарные процессы на атомном уровне, уже начиная с Эйнштейна, считали обратимыми. Таким образом, сама необратимость тоже стала статистическим явлением и потеряла свое абсолютное значение. Однако если связь энтропии и статистики доказывалась экспериментально существованием *флуктуаций,* то обратимость элементарных атомных явлений отсюда не вытекала и оставалась постулатом. Мы вновь обратимся к этой проблеме при описании последних лет жизни Луи де Бройля, который всегда сохранял сдержанность на этот счет и оставался под влиянием идей Планка, усиленным чтением труда Брюхнеса «*Диссипация энергии*» [24]. Многих удивляло внимание, которое де Бройль уделял термодинамике в конце жизни, но он всегда думал о ее проблемах.

После войны Луи де Бройль должен был ожидать демобилизации еще около года, чтобы вернуться к гражданской жизни. Ему повезло остаться в живых. А вот надежда заняться наукой улетучилась, причем для ученых не только во Франции, но также в Англии и Германии. Но физика достигла большого прогресса во многом благодаря ученым, избежавшим мобилизации по причине возраста или национальности. Мне следует упомянуть о двух открытиях, предшествовавших войне, – речь об *атомном ядре* и *атоме Бора.*

С 1911 года, основываясь на аномалиях рассеяния радиоактивных α-частиц тонкими металлическими пластинками, Резерфорд выдвинул гипотезу, что в атоме существует ядро, вокруг которого вращаются планетарные электроны. Из этого предположения он вычислил углы отклонений от первоначальных траекторий, которые должны испытывать α-частицы, и теоретический результат был подтвержден экспериментом. Однако в этой модели атома имелся один недостаток. Из теории электромагнетизма следовало, что электроны, вращаясь вокруг ядра, должны непрерывно излучать свет и, потеряв энергию, упасть на ядро. Решение этой проблемы было найдено в 1913 году в модели *атома Бора* и стало одним из краеугольных камней физики века. Нильсу Бору было 28 лет, и почти год он провел в Манчестере в лаборатории Резерфорда.

Однако не новизна идеи составила славу Резерфорда и Бора, так как она буквально витала в воздухе. Модель планетарного атома еще в 1901 году была предложена Жаном Перреном, затем в различных видах Нагаокой, которого цитирует Пуанкаре [26], Гаазом и Николсоном [25]. Имена Резерфорда и Бора стали известны благодаря экспериментальному доказательству существования ядра и развитию первой настоящей теории атома.

Бор первым решил знаменитую *задачу атома водорода*. Он понял, что простейший из атомов должен иметь лишь один электрон, и это позволило вычислить его *квантовые состояния* и объяснить спектр его излучения, доказав эмпирическую формулу Бальмера. Данная формула, известная с 1885 года, сыграла волшебную роль в физике XX века. Несколько раз переоткрытая и модифицированная, она сопутствовала славе Бора, Зоммерфельда, де Бройля, Шредингера и Дирака. Я привожу ее здесь для большинства читателей только в качестве иллюстрации:

$$1/\lambda = R(1/n^2 - 1/m^2).$$

В этой формуле λ – длина световой волны. Из нее получаем значения частот спектральных линий водорода, давая числам n и m *целые значения.* Константа Ридберга R была вначале эмпирической величиной. До Бора формула оставалась в течение 30 лет вне внимания теоретиков, и Анри Пуанкаре сделал по ее поводу удивительное по предсказанию замечание:

«[Этот закон] *напоминает гармоники в акустике. Но различие велико. Не только числа колебаний не являются последовательными кратными одного и того же числа, но мы не находим в них ничего аналогичного корням этих трансцендентных уравнений, к которым нас приводят задачи математической физики – такие, как задачи о колебаниях упругого тела некоторой формы, задачи герцевых колебаний в разряднике какого-либо вида, задачи Фурье по остыванию твердого тела*» [26].

Таким образом, Пуанкаре первым предположил, что за спектральными линиями скрывается резонанс. Волновая механика де Бройля указывает на его причины и приводит к существованию уравнения, о котором мечтал Пуанкаре, то есть к уравнению Шредингера.

Бор другим путем установил теоретическое обоснование формулы Бальмера, оправдал введение целых чисел и вычислил постоянную Ридберга как функцию постоянной Планка, скорости света, заряда и массы электрона. Полученное значение всего лишь на несколько процентов отличалось от экспериментальной величины. Но сам теоретический вывод формулы имел важнейшее значение. Так же как Планк для атомных колебаний черного тела и Эйнштейн для колебаний атомов в твердых телах, Бор предположил, что в самом атоме возможны только некоторые движения электронов, так называемые *квантовые состояния*. Этой серии разрешенных состояний соответствует дискретная серия разрешенных значений энергии – *квантовые уровни.* Наиболее смелой идеей Бора было постулирование стабильности разрешенных квантовых состояний и предположение, что в таком состоянии электрон спокойно вращается вокруг ядра, не испуская никакого излучения вопреки законам классической электродинамики. Согласно Бору, испускание излучения происходит не тогда, когда атом находится в устойчивом квантовом состоянии, но тогда, когда он вдруг резко меняет свое состояние и «падает» на более низкий уровень энергетического состояния. Этот *скачок,* или *кванто-*

вый переход, сопровождается потерей атомом некоторой энергии *E*, *равной разности начальной и конечной энергии планетарных электронов атома.* Эта разность энергий отражается формулой Бальмера и определяет частоту излучения. Сегодня мы бы сказали, что она соответствует испусканию эйнштейновского кванта света, фотона, но в то время Бор не мог так заявить, ведь почти никто не верил в фотон. И, обратно, если освещать атом светом, частота которого соответствует разности энергии между состоянием, в котором он находится, и состоянием с более высокой энергией, он поглотит свет и перейдет в высшее состояние.

Подчеркнем, что отказ от постулата Бора для водорода и принятие предположения о постоянно излучающем, вращающемся вокруг ядра электроне, который подчиняется классическим законам, приводит к спектральным частотам, а они отличаются от частот Бора и противоречат эксперименту.

Квантовые переходы, как и квантовые движения электронов, противоречат классической механике, которая предполагает существование периодических, но не промежуточных орбит. Бор просто допустил, что они не наблюдаемы, и выбросил их из теории, как процессы, невозможные для описания в рамках пространства и времени. Этот отказ привносил таинственность, которую многие не воспринимали всерьез, поскольку серия дискретных состояний без возможных промежуточных состояний противоречила как букве, так и духу классической механики. Вот что писал Жан Перрен в год появления работы Бора по поводу аналогичной задачи вращения молекул:

«*Кажется невообразимым, что число оборотов скачком изменяется от значения t к значению* 2*t или* 3*t, не принимая промежуточных значений. Я предполагаю, что эти промежуточные скорости нестабильны*» [28].

Маловероятно, что у де Бройля было время ознакомиться с работами Бора до отправления на военную службу. Его брат Морис, должно быть, рассказал ему об открытии Лауэ дифракции *X*-лучей, которое могло бы поразить его своим дуалистическим характером, так прокомментированным автором:

«*Тесная связь, возникающая здесь между волновой теорией X-лучей и атомистической теорией кристаллов, является одним из удивительных событий, которые придают физике убедительную силу*» [27].

С другой стороны, де Бройль только с годами смог осознать сделанные открытия, о которых трудно было даже мечтать между 1915 и 1917 годами, во время сражений при Шампани, Артоуа, Лакомме, Вердене… Прежде всего Зоммерфельд сделал из теории Бора общий метод, *первую теорию квантов*, которая открыла путь к квантовой теории атомных спектров и периодической таблице элементов Менделеева. Но все признавали гибридный характер теории, которая основывалась на классической механике, нарушая ее правила, и которая встретила серьезные трудности, начиная с атома гелия, элемента под номером два в таблице Менделеева. Это инициировало поиски *новой механики,* открытию которой должны были бы значительно способствовать два результата предварительной теории.

1. Теория *тонкой структуры* спектра водорода Зоммерфельда (1915), который ввел *относительность* в теорию атома. Этот пункт де Бройль не забудет.

2. Второй результат связан с Эйнштейном (1917), который заметил, что одной из характерных черт новых квантовых правил было использование уравнений механики с разделяющимися переменными. Он смог изложить теорию в более общей форме. Эта идея не была замечена вовремя, но сыграла важную роль для де Бройля и Шредингера. Она заключалась в приписывании электрону на траектории его движения одной величины (интеграл действия Мопертюи), которой Эйнштейн предписывал возрастание на величину, кратную постоянной Планка в случае замкнутой траектории. Де Бройль покажет в своей диссертации, что эта величина является *фазой волны*.

Де Бройль также находился под впечатлением другой статьи Эйнштейна (1916), в которой последний выводил закон излучения черного тела Планка, используя понятия квантовых переходов. Он предположил, что световая волна некоторой частоты может вырывать фотоны той же частоты из атомов, способных ее излучать. Это означало *стимулированное излучение* света, которое происходит в лазерах благодаря *когерентности*, открытой позднее де Бройлем. Наконец, мы только упомянем о величайшем научном подвиге после Ньютона – о создании Эйнштейном в 1915 году *общей теории относительности*, поразительное экспериментальное подтверждение теоретического предсказания которой (отклонение света звезд Солнцем) было сделано Эддингтоном во время затмения 1919 года. Таково было состояние науки ко времени появления первых работ де Бройля, которые он кратко охарактеризовал следующим образом.

«ОБЗОР МОИХ НАУЧНЫХ РАБОТ С 1919 ПО 1923 ГОД

После моей демобилизации в конце августа 1919 года я начал работать вместе с моим братом и его сотрудниками в лаборатории на улице лорда Байрона над проблемами X-лучей и одновременно посещал лекции и семинары Поля Ланжевена по теории относительности и квантам.

В этот период, длившийся с конца 1919 года до моей докторской диссертации 1924 года и даже чуть позже, не участвуя в экспериментах, я написал несколько статей в «Comptes Rendus» с моим братом об X-лучах и, в частности, о фотоэлектрическом эффекте, вызываемом этими лучами. Я также написал несколько статей с Александром Довилье, сотрудником моего брата, о спектрах X-лучей и классификации их спектральных линий. Все эти работы поддерживали меня в тесном контакте с экспериментальной физикой.

Но я также лично написал несколько статей, предшествующих моим фундаментальным работам осени 1923 года и моей диссертации 1924 года.

В статье от 4 декабря 1921 года, размышляя о процессах испускания и поглощения X-лучей атомами, я обратил внимание на тот факт, что в этих процессах всегда наблюдается тенденция к спонтанному уменьшению частот, и мне пришла в голову интересная идея сравнить эту тенденцию с тенденци-

ей к уменьшению температур в тепловых процессах. Так, я догадался о возможной связи между частотами и температурами, и это оказалось своего рода предчувствием скрытой термодинамики частиц, которую я должен был развить четырьмя десятилетиями позднее!

В статье в «Journal de Physique» («Физический журнал») от ноября 1922 года, носящей название «Излучение черного тела и кванты света», я пришел с помощью очень интересных рассуждений к закону излучения Вина, справедливому для высоких частот, а замечание в конце статьи говорит о том, что я передал рукопись Леону Бриллюэну.

Наконец, в очень важной статье в «Comptes Rendus» («Доклады АН») от 6 ноября 1922 года, важность которой подчеркнул Мартин Клейн[8] *в 1966 году, я объяснил истинное значение формулы достаточно странного вида, приведенной Эйнштейном на Сольвеевском конгрессе 1911 года*[9] *и прокомментированной Лоренцем в его лекциях по термодинамике 1912 года. В самом деле, я показал, что эта формула точна, но может быть записана в другом виде, раскрывающем ее значение*».

Де Бройль работал с удвоенной силой, чтобы наверстать упущенное время, и начал с восполнения библиографического пробела. Он изучал знаменитые лекции Лоренца в Коллеж де Франс, на которых сам присутствовал и которые затем были опубликованы [29]. Там же он слушал курс лекций Ланжевена и составлял конспекты, в особенности по теории относительности, они сохранились в его архивах. Это был курс ярого приверженца теории относительности и в то же время друга Эйнштейна. Ланжевен приоткрыл окно в немецкую физику, от которой Франция была отрезана войной и консерватизмом некоторых профессоров[10]. В рамках курса студенты и аспиранты изучали не только теорию относительности, но и статистическую физику и кванты. Для де Бройля Ланжевен был учителем, которого он еще долгое время после его смерти называл «*господин* Ланжевен», подобно тому, как говорил «*господин* Перрен». Другой французский физик, сыгравший важную роль в написании де Бройлем последующих работ, – Леон Бриллюэн. Его отец, Марсель Бриллюэн, был одним из редких предшественников де Бройля, который пытался объяснить привилегированные орбиты электрона если и не его волновым характером, то по крайней мере предположением, что волны, испускаемые электроном (?), догоняют его в ходе движения. Мы вновь встретимся с этой идеей, но изложенной в другом виде.

---

[8] Американский историк науки.

[9] Речь идет о вышеупомянутой формуле флуктуаций.

[10] Не с лучшей стороны проявили себя и немецкие профессора, писавшие петиции против теории относительности («Если бы теория относительности была ошибочной, хватило бы и одного профессора», – заметил Эйнштейн). Действительно, когда я говорю «немецкая физика», я имею в виду нескольких ученых: Планка, Эйнштейна, Нернста, Зоммерфельда и некоторых других.

Противники де Бройля поговаривают, что он «*работал в изоляции*» и что в наши дни это является абсолютным «преступлением». В CNRS исследователя, который предпочитает работать обособленно, считают парией. Но Эйнштейн также был «изолирован» в Берне. В действительности же, когда о де Бройле говорят «изолирован», надо понимать, что он был далек от Копенгагена! Это печально, но на самом деле он не жил в культурной пустыне. Он прослушивал курс в Коллеж де Франс и был участником одного из лучших семинаров Европы, изучал математику у Гурсата, механику у Аппеля и ходил в лабораторию своего брата, одну из лучших в мире по *X*-лучам и атомной структуре вещества. Для будущих исследований де Бройлю лучше было находиться там, чем у Бора. К тому же Бор в то время ошибался относительно эйнштейновских квантов света, в которые он не верил и от которых стремился избавиться с помощью ошибочных теорий (позднее, правда, он от последних отказался). А потому он наверняка воспротивился бы идеям де Бройля. Другое дело Морис де Бройль; он относился к тем редким физикам, которые приняли идеи Эйнштейна, и излагал их в своих лекциях [30]. Напомним, что он открыл фотоэлектрический эффект, вызываемый *X*-лучами. Таким образом, атмосфера лаборатории была благоприятной. Почитатели Бора говорят, что его ошибка относительно квантов света оказалась плодотворной и помогла ему впоследствии лучше понять состояние вещей. Может быть, так оно и есть, но я предпочитаю верить в то, что люди, понимающие все сразу, не такие уж глупцы.

Не следует впадать и в другую крайность, подобно некоторым историкам. Они утверждали, что де Бройль всем обязан своему брату. Это полный абсурд, потому что Морис был экспериментатором, никогда не занимался теориями и даже питал недоверие к ним (см. главу 9). Мы увидим, что хотя он и верил в существование фотонов, но не принимал идеи Луи и не помогал ему экспериментально.

Луи де Бройль посещал лабораторию на улице лорда Байрона, но не принимал участия в экспериментах, а лишь получал консультации по теоретическим вопросам. Чаще всего, как рассказывал мне Жан Жак Трийя, он приходил утром, приветствовал всех и уединялся для размышлений. Статья 1921 года [31], которую я упоминал выше, в этом смысле показательна. Она предшествует технической статье его брата, сообщая о ней, однако это два разных материала. Луи де Бройль в своей работе, судя по ссылке на статью брата, интересовался лишь экспериментальным результатом, относящимся к вопросу термодинамики[11]. После этого он стал достаточно компетентным специалистом по *X*-лучам, чтобы написать работу совместно со своим братом [32].

[11] Он придумал тепловой двигатель, работающий на одном атоме, находящемся в контакте с сосудами с монохроматическим излучением, коэффициент полезного действия которого давала формула Карно (в ней частоты заменяли температуры).

Мимоходом отметим, что улицу лорда Байрона, связанную с Сольвеевским конгрессом, состоявшимся в 1921 году, графиня де Панж по ошибке упоминает в связи с Сольвеевским конгрессом 1911 года [3]. Имелся в виду третий конгресс (первый послевоенный), на который Морис де Бройль попытался пригласить в качестве наблюдателя своего младшего брата. Ему отказали организаторы, хотя в принципе это было возможно. Тогда Луи де Бройль поклялся прибыть туда «через парадный вход» [21].

Публикация в *«Journal de Physique»* [33] и сообщение в *«Comptes Rendus»* [34] от ноября 1922 года, процитированные де Бройлем в его тексте, содержат введение в волновую механику. После работ Эйнштейна здесь первые упоминалось нечто новое о фотоне. В статье де Бройль пытается продвинуться как можно дальше в вопросе об излучении черного тела, рассматривая свет как фотонный газ, игнорируя волны. Для этого он заменяет классическую механику на релятивистскую. Таким образом, он вычисляет давление излучения черного тела как результат бомбардировки стенок фотонами и находит значение этого давления, которое ранее получил Больцман, использовавший теорию волн, и которое соответствовало результатам экспериментов. Это значение являлось как бы тестом пригодности корпускулярной теории. В ее рамках Планк считал невозможным получить такой результат [35]. Но он рассуждал с позиций нерелятивистской классической механики, а де Бройль – с релятивистских позиций[12], что позволило ему найти (двумя годами раньше Бозе, которому это приписывают) другой множитель в законе излучения черного тела, который также согласовывался только с теорией волн[13].

Первая статья де Бройля о фотоне в сравнении с последующими работами является ключевой. Именно в ней он впервые рассматривает фотон как истинную частицу, подчиняющуюся обычным законам релятивистской динамики. Даже Эйнштейн не заходил так далеко. Сознавая необходимость учета поляризации фотона, де Бройль добавляет:

«*В более полную теорию квантов света необходимо ввести следующее: каждый атом света должен обладать внутренним состоянием правой или левой круговой поляризации, представленным аксиальным вектором, имеющим направление скорости движения*» [33].

---

[12] Для физиков привожу доказательство: фотон с ничтожно малой массой и скоростью, близкой к скорости света, обладает релятивистским импульсом $p = mc = W/c$ (где энергия $W = mc^2$). В кубе n фотонов с полной энергией nW ударяется о стенку $nc/6$ раз в секунду, сообщая ей при этом удвоенный импульс и производя давление на стенку $2\,(W/c)\,(nc/6) = nW/3$. В классической нерелятивистской механике кинетическая энергия равна $W = mc^2/2$, откуда $p = mc = 2W/c$, и, таким образом, получается удвоенное значение для давления.

[13] Речь идет о множителе $8\pi\nu^3/c^3$. У де Бройля, как и у Бозе, он равен 4. Для получения значения 8 необходимо учитывать поляризацию света.

Именно здесь впервые появляется понятие «*спин фотона*», которое окончательно увязывается с поляризацией света в дебройлевской *волновой механике фотона.* Но важнейшей идеей было приписывание фотону ненулевой собственной массы, а это означало, как шутливо отметил де Бройль, что «*свет не движется со скоростью света*», так как массивная частица никогда не сможет достигнуть скорости *c,* фигурирующей в формулах теории относительности. Величину «*c*» де Бройль называл «*предельной скоростью теории относительности*», а не скоростью света. Если масса фотона достаточно мала, то это никак не проявляется в известных экспериментах. Ненулевая масса фотона была и все еще остается оспариваемой, но де Бройль рассматривал ее как неотъемлемую часть своей системы и всегда ее сохранял. На мой взгляд, он был прав. Мы еще вернемся к этому.

Мартин Клейн справедливо отмечал важность статьи де Бройля от 6 ноября 1922 года, но по другой причине: в ней де Бройль ввел понятие когерентности. Название «*Об интерференции и теории квантов света*» показательно, ведь де Бройль, ставший знаменитым благодаря открытию своей волны, всегда продвигал вперед положение о корпускуле. Он неохотно вводил понятие волны, оставаясь духовным сыном Ньютона и Френеля. Это подтверждает следующая фраза в начале сообщения:

«*Объяснение теорией квантов света явлений, до сих пор интерпретируемых волновой гипотезой, таких как интерференция, рассеяние, дифракция и так далее, кажется очень мучительным. И, чтобы хорошо его произвести, необходимо установить компромисс между прежней теорией и новой введением в последнюю понятия периодичности*» [34].

Далее де Бройль предсказывает, что уравнения Максвелла однажды покажутся нам непрерывным приближением дискретной структуры света, так же как уравнения механики жидкостей хорошо описывают в привычном масштабе движение жидкости, несмотря на ее атомное строение. Надо подчеркнуть, что вопрос не в некотором дуализме волн и корпускул, а в чисто гранулярной, атомной структуре света, волновая непрерывность которой является лишь видимостью. Дальнейший текст сообщения показывает это.

В нем де Бройль продолжает развивать идею «молекул» света, то есть объединений квантов, и показывает, что знаменитая формула Эйнштейна о флуктуациях излучения черного тела может интерпретироваться как флуктуации смеси газа, составленного из бесконечного числа одноатомных, двухатомных, трехатомных и так далее световых молекул (в которых каждый атом является квантом света). И он показывает, что чисто корпускулярный флуктуационный член (отвечающий закону Вина) соответствует одноатомному газу фотонов, в то время как волновой член (Рэлея – Джинса) – сумме всех газов, состоящих из молекул двух, трех, четырех… фотонов. Далее он заключает:

«*С точки зрения квантов света явления интерференции кажутся связанными с существованием объединений атомов света, движения которых не независимы, но когерентны. Отсюда естественно предположить, что если теория квантов света сможет однажды объяснить интерференцию, то это потребует введения таких объединений квантов*» [34].

На этот раз де Бройль зашел слишком далеко, связав интерференцию с объединениями квантов. Похоже, он не знал тогда о первых экспериментах (уже известных) по интерференции изолированных квантов, которые обязывали приписывать *каждому* кванту волновые свойства. Он осознал это лишь спустя несколько месяцев, что привело к зарождению волновой механики. Тем не менее в сообщении 1922 года он приблизился к идее когерентной волны, несущей несколько квантов света, движения которых связаны между собой. Эту идею он уточнил в своей диссертации.

ГЛАВА 4. Работы 1923 года. Диссертация. Волновая механика

При создании научного произведения, как и шедевра искусства, не обойтись без многочисленных набросков, требуется усиленная работа мысли. Первоначально оно не имеет ясных очертаний и хранит сюрпризы для автора. А он страдает видениями промежуточных персонажей, отказывается от воплощения их в едином образе, пока наконец не обнаружит главную фигуру – не ожидаемую, а новоявленную, вокруг которой все и организуется.

Подобной фигурой для де Бройля стала волна. Он не мог вообразить, что материя волнообразна, ведь все говорило против этого, начиная с атомов, которые похожи на малые зерна материи. Атомы – это одна из великих побед науки XIX века, «вскормившего» их. Лишь после долгих размышлений – с начала 1922 года (первая статья касательно квантов света) и по крайней мере до сентября 1923 года – ему в голову пришла идея волны.

Он начал с уточнения значения массы, которой бы следовало наделить кванты света, и для этого вернулся к своей первой работе. Так как энергия кванта была определена частотой ν световой волны, согласно закону Планка $E = h\nu$, и так как квант света следовало бы описывать в рамках теории относительности, он посчитал естественным определить массу кванта через частоту, сопоставляя закон Планка и закон Эйнштейна $E = mc^2$. Но он заметил, что единственным и главным аспектом в его рассуждении было задание частоты света для определения массы кванта. И ему пришла гениальная идея перенести свои рассуждения на любые материальные частицы, задавшись *a priori* массой частицы, определяющей энергию $E = mc^2$, которая позволит отождествить с частицей такую частоту ν, которая удовлетворяет формуле $E = h\nu$.

Надо было вообразить необычайно фантастический аспект этой гипотезы, которую не предсказывало никакое известное физическое явление. Это означало провозгласить единый закон для вещества и света, основанием которого было лишь доверие, которое испытывал де Бройль к универсальному характеру законов Планка и Эйнштейна. Ведь даже предполагать, как ранее Эйнштейн, что существуют корпускулы света, отождествляемые с волнами, уже казалось чистой фантазией. Но что тогда можно сказать об идее ассоциировать частоту с крупицей вещества? Не забудем, что гипотеза сформулирована относительно электрона, который по крайней мере был мал, загадочен и далек от нашего обычного мира. Но в принципе она применима для камня, апельсина, мыши. Что же в таком случае означает частота камня? Тот факт, что де Бройль опирался на теорию квантов Эйнштейна, совсем не усиливал его позицию, поскольку Эйнштейна тоже не слушали. И даже принятие гипотезы Эйнштейна не давало оснований для вывода универсального закона.

Одиночество де Бройля было полным, он не мог никому доверять да и не пытался. Он долгое время держал при себе идею, формулировку которой мы получаем скорее из его диссертации, чем из первого сообщения 1923 года. Он помещает себя в систему отсчета наблюдателя, который движется вместе с порцией энергии, она определяет то, что называют *собственной системой,* или *системой покоя физического объекта:*

«*Можно вообразить, что вследствие великого закона природы с каждой порцией энергии собственной массы* m_0 *связан периодический процесс с частотой* ν_0 *такой, что соблюдается соотношение:*

$$h\nu_0 = m_0c^2,$$

где ν_0 *– частота, измеряемая в системе, связанной с порцией энергии. Эта гипотеза является основой нашей теории. Она ценна, как и все гипотезы, благодаря следствиям, которые из нее вытекают*» [39].

Заметим, что до сих пор мы не говорили о волне, так как в начале 1923 года де Бройль еще пытался все объяснять корпускулами, включая интерференцию. Это преувеличение даже оказало услугу: в его рассуждениях сократилась дистанция, которая отдаляла строго корпускулярное вещество от чисто волнового света. В результате ему оказалось психологически легко придумать аналогию между веществом и светом. Однако, к его же удивлению, он был вынужден модифицировать эту аналогию, когда попытался найти приложение своей идее.

Действительно, он выдвинул гипотезу, которая была похожа на способ, которым Ньютон пытался объяснить интерференцию теорией *корпускул* (см. главу 2). Он предположил, что, когда электрон описывает орбиту вокруг атомного ядра, его «*внутренняя фаза*» (связанная с периодическим процессом, определяемым частотой ν_0) изменяется на *целое число* периодов в течение каждого оборота на орбите, из-за чего, думал он, орбита становится устойчивой. Он надеялся с помощью явления резонанса объяснить квантованные орбиты Бора и целые числа, постулируемые теорией квантов.

К большому разочарованию, результат оказался неправильным, так как не были получены состояния Бора. Но он продемонстрировал одно из важных качеств научного гения – упрямство. Не оставляя целиком своей идеи, он искал в ней недостатки, мешавшие добиться цели, и привлек к исследованиям теорию относительности. Он задался вопросом, каким будет соотношение между частотой и массой для наблюдателя, который видит электрон, пролетающий мимо с некоторой скоростью. И вновь соотношение было неверно! Действительно, согласно теории относительности, такому наблюдателю масса движущейся частицы представляется большей, чем ее масса в покое, в то время как внутренняя частота, напротив, уменьшается, поскольку она связана с частицей и ведет себя как частота колебаний часов, то есть испытывает релятивистское замедление, о котором мы говорили в главе 2. Из-за того что масса увеличивается, а частота уменьшается, равенство будет неверным для движущихся относительно электрона наблюдателей, что нарушает принцип относительности. Озадаченность де Бройля возросла, но он оставался убежденным в верности своего подхода к законам Планка и Эйнштейна. В конце лета 1923 года он сказал мне:

«*Великий свет внезапно осенил мой разум*» [19].

Понимая, что отставание часов характеризовало колебания внутри частицы, он связал с ними колебания той же частоты, но охватывающие все пространство. И он показал, что если наблюдатель видит частицу в движении, то эти пространственные колебания покажутся ему волнами, распространяющимися быстрее частицы, даже *быстрее света, с частотой, увеличивающейся со скоростью, так же как и масса,* вместо уменьшения, присущего внутренней частоте.

Меняя обе величины одинаковым образом, получим, что масса частицы и частота волны смогут теперь оставаться связанными одинаковыми соотношениями для всех наблюдателей в соответствии с принципом относительности. Эквивалентность соотношений Планка и Эйнштейна оказывалась, таким образом, верной, как об этом думал де Бройль, но лишь *при условии ассоциирования волны со всякой материальной частицей.* Однако де Бройль подчеркивал, что эта волна, движущаяся быстрее частицы, не переносит энергию. Она остается, таким образом, привязанной к частице.

Итак, видим, что ассоциация волны со всякой материальной частицей была для де Бройля не следствием анализа естественного процесса в частице, а результатом согласования с теорией относительности его идеи отождествления между собой законов Планка и Эйнштейна. Волна де Бройля является первым открытием, реализованным в теории квантов с помощью такого способа рассуждений. Метод быстро стал необходимым, и теперь принято, что *релятивистская ковариантность* является *непременным условием* всякого общего квантового закона. Это условие является могущественно эвристическим. Сегодня оно рассматривается как очевидное, но нельзя забывать, что оно не является законом природы, это физическое правило, такое же, как и другие, и, значит, подлежит ревизии. Однажды гениальная идея разрушит его! Но теперь понятно, почему де Бройль всегда рассматривал волновую механику как дочь теории относительности и потому придавал огромное значение отношениям, порой трудным, между теорией относительности и волновой механикой.

Теперь, с появлением волны, чем становится внутренняя частота частицы? Не следует ли ее отбросить? Нет, потому что де Бройль смог доказать другой релятивистский закон: разность скоростей частицы и волны компенсирует разность их частот (волна с более высокой частотой движется быстрее) таким образом, что *внутренние колебания частицы в точке ее нахождения остаются постоянно в фазе с колебаниями волны.* Он назвал этот закон *принципом согласованности фаз* и вдруг увидел свою систему, разворачивающуюся перед глазами. «*Внезапно,* – говорил он *в конце лета 1923 года, – все эти идеи стали выкристаллизовываться в моем сознании…*» [43].

Де Бройль опубликовал свой закон в первом сообщении 10 сентября 1923 года [36] с двумя приложениями (одно касалось света, другое – атома), которые не предсказывали нового явления, но объявляли о новом видении мира. Сначала он уточнил связь между квантом света и его волной такими словами:

«*Атом света, эквивалентный по своей полной энергии излучению с частотой ν, является источником внутреннего периодического процесса и, с точки зрения неподвижного наблюдателя, имеет в каждой точке пространства ту же фазу, что и волна с частотой ν, распространяющаяся в том же направлении, со скоростью, почти равной (хотя чуть большей) постоянной, называемой скоростью света*[14]» [36].

Это был значительный шаг вперед в сравнении с Эйнштейном. Де Бройль больше не утверждал, как Эйнштейн, что одинаково необходимы корпускулярный и волновой образ. Он устанавливал точную связь между корпускулой и волной с помощью формул, которые показывали, как фотон, отставая, скользит вдоль волны, всегда находясь в фазе с ней.

Эта концепция справедлива для электрона и любой другой частицы, различие заключается лишь в массе; оно фиксирует соотношение различных скоростей между частицей и волной. Представление является чисто дуалистическим, не существует только волна, не существует только частица. Устанавливается тесный союз между ними.

Понятно, почему де Бройль так дорожил массой фотона. Благодаря ей он получал единое представление о веществе и свете. Аннулируя массу фотона, он выставил бы свет за рамки своей общей концепции, что было для него совсем недопустимо, поскольку он исходил из квантового описания света, а не вещества[15].

[14] Малая величина массы фотона предполагает, что его скорость только немного меньше, а фазовая скорость его волны немного больше измеряемой скорости света.

[15] Подчеркнем, что никакой физический факт не доказывает и не опровергает равенство нулю массы фотона, потому что эксперимент не измеряет точно ни одну константу, какой бы она ни была. Он не может доказать ни равенство ее нулю, ни малость массы фотона (в чем никто не сомневается) или, возможно, даже определить приблизительно его массу, если это однажды произойдет. Это не факт, а постулат. Де Бройль неоднократно приводил свою аргументацию в работах [40–42]. Об этом можно также прочесть в письме Фрицу Кубли [22].

Приложением развитой схемы к веществу была теория атома Бора. Де Бройль и ранее стремился к этому, но на этот раз, основываясь на концепции волны, добился успеха. Вместо предположения, как ранее, что фаза внутреннего колебания частицы должна целое число раз повторяться за период орбиты, он рассуждал так: если электрон начинает описывать орбиту из какой-либо точки, его внутренняя частота будет оставаться в фазе с частотой волны, вышедшей в тот же момент из той же точки, в силу согласованности фаз. Но если орбита замкнута (например, круговая) и волна движется быстрее частицы, она догонит ее. И де Бройль предположил, что движение электрона на орбите будет стабильным, если волна догонит его, находясь в фазе с ним, и, таким образом, отсюда следуют квантовые законы Бора. Таким образом, он объяснял это, исходя из условия резонанса, который и предсказывал Пуанкаре, из чего следовало квантование материи и прояснялась роль целых чисел.

Сообщение поражает победным тоном, столь необычным для научной литературы. Де Бройль осознавал, что открыл великий закон, и не колебался заявить об этом. Он считал закон согласованности фаз «*важным результатом*» и повторил эти слова, сообщая о последующих работах:

«*Следуя этим же путем, мы пришли к важным результатам, которые скоро будут опубликованы. Отныне мы способны объяснить явления дифракции и интерференции с учетом квантов света*» [36].

Через пару недель после первого сообщения появилось новое – «*Кванты света, дифракция и интерференция*» [37], эти две страницы можно охарактеризовать как наиболее интеллектуальные из когда-либо написанных по физике.

Де Бройль начал изложение с напоминания о законе согласованности фаз, подчеркнув, что его волна является «*нематериальной*» потому, что движется быстрее света. Он назвал ее «*фазовой волной*», оставив в стороне ее физическое значение, с любопытным замечанием, «*что это будет трудной задачей расширенной теории электромагнетизма*». Можно задать вопрос: почему электромагнетизма? Вероятно, потому, что он был близок к вдохновлявшей его оптике. Напротив, в самом начале сообщения он сразу одной строкой без доказательства (будет дано в диссертации) делает стоящее золота замечание. Он говорит, что скорость частицы равна *групповой скорости* фазовых волн (мы уточним далее это понятие). Однако в физике волн групповая скорость, обычно отличающаяся от фазовой скорости, соответствует скорости переноса энергии. И поэтому логично было бы предположить, что она является скоростью переноса массы частицы, и это установило бы дополнительную связь между частицей и волной. В противоположность фазовой скорости групповая скорость и, следовательно, скорость частицы становятся меньше скорости света, как того требует теория относительности.

Де Бройль развивает мысль. Он предлагает ни более и ни менее как изменить принцип инерции Галилея. Зная, что атомы света, связанные с волнами, отклоняются от прямолинейного движения при дифракции, он предлагает положить в основание динамики (не только для света, но и для *всех* частиц) новый принцип, согласно которому частица следует по одному из лучей фазовой волны и подчиняется принципу Ферма (см. главу 2). Он замечает, что при отсутствии дифракции результат совпадает с принципом Мопертюи. В случае дифракции теория волн делает шаг в сторону динамики материальной точки. Дифракция волны искривляет траекторию даже в отсутствие внешней силы, как если бы препятствие, являющееся причиной дифракции, оказывало давление на волну. Де Бройль отмечает, что новый принцип объясняет дифракцию атомов света, сколь бы мало ни было их число. Таким образом, нет больше необходимости в объединениях атомов, и он добавляет:

«*Более того, движущееся тело могло бы в некоторых случаях претерпевать дифракцию. Поток электронов, проходя сквозь достаточно малое отверстие, представлял бы собой иллюстрацию явления дифракции. Именно с этой стороны следовало бы, может быть, искать подтверждение нашим идеям*» [37].

Эта мысль принесла ему Нобелевскую премию, когда предсказание получило экспериментальное подтверждение. Мы увидим, что в действительности это уже наблюдалось, но никто этого не понял. Однако великая идея содержится в заключении:

«*Таким образом, мы рассматриваем фазовую волну как управляющую перемещениями энергии, и именно это позволяет произвести синтез волнообразных движений и квантов. Теория волн зашла слишком далеко в отрицании дискретной структуры энергии излучения и недостаточно далеко, отказываясь от включения волн в динамику. Новая динамика свободной материальной точки является для прежней динамики (включая динамику Эйнштейна) тем же, что представляет собой волновая оптика для геометрической оптики. Размышляя об этом, увидим, что предлагаемый синтез, кажется, явится логическим завершением сравнительного развития динамики и оптики начиная с XVII века*» [37].

Это было свидетельством рождения новой механики – волновой, одним из грандиознейших научных событий. Отметим, что там, где другие видели революцию, сам Луи де Бройль видел лишь синтез и завершение. Далекий от мысли покончить с прошлым, согласно тенденциям века, он рассматривал это открытие как логическое завершение его эволюции.

Он закончил свою вторую работу [37] попыткой объяснения светлых и темных полос, возникающих при интерференции, выдвинув гипотезу о вероятностной природе поглощения света атомом, согласно которой излучение атома, вызванное светом (стимулированное излучение), происходит из-за суперпозиции фазовых волн, то есть из факта их сложения или вычитания. Это высказывание явилось предтечей вероятностной интерпретации, которую Макс Борн предложит несколькими годами позднее и согласно которой интенсивность волны определяется *вероятностью присутствия* частицы. Он уточняет свою гипотезу в утверждении, которое сыграет роль в будущем:

«*Любая причина, вызвавшая излучение кванта света в точечном источнике, обусловлена прохождением фазовой волны мимо соседних атомов. При этом излучать кванты света будут только те атомы, внутренние колебания которых, по нашему предположению, находятся в фазе с самой волной. Все испущенные световые атомы имели бы, таким образом, ту же самую фазовую волну, что и первый атом. Скажем, что они связаны в волне*» [37].

Это было свойство *когерентности* стимулированной эмиссии света, которое еще не появилось у Эйнштейна и которое будет призвано сыграть роль первого плана в *лазерном излучении.* Де Бройль обратил внимание, *что связанные в волне* световые атомы похожи на те, которые описываются формулой Эйнштейна для флуктуаций излучения абсолютно черного тела, но с заметной эволюцией представления: уже нет больше, как прежде, «молекул» света, но появились атомы, принадлежащие одной и той же волне.

И вот, наконец, третье сообщение [38] – последний камень в основании волновой механики – под названием «*Кванты, кинетическая теория газов и принцип Ферма*». В нем главной идеей является оправдание статистических постулатов, введенных Планком и Нернстом, которые позволили константе h сыграть важную, но загадочную роль[16]. Де Бройль объясняет это, вводя полностью новую концепцию равновесия газа. Каждый атом, говорил он, мог бы «*рассматриваться связанным с группой фазовых волн… при этом состояние газа сможет быть стабильным только тогда, когда волны, соответствующие всем атомам, образуют систему стационарных волн*» [38]. Он рассматривает атомы так же, как рассматривают излучение, заключенное в полости, и вместо атомов он подсчитывает число волн. Этот способ станет фундаментом квантовой статистики, но останутся еще пункты, которые предстоит уточнить, что он и сделает в своей диссертации. А пока он показывает, что формула, которую он получает, совпадает с законом Максвелла для обычных газов и с формулой Планка для световых атомов. Но он не замечает, что его общая формула, которая отличается от закона Максвелла, сохраняет смысл в теории материальных газов. Заслуга произвести эту экстраполяцию принадлежит Эйнштейну, и полученная статистика будет названа статистикой Бозе – Эйнштейна.

Наконец, де Бройль возвращается к закону согласованности фаз и снова выражает свою надежду на то, что «*расширенная теория электромагнетизма даст нам механизм этого сложного движения*» (неизвестно, имел ли он в виду кванты света или же какую-либо частицу). Он добавляет следующее замечание:

«*Кажется, что мы заранее знали заключение: лучи фазовых волн совпадают с динамически возможными траекториями*» [38].

Вот в основном все то, что составляло содержание сообщений 1923 года, заложивших основание волновой механики. Любопытно констатировать, что в них отсутствует знаменитая формула дебройлевской длины волны:

$$\lambda = h/mv.$$

[16] Речь идет о разбиении фазового пространства на ячейки объемом h^3.

Она появится только в конце диссертации. Пока де Бройль использует вместо длины волны λ эквивалентное отношение фазовой скорости к частоте V/ν. Это не случайно, так как эти две величины появляются естественным образом в теории и входят в закон согласованности фаз. Надо подчеркнуть, что они могут быть определены только в теории относительности. Впоследствии совсем забыли о законе согласованности фаз и частично отодвинули теорию относительности, потому что наиболее приемлемым уравнением станет уравнение Шредингера, которое не является релятивистским. Это заставило отказаться от использования скорости и частоты в пользу эквивалентного употребления длины волны λ, единственной величины, определяемой экспериментально и вычисляемой с помощью нового уравнения.

Перейдем теперь к диссертации 1924 года. В некотором смысле она является лишь развитием трех сообщений, но имеет и существенные отличия, первое из которых – стиль изложения. У де Бройля их было два, и они сильно разнились. Одним стилем, ровным, выдержанным, написаны дидактические изложения; другим, более горячим, – истории открытий. Первый известен по его книгам и курсам лекций, в которых он излагал достаточно долго обдумываемые сюжеты. Этот стиль элегантен, ясен, прост, без литературных приемов, хотя и в нем ощущается страсть, когда красота теории приоткрывает секреты физической реальности. Де Бройль писал без заумных и изысканных слов, не имея обыкновения кичиться богатым словарным запасом. Сила слов у него состояла не в редкой употребительности, но в точном выборе и едином построении оборотов речи. Это был истинный писатель, который следовал правилу Валери: «*Из двух возможных слов всегда выбирайте более короткое*». Один иностранный переводчик сказал мне, что книги де Бройля трудно переводить, потому что строгость фраз не позволяет ничего изменить. Очевидно, что ясность стиля отражает ясность духа. Его объяснения с очевидностью показывают, насколько они сводятся к главному, без прикрас и многословия, без торжественности некоторых научных повествований, в которых бедность идей скрывают за научным туманом. Ясность у де Бройля даже вредит изложению; физика у него смотрится настолько простой, что забываешь: именно в его способности показать науку таковой и заключается его заслуга. Но он считал неприличным открыто демонстрировать свою ученость.

Другой стиль, в котором он вел повествование о будущем открытии, был менее ясным и менее контролируемым. Здесь де Бройль становился неровным, быстрым, лаконичным, опускал слова или целые фразы. Он быстро писал и быстро говорил, забегая вперед и перескакивая в доказательствах с одного места на другое, считая очевидным то, о чем еще не догадывался собеседник, который поэтому плохо его понимал. Этот стиль, скорее самоуверенный, чем доказательный, создавал впечатление, будто слышишь: «*Это я, я говорю вам, что все происходит именно так!..*» Такой способ изложения можно назвать интуитивным, но в нем отражалась проницательность человека, который получал знания до их понимания и который говорил сердцем больше, чем разумом. В самом деле, казалось, что он ведет диалог скорее с собой, чем с читателем, захваченный наслаждением созерцания нового образа, представляющего действительность. Следует отметить, что он обожал беседовать сам с собой, интригуя прохожих, которые видели его шагающим взад-вперед по улицам Нейли или аллеям Булонского леса.

Надо ли пояснять, что второй стиль относился к сообщениям 1923 года, а первый – к диссертации? В сообщениях он был весь в своем открытии; в диссертации же, в основном уверенный в своей правоте, он прибегал к отступлениям, углубляясь со своими идеями в историю. В своем первом сообщении он брал с потолка свое соотношение кванта и вводил бог знает как фазовую скорость волны, которую потом использовал без доказательства, даже до написания ее формулы. Он не говорил ни о замедлении хода часов, ни о преобразованиях Лоренца, иногда необходимых для понимания; он устанавливал закон согласованности фаз, сопоставляя два элемента, полагаемых *a priori.* Все это было скорее гениальной догадкой, чем доказательством. В его диссертации все меняется: он начинает с объяснения – в своей замечательной манере – смысла эйнштейновского соотношения между массой и энергией, смысла атомизма материи и закона Планка, заключая несколькими строками, цитированными выше, в которых он формулирует как «*великий закон природы*» эквивалентность законов Планка и Эйнштейна. Можно привести и другие примеры, в частности теорему о групповой скорости, которая во втором сообщении содержалась в двух непонятных строчках, но излагалась на двух страницах диссертации, на этот раз совершенно понятно.

В диссертации де Бройля уже ощущается его педагогический талант. Эта способность, конечно, раскрывается со временем, но очень важно, есть ли она изначально. Кроме того, необходимо обладать смелостью, чтобы приступить к объяснениям. Не так легко это сделать в диссертации, в труде, который будет представлен на суд признанных мэтров. Но де Бройль, уверенный в себе, без смущения объясняет закон согласованности фаз на примере чаши весов и грузов, колеблющихся на витых пружинах.

Сначала он рассуждает как мэтр, в котором историк преобладает над физиком. Первым словом краткого содержания является *история,* и диссертация начинается с *исторического введения,* повествующего о развитии физики с XVI по XX век. Он описывает эволюцию механики, оптики, электричества, термодинамики и статистической механики, заканчивая такими словами:

«*Короче говоря, кажется, наступил момент попытаться сделать усилие с целью объединения корпускулярной и волновой точек зрения и немного углубить истинный смысл квантов. Это то, что мы недавно сделали*».

Слова «*кажется*», «*попытаться*», «*немного*» отражают осторожность и скромность хорошего тона, но он был уверен в себе.

Пройдемся кратко по диссертации, отмечая новое (в сравнении с тем, что мы уже знаем) и останавливаясь лишь на сильных и трудных для понимания моментах.

Мы уже почти ознакомились с первой главой, посвященной фазовой волне, но я хотел бы добавить несколько замечаний по поводу теоремы о групповой скорости и немного уточнить ее значение. Фазовая скорость – это скорость, с которой движется гребень волны определенной частоты. Это как раз случай дебройлевской волны свободной частицы, частота которой задана ее энергией, а значит, и скоростью частицы. Групповая скорость – это скорость, с которой движется гребень суперпозиции нескольких волн (возможно, их бесконечного числа) различных, но близких частот. Она отличается от фазовой скорости, если последняя зависит от частоты. Тогда говорят, что имеются *диспергирующие* волны. Это случай световых волн в преломляющей среде (отчего происходит разложение призмой белого света на составляющие цвета), а также дебройлевских волн, даже в пустоте, так как их фазовая скорость зависит от скорости частицы, а значит, и частоты.

Отсюда вытекает теорема о групповой скорости, которая буквально поразила умы и легла в основание дебройлевской интерпретации волновой механики.

Основание этой интерпретации появилось в сообщении «О динамике кванта света и интерференции» от 17 ноября 1924 года, за неделю до защиты диссертации. Теорема о групповой скорости, говорил де Бройль, «позволяет рассматривать материальную точку как сингулярность группы волн, перемещение которой управляется принципом Гамильтона – Ферма» [40]. Так в первый раз была высказана идея рассмотрения материальной точки как *сингулярности* в волне или в непрерывном поле[17]. Концептуальный скачок был значительным. Год назад де Бройль еще пока осторожно говорил, что волна нематериальна, уже предполагая, что она может вызвать эмиссию квантов энергии. Но теперь это волна, которая становится главным элементом, а материальная точка – всего лишь сингулярностью. Данная идея станет основанием его теории *двойного решения,* которую он предложит через несколько лет. На это стоит обратить внимание тем, кого беспокоит, что де Бройль несколько отклонился от квантовой механики, введя странную идею сингулярных волн. В действительности они существовали там до квантовой механики. Следует добавить, что через несколько лет эта идея вновь появится в общей теории относительности, когда Эйнштейн предложит рассматривать материю как сингулярность гравитационного поля.

В том же сообщении 1924 года де Бройль выдвинет несколько других идей, которые разовьет в будущем, например: «*…лучи, предсказанные волновыми теориями, могли бы во всех случаях быть возможными траекториями квантов*». Это обобщение законов геометрической оптики в присутствии внешних сил или препятствий движению волны предвосхищает *закон управления,* который он сформулирует позднее. Но важнейшая идея касается интерференции.

[17] Точнее, впервые эта идея была высказана по поводу материальной частицы, так как уже в 1909 году на конгрессе в Зальцбурге Эйнштейн высказал мысль, что квант света (или фотон) мог бы быть сингулярностью световой волны.

Критикуя свое второе сообщение 1923 года, согласно которому интенсивность волны управляла бы вероятностью взаимодействия между квантом света и веществом, он упрощает свою точку зрения и теперь говорит, что на светлые полосы падает большее количество фотонов, чем на темные. Таким образом, интенсивность волны в точке определяет *вероятность присутствия фотонов.* Такую интерпретацию предложит Макс Борн.

Вернемся к теореме о групповой скорости и рассмотрим ее с другой точки зрения. Де Бройль говорит нам, что скорость частицы является групповой скоростью волн. Но в такой группе у частицы имеются различные скорости. Конечно, эти скорости близки и можно говорить о средней скорости, но что это за частица, имеющая несколько скоростей? На первых страницах диссертации де Бройля мы встречаемся с одной из главных трудностей волновой механики. Если мы хотим, чтобы скорость частицы была определенной, то надо, чтобы частота волны была единственной и такая волна простиралась в бесконечность. Тогда ничто не указывает на место, где находится частица. Если, напротив, мы хотим уточнить положение частицы, необходимо образовать скопление волн различных частот, чтобы создать пакет, локализованный в пространстве; однако чем больше будет частот, тем больше будет возможных скоростей и тем менее они будут определены. Из-за волновой природы частицы ее положение и скорость не могут быть одновременно точно известны из-за знаменитого *соотношения неопределенностей*, выдвинутого Гейзенбергом спустя несколько лет. Но де Бройль не мог рассматривать вещи под таким углом зрения, так как имел на них другой взгляд и не был расположен к признанию неустранимых неопределенностей. По этой причине он отдавал предпочтение движущимся сингулярностям.

Наиболее объемной главой диссертации была вторая глава – «*Принцип Мопертюи и принцип Ферма*». В ней содержится мечта молодости де Бройля, синтез механики и оптики. До сих пор он изучал только случай свободного тела, движущегося прямолинейно и равномерно. Его задачей было обобщение заключений на случай движения в присутствии сил, что уже было необходимо при рассмотрении атома Бора, где он пока еще прибегал к изобретательным ухищрениям. Необходимо было найти общий метод. Трудность заключалась не в волнах, а в специальной теории относительности, которая теряла свою элегантность, как только отходила от равномерного движения.

Тем не менее де Бройль принял за руководство к действию принцип относительности, используя понятие «ковариантность» в пространстве четырех измерений (три пространственных и одно временное), называемом «пространство-время» или «мир Минковского», в котором он сформулировал принцип Ферма. Возможно, он был первым, кто основывал физические рассуждения, исходя из аналогии формы мировых векторов, в данном случае – из аналогии между *четырехмерным импульсом* механики и *мировым волновым вектором* оптики, который он ввел. Оказывалось, что их компоненты, называемые временными, соответственно были равны энергии E частицы и частоте ν волны (каждая деленная на скорость света). Вследствие этого «квантовое соотношение» $E = h\nu$, с помощью которого де Бройль связал волну с частицей, выражалось в пространстве-времени двумя векторами, временные компоненты которых были пропорциональны h. Таким образом, смелым шагом де Бройля явилось постулирование исходя из аналогии форм, что оба вектора пропорциональны друг другу и коэффициентом пропорциональности является константа h. Отсюда сразу же следует формула длины волны $\lambda = h/mv$, но де Бройль не придает ей никакого значения, так сильно заинтересован в другом, более важном для него результате, а именно в идентичности двух великих принципов Мопертюи и Ферма:

«*Принцип Ферма, приложенный к фазовой волне, идентичен принципу Мопертюи, приложенному к движущемуся телу, динамически возможные траектории которого идентичны возможным лучам волны*».

Эти строки завершают трудный этап соперничества корпускулярной и волновой теорий, которые были противопоставлены друг другу с XVII века, когда Ньютон и Гюйгенс предложили в оптике два противоположных и, казалось, несовместимых представления. Надо заметить, что в то время механика Ньютона находилась в совершенной гармонии с его оптикой, потому что обе выражались в понятиях корпускулярных движений. И только к концу XIX века наметилось различие в подходах к механике и оптике, когда волновое представление, казалось, одержало окончательный триумф над своим соперником благодаря работам Юнга и Френеля. Но де Бройль не позволил состояться этому разводу и положил конец тяжбе между двумя теориями.

Исходя из новых формул, установленных де Бройлем, теорема о групповой скорости не нуждалась даже в специальном доказательстве, так как посредством символического трюка, жестом фокусника эта теорема теории волн извлекалась из уравнения механики. К тому же де Бройль уже придерживался формализма, пока еще элементарного, но уже позволявшего ему решать не на ощупь, а в волновых понятиях некоторые задачи динамики. В этой главе описано несколько показательных случаев, главным из которых является случай атома Бора, рассмотренный под более общим названием «*Квантовые условия стабильности траекторий*», которому он посвятил главу III.

Эта краткая глава целиком базируется на статье Эйнштейна 1917 года о теории Бора – Зоммерфельда, упомянутой в предыдущей главе. Де Бройль процитировал ее в первом сообщении 1923 года, но лишь в диссертации дал разъяснения. Эйнштейн формулировал квантовые условия, следя за эволюцией вдоль механической траектории некоторой величины, которая изменяется в целое число раз (в единицах постоянной Планка), когда траектория замкнута. Эта величина является «интегралом действия» Мопертюи, на котором основан принцип наименьшего действия в механике. Однако де Бройль показал, что это количество идентично «оптическому пути», пройденному светом, который должен быть также минимален, согласно принципу Ферма. Таким образом, устанавливалась идентичность двух великих принципов.

Когда Эйнштейн сказал, что «интеграл Мопертюи» должен быть кратен постоянной Планка, то этот постулат привел его к большому количеству квантовых чисел и оставался непонятным. Де Бройль сумел растолковать его на языке новой волновой механики. В своей диссертации он показал: условие Эйнштейна означает, что длина волны должна целое число раз укладываться на длине траектории – *волна должна быть в резонансе с траекторией.*

Он сказал:

«*Этот прекрасный результат, доказательство которого настолько мгновенно появляется при допущении справедливости идей предыдущей главы, является наилучшим оправданием нашему подходу к проблеме квантов*» [39].

Но тут же сформулировал естественным образом возникший вопрос:

«*Мы хорошо понимаем, почему некоторые орбиты стабильны, но пока не знаем, как происходит переход с одной стабильной орбиты на другую. Скачкообразный режим, сопровождающий этот переход, сможет быть описан лишь с помощью должным образом модифицированной теории, которой мы пока еще не имеем*» [39].

Де Бройль мечтал решить задачу квантовых переходов, чтобы включить ее в свою систему и сделать кванты полностью понятными. В этой фразе отразился его научный оптимизм в противовес Бору с его учениками, которые утверждали, что это явление не может быть описано в пространственно-временных рамках. Высказывание Бора сделано на чисто «магическом» языке, противоположном стилю де Бройля и языку науки вообще.

Продолжение главы посвящено проблеме квазипериодических движений, которая уже несколько утратила актуальность. Но де Бройль отмечает, что применение закона согласованности фаз к точке означает, «*что электрон представляет собой материальную точку без размеров и* [что] *луч его фазовой волны является геометрической линией нулевой толщины, что недопустимо*». Он стремился показать, что результаты останутся прежними, если допустить, что согласование фаз происходит на конечной части волны, соответствующей пространственному увеличению размеров частицы. Это подтверждает то, что его первой заботой был поиск способа описания явлений, удовлетворяющих разум. В его понимании физики имелась определенная структура, и первое место занимало *видение мира,* затем следовали приложения. Несомненно, именно поэтому о дифракции электронов, упомянутой в сообщении 1923 года, ничего не говорится в самой диссертации, которая посвящена более общим представлениям. Луи де Бройль коснулся этого вопроса лишь в день защиты, когда Жан Перрен спросил его о том, как можно обнаружить его волну. Де Бройль ответил тоном, с каким говорят об очевидных вещах: «*Дифракцией электронов!*»

В главе IV, озаглавленной «*Квантование одновременных движений двух электрических центров*», де Бройль затрагивает наболевший вопрос, которым будет заниматься всю жизнь, – проблему описания системы частиц. Несмотря на все практически решенные проблемы, она по-прежнему остается загадкой для волновой механики, вобравшей в себя все трудности, присущие теории относительности и теории волн.

В теории относительности существует двойная трудность. С одной стороны, время зависит от движения и различно для всех частиц; с другой стороны, они взаимодействуют между собой с силами, требующими учета энергий взаимодействия для всех частиц, которые меняют их массы и являются причиной потери индивидуальности. Проблема еще более усложняется в случае волн. Если имеется несколько частиц, то возникает вопрос: имеет ли каждая частица свою индивидуальную волну или существует одна общая для всех волна? Де Бройль склонялся к первой гипотезе, но вторая все еще стоит на повестке дня. И еще остается проблема индивидуальности.

Глава V озаглавлена «*Кванты света*». Она возвращает нас к источнику теории, аргументы в пользу которой нам известны из сообщений 1923 года. Де Бройль выражается осторожно, говоря «*попытка*», «*небольшой шаг к синтезу концепций Ньютона и Френеля*», «*есть причины верить, что…*» или «*кажется, мы можем прийти к синтетическому взгляду…*» *и т. д.* Но он подчеркивает: «*Наша динамика (включая эйнштейновскую форму) отстает в области оптики. Она еще находится на стадии геометрической оптики*» [39].

Поскольку все считали свет волнами, он старался усилить позиции фотона, показывая, что некоторые результаты, объясняемые волновой теорией, объясняются также в понятиях световых атомов при условии использования теории относительности. Он приводит аргумент из своих доказательств, чтобы показать «*существование между двумя точками зрения, на первый взгляд противоположными, скрытой гармонии, благодаря которой с помощью фазовой волны мы можем предугадывать поведение природных объектов*».

Ранее он уточнил свою мысль относительно массы фотона, подчеркнув, что эта масса не должна быть равна нулю для того, чтобы его рассуждения были справедливы для фотона так же, как для электрона. Но он отмечает различие между двумя частицами, состоящее в малости массы фотона, которая «*приводит к особенно тесной связи между световым атомом и его фазовой волной*»… И это составляет основу «*скрытой гармонии*», присущей излучению.

Мы очень быстро пройдемся по менее оригинальной главе VI «*Рассеяние X- и γ-лучей*». Упомянем только эффект Комптона, на который мы уже намекали, – эффект, который сыграл историческую роль по причине его объяснения столкновением между фотоном и электроном, что явилось значительной поддержкой идее эйнштейновского фотона (19 лет спустя после его статьи 1905 года!). Де Бройль все-таки отмечает, что принятое объяснение является чисто корпускулярным и что проблема заключается в том, чтобы гармонизировать его с чисто волновыми рассуждениями, благодаря которым удалось бы объяснить дифракцию тех же *X*-лучей в экспериментах, аналогичных опытам Лауэ.

Формулируя такие вопросы, де Бройль дистанцируется от Бора, общепринятая теория которого гласит, что природа сама отвечает на вопрос в понятиях волн или понятиях частиц соответственно способу, каким об этом ее спрашивают. Это объяснение де Бройль позднее сравнит со знаменитым объяснением мольеровских медиков, по словам которых, опиум усыпляет, потому что он обладает способностью усыплять. Ничто не было так противоположно духу де Бройля, как простое утверждение о дуализме света. Его могло бы удовлетворить только единое представление, объединяющее корпускулярные и волновые явления.

И вот, наконец, последняя, VII глава «*Статистическая механика и кванты*». Это один из пунктов, в котором де Бройль обладает определенным преимуществом по сравнению с другими исследователями. Действительно, не забудем, что теория квантов родилась благодаря Планку и Эйнштейну из термодинамики и статистики. Однако Планк однажды сделал следующее замечание: «*Здесь речь идет о выводе динамических законов, то есть причинной зависимости частных явлений исходя из статистических законов*». Иначе говоря, как догадаться об индивидуальном поведении частиц при наблюдении поведения коллектива? Позже Эйнштейн сделает подобное высказывание по поводу интерпретации квантовой механики, заметив, что если бы хаотическое броуновское движение появилось до законов механики, то было бы очень трудно получить последние, исходя из статистики броуновского движения [41]. Можно сказать, что те, кто открыл первые законы квантов, двигались на ощупь, и мы всегда будем восхищаться их смелостью и проницательностью. Но де Бройль находился в более благоприятной ситуации. После открытия волновых свойств материи ему было легче прикоснуться к статистике, потому что в отличие от своих предшественников он пытался вывести их из индивидуального закона, который уже имелся в его распоряжении. Кроме того, он обладал знаниями по статистике волн – в области, уже истоптанной основателями теории излучения черного тела. Оставалось установить связь между статистикой волн и статистикой частиц, и в этом заключалась вся трудность.

Все основывалось на новой концепции равновесия газа. Де Бройль предположил, что волны, сопровождающие атомы, должны быть стационарными в газовой полости, так же как электронная волна стационарна в атоме. Статистика набирается при подсчете стационарных волн, и для этого он приводит наконец-то (!) формулу длины волны на странице 111 диссертации (издание 1924 года). Он показывает, что длина стационарных волн может принимать лишь ряд дискретных значений, причем и скорость атомов тоже будет принимать ряд возможных дискретных значений. Именно это давно предложил Сакур, интерпретируя статистические результаты Планка, которые он не смог объяснить. На этот раз идея вытекала из теории фазовой волны, но де Бройль, несмотря на то что она принадлежит ему, не принимает ее как истину в первой инстанции и замечает: она «*предполагает, что под действием неизвестного механизма автоматически устраняются движения атомов, связанные с системами нестационарных фазовых волн*» [39]. Это напоминает аналогичную фразу Жана Перрена, приведенную в главе III.

Если бы де Бройль довольствовался построением статистики, считая фазовые волны вместо атомов, он просто нашел бы результаты Планка для газов, но не закон излучения черного тела, так как когерентность волн пока еще отсутствовала в его рассуждениях. Для этого необходимо было ввести новую гипотезу, сформулированную так:

«*Если два или несколько атомов имеют волны, которые точно накладываются друг на друга, то можно будет говорить, что они переносятся одной и той же волной, и их движения не могут больше рассматриваться как полностью независимые, а атомы – как различимые единицы в вычислениях вероятностей*» [39].

Это равновесие должно быть результатом переходного процесса:

«*Движение этих атомов "в волне" представляло бы некий вид когерентности, происходящей из-за неизвестных взаимодействий, но, вероятно, родственных механизму, делающему нестабильным движение электронов в атоме, фазовая волна которых не является стационарной*» [39].

Эта проблема, остающаяся нерешенной, – одна из тех, что входят в целый лист вопросов по квантовой механике, составленный де Бройлем. Как и прочие затруднения, она сейчас забыта и удивила бы большинство современных физиков, привыкших принимать квантовую механику как сборник рецептов. Постулат когерентности де Бройля является одним из таких рецептов, находящихся в основании статистики Бозе – Эйнштейна. Применяя его к газу *световых атомов*, де Бройль вновь приходит к закону Планка и показывает, что это есть смесь газов, молекулы которых составлены, соответственно, из одного, двух, трех и так далее фотонов (то же самое он предложил в сообщении 1922 года о свете) [33]. Но теперь он знает, что это волна поддерживает «*по причине неизвестных взаимодействий*» когерентные образования фотонов.

Можно было бы задаться вопросом, читая это резюме, не играет ли волна здесь чисто описательную роль. Но это не так, потому что статистику не составляют подсчетом волн. И де Бройль подчеркивает, что именно величины, заданные теоремой о групповой скорости, приводят к хорошим статистическим результатам.

Так заканчивается наиболее знаменитая диссертация по физике, провозгласившая грандиозный результат. Похожий случай имеется в математике: немецкий ученый Риман на своем торжественном уроке по поводу начала занятий (в сущности обычная университетская формальность) представил теорию *римановых пространств,* которая сыграла громадную роль в геометрии, а позднее и в общей теории относительности. Эйнштейн также хотел представить к защите диссертацию о специальной теории относительности, но ему было в этом отказано. Поэтому в противоположность де Бройлю Эйнштейн не смог повторить успех Римана.

В своей диссертации де Бройль лишь в приложении говорит о массе фотона и делает выводы, заканчивающиеся такими словами:

«*Я намеренно оставил достаточно туманными определения фазовой волны и периодического процесса, которые в какой-то мере были бы объяснением кванта света. Представленная теория должна, таким образом, рассматриваться скорее как форма, физическое содержание которой не вполне установлено, а не как окончательно разработанная стройная доктрина*» [39].

Это тон не доктринера, но человека, задающего вопросы, который не закрывает за собой двери, а лишь скромно оставляет их приоткрытыми в будущее. Мы увидим, насколько окраска этих высказываний отличается от решительных интонаций, которые появятся в выступлениях его соперников из Копенгагенской школы на Сольвеевском конгрессе 1927 года.

ГЛАВА 5. Первые победы. Первые соперничества. Река удаляется от источника

Сообщения 1923 года не вызвали эха, и необходимо было появление диссертации, чтобы понять первую реакцию, отзыв Эйнштейна, который стал определяющим. Не языковой барьер явился тому причиной: европейские языки в то время были более взаимопроникающими, чем сегодня. Кроме того, де Бройль резюмировал свои идеи на английском языке в письме, отправленном в журнал «*Nature*» [42]. Непонимание заключалось в новизне и странности высказанных идей. Прочитав его диссертацию, один иностранный теоретик с презрением сказал: «*А, это „Комеди Франсез“*» (должно быть, путая с «Фоли-Бержер»). Историк науки Борис Кузнецов рассказывал мне, что даже Эренфест, признанный физик, сказал Эйнштейну, который был его другом: «*Если все это правда, то я ничего не понимаю в физике*», на что тот ответил: «*Нет, физику ты очень хорошо понимаешь. Ты не понимаешь гениальности*». И, напротив, по словам Капицы, Эйнштейн остановился на первой главе, потому что все ему показалось таким очевидным, что он продолжил свою работу, не читая остальное.

Валери говорил: «*…надо быть Ньютоном, чтобы заметить, что Луна падает на Землю, когда все видят, что она на нее не падает*» [43]. Несомненно, только де Бройль мог заметить, что материя волнообразна, когда никто этого не видел, и только Эйнштейн мог сразу признать правоту де Бройля. Кто еще мог дать достойную оценку, если не ученый, чьи работы лежали в основе диссертации де Бройля?

Использование волн для описания физических явлений было далеко не ново, но в данном случае идея де Бройля и ее математическое оформление казались совершенно неприемлемыми с точки зрения здравого смысла. Несколькими годами ранее появились статьи Марселя Бриллюэна, о котором я уже упоминал. Там он высказывался о волнах, испускаемых электроном и движущихся впереди электрона, но идея не была развита. В XIX веке произошел также знаменитый прецедент с Гамильтоном. Великий ирландский математик, основавший вместе с Лагранжем и Якоби аналитическую механику, заметил аналогию между принципами Мопертюи и Ферма, между механикой и оптикой и показал эквивалентность корпускулярного и волнового представления для света. Однако ему не хватило теории относительности и квантов, чтобы пойти дальше, и его идея была забыта. Остался лишь формальный аспект его теории, динамика Гамильтона – Якоби, в которой существует движение фронта волны и откуда выводятся механические движения частицы. В годы юности де Бройль не знал об оптико-механической аналогии Гамильтона, но он изучал его динамику. Наверняка Гамильтон был одним из его великих предшественников наряду с Ньютоном и Эйнштейном.

Среди его предшественников были не только теоретики, но и экспериментаторы, однако и их идеи не были признаны. В 1921 году немецкий физик Рамзауэр, пропуская через газ пучок электронов, констатировал, что проницаемость газа менялась странным образом в зависимости от скорости электронов. Она резко *увеличивалась*, когда значительно *уменьшали* их скорость, хотя казалось. что более медленные электроны должны быть, напротив, менее проникающими. Увы, консультирующие теоретики, среди которых был Макс Борн, считали это артефактом. Однако Рамзауэр, исходя из данного факта, подзабытого историей, был первым, кто наблюдал волновой эффект на электронах. Речь идет о резонансе дебройлевских волн внутри атомов газа. Проведенный немного позже эксперимент Дэвиссона и Кунцмана был также неправильно интерпретирован в то время. Рассеивая медленные электроны на поверхности платины, они заметили, что рассеяние имело максимумы и минимумы в зависимости от угла падения электронов. Таким образом, они открыли ни много ни мало дифракцию электронов! Но сами узнали об этом гораздо позднее.

Я говорил, что де Бройль долгое время оставался немым относительно своих первых идей, которые разрабатывал, сидя в своем кабинете или в комнате за маленьким столом, обтянутым черным бархатом. Этот предмет мебели появился у него еще в лицейское время и был бережно храним всю жизнь. Все близкие помнили стол, за которым была создана волновая механика. Но, к сожалению, уже после смерти ученого стол был утерян во время переезда.

Его молчаливое и казавшееся бесплодным одиночество разочаровывало родных. В особенности его мать. Она считала его прекрасным молодым человеком, но неудачником, поскольку он отказался от исторических исследований, хотя преуспевал в них, а также от политической карьеры, казалось бы, предназначенной ему судьбой.

Когда де Бройлю пришла в голову идея волны, он был буквально окрылен ею и уверен в своей правоте. Он пытался обсудить новую мысль с учеными, которые работали в лаборатории на улице Лорда Байрона, но безуспешно. Брат не вникал в его теоретические выкладки, ссылаясь на то, что дело может решить лишь эксперимент. Тогда Луи де Бройль обратился к Александру Довилье, блестящему физику из лаборатории брата, с которым вместе работал, и попросил собрать установку по дифракции электронов, однако Довилье ответил, что занят другим проектом и у него нет времени. Я так и слышу едкий тон де Бройля: «*Что вы думаете? Он в это время изобретал телевизор с механическим устройством по перемещению пучка электронов. Видите, какие шансы он имел на успех!*». И дальше, тем же безрадостным тоном, каким говорил о своем предке, казненном на гильотине во время революции: «*И вот, так он упустил Нобелевскую* *премию*». Очевидно, ему было очень горько, когда в нужную минуту вокруг не оказывалось своих людей. Так случалось несколько раз в его жизни, и эти тяжелые моменты он преодолевал один. Де Бройль был мыслитель-одиночка, который не любил, когда его беспокоят, и с большой осторожностью заводил знакомства, но нельзя сказать, что он стремился остаться один. Напротив, он ценил компании, помощь и дружбу преданных сотрудников, когда они у него были. Настоящее же и очень глубокое одиночество, которое заставляло страдать по-настоящему, было интеллектуальным. Причиной этого являлась оригинальность его идей, которые почти всегда принимало лишь меньшинство. Речь идет об Эйнштейне, Шредингере, Леоне Бриллюэне и еще нескольких физиках, однако они, несмотря на известность, не определяли научного общественного мнения. Де Бройль часто припоминал осторожно-позитивную реакцию одного пожилого академика, имя которого не называл: «*Молодой человек, высиживайте свое яичко*». Но он предпочитал, чтобы какой-нибудь ученый заинтересовался его идеями и пожелал подтвердить их экспериментально. Для этого как нельзя лучше подходила лаборатория его брата, где умели использовать *X*-лучи, длина волны которых была того же порядка, что и длина волн, теоретически открытых им. Позднее Понт и Трийя доказали, что это действительно было возможно. Но в 1923 году, когда срочно требовалось провести исследование, не оказалось никого, кто взялся бы за это дело.

Все изменилось после защиты диссертации. Де Бройль вручил ее Ланжевену, с которым познакомился, посещая его лекции и семинары. Ланжевен, без сомнения, взволнованный, не дал ответа сразу, хотя через несколько месяцев представил положительный отзыв на диссертацию. Однако о том, что она привлекла внимание Ланжевена с самого начала, Луи де Бройль рассказал на конференции, посвященной Эйнштейну: «*Точно не знаю, какое впечатление произвела на него моя смелая попытка, когда он ее изучал, но он хорошо понял, что она могла бы заинтересовать Альберта Эйнштейна. Поэтому он попросил у меня второй экземпляр диссертации, чтобы передать его своему знаменитому другу*» [19].

В этом есть некоторая неясность. Де Бройль утверждал (и можно доверять его воспоминаниям, зная важность, которую он этому придавал), что рукопись была отправлена Эйнштейну весной 1924 года. И это, кажется, подтверждается свидетельством Паули, рассказанным Пайсом [22], согласно которому Эйнштейн на международных собраниях этого года пытался вызвать интерес к экспериментам по дифракции электронов. С другой стороны, во Франции прошел слух (который мне подтвердил де Бройль), что именно благодаря поддержке Эйнштейна его диссертация смогла быть защищена в Сорбонне. К тому же первое письменное подтверждение поддержки Эйнштейна, которое мне известно, содержится в двух посланиях – Ланжевену и Лоренцу, написанных в один и тот же день, 16 декабря 1924 года, а диссертация была защищена 25 ноября. Тон этих писем очень волнительный. Это был тон человека, который совсем недавно ознакомился с текстом диссертации, что, очевидно, контрастировало с воспоминаниями де Бройля. Зато находилось в согласии с тем, что он говорил на уже упомянутой конференции. «*В конце того же 1924 года*, – пишет он, – *Эйнштейн познакомился с моей диссертацией… при обстоятельствах, о которых я напомнил выше*».

В конце концов, не знаю, повлиял ли *Эйнштейн* на мнение совета или нет, я как-то не осмеливался затрагивать этот вопрос, близкий сердцу де Бройля. Располагать достоверными сведениями о том, была ли поддержка Эйнштейна необходима, чтобы де Бройль смог защитить свою диссертацию, важно только с точки зрения оценки научного духа Сорбонны того времени. Но известно, что Эйнштейн действительно оказал поддержку, за что де Бройль испытывал к нему глубокую признательность.

В наиболее известном письме Эйнштейна к Ланжевену содержится знаменитая фраза в характерном для автора стиле [44]:

«*Работа де Бройля произвела на меня большое впечатление. Она приподняла уголок большого покрывала*».

Де Бройль дал такой комментарий:

«*Эту фразу мне передал Ланжевен. Она исходила от такого знаменитого ученого, которым я лично восхищался, и потому представляла для меня наибольшее ободрение в моей рискованной попытке*» [19].

В письме к Лоренцу Эйнштейн писал:

«*Знакомый нам молодой брат де Бройля предпринял очень интересное исследование о значении правил квантования Бора – Зоммерфельда (парижская диссертация 1924 года). Я думаю, что этот лучик света мог бы осветить одну из труднейших задач нашей физики*».

Заметим, что Эйнштейн, как и де Бройль, прежде всего интересовался интерпретацией квантовых правил, а не дифракцией электронов, которую он, однако, ценил за ее важность. Таково же было и мнение Ланжевена, изложенное в его отзыве на диссертацию; надо отметить, что он единственный из членов совета искренне благоволил к де Бройлю, хотя и выглядел осторожным. Что касается других членов совета, то Шарль Моген чистосердечно признался много лет спустя, что он всему этому не верил [41]. О двоих других, Эли Картане и Жане Перрене, у де Бройля сложилось впечатление как об очевидных скептиках, хотя в своем заключительном докладе они все же признавали «*оригинальность и глубину идей кандидата*». Эйнштейн написал слишком поздно, чтобы повлиять на мнение совета, но маловероятно, чтобы Ланжевен хвастался встречей с Эйнштейном, о котором он упоминает в своем ответе (от 13 января 1925 года):

«*Я передал г-ну Луи де Бройлю Вашу хвалебную оценку его работы, и он был очень тронут этим. Во время защиты диссертации я тщательно изучил его идеи, к которым вернусь в моих лекциях. Имеется немало трудностей, но у меня сложилось впечатление, которым я поделился с вами в Женеве и которое вы разделяли, сказав, что надо бы знать, как далеко можно зайти в этом направлении*» [44].

Но наиболее значительным его вкладом была фраза из письма к Ланжевену: «*В новой работе я пришел к выводам, которые, кажется, подкрепляют его результаты*», а также из письма к Лоренцу: «*Я нашел что-то в пользу его построений*». Речь идет вот о чем. В том же самом 1924 году Эйнштейн получил короткую статью индийского физика Бозе, который вновь получил закон излучения черного тела Планка, подсчитывая фотоны по новым статистическим правилам. Эйнштейн перевел статью на немецкий язык и содействовал ее публикации в большом журнале, сопроводив ее двухстрочным постскриптумом (он принес Бозе научный успех!), в котором обращал внимание на эту работу. Затем Эйнштейн сам опубликовал статью, в которой развил рассуждения Бозе, применив их к материальному газу. Эта знаменитая статья в обобщенном виде, заложившая основу *статистики Бозе – Эйнштейна,* на мой взгляд, содержит доказательство того, что Эйнштейн не до конца прочел диссертацию де Бройля, когда получил ее. В противном случае он бы знал, что идея статистики Бозе находилась по большей части уже у де Бройля, и к тому же с доказательством нового способа подсчета квантовых состояний, найденного им благодаря связи между частицами и волнами, чего Бозе не знал.

Очевидно, что если бы Эйнштейн прочел диссертацию де Бройля раньше, он бы на нее сослался. Но в начале 1925 года эта статья получила продолжение, которое нас интересует еще больше, поскольку Эйнштейн уже имел время познакомиться с диссертацией. Результатом, на который он указывает в своих письмах, является подсчет флуктуаций нового газа, теорию которого он создал. Можно только догадываться о степени его удивления, когда он обнаружил формулу, похожую на его знаменитый закон флуктуаций излучения черного тела от 1909 года. Так же как и свет, молекулы его газа флуктуировали одновременно как частицы и как волны. Однако в его теории речь шла не о волнах, а о частицах. И именно в это время он прочел диссертацию. Если его первая статья свидетельствует, что в свое время он ее еще не читал, то вторая подтверждает правоту Капицы, который говорил, что Эйнштейн остановился на начале диссертации, так как никогда не цитировал де Бройля по поводу статистики, что не похоже на него, никогда не пренебрегавшего этим. Напротив, на него нашло озарение, когда он узнал об идее волн, в совершенстве согласующейся с его теорией. Если Эйнштейн не ссылается на статистическую главу де Бройля, то он много уделяет внимания первой главе, посвященной волне и ее соответствию его статистическим идеям и формуле флуктуаций. Два вида флуктуаций становятся очевидными (но не забудем, что де Бройль это уже знал).

Затем Эйнштейн замечает, что если молекулы волнообразны, то вместо соударений они могут распространяться свободно, как волны, имеющие достаточно большие значения длины волны. Аналогично тому, как при заходе солнца свет, проходя сквозь плотные слои атмосферы, поглощает синие лучи короткой длины волны и оставляет в своем спектре красные лучи более длинных волн, придающих пурпурный цвет заходящему светилу. В газе это будут материальные волны, которые смогут взаимопроникать при *низких темпера-*

турах, когда скорости молекул уменьшаются, удлиняя волну де Бройля. Но если они в результате этого перестанут соударяться, вязкость газа исчезнет. И Эйнштейн показал, что ниже некоторого температурного порога произойдет конденсация газа *(конденсация Эйнштейна)* с переходом в *сверхтекучее* состояние, которое позже наблюдал Капица (это состояние наблюдается только у жидкого гелия). Это был один из эффектов, предсказанных исходя из волновых свойств материи, но дифракция электронов была первым наблюдаемым эффектом.

С 1925 года, после того как Эйнштейн привлек внимание к диссертации де Бройля, молодой немецкий физик Эльзассер, знакомый с экспериментами Дэвиссона и Кунцмана и осознавший, что в этих экспериментах происходила дифракция, задумал их воспроизвести. Но Эльзассера никто не захотел слушать, как и его соотечественника Рамзауэра, и он не получил необходимых кредитов. Надо было дожидаться 1927 года, пока сам Дэвиссон с другим своим сотрудником Джермером не повторил свой эксперимент с целью уверенного подтверждения дифракции электронов. В эксперименте Дэвиссона и Джермера дифракция происходила на кристалле никеля, по схеме, аналогичной эксперименту Макса фон Лауэ с *X*-лучами в 1912 году (см. главу 3). В следующем году Дж. П. Томсон подтвердил их выводы, получив дифракционные кольца при пропускании электронов сквозь аморфные среды, и наблюдал электронную радугу. Наконец, упомянем французского физика Мориса Понта, которого, как и его немецких коллег, постигла неудача. Он готов был опередить Томсона и проделать те же эксперименты, но в последний момент был лишен своего источника электронов по материальным причинам. По крайней мере он получил моральное удовлетворение, проделав первый опыт по дифракции быстрых электронов, подтвердивший формулу длины волны де Бройля для релятивистского случая.

Эти экспериментальные проверки положили начало росту славы де Бройля. Вот что писал советский физик Френкель: «*Открытие волновой природы катодных X-лучей или других материальных X-лучей является одним из наиболее впечатляющих свидетельств могущества человеческого разума, а также удивительной плодотворности теории относительности*» [45].

Но перенесемся от времени проведения экспериментов на два года назад, когда в физике произошло два больших события – появились теория Гейзенберга и теория Шредингера. Первая соперничала с теорией де Бройля, а вторая дополняла ее.

Луи де Бройль и только что появившийся гений Вернер Гейзенберг сильно отличались друг от друга. Вопреки своей репутации де Бройль не был философом. Он мало читал классиков философии и не находился под влиянием современных философов, среди которых ценил только философа науки Мейерсона. Он считался последователем Бергсона, но на самом деле не был им (о происхождении этого мифа расскажем далее). Им руководила не философия, а история, и главным образом – история наук, которую он хорошо знал и из которой запоминал только детали, так как не любил заучивать даты и документы, а интересовался скорее эволюцией идей, их противостоянием, примирением, забвением и возрождением. Если же действительно надо приклеить какой-то ярлык де Бройлю, то я сказал бы, что он исходил из рациональной французской традиции, находившейся одновременно под влиянием французской и немецкой наук, главным образом связанных с именами Пуанкаре (более ученого, чем философа) и Эйнштейна. По натуре оптимист, он никогда не признавал за наукой поражения и допускал, что только видимость и неточность могут длиться неопределенное время. Он мог, конечно, оставить нерешенной какую-то проблему, но только временно, не считая ее непреодолимым барьером.

Он представлял, что наука движется по стволам, корни которых уходят зачастую в далекое прошлое, и видел гений созидания только в синтезе, в сближении на первый взгляд противоположных идей, в аналогии различных и еще разделенных путей.

Де Бройль был атомистом. Приверженец эксперимента, он искал секреты природы за наблюдаемыми явлениями, которые должны были происходить согласно утонченным законам, подлежащим теоретическому выводу и экспериментальному открытию. Но он знал и не пугался того, что микроскопические законы и объекты, к которым они применяются, долгое время могут оставаться скрытыми за более грубыми законами: так, например, атомы были заслонены законами термодинамики.

Он думал, что физические законы должны описываться «*фигурами и движениями*», как говорил Декарт, в рамках обычного физического пространства и времени, каким бы сложным и абстрактным ни был математический аппарат теории. Математика была для него всего лишь инструментом изучения действительности, но не самой действительностью. Он верил в непрерывность и был убежден, что дискретность является только кажущейся и что она должна быть объяснена по-другому. Он верил в объективность природных явлений и, хотя считал, что физические законы «*всегда подвержены пересмотру*», верил в онтологическую ценность этих законов. Он пытался увязать явления между собой законами причинности, не верил в чистую случайность и враждебно относился к фундаментальной неопределенности. Но в противоположность Эйнштейну он не верил во всеобщий детерминизм и чувствовал себя чуждым этой философской проблеме. Однажды он сказал мне:

«*Я никогда не высказывался по поводу детерминизма, потому что там идет речь о много более общей философской проблеме. Но я не философ и не чувствую себя квалифицированным специалистом, чтобы высказываться по этой проблеме. К тому же я, беседуя с вами в этот момент, нахожусь под впечатлением, что разговариваю со своим свободным арбитром. И в этих условиях вы хотите, чтобы я верил в детерминизм или даже высказывался поверхностно? Это совсем другая проблема, нежели проблема причинности в физике, потому что принцип причинности – это только один кадр, который фиксируется и внутри которого протекает наша деятельность физика*».

Великим соперником де Бройля, а вскоре и Шредингера в разработке оснований новой механики стал Вернер Гейзенберг. В противоположность де Бройлю Гейзенберг, казалось, был мало подвержен влиянию истории, во всяком случае он почти ничего об этом не говорил, но по примеру многих немцев был нашпигован иррационалистской философией, которая была тогда в моде. Он принадлежал к кружкам, при вступлении в которые извинялись за свои занятия физикой ([46] и Ф. Селлери [47]). Он не был ни детерминистом, как Эйнштейн, ни сторонником причинности, как де Бройль, но открытым индетерминистом. Статистика являлась для него «*главной частью основ квантовой механики*». Детерминизм и причинность представлялись ему только макроскопической видимостью, проявляющейся в среднем из микроскопической туманности вечного движения квантового мира, некоторые аспекты которого могут окончательно ускользать от науки, что он охотно допускал.

Эта точка зрения совпадала с точкой зрения самого Бора и его могущественной группы, известной как копенгагенская школа, к которой принадлежал Гейзенберг. Бор и его ученики были стеснены причинностью и очарованы неопределенностью. Они видели новое человеческое измерение в границах, установленных ими в науке, что было привлекательным в ту эпоху, да и в нашу тоже.

Гейзенберг и школа Бора принципиально не пытались отыскать истину за наблюдаемыми фактами, они занимались лишь поисками их рациональной организации. Они отказывались воображать гипотетический мир, который мог быть их причиной. В этом аспекте их разум был сродни позитивизму, похожему на позитивизм противников атомизма. Его можно было бы резюмировать афоризмом Гете: «*Не ищите ничего за фактами, они сами являются доктриной*». Они имели право говорить только о наблюдаемом явлении. Они не хотели строить моделей действительности, но искали математические формы, в которые можно было бы вписать эту действительность. Гейзенберг рассматривал такие формы как более фундаментальные, чем сами физические объекты, и писал:

«*Что должно заменить понятие фундаментальной частицы? Я считаю, что мы должны заменить его понятием фундаментальной симметрии*» [48].

В противоположность де Бройлю он ничего не имел против дискретностей, которые рассматривал как основную характеристику микрофизического мира. Он только искал возможность описания переходов. Он не знал, что делать с электронными траекториями, которые заранее считал ненаблюдаемыми. Но надеялся это доказать своим знаменитым *соотношением неопределенностей,* которое справедливо только в концептуальных рамках квантовой механики, но которое в конце концов стали считать за высший закон природы и за величайшее открытие теории квантов.

Таков был мир мыслей, которые преобладали в науке прошлого века и с которыми де Бройль сталкивался всю свою жизнь. По замечаниям, сделанным им в диссертации, и по вопросам, которые он ставил, можно было бы догадаться о будущих его неприятностях в научном сообществе.

Заканчивая это сравнение между де Бройлем и Гейзенбергом, скажем, что первый пытался абстрагироваться от наблюдаемых фактов, чтобы догадаться о скрытой реальности, а второй стремился изобрести математический алгоритм, данный *a priopi*, свойства которого соответствовали бы результатам наблюдений. Часто первую точку зрения называют аристотелевой, а вторую – платоновой, но большая ошибка – разделять физиков на узкие группы, когда речь идет о таких великих ученых, как де Бройль и Гейзенберг. И еще большая ошибка – считать один способ лучше другого. Каждый из них имел в своем активе как восхитительные результаты, так и знаменитых представителей. Правда в том, что у каждого ученого были свои инстинктивные вкусы и предпочтения, но каждый, стоя у подножия горы загадок природы, взывал к тому или иному способу согласно своим предпочтениям в зависимости от ситуации. В иных обстоятельствах неожиданный аспект личности проявляется внезапно. Вот и де Бройль, если это было необходимо, занимался абстрактными доказательствами ковариантности, в то время как Гейзенберг – напротив; когда однажды он прогуливался в окрестностях Баварии с одним из своих молодых и блестящих учеников и тот с энтузиазмом воскликнул: «*И после всего этого небо является всего лишь полем применения эрмитовых операторов!*», Гейзенберг, открывая другую сторону самого себя, вскричал: «*Какой абсурд! Вокруг голубое небо, и в нем летают птички*».

Но вернемся к теории. Гейзенберг, ровесник века, в 1925 году придумал теорию, отличавшуюся от дебройлевской, как день от ночи. Он назвал ее *механикой матриц,* или *квантовой механикой.* Это название превалирует ныне и обозначает волновую механику, к великому огорчению де Бройля, который рассматривал союз этих двух слов как символ триумфа теории противника. Мы не будем детально описывать данную теорию, поскольку здесь это неуместно. Скажем только, что *матрицы* представляют собой таблицы чисел. Они могут по специальным алгебраическим правилам комбинироваться между собой с помощью операций сложения или вычитания с тем лишь отличием от обычных чисел, что их умножение не коммутативно. А это означает, что a, умноженное на b, не равно b, умноженному на a. У Гейзенберга физические величины, включая пространственные координаты, фигурируют в качестве матриц. Их умножение позволяет представлять квантовые переходы и вычислять частоты и интенсивности спектральных линий. Эта странная теория формально, без физического представления, дает математический алгоритм для вычисления состояний и квантовых переходов, заменяя теорию Бора – Зоммерфельда.

Подобно де Бройлю, Гейзенберг искал ответ на недостатки первой теории квантов. Вначале он с помощью новой теории смог решить только простую задачу о колебаниях молекул водорода и кислорода. Но вскоре применил старую квантовую теорию Бора и показал, что в спектрах колебательных и вращательных движений атомов проявляются изменения квантовых чисел, и это приводило к согласию с экспериментом. В следующем году Паули решил проблему атома водорода, но в конце 1925 года Гейзенбергу с Борном и Иорданом удалось записать уравнения, которым должны были подчиняться матрицы, и тем самым заложить основание истинной механики, формально навеянной механикой Гамильтона, однако радикально новой по результатам. Аналогия с гамильтоновой динамикой позволила теории быстро развиваться и принять сразу законченный вид, адаптируя формализм классической механики. Дирак, который со своей стороны двигался в том же направлении, в одном своем несколько загадочном остроумном выпаде, как будто обладая секретом, сказал: «*Квантовая механика является всего лишь классической механикой, записанной на языке некоммутативной алгебры*», что не проясняло идей.

Теория матриц впечатляла, но была встречена сдержанно ввиду ее абстрактности, туманности и тяжести вычислений в отсутствие ясного физического представления. Я не знаю о первой реакции де Бройля. Но вот какова она была у Эйнштейна, читаем в письме к Бессо:

«*Самой интересной из выдвинутых в последнее время теорий является теория квантовых состояний Гейзенберга – Борна – Иордана. Это истинно чертовский расчет, в котором появляются бесконечные детерминанты (матрицы) вместо декартовых координат. Это в высшей степени изобретательно и достаточно защищено сложностью от всяких доказательств ложности*» [18].

И вдруг два месяца спустя, в феврале 1926 года, – новое театральное представление (это был благословенный период для быстро развивающихся событий): Шредингер предлагает другую теорию. Он был старше Гейзенберга и на пять лет старше де Бройля, но уже являлся заслуженным ученым (правда, как и Гейзенберг в свои 25 лет). В противоположность Гейзенбергу Шредингер следовал по пути де Бройля. Рассказывают, что, будучи приглашенным представить теорию де Бройля на физический семинар в Цюрихе, он расписался в том, что это для него затруднительно и что для ее изложения необходим специальный «трюк», каким оказалось… *уравнение Шредингера.*

Как и де Бройль, он в совершенстве знал аналитическую динамику и так же, как он, скорее предпочитал форме, используемой Гейзенбергом, более близкую по оптико-механической аналогии форму Гамильтона – Якоби. С помощью рассуждений, которые даже сам Шредингер считал непонятными, он нашел свое знаменитое уравнение, которое сразу решало проблему атома водорода[18]. В серии восхитительных статей [51], опубликованных им в том же году, он преобразовал волновую механику в завершенную теорию, как это сделали с теорией матриц Гейзенберг, Борн и Иордан. И на этот раз все было совершенно понятно.

Результаты этих двух так непохожих теорий согласовывались удивительным образом. В частности, Шредингер вновь нашел для колебаний и вращений молекул те же поправки, что и Гейзенберг. Не довольствуясь продолжением труда

[18] Читатель, возможно, будет удивлен, что столько раз решается проблема атома водорода. Причина заключается в том, что парадигма задачи двух тел, одновременно простейшая для атомов, является единственной, которую умеют строго описывать. И поэтому естественно, что каждая новая теория затачивается на ней.

де Бройля, Шредингер стал объединителем новой механики, доказав, что две соперничающие теории являются всего лишь одной и той же теорией, рассматриваемой под различными углами зрения. Как он говорил, теория приняла имя квантовой механики, и вскоре заговорили о *представлении Гейзенберга* и *представлении Шредингера.* Но игра была неравной.

С одной стороны, фундаментальным уравнением квантовой механики, используемым повседневно, является уравнение Шредингера. Таким образом, кажется, что превалирует язык волн, даже если потом эти волны служат для построения матриц Гейзенберга согласно рецепту, которым пользовался сам Шредингер для сближения двух теорий. Но это еще не расхождение с точкой зрения де Бройля, хотя оно уже содержится в факте, что язык волн квантовой механики не является ни языком волн де Бройля, ни языком волн Шредингера, как мы это вскоре увидим. Оказалось, что, согласно поговорке, как всегда, быстрее всего предают свои, и вскоре обнаружились расхождения между де Бройлем и Шредингером, хотя поначалу они рекламировали друг друга, взаимно восхищались и в главном разделяли одну и ту же концепцию мира и идеалы [52]. В действительности же, защищая самого себя, Шредингер предал де Бройля. Но он все-таки сделал это, руководствуясь тремя важными пунктами, отказу от которых он был обязан своим успехом.

Прежде всего он отказался от теории относительности. Это было несколько пикантно еще и потому, что он был известен своими работами в этой области. Но первоначально он потерпел неудачу, попытавшись вписаться в нее своим уравнением. Он сделал это чуть позже, как и другие авторы, включая де Бройля, но полученное им релятивистское уравнение в некоторых отношениях было менее удовлетворительным, чем его нерелятивистское уравнение. Прошло два года, прежде чем Дирак нашел хорошее релятивистское уравнение.

Затем он отказался от понятия «частица», поскольку не знал, как ввести ее в свое уравнение. Таким образом, в его теории были только волны, и волны непрерывные. Он пытался представить частицу локализованным пакетом таких волн, скорость которого ему вполне подходила (это была групповая скорость де Бройля). К несчастью, уравнение показывало, что такой пакет расплывался при движении и не мог длительное время представлять частицу. Тем не менее Шредингер был согласен с интерпретацией де Бройлем волны как настоящего физического объекта – можно сказать, материального, потому что эта точка зрения позволяла рассчитывать спектральные линии, допуская в вычислениях, что волна электрона электрически заряжена. Но даже этот подход вскоре был отвергнут восторжествовавшей вероятностной интерпретацией.

Третье отступничество Шредингера заключалось в теории систем частиц. Он нашел замечательное уравнение, одно из наиболее точных уравнений волновой механики, но, увы, записанное не в реальном физическом пространстве, а в абстрактном конфигурационном пространстве, число измерений которого равнялось утроенному числу частиц. И в этом пространстве распространялась абстрактная волна, которая уже не была физической, а являлась лишь простым математическим инструментом. Можно возразить, что и классическая механика использует то же конфигурационное пространство, но его применяют лишь для упрощения вычислений и всегда есть возможность без всяких затруднений вернуться в реальное физическое пространство. В случае же волновой механики это принципиально невозможно и всегда приходится решать задачи в абстрактном конфигурационном пространстве.

Наконец, если я еще могу позволить себе обижать Шредингера, то я скажу, что он предал всех, потому что отказался даже от квантовых состояний, которые принимались единогласно. Для него ответственными за такие явления, как излучение и поглощение света, были не квантовые переходы, но колебания волн, содержащие гармоники и отвечающие наблюдаемым спектральным частотам.

Как бы то ни было, вне всякой критики, Шредингер совершил один из грандиознейших подвигов в математической физике, принесший ему такой комплимент Эйнштейна: «*Идея вашей статьи показывает настоящего гения*» [53].

Я считаю необходимым подчеркнуть, особенно в нашу эпоху, когда боготворят формализм и наблюдается тенденция к забвению того, чем является физическая идея: без волн де Бройля не было бы и уравнения Шредингера. Как механика Ньютона не существовала бы без принципа инерции Галилея, так не существовала бы и теория Максвелла без поля Фарадея. Отсутствовала бы теория всемирного тяготения, если бы Ньютон не понял, что Луна постоянно падает на Землю. И не была бы создана общая теория относительности, если бы Эйнштейн не отождествил силы инерции и гравитации. Не было бы ни бактериологии, ни вирусологии, если бы Пастер не отрицал самозарождения. Как я сказал во введении, такие подвиги, которые стоят в ряду наиболее ярких достижений человеческого разума, почти неосязаемы. И не надо удивляться, что новые истины, открытые таким образом, входят затем в нашу обыденную жизнь и составляют часть очевидности. По своему естественному устремлению человеческий разум имеет необходимость опираться на уже признанные идеи. Поэтому он начинает сопротивляться любой новой идее, но когда все заканчивается ее всеобщим принятием и разум убеждается в ее банальности, то наконец он эту новую идею признает.

ГЛАВА 6. Триумф индетерминизма. Переворот на Сольвеевском конгрессе. Де Бройль отступает перед лагерем противников

Сам способ, с помощью которого де Бройль открыл волновую механику, привел его к ошибке из-за желания остаться как можно ближе и к механике, и к оптике. Это привело его к неудаче в поисках уравнения волновой механики, которое он пытался получить с 1925 года [54], изменяя классические уравнения волн. Согласно своей отправной точке, он должен был бы получить релятивистское уравнение Клейна – Гордона (которое будет открыто только в следующем году). Но он совершил ошибку, сохраняя в своем уравнении скорость света вместо фазовой скорости, введенной им ранее. И только после работ Шредингера он перестал считать, что его волна является электромагнитной, исправил свою ошибку [55] и получил уравнение Клейна – Гордона, которое нашли и другие физики.

Однако настоящим событием для де Бройля было то, что он называл «*главным замечанием Шредингера*» [55]. Согласно этому замечанию Шредингер ввел в волновую механику методы волновой оптики и отступился от методов геометрической оптики, оказавшихся некорректными на атомном уровне. Эти методы были неприменимы в случаях, когда лучи рассеиваются на объектах слишком малых по сравнению с длиной волны, что как раз и происходит в случае атома. Де Бройль понял это еще в 1923 году, когда уже четко утверждал, что «*новая динамика по отношению к прежней является тем же, чем является волновая оптика по отношению к геометрической оптике*» [37]. В то время он не смог рассчитать стационарные состояния атома, используя только классическую траекторию и применяя свой закон согласованности фаз в рамках геометрической оптики, из которой он хотел все-таки выйти.

Когда же Шредингер построил благодаря своему уравнению настоящую волновую механику, перед де Бройлем встала проблема, связанная с траекториями частицы. Из двух гипотез надо было выбрать одну: или не существует вовсе электронных траекторий в атоме, или же они не являются траекториями классической механики. Почти все физики высказывались в пользу первой гипотезы, но де Бройль не хотел отказываться от локализации частицы и пытался для сохранения образа частицы развить свою идею сингулярных волн. Он привел первые примеры сингулярностей, которые движутся по траекториям, и изложил без комментариев противоположную точку зрения:

«*Гейзенберг считает безрассудством говорить о положении и скоростях внутриатомных электронов и предпочитает представлять состояния атома величинами, непосредственно связанными с частотами и наблюдаемыми интенсивностями спектральных линий*» [55].

В 1926 и 1927 годах все теоретики Европы лихорадочно работали над построением квантовой теории. Наиболее блестящие статьи часто чередовались, но, будучи далекими от стремления к синтезу, они лишь акцентировали расхождение во взглядах.

Шредингер продолжил серию своих знаменитых статей, решая проблему за проблемой с помощью своего уравнения [51]. Все еще убежденный, что мир заполнен волнами, он дошел до чисто волнового теоретического объяснения эффекта Комптона, который привел к триумфу идеи квантов света Эйнштейна. В своей теории он больше не имел частиц, одни только волны, и из теории получались почти все результаты, за исключением некоторых, не очень важных. Однако оставалось непонятным, почему эксперимент регистрирует следы частиц в виде траекторий. И де Бройль сделал вывод, что атом может поглотить «*ультрафиолетовый квант, длина волны которого более чем в тысячу раз больше размеров атома*», что «*скорее склоняет к убеждению, что район локализации энергии должен быть точечным…*» [55].

Тем временем Бор, Гейзенберг и их друзья все более и более продвигались к индетерминизму. Вероятностная интерпретация, данная Борном, хотя и не была полностью новой (ее набросок был уже сделан Эйнштейном и де Бройлем), тем не менее приняла более убедительную форму при вычислении атомных столкновений. Вычисления показали, что направления, в которых волны наиболее интенсивны, совпадают с направлением, в котором регистрируются частицы. Но Борн пошел дальше и отверг постоянную локализацию частицы. Для него ее нет нигде, если она не наблюдаема. Волна больше не физический объект, она чисто *статистический элемент*. К этому добавляется важный *принцип Борна*, согласно которому если волна является суперпозицией нескольких других волн различных частот, то интенсивность каждой из них представляет собой вероятность того, что соответствующая частота будет определена измерением. Этот принцип распространяется на все физические величины и имеет многочисленные приложения, но волна теряет при этом все физические атрибуты волн и представляет собой только волну вероятности.

Эта тенденция была вскоре усилена открытием знаменитых *соотношений неопределенностей* Гейзенберга, которые вытекают из самого факта существования волны (напомним, что они появляются в утонченной форме в диссертации де Бройля). Согласно соотношениям Гейзенберга некоторые пары величин, определенных в механике, не наблюдаются одновременно, так как всякое измерение одной величины мешает определению другой. Наиболее интересным представляется случай определения местонахождения и скорости частицы. В соответствии с соотношениями Гейзенберга, если мы знаем, где находится частица, мы не можем знать ее скорости и, наоборот, если мы знаем скорость частицы, мы не знаем, где она находится. Становится невозможным наблюдение траектории на атомном уровне. Гейзенберг и копенгагенская школа сделали вывод из этого, что не имеет смысла говорить о траектории частицы и что она совсем не существует. Для них соотношения Гейзенберга имеют больший смысл, чем ошибки измерений, поскольку они имеют смысл фундаментальной неопределенности, согласно которой то, что не наблюдается, не существует. Это был узел дебатов, которые породили многочисленные дискуссии об *индетерминизме*. Великим приверженцем индетерминизма был Нильс Бор, называвший *дополнительными величинами* те пары величин, о которых мы уже говорили, и создавший на их основе философскую систему, *теорию дополнительности*.

Любопытно, что ограничения, налагавшиеся Бором и Гейзенбергом на науку, во время ее грандиозного взлета были встречены благоприятно, как очаровательная новизна и новый аспект человеческого научного познания. Большинство философов охотно приняли новую ориентацию, тем более что считалось, что эти пределы налагает сама наука, тогда как речь шла только об интерпретации. И только марксистские философы отказывались принять ее, поскольку в недавно образованном СССР с подозрением относились и к теории Бора, и к теории относительности, каждую из которых воспринимали оторванной от твердого основания абсолютных истин. В то время многие физики, среди которых были Лоренц, Планк, Эйнштейн, де Бройль, Шредингер, более чем сдержанно относились к идеям Бора и не были расположены к отказу от объективности, которой они придерживались. Они не могли представить себе, в частности, что можно наблюдать частицу в некотором месте без того, чтобы она ранее не была в его окрестностях. Они не хотели этого разрыва непрерывности движения. Их возражения считались наивными, но никогда не сдававшийся Эйнштейн 25 годами позднее заявил о своей привязанности к «*тезису, который категорически отвергается наиболее известными современными теоретиками*»*:*

«*Есть нечто, как реальное состояние физической системы, которое объективно существует независимо от всякой операции измерения и которое может быть в принципе описано средствами физических выражений... Этот тезис, касающийся реальности, не имеет здравого смысла по причине его метафизической природы. Он носит только характер программы. Все люди, включая квантовых теоретиков, твердо придерживаются этого тезиса о реальности, пока не дискутируют об основаниях квантовой механики. Никто, к примеру, не сомневается, что в определенный момент центр тяжести Луны занимает определенное положение даже в отсутствие какого-либо наблюдателя, реального и потенциального. Оставим этот тезис о реальности на рассмотрение чистой логики, ибо тяжелое это дело – избегнуть солипсизма. В вышеуказанном смысле я не краснея ставлю понятие "реальное состояние системы" в самый центр моего размышления*» [41].

В 1927 году де Бройль был приверженцем тех же идей, что и Эйнштейн, и был уверен, что электрон где-то находится в каждый момент времени и образует вместе с волной единый объект. Он опубликовал в 1927 году большую статью под названием «*Волновая механика и корпускулярная структура вещества и излучения*» [56], явившуюся важной вехой в его творчестве, но ее плохо приняли. Мы остановимся на двух ее главных идеях.

Первая идея состоит в том, что наряду с гладкой непрерывной волной, рассматриваемой Шредингером и Борном, должна быть другая волна, содержащая сингулярность – очень высокую и острую точку, представляющую частицу[19]. Непрерывная волна сохраняет в этой теории статистическую интерпретацию Борна, а физическая волна является сингулярной волной, представляющей детерминированное движение частицы. Так как они являются решениями одного и того же уравнения, то де Бройль назвал свою попытку *теорией двойного решения.*

[19] Это представление сродни старой идее Эйнштейна, *Nadelshtrahlung* (игольчатое излучение), которое представляло кванты света.

Вторая идея касается связи между двумя волнами:

1. Де Бройль предполагает, что они имеют одну и ту же фазу и колеблются в унисон. Только их амплитуды различны.

2. Непрерывная волна информирует нас о движении сингулярностей, потому что их закон движения зависит от общего элемента двух волн – фазы. Де Бройль постулирует, что сингулярность движется в направлении наиболее быстрого роста фазы со скоростью, пропорциональной этому увеличению. Этот *закон управления* является экстраполяцией случая геометрической оптики, когда траектории не слишком искривлены, но он приводит в некоторых случаях к предсказанию нефизических (по меньшей мере парадоксальных) траекторий. Возможно, здесь не хватает какого-то элемента теории.

Замечательно, что в том же самом 1927 году Эйнштейн предложил в рамках общей теории относительности идею, очень близкую к идее де Бройля (мы упоминали о ней в главе 4), а именно: материальная частица является не маленьким зернышком, отдельным от гравитационного поля, а *сингулярностью поля.* Таким образом, Эйнштейну нужен был закон управления. Он показал, что сингулярность движется по кратчайшему пути в гравитационном поле. Его доказательство основывалось на нелинейности уравнений общей теории относительности, в то время как волновая механика была линейна[20]. Позднее де Бройль пришел к тому, что следует изменить уравнения волновой механики, чтобы учесть в них явления, присущие теории относительности. Однако ни он, ни его ученики не нашли такого уравнения. По правде говоря, даже в теории относительности доказательство не является совершенным, и Эйнштейн всю жизнь совершенствовал теорию геодезических линий.

Таким образом, проблема оказывается сложной, но это, очевидно, не причина для того, чтобы оставлять ее нерешенной. Факт, что идея сингулярных волн была одновременно выдвинута Эйнштейном и де Бройлем в различных областях, до сих пор вызывает интерес. Тем более что в заключении своей статьи Эйнштейн показывает, что он искал тот же синтез, что и де Бройль. «*Этот результат,* – пишет он, – *может иметь важность для теории материи, например, в квантовой механике*» [58].

Таково было положение дел в науке, когда в октябре 1927 года в Брюсселе собрался V Сольвеевский конгресс, проблематика которого отражена в названии темы – «*Электроны и фотоны*». Это был последний конгресс, и проходил он под председательством Лоренца (вскоре его не стало). Этот конгресс был не менее блестящим, чем съезд 1911 года. Почти все великие физики эпохи присутствовали на нем. Из 28 участников по крайней мере десять останутся в истории как совершившие переворот в науке. Это Бор, де Бройль, Мари Кюри, Дирак, Эйнштейн, Гейзенберг, Лоренц, Паули, Планк, Шредингер. Средний возраст участников

[20] Линейность означает, что действие волн складывается: сумма двух волн является волной того же типа. Это справедливо в волновой механике, но неверно для гравитационного поля. В этом состоит главное различие.

конгресса оказался невелик: Дираку было 25, Паули – 28, де Бройлю – 35. В Германии конгресс именовали *Knabenphysique* («детская физика»). Де Бройль появился на конгрессе, как и поклялся, «*через парадный вход*» по приглашению Лоренца, который обратился к нему с просьбой выступить одним из докладчиков, наравне с В.Л. Брэггом, Комптоном, Гейзенбергом, Шредингером и Бором. Первыми выступали Брэгг и Комптон, оба по теме *X*-лучей: один говорил об их волновых свойствах, другой – о корпускулярных. Лучшего начала и быть не могло.

Пришла очередь теоретиков. С точки зрения собственно теории они не внесли ничего нового, так как основные их результаты были всем известны. Не хватало лишь одного уравнения Дирака, открытого на следующий год. В сравнении с мероприятием 1911 года это был конгресс не вопросов, а скорее победы. Закончились «*стенания на развалинах Иерусалима*». Родилась новая физика. Однако с тех пор, каковы бы ни были ее успехи, она двигалась лишь по одной борозде – эксплуатируя и развивая главные идеи, увидевшие свет в первой четверти XX века. За 60 лет не появилось новой идеи ни в квантовой механике, ни в теории относительности.

Таким образом, на повестке дня в Брюсселе была не сама теория, уже обсуждаемая только в деталях, а интерпретация видения мира, которая из нее вытекала. Под прикрытием научных дискуссий проходила борьба за власть. На съезде доминировала школа Копенгагена, спаянная вокруг догмы, которая была для нее игрой цветов модернизма и неотразимой привлекательности отрицания и одновременно гордостью за превращение в победу всех неясностей и странностей теории. «Новый научный дух», «*копенгагенгейст*» Бора, Гейзенберга, Паули, Дирака и Крамерса оставлял его противников растерянными, разделенными и беспомощными. Этими противниками были Лоренц, Эйнштейн, де Бройль и Шредингер, к которым в принципе примыкали Планк, Ланжевен и Бриллюэн, правда, не высказывавшиеся по этому поводу на съезде (Планк не говорил вовсе).

Когда перечитываешь, с отступлением в историю, труды конгресса [57], видно, что Бор и Гейзенберг уже заранее выиграли партию. Тогда они казались носителями прогресса (большой миф века), в то время как их обороняющиеся противники придерживались старого порядка. Бор и Гейзенберг находились в гармонии с духом своего времени, проповедуя отказ от реализма и ясного представления явлений, призывая к абстракции. Эта идея завоевывала и другие среды, в частности артистические. Они примешивали к «наблюдаемой» вещи «я» наблюдателя, и тогда развивался психоанализ. Невозможно было быть более модным. Кроме того, их позиция упрощала многие вещи, позволяя избегать деликатных вопросов.

Что мог сделать в противовес им де Бройль, пытавшийся описывать «ненаблюдаемые» траектории? Или Шредингер, который желал извлечь из своей теории волн в многомерном абстрактном пространстве реалистическое описание объектов в физическом пространстве, но который так и не смог достичь этого? Или Эйнштейн, надеявшийся, что общая теория относительности в далеком будущем вытеснит квантовую механику, но в то время последняя еще праздновала свой триумф. Или Лоренц, великий ум которого не ослабевал и который так прекрасно выступил, что де Бройль собственноручно сделал копию его выступления (и потом предоставил ее мне). В конце концов, Лоренц смог высказать только следующее утверждение: «*Мы хотим получить для себя представление явлений, сформировать в нашем уме образы. До сих пор мы всегда хотели формировать эти образы с помощью обычных понятий времени и пространства!*» [57]. Но он не предлагал для этого никаких способов. И что мог сделать Планк, который предпочел хранить молчание, хотя верил, что «*личное усилие всякого серьезного и мыслящего человека согласовать сознание собственного морального достоинства и убеждение, что совокупность строгих законов управляет работой как внутреннего, так и вешнего мира*» [59].

Первый теоретический доклад сделал де Бройль, но в нем нельзя было узнать того пылкого, блестящего, уверенного в себе молодого человека, каким все его помнили. Когда позже он говорил мне об Эйнштейне, робевшем перед Сольвеевским конгрессом 1911 года, может быть, он представлял себя на его месте и вспоминал свое состояние перед конгрессом 1927 года. Не он ли писал: «*Еще мало привыкший выступать публично, я столкнулся на Сольвеевском конгрессе в Брюсселе в октябре 1927 года с оппозицией молодых и блестящих теоретиков копенгагенской школы, группировавшихся вокруг знаменитых ученых Нильса Бора и Макса Борна*» [5].

Этот человек, сделавший одно из величайших в истории физики открытий, подтвержденное в том же году на конгрессе экспериментами Дэвиссона и Джермера, а также Дж. П. Томсона, мог бы начать свое выступление с рассказа о победе, дав почувствовать свое превосходство, поскольку прежде всего речь шла о *его волне* и он в какой-то мере имел основание предложить свою интерпретацию. Конечно, теория двойного решения наталкивалась на трудности, но она заслуживала (и заслуживает) уважения уже потому, что она была логическим продолжением предпосылок квантовой механики. Этот путь, приведший к грандиозному результату, не следует забывать, ведь кто знает: вдруг однажды он приведет к новым результатам. Плодотворные физические образы слишком редки, чтобы быть попросту отброшенными.

К несчастью, де Бройль перенес свою экспериментальную победу на конец доклада, что привело к потере уверенности, которая могла бы ему пригодиться при защите идей. Выбрав неудачную стратегию доклада, он создал о себе впечатление как о человеке, потерявшемся на перепутье дорог. С самого начала он как бы «самоцензурировался», выражаясь страшным словечком нашего идеологического времени. Он пытался «нормализоваться» (другое словечко века), принимая нейтральный тон и уступая в пунктах, близких сердцу. Так, он не говорил о частоте хода часов корпускулы, отказался от массы фотона и похоронил закон согласованности фаз, который с той поры ни на что не был пригоден. Отступая перед математическими и физическими трудностями, которые вызывала его идея сингулярных волн, он прибегнул к версии, которую позже сам считал «побочной», – *волне-пилоту.* В этой теории имеется только одна волна – Шредингера, которая «пилотирует» частицу вдоль направляемых траекторий. Но если математические проблемы, связанные с сингулярными волнами, таким образом, были изъяты, то физические возражения остались, к тому же с логическим упущением, поскольку движение корпускул в этом случае управляется вероятностной волной, чего, конечно же, де Бройль не хотел.

Естественно, в докладе имелись и хорошие моменты: он не сразу потерял свое физическое чутье. В частности, отдавая дань восхищения Шредингеру, он сделал критические замечания по поводу его теории систем в *абстрактном конфигурационном пространстве*, возразив, что невозможно далее говорить о физических волнах в этом пространстве. Исчезают как волновые, так и корпускулярные их свойства, потому что корпускула больше не локализована. Он заметил, что парадоксально строить конфигурационное пространство на координатах частиц, тогда как само понятие частицы не имеет смысла.

Шредингер был по крайней мере в этом пункте согласен с де Бройлем и в своем докладе сделал те же замечания. Он вернул дань уважения де Бройлю и, считая «*четырехмерную концепцию более красивой саму по себе*» [57], отметил также попытку де Бройля описать эволюцию микроскопических систем с течением времени в нашем обычном пространстве. Напротив, он квалифицировал свою собственную теорию как *многомерную* по причине конфигурационного пространства. Но он также принизил огромную ценность своих результатов, задержавшись на бесплодных попытках приблизиться к описанию в физическом пространстве и на трудностях, которые он видел во взаимодействии атома с собственным излучением. Этот пункт был освещен позднее. Он приводил к вопросу о ширине спектральных линий и эффекту Лэмба и, таким образом, был положительным, так как поднимал плодотворный вопрос, но в тот момент произвел негативное впечатление. Шредингер отметил также неудовлетворительное состояние результатов, касающихся релятивистского уравнения атома водорода, и жаловался на то, что спин электрона, недавно открытый Уленбеком и Гаудсмитом, не находит там своего места. Эти трудности были преодолены годом позже с помощью уравнения Дирака, но в то время они лишь добавляли мрак.

В действительности же и де Бройль, и Шредингер нормально относились к такому течению конгресса. Они старались двигаться дальше и пытались устранить недостатки теории, задавая новые вопросы. Но находились в невыгодном, стесненном положении перед противниками, которые, напротив, хотели избавиться раз и навсегда от стесняющих вопросов и «упаковать» теорию в связное представление, чтобы водрузить свое знамя на новой территории. Парадоксально, что де Бройль и Шредингер казались колеблющимися и лишними на этом празднике со своими нерешенными проблемами и неудачными попытками. В то же время именно они и внесли в новую механику фундаментальные элементы – *волну* и *уравнение,* и вся атомная и молекулярная физика использует именно методы теории волн и уравнение Шредингера. Формальное обрамление и язык квантовых состояний были заимствованы у механики матриц, тогда как базовым элементом для вычислений оставалась волновая функция. Квантовая механика в современном виде является *волновой механикой.* И даже само уравнение Дирака будет волновым.

Зато идеи теории матриц преобладают в *квантовой теории полей,* основанной в то же время Дираком, Гейзенбергом, Иорданом и Паули. Эта теория исследует рождение и аннигиляцию частиц, то есть системы с переменным числом частиц. Характеристики поля в ней заменены алгебраическими *операторами.* Эта абсолютно неописательная теория сводится к математическому алгоритму, который пытались «геометризовать» (диаграммы *Фейнмана)* и который все еще остается очень абстрактным. По этому поводу Шредингер говорил:

«*Мне еще пока невозможно дать физический ответ на вопрос об утверждении, что некоторые величины подчиняются некоммутативной алгебре*» [57].

Многие физики не поддаются этому впечатлению и испытывают то же чувство, что и Шредингер. Синтез корпускул и волн, конечно, не сможет произойти в пространстве операторов, это осуществимо только в физическом пространстве. Но пока он не сделан и его еще требуется выполнить.

Доклад Гейзенберга[21] на Сольвеевском конгрессе касался не теории полей, а только обычной квантовой механики, то есть тех же проблем, которыми занимались де Бройль и Шредингер. Когда перечитываешь доклад, поражает манера изложения – тон человека, захватившего власть. Гейзенберг представляет в своем докладе формальное описание будущей теории, в которую он авторитарно включает работы других авторов, провозглашая, что все они обязаны полностью ей соответствовать. Таким образом, обрамление предшествует содержанию и все кажется принадлежащим исключительно ему. Это классическая процедура тоталитарных идеологов. Автору «объясняют» значение его работы и включают его в свою объяснительную схему, после чего истина не находится больше в работе – она только в схеме. Позиция Гейзенберга, усиленная хитрым выступлением Бора, имела такие значительные последствия для де Бройля, что об этом следует сказать отдельно.

1. Первым аспектом доклада Гейзенберга была его предвзято формальная трактовка квантовой теории в противоположность докладу де Бройля, посвященному поиску физических образов. Если бы речь шла только о выборе пути, то доклад Гейзенберга был бы гораздо более почтительным. Но Гейзенберг и его друзья считали обсуждение выбора пути запретной темой, настаивая, что выбора нет и что первичным элементом должен быть не физический образ, а только система понятий:

[21] Этот доклад был представлен на конгрессе Гейзенбергом, но в трудах конгресса [57], хотя он и написан от первого лица, скреплен подписью Макса Борна.

«*Новая система понятий дает одновременно интуитивное содержание новой теории. Единственное, что от интуитивной теории в этом смысле необходимо требовать, так это чтобы она была непротиворечива и позволяла недвусмысленно предсказывать результаты всех вообразимых экспериментов в своей области. Механика квантов в этом смысле является интуитивной теорией и дополняет микромеханические процессы*» [57].

Известно немного столь же закрытых догм. Таким образом, понятия определяют все, даже интуицию (!), которая становится следствием логической непротиворечивости. Итак, логическая непротиворечивость определяет полноту теории, а все то, что могло бы существовать вне этой области, ее не касается и просто не существует. Можно только догадываться, что думали об этом де Бройль и Шредингер, каждый результат которых ставил новые вопросы!

2. На базе этих принципов возникают задачи, от решения которых просто отказываются, и это становится правилом, тогда как де Бройль считал, что главное – это браться за их решение:

«*Если спрашивают, когда происходит квантовый скачок, теория не дает ответа… Прежде казалось, что в этом имеется недостаток… Но вскоре должны были признать, что это не так и что речь идет скорее о принципиальных ограничениях, накладываемых самой природой на наши способности познавать сущность физических явлений*» [57].

3. Третьим пунктом является индетерминизм, который связан, согласно Гейзенбергу и его друзьям, с постулатом Планка о квантах и который предположительно приводит к неустранимым дискретностям, откуда и следует доминирование случайных событий, а значит, вероятностей. Я говорю «предположительно», так как речь идет о постулате, который ничего не доказывает.

«*Каждое новое продвижение вперед в интерпретации,* – говорит Гейзенберг, – *показывало, что система формул механики квантов может быть непротиворечиво объяснена только с точки зрения фундаментального индетерминизма… Истинным смыслом постоянной h Планка является то, что она составляет универсальную меру индетерминизма, который введен в законы природы дуализмом волн и частиц*» [57].

Эта последняя фраза скандальна, так как она привела к *игнорированию* двух наиболее плодотворных открытий физики: постоянной Планка и волны де Бройля. Она развратила целое поколение физиков, которые повторяли ее, не задаваясь лишними вопросами, и сбила с толку большинство философов, которые без глубокого понимания высказывались по ее поводу. Любопытно, что эта «неопределенность», мерой которой является постоянная Планка, определенная с точностью до почти ее трехмиллионной доли, входит в десятки формул, применение которых потрясло физику и технологию. Это обстоятельство позволяет надеяться, что она является все-таки чем-то более важным, чем только предполагаемой метафизической неопределенностью!

4. Наконец, доклад Гейзенберга игнорирует или принижает значимость других работ. Признаком этого является то, что среди 63 библиографических ссылок нет ни одной ссылки на де Бройля; его имя упоминается два раза по поводу волны, но ссылки на публикации не даются. Более того, по этому поводу Гейзенберг цитирует самого себя, а также своих друзей Борна и Иордана. Далее предсказание дифракции электронов приписывают Эйнштейну, а когда Гейзенберг упоминает о квантовой статистике, то он говорит, что «*пример квантов света указывает на то, что квантовая статистика связана в основном* с *волновыми свойствами материи и света*» [57]. Таким образом, он присваивает себе открытие де Бройля, имя которого опять не упомянуто, сводя его вклад к простому личному замечанию по ходу изложения своего взгляда на процесс развития физической теории.

Одни имена называли, другие предпочитали не упоминать. Имя де Бройля относится ко второй категории. Даже сегодня можно встретить ученых, особенно среди французских теоретиков, которые цепенеют, словно повстречали привидение, когда при них цитируют де Бройля или вспоминают о его достижениях. Если, конечно, речь не идет об «огибающей» волне, как выражаются средства массовой информации, – по крайней мере этот результат признают. Если разговор только об этом, то наступает облегчение, поскольку область очевидного не представляет серьезной «угрозы».

Ах, если бы де Бройль поступил тактично и умер после защиты своей диссертации, как бы его любили! Здесь можно усмотреть некоторое сходство с воззванием де Голля 18 июня 1940 года: если бы он сделал только это! Существует определенная параллель между этими двумя людьми: оба питали страсть к истории и были преданы делу более великому, чем они сами. Для одного это была наука, для другого – Франция. Они мало встречались, но на де Бройля, которого трудно было взволновать, де Голль произвел очень сильное впечатление – так рассказывал сам де Бройль. Неудивительно, что они вызывали одинаковую реакцию, ведь и тот и другой казались людьми «неклассифицируемыми»: обладали возвышенными взглядами, презирали посредственность, а беспристрастность и принципиальность суждений делали обоих совершенно невыносимыми. Никто, включая даже самих де Бройля и де Голля, не заслуживал в их глазах расположения. Они казались слишком чуждыми всего земного и одинокими. Историческое значение этих личностей не оспаривалось, они никого не оставляли равнодушным и ни один не считал себя безупречным. Они приводили свет в замешательство своими прогнозами (подобно Кассандре, пророчествам которой никто не верил). И если находился человек, принимавший их идею, некогда отвергнутую обществом, то он не горел желанием развивать ее. «Лидеры» набрасывали на него покрывало молчания, чтобы обезопасить себя от свободомыслия и не потерять власть. С самого начала именно так относились к де Бройлю.

Шредингер лишь на первый взгляд находился в лучшем положении. Его имя фигурирует в библиографических ссылках Гейзенберга. Но уравнение Шредингера упоминалось только как «*частный случай теории операторов*» и ему отдавали дань уважения за то, что оно «*вело к новому развитию статистической концепции*» [57]. Таким образом, оно само по себе было не открытием, а всего лишь деталью в картине, и следует ценить старания Шредингера придать ей большей яркости. Наиболее выразительной иллюстрацией такого отношения стал случай с формулой, выведенной из уравнения Шредингера, которая описывает интерференцию волн (де Бройль). Она получила следующий комментарий: «*Формула может быть названа, согласно Паули, теоремой интерференции вероятностей, ее значение стало понятным с появлением волновой механики де Бройля и Шредингера*» [57]. Таким образом, вероятностная интерпретация выставлена на первый план, как и имя Паули, зато авторы волновой механики отодвинуты на второй план и, кажется, нужны лишь для уточнения формулы, хотя на самом деле только им она и принадлежит. Гейзенберг небрежно *добавляет*: «*Это уравнение найдено де Бройлем другим способом… Достаточно того, что я сформулировал результат размышлений де Бройля и их развития Шредингером*» [57]. Забыта некая деталь: теория вероятностей, «наклеенная» *после переворота* на волновую механику де Бройля и Шредингера, на самом деле является всего лишь ее интерпретацией[22].

Речь, конечно, идет о «государственном перевороте», произошедшем на конгрессе. Он совершенно удался, и Бор облачился в имперский плащ теории дополнительности, придавший ему сан философской легитимности, более важной, чем сами физические аргументы. Не Гейзенберг ли движением руки смел интерпретацию Шредингера, сказав: «*Его идея… не только противоречит принципам теории Бора, но приводит также к невозможным последствиям, поэтому мы не будем о ней говорить здесь*» [57]? Как смачно сказано «*также*»! Противоречие с Бором выставлено впереди физических возражений, о которых нет даже необходимости упоминать.

Выступление самого Бора в приукрашенном виде являлось утонченным анализом, обернутым обворожительной, но туманной философией[23]. В противоположность Гейзенбергу он не замалчивал работы де Бройля и Шредингера. Напротив, говорил о них больше, чем о работах самого Гейзенберга. Его целью было интерпретировать в своем стиле дуализм волн и корпускул и воздвигнуть на нем собственную систему, в основе которой, как мы уже знаем, находился отказ «*от причинного описания атомных явлений во времени и в простран-*

[22] Тон, принятый с 1927 года, присутствует в различных публикациях по квантовой механике. Имя де Бройля упоминается только в связи с его длиной волны; имя Шредингера – несколько чаще, но только в связи с его уравнением. Их идеи не упоминаются вовсе!

[23] По просьбе Бора текст его выступления в трудах конгресса был заменен текстом выступления на конференции в Коме.

стве» [57], обусловленный квантом действия Планка. Причинность законов классической физики является только видимостью, связанной с малостью в нашем масштабе кванта действия, а также с кажущейся нам бесконечной скоростью света, по причине замедленности обычных явлений. Квантовый постулат, объясняет Бор, выражает то, что «*каждое наблюдение атомных явлений требует взаимодействия, отнюдь не пренебрежимо малого, между наблюдаемым объектом и инструментом измерения таким образом, что невозможно приписать ни явлениям, ни средствам наблюдения независимой физической реальности в обычном смысле*» [57]. Отсюда следует, что, не имея возможности исключить внешние влияния на наблюдаемый объект, мы должны либо отказаться от наблюдения для сохранения причинной связи, либо порвать с причинностью, если хотим заниматься наблюдениями, для того чтобы иметь возможность описывать явления. Бор заключает:

«*Согласно сущности теории квантов мы должны, таким образом, довольствоваться наблюдением явления в пространстве-времени и его анализом с учетом принципа причинности, единство которых является характерной чертой всех классических теорий. Но в микромире эти принципы являются дополняющими и взаимоисключающими друг друга при описании эксперимента, что символизирует собой идеализацию возможностей наблюдения и возможностей определения физических величин*» [57].

Поражаясь туманности этой цитаты (а такие еще имеются), спрашиваешь себя: как квантовая механика смогла найти столько ясных формул, описывающих наблюдаемые явления и применяемых на практике?! Однако замечание Бора относительно влияния на объект наблюдения инструмента измерения является точным и важным. Оно составляет суть соотношения неопределенностей Гейзенберга. Позже де Бройль обнаружит противоречия [60]: так, Бор вводит траектории частиц, которые, по его мнению, как будто не существуют, но без которых ему трудно было обойтись. Кроме того, *взаимодействие* между объектом и инструментом измерения сомнительно, так как электрон оказывает малое влияние на макроскопический инструмент. В действительности же в его основе лежит не обмен энергией, который считается главной причиной, но явление дифракции волн, связанных с частицами.

Эта совокупность аргументов – мощный теоретический аппарат Гейзенберга и анализ Бора – произвела большое впечатление, даже если они и были спорными. Критика, часто адресованная прямиком де Бройлю, а именно высказанная в его адрес Паули, обеспечила победу копенгагенской школе, превосходство которой укрепилось в ходе финальной дискуссии. Во время этого обсуждения Шредингер больше не выступал (за исключением замечаний, касающихся деталей своей теории), а де Бройль лишь отвечал на вопросы по поводу его теории, признавая, что она еще не завершена. Только Лоренц властно подтвердил приверженность детерминистическим и описательным концепциям классической физики в заявлении, помещенном в начале отчета (о нем я уже упоминал), некоторые части которого воспроизводил в ходе дискуссии. Гейзенбергу он сделал такое замечание:

«*Таким образом, вы возводите в принцип индетерминизм. По вашему мнению, существуют явления, которые мы не можем даже предсказать, однако до сих пор мы допускали возможность таких предсказаний*» [57].

А Эйнштейн? Он скромно выступил лишь раз, извинившись, что «*не смог углубить механику квантов*». Суть его выступления заключалась в формулировке парадокса, первого из длинной серии, которую он позже будет противопоставлять копенгагенской школе. Он говорил: вообразим пучок электронов, падающих на экран с отверстием. Каждый из них сопровождается волной де Бройля, которая испытывает дифракцию, проходя отверстие, и образует с другой стороны экрана полусферический пузырь. По Бору и Гейзенбергу (и даже Шредингеру), эта волна непрерывна, присутствие частицы нигде не обнаруживается, и она может появиться в любой точке волны. Но в тот самый момент, когда электрон регистрируется в одной из этих точек, его присутствие в других точках становится запрещенным. *Как другие точки узнают об этом?* Необходим мгновенный сигнал, движущийся с бесконечно большой скоростью к поверхности волны, что противоречит теории относительности.

«*По моему мнению,* – говорит Эйнштейн, – *можно снять это возражение, не только описывая процесс волной Шредингера, но и в то же время локализуя частицу во время движения. Я думаю, что г-н де Бройль прав, продолжая поиски в этом направлении*» [57].

Несмотря на краткость, выступление Эйнштейна произвело эффект. Ни на конгрессе, ни после никто не ответил на его возражение, а позднее он несколько раз повторял тот же аргумент о неполноте квантовой механики. Эта поддержка была для де Бройля большим утешением. Эйнштейн вдохновил его и на перроне брюссельского вокзала, сказав: «*Продолжайте! Вы на верном пути*» [19]. По его мнению, добавил он, «*физическая теория должна быть без всяких вычислений иллюстрирована настолько простыми картинками, чтобы и ребенок мог ее понять*». И сказал еще де Бройлю: «*Уверен, что с чисто вероятностной интерпретацией волновой механики мы далеки от истины!*» [19].

Однако поддержки Эйнштейна оказалось недостаточно. «*Я вернулся в Париж очень взволнованный этими дискуссиями,* – сказал де Бройль, – *и, размышляя по этому поводу, пришел к убеждению, что... теория волны-пилота непригодна. Не осмеливаясь вернуться к теории двойного решения из-за математических трудностей, я пал духом и примкнул к вероятностной интерпретации Бора и Гейзенберга*» [6, 19, 61].

«*Спор об интерпретации квантовой механики быстро продвигался в пользу индетерминистского тезиса Бора и Гейзенберга*», – добавил он в качестве эпилога к рассказу о встрече с Эйнштейном [19].

Можно задаться вопросом: почему этот тезис противопоставлялся традиционному течению науки? Я уже слегка коснулся этого вопроса, рассказывая о философских течениях, о параллели с другими абстрактными тенденциями, о весомости идеологий, о духе времени вообще. Данная интерпретация квантовой механики, истолкованной в столь загадочной манере, закрытой и тоталитарной, напоминает о некоторых идеологиях, особенно о марксизме. Как и у копенгагенской школы, у него выработан свой язык, сформирован список разрешенных и запрещенных вопросов, в результате чего он и отдаляется от своих противников. Подобно марксизму копенгагенская школа делит историю на две части – определяющие ход истории до и после, выставляя своих врагов противниками прогресса.

Но этого объяснения недостаточно, так как физическая интерпретация не является просто докладом, она составляет часть науки. Если ее сила сохраняется, так это потому, что ее идеи как минимум не противоречат фактам. Точно так же, как политический режим нуждается в поддержке населения, научная идеология может жить только до тех пор, пока опыт не опровергнет ее. Надо различать идеологический и научный аспекты. Однако с научной точки зрения истинная причина успеха копенгагенской школы заключалась в том, что она давала минимальное объяснение квантовой механике, «способ упрощенного применения». При таком подходе ученые не обременяли себя трудными задачами, которые не имеют решения, а лишь отвечали на вопросы, которые был способен поставить эксперимент, по крайней мере в атомной и молекулярной областях. Если Бор и его друзья довольствовались формулировкой на прагматическом языке связной совокупности эвристических правил, своду которых мы должны подчиняться и которые еще остаются в силе, то все его охотно принимают в ожидании ответа на вопросы, ускользающие от вероятностной интерпретации. Разногласия начались с идеологии, то есть с ее запретов. Нельзя было говорить о траекториях, описывать переходы, сомневаться в неустранимости квантовых дискретностей и т.д. Это положение было отвратительным, но надо признать, что если бы хоть одна из этих проблем была решена, если бы эксперимент показал неизбежность таких выводов или если бы другое объяснение приводило к лучшим результатам, то очарование существующей трактовки квантовой механики было бы нарушено. И тогда другие проблемы вышли бы на первый план, по необходимости сосуществуя с нынешней интерпретацией. Однако случай был не тот.

Следует приуменьшить значимость этой констатации, поскольку даже при отсутствии счастливого случая все равно находят то, что ищут, и эксперимент нуждается в понятном объяснении теорией, которая ставит хорошие вопросы. Вспомним экспериментально наблюдаемые эффекты электронной дифракции, которые были упущены ввиду незнания идеи волны. А ведь могло бы так случиться, что при продолжении теоретических исследований, брошенных 60 лет назад, сегодня физики предложили бы новые эксперименты или переоценили бы результаты уже проведенных опытов, которые остались незамеченными. Наука должна быть свободной, чтобы развиваться. Вот что говорил Пуанкаре:

«*Свобода для науки – как воздух для животного… Мысль не должна подчиняться ни догме, ни партии, ни увлечению, ни интересу, ни предвзятой идее, ни чему бы то ни было, исключая только сами факты, потому что для нее подчиниться означает прекратить существование*» [63].

Но мы не можем переделать историю, и в наших силах лишь констатировать, что любая проблема, возникшая при построении новой теории, вторгается отнюдь не спонтанно в экспериментальное поле квантовой механики. Границы, очерченные в 1927 году, возможно, так же трудно преодолеть, как и границы, существовавшие ранее в классической физике. Когда молодые теоретики копенгагенской школы утверждали: «*Мы считаем квантовую механику завершенной теорией, фундаментальные физические и математические гипотезы которой более не подвергнутся изменениям*», – они выказывали раздражающее всех бахвальство, но также и неоспоримую гениальность, потому что факты до сих пор не опровергли их.

Философские вопросы, касающиеся локализации корпускул, природы волн, сущности квантовых переходов, отказа от детерминизма и многого другого, подталкивают нас сегодня точно так же, как в 1927 году, к поиску научного идеала, причем даже в большей степени, чем эксперимент. Но этот идеал, который призывает к поискам ясных образов и причинной интерпретации явлений, был идеалом науки, от Декарта и Ньютона до Лоренца, Планка, Эйнштейна, де Бройля, Шредингера. И он остается таким же для тысяч физиков, ведь квантовая механика – это еще не вся наука. Электромагнетизм, механика, теория относительности, классическая термодинамика покрывают громадные территории, на которые квантовая механика практически не проникает. От тех, кто там работает, квантовые философские догмы очень далеки. Они производят расчеты, что-то предсказывают, спокойно изучают явления, и их мало волнует, «вправе ли» они наблюдать за некоторыми вещами, которые от них ускользают по техническим причинам. Даже в квантовой области соотношения неопределенности не имеют экспериментальных последствий, потому что последние слишком малы по сравнению с ошибками экспериментов. Этот простой факт, который слишком часто забывают, иллюстрирует, что предметом споров в квантовой механике являются идеалы, которые сталкиваются чаще, чем противоречивые экспериментальные факты. Если все и дальше будет происходить именно так, то ортодоксальная теория победно справится с осадой.

Эйнштейн был далек от принятия копенгагенской интерпретации квантовой механики. Я считаю, что он никогда и не принимал ее всерьез и всегда сохранял надежду загнать в тупик квантовую механику в ее собственной области. Де Бройль, напротив, после конгресса в Брюсселе чувствовал, что партия надолго проиграна (хотя вряд ли считал, что окончательно). У него внезапно возникло ощущение, что все его усилия были напрасны. В то время как он упорно добивался результатов, физика прошла мимо, принеся успехи, в которых он не принимал участия.

«*Вернувшись в Париж,* – говорил он, – *я долго размышлял над неопределенностями Гейзенберга. В это время я читал в Сорбонне курс по волновой механике. Я еще излагал там теорию волны-пилота, но уже почти не верил в нее! В начале 1928 года я пришел к убеждению, что необходимо, несмотря* *на громадное усилие интеллектуального обновления, связанного с ней, принять концепции Бора и Гейзенберга. Приглашенный читать лекции в университете Гамбурга весной 1928 года, я впервые публично формально примкнул к новым идеям*» [62].

К этому следует добавить элемент, связанный с его педагогической деятельностью:

«*Другой причиной моего отказа, более любопытной с психологической точки зрения, было следующее. Когда в 1928 году я заметил, что построение моей интерпретации квантовой механики вызывает у меня большие трудности, я вступил в область высшего образования как профессор, с обязанностью преподавания физических теорий на факультете естественных наук в Париже. Однако преподавание требует представлять излагаемый материал в связном виде, а когда речь идет о теоретической физике, то еще и в корректной математической форме. Кроме того, студентов факультетов требовалось держать в курсе новейших достижений и наиболее поучительных результатов. Таким образом, невозможно довольствоваться интуитивными идеями, не принявшими окончательный вид, или теориями, набросанными лишь вчерне. В этом заключаются причины, из-за которых в какой-то мере, можно сказать, преподавание иногда отвлекает от исследований*» [6, 8].

Таким образом, Луи де Бройль на долгое время оставил исследования, когда его работы получили признание и пришла слава. Но такой поворот судьбы был слишком резок, и, несмотря на успех и принятие в научном мире достижений, которые отныне будут визитной карточкой ученого, он переживал личную драму.

ГЛАВА 7. Годы славы

С биографией де Бройля в период с 1927 года до послевоенного времени я менее всего знаком (однако это не касается его научной деятельности). Тогда еще я не знал его, поскольку был ребенком или подростком, а он мало рассказывал об этом отрезке своей жизни. Во-первых, потому что был некичлив и предпочитал скромно умолчать об успехах блестящей поры. Во-вторых, потому что не очень любил тот период по причинам, которые станут понятны далее.

С конца 1927 года де Бройля считали физиком первого плана. Как и все члены Сольвеевского конгресса, он принял участие в церемонии, посвященной 100-летию со дня смерти Огюстена Френеля, и по этому поводу сделал первый из своих историко-научных докладов, которые превосходно читал в дальнейшем.

В следующем году в Сорбонне он прочел факультативный курс лекций, в которых излагал идеи своей диссертации и предварительные рассуждения, разработанные в виде теории двойного решения и волны-пилота, хотя и прекращал ими заниматься. Факультативный курс, как следует из его названия, предоставлял полную свободу в выборе тем, но ситуация изменилась, когда к концу года де Бройль получил должность профессора, о чем говорилось в предыдущей главе. Именно тогда он поменял содержание курса.

Он преподавал не в самой Сорбонне, а в *Институте Анри Пуанкаре* (ИАП) на улице Пьера Кюри, открытом на средства американского мецената Рокфеллера и барона Эдмонда Ротшильда. Трогательная деталь: Рокфеллер осуществлял свой дар как дань уважения к французской математической школе, еще не уточняя деталей. В качестве посланника для изложения своих целей он выбрал Джорджа Дэвида Биркгофа, одного из обаятельнейших учеников Анри Пуанкаре. Французские математики дали название новому институту и выразили пожелание, чтобы тематикой института стали исследования в области теории вероятности и теоретической физики (последнюю еще не преподавали в Сорбонне).

Понятно, что назначение де Бройля способствовало обновлению преподавания на факультете естественных наук Парижа, но он пока не был лектором. Первым титулованным профессором кафедры теоретической физики был Леон Бриллюэн, который был старше его на два года. Директором Института Анри Пуанкаре был Эмиль Борель, глава французской школы теории вероятностей.

В своем первом курсе лекций де Бройль изложил принципы вероятностной интерпретации, к сторонникам которой он примкнул, стараясь сохранить ясный и наглядный стиль изложения. Курс его лекций был издан в 1930 году под названием «*Введение в волновую механику*» [64] и впоследствии переведен на английский и немецкий языки. Данный труд был седьмым по счету, включая диссертацию. В этот перечень также входят: изложение совокупности его работ (труд «*Волны и движения*», который недавно был переиздан [65]); книга об *X*-лучах в соавторстве с братом [32]; сборник текстов на английском языке с Леоном Бриллюэном; еще один сборник статей и рефератов, автором которого был только он; работа «*Волны и корпускулы*» [66], вобравшая в себя его основные творения, включая доклад, посвященный Френелю. Этот сборник предварял несколько книг, которые он опубликовал позднее в серии своего друга Андре Жоржа в издательстве «Альбин-Мишель». Он становился крупным научным писателем. Первыми издательствами, которые выпустили его работы, стали «Готье-Виллар» и «Германн». «Альбин-Мишель» было третьим.

Де Бройль выработал свой стиль. Он умел говорить о науке строго и просто, со сдержанной теплотой, проглядывающей сквозь его приверженность к классицизму. Он увлекал целые поколения читателей, и его книги стали библиографической редкостью. Но после наплыва множества научных терминов и засилья абстрактного формализма некоторым читателям, вероятно, будет сложно узреть глубину идей, выраженных простым, но емким литературным языком, без математических формул. Сейчас немного подзабыто, что физическая идея, возникающая с трудом из лабиринтов интуиции, но открывающая простор новой истине, заслуживает большего уважения, чем ее формальное изложение после свершившегося факта. Необходим наметанный взгляд или, наоборот, совсем неискушенный, чтобы заметить, что фраза де Бройля всего из трех строк, написанная очевидным тоном, иногда отвечает на важный вопрос, который потом оказывается математически изложенным на десяти страницах. Он отличался другим взглядом, может быть, слишком элементарным, в прямом смысле слова, как это отмечал Пьер-Жиль де Жен в воспоминаниях о курсе лекций де Бройля в Нормальной школе. «*На самом деле,* – говорил он, – *речь шла о размышлении над аналогией между геометрической оптикой и классической механикой в сравнении с аналогией между физической оптикой и волновой механикой. Это размышление было эстетично, глубоко и совсем не адаптировано для парней девятнадцати лет, какими мы в то время были. Я сразу устремился к более прагматичному обучению… И только позднее… я по-настоящему понял идеи, которые нам излагал Луи де Бройль*» [22].

Помимо стиля Де Бройль разработал и собственный метод. Прежде всего он решил больше не писать книг совместно с другими авторами. И заявил об этом Андраде э Сильва и мне, когда мы принесли рукопись книги, как раз созданной в соавторстве [49]. Мы, смеясь, признались, что в процессе написания книги много спорили. А он ответил, что и сам не раз спорил с братом при подготовке книги об *X*-лучах и пообещал себе никогда больше не делать этого.

В другой раз он открыл свой секрет кажущейся легкости, с которой создавал книги. Его сотрудники знали, что он писал книги «с первого захода», в тетради, без помарок, своим красивым почерком, черными чернилами, пером от «Сержен-Майор». И лишь вычисления производил в черновике. Он делал записи в тетради в течение лета и пользовался ими зимой при чтении лекций, которые каждый год обновлял. Весной он подправлял текст, делил его на главы и, добавив предисловие и оглавление, относил материалы в издательство «Германн» на улице Сорбонны или в «Готье-Виллар» на набережной Гран-Огюстен. Он делал это около 30 раз (!) – и в этом заключается «секрет», о котором я уже упомянул. Однажды, когда он вернул мне рукопись с комментарием «*Все понятно*», я пожаловался на отсутствие писательского дара и на то, что, добиваясь ясности текста, переписывал его много раз. Тогда он рассказал, что его способности не были врожденными и достиг он их благодаря силе воли и дисциплине. На самом деле первая книга далась ему с трудом, он переделывал текст несколько раз и так измучился с финалом, что решил либо вовсе не писать книг, либо писать без поправок. Сконцентрировав все силы, он достиг этого.

В 1928 году де Бройля постигла горькая утрата: не стало матери, рядом с которой он оставался до конца ее дней в особняке на сквере Мессин. Она долго болела и отдалилась от светского общества. Испытывая чувство огромной любви и привязанности к сыну, она возлагала на него большие надежды, но разочаровалась. Мать умерла, не осознав научных успехов сына. После ее кончины дом продали, а ценное имущество, находившееся в нем, поделили. Луи де Бройль обосновался в Нейли, в удаленном предместье, на улице Перроне.

В том месте царила деревенская атмосфера, по улице даже прогуливались бараны! Он купил дом на природе и оставался там до конца жизни. Помимо него в доме жил лишь Николя – верный слуга, который присматривал за ним в детстве. С этого времени де Бройль окончательно отошел от семейных традиций и стал вести очень простую жизнь. В каком-то смысле он «обуржуазился» и, учитывая его происхождение, как бы опускался по социальной лестнице. По крайней мере, когда он был назначен профессором в Сорбонну, один из его близких родственников заметил критическим тоном: «*Так вы стали служащим!*»

Дом в Нейли, несмотря на семейные воспоминания, дышавшие историей, был всего лишь домом обывателя. Он приобрел особое значение из-за его знаменитого жильца, а немалая стоимость объясняется высокими ценами на недвижимость. Гости, которые раньше не бывали в доме и предусмотрительно узнавали по телефону: «*Как добраться до особняка герцога де Бройля?*», вероятно, ожидали увидеть нечто необычное. Однако разочаровывались, не обнаружив статуи греческих богов в саду во французском стиле и лестницы эпохи Ренессанса. Сад имел площадь несколько десятков квадратных метров. В саду размещался гараж – в действительности служебное строение для его камердинера, а вовсе не место пребывания автомобиля самого де Бройля (которого, кстати, у него никогда не было – он ездил на метро). Помимо прочего в гараже стоял шкаф, в котором находились книги, не помещавшиеся в доме.

Прекрасная библиотека была собрана в его кабинете. Можно было догадаться об эволюции хозяина по ее содержимому. Собрание начиналось со старинных книг в кожаном переплете, прошитом крепкими нитками; затем де Бройль довольствовался переплетом из ткани; потом, вовсе отказавшись от переплета, оставлял книги такими, какими покупал или, чаще, получал в подарок (он почти прекратил покупать книги из-за того, что издатели опережали его желания).

Поселившись в Нейли, он стал известной персоной. У него появилась склонность к написанию обзоров своих работ и работ в новых областях физики. После теории относительности кванты стали модной темой.

Декабрь 1929 года был месяцем его славы. После великих «предков», Планка, Эйнштейна и Бора, де Бройль первым из молодого поколения основателей квантовой физики получил Нобелевскую премию за предсказание *волновой природы электрона.* Он отправился в Стокгольм в сопровождении брата Мориса и сестры Полины, которая рассказала об этом в своих последних воспоминаниях о 1929 годе [3]. В мемуарах она поведала о лихорадочной атмосфере и слухах, которые предшествовали присуждению премии, о напряженных отношениях между братьями (Морис тоже имел шанс стать лауреатом), о поездке, морской болезни, журналистах, приемах, протоколе, высказываниях типа «*Луи хорошо подготовился, он не забыл ни Декарта, ни Стайёль, ни маршала де Розена, который тоже из наших предков. Его доклад самый лучший*» [3]. Мы в этом не сомневаемся!

Луи де Бройль объявил о получении премии, будучи на лекции. Причем рассказал об этом в свойственной ему манере – просто извиняясь, что на следующей неделе его не будет, так как он «*обязан поехать в Стокгольм*». Я представляю, что слова эти он произносил тихо и невнятно, понизив голос и разглядывая носки своей обуви, как это бывало, когда ему приходилось говорить о себе. По возвращении в Париж он провел публичную лекцию. Изначально ее планировали устроить в Сорбонне или в Коллеж де Франс, но в итоге провели в Национальной консерватории искусств и ремесел. Это простое, но благородное заведение, которое выпускало рабоче-технические кадры и в котором некоторые товарищи де Бройля по Эйфелевой башне заканчивали свое образование – с ними он поддерживал дружеские отношения всю жизнь. Мы нашли одного из последних свидетелей этой конференции, Пьера Ургона, в то время увлеченного радиолюбителя, который дал любопытный комментарий:

«*Я вошел в здание «Звезды» не через главный вход, а через подъезд № 278 на улице Сан-Мартен, с прикрепленной сверху надписью «Публичные лекции». Я разделил всеобщее удивление, когда появился докладчик – в неожиданном виде, как будто заботы о внешности были чужды ему… На нем было необычайно длинное пальто с раскрытыми и потрепанными карманами! Его облик контрастировал с изысканностью, присущей ему потом и обычной в его семейном кругу. Казалось, он буквально перенял знаменитую причуду Эйнштейна, оставлявшего другим заботиться об элегантности*» [22].

Луи де Бройль инвестировал средства, полученные с Нобелевской премией, в покупку прекрасного дома для уик-эндов на краю леса в Сен-Жермене. Там жили пара сторожей и пес, который всегда радостно его встречал. Во время войны дом заняли подпольщики, которые привели его в такое запущенное состояние, что де Бройль охладел к нему и по этой причине стал сдавать внаем. Но этому дому было суждено сыграть важную роль, поскольку он перешел по наследству в собственность фонда имени Луи де Бройля.

Луи де Бройль показывал мне Нобелевскую медаль дважды. Первый раз – для иллюстрации довольно забавного рассказа, связанного с правилами протокола. Получив в 1929 году поздравление от королевы Бельгии Елизаветы и не зная, какую форму вежливости следует использовать для выражения благодарности, он обратился за информацией в посольство, где ему ответили: «*О! Вы можете написать что-нибудь простенькое. Например, “Примите, Королева, чувства, с которыми, Мадам, я Ваш послушный и покорнейший слуга”*». Формулировка позабавила его, но он воспользовался ею. Эйнштейн, который не был воспитан в строгих правилах и знал королеву, предпочитал не вдаваться в тонкости стилистики и начинал послания просто: «*Моя дорогая королева*», заканчивая их словами: «*Посылаю Вам мои наилучшие пожелания*» (обычные слова, правда, более подходящие для новогоднего поздравления).

И вновь обратимся к воспоминаниям об Эйнштейне. Де Бройль подчеркивал, что получением Нобелевской премии обязан именно Эйнштейну, так как не представлял, чтобы кто-то другой мог поддержать его. Он считал себя вечно обязанным Эйнштейну за успех своих идей и всей карьеры, так как без опоры на его научный авторитет он, возможно, запоздал бы с наблюдениями дифракции электронов. И даже если бы однажды наблюдал ее, то не придал бы значения достигнутому результату, не обрати Эйнштейн на это своего внимания. Кроме того, он был уверен, что смог осуществить свои работы лишь воспользовавшись концом благоприятной эпохи и что физика с тех пор настолько изменилась, что открытие, подобное его открытию, стало невозможным. Он прямо сказал мне об этом: «*Думаю, что сегодня я ничего не смог бы сделать*». И после минутного размышления добавил: «*Может быть, и Эйнштейн тоже*». Не надо забывать, что когда-то Эйнштейна считали слабым ученым и игнорировали его идеи. А помощь, подобную той, что оказал де Бройлю, он сам получил в молодости от Планка, опубликовавшего его работы по теории относительности (резко критикуемой в то время) и квантам света (которые сам Планк критиковал). Никакой журнал и никакое научное общество не сделало бы этого сегодня, поскольку они ставят во главу угла «*международный престиж*» и свою роль цензоров от имени «*научного сообщества*». Надо также сказать, что не видно сегодня главных редакторов масштаба Макса Планка. Действительно, становление современной науки началось тогда, когда копенгагенская школа заключила новую теорию в обрамление неприкасаемости. Но на слишком короткий период де Бройль избежал ее давления; в своем письме от 14 ноября 1929 года, отвечая на поздравления Эйнштейна, он пишет:

«*Эти поздравления среди всех прочих наиболее тронули меня по причине большого восхищения, которое я давно испытываю к Вам. Может быть, моя идея электронных волн и составляет достаточно значительный прогресс, но я знаю, сколько еще остается сделать, чтобы по-настоящему понять все это и немного приблизиться к Истине. Нам надо еще много работать*».

Это было искренне, но, увы, за золотом и блеском великих премий действительность выглядела печальнее. Де Бройля больше не публиковали. Конечно, он писал книги и статьи, часто действительно замечательные, но это были курсы лекций и общие обзоры. За пять лет, с 1927 по 1931 год, он не опубликовал ничего принципиально нового, поскольку постоянно менял линию поиска и метод мышления. Не отклонился ли он от правильного пути с теорией волны-пилота и двойного решения? Я этого не знаю, и он не знал, но проблема была в другом. Он находился в новом духовном состоянии. Де Бройль, Эйнштейн и Шредингер были из тех, кому хотелось все описать и все объяснить, кто никогда не считает, что достиг абсолютной истины, и продолжает задавать все новые вопросы. Но что они могли сделать против большинства, которое отвергало все их вопросы?

Эйнштейн занимался исключительно теорией относительности и *теорией единого поля*[24]. Его единственная попытка использования квантовой механики с целью связать единое поле с уравнением Дирака не имела успеха.

---

[24] *Единое поле* было известной попыткой Эйнштейна ввести гравитацию и электромагнетизм в единую геометрию пространства-времени. Он работал над этим в течение 30 лет.

Шредингер со своей стороны сторонился больших проектов, хотя и создавал замечательные работы по теории единого поля, теории Дирака и статистической физики. И тот и другой продолжали горячие споры с лагерем противников, пытаясь отыскать недостатки вероятностной интерпретации. Но, несмотря на хитроумные парадоксы, которые они приводили и на которые их противники по-настоящему не отвечали, они не преуспели в этом. Парадокс может быть истолкован по-разному, в соответствии с предубеждениями каждого, и в конце концов победу одерживают над уже побежденными. В области теорий побеждают не с помощью парадоксов, а благодаря новым результатам, способным дать начало новой теории, чего в данном случае явно не хватало.

Положение де Бройля, возможно, было более тяжелым, поскольку он лишился главных составляющих своих размышлений: локализации корпускул, от которой он отказался, и относительности, отсутствующей в уравнениях Шредингера. Конечно, она присутствовала в уравнении Клейна – Гордона, но этого было мало. Ему пришлось оставить путь развития волновой механики, словно ему обрезали крылья. Появилась необходимость в новом поле для исследований, в тех рамках, которые для него уже не были больше своими.

Начиная с 1928 года волновая механика обрела относительность. Рассказывают, что Бор на Сольвеевском конгрессе спросил Дирака, над чем тот работает. Ответ был таков: «*Я пытаюсь создать релятивистскую теорию электрона*». «*Но проблема уже решена Клейном*», – возразил Бор. «*Я не верю*», – лаконично сказал Дирак [25]. Спустя некоторое время он нашел *уравнение Дирака* – воплощение одной из гениальных идей этого ученого.

Открытие было сделано абсолютно формальными, неописательными рассуждениями, но они обладали восхитительной простотой. Релятивистское уравнение электрона Дирака принесло удивительный урожай результатов, которые следовали прежде всего из формулы, дающей спектр того же водорода (всегда его!). Формула была настолько точна, что лишь через 20 лет в результате эксперимента обнаружили брешь (эффект Лэмба), которую вскоре ликвидировали. К тому же уравнение содержало то, чего Дирак не искал, а именно спин электрона, это собственное внутреннее вращение, отсутствующее в прежней теории. И, что особенно важно, Дираку удалось интерпретировать некоторые решения его уравнения, казавшиеся патологическими, но таившие в себе громадное открытие: положительный электрон, или *позитрон,* вскоре обнаруженный в ходе наблюдений и провозгласивший о новом мире античастиц – *антиматерии.*

Мы больше не будем возвращаться к этому (например, отсылая к [50]). Скажем лишь, что де Бройль тут же воспылал интересом к новому уравнению (даже несмотря на то, что трудности еще не были устранены), так как обнаружил в нем отправную точку волновой механики, относительность. В противоположность уравнению Шредингера уравнение Дирака выдавало вновь все без исключения волновые величины, которые де Бройль открыл в своей диссертации. Конечно, частицы не были там локализованы, но это был общий недостаток волновой механики. Он изложил новую теорию в своем курсе лекций, который перерос в одну из его прекраснейших книг – «*Магнитный электрон*» [67]. На эту тему сегодня имеются более полные изложения, но нет ни одного настолько физичного и настолько простого. Один известный русский теоретик рассказал мне, что в Московском университете по этой книге де Бройля (переведенной на русский язык) он изучал теорию Дирака. Этой оригинальной книге не хватало некоторой современной устоявшейся терминологии и алгебраических результатов, которые через два года нашел Паули, доложивший о них в Париже на семинаре де Бройля. Формулы Паули были пространными, и их интерпретировали де Бройль и его ученики, в частности Коста де Боргард и Петьё. Некоторые другие результаты, игравшие важную роль, получили ранее «вручную» де Бройль и другие авторы, ссылки на которых приводятся в «*Магнитном электроне*»[25].

Уравнение Дирака подсказало идею, которая позволила ему вернуться к основе своих работ – свету. Парадоксальным образом свет отсутствовал в волновой механике, исходившей, однако, из теории фотона Эйнштейна. Только описание электрона приводило к успеху. Фотон же, игравший роль катализатора, исчез из «реакции», так как свет находился вне рамок новой теории. Уравнения Максвелла, квинтэссенция оптики, были чужды уравнениям волновой механики, которые, в свою очередь, не допускали световых волн среди своих решений. Попытка де Бройля объединить материю и свет в общий, единый дуалистический образ, казалось, увенчалась успехом после обнаружения дифракции электронов, но на самом деле не привела к волновой теории материи, из которой свет был исключен. Оставалось только мечтать о том, чтобы заделать эту брешь.

Я хотел бы сделать одно замечание. Некоторые теоретики думают, что синтез волн и корпускул, в частности для света, осуществляется в квантовой теории полей, о которой мы упоминали в предыдущей главе. Не имея здесь возможности описать эту теорию, широко использующую главным образом алгебраические методы, скажу лишь, что и в ней обнаружились серьезные математические трудности. Они состоят в появлении бесконечных величин, которые, однако, удалось устранить с помощью методов, удовлетворяющих далеко не всех, начиная с самого Дирака. Последний считал, что «*теория нуждается в таких же резких изменениях, как и переход от теории орбит Бора к квантовой механике*» [68]. Проблема до сих остается открытой, еще более труднорешаемой она казалась в то время.

[25] Один автор в своих мемуарах написал, что книга де Бройля была плохой, так как в ней не хватало алгебры. Другими словами, потому что он не использовал обозначения (которые еще не были в употреблении), и результаты Паули (появившиеся через два года после издания книги). Что касается физического содержания, об этом он не говорит и, похоже, он его не заметил.

В поисках истинного уравнения волны для фотона де Бройль обратил внимание на тот факт, что спин электрона вводится в уравнение Дирака способом, похожим на тот, каким вводится поляризация света в уравнения Максвелла, а именно введением нескольких волновых функций. Затем он обнаружил, что некоторая величина, определяемая уравнением и связанная с электричеством и магнетизмом (одна из алгебраических форм, цитированных в его книге [67]), преобразуется в теории относительности так же, как и электромагнитная волна Максвелла. Однако это не есть световая волна, и уравнение Дирака остается уравнением для электрона, а не для фотона, в частности, по статистическим причинам, которые требуют долгого объяснения. Скажем только, что спин Дирака в два раза меньше, чем спин фотона. Поэтому де Бройль думал, что вместо одной частицы Дирака следовало бы взять пару, образованную частицей и античастицей, такую, например, как электрон и позитрон, чтобы получившаяся пара была в целом электрически нейтральной. Это событие относится к 1932 году.

В 1934 году он нашел уравнение, которому подчинялась волна, связанная с маленькой двойной звездой, составленной из пары частиц Дирака. И произошло чудо: уравнение стало идентичным уравнению Максвелла. Но это не была обычная электромагнитная волна. Это была волна де Бройля, связанная с фотоном. Таким образом, было построено уравнение *волновой механики фотона,* включавшее в себя теорию фотона Эйнштейна.

Отныне в одну и ту же теорию были объединены электрон и фотон, для каждого из которых имелось свое уравнение: для электрона – уравнение Дирака, для фотона – уравнение де Бройля. Затем де Бройль показал, что если волна переносит большое число фотонов, она становится волной Максвелла. Из новой теории вытекает несколько следствий:

1. Фотон должен рассматриваться не как элементарная частица, но как результат *слияния* двух частиц Дирака.

2. На примере своего уравнения де Бройль иллюстрирует более общую идею, состоящую в том, что только частицы со спином ½, обладающие тем же внутренним вращением, что и электрон, могут быть элементарными. Другие же частицы, которые имеют другие значения спина, являются составными.

3. Де Бройлю первому удалось «*установить очень четкую связь между спином фотона и поляризацией света…*» [41]: поляризация света есть одна из форм, в которой для наблюдателя проявляется внутреннее вращение фотона.

4. Все явления взаимодействия материи и излучения сводятся к испусканию и поглощению фотонов.

5. Уравнение де Бройля не идентично уравнению Максвелла. Оно отличается от него добавочным членом, соответствующим массе фотона, которая не вводится произвольно, но вытекает из самой теории.

6. Наличие массы приводит к тому, что теория теряет степень свободы, упомянутую в главе 4, «калибровочную» инвариантность (уточнения приводятся в [50]).

7. Наконец, де Бройль отмечает, что частицы Дирака, образующие фотон, должны быть *нейтрино*, гипотетически введенными Паули, которые позже были обнаружены с помощью специальных экспериментов.

Де Бройль написал несколько книг по теории света [69–74] и работал над ней в течение 15 лет со своими учениками. Эта теория вызвала широкий отклик за рубежом, в частности в школе Бора и Гейзенберга. Через 20 лет в юбилейном издании по случаю его 60-летия [41] будет отмечено ее важное значение. Ее будут цитировать Юкава и Вейцзеккер, она составит тему работ Крамерса и Гейзенберга, который писал:

«*Мысль, высказанная де Бройлем в 1936-м*[26]*, что кванты света должны также рассматриваться как составные образования, приводит к проблемам в принципе того же значения, что и те, которые вызвало знаменитое открытие волн материи*».

Было заметно, что молодой и кипящий Гейзенберг Сольвеевского конгресса уступил место зрелому человеку, ставшему, как и де Бройль, известным ученым, которому более не нужно было скупиться на похвалы!

Таким образом, эта теория была вторым большим произведением де Бройля. К сожалению, сегодня она практически не востребована теоретиками, поскольку непопулярна (после отдаления де Бройля от копенгагенской школы научное сообщество решительно отказалось признавать его работы). Конечно, она содержит нерешенные проблемы, но в теории поля их еще больше. Надо сказать также, что теория де Бройля посягала на догму о нулевой массе фотона и калибровочной инвариантности, но можно отметить, что сам Гейзенберг не придавал этому большого значения. Добавим, что Шредингер был согласен по этому вопросу с де Бройлем.

Наконец, отметим: когда де Бройль создавал свою теорию света, считалось, что нейтрино, как и фотон, имеет нулевую массу. Он был единственным, кто предполагал обратное и для нейтрино, и для фотона. Результаты недавно проведенных экспериментов позволяют сделать вывод, что нейтрино все же обладает массой, как и думал де Бройль. Если это окончательно подтвердится, то справедливо задаться вопросом, не был ли он также прав и в отношении массы фотона, так как в его теории ненулевая масса фотона вытекает из неравенства нулю массы нейтрино.

Но вернемся к 1930-м годам, когда Луи де Бройль организовал научный семинар. В начале 1931 года в нем участвовали лишь трое: Клод Маньян, Андре Жорж и Жан-Луи Детуш. Позднее к ним присоединились Жерар Петьё, Мари-Антуанетт Тоннела, Оливье Коста де Боргард, Жюль Женьё и многие другие. Вскоре это научное собрание стало самым большим в Париже. Его устраивали 40 лет лет подряд, по средам в 15 часов. Там выступали наиболее известные физики, среди которых были Борн, Блох, Бриллюэн, Кабрера, Дарвин, де Донде, Дирак, Эйнштейн, Эльзассер, Ферми, Фаулер, Гамов, Гейзенберг, Гайтлер, Крониг, Ланцош, Милликен, Мотт, Паули, Пайерлс, Розенфельд, Шредингер, Сиама, Зоммерфельд, Тамм, Ван Флек…

[26] На самом деле, как мы видели, речь идет о 1932 и 1934 годах.

Семинар ИАП в течение десятилетий являлся важнейшим мероприятием для французских теоретиков, стремившихся быть в курсе последних исследований. На семинаре докладывали обо всех теоретических работах, проводимых в Париже (включая изыскания ученых, которые сегодня негативно отзываются о семинаре).

Здесь прошли обсуждение десятки работ. Имеется список *240 диссертаций* (*и дипломов о высшем образовании*), во время защиты которых де Бройль состоял в совете, чаще всего в качестве докладчика или президента, иногда совмещая то и другое. Кстати, теоретики, которые утвержают, что «*де Бройль умел создавать плохое окружение*», защитили диссертации при нем. Иногда де Бройлю не нравилась тема или идеи научной работы, но если она была серьезной, продуманной, то он не ставил препятствий.

Де Бройль внимательно читал работы, которые ему представляли (в частности, сообщения для Академии наук), и привлекал к этому других ученых, если возникали вопросы. Он знал, что с первого раза можно и не разглядеть интересный результат: это «хрупкое растение», о котором нельзя судить наспех. Нередко сомневаясь, де Бройль, тем не менее, высказывался в пользу автора. Он умел рисковать и позволял это делать другим, причем мало заботился о последствиях – важно было получить нечто новое. Он не верил в серьезность отзывов научных журналов, как не верил в однородность и чистоту продукции какого-либо завода.

Де Бройль поощрял смелость, и ничто не раздражало его так, как глупость. «*Когда мне подсовывают глупую статью,* – говорил он мне, – *я сразу ее распознаю. Трудности возникают с разумными работами, так как часто требуется большое умственное напряжение, чтобы понять, содержат ли они новую идею за возможными ошибками или оплошностями*». Он несколько раз уверял меня, что не бывает гениальных сумасшедших: «*Гений может стать сумасшедшим, это другое дело. Значит, тогда он болен, как и другие. Но никакая плодотворная идея не является безумной. Она может быть удивительной, неожиданной, но не безумной. Даже самую большую дерзость контролирует разум*».

Де Бройль был не только внимательным, но и строгим лектором. В частности, он никогда не участвовал в работе совета по защите диссертаций лишь как «свадебный генерал». Он возвращал диссертации с четкими и по существу заданными вопросами, исправляя погрешности в вычислениях, неточные обозначения и даже орфографические ошибки (правда, в его время делали мало таких ошибок). Де Бройль любил точность и тщательно изучал тексты. Еври Шацман рассказывал, что изменил план своего доклада в день защиты и де Бройль, потеряв нить изложения, лихорадочно листал рукопись, чтобы найти, о чем шла речь [22].

Помимо семинара де Бройль организовал в издательстве «Германн» выпуск серии «*Проблемы теоретической физики*». Целью было «*предоставить всем, кто интересуется теоретической физикой… анализ с комментариями неко-*

торых исследований, появившихся в иностранной периодике, замечаний математиков по вопросам применения аналитических методов в современных теориях, изложение физиками-экспериментаторами своих новых результатов с перечнем вопросов, обсуждение которых с теоретиками было бы желательным» [75].

После войны де Бройль предложил вниманию научного семинара большое *Собрание трудов и актуальных проблем*. Темами этих трудов являлись: мезон, электронная оптика, сантиметровые радиоволны, ускорители частиц, теория информации, квантовая химия, ядерная физика, молекулярная биология, герцевская спектроскопия, теория относительности, нелинейные уравнения. Если добавить к этому перечню различные курсы, книги, лекции в разных обществах ученых, физиков, инженеров и философов, журнальные статьи, выступления в прессе или на радио, то можно сказать, что Луи де Бройль являлся одним из французских информационных центров. Кроме этого он успевал исписывать сотни страниц расчетами и публиковать оригинальные работы, после «затмения» в переломные 1930-е годы его активность не прекращалась. Список оригинальных публикаций точно не известен. Тот, что представлен самим де Бройлем и воспроизведен в нескольких книгах, имеет много пропусков, которые мы стараемся по мере возможности заполнить, изучая его архивы и корреспонденцию. Подобное «изобилие» было присуще эпохе, идет ли речь о Пуанкаре, Валери, Клоделе или о романистах того времени. Оно было, конечно же, плодом упорного труда. Луи де Бройль всю жизнь вставал в шесть утра и работал по два часа, прежде чем привести себя в порядок, позавтракать и удалиться по делам.

Стоит рассказать подробнее об Андре Жорже, который был для де Бройля таким же другом, как Бессо для Эйнштейна. Я хорошо его знал, и он гордился нашей дружбой (хотя разница в возрасте между нами составляла 40 лет!). Андре Жорж не занимался научной работой. Он был гуманистом Ренессанса, который заблудился в XX веке. Де Бройль говорил, что он «*никогда не встречал столь образованного человека*». Не являясь специалистом в науке, Андре Жорж мог говорить о ней только с общей точки зрения, но всегда имел безошибочное суждение и тонко чувствовал границы своих познаний. Он был привилегированным собеседником для де Бройля, как и для Каркопино, который утверждал, что не встречал лучшего специалиста по истории Рима. Андре Жорж состоял в дружеских отношениях с Валери, Монферланом, королевой Елизаветой, Артуром Хоннегером (с которым сочинял музыку), являлся исполнителем завещания Ромена Роллана. По всему миру у него имелись десятки корреспондентов, включая Эйнштейна. Это был интересный и уважаемый человек, который оставил о себе самые лучшие воспоминания. Его образ живо возникает в моей памяти: звонкий голос и белая шевелюра. Между Андре Жоржем и Луи де Бройлем сложились интересные отношения: сдержанные и доверительные. Я бы назвал их «кошачьими» (правда, де Бройль не любил кошек – он был «собачником», и собаки тоже его любили). Я не знаю, как друзья обычно называли друг друга, и склонен думать, что они не имели конкретных обращений. Во всяком случае они не упоминали имен – иногда Андре говорил «*Принц*» или «*Мой принц*». Долгое время оба оставались холостяками, пока Андре Жорж не совершил акт «предательства», женившись (Поль Жорж была чудесной женщиной). Луи де Бройль послал другу письмо с поздравлениями и выразил большое сожаление, что «*не будет видеть больше его на семинаре*». Он был взволнован, так как представлял себе, что женитьба лишает многих свобод, но вскоре успокоился.

Журналист и научный писатель Андре Жорж создал в издательстве «Альбин-Мишель» две большие коллекции: «Наука сегодня» и «Ученые мира», для которых Луи де Бройль предложил восемь тем. Первая из них, «*Материя и свет*», имела громадный успех в книготорговле. В то же самое время он опубликовал в издательстве «Фламмарион» в знаменитой серии «Библиотека научных философов» (известна сейчас как «Библиотека научной философии») научно-популярную книгу «*Новая физика и кванты*» [77], которую переиздавали несколько раз. Во всех этих книгах отразились ясность мысли и качества популяризатора, пленявшие умы миллионов читателей. Эти произведения были отмечены после войны премией Калинги, присуждаемой ЮНЕСКО, которая является аналогом Нобелевской премии в научной литературе.

Говоря об этой премии, нельзя не упомянуть огромный список наград и отличий де Бройля, о точном количестве которых не известно до сих пор! Отметим по крайней мере, что в 1933 году он был избран членом Академии наук; был членом почти всех академий в мире, лауреатом почти всех премий, награжден многочисленными орденами и медалями; был обладателем многих почетных званий, о которых только может мечтать человек науки. Де Бройль был принцем Святой Французской империи и получил титул герцога. Среди предметов, перешедших по наследству Фонду Луи де Бройля, – более 70 крестов и медалей, свыше 50 дипломов, в том числе Нобелевская премия и большой крест Почетного легиона, полученный при генерале де Голле. Однако, по моему мнению, все эти выражения почтения и признания заслуг, хотя и были приятны де Бройлю, мало его трогали. Гораздо больше он ценил одобрительный отзыв Эйнштейна по поводу его идей и результатов их приложения.

Больше всего Луи де Бройль гордился тем, что его открытие волновых свойств вещества нашло применение в медицине – в работе *электронного микроскопа.* Здесь стоит кое-что уточнить. Когда Эрнст Руска начал создавать электронный микроскоп (Германия, 1933 год), он не слышал о диссертации де Бройля. Руска собирался конструировать чисто корпускулярный микроскоп, который должен был избежать дифракционной аберрации оптического микроскопа, связанной с волновыми свойствами света, и достигнуть увеличения в несколько миллиардов раз (увеличение обычного микроскопа не превышает 2500). Руска рассказывал, что когда он узнал о существовании волн де Бройля, то испытал отчаяние, но продолжал работать и вскоре пришел к выводу, что благодаря чрезвычайной малости этих длин волн он не попадает в ограничивающие пределы оптического микроскопа. Из этого факта следовало, что если истинное увеличение электронного микроскопа было меньше того, на которое рассчитывал Руска, то оно было бы все-таки необычайно велико (в несколько миллионов раз). На первый взгляд могло показаться, что электронный микроскоп работает вопреки волне де Бройля, а не благодаря ей, но в действительности в этом изобретении волновая механика сыграла главную роль. Прежде всего она определяет увеличение микроскопа и указывает на способы достижения его больших величин при увеличении энергии электронов (что приводит к уменьшению длины волны). Кроме того, она позволяет производить расчеты по *обработке изображений*, обеспечивающие оптимальные результаты. Изобретение электронного микроскопа явилось настоящей революцией в биологии и медицине, и из всех приложений волновой механики это наиболее выдающееся. Подтверждением тому стали высказывания известных специалистов (в их числе Денис Габор, изобретатель голографии), которые собраны в двух книгах, посвященных юбилею де Бройля [5, 41] (о приложениях волновой механики можно также узнать по ссылкам в работе [78]).

В развитии электронной микроскопии и других областей электроники во Франции больших успехов добились Дюпой, Гриве, Лаллеманд, Маньян, Понт, Кастийан, Трийя... Де Бройль внимательно следил за новыми приложениями, вникая в малейшие детали, и способствовал их продвижению. Благодаря де Бройлю изобретатель электронной камеры Лаллеманд получил признание, еще будучи молодым. А произошло это так: при посещении лаборатории Страсбурга, в которой трудился Лаллеманд, де Бройль всего лишь подчеркнул важность его работ.

Луи де Бройль не был кабинетным работником с абстрактными представлениями и консервативными взглядами. Он стремился получать новейшую информацию о последних открытиях даже в области промышленности. Как признанный авторитет в научном мире, он пропагандировал свои идеи и старался обеспечить условия для продвижения экспериментальных исследований. Физика интенсивно развивалась во Франции в период между двумя войнами и после Второй мировой войны, и во многом благодаря де Бройлю. Но сегодня это неизвестно широкой публике.

Большинство послевоенных французских теоретиков сочли удобным забыть де Бройля. Они воспользовались его знаниями и рассчитывали продвинуться дальше, повернувшись к нему спиной. Да и сейчас ведут себя необоснованно самонадеянно, забывая, что в сравнении с де Бройлем они крайне малы. Его значимость для них ничтожна, поскольку эти теоретики принадлежат к другому миру и являются продуктом научного сообщества в отличие от индивидуалиста де Бройля с его уникальным подходом к исследованиям. Так, как умел де Бройль выходить из уединения мыслителя и проявлять практический интерес к прикладным исследованиям, не умел никто. Следует обратить внимание на особенности периода после Второй мировой войны и на историю развития *послевоенных квантовых теорий.* Ушли великие личности, Черчилль и де Голль, – освободилось место для заурядных политиков. В квантовой теории произошло нечто подобное: воздав почести самим основателям квантовой механики, эпоха предоставила их места более посредственным физикам. Среди них, конечно же, имелись способные ученые, но не было гениев. Таланты появляются в героическое время, каким явилась эпоха зарождения квантовой физики. А мы живем всего лишь в период приложений.

Мы еще вернемся к этому. А пока надо сказать, что, добившись успеха и славы, де Бройль, подобно другим замечательным ученым, был отстранен от вершин науки и подвергся неучтивому обхождению. Прежде всего потому, что Франция, как никакая другая страна, умеет отворачиваться от великих людей (мы приведем примеры в науке). Особенно ставят в упрек де Бройлю и Эйнштейну начало дискуссий по основаниям квантовой механики, которые нарушили согласие между физиками. Де Бройля осуждали даже больше, ведь в противоположность Эйнштейну он сначала уступил копенгагенской школе, а затем отвернулся от нее. Когда это произошло, Эйнштейн и Шредингер поздравили его, другие же великие физики, создатели квантовой механики, затаили неприязнь. Однако они всегда понимали, кем был Луи де Бройль и какую роль сыграл в становлении квантовой теории. Напротив, их эпигоны, пришедшие к уже устоявшейся теории, видели в нем только отступника и, как ни удивительно, считали именно его ответственным за трудности, с которыми они сталкивались в квантовой физике. Но их анализ показывал: де Бройль прав, говоря, что «*познавательная способность квантовой механики, какой она преподается сегодня, кажется по большей части исчерпанной*» [16, 19].

Де Бройль оказался отчасти сам виноват в своих неприятностях: довольно долго он был близок к школе, которую принялся критиковать. Надо признать, что в период до 1952 года (хотя он и получил признание благодаря своему научному гению и блеску ума) его успех выглядел несколько неестественно. Де Бройль восхвалял копенгагенскую школу, угождая вкусам общества, которое, естественно, находило в этом спокойствие и удовлетворение и пренебрегало научным докладом, более вопрошающим, чем приукрашивающим достигнутые результаты. Де Бройль умел искусно обходить острые углы, и если его слушали, то потому, что он восхвалял модный тогда индетерминизм (так сегодня теория большого взрыва популярна в космологии). Индетерминизм пока сходит за «культурную ценность», которую продолжают лелеять. Такой модный де Бройль, чуждый самому себе, выглядел необычно. Его технические или научно-популярные книги оставляли впечатление точности и основательности. Говорил ли он о квантовании или системах корпускул, о свете или частицах со спином, о волноводах или корпускулярной оптике – все было отмечено ясностью разума и физического смысла. Четкой и наглядной у него становилась даже квантовая теория полей (подвиг!). Но в тех же книгах, особенно общего характера, он опускался вдруг до простоты идей, понятных всем.

Он писал так:

«*Скажут, что контур наших знаний должен, если можно так выразиться, постепенно вырисовываться, чтобы позволить им быть применимыми к действительности субатомных масштабов. Элементарные объекты витают в пространстве и во времени, как в одежде, сшитой не по размеру. Индивидуальность проявляется в загадочных процессах взаимодействий. Детерминизм сам по себе, такой дорогой для физиков минувших времен, обязан сдаться*» [76]. (Именно за этот жанр элегантной туманности он позднее считал Бора «*Рембрандтом современной физики, проявляющим иногда некоторый вкус к светло-темному…*» [19], но и сам смотрелся как Моне, со своим импрессионистским видением науки.)

«*Волна,* – говорил он в другом месте, – *это всего лишь чисто символическое и аналитическое представление некоторых вероятностей и вовсе не физическое явление в прежнем смысле слова*» [76]. (Это был он, который говорил мне, что «*когда пачкаешь руки, работая с генераторами Эйфелевой башни, не так легко верить в то, что волна может быть всего лишь вероятностью присутствия*»…Об этом он больше не вспоминал.)

«*Так как в новой механике*, – еще писал он, – *никогда невозможно предполагать известными одновременно положение и начальную скорость корпускул, строгий детерминизм должен исчезнуть*» [76]. (Абсурд! Измеряемое неизбежно является неизмеримым. И этому он нас учил.)

В другом месте он пишет о «*существовании у атома стационарных состояний, в каком-то смысле находящихся вне пространства и времени, и невозможности описания внезапных переходов, которые переводят атом из одного стационарного состояния в другое…*» [14]. (Это прямо противоположно тому, что он писал в своей диссертации.)

И наконец: «*Как по забавной предосторожности природы, два аспекта материи, корпускулярный и волновой, играют в своего рода прятки, причем таким образом, что никогда не противопоставляются друг другу. В этом заключаются, говорит Бор, взаимодополняющие аспекты действительности…*» [79]. (Позже он будет сравнивать эту «*дополнительность*» *со снотворной способностью опиума*» [8].)

Данные высказывания наряду с другими замечательными рассуждениями можно найти в книгах де Бройля «*Материя и свет*» [76], «*Непрерывное и дискретное в атомной физике*» [14], «*Физика и микрофизика*» [79]. Интересные мысли были изложены в таком несвойственном ему стиле, что однажды он, находясь в подавленном состоянии, направил в издательство «Альбин-Мишель» письмо, в котором запрещал всякое переиздание данных книг. Большая потеря для нас, но правильное решение. Накануне столетия де Бройля поступило предложение переиздать его «*наилучшие книги*» – именно эти три! Я воспротивился этому (де Бройль оставил мне все права на переиздание его трудов), но предпочел, чтобы отказ шел от его имени!

Вернемся к довоенным успехам де Бройля, когда его всюду приглашали и упрашивали выступить. Знаменитый научный философ Эмиль Мейерсон после встречи с ним сказал Морису де Бройлю: «*Ваш младший брат не только научный гений, но и очень интеллигентный человек*». Со своей стороны де Бройль испытывал очень большое уважение к Мейерсону и позднее воздал ему посмертные почести [76].

Де Бройля приглашали за границу, в частности в Польшу, куда он отправился с Детушем [5] и где был встречен триумфально. Эта поездка сделала его еще большим домоседом, поскольку утомила и отвлекла от научной работы. Между тем де Бройль не отказывал себе и в путешествиях ради отдыха – в Италии он с большим удовольствием погрузился в мир произведений искусства.

Теперь де Бройль путешествовал с новым камердинером, поскольку старый добрый Николя вышел на пенсию. Помощники по хозяйству Жан и Франсуаза Бешад появились в доме ученого в 1934 году и преданно служили ему до конца жизни. Мадам Бешад писала: «*Мы сразу поняли, что появились в доме человека, который не ведет обычную для аристократа жизнь. И что наша роль заключается в освобождении его от повседневных забот, дабы он полностью мог посвятить себя науке… Его трапезы проходили в определенное время, и по возвращении с пешей прогулки он принимался записывать возникшие мысли, покрывая формулами черную доску*». Супруги Бешад занимались даже тем, что «*следили за его костюмами, покупали обувь, шляпы и приводили в порядок рубашки, избавляя его от лишних движений*» [22]. Я хорошо их знал. Вначале меня принимали в вышколенной манере, но постепенно я стал «своим». Это были люди большой внутренней культуры, всегда приветливые и обходительные. Они ясно осознавали свою скромную роль, старательно избавляя Луи де Бройля от любых бытовых хлопот. Однажды я сказал, что наука в долгу перед ними, и верные слуги были благодарны за эти слова. Вместе с сыном они жили на втором этаже дома де Бройля до конца своей жизни. Жан Бешад умер в 1983 году, а Франсуаза Бешад пережила де Бройля всего на один год.

Луи де Бройль ценил верного помощника не только как слугу. Жан Бешад не был лишен желания добиться высокого, почетного положения и уверял, что, будь он выходцем из другой среды, получил бы отличное образование. Когда кто-нибудь приезжал по домашним или нотариальным делам, Жан препровождал гостя в комнату, но затем не уходил, а безмолвно участвовал во встрече. Посетителям не раз доводилось видеть, как де Бройль, прежде чем ответить на важный вопрос, поворачивался к Жану с вопрошающим взглядом. Луи де Бройль рассказывал мне об их путешествии в Италию:

«*Спустя какое-то время после получения Нобелевской премии мои знания об Италии и итальянском искусстве стали весьма обширными, и я считал себя достаточно осведомленным. Однако путешествие происходило весьма забавным и несколько непредвиденным образом. Не я объяснял Жану то, что мы видим или с чем еще познакомимся, а он сам непрерывно об этом расска-*

зывал. В купе беседа шла прежде всего о пейзаже за окном, а так как Жан был из крестьян, то говорил о растениях, названиях деревьев и т. д. Я слушал его с большим интересом и отметил нечто забавное, что касалось широты моих собственных познаний».

ГЛАВА 8. Война, опять война. Де Бройль возвращается к своим первым идеям

По инициативе Эмиля Бореля Институт Анри Пуанкаре был мобилизован в 1939 году на укрепление национальной безопасности и преобразован в Национальный центр прикладных научных исследований. Деятельность этой организации описана Детушем [5] и Казеном [22]. По словам Детуша, усилия физиков были направлены «*на технические приложения теории электромагнитных волн, на создание первых радаров, клистронов, волноводов*» [5] и на проекты минных детекторов. Казен рассказывал в шутку [22], что Луи де Бройль отличился в этой деятельности, приближавшей его к эксперименту. Как писал Детуш, он испытывал «*инстинктивное недоверие к рационалистическим обобщениям, которые легко становились догматическими и теряли связь с реальностью*». Так, вместо абстрактной квантовой теории, которую он изложил в своей собственной книге [5], де Бройль предпочитал использовать, где это возможно, наглядную классическую теорию волноводов.

Потом произошло массовое переселение. Институт Анри Пуанкаре эвакуировали вместе с Борелем, Жаном Перреном и Луи де Бройлем на берега Луары. Все, включая библиотеку, перевезли в замок Олниер, недалеко от Блуа, с целью возобновления работ [22]. Но поражение, становившееся все более явным, заставило ученых разделиться на несколько маленьких групп, чтобы разъехаться в доступные места. В одну из таких групп вошли де Бройль, Детуш, Казен, а также Франсуаза Бешад и ее юный сын Андре, который «*путешествовал на коленях Принца*». (Жан Бешад находился в плену в Арденнах.) Машина, в которой ехал де Бройль, была заполнена книгами почти до предела, и оставалось очень мало места для личных вещей пассажиров, в том числе для его собственного багажа, но де Бройля это не волновало. Беглецы остановились в Оверне, в замке Контенсон, принадлежавшем Рошетайле (родственники жены Мориса де Бройля). Вскоре немецкое наступление догнало их.

После различных перипетий все добрались до Парижа, который де Бройль уже не покидал до конца войны. Этот факт соответствовал слуху, согласно которому де Бройль входил в состав правительства Виши. Происхождение слуха связано с его официальным назначением на время войны в Национальный совет Петена, искавшего поддержки именитых граждан. Луи де Бройль не послал отказа и предпочел вовсе не отвечать. Подобный поступок был в его духе, но в академии знали, кем он официально числился. После освобождения Франции возникло всеобщее возмущение, когда новый министр Национального образования посчитал должным отстранить Луи де Бройля от его университетских должностей. Эмиль Борель, вернувшийся из немецкого плена, даже направил членам академии послание, в котором писал:

«*Г-н Луи де Бройль имел бы право презирать это проявление произвола, которое относительно его триумфального избрания в Французскую Академию может рассматриваться как резкий ответ научного сообщества. Наивысшие университетские авторитеты заверили его в том, что справедливость вскоре восторжествует, но административная медлительность проявляется при всех режимах, и можно легко понять, что г-н Луи де Бройль будет оскорблен этой медлительностью. Он не должен быть подвергнут малейшему риску, каким бы малым он ни был, приравнен к коллаборационистам Виши, хотя бы и в течение нескольких дней*»[27].

Избрание Луи де Бройля во Французскую академию, упоминаемое Эмилем Борелем, было единогласным, как избрание маршала. Добавим, что это произошло в ноябре 1944 года во вновь освобожденном Париже, а принятие де Бройля в академию состоялось в мае 1945 года, на следующий день после заключения перемирия. Понятно, что если бы он был уличен в коллаборационизме, его бы не принял генерал де Голль, использовавший всю свою власть в борьбе против изменников Франции. Встреча произошла 15 лет спустя, когда де Голль возвратился к исполнению президентских обязанностей (точнее, когда он подписывал диплом о награждении Луи де Бройля большим крестом Почетного легиона).

Напомнить об этой истории я решил потому, что недобрый слух не заглох окончательно. А еще потому, что для некоторых университетских кругов аристократы всегда являются немного «коллабо» (тем хуже для Эстьена д'Орва). Слишком привлекала идея приклеить этот ярлык и Луи де Бройлю, «*так как нет более пошлого злословия, более омерзительного и абсурдного вздора, которые бы не были приняты праздной публикой большого города*». В случае с де Бройлем таким большим городом оказалось научное сообщество. Относительно недавно, в 1990 году, в книге «*Республика ученых*» по поводу Лаборатории космических исследований, созданной во время войны, было заявлено, что Лепринса-Ринге «*поддержал Луи де Бройль, администратор CNRS*[28]*, близкий к маршалу Петену*».

Луи де Бройль страдал от подобных выпадов, но никогда не опускался до защиты от ложных обвинений. Он мог легко опровергнуть все домыслы, и не было большего французского патриота (хотя даже это сейчас не принято произносить), но он никогда не вступал в полемику.

---

[27] Этот циркуляр, как и письмо, написанное от руки Эмилем Борелем Луи де Бройлю и датированное 2 ноября 1944 года, находится в фонде среди личных архивов Луи де Бройля, переданных его наследниками.

[28] Национальный центр научных исследований (*Прим. пер.*).

Итак, во время войны де Бройль оставался в Париже, или скорее в Нейли (вдали от «маршала», пусть успокоятся), оставив свой дом в Сен-Жермене. И началась «ночь оккупации» с ее вереницей лишений. Жан Бешад томился в немецком плену. Дом в Нейли отапливался плохо, хоть сюда и привозили дрова (из леса Шантийи, собственности Института Франции). Зимой де Бройль трудился в комнате, заходя в опустевший ледяной кабинет только в пальто и лишь для того, чтобы взять или оставить книгу. Общественный транспорт работал с перебоями. До Института Анри Пуанкаре приходилось добираться пешком. Де Бройль поступал так и после войны, во время забастовок работников метро. Неутомимый пешеход преодолевал девять километров без устали: вышагивая их, он погружался в размышления, возвращаясь к действительности только на перекрестке, чтобы оглядеться и перейти улицу.

Война не стала большой помехой для деятельности Луи де Бройля, хотя Институт Анри Пуанкаре работал не в полную силу. В 1942 году де Бройль согласился, правда, неохотно, быть избранным непременным секретарем Академии наук. Он сменил Эмиля Пикара и плодотворно трудился на этом посту до 1975 года.

В Париже, стараясь не привлекать к себе особого внимания, де Бройль сохранял интеллектуальное превосходство, но предпочитал не заглядывать в будущее. Он всегда стремился быть в курсе событий, особенно в сложное время, но не приближался к власти ни слева ни справа. Де Бройль не подписывал никаких петиций, и если надо было занять какую-то позицию, то руководствовался лишь моральными принципами. Произошедшее с ним во время войны подтверждает это.

Он рассказал, что однажды во время оккупации получил карточку с приглашением на лекцию Карла Фридриха фон Вейцзеккера в Париже. Этот известный физик и философ был близким другом Гейзенберга. Луи де Бройль решил, что, конечно, неприлично отправляться на мероприятие, проходившее под эгидой оккупантов, и оставил приглашение без ответа (опять молчание). Но каково же было удивление де Бройля, когда через несколько дней после лекции он увидел Вейцзеккера, который сам пришел на встречу и терпеливо ожидал его после лекций в Институте Анри Пуанкаре. «*На этот раз,* – сказал он, – *я был у себя, в моем институте. Ничто не мешало мне радушно принять человека, которого я достаточно хорошо знал и которого уважал*». В беседе с гостем де Бройль произнес двусмысленную фразу: «*Я получил приглашение на вашу лекцию и благодарю вас, но, к сожалению, не смог присутствовать*». Вот что ответил Вейцзеккер: «*Нет, не говорите, что не могли, лучше скажите, что не хотели. Но я пришел сказать: я вас понимаю*». Через десять лет де Бройль с удовольствием прочитал статью Вейцзеккера в книге, посвященной своему юбилею [41].

Другой случай касался Анри Бергсона, и рассказ Луи де Бройля дал мне возможность оценить миф о его приверженности к бергсонизму. На самом деле, когда их имена увязывали вместе, де Бройль скорее огорчался. Он поведал, что в юности действительно посещал несколько лекций Бергсона в Коллеж де Франс и покупал его книги, но это продолжалось недолго. Своей репутацией бергсониста он был обязан речи, которую произнес после смерти знаменитого философа в 1941 году [62]. Поскольку произведения Бергсона были связаны с наукой, то к де Бройлю обратились с просьбой выступить во время прощальной панихиды.

«*Не будучи расположенным к его идеям,* – сказал он мне, – *я растерялся, но Бергсон был евреем, а мы находились под оккупацией. Поэтому я не мог отказаться, это было бы плохо истолковано. Но в посмертном отдании почестей нельзя допускать критических высказываний. И я произнес хвалебные слова, как того требовали обстоятельства. В результате появился вымысел, но я ничего не мог поделать и никогда его не опровергал*».

Как всегда, де Бройль предпочел хранить молчание и отказался от защиты, считая ситуацию маловажной. Однако я не вижу необходимости скрывать историю, которая делает честь Луи де Бройлю. И еще важно отметить: он позволил себе в речи о Бергсоне слегка завуалированную, но суровую критику, которую никто не хотел слышать.

«*В книгах Бергсона,* – говорил он, – *немало блестящих мыслей, которые при размышлении оказываются хрупкими и парадоксально преувеличенными. Многие взгляды, требующие солидных доказательств, опираются на несколько красивых, но неточных образов. Они прорисованы в замечательном стиле, который иногда скрывает за красотой формы слабость аргументации*» [62].

Идею бергсонизма де Бройля долгое время развивал Фойер, в частности в любопытной книге «*Эйнштейн и поколение науки*» [86]. Однако сам автор привел следующие слова из письма де Бройля: «*Если некоторые из его идей меня и интересовали, то я их вовсе не разделял с автором*». В другом месте Фойер признавал, что речь идет лишь о непрямом влиянии, но и это утверждение бездоказательно. Несмотря на столь рискованное заявление, 40 страниц, посвященных де Бройлю, представляют определенный интерес, и я хотел бы сделать замечание. Книга Фойера, которая касается Эйнштейна, имеет три точки отсчета: Бор, Гейзенберг и де Бройль. Он говорит о них с одинаковым восхищением и посвящает им одну главу. Но она была изъята из французского перевода [87]. Вследствие этого читатель теряется в догадках: почему в предисловии Московичи (которое соответствует оригинальному тексту) и во введении Фойера говорится о де Бройле, как будто речь о нем пойдет и в книге, а в переводе эти места отсутствуют? Конечно, материал о Гейзенберге также изъят, но это ложная симметрия, поскольку часть главы, посвященная Бору, избежала вымарывания, ее приводят в приложении. Отметим, что книга была переведена на японский язык в полном объеме, и глава, о которой мы говорим, в ней имеется. *Только во французском переводе изъята похвала величайшему французскому физику века!*

Рассмотрим теперь работы де Бройля во время войны и в ближайшие послевоенные годы. Прежде всего он продолжал разрабатывать теорию света и в 1940 и 1942 годах опубликовал свой главный труд «*Новая теория света*» [71].

Через год появилась «*Общая теория частиц со спином*» [72]. Наконец, в 1949-м вышла в свет «*Волновая механика фотона и квантовая теория полей*» [73]. Надо отметить, что эта волновая механика фотона все же отличается своей методологией обращения с идеями Бора, к которым, по его заявлению, он примкнул. Его концепция света базируется на модели в обычном физическом пространстве. Единственное, что он заимствовал из ортодоксальной теории, так это язык современной квантовой механики.

В действительности такой подход свойственен всем физикам, которые не строят физику на принципе дополнительности, являющемся всего лишь интерпретирующим рассуждением. Все физики применяют квантовую механику одним и тем же способом, и истинное влияние философского облака, окружающего ее, состоит в исключении из рассмотрения некоторых вопросов: механизма индивидуальных квантовых переходов, локализации частицы, детерминизма и особенно проблемы *скрытых параметров.* Заметим по этому поводу, что хотя теория света де Бройля была теорией со скрытыми параметрами (так как нейтринная структура фотона не была экспериментально доказана), она не вызывала никакого протеста, и нам интересно понять почему.

Как сказано в главе 2, в физике всегда используются скрытые параметры, и большинство ученых принимают это без затруднений, поскольку в такой форме часто вводятся новые гипотезы. И мало физиков в принципе отказываются от этого допущения. Но таковы, например, некоторые термодинамики XIX века или Бор, отвергавший скрытые параметры с таким постоянством, что даже допускал, из-за критики Лоренцем, что простое присутствие в расчетах Гейзенберга ненаблюдаемых фаз – это слабость теории [57]. Вообще-то, скрытые параметры встречают сильную оппозицию, только когда они ставят под сомнение правильность существующих теорий. Это было верным для атомных параметров в XIX веке и для параметров, характеризующих положение частицы, введенных де Бройлем в 1927 году, поскольку эти параметры были *классическими и детерминистскими* и, следовательно, чуждыми квантовой схеме. Напротив, в его теории света параметры, описывавшие нейтрино, были квантовыми и не ставили под вопрос правильность самих оснований теории, поэтому не были встречены враждебно.

В это время настоящее различие между де Бройлем и другими физиками-квантистами состояло в том, что он был моделистом, тогда как другие в большинстве своем являлись формалистами. И хотя он был способен на глубокие рассуждения по поводу законов симметрии (особенно в теории относительности), он рассматривал их как следствие более конкретных законов и не делал из них базу своего рассуждения, как делают в современной теории элементарных частиц и как это уже было в случае Гейзенберга, Дирака и Паули. Действительно, эволюция представлений в XX веке, в которой де Бройль не принимал участия, привела к рождению в квантовой механике и в теории относительности *физической интуиции второго порядка,* которая не приложима к самим физическим объектам, но весьма плодотворна применительно к математическим объектам. Физические объекты представляются через математические в абстрактных пространствах или в законах симметрии, которым объекты подчиняются. Эти законы соответствуют реальным физическим свойствам, но не всегда имеют чувственное выражение в нашем обычном физическом пространстве. Я долго описывал в [50] этот тип абстрактного геометрического демарша и не скрываю своей приверженности к нему. Однако сам де Бройль относился к нему с недоверием, даже когда восхищался его результатами, так как был приверженцем моделей, а не формализма. Он понимал формализм, только смоделировав скрывающийся за ним мир для объяснения результатов, полученных абстрактными рассуждениями. В этом смысле он был атомистом. Понять для него означало найти за видимостью вещей более тонкий закон. Он чувствовал себя непринужденно в своей теории света потому, что его первоначальная модель сохраняла инициативу поиска и возможность развития. Другие физики, будучи большими формалистами, как Паули, приняли то, что они нашли в *представлениях групп Лоренца*, но только после того, как формализм уже был подчинен модели.

Де Бройль часто размышлял о соотношении *абстрактных теорий и конкретных представлений в современной физике* и в статье с аналогичным названием, опубликованной в его ортодоксальную эпоху, сделал сильный акцент на преимуществах абстрактных теорий [14]. Позднее он вернулся к этому вопросу, утверждая, напротив, что «*конкретное представление физической реальности в рамках пространства и времени с причинной связью было в основе всего прогресса современной науки…*» [8]. Сожалея об отбрасывании таких представлений в микрофизике, он заключал: «*Будущее физики может действительно оказаться в опасности, если она станет довольствоваться чистым формализмом, расплывчатыми образами и полностью словесными объяснениями, используя слова с неточными значениями*» [8]. Эпитеты «расплывчатые» и «неточные», очевидно, относились к принципу дополнительности.

Между тем де Бройль еще заявлял о своей приверженности к идеям Бора, в частности когда вспоминал о своем присоединении к школе Копенгагена [62]: «*Тот, кто выдвигает фундаментальные идеи новой доктрины, никогда не предвидит с первого подхода все последствия: руководствуясь своей интуицией, подталкиваемый внутренней силой математических аналогий, он вступает, почти против своей воли, на путь, не зная, куда тот его заведет… Понемногу он замечает, что этот путь приводит его к первоначально непредвиденным интерпретациям, в которых он убеждается настолько, что затем с трудом пытается выйти за их рамки*» [62]. Вспоминая свои «*бесплодные попытки* [двойное решение и волну-пилот] *для интерпретации принципов новой доктрины без разрушения основ, навсегда установленных…*», он признался, что они «*доставляли много мучений*» и «*заставляли терять много времени*». «*Тем не менее,* – заключил он, – *я не сожалею об этом. Они позволили мне лучше разглядеть глубокие причины, из-за которых принятие столь удивительных на первый взгляд идей Бора* *и Гейзенберга стало необходимостью, вызванной самим существованием экспериментальных фактов, которые микроскопическая физика должна была учитывать*» [62].

Оракул был бы удивлен, если бы ему предсказали, что через пять лет он станет отрицать вышесказанное. Однако по некоторым признакам уже можно было определить начало кризиса и последующие направления работ этой эпохи, которая стала для него очень плодотворной, несмотря на войну. С 1941 по 1951 год он написал 13 книг и 31 оригинальную работу. Но, прежде чем приступить к разговору о них, мы должны уточнить одну из черт его личности.

Обычно де Бройль не являлся «разрешителем» проблем и разгадывал немногие из многочисленных загадок, вызывавших повседневную головную боль у физиков. Речь идет только о крупных проектах, в рамках которых он предпринимал усилия для расчетов. На мой взгляд, в этом его можно сравнить с Планком или Бором. Их гений, как и талант де Бройля, заключался в другом, но, подобно ему, эти ученые умели производить необходимые вычисления. В конце концов, физики редко превосходят уровень более или менее хороших компьютеров. Даже Эйнштейн, Гейзенберг или Паули – лучшие аналитики, чем Планк, Бор или де Бройль, – были прежде всего физиками и не блистали гениальностью математических расчетов. Специалисты по математике, напротив, обладали высшей изобретательностью, общностью концепций, способностью к созданию новых математических образов и распознанию в проблеме ее фундаментальной значимости и новых взглядов, которые она открывает. Но оговоримся, что все это относится и к физикам. Различны только области, в которых проявляется гений. Разве Ньютон не был велик в этих обеих областях одновременно? Не забудем, что решение уравнения Шредингера было дано Вейлем (один из величайших математиков века), и что математическую структуру квантовой механики создал фон Нейман (другой великий математик), и что Эйнштейн в своей теории относительности постоянно прибегал к помощи математиков. Де Бройль, конечно, умел использовать математику, когда ему это было необходимо, но не устраивал при этом состязаний. Я слышал, как он произносил с легкой усмешкой: «*Г-н Унтель является таким аналитиком…* [после короткого молчания] *который сошел бы за блестящего математика*».

Вернемся снова к работам военного времени. Они поражают многочисленностью рассматриваемых задач, отсутствием большого замысла. В течение десяти лет он работал над проблемами фотона, частиц со спином, атомного ядра, волноводов, электронной оптики, адиабатических инвариантов, релятивистских изменений температуры, схем квантовой вероятности, фазовой волны, собственной частоты электрона, измерения спина, термодинамических аспектов механики и электродинамики, квантовой теории полей… Из этого нескончаемого списка можно выделить несколько главных направлений.

Некоторые из его работ по волноводам и электронной оптике относятся к прикладной физике. С 1941 года де Бройль опубликовал теоретическую часть (которая могла появиться при оккупации) работ, выполненных в целях национальной обороны по управляемым электромагнитным волнам [84]. Этот труд длительное время пользовался успехом и актуален до сих пор. Он усеян замечаниями о фундаментальных проблемах, одной из которых является принцип Гюйгенса (ему посвящена важная глава). Позже по инициативе двух своих учеников, Шансона и Маньяна, он написал серию работ по электронной микроскопии, которые были изложены в лекциях 1946–1947 годов, а затем в ставшей классической книге [85]. Он мог блистать только в области, связанной напрямую с его диссертацией. Как и труд по волноводам, эта книга содержит важные теоретические замечания.

Теперь рассмотрим его теоретические работы. Теория света (фотона) с ее продолжениями (частицы со спином) была в основном завершена, и де Бройль собрал воедино все свои результаты и выводы своих сотрудников, опубликовав их в уже упомянутых книгах. Можно сказать, что он исполнил мечту юности: установил в своей диссертации связь между материей и светом, описал электрон на языке дуализма фотона Эйнштейна и стремился замкнуть виток, описав фотон на языке волновой механики. Реализация этого проекта привела его в состояние интеллектуальной праздности. На что еще он мог бы обратить свой взор? Единственным проектом, достойным высоты его амбиций, был переход из физики атома (физика электрона) в физику ядра. Именно с этого он и начал, изложив в трех томах теорию атомного ядра (в период с 1943 по 1946 год). Она явилась примером ясного и наглядного анализа большого числа физических явлений, что, однако, не привело к действительно новым результатам. Удовлетворенный существующими теориями, он признал, что не смог бы добиться лучшего. Сегодня теория ядра далека по своему уровню от теории электрона[29], но уже тогда у де Бройля зародилось сомнение в возможности квантовой механики разрешить эту проблему. Настоящее затруднение возникло в 1949 году, когда он попытался атаковать проблему «бесконечностей» в квантовой теории поля, которую до сих пор нельзя считать окончательно решенной. Он бился над ней два года, и это вызвало у него отвращение. Блуждания вокруг трудностей в основании квантовой механики объясняют появление новых тем исследований, часть из которых выглядит как отступление, а другие – как робкие попытки развития новых направлений. Их можно разбить на две группы.

К первой группе относится возврат к истокам волновой механики и даже к теории квантов вообще. Сюда входят работы, которые де Бройль должен будет развивать позже: по термодинамике, собственной частоте электрона, фазовой волне, классической механике и теории относительности. Центральная роль отведена здесь термодинамике, которая у Планка и Эйнштейна лежала

[29] Несмотря на гениальные идеи и практическое использование ядерной энергии, ядерная физика сильно отстает от физики электрона. Ядерные силы плохо описаны, и наиболее простые ядерные образования, например дейтрон (состоит из нейтрона и протона), далеко не так же просты в понимании, как атом водорода.

в основании теории квантов и которую де Бройль долго изучал. Он вернулся к ней в этот период, развивая старую идею термодинамики XIX века, так же как он обращался к идеям Гамильтона, занимаясь волновой механикой.

Я думаю, что новая гипотеза, которую де Бройль для этого выдвинул, так же гениальна, как и волновая механика, хотя еще и не завершена. Но 50 лет не такой долгий срок для великой идеи. Попробуем рассказать о ней.

Вспомним о частоте внутренних колебаний, связанной с любым материальным элементом, из чего следовала идея волны. Впоследствии она исчезла из волновой механики, и сам де Бройль больше о ней не говорил. Известно, что отказ от этой частоты был связан с ее релятивистским изменением, которое было неудовлетворительным. Де Бройлю нужна была частота, которая увеличивалась бы со скоростью аналогично энергии, тогда как она уменьшалась подобно частоте хода часов, – возникла идея о волне, частота которой имеет нужные свойства. Этой проблемой де Бройль вновь занялся в 1945 году. Он начал с изучения работ Гельмгольца и Больцмана по термодинамике и проанализировал одну формулу Больцмана. Она касалась того, что Эренфест позже назвал *адиабатическими инвариантами*, то есть такими механическими величинами, которые сохраняются во время движения (например, энергия) и продолжают сохраняться, если *медленно* менять один из параметров системы. Примером этому является *глиссандо* у виолончелиста: его палец, скользя по струне (положение пальца при этом является медленно меняющимся параметром), меняет при этом частоту ноты и энергию колебаний (которая зависит от амплитуды), но оставляет постоянным отношение энергии к частоте, которое и является адиабатическим вариантом. Больцман показал, что если это отношение меняется, то произведение его изменения на частоту ноты подобно обмену теплом между струной и окружающей средой. В нашем примере из-за медленного скольжения пальца по струне (скорость скольжения зависит от частоты колебаний) частота меняется *адиабатически*, то есть без обмена теплотой. Результат Больцмана применим к любому периодическому процессу, но отношение «энергии к частоте» обобщается интегралом действия Мопертюи, роль которого в разработке волновой механики мы уже отмечали.

Параллельно с проблемой Больцмана де Бройль воскресил другой сложный вопрос – релятивистское изменение термодинамических величин, изученное в начале века Планком, Эйнштейном и Лауэ. В частности, они показали, что энтропия не меняется для движущегося наблюдателя, но температура и количество теплоты *сокращаются* так же, как частота хода часов. Этот подход подсказал де Бройлю новую аналогию. С одной стороны, обмен теплотой может представляться в термодинамике произведением температуры на изменение энтропии. С другой стороны, в подходе Больцмана обмен теплотой выражается произведением частоты на изменение интеграла Мопертюи, которое, как и энтропия, является адиабатическим инвариантом. Но частота Больцмана – это внутренняя частота того же типа, что и частота хода часов, и, таким образом, она меняется по тому же закону, что и температура. Исходя из этого факта, он выдвинул идею (1945) рассматривать электрон как систему Больцмана, уподобляя *внутреннюю частоту де Бройля температуре.* Де Бройль уже предвидел эту аналогию в 1921 году, когда воображал тепловую машину, использовавшую в качестве рабочего тела излучение, в которой роль температуры играла бы частота излучения (см. главу 3 и [31]). Что касается изменения энтропии, он уподобил ее изменению интеграла действия, сопровождающегося изменением частоты. Все это де Бройль высказал с осторожностью и развил лишь через 15 лет в книге «*Термодинамика изолированной частицы*». Это типичный пример его научного демарша: *ключом физической мысли была аналогия, а пробным камнем аналогии являлась теория относительности.* Вот что он говорил на лекции при открытии своего курса в 1948 году:

«*Аналогии часто имеют глубокое значение и могут с пользой служить руководством теоретику для рождения новых идей. Необходимо ли напоминать о роли, которую аналогия сил инерции и сил гравитации сыграла в генезисе общей теории относительности или аналогия принципа Ферма и принципа Мопертюи в генезисе волновой механики? Аналогии между энтропией и действием, между температурой и частотой до сих пор не привели к прогрессу наших теоретических концепций, однако они существуют и, может быть, однажды сыграют большую роль в развитии теоретической физики*».

Будучи не до конца уверенным в своей идее, де Бройль не стал издавать курс, и только гораздо позднее он дал мне разрешение на его публикацию Фондом Луи де Бройля [88].

Такой была сущность первой группы работ военного и послевоенного времени. Параллельно этому возврату к истокам теории квантов он предпринял новый критический анализ квантовой механики в ее ортодоксальной форме. Это была вторая группа работ. Часть ее составляли исследования де Бройля по атомному ядру и бесконечностям в квантовой теории поля, но более интересными являются его изыскания по *измерению спина* и по *квантово-вероятностной схеме.*

Под измерением спина подразумевается прямое измерение (которое не выводится из другого эффекта) собственной намагниченности такой частицы, как электрон. Рассуждения Бора и Паули приводили к невозможности такого измерения при прямолинейной или чуть искривленной траектории движения электрона (классическая траектория). Это один из обычных *запретов* квантовой механики, против которых возражал Эйнштейн. И вот теперь де Бройль, до этого тихоня и образец благонравия, высказался против этого утверждения ортодоксальных идей. Он переосмыслил уравнение Дирака и показал на примере достаточно сложных вычислений, что отрицательное заключение Паули зиждилось на слишком простой модели, нуждавшейся в замене более совершенной моделью, и ее он заимствовал у Вейссенхоффа (1947). Он показал, что измерение спина затруднено лишь по техническим причинам и не является в принципе невозможным. Он посвятил этой проблеме небольшой труд [83], который начинается с изложения теории Дирака и дополняет книгу «*Магнитный электрон*» [67]. Эта проблема знаменует собой важный этап в эволюции состояния духа де Бройля: впервые после 1927 года он успешно выступил против слишком негативного заключения, к которому были причастны Бор и Паули, возможно, из-за предубеждения в пользу «неопределенностей».

В менее осуждающем тоне отмечается некоторого рода «идеологическая эмансипация» или по крайней мере осознание некоторых трудностей теории в работах того же времени по статистической схеме вероятностной интерпретации волновой механики [89]. Речь идет о статистиках, которые управляют предсказаниями результатов измерений в квантовой механике и обладают особенностями относительно соотношений Гейзенберга, связанными с невозможностью одновременного измерения некоторых величин. Различие между этими и обычными статистиками легко иллюстрируется следующим образом. Обычно можно определить вероятность вытащить карту одновременно с двумя характеристиками: числом и мастью, к примеру десятку червей. Напротив, в квантовой теории не существует вероятности найти частицу, которая находилась бы *одновременно* в определенном месте и двигались бы с определенной скоростью, так как эти величины неизмеримы одновременно.

Я считаю, что в этой работе впервые систематически проанализировано различие между классическими и квантовыми вероятностными схемами. Анализ был представлен в строгой, но простой форме. Позднее, когда этот вопрос стал модным, он значительно усложнился, но не привнес новизны, так как его основа уже была установлена статьей де Бройля. Квантовая вероятностная схема понималась в том смысле, что вероятности касались только *предсказаний* измерений, хотя на самом деле они приводили к постановке вопроса о том, что *предшествовало* измерению. Невозможны одновременные *измерения* положения и скорости или же невозможно их одновременное *существование?* В первом случае эта аппаратурная несовместимость может быть временной, связанной с используемыми физическими свойствами, во втором случае это связано с индетерминизмом. По правде говоря, я обращаю особое внимание на новаторский и поначалу всерьез не принятый взгляд де Бройля, касающийся данной тематики, только потому, что в дальнейшем она станет насущной и весьма актуальной. По этой причине через 30 лет де Бройль отобрал статью для публикации в сборнике «*Полувековые исследования*» [90].

В данной дискуссии проявилась разница между ним и Бором. Для Бора вся истина содержалась в том, что измеряют. Величина имеет право упоминаться, если только она наблюдаема. Квантовая теория является теорией измерения, а соотношения неопределенностей – соотношениями индетерминизма, так как величины, которые невозможно измерить, не могут более существовать. Напротив, де Бройль отличает параметры, которые могут существовать, от тех, которые мы измеряем. То, что существует до наблюдения и может оставаться временно скрытым, не обязано подчиняться тем же статистическим законам, что и предсказания результатов измерения, а может быть подвластно классической вероятностной схеме, которая соответствует пока еще гипотетическим объектам. Таким образом, должно существовать два вероятностных закона: *скрытых вероятностей* классического типа для описания мира таким, каким он представляется до измерения, и *предсказуемых вероятностей*, подчиняющихся квантовой схеме, для предсказания результатов измерения. Скрытые вероятности описывают не распределение величин измеряемых параметров физической системы, а только распределение их значений до наблюдения. Распределения величин до и после измерения могут быть различными. Вообще говоря, только положение частиц будет тем же самым, так как его измерение является регистрацией фактического состояния. Но измеренная скорость будет отличаться от ее предшествующего значения, поскольку само ее измерение требует создания новых условий. Соотношения неопределенностей не являются больше синонимом неопределимости. Например, они не касаются мира, какой он есть, но касаются того мира, каким мы его видим или каким он будет казаться после проведения измерений.

Эти идеи появятся в работах де Бройля только через три года. А пока он демонстрирует свою ортодоксальную верность, но с каждым днем ставит все новые вопросы, собирая их в курсе лекций, растянутом с 1950 по 1952 год, под названием «*Неопределенности Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики*» [91]. Этот курс знаменует собой разворот его мысли. Позднее де Бройль напишет:

«*Мои курсы 1950–1951 и 1951–1952 годов очень интересны тем, что в первом я был еще полным ортодоксом, а во втором начал вводить некоторые концепции, полностью отличающиеся от моей прежней теории волны-пилота, что указывает на некоторую тенденцию возврата к моим первоначальным идеям*».

Не принято рекомендовать физикам читать эту книгу, которая одновременно содержит наиболее полное и глубокое изложение принципов квантовой механики в ортодоксальном виде и критику этих же принципов самим автором. Позже де Бройль тщательно проанализирует свои замечания и будет их записывать в течение нескольких лет на полях рукописи и на карточках, вложенных между ее страницами. Вот почему книга, ее текст и критические замечания опубликованы лишь 30 годами позднее. Таким образом, с одной стороны, по этой монографии можно изучать квантовую механику в ее ортодоксальном виде, но с другой – это научное сочинение, которое помимо обычного дидактического изложения содержит на втором уровне вопросы о справедливости и физическом значении формул, а также рассмотрение вытекающих из них следствий. На первом уровне изложен сам текст, в котором де Бройль старается узаконить положения ортодоксальной теории, несмотря на некоторые вскрытые им трудности. Второй уровень представляет собой замечания, в которых он критикует саму теорию и некоторые из своих предыдущих комментариев.

Не существует в научной литературе более тщательного анализа соотношений неопределенностей Гейзенберга. В нем все вопросы излагаются на различных примерах, с приведением мнений разных авторов по этим вопросам и именно в том виде, в котором они им представляются, со всеми нюансами их интерпретаций. В книге также приведен анализ и ход мыслей Гейзенберга и Бора с добавлением тех же исследований самого де Бройля. В первой части работы словно сквозь сито просеиваются главные трудности теории, такие как *редукция пакета вероятностей, размывание фазы* измерением и «*следствия исчезновения понятия траектории*», в существование которой автор еще верит. Он приводит знаменитый спор между Эйнштейном и Бором, касающийся интерпретации квантовой механики, но становится на сторону Бора. Во второй части де Бройль в деталях излагает некоторое число проблем, связанных с вычислением вероятностей в квантовой механике, и заканчивает ее замечательной главой об особенной роли времени. Но бравурный отрывок является последним ответом на прошлые сомнения по поводу теории измерений и скрытых параметров.

Как сказано выше, де Бройль вернулся к теории волны-пилота. Он вновь рассмотрел этот вопрос, но ответил на него отрицательно, изучив возражения 1927 года и согласившись с тем, что в основном они были справедливы. Лишь одно из них было неправильным. В этом возражении указывалось, что детерминизм волны-пилота противоречит соотношениям Гейзенберга, но позднее он покажет: эти соотношения имеют место из-за того, что значения некоторых величин различны, так как их берут до и после измерения. Он никогда не исследовал вопрос измерений применительно к своим собственным идеям потому, что эта теория начала развиваться в квантовой механике только после 1927 года, когда он уже оставил свою попытку интерпретации. Таким образом, он задумывался над этим, только исходя из идей копенгагенской школы. Несомненно, по этой причине он находился под впечатлением знаменитой *теоремы фон Неймана,* претендовавшей на доказательство невозможности интерпретации вероятностных законов квантовой механики существованием детерминистских скрытых параметров (аналогично тому, как атомы индивидуально подчиняются законам классической механики, а коллективно – статическим газовым законам).

Эта теорема является философской экстравагантностью, поскольку она означает, что одна теория может доказать отсутствие существования более тонкой теории, чем она. Если бы она оказалась верной, то в этом случае наука была бы способна наметить свои собственные пределы! (Знакомый дух ортодоксальной квантовой механики и ее желание облечься в окончательные истины.) Эта идеология присуща прошлому веку, в частности, марксизму, для которого двигателем истории была классовая борьба, приводившая к коммунизму (раньше задавались вопросом, что было бы дальше, но теперь это уже известно); это также соответствовало духу психоанализа, объяснявшего все поступки человека сексуальностью, или же «бурбакизму», сводившему математику к структурам.

Интересно, как де Бройль мог попасть под влияние теоремы фон Неймана [62, 91], столь противоположной его идеям? Вероятно, это влияние духа копенгагенской школы. Но имеются и извиняющие обстоятельства. Яркая теорема великого математика фон Неймана являла собой достижение теории измерений и статистических смесей в квантовой механике, результаты которых к тому же представляли огромный интерес. И, надо признать, никто в течение 25 лет не мог оспорить теорему: ни Бор и его школа, для которых она была интересна по-своему, ни Эйнштейн со Шредингером, способные, однако, отыскать слабые места в противоречащем им суждении.

В своем курсе лекций де Бройль излагал теорему фон Неймана и соглашался с ее заключениями [91]. Однако отметил и ложность этого утверждения в своем выступлении в Институте Анри Пуанкаре. Он заметил, что его собственная теория волны-пилота даже в несовершенном виде представляет контрпример, ибо она существовала, хотя не имела на это «права». Он спрашивал себя, почему она не подпадает под удар теоремы. Фон Нейман предполагал, что скрытые параметры подчиняются квантовым вероятностным законам, чего, вообще говоря, может и не быть, и поэтому теорема не относится к волне-пилоту. Засомневавшись, он вставил в свои записи замечание[30].

Его попытка может показаться бесплодной, как в случае со многими известными физиками, которые долгое время работали со скрытыми параметрами, так и не познав их истинную природу. Для де Бройля, напротив, это замечание стало началом всего. В результате внутренней работы он вновь обрел свободу мышления, а с ней и способность разрешать затруднения, на которые раньше закрывал глаза. Как только это произошло, он взялся за переработку рукописи своего курса, легко подбирая слова, смягчающие его выражения или меняющие фразу, и вкладывая карточки, на которых он записывал нечто противоположное утверждениям в тексте. Эти карточки содержали значительную часть идей, над которыми он будет работать с учениками до конца своей жизни. В то время я был слишком молод, чтобы присутствовать на лекциях Луи де Бройля. а он их не публиковал. Я обнаружил их в конце 1970-х годов, когда он подарил мне рукопись вместе с другими неизданными текстами. Мне удалось уговорить де Бройля на публикацию в сотрудничестве с Динером и Фаргом [91]. Курс издали в оригинальной версии с последующими поправками и примечаниями де Бройля. По его просьбе были добавлены замечания, а также предисловие с историческим обзором его работ. Труд переведен на русский и английский языки.

---

[30] «Само существование теории волны-пилота указывает на слабое место в рассуждениях фон Неймана. Действительно, теория волны-пилота позволяет дать причинную интерпретацию законам волновой механики, вероятностный характер может быть обусловлен существованием скрытых параметров. Таким образом, несмотря на трудности, связанные с описанием вводимых в теорию скрытых параметров, они в реальности могут существовать вопреки претензиям фон Неймана на их полный запрет…» [91].

Личная эволюция де Бройля происходила параллельно с зарождением кризиса. Ряд физиков осознавали: в квантовой физике что-то не так и Эйнштейн, возможно, был прав. Но этот вывод противоречил не только квантовой механике вообще, но и послевоенному состоянию духа физики.

Как раз в это время произошло упомянутое в главе 6 открытие *эффекта Лэмба*, которое наделало много шума. Появление первого, хотя и минимального расхождения между экспериментом и теорией электрона Дирака явилось само по себе событием. Это был экспериментальный подвиг, основанный на физике радара, и первый большой успех квантовой теории поля. Данное открытие было расценено как появление у квантовой механики второго дыхания, и на авансцену вышло новое поколение теоретиков, среди которых наиболее знаменитыми были Фейнман, Томонага и Швингер.

В научном мире по окончании войны царил энтузиазм, подпитываемый развитием применения ядерной физики, рождением физики частиц, построением первых больших ускорителей и молниеносным прорывом квантовой теории поля. С учетом этого, менее всего были уместны вопросы де Бройля о смысле и будущем квантовой механики.

Его не впечатлили недавние победы теории, и он обратился к прежним вопросам. Оказалось, как ни парадоксально, что именно они являлись главными ветвями новой физики теории поля или физики ядра, и это пробудило в нем подозрения. По этому поводу де Бройль рассказал мне: когда квантовая теория стала одерживать успехи, это вызвало всеобщее изумление и физики не могли поверить в следовавшие одно за другим доказательства своих эвристических способностей, которые, казалось, творили чудеса. С каждым новым смелым ударом ученые убеждали друг друга: «*Теперь-то уж слишком*», но всякий раз результат был хорош. И при удачной развязке, если приходили к введению новых принципов, общая теория не подвергалась изменениям. Можно было ценить теорию или быть огорченным ее формальным, мало описательным аспектом, но она имела свою внутреннюю, самосогласованную логику. Первые тяготы, своего рода чувство опасности появились вместе с теорией ядра, и одновременно с этим начались первые проколы в квантовой теории поля, успехи которой сопровождались серьезными трудностями, знаменитыми «бесконечностями».

Большинство теоретиков, особенно молодых, с энтузиазмом продвигались вперед, опуская различные нестыковки. Другие отказывались от вольности некоторых расчетов, видя в этом признаки грозы. Так было в случае с де Бройлем, который, как и все, использовал понятия теории поля и писал работы по ее вопросам, хорошо владея темой. Он считал эти трудности временными и поднимал общие проблемы дуализма волн и корпускул, поскольку хорошо знал, что эти проблемы далеки от разрешения. К тому же он полагал, что не одна квантовая теория виновата в этих трудностях: их корни уходят глубоко, ко времени появления теории электронов Лоренца.

Мы уже говорили, что Дирак, один из инициаторов квантовой теории поля, имел мнение, близкое к мнению де Бройля. Он отказался включить эффект Лэмба в переиздание своего труда по квантовой механике [93] и до конца жизни полагал, что предложенная теория была неудовлетворительна по причине математических неувязок и недостойна находиться в его трудах, используемых молодыми теоретиками.

«*В настоящее время я не согласен в этом пункте,* – писал он, – *с большинством физиков. Я не могу допускать отклонений от обычных математических правил*» [68].

Можно было бы принять это за реакцию нескольких умудренных опытом физиков, но похожим образом реагировали и молодые теоретики, которые «перестали понимать» квантовую механику и начали задаваться вопросом, что же представляет собой ее абстрактный формализм. Наиболее блестящим из них был Дэвид Бом, преподававший квантовую механику в Принстонском университете в 1947 и 1948 годах. Он подверг теорию суровой критике и в 1951 году опубликовал со своими учениками работу [94], в которой изложил теорию без охлаждающей аксиоматики, в простых математических терминах, идущих от конкретного к абстрактному и сохраняющих, насколько возможно, образный и яркий язык классической механики. Книга имела успех. Дэвид Бом обладал большей прямотой и практичностью, но меньшей глубиной взглядов, чем у де Бройля (правда, Бом был на 30 лет моложе). В прикладной, заключительной части книги, в три раза превосходившей по объему первую, вводную часть, он описывал многочисленные явления, давал точную теорию экспериментов, обычно представляемых в абстрактной форме, и, в частности, описал то, что происходит в экспериментальной установке в процессе измерения. Книга была ортодоксальной, но с Бомом произошла та же эволюция, что и с де Бройлем, и после прочтения им собственного курса лекций в том же году. В конце учебного года он пришел к выводу, что теория его не удовлетворяет, и со следующего года предложил ее новую интерпретацию, в которую вновь ввел понятие траектории для частиц. Дэвид Бом развил ее с жаром своих 30 лет и, находясь в Принстоне, показал свою работу Эйнштейну, который, к его великому удивлению, сказал, что уже знаком с этой идеей: «*Это теория волны-пилота, которую де Бройль предложил 25 лет тому назад*». Тогда Бом, сославшись на де Бройля в своей статье, отправил ему препринт 1951 года, задолго до появления статьи в журнале [95].

Для де Бройля было настоящим потрясением увидеть свою старую, давно оставленную теорию, которой проникся молодой ученый да еще с энтузиазмом ее защищал. Де Бройль был готов вернуться если не к прежним идеям, то по крайней мере к их пересмотру, но его реакция была отрицательной. Он хотел обратиться к пройденному, но не к волне-пилоту, о чем сразу же сделал сообщение в «*Comptes Rendus*» Академии наук в сентябре 1951 года [96]. Де Бройль объяснил (как и в своем курсе), что нельзя приписывать обычной волне свойства, соответствующие уравнению Шредингера, физический фактор этой волны позволил бы управлять движением частицы, в то время как в другом месте ей приписывают вероятностный смысл, кажущийся правильным. Это привело бы к допущению, что состояние частицы подвергнуто влиянию всевозможных состояний, включая и те, которые не реализуются. К тому же, так как волна Шредингера системы частиц движется в абстрактном и фиктивном конфигурационном пространстве, она не может быть одновременно реальной волной, управляющей материальной частицей в физическом пространстве (любопытно, что Бом всегда оставался глухим к этому аргументу).

В своем сообщении де Бройль допускает, что теория волны-пилота приводит к наиболее известному парадоксу квантовой механики (парадокс Эйнштейна, Подольского и Розена), но отмечает, что использование понятия вероятностной волны порождает подобную трудность в другом виде. В противовес (свидетельство нового состояния духа) он замечает, что теория волны-пилота, несмотря на недостатки, является контрпримером теоремы фон Неймана, и публикует впервые упомянутый выше аргумент.

Несмотря на кажущуюся сдержанность де Бройля, статья Бома стала для него как спусковой крючок, заставив выйти из состояния выжидания. Но вот как дальше действовать? Он мог бы определяться какое-то время, если бы не встретил той же осенью другого молодого физика – француза Жан-Пьера Вижье, который сделал замечание, сыгравшее решающую роль.

Вижье привлек внимание де Бройля к уже известной нам аналогии (см. главу 6) между его идеей управления сингулярностями волны и идеей Эйнштейна (опубликована в том же году) о сингулярностях в гравитационном поле. Может показаться удивительным, что де Бройль со своей бдительностью оставил без внимания эту аналогию, о которой должен был знать давно. Создается впечатление, будто он забыл о ней, но думаю, что объяснение кроется в другом. В 1927 году он был поглощен волновой механикой и, полагаю, не занимался общей теорией относительности[31] (не будем забывать, что его идея сингулярностей предшествовала идее Эйнштейна). По крайней мере случай, поведанный Детушем [5], показывает, что он не сразу прочел известную статью Эйнштейна и Громмера о сингулярностях в теории относительности. Детуш рассказал, что сопровождал де Бройля, когда тот направлялся в библиотеку Сорбонны, дабы изучить эту статью. Однако им отказали в посещении, поскольку они не были записаны. Тогда Детуш предложил де Бройлю представиться лектором в Сорбонне и офицером Почетного легиона. Судя по всему, это происходило по крайней мере в 1929 году. Тогда де Бройль уже порвал со своей теорией, и понятно, что аналогия между теоремой теории относительности и его собственными исследованиями могла бы ускользнуть от его внимания.

[31] Помнится, на Сольвеевском конгрессе Эйнштейн извинялся за то, что пренебрег новой механикой квантов из-за слишком большой занятости теорией относительности.

Если бы де Бройль ознакомился с работой Эйнштейна раньше, то, вероятно, не оставил бы своей теории. Хотя лично мне трудно это представить. И все-таки кажется, что именно Вижье дал де Бройлю возможность осознать эту аналогию, пусть с 25-летним опозданием. С января 1952 года де Бройль опубликовал новое сообщение, определившее последние 30 лет его карьеры. Он заявил о возврате к теории двойного решения, но при одном условии: он предполагал теперь, что уравнения волновой механики не могут подходить для достижения его целей, и для этого надо искать *новые уравнения*, которые должны быть *нелинейными,* как уравнения Эйнштейна в общей теории относительности. Таков был новый большой проект, на осуществление которого он бросился с растущим энтузиазмом и верой.

ГЛАВА 9. Разворот

В год своего 60-летия де Бройль отправился в плавание против течения, чтобы вновь начать с микрофизики, рискуя потерпеть неудачу и оказаться в изоляции. Хотя мог ничего не предпринимать и пользоваться своей известностью до конца жизни. Это было проявлением независимости духа, решимости и воли к победе, которую он разделял по крайней мере с другими основателями квантовой теории. Нам известны способности Эйнштейна и Шредингера отстаивать свою точку зрения, а также отказ Дирака от концепции теории поля (правда, через 25 лет после де Бройля), закончившийся следующим заявлением:

«*Может в конце концов оказаться, что Эйнштейн был прав, поскольку современную форму квантовой механики нельзя рассматривать как окончательную. Имеются громадные трудности… И очень возможно, что в будущем появится более совершенная квантовая механика, в которой произойдет возврат к детерминизму, оправдывающий точку зрения Эйнштейна*» [68].

Гейзенберг не ставил под вопрос основы теории, но устремился в одиночку в теорию частиц, полностью отличную от той, которая была в фаворе у специалистов. Вначале он совместно с Паули подписал престижный препринт, разосланный по лабораториям в 1957 году. Но Паули, терзаемый сомнениями, внезапно отозвал свою подпись.

Все эти ученые до конца своей жизни оставались большими хищниками науки, способными на упрямство, готовыми к решительным переменам и отчуждени, что являлось доказательством исключительности характера. Ставки были очень высоки. Эти люди привлекали особое внимание научного мира, и всякий раз отвоевывание собственной точки зрения ставило под вопрос их репутацию. Но они знали, ради чего стоит рисковать, – физика века была в основном делом их рук. Если на склоне лет эти гениальные ученые умели так ловко обращаться с уже использованной теорией (никто в этом не имел успеха), то можно вообразить, кем они были 30 годами раньше, на поднимавшей их волне. Это было поколение гигантов, которые проявляли великодушие по отношению друг к другу, ведь каждый знал, чего стоят другие.

Луи де Бройль был единственным, кому следующее поколение не простило независимости духа. Возможно, потому, что он зашел дальше остальных, пытался перестроить теорию и расшатать крепость изнутри. Прощали Эйнштейна, как дедушку с прекрасным прошлым, который бормотал об одних и тех же устаревших идеях, и не мешали ему говорить. От Шредингера унаследовали уравнение, умалчивая о его странностях. Проявляли снисходительность к Дираку, так как он был гуру с его знаменитым трактатом по квантовой механике [93]. Что касается «*Направлений в физике*» Дирака [68], об этом старались не упоминать: лекции в Австралии и Новой Зеландии – это так далеко!

Действительно, из основателей квантовой теории Планк, Эйнштейн и Шредингер всегда высказывались против ортодоксальной интерпретации, а де Бройль примкнул к ней; Дирак же имел на этот счет сомнения. Кажущееся единодушие физиков иногда выливалось во всеобщее молчание, как это показал прием де Бройля во Французскую академию, где оно, однако, было нарушено. Церемония прошла блестяще, на достойном его уровне, и все же не обошлось без сюрпризов. Луи де Бройля должен был посвящать Валери, но тяжело заболел, и его заменил Морис де Бройль. Свою речь он начал в ироничном тоне:

«*Господин,*

господин, поскольку обычай и лукавая благосклонность моих собратьев обязывают меня обращаться к вам в такой манере…» [4].

Это была бы обычная, традиционная речь, приправленная общими воспоминаниями. Но Морис де Бройль позволил себе прокомментировать труды нового члена академии с важностью старшего, с видом компетентного специалиста, посвященного во все вопросы экспериментальной физики. Вспоминая начало карьеры брата в своей лаборатории, он сделал небольшое колкое замечание:

«*Некоторые молодые физики вашего возраста имеют склонность к экспериментальной стороне, без которой математические спекуляции являются всего лишь легким дымом*».

Он выразил восхищение новаторским трудом брата, напомнив о колебаниях, которые этот труд вызвал. «*Я могу сказать лишь то,* – заявил ему Жан Перрен, – *что ваш брат очень умный*». Лоренц «*не считал, что путь… был хорош…*». Но вот Морис де Бройль взялся комментировать процесс разработки квантовых идей, взвалив на своего брата даже больше ответственности, чем можно было предполагать.

«*Чем стали,* – спросил он сам себя, – *эти кванты, которые стоят в названии вашей диссертации, и те немного наивные представления, которые мы имеем об атомах? Кванты, не объясненные точно, введенные в основные уравнения волновой механики, вошли так же, как входит в министерство стеснительный оппонент, с которым стараются не встречаться, и их тайна остается почти полной. Что касается атомов, они не являются более* *для физиков-экстремистов солнечными системами в миниатюре, это просто совокупность уравнений, обязанных выразить все то, что известно о них… Таким образом, это настоящая революция мысли, которая произошла 20 лет назад и проникла во все области... Это общий переворот, за который вы в значительной мере несете ответственность. Бросок вперед был таким большим и увлек нас так далеко, что наш горизонт сменился и достиг новых перспектив, которые частично погрузились в туман метафизики. Наиболее серьезным является то, что абсолютный детерминизм, часто рассматриваемый даже как основание научной мысли, потерпел поражение*».

В финальной части речи Морис де Бройль произнес любезные слова: «*Не надо ставить это вам в вину, вы не хотели этого*» – и продолжил (без сомнения, невольно) словами императора Гийома (после войны 1870 года): «*Я не хотел этого*». И под конец Морис де Бройль выразил соболезнующие пожелания:

«*Ваша деятельность, всегда такая яркая, возможно, обнаружит в будущем, несмотря на трудное прошлое, в котором умозрительные построения иногда рискуют затеряться, новые тропинки для продолжения пути*».

Через несколько лет Луи де Бройлю придется выбрать эти «новые тропинки». Действительно, возможно, здесь сыграл свою роль Морис де Бройль. Он словно придал толчок гениальному младшему брату, которому был необходим не только характер, но и некоторая выносливость, чтобы выдержать обрушившиеся на него почести. Слава Луи де Бройля достигла апогея, когда Андре Жорж издал книгу, посвященную его 60-летнему юбилею. В авторский коллектив вошла вся элита физики [41], за исключением нескольких ученых, среди которых были: Бор (воздержался), Дирак (по неизвестной причине), фон Нейман (текст которого пришел позднее). Мы находим там имена Эйнштейна (с тремя статьями, две из которых – по теории относительности), Шредингера, Паули, Розенфельда, Эльзассера, Марша, Рейхенбаха, Вейцзеккера, лорда Червелла (Линдемана), Борна, Мотта, Дарвина, Томсона, Габора, Гейзенберга, Юкавы, Крамерса, Дэвиссона, Лондона, Ватанабе, к которым присоединились известные французские ученые: супруги Жолио, Бриллюэн, Борель, Морис де Бройль и основные ученики де Бройля.

Красиво изданная книга словно накрыла де Бройля «пеленой славы», он испытывал нечто странное. Так Эйнштейн тремя годами ранее, будучи осыпан упреками ввиду отступления от ортодоксальной квантовой механики, вскричал: «*Это не юбилейная книга, это обвинение!*» Де Бройля атаковали в книге из-за его недавних сообщений, последовавших за статьями Бома. Это было восстание в защиту ортодоксальной теории, которую с самого начала книги поставило под вопрос заявление Эйнштейна с пассажем «*Есть нечто, как "реальное состояние" физической системы…*» (см. цитату в главе 6). В нем он выражал свое убеждение, что квантовая механика не является законченной теорией и что ей не хватает параметров, откуда и происходит ее вероятностный характер. Для него идея, что положение частицы суть «*следствие наблюдения*», являлась «*интуитивно невыносимой*» с того момента, когда рассматривают частицу, соответствующую масштабу наших измерений. Он заканчивает страницы, помещенные в начале книги, надеждой на то, что теория относительности сможет найти ключ к загадке. «*Это всего лишь скромная надежда,* – пишет он, – *и нисколько не убеждение*». Шредингер тоже не был нежен с существующей теорией. В основном он был близок к де Бройлю:

«*Г-н де Бройль, как я думаю, не отведал больше, чем я, вероятностной интерпретации волновой механики. Он вынужден был быстро прекратить сопротивление и принимать ее в течение продолжительного периода как временное крайнее средство*» [41].

Он развил свою концепцию теории, из которой исключил частицы и даже квантовые скачки. Его точку зрения не разделял ни один физик, но он ее упорно защищал. По поводу критики он высказал такое соображение:

«*Реплика на это очевидна: "Мсье, можете ли вы сделать, что-нибудь лучше?" Признаюсь честно: не могу! Однако прошу ли я о снисхождении тогда, когда я двигаюсь, пока на ощупь, по собственному пути, почти в одиночку, против армии умных людей, которые стараются работать в направлении признанных линий мысли?*» [41].

Другие статьи носили общий характер, более или менее определенно выступали в пользу Бора, включая учеников де Бройля, таких как Мари-Антуанетт Тоннела и Детуш. Наиболее доктринерской была статья Розенфельда, ученика де Бройля, который цитировал классиков марксизма, выступая против своих советских оппонентов Френкеля и Блохинцева. По поводу возобновления прежних попыток де Бройля он выдвинул такой аргумент:

«*Зачем их воскрешать сегодня, когда кризис разрешен на более высоком уровне теории познания?*» [41].

Совсем другой была статья Паули, который противопоставлял де Бройлю научные аргументы и цитировал туманную «*дополнительность мир-система*». Он пытался доказать, что из двух вещей справедлива только одна: или скрытые параметры не производят наблюдаемых явлений и являются метафизическими, или же они их производят, но они противоречат эксперименту. Первый вывод был правильным, второй воспроизводил в сущности достойные критики аргументы фон Неймана.

Остальная часть труда (две трети) вобрала в себя свидетельства и научные статьи, связанные с работами де Бройля. Именно сюда входит процитированная выше статья Гейзенберга о теории света. Думается, для него «война закончилась»: он построил храм, но не сделался его хранителем.

Критика в адрес де Бройля уже походила на ту, с которой он столкнется в будущем. Последовательно находим:

1) критику по различным аспектам теории, которые подлежат нормальной научной дискуссии;

2) скептицизм перед ее неоконченным характером: Паули сказал, что это была «черта будущего», «чек на предъявителя». Это правда, но так происходит со всякой возникающей теорией;

3) общие комментарии по скрытым параметрам, например рассуждения фон Неймана. Они заведомо ложны, поскольку автор рассматривает гипотезы, кажущиеся ему очевидными, в то время как за общностью. скрывается та же по своей сути идея, что и в опровергнутой теореме;

4) наконец, работы, содержащие неприятие идей де Бройля, отказ от них, сначала триумфальный, с вождями школы Бора, после чего, несмотря на словесную философскую шелуху, остается лишь упрямство племенной ненависти.

Де Бройль взирал на все это взглядом Сириуса: будущее представлялось ему в другом масштабе. В статье он проанализировал свои работы в нескольких словах, касающихся возврата к идеям молодости. В последующие месяцы он утвердил свой проект и 31 октября 1952 года прочел в Центре синтеза нашумевшую лекцию «*Останется ли квантовая физика индетерминистской?*», воспроизведенную под тем же заглавием [61] в сериях «*Новые перспективы микрофизики*» [61] и «*Научные маршруты*» [6]. В меру осторожный и замечательный по широте взгляда текст наделал много шума не потому, что был «революционным», но потому, что нарушал табу. Начинался он с исторического введения в теорию квантов. Оставив тон, снимающий ответственность за отказ от первой попытки, де Бройль высказывал новые надежды и критиковал интерпретацию Бора. Полностью признавая трудности теории двойного решения, он был готов смело их защищать.

«*...В настоящее время,* – говорил де Бройль, – *теория ядерных процессов и, в частности, сил, поддерживающих стабильность ядра, находится в весьма малоудовлетворительном состоянии. К тому же квантовая теория материальных частиц имеет в данный момент ужасный недостаток, который заключается в том, что почти каждый месяц неожиданно открываются новые, не предсказанные теорией мезоны. Кажется необходимым, что физика нуждается в возможности описания внутренней структуры частиц... Но ей сильно мешает это сделать исключительное использование статистической волны* Ψ *при описании частиц*» [61].

Даже через 40 лет мнение де Бройля справедливо, что бы ни говорили приверженцы современной теории частиц, которая по-прежнему малоописательна и не более предсказательна, чем ранее. Она не может ничего сказать ни о массе частиц, ни о различных «зарядах», которые она вводит, и кажется все более похожей на теорию эпициклов Птолемея, разбавленную системой Коперника, законами Кеплера и теорией гравитации Ньютона. Роль эпициклов играют зоология кварков, «цветов» и другие атрибуты, описывающие частицы «элементарными» понятиями, почти такими же многочисленными, как сами частицы, и затуманенные магическим словарем. Отрицание вопроса, поставленного де Бройлем, является лицемерием или вольным ослеплением.

Возвращаясь к некогда оставленным идеям молодости, де Бройль, очевидно, стремился казаться изменившимся.

«*На это,* – говорил он, – *я хотел бы шутливо ответить, как Вольтер: "Дурак – это тот, кто не меняется". Но возможен более серьезный ответ. История науки демонстрирует, что прогресс науки постоянно оказывается затравленным тираническим влиянием некоторых концепций настолько, что заканчивается представлением последних как догм. По этим причинам надлежит периодически подвергать более глубокому пересмотру законы, принятые без обсуждения. Чисто вероятностная интерпретация волновой механики хорошо послужила, конечно, в течение четверти века физикам потому, что помешала им увязнуть в более крутых, трудно разрешимых проблемах, какие ставит концепция двойного решения. Она также позволила решительно продвигаться по пути многочисленных и плодотворных приложений. Но в настоящее время объясняющая способность волновой механики, какой ее преподают сегодня, кажется по большей части исчерпанной… Можно задаться вопросом, не надо ли скорее обратиться к ясности пространственно-временных представлений?*» [61].

Вторая часть книги «*Останется ли квантовая физика индетерминистской?*» [61] воспроизводит прежние работы по сингулярным волнам, его с Вижье недавние сообщения, а также статью Вижье с набросками теории единого поля (которая не увидела свет).

Первую часть де Бройль начинает с пересмотра статьи Бома, не говоря о годах размышлений, упомянутых в главе 6. Итог этому он подведет позднее.

В начале нового периода его жизни, в 1954 году, перед ним появился я, в то время еще студент. После получения сертификатов по общей физике и дифференциальному и интегральному исчислению я готовился к изучению минералогии в Сорбонне (поскольку питаю любовь к природе и симметрии) и математических методов физики в Институте Анри Пуанкаре, что позволило мне ходить на лекции великого математика Лорана Шварца. В то же время я посещал по понедельникам недавно организованный для студентов курс лекций Луи де Бройля, а еще слушал лекции по теории относительности Мари-Антуанетт Тоннела и участвовал в семинарах, проводимых Казеном. Несмотря на то что курс де Бройля был элементарным и в принципе традиционным, мне он нравился. До этого я уже прослушал курс лекций по квантовой механике в Институте химической физики напротив Института Анри Пуанкаре, однако, как и все курсы квантовой механики, они напоминали сборник рецептов для решения задач. У де Бройля все происходило иначе. Он пытался представить результаты более интуитивными, кратко указывая путеводную нить, которой придерживался. Но, когда правильная нить теоретического вывода рвалась, как в случае с системами частиц, он скромно говорил: «*Здесь мы обязаны следовать окольным путем*». И так же, касаясь принципа исключения, он начинал с объяснения фактов, которыми руководствовался Паули, прежде чем добавить: «*Таким образом, мы вынуждены установить новый принцип, который идеи, лежащие в основании волновой механики, в настоящее время не объясняют*». В курсе, прослушанном мною ранее, такие вещи были «парашютированы» тоном очевидности, который меня, в частности, поверг в шок, когда речь зашла о системе частиц. Так, Бауэр объявил, что на следующей неделе мы увидим нужное нам уравнение. Я пытался сам безуспешно его найти методом, который считал подходящим, собрав вместе несколько волн де Бройля, но разочаровался, осознав, что имеется только одна волна в абстрактном пространстве и что соответствующее уравнение было догадкой (к тому же гениальной). Бауэр не видел в этом ничего ненормального, как и все его слушатели. Я почувствовал себя изолированным и с этого дня «не понимал больше» волновую механику. Я не могу успокоиться с тех пор, как услышал от де Бройля фразу «Не понимаю!» Вскоре я понял, что эта задача была одной из главнейших забот Шредингера, который ее тоже «не понимал».

Впервые после начала занятий физикой у меня сложилось впечатление, будто я слушаю мэтра и постигаю историю. Невозможно оценить, насколько важно для молодого студента хоть раз в жизни ощутить присутствие мэтра, а не обычного педагога. Преподаватель готовит к активной деятельности. Мэтр придает этой жизни совсем другое измерение. Его познания и возможность трансцендентного мышления, которые он демонстрирует в своих лекциях, позволяют ученикам уяснить значение наивысших ценностей и моральную концепцию познания. А если мэтр к тому же созидатель, у него имеется особый взгляд на вещи, потому что он познал их изнутри. Складывалось впечатление, что де Бройль на короткой ноге с историей. Галилей, Френель, Больцман, Эйнштейн были для него не статуями, а живыми людьми. Он считал их своими наставниками, которых мог в зависимости от ситуации одобрять или не одобрять, потому что это были люди, хорошо ему знакомые, и он чувствовал себя принадлежащим к их миру, несмотря на века, разделявшие их. Лишь раз я присутствовал на выступлении Гейзенберга и испытал то же самое ощущение. Эти люди вопреки идеологическим расхождениям имели привилегию подниматься к неисследованным вершинам.

Был ли де Бройль хорошим преподавателем? Не знаю. Возможно, нет. Он обладал немного скрипучим, высоким голосом, манерой произносить слова монотонно и слишком быстро («*Он говорит со скоростью света*», – жаловался один из иностранных слушателей). Де Бройль вел повествование, словно затерявшись во внутреннем мире, не глядя на аудиторию и, казалось, вовсе не интересуясь ее реакцией. Он читал текст по тетради и переписывал из нее все, вплоть до формулы собственной длины волны. Никогда не упоминая, что формула носит его имя, он просто говорил: «*Формула длины волны*». Однако де Бройль был больше чем хороший преподаватель, это был Мэтр. И если не опускаться до маленьких неточностей, можно было удивляться силе его разума, ясности объяснений и глубине замечаний. Научный гений имеет право говорить высоким и диссонирующим голосом. Похожее впечатление испытываешь, читая «*Новые методы небесной механики*» Пуанкаре, который, как считалось, плохо пишет и потому труден для восприятия. Иногда это было правдой, но стоит немного потрудиться, когда имеешь шанс читать гения.

Будучи студентом, я не осмеливался появляться в святилище курса лекций по четвергам (хотя и открытом для всех), на которых де Бройль рассказывал о своих исследованиях, посвященных отныне реинтерпретации волновой механики. Я начал посещать эти лекции и семинары в конце 1954 года, после принятия в его группу в CNRS. Я уже был наслышан о новых концепциях де Бройля и о лекции в Центре синтеза, которые меня обрадовали, поскольку я уже долгое время читал некоторые его книги и пребывал в восхищении. Но в то же время, еще не достигнув 18 лет, я уже возмущался, что такой человек смог принять философию, которая казалась несостоятельной и абсурдной. Я был заранее настроен следовать по новому пути де Бройля, но не осмеливался познакомиться с ним. Вижье подбодрил меня и привел к нему при обстоятельствах, которые достойны упоминания, так как представляют исторический интерес. Но прежде надо сказать несколько слов о научном климате времени.

Итак, де Бройль внезапно оказался в научной изоляции, поскольку до отставки удерживал ключевые посты, пользовался почестями, уважением, и научное сообщество скрывало враждебность под внешними реверансами. Коридорные разговоры в Институте Анри Пуанкаре поразили меня, и я понял, что меня ждет нелегкая жизнь. Далеко не все разделяли мое восхищение де Бройлем, и молодые диссертанты, которые были старше меня, говорили о нем с намеками, давая позорные прозвища, словно у него появились признаки сумасшествия или какие-то пороки. Конфиденциальным и покровительственным тоном они советовали мне посещать другие семинары – не для того, чтобы я расширил свои познания, а чтобы развеялся и избавился от «плохих посещений». Эта забота выглядела тем более забавной, что семинар был почти полностью посвящен модным идеям, а не идеям де Бройля (вполне естественно, ведь у него не было последователей).

Если на семинаре для студентов мало говорили о «причинной интерпретации», то иначе было на четверговом курсе лекций, посвященном личным исследованиям де Бройля. Его диссертанты приходили послушать идеи, противоположные тем, что собирались защищать в научных работах, руководителем которых был де Бройль. Конечно, он никому не ставил преград и оценивал только качество исполнения. Хотелось бы надеяться, что эти люди вынесли урок и будут так же объективны по отношению к другим.

Но чем занимались прежние ученики де Бройля? Некоторые работали в лабораторных группах. Те, что ушли в экспериментальную физику (я знал, например, Маньяна), проявляли благосклонность к его идеям[32]. Кое-кто из теоретиков удалился от физики. Так, Басс стал математиком, но позже вернулся к физике, чтобы присоединиться к идеям де Бройля.

[32] Он считался таким же выдающимся экспериментатором, как и его коллеги по академии: Дюпой в Тулузе или Трийя в Веллвю.

Теоретики Института Анри Пуанкаре не последовали за ним. Кахан, хотя и близкий к физическим приложениям, был уверен, что квантовая физика движется к абстрактным представлениям. Арнус, связанный с Гайтлером и Паули в Цюрихе, склонялся к другому лагерю. Петьё, занимавшийся математической физикой, направил всю мощь своих вычислительных способностей на службу новому направлению.

Наиболее близкими к де Бройлю оставались Детуш и Мари-Антуанетт Тоннела. Детуш (как и его супруга Полетт Феврие) был индетерминистом, но вновь сблизился с группой де Бройля, занимаясь нелинейностями. Мари-Антуанетт Тоннела, выполнив работу по волновой механике фотона, посвятила себя теории относительности и теории единого поля (она присоединилась к нему в Принстоне после смерти Эйнштейна). Далекая от квантовых теорий, она с симпатией относилась к новой теории де Бройля, но только с философской точки зрения.

Оливье Коста де Боргард, как и Мари-Антуанетт Тоннелла, был одним из блестящих учеников Луи де Бройля. Он также относился к релятивистам, но в квантовой области. Де Бройль уважал и ценил его, несмотря на дистанцию между ними. Де Бройль являлся моделистом, а Коста де Боргард – *формалистом.* Во время дружеских, но живых дискуссий Коста де Боргард смог убедить де Бройля в важности некоторых моментов, которые тот упоминал в своих книгах. В других случаях де Бройля не удавалось переубедить, в частности в реальном существовании пространства четырех измерений (которое он считал только математическим приемом) или в согласованности теории относительности и квантовой механики, которую он не признавал, несмотря на тот факт, что волновая механика была основана на теории относительности. Действительно, гармония между двумя теориями заключается в структуре эволюционных уравнений, но разрушается при описании процессов измерений.

Коста де Боргард рассказал мне о двух интересных случаях, когда он выступил посредником Луи де Бройля. Первый эпизод произошел в 1949 году в Париже, когда он организовал встречу де Бройля с Фейнманом. Речь шла о релятивистской ковариантности, имелось также много вопросов об электронах, «движущихся вспять во времени» в соответствии с представлением Фейнмана об античастицах. Второй эпизод более важен. Весной 1951 года Коста де Боргард находился в Принстоне, и его привели к Эйнштейну, который оказал любезный прием и… прочел лекцию. По сути, они не беседовали, поскольку все время говорил Эйнштейн. Тогда Коста де Боргард осознал, что Эйнштейн не участвует в диалоге, а опосредованно обращается к де Бройлю. Мы знаем смысл той речи – фактически это текст о «реальном состоянии системы» (см. главу 6). Коста де Боргард вспоминает, что Эйнштейн развивал мысль о «*центре тяжести Луны*», очень медленно произнося слова, как бы утяжеляя весомость послания. По возвращении Коста де Боргард описал содержание встречи де Бройлю и получил удивительный ответ. Де Бройль перевернул страницу и выразил свое согласие с Эйнштейном. Коста де Боргард первым узнал об этом. Он не был шокирован, но ощутил некое состояние отключения [22].

Надо сказать, что в начале 1950-х годов в Институте Анри Пуанкаре все переживали то же самое. Прежние ученики были приведены в замешательство поворотом мыслей де Бройля и появлением Вижье, а молодые диссертанты, которые пришли работать в модном направлении физики, занесенном из Америки, не задавали вопросов, когда шеф занимался чем-то другим. Да и сам де Бройль, оставшийся в меньшинстве, пребывал в похожем состоянии. Годами позднее, когда однажды я пришел с докладом, он встретил меня и загадочно прошептал: «*Ну сегодня это наш семинар!*» Что касается молодых ученых, к которым я относился, то все работали под началом мощного покровителя, но чувствовали себя как на острове.

Распорядок рабочего дня на первый взгляд остался прежним. По вторникам в 15 часов Луи де Бройль являлся на семинар. Он выглядел так, как описывал Морис Дрюон [5]: «*Худой, улыбающийся, что-то за этим скрывающий, исключительно вежливый, с немного удивленным видом, всегда ощущающий себя на своем месте…*» Де Бройль был окружен небольшой свитой старых учеников, как главный врач госпиталя – руководителями клиник (мы двигались за ними, как практиканты). Там присутствовал Андре Жорж, со снежной шевелюрой и голосом бронзового колокола; Мари-Антуанетт Тоннела, всегда спокойная, естественно выразительная и элегантная; Детуш, высокий, худой, в очках, сопровождающий свои замечания хитрым смешком, приоткрывающим его золотые зубы; Коста де Боргард, с волосами, стриженными бобриком, вечно моложавый, источавший исключительную любезность своим чуть сухим голосом; Арнус, маленький, худой, с тихим голосом, скромный, приветливый, слегка отстраненный от действительности; Петьё, тоже не очень высокий, толстенький, круглый, своим видом напоминавший какого-то знакомого, с понимающим смехом, как будто вспоминающим вещи, которые ускользнули из памяти; наконец, Вижье, молодой брюнет с худым лицом, уверенный в себе, красноречивый, прерывающий свою речь раскатами смеха, одновременно неотразимый и беспокойный, ловящий внимание де Бройля. К этой группе следовало бы добавить тех, кто исправно посещал семинар, например Андрея Лихнеровича, докладчика на заседании, особенно если он приезжал из-за рубежа. Иногда появлялся почетный посетитель – человек неопределенного возраста, чаще плохо одетый, который оказался знакомым «патрона» и удивлял молодых (не знавших его) короткими замечаниями. Заинтригованные, мы послали Андре Годону, научному секретарю семинара, записку с вопросом о загадочном посетителе, и она вернулась с кратким ответом: «Леон Бриллюэн».

Церемониал семинара по четвергам был так же совершенен, как и курс лекций. Утром, когда мэтр входил в амфитеатр Дарбу Института Анри Пуанкаре, слушатели почтительно вставали. Потом в тишине слушали изложение его новых теорий и результаты тонких анализов, с помощью которых он терпеливо подкапывался под аргументы школы Бора, пытаясь «*заставить разделить* [его] *возрастающее убеждение, что рассуждения, на которые опирается современная интерпретация квантовой физики, не являются настолько решающими, как кажутся, и содержат множество маленьких трещин*» [60].

Насколько можно было следовать ему в то время, когда абстрактное мышление являлось общим кредо, а отказ от понятной и наглядной картины мира стал бы концом теории? Де Бройль был одиноким ученым, первооткрывателем волн материи, который подчеркивал превосходство частиц относительно волн и говорил, что их сосуществование не приводит к симметрии между ними.

Все это он делал не для храма, за который сражался, а для понимания и описания явлений, вместо того чтобы лишь довольствоваться их предсказаниями. Осознавая шаткость теорий, в том числе и своих собственных, де Бройль был уверен, что наши законы и представления имеют онтологическое значение и в них содержится кое-что объективное, наподобие «*центра тяжести Луны*».

Данные представления не имели никакого шанса быть услышанными. Ни наука, ни история не соглашались с этим. И сказывалось не только всесильное влияние школы Копенгагена, но и волна с другой стороны Атлантики. Прошло меньше десяти лет после перемирия. Европа возрождалась по плану Маршалла, взлетая к славным 30-м. Признание Америки было ослепительным, ее лаборатории становились неотразимо притягательными, и считалось последним шиком защищать докторскую диссертацию там, а не в Париже. Готовность к этому заключалась в прагматизме, а не в возврате к вопросу, истинно ли то, о чем говорят. Очевидно, что именно с той поры де Бройль получил репутацию как *тормозящий, стесняющий* и даже, я бы сказал, *саботирующий* французскую физику ученый. Его упрекали в том, что он был немодным, не стал Фейнманом французской физики и не возглавил молодую школу квантовой теории полей. Но забывали, что во Франции он являлся «интеллектуальным локомотивом» в течение 25 лет и просил только о возможности продолжить свое дело. Он придерживался выбранной колеи, но поезд не захотел его слушаться и свернул на американский путь. Мне жаль тех, кто был разочарован, но что они себе воображали? Что де Бройль пересядет с ними в другой состав? Его просто плохо знали. Они забыли, что он был одним из основателей теории и выбрал собственную дорогу, и не подумали, что его имя останется в веках, а вот их имена исчезнут даже из книг регистрации рождения в мэриях. Они забывают, что талантливые физики не нуждаются в локомотивах (Фейнман, их современник, не имел в свое время в качестве паровоза ни де Бройля, ни кого-то другого). Если им было уготовано произвести великие открытия, они в любом случае сделали бы их, не подчиняясь моде. Нет, де Бройль не устраивал саботажа, он продолжал поддерживать своих учеников, каковы бы ни были темы их диссертаций, даже если он в них не верил. Он выслушивал доклады, даже когда те были скучны. Но имел полное право следовать собственной линии мысли, как Эйнштейн, Дирак или как Гейзенберг, который ощутил себя в изоляции к концу жизни. Об этом он поведал в книге «*Партия и Всё*» [99].

В это же самое время Эйнштейн писал Андре Жоржу по поводу де Бройля и его молодой группы:

«*Фактом является то, что мои парижские коллеги в своих научных работах последних лет находятся ближе ко мне, чем американские теоретики*».

И по поводу доминирующего направления:

«*Мне трудно понять, почему во время переходных периодов и неопределенности мода играет в науке едва ли меньшую роль, чем обычно у женщин. Человек действительно является животным, очень чувствительным ко всякому внушению во всех областях, а не только в политике*» [19].

Таким образом, Эйнштейн рассматривал эту эпоху как переходной период, а не как ее апофеоз! Де Бройль из тех же соображений, что и Эйнштейн, не мог поддерживать теорию полей, «*которой удалось дать объяснение нескольким замечательным экспериментальным результатам и достигнуть громадного успеха, но в настоящее время она вступила в период бесплодия*». Он ставил ей в вину то, что она освободилась от всякого физического смысла волн, сведя их к операторам: «*Коммутативные свойства этих операторов составляют основу формализма этой теории, из-за чего почти невозможно представить, что она сможет дать нам истинное представление физической реальности*» [8]. В том же тексте он полагал, что «*позволено было бы поразмышлять* [вопреки ортодоксальной доктрине], *что проблемы, поставленные квантовой физикой, и явление сосуществования волн и частиц найдут их истинное объяснение только в рамках теории нелинейного характера*» [8], в чем он солидарен с Эйнштейном, который говорил о теории полей: «*Я вижу в этом методе только попытку учета соотношений нелинейного характера с помощью линейной теории*» [8].

Сверх того де Бройль возмущался туманом, напускаемым на квантовую физику, и фактом того, что «*в постоянных ссылках*» многие авторы «*и, несомненно, в некоторых из своих трудов автор этих строк*», добавлял он, «*рассматривают поочередно обычно используемую волну в волновой механике то как реальную волну… то как простое представление вероятностей, не влияющее более на физические явления, точно так же, как гробы не влияют на покойников*» [8].

Теперь несколько слов об обстоятельствах моего вхождения в Институт Анри Пуанкаре в типичном контексте того времени. Луи де Бройль находился тогда в любопытном положении. Он был могущественным шефом, наиболее могущественным, исключая Жолио в области ядерной физики, и занимал все посты, о которых можно было только мечтать. Он был непременным секретарем Академии наук, его амфитеатр был полон, он руководил еженедельным семинаром, собиравшим около 50 человек. Он был руководителем аспирантов, даже не знаю в каком числе (мы знаем, что в течение своей жизни он 241 раз являлся членом заседания ученого совета, где чаще всего председательствовал). Он был председателем всех комиссий (даже после отставки их насчитывалось 23), и в то же время, поскольку никто не следовал за ним, ему пришлось в 60 лет реформировать свою команду. Но первым, кто присоединился к нему, оказался коммунист Вижье, хотя в окружении де Бройля и раньше имелись коммунисты или по крайней мере один левый марксист, который был мало похож на него. Конечно, не все состояли в радикальных рядах, и все же университет был «левацкий». Только команда Жолио в Академии наук была более многочисленной в этом плане.

По правде говоря, это было не случайно. Я уже намекал на тот факт, что практически единственными философами, отказавшимися от идей копенгагенской школы, были марксисты. Конечно, диалектический материализм является вечно развивающимся учением: можно высказать утверждение и тут же заявить прямо противоположное. Марксисты были разделены в физике на группы, и все находились в согласии с коммунистической догмой, но, естественно, с уклоном к детерминизму. Поэтому де Бройль подвергся нашествию с их стороны. К тому же в 50-е годы «*призрак коммунизма бродил по Европе*» и это была эпоха «*буржуазной науки и науки пролетарской*». Итак! Бор был буржуа, Эйнштейн – пролетарий, и нечто похожее говорили о де Бройле. И так пересеклись неожиданно наши дороги. Я очень хорошо знал коммуниста Вижье. Можно догадаться, что позже я отказался от коммунистических идей (в частности, благодаря CNRS, отправившему меня в Москву на стажировку, где я познакомился с нелинейной механикой и истинным содержанием социализма). Сейчас я вспоминаю юность с таким же удивлением, с каким де Бройль вспоминал свою, но уже по другим причинам.

Почти всегда происходило именно так. Де Бройль по привычке делал вид, что ничего не замечает (даже позднее он обходился без намеков), и оценивал своих сотрудников только по научной работе. И в этом он был прав! Что самое интересное, в соавторстве с ним я опубликовал научно-популярную статью в «*Комсомольской правде*» (действительно, в то время я не понимал ситуации лучше, чем он). Он получил предложение о сотрудничестве и принял его не моргнув глазом. Добавлю любопытную деталь. Официально поддерживаемое философскими журналами течение детерминизма в СССР еще не имело такой силы, как в других странах. Оппозиция, которую детерминизм встретил со стороны адептов копенгагенской школы в СССР, была обострена еще и тем, что многие из них, идентифицируя детерминизм и марксизм, нашли в этом случае возможность проявить свою независимость по отношению к режиму. Нормальные дискуссии были невозможны, так как научные доводы сводились к оккультизму с той и другой стороны из-за политических предубеждений. Но следует отметить, что Терлецкий, основная российская опора де Бройля, всегда поддерживал его в научном плане, хотя, как марксист, он провоцировал в СССР политическое злопамятство.

Надо отдать должное старой гвардии Луи де Бройля, которая хорошо приняла новеньких и интегрировала их без проявления душевных эмоций. Сдержанными были отношения между ними и некоторыми диссертантами, о которых я уже говорил, более близкими мне по возрасту, но более подверженными моде и более раздражительными. Предаваясь воспоминаниям об участниках молодой команды, еще раз убеждаюсь, что все они были более или менее маргинальны по вкусам и происхождению и присоединились к де Бройлю волею судеб, случайно. Работать с ним было далеко не лучшим способом сделать карьеру, но по крайней мере это обеспечивало необходимый минимум сердечности и страсти в науке. Помимо группы левых, о которых я рассказал выше, было много иностранцев, и некоторые из них состояли в щекотливых отношениях со страной происхождения. Над всеми витал Вижье, переполненный идеями, зачастую весьма туманными, которые он страстно защищал, считая их очевидными. Потом появились Франсис Фер, бретонец с запавщими глазами и диалектом Константины, лысый, суховатый, но приятный, изъяснявшийся очень понятно (на «цветистом» французском), и Андраде э Сильва, с гладкими волосами, толстыми очками, прихрамывавший на ногу, поврежденную в дорожном происшествии в юности, который никогда не позволял себе шутить с математической строгостью доказательств. Это был португалец с изящными манерами, соизмерявший слова с паузами между ними, тонкий аналитик в области квантовой механики и близкий сотрудник де Бройля в области теории измерений и систем частиц. Тиунн – элегантный камбоджиец, осторожный в высказываниях, молчаливый и несколько надломленный (через несколько лет внезапно покинул нас и стал министром правительства красных кхмеров Пол Пота). Фер, Андраде, Тиунн и я долгое время образовывали прочную группу и написали немало совместных работ. Мы были далеки от Вижье. Но должен упомянуть еще несколько персон: Хальбвахса, автора прекрасной книги о «жидкостях со спином»; Хиллиона, которого благословил Вижье с помощью своей власти и энергии; Мера, сухопарого, с миндалевидными глазами, подобными тем, что встречаются на миниатюрах; Каримана, написавшего диссертацию в ортодоксальном стиле по ядерной физике, основанную на хорошей идее, но утомлявшую всех, поскольку исходила из группы де Бройля (он не боялся об этом говорить!). Он был спасен физиком из ЦЕРНа, известным Джоном Беллом. Я сознательно, хотя и несправедливо обхожу молчанием членов семинара, опубликовавших замечательные работы, но более далеких от идей де Бройля. Зато упомяну о некоторых заслуженных иностранных ученых, пробывших у нас долгое время.

Прежде всего это Дэвид Бом, с которым я имел счастье сотрудничать. Молодой, тонкий, с огненной гривой волос, говоривший с американским акцентом и всегда переходивший на беглый английский. А еще очень эрудированный, с блестящим умом, с воображением, с чувством критики и всегда настороже. Я могу упрекнуть его лишь в естественной склонности (очень современной) к построению систем мира, основанных на математическом формализме, в частности на системах частиц. Де Бройль сам осторожно заметил:

«*Часто слишком искушающим является построение общих философских теорий на данных научных знаний, всегда подверженных ревизии*» [8].

Японский ученый Такабаяши работал над *гидродинамическими представлениями* теории Дирака. Понимание этой идеи требовало колоссальных вычислительных способностей. Ими в полной мере обладал этот хрупкий на вид, скромный и молчаливый человек – настоящая азиатская загадка. Институт Анри Пуанкаре привлекал его по нескольким причинам. Прежде всего его коллегами стали Коста де Боргард, Петьё, сам де Бройль, а также Ивон, позднее ушедший в Комиссариат по атомной энергии. Кроме того, само уравнение Дирака получило первостепенное значение в институте. В шутку говорили, что над ним работали абсолютно все в институте, включая консьержа (хотя я никогда его не видел).

Еще один ученый-иностранец – Терлецкий, отважный, с развитым воображением в духе старорежимного русского университета, удивительно простой и надежный. Изобретатель ускорителя, родоначальник теории *тахионов* – частиц, движущихся со скоростью, большей скорости света, не запрещенных теорией относительности. Независимый по духу, хотя и близкий к власти, он вынужден был впоследствии покинуть МГУ им. М.В. Ломоносова из-за несогласия с общепринятыми убеждениями в области квантовой механики.

ГЛАВА 10. Работать для будущего

Положение ученых, таких как группа де Бройля, становилось, несомненно, трудным, и, несмотря на его авторитет и важность проекта, мы были одиноки. Что касается качества наших работ, эффект был ожидаем. Комиссии не рассматривали их, а действовали по принципу «скажите, кто ваши друзья, и мы дадим ответ». Начиная с де Бройля, наши друзья, мягко говоря, были малоавторитетны. Исследования небольшой группы в неопределенном научном направлении не могли соперничать с работами многих групп в признанном направлении. По крайней мере нам надлежало иметь гениальную идею, которую можно было бы продать. Для такого альянса ученых всякий успех забывается или опротестовывается, а всякое поражение засчитывается. В то время как на стандартном пути и малейший успех замечателен, а провал закономерен и растворяется в массе таких же неудач. Мы с Вижье и Хиллионом предложили теорию элементарных частиц, достаточно многообещающую, чтобы де Бройль рассказал о ней в книге [100], переведенной на английский язык. Ее тщетно пытались развить и в конце концов оставили, но она была не лучше и не хуже других, которые постигла та же судьба. Разница заключалась в том, что другие теории, например ядерных сил или частиц, также оставленные, открывали целые залежи успеха благодаря своей моментальной авторитетности. Речь шла о выигрыше пари: все или ничего!

Типичным примером явилась диссертация Андраде э Сильва, подготовленная под руководством де Бройля, о представлении систем частиц в физическом пространстве, которая, несомненно, высветила проблему. Но как это оценить, если другие отрицают важность вопроса? Диссертация Фера содержала отличные результаты по теории двойного решения, доказывая в особенности, что при дифракции траектории сингулярностей, представляющих частицы, направлены точно к светлым полосам. Но как вызвать интерес тех, кто думает, что описывать явления бесполезно, а достаточно их лишь предсказывать? Так происходило не только с Фера и Андраде э Сильва, но и с Лерустом, и со мной при попытке описать квантовые переходы по аналогии с переходными процессами, известными в электронике. Сам де Бройль придавал этим работам большое значение, но не квантовое сообщество физиков. В течение года известные теоретики Винер, Тер Хаар, Беллман, Тисса, внимательно следили за нашими работами. Но они не принадлежали к отряду ученых, работавших в области квантовой механики.

Интересным оказалось понятие *нелинейности*. Квантовая механика линейна не по ее простоте, как другие области теории волн, а по соображениям ритуала. Де Бройль походил на иконоборца, пытаясь отыскать нелинейные уравнения для получения *волн с горбом*, представляющих частицы. История эта довольно интересна, чтобы рассказать о ней подробнее.

Нелинейность является не свойством, а, наоборот, отрицанием свойства. Она открывает бесконечное поле для исследований. Отыскивать для нее уравнение – это то же самое, что искать иголку в стоге сена. Но де Бройль был оптимистом, так как предположил определенные условия, которым должны удовлетворять такие уравнения. К тому же он надеялся, что они окажутся не столь строги, и в 1960 году попросил меня подыскать подходящие модели. Я показал, что одна такая известная модель несет волны с горбом и таких волн существует бесконечное множество. «*Наши условия не являются достаточно ограничивающими,* – сказал я*, – бесполезно искать другие модели*». «*Конечно*, *надо найти новый принцип отбора*», – ответил он. И уехал на охоту.

Однако мы не нашли подходящего уравнения. Новый принцип, который де Бройль предложил в следующем году (термодинамический), был и сейчас остается лишь надеждой. Вне нашей группы это никого не интересовало. Может быть, над этим потешались (как иногда при мне над Эйнштейном еще до его кончины) за чайным столом под астрономическим куполом. Он только что предложил новую теорию единого поля, которой насмешники предсказывали провал. Это оказалось правдой. Труба Жерико пока звучала напрасно. «*И малые дети приходили плевать на арки*»*,* как говорил старик Гюго.

Через 20 лет, с появлением *теории солитонов, аналогичных уединенным волнам*, распространяющимся по поверхности воды без изменения формы, появилась надежда на нелинейность. Это была одна из идей, из которых исходил де Бройль [101]. Модели плодились в течение десяти лет, имея физические приложения. В квантовой механике уже не проклинали нелинейность, и даже совсем ортодоксальные физики-квантисты (потому уже выслушиваемые) задавались вопросом, естественно, не упоминая де Бройля, не могут ли эти горбы представлять собой частицы! Ничего из этого не вышло.

В последние годы в Институте Анри Пуанкаре де Бройль попытался придать теории двойного решения наиболее убедительный вид [101]. Боюсь, настоящие нелинейные уравнения, если они когда-то будут найдены, окажутся не слишком отличными от тех, что нам известны. А все, что мы сможем сказать о линейных сингулярностях, будет оставаться всегда лишь реинтерпретацией современной теории, а не зачатками какой-либо новой.

Однако реинтерпретация квантовой механики очень важна, и де Бройль лучше всех это знал. Его труды, посвященные этим проблемам («*Теория измерений в волновой механике*» [102] и «*Критические исследования оснований современной интерпретации волновой механики*» [103]), являются одними из лучших. Они исходят из двух основных идей:

1. *Теория говорит о волнах, но в эксперименте регистрируются только частицы.*

2. *Волны и частицы постоянно присутствуют в физическом пространстве.*

Исходя из этого, де Бройль реконструировал теорию измерений в квантовой механике, основываясь исключительно на движении волн, без загадочных взаимодействий с измерительным прибором и особенно без этого «*я, отделяющегося от волновой функции*», любимого выражения книги, имевшей успех [104], что дало возможность сказать Шредингеру, что «*функция* Ψ *теперь исходит откуда-то из психологии*».

Часто де Бройль вновь принимался за рассуждения, к которым был ранее привязан, для того чтобы их отвергнуть или к ним вернуться. Так человек, освободившийся от колдовства, вновь открывает простые явления, которым придавал оккультное значение. Чары Копенгагена исчезли, и он больше не поддавался пению сирен индетерминизма. Очарование, которое им распространялось на других, уже исчезло, так как его находили более глубоким в ранние, смутные времена. Как сказал бы об этом современный бард, «*бравые молодцы не любят, когда кто-то следует другой дорогой*». А за ним следовало только меньшинство. Поразмыслив в одиночестве, де Бройль утешился настоящим, работая «*ради будущего*». В 1961 году он записал эту фразу – девиз семейства де Бройль на дискете Французского альянса «*Мое беспокойство о проблеме квантов*», заканчивающуюся так:

«*Будущее, которого я не увижу, несомненно, разрешит этот вопрос. Оно покажет, является ли сегодняшняя точка зрения ошибкой человека уже преклонного возраста, который остается привязан к идеям своей юности, или же, напротив, она выражает ясновидение исследователя, размышлявшего всю жизнь над наиболее фундаментальной проблемой современной физики*» [6, 8].

В разработке новых теорий он позволял себе руководствоваться только экспериментальными данными и следовать своей интуиции, не подвергаясь влиянию других, как это было во время создания волновой механики. Только Эйнштейн оставался для него примером. Они обменялись несколькими письмами, и в знак дружбы он получил фотографию, подписанную самим

Эйнштейном: «*Де Бройлю – с наилучшими пожеланиями. А. Эйнштейн, 51*». Он разрешил поместить ее вне текста в книге «*Новые перспективы в микрофизике*» [19].

Де Бройль предпринял большие усилия сразу в нескольких областях физики: света (которому он посвятил два курса лекций, в 1956 и 1957 годах, и книгу, изданную в 1968 году [106]), систем частиц, двойного решения, нелинейного уравнения Дирака, элементарных частиц и переходных состояний.

Де Бройлю вновь помогали многие сотрудники, и он всем уделял внимание, но не давая указаний, а возлагая на каждого ответственность за работу и выбор темы диссертации. Он делал только небольшие замечания к написанным докладам. Разговоры начинал с коротких, иногда вопросительных предложений: «*Не думаете ли вы, что..?*» Чаще всего так же коротко давал советы своим ученикам. Если же де Бройль проявлял особенный интерес к собеседнику, то выслушивал его совершенно беззвучно. Молчание поражало, по мрачному виду мэтра можно было догадаться о бурной работе мысли – все это приводило собеседника в некоторое замешательство. Миновав фазу сосредоточенности, де Бройль вдруг становился как бы отсутствующим, что-то неразборчиво говорил про себя, полностью погружался в систему своих мыслей и уже никого не слышал. Посетитель скромно сворачивал свой доклад, немного разочарованный, потому что де Бройль не делал замечаний, кроме «*это очень интересно*»... Только через неделю следовали комментарии, сопровождаемые написанными от руки замечаниями. Начиналось серьезное обсуждение. Он говорил в страстном тоне, быстро рисуя формулы на бумаге, забывая показать их собеседнику, или делал рисунок, который представлял собой микроскопическую неразбериху, так как он очень плохо рисовал. Разговор иногда возобновлялся в результате случайной встречи в коридоре Института Анри Пуанкаре или в академии. Де Бройль коротко произносил: «*Зайдите сейчас же ко мне. Я хочу кое-что сказать вам по поводу завтрашнего дня*».

Мало кто понимал контрастный характер этого человека, поочередно рассеянного, внимательного, сконцентрированного, веселого, отстраненного, предупредительного, но всегда окрыленного наукой. Большинство знали его любезным, но сдержанным. Когда собратья по академии выражали де Бройлю почтение, он оставался непроницаем за своей улыбкой и любезностью. Его появление в зале заседаний академии, хотя и скромное, даже робкое, всякий раз напоминало прибытие монарха. Секрет силы воздействия де Бройля заключался в том, что он мало пользовался своим влиянием и был молчалив. Известный биолог Этьен Вольф сказал мне как-то: «*Он почти ничего не говорит, но все понимают: одно его присутствие означает, что некоторые вещи можно делать, а некоторые делать нельзя*». Однако это свойство не мешало ему быть насмешливым, тонко злословить и немного сплетничать (не будем об этом распространяться) о высоких персонах мира сего, ученых настоящего времени и прошлых веков, о своих собратьях, семье, учениках (не исключая меня). Одним из его любимых «сообщников» был секретарь административного совета Пьер Гойа (ко времени моего с ним знакомства уже пожилой человек), работавший в академии. Они с Луи де Бройлем хорошо понимали друг друга. Жена Пьера мадам Жульетт Гойа, работавшая также в академии, исполняла роль гостеприимной хозяйки. Роберт Курье, постоянный секретарь по естественным наукам, ласково называл ее «*вечный секретарь*». Она рассказывала мне, что, когда важный посетитель ожидал в прихожей (де Бройль начинал прием в строго определенное время), она должна была незаметно прикрыть несколько дверей, чтобы смех гостей не оглашал кабинет, где де Бройль работал с ее мужем.

Я имею право на несколько отзывов о кандидатах в академию, которых де Бройль принимал у себя в кабинете в моем присутствии. Обычно тон его голоса был нейтральным (чтобы нельзя было догадаться о намерении при голосовании), за некоторыми исключениями. Так, Де Бройль говорил с восхищением о Жане Бернаре, поскольку тот много сделал для изучения и лечения лейкемии (как известно, сестра де Бройля Полина умерла от этой болезни). В следующий раз он заговорщицким тоном рассказывал мне о другом известном враче, который открыл антикоагуляционные свойства одного витамина. Де Бройль обратился к нему за некоторыми разъяснениями, так как, бреясь тем же утром, заметил разрыв маленькой вены в глазу и хотел просить Жана Бешада купить лекарство.

Теперь я хочу поведать о том, о чем де Бройль сам никогда не рассказывал, это был его исключительный секрет. В 1960 году не стало его старшего брата Мориса. И юные ученики оказались в затруднительном положении, не зная, как следует поступить в такой ситуации. Он ничего не говорил, да и мы в нерешительности молчали. Не следует ли из его поведения, что он не хочет даже думать о новом положении, о получении титула герцога? Позже я узнал от Андре Жоржа, что принятие титула совсем не радовало Луи де Бройля, хотя и не стало неожиданностью. Он являлся единственным оставшимся наследником по старшей ветви семейства.

В следующем 1961 году он познакомил нас с новой идеей, основанной на курсе лекций 1948 года (см. главу 8), которую он изложил в курсе лекций 1961–1962 годов [107] под названием «*Термодинамика изолированной частицы, или Скрытая термодинамика частиц*». Название составлено сознательно парадоксально, так как начиная с Больцмана допускали, что термодинамика может касаться только большого скопления частиц, а не отдельно изолированных объектов. Слово «скрытая» означает, что эта термодинамика предполагает субквантовый уровень, подчиненный волновой механике. Вот о чем идет речь.

В волновой механике существовало два недостатка.

1. Частота внутренних колебаний частицы, которая в свое время сыграла определяющую роль, все еще оставалась загадочной. Для уточнения ее смысла де Бройль вновь примется за аналогию между частотой и *температурой* или *количеством теплоты*.

2. Квантовые переходы оказались за пределами теории. Отсюда и возник интерес де Бройля к нашим новым работам. Его новой идеей стала попытка ввести принцип Карно в атомные уровни. Это можно проиллюстрировать следующим образом.

Дуализм волн и частиц можно представить как гору, двумя сторонами которой являются теория волн и классическая механика. Когда поднимаешься к вершине горы, где две стороны сходятся, теория волн стремится к геометрической оптике, и *лучи* совпадают с *траекториями* механики. Принцип Ферма, определяющий лучи, совпадает с принципом Мопертюи, определяющим траектории. Де Бройль предложил дополнить этот синтез, добавив горе третью сторону, на которую поместил термодинамику и принцип Карно (2-й принцип). Таким образом, получается пирамида, тремя сторонами которой являются *механика, волны* и *термодинамика*. На вершине три области соединяются в *три величайших принципа физики: Ферма, Мопертюи и Карно*. На вершине, как и на склонах Ферма и Мопертюи, все процессы обратимы, но сторона Карно включает в себя необратимые процессы, среди которых могут иметься и квантовые переходы. Де Бройль видел в этом синтезе венец своих усилий, которым отдал 20 лет жизни. Скрытая термодинамика отныне была частью основания волновой механики. Он приравнял два понятия: «частоту колебаний – длину волны» и «частоту хода часов – внутренюю теплоту частицы», которыми связал две простые формулы в *закон согласованности фаз*. Я уверен, что скрытая термодинамика станет когда-нибудь такой же важной, как волновая механика, но, возможно, эта идея еще преждевременна. Несмотря на элегантность формул, полученных де Бройлем, они не дают предсказаний для эксперимента, в противовес тому, как это происходило с волновой механикой. Возможно, в теории не хватает важного элемента, как, например, было в оптике Гюйгенса (не хватало периодичности волн).

В течение долгих лет де Бройль блестяще сражался, активно используя все имевшиеся у него средства, в частности теорию двойного решения и идею Бома и Вижье о *субквантовой среде* в виде некоего эфира, находящегося в хаотическом движении, который действует на микрофизическом уровне. Я, признаться, испытываю по этому поводу смешанное чувство: надежду касательно идей, положенных в основание теории, и сомнение в ее нынешнем состоянии.

Никогда де Бройль не производил на меня такого сильного впечатления, как во время разработки этой теории. Я видел его таким, каким он, наверное, был в молодости, и наблюдал за ним с интересом антрополога. Тот, кого я знал как уверенного в себе мэтра, доминировавшего во всех областях, был в состоянии творческого смущения, а потом внезапно появлялись более или менее ясные идеи. Он догадывался о результатах, которые не мог доказать, и тянул за невидимые нити из различных областей физики, которые пытался соединить. Он выискивал в истории наук оставленные попытки, забытые законы, аналогии, о которых мы никогда не слышали и которые, как мы с удивлением узнавали, были связаны с именами известных физиков Гельмгольца и Больцмана. Будучи слишком молодыми в 1948 году, чтобы слушать курс его лекций, мы видели зарождающуюся из ничего новую термодинамику, не зная еще, что именно она его так интересует. Вначале он не говорил об этом никому, и, я думаю, мы с Андраде э Сильва первыми, имевшими привилегию услышать об этом и увериться, что игра стоит свеч. Мы лихорадочно старались наверстать отставание в различных областях и работать над новой теорией, выискивая ее приложения к необратимым процессам.

Луи де Бройль и сам должен был уменьшить отставание. Ему надо было заметно освежить в своей памяти некоторые положения термодинамики. Но, как это ни парадоксально, его больше волновала теория относительности. Его идея покоилась на релятивистской аналогии: на том факте, что температура и количество теплоты уменьшаются для движущегося наблюдателя таким же образом, что и частота хода часов (отставание часов). Если бы это было не так, теория бы рухнула. Но де Бройль был спокоен, поскольку закон о теплоте, давно установленный Лауэ, подтвердили затем исследования Планка, Эйнштейна и его собственные работы. Однако закон был опровергнут! Де Бройлю не хватало его старой релятивистской гвардии. Тоннела ею больше не интересовалась, а Коста де Боргард не был с ней согласен [22].

Де Бройль остался один и поэтому был взбешен. Он вспоминал, как во время подготовки диссертации (когда ему никого не удавалось убедить в лаборатории брата) в самый решающий момент не хватало своего окружения, а оно было необходимо. Затем, хотя и беспокоясь за теорию, он интуитивно уверился в ее точности и сердился на то, что вынужден прерывать размышления для ответа на выпады клеветников. Впервые он высказывался в неприятном тоне с нотами возмущения, чего не делал даже в отношении сторонников копенгагенской школы, об идеях которой отзывался больше с иронией, чем с озлоблением. Де Бройль считал, что некоторым лучше было бы заниматься метафизикой, чем вставлять палки в колеса при доказательстве того, в чем он был так уверен.

В действительности всех шокировало то, что теплота уменьшается с увеличением скорости, в то время как она является формой энергии, которая стремится всегда расти. Это верно только для *полной энергии*, но не для отдельных форм (кинетическая, тепловая и т. д.), из которых она состоит. Де Бройль знал это, но был спокоен только до того момента, пока я не привел ему простой аргумент в пользу того, что теплота может только уменьшаться с увеличением скорости. Он несколько раз цитировал этот аргумент [109, 22], потом перестал говорить о проблеме, что в соответствии с его характером означало поворот. Для него было невероятно трудно перевернуть страницу.

В какой бы то ни было области, научной, административной или любой другой, де Бройль занимал позицию, лишь приняв меры предосторожности. Он охотно пользовался советами и учитывал их. Если речь шла о научных проблемах, он погружался в долгие размышления, делясь ими со своими сотрудниками. После более или менее долгого раздумья он обретал уверенность, принимал решение, и об этом переставали говорить – вопрос больше не интересовал его. К просьбам вернуться к пройденной теме он оставался глух. Если же на этом настаивали, он повторял свои аргументы специально для человека, желавшего обсуждать вопрос. Как говорится на языке юстиции, необходимы новые факты для возврата к делу. Если вопрос был административного порядка, его решение подлежало исполнению, ведь де Бройль был человеком действия.

Аналогичная принципиальность была свойственна ему и в отношении мест, которые он покидал навсегда. Например, после войны он больше не бывал в своем доме в Сен-Жермене, пришедшем в плохое состояние. После отставки в 1962 году уже никогда не появлялся в Институте Анри Пуанкаре, в котором проработал 34 года. Не потому, что не давали покоя плохие воспоминания, – просто прошлое было прошлым.

Де Бройль оставил все ответственные посты своим последователям и сохранил лишь пост в академии. Среди комиссий, в которых он являлся председателем, была комиссия по теоретической физике CNRS, или скорее *комиссия по физическим теориям*, как ее называли в то время. Изменение названия было неслучайным, так как физика – наука экспериментальная, и теоретическая физика не является отдельной ее ветвью. Одно суждение было бы лишь «*легким дымом*», как говорил Морис де Бройль. Теории многочисленны, и единственная – всегда немного опасна. Ее используют в обычном языке, но из этого не следует выводить категории.

Освободившись от своих обязанностей и находясь в хорошей физической форме, де Бройль с усердием принялся за работу. Если вспомнить, что он умер в 95 лет, то в 70 он был еще молодым. После отставки он опубликовал 7 книг, 30 статей, 5 академических сообщений и 15 статей по общим вопросам. Покидая свой семинар в Институте Анри Пуанкаре, он предложил четырем из нас (Андраде э Сильва, Феру, Тиунну и мне) организовать вместе с ним новый семинар в академии, «*первый с XVIII века*», как сказал он . Этот семинар собирался в его кабинете непременного секретаря каждый месяц в течение 13 лет (с осени 1962-го по лето 1975-го) по средам после полудня при кабинете долгот. Заседаний этого семинара он никогда не пропускал. Мы стали близки к набережной Конти и местной знати, которая с холодком делила с нами кабинеты Института Анри Пуанкаре, отделанные металлом и лакированным буком. Де Бройль выглядел здесь как визитер.

В академии, напротив, он был в своей стихии, начиная с дороги, ведущей в институт. Он выходил из метро на станции «Пале Руайль», пересекал Лувр по Квадратному двору, проходил по мосту Искусств через Сену (принадлежащему к одному из красивейших городских пейзажей мира, ныне, увы, сильно загрязненному) и шел мимо башни Монпарнас. Затем его вневременной силуэт видели на набережной института. Де Бройль привычно отмеривал шаги до секретариата Академии наук, он по минутам рассчитал свой путь из Нейли и прибывал к себе в точно назначенное время (правда, старея, он стал немного опаздывать, так как шаг становился замедленным). Он снимал перчатки и, подходя к двери, оставлял задумчивый вид, чтобы поприветствовать людей, ожидавших его в прихожей. Это была комната, занятая архивными документами ушедших ученых, с остекленными шкафами, в которых виднелись медали, старые книги и академическое одеяние, принадлежавшее Вараго. В глубине находился стол секретаря Женевьевы Даррье, отец которой тоже работал в академии.

Поздоровавшись, де Бройль проходил через архивный кабинет, встречал еще нескольких сотрудников, и среди них – архивиста Пьера Бертона, с которым был очень дружелюбен. Миновав небольшой коридорчик, где находился портрет Эйнштейна работы Вульфарта, он оказывался в своем кабинете. Стены здесь были обшиты деревом, имелись предметы искусства, а на рабочем столе, как это ни забавно, – никаких бумаг (не больше того, что мы видели в Нейли). Затем он шел искать или просил принести нужные досье. Когда де Бройль принимал посетителя, перед ним была всего лишь бронзовая лампа. На своем обычном месте, справа от окна, он сидел напротив большого портрета Ньютона (копия с картины Кнеллера), украшенного мраморными медальонами. Внизу находился рельефный портрет математика Эйлера и женский профиль Каффиери. Под портретом располагалась мебель из палисандрового дерева, в которой содержались бумаги, и стоял мраморный бюст химика Шарля. Рядом со стеной слева, напротив окна, под портретом Вокансона, находился секретер, покрытый красной кожей, который впоследствии преемник де Бройля, Поль Жермен, заменил мебелью для предметов уборки (единственное изменение после де Бройля). Немного в стороне от него, по обе стороны, де Бройля окружали две мраморные статуи: одна – Френеля, о ней я уже упоминал, другая – химика Шевроля («*…Который умер столетним*», – добавлял всегда де Бройль). В глубине, в нише, находился глиняный бюст другого «столетника», Фонтанеля, а над ним – портреты Вобана и Ласепеда. История была представлена повсюду в этой комнате, да и сам де Бройль уже принадлежал ей, окруженный представителями французской науки и мысли, напротив охраняющего его портрета Ньютона со светлыми локонами.

Присутствовать на семинаре в столь величественном месте, беседовать с мэтром в такой камерной обстановке было необычно для нас, и поначалу ощущалась некоторая скованность, рожденная моментом торжественности и чувством глубокого уважения. И все же иногда кабинет оглашался нашим громким смехом, ведь нельзя все время пребывать в напряжении. В первый же день де Бройль, как только пригласил занять места, задал тон, бросив нам со вздохом облегчения: «*Ну наконец-то!.. Теперь, когда я не являюсь их шефом и не обязан оглядываться на них, мы сможем спокойно поработать*». И он зачитал нам рабочую программу семинара.

Не следует думать, что де Бройль провел с нами 13 лет в рассуждениях о теории двойного решения и реинтерпретации волновой механики. Конечно, мы и этому уделяли время, но проект де Бройля заключался в поисках оснований новой микрофизики.

Отыскивая этот путь, за несколько лет мы рассмотрели на семинаре большую часть современной физики в теоретическом и экспериментальном плане. Мы работали в оптике (это была эпоха лазеров), электронике, физике частиц, квантовой механике, теории нелинейных колебаний, термодинамике, магнитном резонансе, атомной и молекулярной физике, статистической механике и теории относительности… С физиком такого масштаба это был незабываемый опыт! Де Бройль исходил из многих работ, иногда даже удаленных от нашего направления. Они содержали в себе уже опубликованные интересные результаты. Вообще-то мы избегали в публикациях прямо говорить о целях наших исследований. Одно упоминание о неортодоксальной проблеме натравливало на нас «*рефери*», обязанных судить и фильтровать статьи в научных журналах, уже и так раздраженных нашим стилем, который считали «архаическим» (о ужас!) и более описательным, чем обычно используемый – формальный. Даже слово «волна» не приветствовалось, так как выглядело слишком материально и наивно. Лучше было говорить «вектор состояния» или «амплитуда вероятности» (более абстрактный синоним). И только в докладах Академии наук мы открыто говорили о близких сердцу проблемах, потому что эти сообщения представлял сам де Бройль. Но мы знали (как, впрочем, и он), что его критиковали за публикацию наших работ, остерегаясь замечать, что они являются продолжением его собственных, так как не нападали на него прямо.

Состав участников семинара претерпел большие изменения. Я был единственным, кто прошел от первого до последнего заседания. Другие по различным причинам (профессиональные обязанности или возвращение в родные страны) сменялись. Но мы набирали новичков, иногда слишком много, по желанию де Бройля, который любил эти небольшие заседания. Среди новых участников были: аргентинец Бесвик, работавший в области молекулярной физики; марокканцы Гессу и Алауи, занимавшиеся термодинамикой и магнитным резонансом; португальцы термодинамик Бротас и Вассало Перейра, с лицом словно с полотен XVI века, не только успешный физик, но и неплохой музыкант и живописец. Французов было лишь двое: Эдмонд, специалист в оптике, и Хаммад, занимавшийся броуновским движением. Все защитили прекрасные диссертации, но проработали с нами недолго, так как их блокировали комиссии. По этой причине большинство наших аспирантов были иностранцами. Случалось, де Бройль отказывался от исследователей, поскольку Академия наук не имела «*структуры приема*», как это звучало на ломаном административном языке. Ниже я привожу письмо (от 26 апреля 1976 года) – прекрасный пример посланий, которые получали кандидаты:

«*Господин!*

В ответ на ваше представление в качестве ассистента физики комиссия E специалистов B Университета Париж 6 обязала меня запросить у вас следующие уточнения: a) можете ли вы обосновать выбор принимающей организации (лаборатория, группа) в Университете Париж 6 для ваших исследований? (и/или) b) каков точный статус фонда Луи де Бройля относительно CNRS и Министерства национального образования? Я должен пояснить, что *при условии ответа на вопрос b утвердительный ответ на вопрос a в нынешних обстоятельствах является необходимым. Прошу вас…[и т. д.].*

Р/комиссия E специалистов В Университета Париж 6.

Подписано: Ж… Л... Д...»

Можно представить, каков был бы в 1921 году ответ де Бройля на такое письмо*:* «*Принимающая сторона является частной лабораторией моего брата, расположенной в частном учреждении его тещи. У нее нет никакого статуса по отношению к Министерству национального образования*».

Лишь постоянные участники семинара академии – Фер, Андраде э Сильва и я – занимали свои посты длительное время. Молодые же сотрудники по своему желанию могли покидать де Бройля и менять лаборатории. За исключением Бесвика, иностранцы разъехались. Таким образом, оказалось, что стабильность нашей группы невозможна. Другие французы, участвовавшие в семинаре, были приглашенными специалистами из различных областей физики (кроме квантовой механики, поскольку специалисты, к которым обращался де Бройль, смотрели на него как на зачумленного).

Мы ощущали неуверенность в завтрашнем дне, обусловленную репутацией нашего покровителя, и шаткость положения семинара, хотя и элегантного, но хрупкого в социальном плане. Я не раз слышал разговоры о том, что де Бройль не поддерживал своих учеников, приближал завистников, от которых должен был бы защищать. Надо признать, он не умел обращаться в комиссии, но уверяю, что он заботился о нас и поддерживал своим авторитетом. Он приглашал в свой кабинет в академии даже генерального директора CNRS, однако тот был не в силах помочь, поскольку консультирующие комиссии в принципе являлись независимыми. Он хотел создать для нас специальную организацию, но преждевременная смерть нарушила планы.

Чтобы укрепить положение Андраде э Сильва, Фера и мое, Луи де Бройль помог нам поступить на работу в лабораторию ядерной физики Жолио-Кюри в Орсе, где мы работали над ускорителями частиц. Спустя какое-то время мы добились признания, и вскоре нас завалили просьбами о сотрудничестве. Как видим, у модной физики есть и хорошие стороны. По нашей просьбе де Бройль написал директору, что нуждается в нас.

У нашего гения появилась новая идея, он организовал группу, связанную с CNRS, и пожелал ею руководить, в чем ему не смогли отказать. Де Бройлю выделяли ежегодно кредит в 3000 франков. Группа проработала с 1964 по 1975 год и обеспечила свою легитимность. Когда администрация спрашивает, кто вы такие, то надо уметь дать достойный ответ. Но в 1970 году, когда я подал прошение на должность руководителя исследований в CNRS, член комиссии прямо заявил: «*Наступит время, когда вам придется покинуть де Бройля для работы в лаборатории. Это облегчит ваше продвижение*».

Таким вот образом научное сообщество выражало признательность славе французской науки. У меня было трое детей, и потому я был просто обязан добиться повышения. Я обещал попытаться и обратился к шефу лаборатории молекулярной физики, которого хорошо знал. Он честно сказал, что не знает, в какой области я мог бы оказаться полезным ему. По правде, я тоже этого не знал. Однако мы расстались на хорошей ноте, и я решил, что исполнил свой «долг». И все же мое продвижение было обеспечено, хотя процедура, через которую я прошел, была нелегальной. Мне не простили приверженность де Бройлю, и это стало концом моей научной карьеры.

В 1972 году мы организовали в зале заседаний Французской академии прекрасный праздник, посвященный 80-летию Учителя. Можно было еще раз видеть, сколько людей из академического мира остались верны ему и выражали искреннее восхищение. (Это было, однако, излишне и только удаляло его от сообщества. Научные же инстанции, которые действительно могли помочь, отказывали де Бройлю в просьбе собрать учеников для продолжения недавних работ.) Церемония была волнующей и проходила в присутствии Жака Руефа, канцлера Института Франции и многочисленных гостей. Мы произносили красивые речи, на которые де Бройль непринужденно отвечал, вспоминая свое детство и развитие карьеры, выражая веру в более описательную квантовую механику и в продолжение недавно начатых работ.

Он сказал несколько забавных слов по поводу своего неутомимого интереса к новому: «*Я настолько много прочел за свою жизнь, что удивляюсь, что у меня еще есть глаза*» *[5]*. Де Бройль связал свои работы с «*молодыми сотрудниками*», которые «*помогли осуществить эти задачи с преданностью и смелостью, так как всегда нужно ее иметь, чтобы бороться с устоявшимися идеями*». И добавил: «*Работа, которую я проделал с ними и которую сделал лично, позволила мне завершить разработку очень важной проблемы, и я рассматриваю последние десять лет как наиболее прекрасные в моей жизни с интеллектуальной точки зрения*» *[5]*.

Удивительное заявление для того, кто знал сколько «прекрасных лет»! Но он говорил не об открытиях, а о важности «*постановки вопроса*» и не обольщался значением последних работ. В его возрасте он мог только расставить «*вехи новой микрофизики*» (согласно названию последней его книги) [110]. Однако это были годы свершений, в течение которых он приблизился к своему научному идеалу, начав осознавать то, что сделал в юности, и предвидеть что-то сверх этого. Отыскивать в одиночестве крохи истины было для него более важным, чем обращать на себя внимание.

В докладе, являвшемся как бы научным завещанием, Луи де Бройль попытался оправдать все то, что сделал. Он понимал, что теория двойного решения была, может быть, лишь предварительным крайним средством (своеобразная абстрактная идея нелинейности), а термодинамика так и осталась незавершенной. Что он хотел легализовать, так это основные идеи своих работ:

«*Современный мыслитель, каким я считаю Бергсона, сказал, что в жизни у каждого имеется лишь одна великая идея, утверждение, которое может позволить юмористам добавить, что уже много иметь даже одну. Если у меня и была великая идея в жизни, так это, несомненно, та, которую я изложил* *в первой главе моей докторской диссертации, где для получения ясного представления ассоциации волн и частиц я ввел идею: частица перемещается со своей волной так, что внутренняя частота остается постоянно в фазе с частотой волны. В этом заключается принцип согласованности фаз, который, как мне кажется сегодня, является настоящим ключом к загадке сосуществования волн и частиц. Однако что по-настоящему необычно, так это полное пренебрежение данной фундаментальной идеей…*» *[5].*

Но не так уж важны ученые споры и одномоментные забвения. На самом деле эта идея была первым хрупким мостиком, переброшенным между атомизмом и теорией поля. Мы должны сохранить ее, как наследство.

И именно с этой целью великий мэтр в своем выступлении дал согласие на создание *Фонда Луи де Бройля*, целью которого должно было стать продолжение исследований в микрофизике по его пути. Это предполагало прежде всего развитие его идей, а также других попыток по углублению и обновлению микрофизики, более ясному представлению явлений в пространстве и времени. «*Я очень благосклонно отношусь к этому проекту,* – сказал он, – *но хочу подчеркнуть: не имею никакого личного интереса, так как уверен, что мои актуальные идеи вновь встанут на повестку дня. Однако, я думаю, мы сильно пожалеем, если они придут из-за границы, поскольку тогда не будет возможности разрабатывать их во Франции*».

Проект поддержал шефский комитет Института Франции, а осуществил почетный комитет, организованный по случаю 50-летия волновой механики, в 1973 году. Я принимал активное участие в его работе и занимался всеми делами. Выступал посредником, когда кто-нибудь хотел представить де Бройлю идею, не касавшуюся непосредственно его исследований и потому ранее отклоненную. Я был свидетелем и невольным участником нескольких попыток воздействовать на де Бройля, но не с целью наложить руку на будущий фонд, а для того, чтобы привязать его к официальным научным организациям. Только наиболее близкие к нему люди, Дюпой и Трийя, сразу поняли, что первое его условие – независимость. Однажды почетный комитет с моей подачи предложил де Бройлю сделать фонд частью Института Франции. Я знал, что он враждебно относится к этому, так как не желает быть связанным по рукам и ногам. Однако реакция мэтра оказалась более живой, чем можно было предвидеть. Он не на шутку рассердился и закричал, покраснев от возмущения: «*Не может быть и речи об этом!*» Я попытался привести довод: «*Вы знаете, они хотели отдать вам почести*», но вызвал еще больший гнев. Де Бройль ответил: «*Передайте им, что я плюю на почести! Г-н Лошак, я и так сыт ими по горло. Передайте это*». И повторил как бы для себя: «*Плюю я на почести*». Это было единственное выражение из разговорно-сниженной лексики, которое я слышал от него за 35 лет. И я привожу его, чтобы показать, до какой степени давление научной среды выводило его из равновесия, хотя он выглядел сдержанным, и как он желал, чтобы ученики продолжили дело после его кончины. Я заметил с улыбкой, что не вижу способа, как передать его отказ почетному комитету. Мы нашли приемлемую форму.

Признательность и симпатию Луи де Бройль испытывал к Оливье Моро-Нере, с которым мы осуществляли проект фонда. Этот крупный финансист, умный, властный и влиятельный, искренне ценил поэзию. С неистощимой преданностью он написал своей рукой устав фонда и ввел его в Фонд Франции, нейтральность которого подходила де Бройлю. Парадокс, но он разорился в финансовой сфере. Это был контрудар нефтяного кризиса 1974 года. Фонд был открыт с незначительной суммой денег на счету, зато с большой помпой – в зале заседаний Академии наук, в присутствии Луи Нееля, нобелевского лауреата по физике и первого президента фонда, который объединил свой престиж с авторитетом Луи де Бройля. Церемония открытия проходила в присутствии министра национального образования и посла Великобритании. Последний прибыл, чтобы вручить де Бройлю книгу, изданную в юбилейном оформлении королевским колледжем Лондона. Ученики де Бройля подготовили для него написанные от руки поздравления, о которых я уже упоминал [5]. Далее последовало несколько прекрасных выступлений. Один из членов академии предложил мне издать их, но де Бройль сказал: «*Это не представляет никакого интереса. Беритесь за работу и не поддавайтесь влиянию*». Его собственное выступление оказалось невпечатляющим, поскольку, кроме обычных реверансов, он мало говорил о физике. В частности, он заявил:

«*Я знаю, что мое мнение не разделяют большинство физиков-теоретиков, многие из которых, может быть, и не знакомы с моими недавними работами. Но так как я стоял в течение 50 лет у основания всей квантовой физики, то, на мой взгляд, вправе иметь собственную точку зрения*».

В 1973 году де Бройль опубликовал еще две работы по случаю 50-летия волновой механики. Одну поместили в его юбилейной книге, другую – в докладах Академии наук под названием «*Об истинных основных идеях волновой механики*» [111].

В следующем году де Бройль готовился оставить все должности, включая пост непременного секретаря академии. Его физическое и умственное состояние было на тот момент удовлетворительным, но он боялся казаться одряхлевшим. Он давно принял решение, о котором никому не говорил. Невольно я помешал планам Луи де Бройля, взяв на себя инициативу по организации большой выставки, посвященной волновой механике. Мероприятие прошло во Дворце открытий в 1974 году и было приурочено к 50-летию защиты диссертации. Де Бройль понял, что этот год является символическим и было бы невежливо уходить в отставку.

Прошел еще один год. К несчастью, де Бройль стал плохо ходить, и летом 1975 года произошел небольшой инцидент: он упал на мостовой во дворе института. Боли не было, обошлось почти без свидетелей, но он испытал большое унижение, оказавшись на земле и не имея возможности подняться. Это был спектакль, повторения которого он не желал. По возвращении де Бройль подал в отставку с поста непременного секретаря. Никто этого не ожидал, поэтому родился слух, что его поступок связан с реформами в академии, и он решил уйти в знак протеста. Он поспешил развенчать миф и даже отправил опровержение в журнал «Аврора», которое подписал сам.

Луи де Бройль никогда не говорил об этих реформах, за исключением одной, связанной с докладами Академии наук (научными публикациями академии). Он был недоволен процедурой посланий с просьбой дать оценку представленным сообщениям, поскольку хотел, чтобы каждый писал в своей манере, не придерживаясь установленных правил. Он ожидал меня, чтобы показать присланные формуляры и тут же выбросить их в корзину. Мэтр был особенно против привлечения анонимных *экспертов*, которые не могли разделить ответственность и способствовали произволу в науке. Сам он, как я уже говорил, прибегал к этой системе, но хотел иметь последнее слово и быть единственно ответственным за подписанное им решение. Всю жизнь он был озабочен свободой научных исследований и не раз говорил мне, что современные *эксперты*, укрываясь за анонимностью, никогда не пропустили бы в печать его сообщения 1923 года или же статью Эйнштейна о фотоне. «*Во всяком случае,* – добавил он однажды, *– я не представляю, что бы они могли написать в отзыве по их поводу*».

Последний раз на публике де Бройль появился на семинаре фонда. Он торжественно открыл это собрание осенью 1975 года в Национальной консерватории искусств и ремесел, где мы обитали в течение 15 лет, в лаборатории нашего друга Мишеля Казена. После семинара я проводил его до метро, так как он отказался от поездки на моей машине, сказав: «*Вы должны оставаться со своими друзьями*». По дороге он добавил: «*Я больше не вернусь. Это уже не мой семинар, а ваш. Я буду только вам мешать*».

Так закончилась карьера и общественная жизнь Луи де Бройля. Ему оставалось прожить 12 лет.

Он радушно принимал меня каждую среду в Нейли. Другие визиты прекратились. Однажды он вовсе отменил их и с радостью встречал только близких: родственников, Трийя, вашего покорного слугу и еще несколько персон. Его корреспонденция значительно сократилась, даже новогодних открыток, приходивших некогда в количестве трех сотен, теперь было не больше ста, ведь люди, окружавшие его, стали исчезать.

В течение первых лет мои посещения носили характер рабочих сеансов, во время которых мы разговаривали в основном о физике. Фонд становился любимым детищем де Бройля. Он беспокоился о деталях его деятельности, делая кое-какие предложения и давая мне рекомендательные письма для полезных или просто интересных визитов. Он приветствовал появление новых сотрудников: Фарга, заместителя директора, бывшего ученика Фера в геологической школе, где он стал преподавать; Динера, директора по внешним связям, квантового химика, предложившего совместно с Клавери «альтернативную» теорию (франко-английскую) квантовой механики; Караченцева, который долго занимался квантовой теорией поля, но однажды, задавшись вопросом о ней, прочитал де Бройля; Корнье Делануэ, который был из тех людей, каких любил де Бройль, инженера, занимавшегося физикой с упорством и прагматизмом; Уде, наделенного большим воображением, огорчавшим ортодоксов; многих других, которых я не буду перечислять. Как и все мы, они не получали вознаграждения от фонда и были заняты в других местах, потому что мы не могли привлекать исследователей официальными путями. Заниматься наукой в таких условиях было практически невозможно, хотя финансовое положение заметно улучшилось: была продана собственность де Бройля в Сен-Жермене, а еще он распорядился Нобелевской премией. «*Я вам ее завещаю*, – сказал он мне, – *так как она не принадлежит моей семье, это плод моей работы*».

Когда де Бройль был здоров, он внимательно следил за нашей деятельностью: работами, семинарами, конгрессами, которые мы проводили благодаря меценатам, в частности Мэди Сметс Хенкинне. Она гостеприимно предоставляла нам жилище отшельников в Верхнем Провансе, в деревне Пейереск (эта деревня принадлежала великому гуманисту эпохи Возрождения Николя Клоду Фабри де Пейереску). Как бы ни складывались потом отношения, доверие меценатов прежде всего было связано с именем де Бройля, которое носит фонд, так как вне тесного круга ортодоксальных физиков-теоретиков все знали, кем он является и чем они обязаны ему.

Де Бройль придавал большое значение нашему журналу «*Анналы Фонда де Бройля*». Он читал его, делал замечания и сам писал статьи. Этот журнал критиковали наши противники, что было неудивительно. Ведь его создавали для того, чтобы освещать темы, находившиеся под запретом. Они рассматривали наши работы как вздор, мы же широко использовали работы противников, чтобы показать, как они скрывают за формальной математической элегантностью иссохшее древо теории, которая умеет перемалывать одно и то же зерно, не занимаясь дальнейшими поисками.

Когда идешь другим путем, как де Бройль и его ученики, надо уметь сопротивляться разочарованиям и сарказму противников, а также подобию слушателей, нашествию фальшивых гениев, дающих уроки из тени, – фанатичных противников официальной науки и «делателей» сырых теорий, изобретающих решающие эксперименты. Надо уметь противостоять невеждам, изнуряющим разглагольствованиями во имя свободы, которую мы проповедуем, и полагающим, что легко делать большую физику с помощью небольших схем мысленного эксперимента, как это делали основатели квантовой механики. Они не понимают, что великие физики сначала делают большую физику, а затем занимаются малыми схемами. Как к инакомыслящим, к нам влекло таких индивидуумов, которые становились новыми противниками, «разочарованными диссидентством», когда им открывалось, что «мы не стоим дороже других», с которыми разделяем, к их неудовольствию, критерии истины: эксперимент и логическую связность. Наш журнал, казавшийся свободным, выбрасывал в корзину больше рукописей, чем другие издания, и даже иногда денежные чеки, выдаваемые за публикацию нелепостей. Определенно, это тяжелая задача – интересоваться общими проблемами!

Годы шли, и я видел, как де Бройль начинал удаляться от конкретных вопросов и интересоваться только принципами. Он становился слабым для вычислений и больше не читал, а перечитывал. Сознавая происходящие с ним перемены, он старался «обезопасить» себя и принимать незнакомых посетителей только в моем присутствии. Он ввел за правило трехстороннюю беседу и предоставил мне возможность отвечать за него, довольствуясь одобрением ответа. Вообще-то, наше маленькое сообщество избегало посетителей, приходивших лишь для того, чтобы взглянуть на него и удалиться в восхищении, найдя его неизменившимся. Однажды де Бройль сказал: «*Мои ноги плохо ходят, но, к счастью, голова хорошо работает*». Это было свидетельством необратимых изменений. Он уходил в воспоминания, порой очень увлекательные, его память сохраняла далекое прошлое, как это часто бывает у пожилых людей. Он больше не говорил о физике, и наиболее очевидные факты ускользали от него. Утопающий в старости, он был тем более впечатляющим из-за того, что его корабль был еще в прекрасном состоянии.

В конце лета 1981 года (я был в отпуске) меня вызвали в Париж. Де Бройля только что прооперировали по поводу кишечной непроходимости. Чуть позже из-за почечной недостаточности пришлось сделать вторую операцию. Этого он не выдержал. В течение нескольких дней он полностью потерял память, которая временами обрывочно возвращалась к нему. Он стал беспомощным, и три санитарки, сменяя друг друга, день и ночь находились рядом с ним. Он сохранял бодрость, благородство в лице и, судя по некоторым обрывкам фраз, возвышенность мысли, но взгляд терял глубину. Де Бройль уже не был самим собой и знал это. Однажды, когда одна из санитарок уходила в отпуск, она представила новую сиделку, сказав ей: «*Вы знаете, что г-н де Бройль очень большой ученый*». Но он, приподнявшись, прервал ее характерным жестом, положил руки на стол, а потом, опустив их, сказал упавшим тоном: «*Скажите лучше: "был большим ученым". Теперь я всего лишь такой же старик, как другие*».

Его перевезли в американский госпиталь в Нейли, где он пробыл несколько лет. Он потерял Виктора де Панжа, наиболее близкого родственника, старшего сына сестры Полины. Потом умер Жан Бешад. Последние месяцы жизни Луи де Бройль провел в клинике Лувесьенна на западе Парижа, где и скончался утром 19 марта 1987 года на 95-м году жизни. В следующем году не стало Франсуазы Бешад.

Его похороны состоялись в Сан-Пьер де Нейли «*без гербов и выступлений*», согласно его воле, в присутствии сотни человек из его семьи, наиболее близких собратьев, учеников и друзей. Единственной церемонией было заседание, посвященное его памяти, которое прошло под куполом института. Ни официальные власти, ни университет, ни CNRS, ни Французское физическое общество (президентом которого он был), ни ЦЕРН (к образованию которого приложил свой голос) никак не отметили его кончину. Молчание хранили и в Институте Анри Пуанкаре, во всех физических лабораториях, на телевидении и радио.

Пресса также мало уделила этому внимания. То там, то тут появлялись заметки с различными неточностями. Сделано было еще меньше, чем он предполагал в адресованном мне письме от 15 августа 1976 года: «*Когда я умру, мне различным образом будут воздавать почести в течение нескольких дней, потом замолчат. Так всегда происходит с известными личностями*» [112]. Но о нем не вспоминали ни в день похорон, ни позже.

Почему? Естественно, имел значение возраст: в 95 лет люди уже находятся вне современности. Кроме того, его скромность и отказ от посредничества были также с этим связаны. Играло свою роль и общее невежество: не многие знают, что квантовые объекты из работ де Бройля составляют часть нашей жизни и что его идеи изменили картину мира. Смерть великого ученого давала прекрасную возможностью просветить их. Почему же этого не было сделано? Просто потому, что научное сообщество не пожелало. И нечего обвинять власти. Физики, изгнавшие де Бройля из своих рядов за критику квантовой механики, не хотели и слышать о его кончине.

Не будем забывать, что с самого рождения квантовой механики представители одной из ее ветвей узурпировали власть и начали гонения на соперников – сторонников волны и описывающего ее уравнения, без которых сама теория оставалась немощной и еще более непонятной, чем была. Избавились от де Бройля, открывателя волны, который был принимаем в кругу *квантистов* только «на кончике языка». Лишь сами основатели теории имели ту же смелость, что и он, и вспоминали удивление, которое вызвало его открытие. Несмотря на разногласия, они ценили и уважали де Бройля. Но нынешние теоретики ничего об этом не знают. Многие не читали ни строчки из его трудов и не хотели этого делать, как по традиции деревенской жизни, поскольку он был противником их «предка», Нильса Бора. Он просто другой, имя которого не стоит произносить. Не знают даже, что он был великим физиком.

В одной из недавних книг упоминание об открытии волны де Бройля сопровождается такой фразой: «*В 1923 году Луи де Бройль (1892–1987) предложил распространить на материальные частицы, в частности на электроны, идею квантов излучения Эйнштейна*» [113]. Конечно же, это не ложно, но не зря Стендаль говорил о Бонапарте, что «*Цезарь и Александр имели преемника*». По меньшей мере можно отметить, что это сдержанно и кратко (хотя автор вполне лиричен в высказываниях о Боре). На следующей странице говорится о де Бройле. Автор пытается целиком приписать заслугу дуализма волн и частиц Эйнштейну (который об этом не просил) – историческая ложь!

«*Успех гипотезы де Бройля привел к тому, чтобы задаться вопросом… Не являются ли пределы классической механики аналогичными пределам геометрической оптики, проявившими себя в явлениях дифракции и интерференции?*» [113].

Итак, кем же был де Бройль, великий первооткрыватель?! Автор хочет внушить нам, что это были *другие, внезапно озаренные.* Держал ли он когда-нибудь в руках диссертацию де Бройля?

К сожалению, эта книга не является исключением. Она отражает отношение, ставшее «естественным». Так, введение в недавно переизданном сборнике трудов Нильса Бора [114] приписывает волновую механику *полностью Шредингеру*. Там имеется упоминание о волне без указания имени ее автора. Имя появляется лишь во фразе «*Шредингер, развив основную идею де Бройля, добился громадного успеха…*» Однако нигде в книге не сказано, о какой идее идет речь.

Я мог бы привести еще немало примеров подобного нечестного отношения к Луи де Бройлю. Так, это имя часто опускали в перечнях, где его присутствие было очевидно. В 1991 году Французское физическое общество выпустило рекламу «*Физического журнала*», где указало имена хорошо известных ученых (все на английском языке), которые публиковали свои статьи: Эйнштейн, Ланжевен, Фридель, Оже, Кастлер, Неель, и Фрэнсис Перрен. Естественно, упомянуть о де Бройле «забыли», хотя в издании были напечатаны его важнейшие статьи.

Такое сокрытие великого имени не уникально в истории. Шампольон, например, при жизни подвергался нападкам, после смерти предан забвению, впоследствии реабилитирован, однако его имя отсутствует на обелиске на площади Согласия, а его улица в Латинском квартале известна только по кинофильмам. Карно оставался забытым во Франции в течение десятилетий, его официальный доклад по термодинамике даже не упоминался [24]. Это имя вернул нам лорд Кельвин, который приехал в Париж разузнать о Карно и понял, что ученый здесь неизвестен. Нечто похожее произошло и с Пуанкаре, который при жизни купался в славе, затем полвека подвергался гонению и оказался забытым во Франции по идеологическим причинам, из-за триумфа формализма, как и де Бройль. Когда американский математик Стефен Смайл получил медаль Филда, французский математик Рене Том сказал, что Смайл являлся одним из последних читателей Пуанкаре. Кстати, Пуанкаре был воскрешен из небытия также благодаря загранице: развитием его работ занялась русская школа.

Заглядывая в будущее, де Бройль, хорошо знавший историю, сказал, что поддерживает фонд, чтобы его идеи «*не вернулись к нам из-за границы*». Но неистовство по отношению к нему было исключительным. Оно не сравнимо было, к примеру, с умолчанием имени Планка – жертвы коллективной глупости. Все забыли, что он был великим физиком.

Отношение к де Бройлю являлось порождением идеологической войны: проклятие тому, кто выступал против догматического учения. А в финале – публикация фотографий участников Сольвеевского конгресса, на которых его лицо заретушировали, как в «*Большой советской энциклопедии*» зарисовали лица падших руководителей революции! То же, что Сартр говорил о коммунистах и Низане, можно сказать и об отношении к французским теоретикам: «*Недостаточно было, чтобы они умерли, надо было сделать так, чтобы они вообще перестали существовать*». Способы уничтожения были теми же и по тем же причинам. Теория относительности изменила наш взгляд на мир, но не превратилась в идеологию в отличие от квантовой механики, ставшей ею с самого начала. Почему?

Потому что, когда теория относительности утверждала, что измерения пространства и времени более сложны, чем это кажется, и из этого следуют важные выводы, она сделала величайшее открытие, но не заставляла нас порвать с обычным способом мышления. Когда де Бройль заявил, что дуализм волн и частиц всеобщ, из этого также вытекали важные выводы. Но если рассуждать, как де Бройль и Эйнштейн, что любая теория должна быть улучшена, то не было необходимости изменения способа нашего мышления. Мы окажемся перед трудной проблемой, которая вызовет дискуссии и даже, возможно, ссоры, но не породит идеологии, так как *идеология рождается из абсолютизма*.

Идеология начинается с момента, когда принято решение (как это сделал Бор), что теория *завершена* (об этом он говорил Гейзенбергу еще с 1927 года) и она является *новой парадигмой*, в соответствии с которой мы должны мыслить, изменив наш способ изучения мира. Так установился абсолютизм, и теория обгоняла эксперимент. Все время говорили об эксперименте, но имели право осуществлять его, только надев специальные очки. Дополнительность в квантовой механике была возведена в догму (так как она считалась завершенной), из-за чего и происходило неприятие скрытых параметров. Некоторые проблемы, такие как квантовые переходы, которые не могли разрешить в рамках созданной теории, были исключены из рассмотрения, поскольку считалось, *что нет смысла их даже ставить*. По мере развития цивилизации наше видение мира будет неизбежно усложняться и казаться все более странным, потому что все особенности и непонятные трудности существующей теории, возникшие иногда случайным образом (и присутствующие в любой теории), принимаются на веру и на их основе создаются *онтологические парадигмы,* вместо их исправления или по крайней мере «релятивизации» их важности. Так устанавливается новый научный дух, непримиримый к прежнему: «*Если мы хотим мыслить правильно, то мы должны неотступно бороться с галилеевой онтологией, которая не прекращает возникать в нашем мышлении*» [113]. Это напоминает следующее выражение: «*Новый человек должен заставить замолчать прежнего, который в нем дремлет*». Нечто подобное мы уже слышали в течение 70 лет. Все идеологии похожи друг на друга.

Как раз по той причине, что де Бройль представлял собой «*прежнего человека*», его имя избегали даже произносить. Его труды замалчивали, его заслуги приписывали другим, ибо требовалось подорвать репутацию прежнего хода мыслей и устаревшую галилееву онтологию, которая может лишь затуманивать мозги. Видите ли, «*все, на что она была способна в этом веке, так это создать лишь волновую механику и теорию относительности*». Де Бройлю не прощают противопоставление свободы духа системе.

На мой взгляд, все происходит от двух болезней, которыми страдает если не полностью вся физика, то по крайней мере в настоящее время наиболее престижная ее ветвь – микрофизика. Эти заболевания называются «*тени предков*» и «*успехи техники*».

Наше поколение пока не способно выйти из рамок науки, созданной плеядой гениев в начале XX века. Они виноваты во всем! Планк, Эйнштейн, Бор, де Бройль, Гейзенберг, Шредингер, Дирак, Паули заперли нас в стеклянную клетку слишком красивой науки. Даже тогда, когда мы стараемся посмотреть на мир с другой стороны, нам не удается выйти из клетки. Мы можем только пережевывать кванты и теорию относительности, как физики XVIII века могли лишь пережевывать творения Ньютона, пока Френель, Ампер, Фарадей, Карно не поставили задачи, на которые физика Ньютона не давала ответа. Тогда наука вновь двинулась вперед. Эта пора еще не наступила для нас, и пока еще физика находится в византийских склоках и разрешениях парадоксов.

Наиболее пустой является дискуссия о существовании скрытых параметров. Так как физика описывает лишь незначительную часть мира, а скрытые параметры соответствуют тому, чего пока мы еще не знаем, то, несомненно, в этом смысле они существуют! Утверждать или опровергать – это всего лишь метафизика. Физика же начинается с установления точных параметров, существование которых можно подтвердить, предсказав наблюдаемые эффекты, как это произошло в начале прошлого века со скрытыми атомными параметрами. Все остальное только литература. Те, кто претендует на доказательство того, что скрытые параметры не существуют, занимаются поисками частных примеров, противоречащих известным фактам, после чего они заявляют об абсолютном отсутствии так называемых скрытых параметров. Их коньком в течение нескольких лет является *теорема Белла*, претендующая на указание критерия существования скрытых параметров, которая с точки зрения физики ложна, так как содержит статистическую гипотезу, противоречащую законам квантовой механики, для случая, когда мы точно уверены, что она права. Многие, в том числе и автор этих строк, в течение нескольких лет говорили, что пока эксперимент не проведен, нечего удивляться его отрицательному результату. Но в связи с триумфом нового идеологического духа *эти авторы никогда не упоминались* ни сторонниками скрытых параметров, считавшими, что имеются ошибки в эксперименте, ни тем более их противниками, которые очень рады иметь «доказательство» того, что эти параметры не существуют. Если вы утверждаете, что критерий Белла несправедлив и что проблема существования скрытых параметров в общем виде не имеет смысла, то вы уже не член «семьи» и с вами больше не разговаривают. Сторонники дискуссии стоят на страже своего лагеря. Отметим, что ни Эйнштейн, ни де Бройль не претендовали на общую постановку вопроса и интересовались лишь точными параметрами положения частицы. Правы они или нет, это другое дело, здесь можно дискутировать, но по крайней мере это физическая задача.

Однако имеется другой груз, значительно более тяжелый, который оказывает давление на науку, – груз техники. Это происходит вследствие того, что наше воображение искажает реальное состояние техники в лучшую или худшую сторону, вызывая этим некоторое чувство обмана (в результате выигрывают другие), но в то же время и чувство победы, приятное и обманчивое. Наверное, в конце концов это все же наука, которая одерживает таким образом победы, потому что именно она приносит технике свои основные идеи. Признаюсь, когда мы рассказывали об этом с Динером и Фаргом в «*Квантовом объекте*» [78], то делали это с радостью.

К сожалению, эти победы, одержанные по заданию промышленности, оказывают на науку отвратительное влияние. Прежде всего общественность верит в непрерывный прогресс науки, что позволяет ей выколачивать деньги на науку, в то время как в физике за 60 лет не появилось ни одной новой великой идеи. И потом техника подавляет исследования подделкой материала. Но проводя все более и более дорогостоящие эксперименты, мы все же не имеем гарантии, что получим более значительные результаты. Если бы люди знали соотношение «качество – цена» некоторых экспериментов, в частности в области частиц, они пришли бы в ужас. И в особенности эта жажда приложений на всех уровнях убивает фундаментальные исследования, которые кажутся слишком медленными, слишком туманными, слишком случайными, поскольку выглядят почти все время безуспешными, оправдываясь редкими проблесками света. Как объяснить государству, общественности, спонсорам (я не осмеливаюсь больше говорить о меценатах), что эти проблески представляют *все* не только для науки, но и для ее приложений. Как объяснить им, что если бы они подвергли де Бройля ритму современной лаборатории, то не было бы ни его волны, ни приложений, связанных с ней? Они сказали бы: «*Вы не де Бройль!*» Но как объяснить им, что именно долгий аскетизм исследователей и их лишения готовят почву для больших свершений, которые позволят однажды приумножить капитал научных идей – неисчерпаемый источник подпитки для технологии?

В наше время всех учат быть энергичными и эффективными. И ничего не делается для сохранения мечты скромного, уединившегося для своих размышлений ученого. А ведь завтра он, может быть, сделает такой шаг в науке, на который не способны громадные лаборатории с их группами сотрудников, конгрессами, докладами, бюрократией и теплыми местечками. Современное образование разрушает в молодежи всякий интерес к теоретическим вопросам, благоприятствуя получению практических рецептов.

Противодействием этому мог бы быть совет для молодежи, данный математиком Абелем в начале этой книги, и то, что делал Луи де Бройль: «*Читайте авторов, а не учебники*». И тогда вы поймете что-нибудь. Среди авторов выбирайте де Бройля и делайте так же, как он: читайте их всех. Не верьте в человеческое провидение, его нет и никогда не было. Не читайте де Бройля как посторонний. Не верьте в окончательно установленные истины. Пыль библиотек полна ими. Остерегайтесь слишком общих ключей для понимания мира. Они все могут оказаться фальшивыми. Не слушайте никакого запрета. Если вам скажут, что скрытых параметров не существует, вспомните, что два века назад то же самое говорили об атомах, которые и были объектами со скрытыми параметрами. Но не думайте, что будущая теория – обязательно со скрытыми параметрами, так как вы об этом еще ничего не знаете! И, кроме того, рассматривайте нашу науку как всякую другую науку. Она создана гениями, но, как всякое человеческое творение, имеет свои пределы и слабости. Она освещает лишь малую грань истины, и она не вечна, включая и ее законы. Гении в XIX и в начале XX века пошли против Ньютона, как против отца. Аналогичным образом следующая гениальная идея будет противоречить теории относительности, квантам, волне де Бройля, соотношениям Гейзенберга в новой, пока неизвестной области. Если вы хотите стать однажды человеком, который сделает этот первый шаг, вы можете вдохновиться примером де Бройля, его требованием реализма, его желанием ясности и его стремлением к представлению объектов в пространстве и времени, его свободой духа и его способностью все ставить под вопрос.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Lochak, G.* Эйнштейн и свет. Revue du palais de la Découverte, vol. 8, n 79, 1980.

2. *Lanczos, C.* Эйнштейново десятилетие (1905–1915). Elek Science, London, 1974.

3. *Comtesse J. de Pange.* Каким я видела 1900. Grasset, Paris, 1962 (t. 1), 1965 (t. 3), 1973 (t. 4).

4. *Broglie, M. de, Broglie, L. de.* Речи при принятии Луи де Бройля во Французскую академию. Paris, 1945.

5. Л. де Бройль: его концепция физического мира (коллективный труд). Gauthier-Villars, Paris, 1973.

6. Л. де Бройль: научный путь (избранные тексты с предисловием Ж. Лошака). La Découverte, Paris, 1987.

7. *Broglie, L. de.* Новая физика и кванты. Flammarion, 1937; Collection Champs (с предисловием Ж. Лошака), Paris, 1966.

8. *Broglie, L. de.* Достоверность и недостоверность науки. Albin-Michel, Paris, 1966.

9. *Newton, I.* Трактат по оптике. Рукопись: 1675; первое английское издание: 1704. Gauthier-Villars, Paris, 1955.

10. *Newton, I.* Математические начала натуральной философии. Первое английское издание: 1686. Blanchard, Paris, 1966.

11. *Huygens, Ch.* Трактат о свете. Рукопись: 1678; первое голландское издание: 1690. Gauthier-Villars, Paris, 1920.

12. *Fresnel, A.* De la lumière. Первое издание: 1822. Colin, Paris.

13. *Lochak, G.* Les arrière-petits-enfants de Maxwell (написано по случаю столетия Эйнштейна). Annales de la fondation Louis de Broglie, 4, n 1, p. 1, 1979.

14. *Broglie, L. de.* Continu et discontinu en physique modern. Albin-Michel, Paris, 1941.

15. *Plank, M.* Autobiographie scientifique. Albin-Michel, Paris, 1960. Переиздание Collection Champs, Flammarion, 1991.

16. *Broglie, L. de.* Sur les sentiers de la science. Albin-Michel, Paris, 1960.

17. *Dugas, R.* La Théorie physique au sens de Boltzmann. Le Griffon, Neuchâtel, 1959.

18. *Einstein, A., Besso, M.* Correspondance 1903–1955. Hermann, Paris, 1972.

19. *Broglie, L. de.* Nouvelles Perspectives en microphysique. Albin-Michel, Paris, 1956, переиздание Collection Champs, Flammarion, 1992.

20. La Théorie du rayonnement et les Quanta, rapports et discussions. Gauthier-Villars, Paris, 1912.

21. *Broglie, M. de.* Les Premiers Congrès de physique Solvay et l'orientation de la physique depuis 1911. Albin-Michel, Paris, 1951.

22. Louis de Broglie que nous avons connu. Коллективный труд. Bibliothèque des Annales de la fondation Louis de Broglie, Paris, 1988.

23. *Plank, M.* Leçons de thermodynamique. Hermann, Paris, 1913.

24. *Bruhnes, B.* La Dégradation de l'energie. Flammarion, Paris, 1909; Collection Champs, 1992.

25. *Pais, A.* Inward Bound of Matter and Forses in the Physical World. Clerendon, Oxford, Oxford University Press, New York, 1986.

26. *Poincare, H.* La valeur de la science. Flammarion, Paris, 1904.

27. *Laue, M. von.* Geschichte der Physik. Athenaum, Bonn, 1950 (3e edition).

28. *Perrin, J.* Les Atomes. Flammarion, Paris, 1991; Collection Champs, 1992.

29. *Lorentz, H.-A.* Les Théories statistique en thermodinamique. Лекции, прочитанные в Коллеж де Франс в 1912 году. Teubner, 1916.

30. *Broglie, M. de.* Les Rayons X. PUF, Paris, 1922.

31. *Broglie, L. de.* Comptes Rendus. **173**, p. 1160, 1921.

32. *Broglie, L. de, Broglie, M. de.* Introduction à la physique des rayons X. Gauthier-Villars, Paris, 1928.

33. *Broglie, L. de.* Rayonnement noir et quanta de lumière. Journal de Physique, t. III, série VI, p. 811, 1922.

34. *Broglie, L. de.* Sur les interférences et la théorie des quanta de lumière. Comptes Rendus, **175**, p. 811, 1922.

35. *Planck, M.* The Theory of Heat Radiation. Dover, New York, 1959.

36. *Broglie, L. de.* Ondes et quanta. Comptes Rendus, **177**, p. 507, 1923.

37. *Broglie, L. de.* Quanta de lumière, diffraction et interférences. Comptes Rendus, **177**, p. 548, 1923.

38. *Broglie, L. de.* Les quanta, la theorie cinetique des gaz et les principe de Fermat. Comptes Rendus, **177**, p. 630, 1923.

39. *Broglie, L. de.* Recherches sur la théorie des quanta (thèse 1924), Masson; Annales de Physique, 10e série, t. III, 1925.

40. *Broglie, L. de.* Sur la dynamique du quantum de lumière et les interférences. Comptes Rendus, **179**, p. 1039, 1924.

41. Loui de Broglie physicien et penseur. A. George ed. (ouvrage collectif). Albin-Michel, Paris, 1953.

42. *Broglie, L. de.* Nature. **112**, p. 540, 1923.

43. *Valéry, P. Cahier II.* Pléiade, Gallimard, Paris, 1974.

44. Correspondance Einstei – Langevin. La Pensée, Paris, 1953.

45. *Frenkel, J.* Wave Mechanics. T. I, Clarendon, Oxford, 1932.

46. *Forman, P.* Weimar Culture, Causality, and Quantum Theory, 1918–1927. Historical Studies in Physical Science. University of Pennsylvania Press, 3, 1971.

47. La Pensée physique contemporaine. Ouvrage collectif: S. Diner, D. Fargue, G. Lochak ed. Fresnel, Paris. 1982.

48. *Heisenberg, W.* Development of Concepts in the Historical of Quantum Theory. American Journal of Physics, **43**, n 5, 1975.

49. *Andrade e Silva, J., Lochak, G.* Quanta, Grains et Champs, Hachette, coll. L'univers des connaissances, Paris, 1969.

50. *Lochak, G.* La Géométrisation de la physique. Flammarion, Collection Nouvelle bibliothèque scietntifique, Paris, à paraitre.

51. *Schrödinger, E.* Mémoire sur la mécanique ondulatoire. Alcan, Paris, 1933.

52. *Lochak, G.* Convergence and Divergence between the Ideas of de Broglie and Schrödinger in Wave Mechanics. Foundations of Physics, **17**, p. 1189, 1987.

53. Letters on Wave Mechanics (Przibram éd.). Vision, Londres, 1967.

54. *Broglie, L. de.* Sur la fréquence propre de l'eléctron. Comptes Rendus, **180**, p. 498, 1925.

55. *Broglie, L. de.* Les principes de la nouvelle mécanique ondulatoire. Journal de Physique, p. VII, série VI, p. 321, 1926.

56. *Broglie, L. de.* La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. Journal de Physique, p. VIII, série VI, p. 225, 1927.

57. Electrons et Photons [доклады и дискуссии на V Сольвеевском физическом конгрессе 1927]. Gauthier-Villars, Paris, 1928.

58. *Einstein, A., Grommer, J.* Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz. Sitzungs-ber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., p. 2, 1927.

59. *Plank, M.* Initiation à la physique. Flammarion, Paris, 1941; réed. Collection Champs, 1990.

60. *Broglie, L. de.* Etude critique des bases de l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire. Gauthier-Villars, Paris, 1963.

61. *Broglie, L. de.* La physique quantique restera-t-tlle indéterministe? Со вкладом Жан-Пьера Вижье. Gauthier-Villars, Paris, 1953.

62. *Broglie, L. de.* Physique et Microphysique. Albin-Michel, Paris, 1947.

63. *Poincare, H.* Dernière Pensées, Flammarion, collection Nouvelle bibliothèque scitntifique, Paris, 1963.

64. *Broglie, L. de.* Introduction à l'étude de la mécanique ondulatoire. Hermann, Paris, 1930.

65. *Broglie, L. de.* Ondes et Mouvements. Gauthier-Villars, Paris, 1926; Gabay, Paris, 1988.

66. *Broglie, L. de.* Ondes et Corpuscules. Hermann, Paris, 1930.

67. *Broglie, L. de.* L'Electron magnétique. Hermann, Paris, 1934.

68. *Dirac, P.A.M.* Direction in Physics. Wiley, New York, 1978.

69. *Broglie, L. de.* Une nouvelle conception de la lumière. Hermann, Paris, 1934.

70. *Broglie, L. de. N*ouvelles recherches sur la lumière. Hermann, Paris, 1936.

71. *Broglie, L. de.* Une nouvelle théorie de la lumière, la mécanique ondulatoire du photon. T. I et t. II, Hermann, Paris, 1940, 1942.

72. *Broglie, L. de.* Theorie générale des particules à spin. Gauthier-Villars, Paris, 1943.

73. *Broglie, L. de.* Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs. Gauthier-Villars, Paris, 1949 (2e edition 1957).

74. *Broglie, L. de.* Ondes électromagnétique. Gauthier-Villars, Paris, 1967.

75. *Broglie, L. de.* Sur une forme plus restrictive des relations d'incertitude (d'apres M.M. Landau et Peierls), Actualités scientifiques et industruelles, XXXI, Hermann, 1932.

76. *Broglie, L. de.* Matière et lumière. Albin-Michel, Paris, 1938.

77. *Broglie, L. de.* La Physique novelle et les Quanta. Flammarion, Paris, 1937, Collection Nouvelle bibliothèque scientifique, 1974; Collection Champs, 1987.

78. *Lochak, G., Diner, S., Fargue, D.* L'Objet quantique. Flammarion, Collection Nouvelle bibliothèque scientifique, Paris, 1989; Collection Champs, 1991.

79. *Broglie, L. de.* Physique et Microphysique. Albin-Michel, Paris, 1947.

80. *Broglie, L. de.* Théorie de quantification dans la nouvelle mécanique. Hermann, Paris, 1932.

81. *Broglie, L. de.* La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules. Gauthier-Villars, Paris, 1939.

82. *Broglie, L. de.* Théorie générale des particules à spin. Gauthier-Villars, Paris, 1943.

83. *Broglie, L. de.* Théorie des particules de spin ½ (électrons de Dirac). Gauthier-Villars, Paris, 1951.

84. *Broglie, L. de.* Problèmes de propagation guidée des ondes électromagnétique. Gauthier-Villars, Paris, 1941.

85. *Broglie, L. de.* Optique ondulatoire et corpusculare, mécanique ondulatouire. Hermann, Paris, 1932.

86. *Feuer, L. S.* Einstein and the Generations of Science. Basic Book, New York, 1974.

87. *Feuer, L. S.* Einstein et le conflit des générations. Complexe, Bruxelles, 1978: неполный французский перевод предыдущей работы.

88. *Broglie, L. de.* Divers Questions de mécanique et de thermodinamique classiques et relativistes. Неизданный курс лекций 1948–1949 в публикации Фонда Луи де Бройля.

89. *Broglie, L. de.* La statistique des cas purs en mécanique ondulatouire et l'interférence des probabilités. Revue scientifique, 87e année, p. 259, 1948.

90. *Broglie, L. de.* Полувековые исследования. Albin-Michel, Collection Science d'aujourd'hui, Paris, 1976.

91. *Broglie, L. de.* Les Incertitudes d'Heisenberg et l'innerprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire (курс лекций 1950–1951, 1951–1952 гг.) / S. Diner, D. Fargue et G. Lochak ed., с примечаниями автора и предисловием Ж. Лошака. Gauthier-Villars, Paris, 1982.

92. *Neumann, J. von.* Mathematischen Grundlagenden Quantenmechanik. Springer, Berlin, 1932.

93. *Dirac, P.A.M.* The Principles of Quantum Mechanics. 4[e] édition, Clarendon, Oxford, 1958.

94. *Bohm, D.* Quantum Theory. Prentice Hall, London, 1951.

95. *Bohm, D.* Phys. Rev. **85**, p. 166, 180, 1952.

96. *Broglie, L. de.* Comptes Rendus. **223**, p. 641, 1951.

97. *Broglie, L. de.* Comptes Rendus. **234**, p. 265, 1952.

98. Albert Einstein Philosopher-Scientist / P.A. Schilpp ed. (коллективный труд). Library of Living Philosophers, Evanson, III., 1949.

99. *Heisenberg, W.* La Partie et le Tout. Albin-Michel, Collection «Les savants et le monde», 1972.

100. *Broglie, L. de.* La nouvelle Théorie des particules de MM. Jean-Pierre Vigier et de ses collaborateurs. Gauthier-Villars, Paris, 1961.

101. *Broglie, L. de.* Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire: la théorie de la double solution. Gauthier-Villars, Paris, 1956.

102. *Broglie, L. de.* La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire (interprétation usuelle et interprétation causale). Gauthier-Villars, Paris, 1957.

103. *Broglie, L. de.* Étude critique des bases de l'interpretation actuelle de la mécanique ondulatoire. Gauthier-Villars, Paris, 1963.

104. *London, F., Bauer, E.* La théorie de l'observation en mécanique quantique. Hermann, Paris, 1939.

105. Correspondance Einstein – de Broglie, Annales de la fondation Louis de Broglie, n 1, p. 1, 1979.

106. *Broglie, L. de.* Ondes électromagnétique et Photons. Gauthier-Villars, Paris, 1968.

107. *Broglie, L. de.* La Thermodynamique de la particule isolée (thermodynamique cachée des particules). Gauthier-Villars, Paris, 1964.

108. *Laue, M. von.* La Théorie de la relativité. Gauthier-Villars, Paris, 1922.

109. *Broglie, L. de.* Comptes Rendus. **264**, p. 1173, 1967.

110. *Broglie, L. de.* Jalons pour une nouvelle microphysique. Gauthier-Villars, Paris, 1978.

111. *Broglie, L. de.* Sur les véritables idées de base de la mécanique ondulatoire, Comptes Rendus, **277**, p. 71, 1973.

112. Lettre de Broglie, L. de. Annales de la fondation Louis de Broglie, 12, n 1, 1987.

113. *Lurçat, F.* Niels Bohr. Criterion, Paris, 1990.

114. *Bohr, N.* Physique atomique et connaissance (introduction et annexes de Catherine Chvalley). Gaillimard, Collection Folio/Essais, Paris, 1991.

Луи де Бройль

Статьи 1921–1927 годов

ОБ УМЕНЬШЕНИИ ЧАСТОТЫ КВАНТА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ ИЗЛУЧЕНИЯ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ[1]

Наши знания о фотоэлектрическом эффекте (см. предыдущую статью Мориса де Бройля) доказывают увеличивающуюся с каждым днем очевидность, что поглощение, как и испускание, излучения частоты ν происходит дискретным образом – квантами с энергией, равной $h\nu$. Электроны, выбитые из атома при поглощении кванта, вылетают с кинетической энергией, равной энергии поглощенного кванта за вычетом работы, которую они должны затратить для выхода из атома. Атом, который, таким образом, оказывается лишенным внутреннего электрона, обладает энергией большей, чем нормальная энергия таких же атомов. В соответствии с нашими настоящими идеями атом старается вернуться в нормальное состояние, излучив в виде серии линий энергию, добавленную к той, которую он, так сказать, накопил. Поскольку каждое испущенное излучение несет кванты своей частоты, то можно сказать, что поглощенный веществом квант в последующем излучении проявляется в виде нескольких квантов меньшей частоты.

Эти явления представляют интересные аналогии с явлениями, которые изучает термодинамика. Как теплота стремится перейти от теплых тел к холодным, так и излучаемая энергия стремится перейти от более высоких частот к более низким. Это принцип закона Стокса, согласно которому можно в какой-то мере сопоставить частоты температурам.

Представляя себе два объема, каждый из которых заполнен монохроматическим излучением, нетрудно построить замкнутый цикл путем последовательного перемещения атома, поглощающего одну энергию излучения и испускающего другую. Легко находим максимальное значение коэффициента полезного действия (КПД), равное отношению $(\nu_2 - \nu_1)/\nu_2$ и аналогичное КПД цикла Карно при замене температуры частотой. Здесь излучения играют роли теплого и холодного источников, а атом выполняет роль воды в паровой машине. С другой стороны, величина

$$\frac{\text{энергия, переданная излучению}}{\text{частота}}$$

является аналогом энтропии. Она имеет размерность действия, меняется кратно h и всегда возрастает при всех наблюдаемых превращениях[2].

---

[1] *Louis de Broglie.* Sur la dégradation du quantum dans les transformations successives des radiations de haute fréquence. – Compt. Rend. 1921. **173.** P. 1160.

[2] Д. Бертло уже предложил называть ее энтропией излучения.

Обычная необратимость всех явлений с X-лучами, как и для термодинамических явлений, является лишь видимостью. Изучение флуктуаций показало физикам, что система непрерывно отклоняется от состояния термодинамического равновесия, чтобы затем к нему вернуться вновь. Так, плотность газа в состоянии равновесия должна быть одинаковой во всех точках, однако в действительности она непрерывно варьирует вокруг своего среднего значения. Но когда изучают системы, сильно удаленные, как это часто бывает, от состояния равновесия, например когда приводят в соприкосновение два тела с различными температурами, то наблюдают, что процесс всегда стремится к установлению термодинамического равновесия.

Пучки X-лучей, полученных в лабораториях, имеют плотности энергии, соответствующие излучению абсолютно черного тела при очень высоких температурах. Поэтому процессы, наблюдаемые при прохождении таких лучей сквозь вещество, имеют тенденцию к восстановлению равновесия путем уменьшения частот и являются, по-видимому, необратимыми.

Если необратимость является только кажущейся, то каждому механизму, понижающему частоту и уменьшающему излучаемую энергию, должен соответствовать противоположный механизм, увеличивающий частоту, механизм, работа которого в обычных условиях эксперимента, в общем, слишком слаба, чтобы быть заметной.

Гипотеза о существовании таких процессов, повышающих частоту, не является совсем необоснованной. Кроме того что эта гипотеза *затребована* самой идеей термодинамического равновесия, она, кажется, позволяет интересную интерпретацию сплошного фона трубок X-излучения. Так как поглощение кванта с частотой ν вызывает выбивание внутриатомного электрона с кинетической энергией $h(\nu - \nu_0)$, где $h\nu_0$ – работа выхода электрона, обратимость требует, чтобы электрон, бомбардирующий атом, который перед этим был лишен внутреннего электрона, мог проникнуть в этот атом, занять свободное место и вызвать испускание излучения, квант которого равен потере энергии системы электрон – атом. Однако в трубке X-лучей, работающей при напряжении V, электроны с зарядом e достигают антикатода с энергией eV, но из-за их замедления веществом они бомбардируют атомы металла с энергией меньшей eV. Нетрудно видеть, что предшествующие идеи приводят нас к следующему результату: «Каждой критической частоте ν_c материала антикатода, меньшей eV/h, должна соответствовать полоса излучения, простирающаяся от частоты ν_c до частоты eV/h». Для частот, соответствующих «оптическим уровням» атома, величина ν_c практически пренебрежима для физика, предпочитающего изучение области X-лучей. Этим частотам соответствует на практике полоса излучения, простирающаяся от нуля до частоты eV/h. Это обычно наблюдаемый сплошной фон. Повышенным критическим частотам (K, L, M и т. д.) соответствуют полосы излучения, существование которых не наблюдается. Но надо заметить, что «сплошной фон» не обнаруживает дискретностей для критических частот антикатода. Однако этого следует ожидать по причине поглощения самим антикатодом излучения, которое он испускает, и это отсутствие может, видимо, интерпретироваться как существование компенсирующего излучения, начинающегося с этих критических частот.

По нашему мнению, эти замечания показывают, в каком направлении надо искать объяснение сплошного фона *X*-лучей и, вероятно, сплошного спектра раскаленных тел и абсолютно черного тела.

ИЗЛУЧЕНИЕ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА И КВАНТЫ СВЕТА[1]

Целью настоящей работы является получение некоторого числа известных результатов теории излучения с применением рассуждений, опирающихся только на термодинамику, кинетическую теорию и теорию квантов, без какого-либо привлечения электромагнетизма.

Принятой гипотезой является гипотеза квантов света. Равновесное излучение абсолютно черного тела при температуре T рассматривается как газ, состоящий из световых атомов с энергией $W = h\nu$. Поскольку в этой статье мы не будем учитывать световые молекулы, содержащие 2, 3, … n атомов $h\nu$, то должны прийти к закону излучения Вина, так как с точки зрения квантов света формула Вина выводится из общего уравнения Планка в пренебрежении объединениями атомов.

Масса световых атомов, согласно формулам механики теории относительности[2], полагается равной $h\nu / c^2$, т. е. отношению энергии к квадрату скорости света, а их количество движения равно $h\nu / c = W / c$.

Обозначим через n число световых атомов, содержащихся в единице объема. На единицу поверхности стенки, ограничивающей объем, падает в одну секунду $\frac{1}{6}nc$ атомов света, количество движения каждого из которых равно W/c. Таким образом, сила, действующая на единицу поверхности стенки, или давление, равна $2 \cdot \frac{1}{6}nc\frac{W}{c} = \frac{1}{3}nW$. Это есть треть энергии, содержащейся в единице объема, как того требует электромагнитная теория, и это проверено экспериментально.

Число световых атомов, обладающих энергией W, которые находятся в элементе объема $dxdydz$ и компоненты количества движения которых заключены между p и $p + dp$, q и $q + dq$, r и $r + dr$, дается следующей формулой статистической механики, еще применимой здесь[3]:

---

[1] *Louis de Broglie.* Rayonnement noir et quanta de lumiére. – J. de Physique. Série VI. 1922. **3.** P. 422.

[2] Динамика теории относительности телу с собственной массой m_0, движущемуся со скоростью $v = \beta c$, приписывает кинетическую энергию $W = m_0 c^2\left(1/\sqrt{1-\beta^2} - 1\right)$ и количество движения $G = m_0 v/\sqrt{1-\beta^2}$. Если отношение β мало, получаем результаты нерелятивистской механики $W = m_0 v^2/2$; $G = mv = 2W/v$. Но для светового атома значение m_0 должно быть бесконечно мало, а β бесконечно близко к единице, так что выражение $m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ определяет массу m. Тогда получаем $W = mc^2$ и $G = mc = W/c$. Эти выражения используются далее в тексте.

[3] В динамике теории относительности уравнения движения являются всегда каноническими и теорема Лиувилля всегда справедлива.

$$dn_W = \mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}}\,dxdydzdpdqdr\,.$$

Чтобы получить полное число атомов с энергией W, надо проинтегрировать по всему объему, заменить $dpdqdr$ на $4\pi G^2 dG$, где G – длина вектора «количества движения», и подставить вместо G его значение W/c.

Таким образом, это число атомов с энергией W на единицу объема записывается выражением

$$dn_W = \mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}}\,W^2 dW\,.$$

Интегрирование по всем значениям W от нуля до бесконечности должно дать число n световых атомов на единицу объема. Это определяет значение константы, и тогда находим:

$$dn_W = \frac{n}{2k^3T^3}\mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}}\,W^2 dW\,.$$

Полная энергия du этих атомов с энергией W в единице объема равна

$$du_W = \frac{n}{2k^3T^3}\mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}}\,W^3 dW\,.$$

Попробуем теперь определить n. *Допустим*, что это число является функцией только температуры. В термодинамике значение этой функции определено. В самом деле, полная энергия на единицу объема равна

$$\int_0^{+\infty} du_W = 3nkT\,,$$

так как

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}}\,W^3 dW = k^4T^4\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^3 dx = 6k^4T^4.$$

Этот результат вызывает следующее замечание. Каждый световой атом обладает в среднем энергией $3kT$, а не $(3/2)kT$, как это имеет место для молекул обычного газа, скорости которых в среднем малы по сравнению со скоростью света. Данный факт в теории электромагнетизма интерпретируется как следствие равенства электрической и магнитной энергий световой волны. Такой параллелизм достигается применением формул теории относительности, которые однозначно позволяют теории квантов света получить точное значение определенного выше давления излучения, в то время как прежняя корпускулярная теория света приводила к вдвое большему значению.

Полная энергия газа, таким образом, равна $U = 3nkTV$, а приращение энтропии:

$$dS = \frac{1}{T}\left(dU + pdV\right) = \frac{1}{T}\left(3nkVdT + 3nkTdV + 3kVT\frac{dn}{dT}dT + nkTdV\right),$$

так как давление составляет треть энергии на единицу объема.

Отсюда

$$dS = \left(\frac{3nkV}{T} + 3kV\frac{dn}{dT}\right)dT + 4nkdV.$$

Для того чтобы dS было точным дифференциалом, необходимо:

$$\frac{3nk}{T} + 3k\frac{dn}{dT} = 4k\frac{dn}{dT}, \quad \text{или} \quad \frac{dn}{dT} = \frac{3n}{T}.$$

Интегрирование последнего выражения дает $n = Ak^3T^3$, где A – пока еще неизвестная постоянная. Эта постоянная связана с постоянной Стефана σ, так как энергия на единицу объема равна

$$3nkT = 3Ak^4T^4,$$

откуда определяем $\sigma = 3Ak^4$.

Подставляя значение n в dS, получаем

$$dS = 12Ak^4T^2VdT + 4Ak^4T^3dV,$$

откуда

$$S = 4Ak^4T^3V,$$

без постоянной, так как для $T = 0$, $n = 0$, т. е. газ отсутствует.

Так как $A = \sigma/(3k^4)$, приходим к классическому выражению $S = (4/3)\sigma T^3 V$. Далее вычисляется свободная энергия $F = U - TS$. Она равна

$$3nVkT - T \cdot 4nkV = -nVkT = -AVk^4T^4,$$

и еще $-NkT$, если N есть полное число атомов в объеме V. Здесь нет аддитивной постоянной, так как «собственная масса» атомов равна нулю[4].

Количество энергии, которой обладают атомы с энергией W в единице объема, равно

$$du_W = \frac{A}{2} e^{-\frac{W}{kT}} W^3 dW,$$

и, так как $W = h\nu$,

$$du_\nu = \frac{Ah^4}{2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^3 d\nu.$$

Таким образом, мы действительно вновь приходим к формуле закона Вина. Можно ли было предвидеть численное значение коэффициента в этом законе (естественно, не пользуясь экспериментально полученным значением σ)?

Можно попытаться методом, который позволил Планку, Сакуру, Тетроду и другим ученым вычислить «химическую постоянную». Мы последуем ходу, изложенному недавно Планком в Annalen der Physik (1921. **66.** P. 365). Предполагая, что газ состоит из N атомов при температуре T, и используя предложенный Гиббсом закон канонического распределения, которому Леон Бриллюэн придал солидное основание, опираясь на понятие термостата, приходим к формуле для свободной энергии:

---

[4] Термодинамический потенциал $U - TS + pV$ тождественно равен нулю.

$$F = -kT\ln\left(\sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}\right),$$

где сумма Σ берется по всем возможным состояниям газа. Она может быть выражена интегралом по всему шестимерному фазовому объему, интегралом, который сам по себе эквивалентен произведению N шестикратных интегралов по фазовому объему каждой молекулы, если еще позаботиться о том, чтобы результат поделить на $N!$, как это объясняет Планк в упомянутой выше статье. Теория квантов вводит гипотезу элементарной области фазового объема величиной g, которая имеет размерность куба действия, и тогда вычисление химической постоянной приводит к тому, чтобы положить $g = h^3$ (где h – постоянная Планка).

Таким образом, выражение для F имеет вид

$$F = kT\ln\left[\left(\frac{\iiint\iiint \mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}}\,dxdydzdpdqdr}{g}\right)^N \frac{1}{N!}\right] =$$
$$= -kNT\ln\left[\frac{eV}{Ng}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}}\cdot 4\pi G^2\,dG\right] = -kNT\ln\left[\frac{8\pi eV}{Ng}\cdot\frac{k^3T^3}{c^3}\right].$$

Мы нашли $F = -NkT$ без аддитивной постоянной, так как собственная масса световых атомов пренебрежимо мала. Тождественность двух выражений требует, чтобы $\ln\left[\frac{8\pi eV}{Ng}\cdot\frac{k^3T^3}{c^3}\right] = 1$, откуда, поскольку $N = Ak^3T^3V$,

$$A = \frac{8\pi}{c^3 g} = \frac{8\pi}{c^3 h^3}.$$

Следовательно, du_ν принимает вид

$$du_\nu = \frac{4\pi h}{c^3}\mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{kT}}\nu^3\,d\nu.$$

Выражение отличается от закона Вина множителем 2. Это различие не связано с ошибкой вычислений, но, возможно, как отметил Леон Бриллюэн, обязано тому, что в предшествующую теорию не было введено понятие поляризации света. Более полная теория квантов света должна была бы ввести ее следующим образом: каждый световой атом может иметь состояние правой или левой круговой поляризации, представленной вектором, направленным в сторону распространения. Два атома, имеющие одно и то же положение и одинаковую скорость, должны еще иметь, для того чтобы их можно было рассматривать как тождественные при вычислении F, одно и то же направление поляризации (правое или левое). Это позволит ввести число 2^N под знак логарифма в выражении для F и восстановить точное численное значение коэффициента в законе Вина.

Рассматривая смесь одно-, двух-, трехатомного и так далее «светового газа», можно будет также вновь найти закон Планка в виде

$$du_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3\left[e^{-\frac{h\nu}{kT}} + e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + e^{-\frac{3h\nu}{kT}} + \ldots\right].$$

Это потребует введения нескольких достаточно произвольных гипотез. Мы не будем дальше следовать по этому пути[5].

* * *

Можно также прийти к представлению газа световых атомов следующим образом.

Рассмотрим газ, находящийся в равновесии и состоящий из N атомов с «собственной массой» m_0 при температуре T. Предположим, что динамика теории относительности применима к этим атомам, и пренебрежем всеми взаимодействиями между атомами. Таким образом, наш газ идеален. Энергия и количество движения молекул задаются уравнениями

$$W = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \quad \vec{G} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{v}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Статистическая механика дает для числа атомов dN, энергия которых заключена между W и $W + dW$ (см. выше), выражение

$$dN_W = \text{const}\cdot Ne^{-\frac{W}{kT}}G^2\,dG = \text{const}\cdot Ne^{-\frac{W}{kT}}m_0^2c\sqrt{\alpha(\alpha+2)}(\alpha+1)dW,$$

где введено обозначение $\alpha = W/(m_0c^2)$. Если масса m_0 достаточно велика, чтобы отношение $W/(m_0c^2)$ было малым почти для всей совокупности атомов (что соблюдается для материального газа при обычных температурах), получаем обычную формулу Максвелла. Предположим, напротив, что величина m_0 очень мала, и тогда почти вся совокупность атомов будет иметь скорость, близкую к c. Это произойдет, к примеру, если при достаточно малой массе m_0 число молекул, скорости которых отличаются на одну миллионную долю от c, будет пренебрежимо мало. Тогда α будет больше единицы и можно будет записать формулу

$$dN_W = \text{const}\cdot Ne^{-\frac{W}{kT}}W^2\,dW,$$

которая, как мы видели, выводится из закона Планка – Вина.

Итак, гипотеза квантов света приводит нас к тому, чтобы, приняв динамику теории относительности, рассматривать световые атомы (предполагая, что они имеют одинаковую малую массу), движущиеся со скоростями, зависящими от их энергии (частоты), но очень близкими к c. Таким образом, объяснялось бы,

[5] Несомненно, надо было бы приписать объединению n атомов некую вероятность, *a priori* равную $1/n^4$.

почему свет кажется распространяющимся (в пределах экспериментальной точности) со скоростью, которая играет роль бесконечной скорости в формулах Эйнштейна[6].

* * *

Резюмируя, заметим, что главные выводы представленной работы заключаются в следующем.

1. Можно с помощью гипотезы квантов света, дополненной правилами статистической механики и термодинамики, восстановить результаты термодинамики излучения и даже закон распределения Планка – Вина[7].

2. Без сомнения, существует тесная связь между химической постоянной газов и постоянной Стефана для излучения абсолютно черного тела. Эта связь уже была предсказана Линдеманом в недавней работе по упругости пара твердых тел (Phil. Mag. **39.** P. 21–25). Она открывает нам новый аспект взаимосвязи констант вещества и излучения.

---

[6] «Излучение» частоты ν переносилось бы атомами с массой m_0 со скоростями $c - \dfrac{c^5 m_0^2}{2h^2\nu^2}$, где величина $\dfrac{c^5 m_0^2}{2h^2\nu^2}$ выходит за рамки эксперимента из-за малости m_0.

[7] О вопросе квантов света см.: *Emden.* Phys. Zeitshr. 1921. **22.** P. 509; *L. de Broglie.* Compt. Rend. 1922. **175.** P. 811.

ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ И ТЕОРИИ КВАНТОВ СВЕТА[1]

Недавние достижения физики в области испускания и поглощения излучений привлекают все большее и большее внимание к теории квантов света, согласно которой энергия всех излучений (электромагнитное, световое, рентгеновское или гамма-излучения) сконцентрирована в малых неделимых элементах, равных $h\nu$, представляющих собой[2] в каком-то смысле «световые атомы» рассматриваемой частоты ν. Эти световые атомы могут к тому же в некоторых случаях объединяться в молекулы. Объяснение на основе теории квантов света таких явлений, как интерференция, дифракция, рассеяние и другие, до сих пор интерпретируемых в рамках волновой теории, кажется слишком сложным. Чтобы она привела к успеху, необходимо пойти на компромисс между старой теорией и новой, вводя в последнюю понятие периодичности. Когда синтез будет произведен, уравнения Максвелла предстанут, без всякого сомнения, как непрерывное приближение (справедливое во многих, но не во всех случаях) дискретной структуры излучаемой энергии, подобно тому как уравнения непрерывности гидродинамики представляют удовлетворительным образом движения жидкостей, атомная структура которых не вызывает никакого сомнения.

Здесь мы хотим настоять на идее, способной, может быть, облегчить построение теории интерференции, находящейся в гармонии с существованием квантов света.

Известно, что флуктуации излучения абсолютно черного тела в объеме V полости, находящейся в термодинамическом равновесии, подчиняются соотношению[3]

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2 \frac{dE}{dT}$$

(T – температура полости, k – постоянная Больцмана, ε – отклонение относительно среднего значения E мгновенного значения энергии частоты ν в спектральном интервале $d\nu$, содержащейся в объеме V).

Если предположить сначала, что излучение абсолютно черного тела подчиняется закону спектрального распределения Рэлея – Джинса

$$E = \frac{8\pi k}{c^3} \nu^2 TVd\nu,$$

то находим

---

[1] *Louis de Broglie.* Sur les interférences et la théorie des quanta de lumière. – Compt. Rend. 1922. **175.** P. 811.

[2] Здесь $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ эрг·с – постоянная Планка (современное значение $6{,}626176 \cdot 10^{-27}$ эрг·с. – *Прим. ред.*).

[3] См.: *Lorentz.* Les théories statistiques en Thermodynamique (Conférence au Collège de France). P. 71.

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu} \cdot \frac{E^2}{V},$$

и этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с результатом вычисления интерференции излучения абсолютно черного тела, проводимого по законам электромагнитной теории.

Если принять в качестве закона распределения закон Вина

$$E = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} V d\nu,$$

соответствующий гипотезе излучения, полностью разделенного на кванты $h\nu$, получим $\overline{\varepsilon^2} = h\nu E$ – результат, легко выводимый из прямых рассуждений о флуктуациях квантов света.

Наконец, в *реальном* случае, соответствующем закону Планка,

$$E = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} V d\nu,$$

находим, как это показал Эйнштейн на Брюссельском конгрессе 1911 г.,

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu E + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\frac{E^2}{V},$$

и, таким образом, $\overline{\varepsilon^2}$ – сумма того, что было бы: 1) если бы излучение было чисто волновым и 2) если бы излучение было полностью разделено на кванты $h\nu$.

С точки зрения теории квантов света кажется логичным записать формулу Планка в следующем виде:

$$\begin{aligned} E &= \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} V d\nu + \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-\frac{2h\nu}{kT}} V d\nu + \ldots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-\frac{nh\nu}{kT}} V d\nu = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots \end{aligned}.$$

Первый член E_1 соответствует энергии, разделенной на кванты $h\nu$, а второй E_2 – энергии, разбитой на кванты величиной $2h\nu$ (двухатомные молекулы света), и т. д. Формула для флуктуаций тогда приводит к выражению

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu E_1 + 2h\nu E_2 + 3h\nu E_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nh\nu E_n,$$

которое соответствует формуле «светового газа», образованного из молекул и атомов. Естественно, эта новая форма полностью тождественна формуле Эйнштейна в силу легко проверяемой идентичности:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) h\nu E_n = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\frac{E^2}{V}.$$

Если хорошо проанализировать эти формулы, то увидим, что они имеют следующее значение. С точки зрения квантов света явления интерференции кажутся связанными с существованием совокупностей атомов света, движущихся не независимо, а когерентно. Отсюда естественно предположить, что если когда-нибудь теория квантов света сможет объяснить интерференцию, она должна будет ввести в рассмотрение подобные объединения квантов.

ВОЛНЫ И КВАНТЫ[1]

Рассмотрим тело с собственной массой m_0, движущееся относительно неподвижного наблюдателя со скоростью $v = \beta c$ ($\beta < 1$). Согласно принципу инертности энергии оно должно обладать внутренней энергией, равной m_0c^2. С другой стороны, принцип квантов приводит к возможности приписать эту внутреннюю энергию простому периодическому процессу с такой частотой ν_0, что

$$h\nu_0 = m_0 c^2,$$

где c – предельная скорость в теории относительности, а h – константа Планка.

Для неподвижного наблюдателя полная энергия движущегося тела будет соответствовать частоте $\nu = m_0 c^2 \Big/ \left(h\sqrt{1-\beta^2}\right)$. Но если такой наблюдатель следит за внутренним периодическим процессом тела, то он будет воспринимать его замедленным и припишет ему частоту $\nu_1 = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$. Для этого наблюдателя процесс происходит по закону

$$\sin 2\pi\nu_1 t.$$

Предположим теперь, что в момент времени $t = 0$ положение тела совпадает с волной частоты ν, распространяющейся в том же направлении, что и тело, со скоростью c/β. Эта волна со скоростью большей, чем c, не может соответствовать переносу энергии. Мы рассматриваем ее как искусственную волну, связанную с движением тела.

Я утверждаю, что если в момент $t = 0$ существует согласованность фаз между векторами волны и внутреннего процесса в движущемся теле, то эта согласованность будет иметь место в дальнейшем. Действительно, ко времени t тело будет находиться на расстоянии $vt = x$ от начального положения. Его внутреннее движение происходит по закону $\sin 2\pi\nu_1 (x/v)$.

Волна в этой же точке представляется уравнением

$$\sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x\beta}{c}\right) = \sin 2\pi\nu x\left(\frac{1}{v} - \frac{\beta}{c}\right).$$

Поскольку эти синусы равны, соотношение фаз сохраняется, если

$$\nu_1 = \nu\left(1 - \beta^2\right).$$

Но из определения величин ν_1 и ν ясно, что последнее соотношение выполняется всегда.

---

[1] *Louis de Broglie.* Ondes et quanta. – Compt. Rend. 1923. **177.** P. 507.

Доказательство этого важного результата основывается только на принципе специальной теории относительности и на постулат о справедливости квантового соотношения как для неподвижного, так и для движущегося наблюдателя.

Применим это положение вначале к атому света. Ранее[2] я показал, что атом света должен рассматриваться как тело очень малой массы ($< 10^{-50}$ г), перемещающееся со скоростью, очень близкой к c (хотя и слегка меньшей). Таким образом, мы приходим к следующему заключению: «*Атом света, эквивалентный по своей полной энергии излучению с частотой ν, является центром протекания внутреннего периодического процесса и, с точки зрения неподвижного наблюдателя, его фаза в любой точке пространства равна фазе волны с частотой ν, распространяющейся в том же направлении со скоростью, почти точно равной (хотя и чуть большей) постоянной, называемой скоростью света*».

Перейдем теперь к случаю электрона, движущегося равномерно со скоростью, значительно меньшей скорости c, по замкнутой траектории. В момент $t = 0$ он находится в точке O. Связанная с ним фиктивная волна, исходящая из O и описывающая всю траекторию со скоростью c/β, догоняет электрон ко времени τ в точке O' такой, что $OO' = \beta c\tau$.

Таким образом, имеем

$$\tau = \frac{\beta}{c}\left[\beta c\left(\tau + T_r\right)\right] \quad \text{или} \quad \tau = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} T_r,$$

где T_r – период вращения электрона на своей орбите. Фаза внутреннего процесса электрона при переходе его из O в O' меняется на величину

$$2\pi\nu_1\tau = 2\pi\frac{m_0 c^2}{h} T_r \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Почти необходимо предположить, что траектория электрона устойчива лишь тогда, когда при встрече фиктивной волны с электроном в точке O' их фазы одинаковы: волна с частотой ν и скоростью c / β должна быть в резонансе на протяжении всей своей траектории, что приводит к условию

$$\frac{m_0\beta^2 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} T_r = nh, \quad \text{где } n \text{ – целое число.}$$

Покажем, что это условие стабильности то же самое, что и условие стабильности теорий Бора и Зоммерфельда для траекторий, описываемых с постоянной скоростью. Назовем p_x, p_y, p_z количествами движения электрона в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Общим условием стабильности, выдвинутым Эйнштейном, действительно является равенство

---

[2] J. de Physique. Série VI. 1922. **3.** P. 422.

$$\int_0^{T_r} \left(p_x dx + p_y dy + p_z dz \right) = nh \quad (n \text{ – целое число})^3,$$

которое может в нашем случае записываться в виде

$$\int_0^{T_r} \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) dt = \frac{m_0 \beta^2 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} T_r = nh,$$

т. е. то же, что и выше.

В случае электрона, вращающегося с угловой скоростью ω по окружности радиуса R, находим для достаточно малых скоростей первоначальную формулу Бора: $m_0 \omega R^2 = n(h/2\pi)$.

Если скорость меняется вдоль траектории, то для малых β вновь приходим к формуле Бора – Эйнштейна. Если β принимает большие значения, решение вопроса усложняется и требует специального исследования.

Следуя по тому же пути, мы пришли к важным результатам, которые вскоре будут опубликованы. С сегодняшнего дня мы уже в состоянии объяснить явления дифракции и интерференции, учитывая кванты света.

---

[3] Случай квазипериодических движений не представляет никаких новых затруднений. Необходимость удовлетворить выдвинутым в тексте условиям для бесконечного ряда псевдопериодов приводит к условиям Зоммерфельда.

КВАНТЫ СВЕТА. ДИФРАКЦИЯ И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ[1]

I. В недавней статье[2] мы показали, что наблюдатель для описания движения тела со скоростью βc ($\beta < 1$) должен ассоциировать с ним синусоидальную *нематериальную* волну, распространяющуюся в том же направлении со скоростью $c/\beta = c^2/v$. Частота этой волны относительно наблюдателя равна полной энергии тела, деленной на постоянную Планка h. Можно, впрочем, рассматривать скорость βc как «групповую скорость» волн, имеющих скорости c/β и частоты $m_0 c^2 \big/ h\sqrt{1-\beta^2}$, соответствующие значениям β, близким, но слегка отличающимся друг от друга. Оставляя в стороне физический смысл этой волны (объяснение этого смысла будет трудной задачей для расширенной теории электромагнетизма), напомним, что движущееся тело имеет ту же внутреннюю фазу, что и область волны, находящаяся в той же точке. Назовем эту волну фазовой волной.

Световые атомы, существование которых мы допускаем, не всегда распространяются по прямым линиям, как это показывают явления дифракции. Кажется *необходимым* изменить принцип инерции. Мы предлагаем на базе динамики свободной материальной точки выдвинуть следующий постулат: «В каждой точке своей траектории свободное тело движется равномерно вдоль *луча* своей фазовой волны, т.е. (в изотропной среде) вдоль перпендикуляра к поверхностям равной фазы». Вообще, тело будет следовать вдоль прямолинейной траектории в соответствии с принципом Ферма, приложенным к фазовой волне, который в данном случае совпадает с принципом наименьшего действия Мопертюи, приложенным к движущемуся телу. Но если тело должно пройти сквозь отверстие, размеры которого малы по сравнению с длиной фазовой волны, его траектория искривляется, как луч дифрагированной волны. Это спасает закон сохранения энергии, но не спасает закон сохранения количества движения, по крайней мере если не производится давление на материальные атомы, пролетающие рядом с краем отверстия.

Новый принцип, выдвинутый на базе динамики, мог бы объяснить дифракцию световых атомов, *как бы ни было мало их число*. Кроме того, какая-либо движущаяся точка могла бы в некоторых случаях испытывать дифракцию. Поток электронов, проходя сквозь достаточно малое отверстие, вызывал бы явления дифракции. В этой области, может быть, следует искать экспериментальные подтверждения нашим идеям.

---

[1] *Louis de Broglie.* Quanta de lumière, diffraction et interférences. – Compt. Rend. 1923. **177.** P. 548.

[2] Compt. Rend. 1923. **177.** P. 507. В этой статье я ввел бесполезное ограничение. Условия Бора применимы даже в случае очень больших переменных скоростей.

Мы, таким образом, думаем, что фазовая волна управляет переносом энергии, и это может позволить осуществить синтез волнообразных колебаний и квантов. Теория волн зашла слишком далеко, отрицая дискретную структуру излучаемой энергии, и недостаточно далеко, отказываясь вмешиваться в динамику. *Новая динамика свободной материальной точки выступает по отношению к прежней динамике* (*включая динамику Эйнштейна*) *так же, как волновая оптика по отношению к геометрической оптике.* Размышляя об этом, увидим, что предлагаемый синтез кажется логическим завершением сравнительного развития динамики и оптики с XVII века.

II. Перейдем теперь к объяснению интерференционных полос. Допустим, что материальный атом имеет вероятность поглотить или испустить световой атом, который определяется результирующей волновых векторов, сходящихся на нем. Естественно, излучение возможно лишь тогда, когда атом возбужден, и поглощение возможно тогда, когда световой атом находится поблизости. Предыдущая гипотеза имеет очень глубокую аналогию с гипотезой, принятой в теории электромагнетизма, которая связывает *детектируемую* интенсивность света (т. е. способность фотоэлектрически воздействовать на глаз, фотопластинку или болометр) с интенсивностью результирующего электрического вектора.

Квант света, испущенный по какой-либо причине из «точечного» источника, попадая на соседние атомы, своей фазовой волной вызовет другие акты излучения квантов, при этом внутренние колебания, как мы будем считать, находятся в фазе с самой волной. Все испущенные световые атомы будут иметь, таким образом, ту же фазовую волну, что и первый атом. Мы будем говорить, что они связаны, образуя волну[3]. Единственная фазовая волна переносит с собой множество малых порций энергии, которые слегка скользят по ее поверхности, как это следует из нашей последней статьи.

Рассмотрим эксперимент с отверстиями Юнга: несколько световых атомов, проходя сквозь отверстия, испытают дифракцию, следуя вдоль луча части фазовой волны, которая их окружает. В пространстве, расположенном за перегородкой, их способность действовать фотоэлектрически будет меняться в каждой точке, следуя интерференционной картине фазовых волн, которые дифрагировали при прохождении сквозь эти отверстия. Таким образом, *какой бы малой ни была интенсивность падающего света*, появятся светлые и темные полосы, предсказываемые волновыми теориями. Такой способ объяснения, который опирается на введение понятия квантов и тем самым заимствует существенную часть волновой теории, должен допускать обобщения на все случаи появления интерференционных и дифракционных полос.

---

[3] Быть может, участие таких связанных атомов определяет формулу для флуктуаций излучения черного тела. См.: Compt. Rend. 1922. **175.** P. 811.

КВАНТЫ, КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ И ПРИНЦИП ФЕРМА[1]

I. Планк и Нернст показали, что идею кванта следует ввести в кинетическую теорию газов для вычисления констант энтропии и химических постоянных, важность которых так велика в термодинамике. С этой целью Планк вынужден был выбрать элемент фазового объема равным

$$\frac{1}{h^3} dxdydzdpdqdr = \frac{4\pi}{h^3} m_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2w}\, dwdxdydz,$$

где x, y, z, p, q, r – координаты и количества движения атома, m_0 – его собственная масса, w – его кинетическая энергия, h – постоянная действия. Сегодня мы в состоянии обосновать эту гипотезу.

Каждый атом, движущийся со скоростью βc, может рассматриваться как связанный с группой волн, имеющих фазовую скорость $V = c/\beta$, частоту $\frac{1}{h}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ и групповую скорость $U = \beta c$. Состояние газа может быть стабильным, только если волны, соответствующие всем атомам, образуют систему стационарных волн. Следуя известному методу Джинса, находим для числа стационарных волн, содержащихся в единице объема, и частот, лежащих в интервале, заключенном между ν и $\nu + d\nu$, следующее выражение:

$$n_\nu d\nu = \frac{4\pi}{UV^2}\nu^2 d\nu = \frac{4\pi}{c^3}\beta\nu^2 d\nu.$$

Величины ν и w связаны уравнением

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = w + m_0 c^2 = m_0 c^2 (1+\alpha), \quad \left(\alpha = \frac{w}{m_0 c^2}\right),$$

откуда

$$n_\nu d\nu = \frac{4\pi}{h^3} m_0^2 c (1+\alpha)\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\, dw.$$

Каждая волна может переносить 0, 1, 2 или несколько атомов, так что согласно каноническому распределению число атомов с полной энергией $h\nu$ в единице объема равно

$$\text{const} \cdot \frac{4\pi}{h^3} m_0^2 c (1+\alpha)\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\, dwdxdydz \cdot \frac{\sum_1^\infty n e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_0^\infty e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}.$$

[1] *Louis de Broglie.* Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat. – Compt. Rend. 1923. **177**. P. 630.

Рассмотрим вначале материальный газ, атомы которого имеют относительно большую массу и, следовательно, относительно малые скорости. Мы можем пренебречь всеми членами ряда, за исключением первого, и положить

$$1 + \alpha = 1.$$

Число атомов с кинетической энергией w будет тогда

$$\mathrm{const} \cdot \frac{4\pi}{h^3} m_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2w}\, dw dx dy dz \cdot \mathrm{e}^{-\frac{w}{kT}}.$$

Это результат, который обосновывает метод Планка и ведет к обычному виду закона Максвелла.

В случае газа, состоящего из световых атомов, α всегда велико, и мы должны использовать весь ряд. По причине внутренней бинарной симметрии, налагаемой волновой аналогией, мы должны ввести множитель 2, и метод, описанный в нашей статье, опубликованной в ноябре 1922 г. в «Journal de «Physique», приводит к закону Планка для плотности энергии:

$$\rho d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \sum_1^\infty \mathrm{e}^{-n\frac{h\nu}{kT}} d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu.$$

II. Попытаемся уточнить идеи, изложенные в наших предыдущих статьях. Если в некоторой среде тело описывает криволинейную траекторию, мы говорим, что существует поле сил, и в каждой точке принцип энергии позволяет вывести скорость тела из постоянной величины его полной энергии. Чтобы обеспечить согласованность фаз между волной и движущимся телом, приходится предположить, что фазовая волна движущегося тела с заданной полной энергией имеет в каждой точке частоту и скорость, ограниченную величиной скорости, которую имело бы тело, если бы оно находилось в этой точке. Без сомнения, расширенная электромагнитная теория даст нам механизм этого сложного движения. Кажется, что мы знаем заранее ее главное заключение: «Лучи фазовых волн совпадают с динамически возможными траекториями». Действительно, лучи будут определяться так же, как и в среде с меняющейся дисперсией, по принципу Ферма, который записывается здесь в виде

$$\delta \int \frac{\nu ds}{V} = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{h\sqrt{1 - \beta^2}} ds = 0,$$

тогда как принцип наименьшего действия в форме Мопертюи определяет траектории уравнением

$$\delta \int m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \sqrt{1 - \beta^2} \right) dt = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} ds = 0.$$

Фундаментальная связь, которая объединяет два важнейших принципа геометрической оптики и динамики, выставлена, таким образом, в полном свете. Среди динамически возможных траекторий некоторые обладают особенными свойствами быть в резонансе с фазовой волной. Это стабильные траектории Бора, для которых $\int \frac{\nu ds}{V}$ – целое число.

Заметим, что интеграл Ферма вводит произведение частоты на время действия, а действие вводится только через пропорциональность энергии и частоты. Эта пропорциональность остается постулатом, физический смысл которого не выяснен; она представляет собой, без сомнения, один из аспектов связи пространства и времени, и, так как наш обычный опыт приучает нас разделять эти два понятия, постулат сохраняет несколько интуитивный характер.

О ДИНАМИКЕ КВАНТОВ СВЕТА И ИНТЕРФЕРЕНЦИИ[1]

В моих предыдущих работах по теории квантов я старался показать, каким образом загадки, поставленные этой теорией, могут получить разумное объяснение на основе новой концепции связи между динамикой и теорией волн. Но в этих работах я не нашел действительно удовлетворительного объяснения явлениям волновой оптики, которые в принципе все сводятся к интерференции. Я ограничивался ссылками на некоторую связь между картиной интерференции волн и вероятностью поглощения световых атомов веществом. Такой способ рассмотрения сейчас мне кажется немного искусственным, и я стремлюсь принять другой, находящийся в большей гармонии с важнейшими чертами моей теории.

В самом деле сущность моих идей заключается в том, что перемещение всякой материальной точки связывается с распространением волны, характеристический тензор которой в каждой точке и для каждого направления пространства-времени пропорционален соответствующему значению тензора энергии-импульса тела. Слегка меняя частоту этой волны, определим группу волн и скорость тела в каждой точке его траектории, которая равна групповой скорости данных волн. Это свойство – прямое следствие уравнений Гамильтона, позволяющее рассматривать материальную точку как сингулярность группы волн, перемещение которой подчиняется принципу Гамильтона – Ферма.

Эти концепции справедливы, когда волны распространяются свободно, но что происходит, когда в их распространение вмешивается препятствие, приводя к явлениям интерференции или дифракции, или когда, падая на материальный объект (электрон или атом), они вызывают излучение вторичных волн, накладывающихся на первичные? Во всех этих случаях волновые теории предлагают нам определять скорость и траекторию точек исходя из условия согласованности фазы. Совершенно естественно допустить, что движущееся тело всегда совпадает с одной из точек, отвечающих постоянству фазы, как и в случае свободного распространения. Как я уже предчувствовал в моих предыдущих статьях, мы получаем, таким образом, новую динамику, которая соотносится с прежней так же, как волновая оптика с геометрической.

Лучи, предсказываемые волновыми теориями, были бы во всех точках возможными траекториями кванта. В явлениях интерференции лучи концентрируются в местах, называемых светлыми полосами, и ослабляются

[1] *Louis de Broglie*. Sur la dynamique du quantum de lumière et les interférences. – Compt. Rend. 1924. **179.** P. 1039.

в местах, называемых темными полосами. В моем первом объяснении интерференции темные полосы были темными, потому что действие световых зерен на вещество было нулевым. В моем нынешнем объяснении эти полосы являются черными, потому что число падающих квантов мало или равно нулю.

Приведем точный пример. В эксперименте с отверстиями Юнга поверхности равных фаз являются однофокусными эллипсоидами. Лучи, перпендикулярные к ним, концентрируются в однофокусных гиперболоидах, на которых возмущения, исходящие из двух отверстий, имеют одну и ту же фазу. Пусть r_1 и r_2 – расстояния от точки пространства до двух отверстий и ψ – функция $(r_1 + r_2)/2$, постоянная на каждой поверхности одинаковой фазы. Нетрудно показать, что фазовая скорость волн вдоль луча равна величине, которую она имела бы в случае свободного распространения, деленной на производную от ψ, взятую вдоль луча. Что касается скорости кванта, она будет равна скорости свободного движения, умноженной на ту же производную. Можно сказать, что интерференция вводит дополнительные члены в выражения энергии и количества движения, по крайней мере до тех пор, пока не предпочитают говорить об изменении собственной массы атома света.

Применение этого метода должно позволить изучить явления рассеяния и дисперсии, хотя было бы уместно привлечь воздействие световых волн на материю – воздействие, о котором электромагнетизм в современном его состоянии, кажется, не имеет точного представления. Наконец, учитывая интерференцию волн одной и той же частоты, можно укрепить основы моего доказательства закона Планка и затем интерпретировать флуктуации энергии излучения абсолютно черного тела. Но вся теория станет действительно понятной, только когда удастся определить структуру световых волн и природу сингулярности, создаваемой квантом, движение которого должно быть предсказано *единственно лишь* с точки зрения волновой теории.

О СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЕ ЭЛЕКТРОНА[1]

В теории квантов я предположил, что существует периодический процесс, связанный с электроном в целом (материальная точка). Этот процесс для неподвижного относительно электрона наблюдателя происходил бы на всем пространстве с одинаковой фазой и имел бы частоту $\nu_0 = m_0 c^2 / h$.

Он мог бы быть представлен для вышеуказанного наблюдателя функцией вида $\varphi(r_0)\cos 2\pi\nu_0 t_0$, где t_0 – собственное время движущегося тела и r_0 – расстояние до центра электрона. Для второго наблюдателя, видящего тело движущимся с постоянной скоростью βc, процесс с точки зрения фазы был бы распределен в пространстве как плоская волна, распространяющаяся в том же направлении со скоростью $V = c/\beta > c$ и частотой $\nu = \nu_0 / \sqrt{1-\beta^2}$.

Эти определения являются неполными, так как они не уточняют ни природу, ни пространственное распределение рассматриваемого явления. В частности, если, как это было бы естественным, приписать ему электромагнитную природу, можно было бы задаться вопросом, как образом существование скорости $V > c$ совместимо с тем фактом, что электромагнитные величины подчиняются в вакууме уравнению распространения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \Delta A.$$

Я дам ответ, относящийся к этим проблемам, но вначале сделаю следующее замечание: при сравнении выражений, приведенных выше для V и ν, видно, что отношение $c/V = n$, аналогичное показателю преломления, который бы имел вакуум для электронных волн, равно $\sqrt{1-\nu_0^2/\nu^2}$. Это вид уравнения дисперсии.

Рассмотрим теперь электромагнитную величину A, распространяющуюся в вакууме согласно уравнению $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \Delta A$.

Предположим, что поверхности равной фазы в каждый момент являются плоскостями, перпендикулярными к направлению, совпадающему с осью z.

Величина A может быть действительной частью выражения

$$\varphi(x,y,z,t)e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{z}{V}\right)},$$

при этом предположении получаем:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{4\pi i\nu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\varphi = \Delta\varphi - \frac{4\pi^2\nu^2}{V^2}\varphi - \frac{4\pi i\nu}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

---

[1] *Louis de Broglie.* Sur la fréquence propre de l'électron. – Compt. Rend. 1925. **180.** P. 498.

Приравняем отдельно мнимые и действительные части. Сначала получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{c^2}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Таким образом, φ зависит от t и от z только через комбинацию $u = z - \left(c^2/V\right)t$.

С другой стороны, находим также

$$4\pi\nu^2\left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{c^2}\right) = \frac{1}{\varphi}\left(\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right).$$

Обозначим через a второй член этого равенства. Тогда следует

$$\frac{c}{V} = n = \sqrt{1 + \frac{ac^2}{4\pi^2\nu^2}}.$$

Мы можем идентифицировать это выражение с выражением, которое вытекает из рассмотрений, упомянутых вначале, положив $a = -4\pi^2\nu_0^2/c^2$, получим $c^2/V = \beta c$.

Но тогда

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}\varphi,$$

и, так как φ зависит только от x, y и u, легко находим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(1 - \beta^2\right) = -\frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}\varphi.$$

Сделаем замену переменных, положив

$$x_0 = x, \quad y_0 = y, \quad z_0 = \frac{u}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{z - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

и запишем Δ_0 для $\dfrac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z_0^2}$. Получаем

$$\Delta_0\varphi + \frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}\varphi = 0.$$

Так как координаты с индексом 0 являются теми же, которые использует для определения точек пространства наблюдатель, связанный с электроном, то функция $\varphi(r_0)$ будет выражена через уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dr_0^2} + \frac{2}{r_0}\frac{d\varphi}{dr_0} + \frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}\varphi = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi(r_0) = \frac{K}{r_0}\cos\left(\frac{2\pi\nu_0 r_0}{c} + \alpha_0\right),$$

где K и α_0 – постоянные. С учетом преобразования времени при переходе от одной системы отсчета к другой находим также выражение для значения A_0 функции A в системе электрона:

$$A_0 = \frac{K}{r_0}\cos\left(\frac{2\pi\nu_0 r_0}{c} + \alpha_0\right)\cos 2\pi\nu_0 t_0 =$$
$$= \frac{K'}{r_0}\left\{\cos\left[2\pi\nu_0\left(t_0 + \frac{r_0}{c}\right) + \alpha_0\right] + \cos\left[2\pi\nu_0\left(t_0 - \frac{r_0}{c}\right) - \alpha_0\right]\right\}.$$

Все происходит так, как если бы имелась суперпозиция сходящейся волны и волны, расходящейся со скоростью c. Этот результат мог быть предсказуем, и он немного напоминает гидродинамические аналогии Бьеркнеса. Он позволит, может быть, более точно определить периодическую величину, которая, кажется, тесно связана с существованием самой материи. Во всяком случае определенно кажется, что существование фазовой скорости, превышающей скорость c, не является несовместимым с электромагнитным уравнением распространения волн.

Напомним, что частота ν_0 численно равна $1{,}2\cdot 10^{20}$ с$^{-1}$, а длина волны $\lambda_0 = c/\nu_0$ равна $2{,}5\cdot 10^{-10}$ см.

ОБ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ДИНАМИКОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКОЙ[1]

Ассоциируя движение материальной точки с распространением волны, можно связать энергию и количество движения точки с частотой и фазовой скоростью волны таким образом, что обычные уравнения динамики вытекают из формулы дисперсии.

Корпускулярная теория света сталкивается с трудностями при изучении преломляющих сред. Одна из этих трудностей, историческое значение которой велико, связана с мнимым противоречием между принципом наименьшего действия и законом Ферма. Представив динамику вытекающей из теории волн, можно рассмотреть вопрос в новом аспекте и устранить некоторые возражения.

1. Классические понятия. Цель этого изложения – показать, как недавно развитые мною идеи о квантах позволяют уточнить издавна отмечаемый параллелизм между динамикой материальной точки и геометрической оптикой. Начнем с напоминания некоторых основных законов теории волн, *не предполагая заранее, что речь идет о частном случае световых волн*.

Сначала я дам общее определение: говорят, что физическое явление распространяется как простые синусоидальные волны, если в его математическое определение входит синусоидальная функция пространственных координат и времени, так называемая фаза, имеющая следующие свойства. 1. В точках пространства она обладает периодом T и частотой $\nu = 1/T$. 2. Различные значения фазы перемещаются в пространстве вдоль некоторых линий, называемых лучами волны, со скоростью V, которая является функцией координат и времени, а также частоты. Эта скорость V может зависеть от направления луча в рассматриваемой данной точке.

Для упрощения дальнейшего рассмотрения я предположу, что среда изотропна и находится в неизменном состоянии. В этом случае лучи волны имеют неизменную форму и скорость V фазы будет функцией только пространственных координат и частоты. Выразим это соотношение уравнением

$$n = c/V = \varphi(x, y, z, \nu),$$

где c – классическая константа уравнений Максвелла. Это уравнение определяет показатель преломления n.

Вместе со скоростью V введем так называемую групповую скорость. Она определяется в предположении, что мы имеем дело не с простой синусоидальной волной, а с группой простых синусоидальных волн с очень близкими

[1] *Louis de Broglie.* Sur le parallélisme entre la dynamique et du point matériel et l’optique géométrique. – J. de Physique. Série VI. 1926. **7.** P. 1.

частотами, заключенными в малом интервале $\nu - \delta\nu$, $\nu + \delta\nu$. Вследствие того что показатель преломления изменяется с частотой, точки, в которых различные простые волны находятся в фазе, перемещаются со скоростью U, обычно отличной от V, и известное рассуждение дает

$$U = \frac{\partial \nu}{\partial\left(\frac{\nu}{V}\right)} = c\frac{\partial \nu}{\partial(n\nu)}.$$

Изучение электромагнитных волн, проведенное согласно классическим концепциям, показывает, что энергия, переносимая одной из этих волн, обычно перемещается с групповой скоростью, которая всегда меньше или по крайней мере равна постоянной c.

Знания частоты и функциональной зависимости, которая определяет значения показателя преломления, достаточно для вычисления скорости перемещения волны. Принцип, который в оптике носит имя великого французского физика и математика Ферма, учит нас, что если луч проходит через две заданные точки A и B, то время, затраченное фазой на перемещение из A в B, минимально, иначе говоря, если фаза следует по пути, слегка отличному от реального луча, то она затратит больше времени на перемещение из A в B. Итак, мы должны записать

$$\delta\int_A^B \frac{dl}{V} = \frac{1}{c}\delta\int_A^B n\,dl = 0,$$

и при n, известном как функция от x, y, z, путь, которым следует волна, будет, таким образом, определен.

До того как изложить мои личные идеи, изучим две задачи распространения волн, которые играют большую роль в геометрической оптике.

а) Переход волны из среды с постоянным показателем преломления n_1 в среду с постоянным показателем n_2.

Решение задачи хорошо известно. Луч, который движется из точки A первой среды в точку B второй (см. рис. 1), состоит из двух прямых линий, сходящихся в точке M поверхности раздела сред так, что имеем (закон Декарта)

$$n_1 \cdot \sin\alpha_1 = n_2 \cdot \sin\alpha_2.$$

б) Форма лучей в преломляющей сфере, показатель преломления которой является функцией расстояния до центра и частоты.

В оптике эта задача называется «задачей астрономического лучепреломления». Форма лучей дается уравнением Бугера, которое выводится из принципа наименьшего времени. Если M – некоторая точка, расположенная на искомом луче (см. рис. 2), и если MT является касательной к лучу в этой точке, то произведение показателя преломления в точке M на расстояние от центра сферы до C касательной MT имеет постоянное значение вдоль луча:

$$np = \text{const}.$$

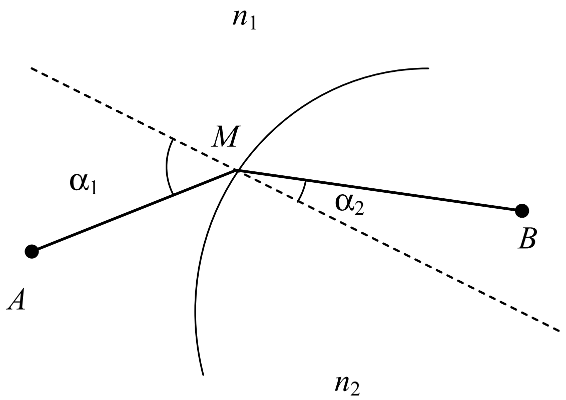

Рис. 1

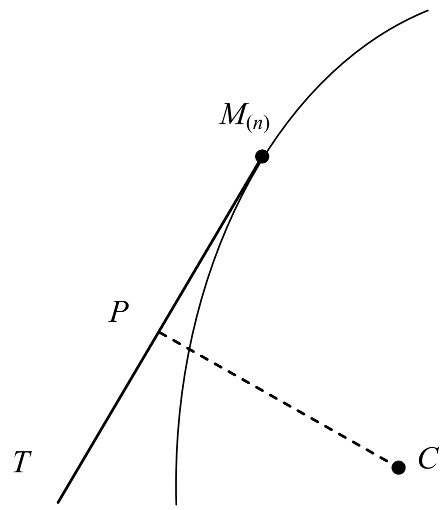

Рис. 2

2. Новые гипотезы. До сих пор я ограничивался классическим порядком рассмотрения волн и их лучей. Теперь я введу гипотезу, которая характеризует мою интерпретацию квантов. Я предположу, что уместно допустить существование в волне точек концентрации энергии, корпускул очень малых размеров, движение которых тесно связано с таким перемещением волны, что знание законов, управляющих одним из этих перемещений, является тождественным знанию законов, управляющих другим.

И обратно, я предположу, что движение всех видов частиц, существование которых открыл нам эксперимент, уместно ассоциировать с распространением волн.

В конце концов, я перейду теперь к точке зрения, немного отличной от той, которую развивал до сих пор, *так как возьму за основу законы распространения волн и буду искать возможности вывести из них, как следствия, законы динамики материальной точки, справедливые только в некоторых случаях*.

Таким образом, я допускаю принцип минимального времени, который является прямым следствием волновых концепций, и предполагаю известными соотношения, дающие в каждой точке и для каждой частоты значение показателя преломления n. Движение волны, таким образом, определено, и, для того чтобы из этого вывести движение связанной корпускулы, достаточно знать выражения, которые определяют энергию W и ее количество движения $\vec{g}$ как функции n и ν для каждой точки. По причинам, изложенным в моей докторской диссертации, выдвигается гипотеза об абсолютной необходимости положить, что

$$W = h\nu, \quad g = \frac{h\nu}{V} = \frac{h}{c}(n\nu),$$

где вектор $\vec{g}$ является касательной к лучу волны, вдоль которого распространяется фаза, в рассматриваемой точке. При этих условиях корпускула следует по лучу, определяемому принципом минимального времени $\delta\int ndl = 0$, а ее траектория будет такой, какой ее определяет динамика, при использовании принципа Мопертюи $\delta\int gdl = 0$.

Предположим, что скорость тела равна групповой скорости волн вдоль луча, и запишем:

$$v = \beta c = U = c\frac{\partial\nu}{\partial(n\nu)} = \frac{\partial W}{\partial g}.$$

Таким образом, мы находимся всегда в согласии с механикой, так как согласно уравнениям Гамильтона скорость является частной производной энергии по количеству движения. Предыдущие гипотезы включают обычную форму фундаментальных уравнений динамики, поскольку

$$\frac{dg}{dt} = \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)_W \cdot v = c\frac{\partial\nu}{\partial(n\nu)}\frac{h}{c}\frac{\partial(n\nu)}{\partial l} = h\frac{\partial(n\nu)/\partial l}{\partial(n\nu)/\partial\nu} = -h\frac{\partial\nu}{\partial l} = -\frac{\partial W}{\partial l} = F.$$

3. Динамика точки. Таким образом, мы установили тесную связь между распространением волны и динамикой связанной с ней корпускулы. Посмотрим теперь, нельзя ли из этого вывести постулируемые динамикой частные соотношения между скоростью и массой, с одной стороны, и энергией и количеством движения – с другой.

Для этого нам надо в каждом случае уточнить форму, которую принимает уравнение дисперсии $n = \varphi(x, y, z, \nu)$. Сначала изучим, как данный тип вакуумных волн распространяется на большие расстояния в различных средах. Принцип относительности предписывает нам следующую форму функции φ:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}},$$

где ν_0 – инвариант, имеющий одинаковую величину во всех галилеевых системах отсчета и характеризующийся внутренней природой волны. Корпускула, связанная с волной только что уточненным образом, будет иметь скорость

$$v = \beta c = c\frac{\partial \nu}{\partial (n\nu)} = nc.$$

Таким образом, *в этом случае* $n = \beta$ и поэтому $V = c/n = c/\beta$, т.е. получаем результат, который я доказывал различными способами. Энергия и количество движения имеют вид

$$W = h\nu = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1 - n^2}} = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad g = \frac{h}{c}(n\nu) = \frac{W}{c^2}v.$$

Эти формулы можно идентифицировать с формулами динамики Эйнштейна, принимая соотношение

$$h\nu_0 = m_0 c^2,$$

которое определяет собственную массу m_0 как функцию инварианта ν_0. Если рассматриваемая волна является световой, инвариант ν_0 и, следовательно, собственная масса m_0 должны быть выбраны чрезвычайно малыми. Может быть, даже во избежание возражений, о которых мне любезно сообщил Ланжевен, лучше было бы явно положить $\nu_0 = m_0 = 0$. Во всяком случае скорость частицы должна быть необыкновенно близка к постоянной c, если не равна ей, и динамика светового атома появилась бы как предел динамики материальной точки конечной массы. В частности, нетрудно показать, что эта точка зрения позволяет полностью объяснить различные эффекты Доплера.

Оставим теперь случай вакуума и рассмотрим среду со сферической симметрией, в которой показатель преломления меняется с расстоянием от центра по закону

$$n^2 = \left(1 - \frac{F(r)}{\nu}\right)^2 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}.$$

Здесь скорость связанной частицы находится по формуле

$$v = \frac{nc}{1 - F(r)/\nu} = \beta c.$$

Энергия и количество движения:

$$W = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + hF(r); \quad g = \frac{W - hF(r)}{c^2}v.$$

Полагая еще $h\nu_0 = m_0 c^2$ и отождествляя произведение $hF(r)$ с величиной, которая в динамике называется потенциальной энергией, видим, что движение корпускулы эквивалентно движению материальной точки под действием центральной силы. Траектории тела могут определяться уравнением Бугера $np = \mathrm{const}$. Так как $g = \frac{h}{c}(n\nu)$, то это уравнение записывается также в виде

$$gp = \mathrm{const},$$

и это есть уравнение площадей, которое нам представляется как частный случай уравнения Бугера. Наиболее интересное применение предшествующего может быть сделано при изучении модели атома водорода, придуманной Бором. Она видится нам теперь как преломляющая сфера, которая для волн, сопровождающих движение электрона с зарядом $-e$, имеет показатель преломления, меняющийся согласно закону, записанному выше, где полагается

$$F(r) = -\frac{eE}{hr},$$

здесь E – заряд ядра. Замкнутые на самих себя лучи совпадают с возможными траекториями электрона, некоторые из них обладают замечательным свойством быть в резонансе с волной. Это точно те лучи, которые являются «стабильными» траекториями Бора. Мимоходом заметим, что преломляющая сфера «атома Бора» представляет собой явление миража.

4. Оптическая дисперсия. В заключение исследуем случай однородной среды, в которой показатель преломления не зависит от рассматриваемой точки, но является произвольной функцией частоты. Можно, как в случае вакуума, определить собственную массу связанной частицы инвариантным уравнением:

$$m_0 = \frac{h}{c^2}\nu\sqrt{1-n^2},$$

где m_0 – мнимая величина при n, большем единицы. Энергия будет иметь значение $m_0 c^2 / \sqrt{1-n^2}$, но она примет привычную для динамики форму, $m_0 c^2 / \sqrt{1-\beta^2}$, только когда $n = \beta$ или согласно нашим общим определениям если $n = d\nu / d(n\nu)$. Это уравнение, интеграл которого равен $n = \sqrt{1 + A/\nu^2}$. Если постоянная A отрицательна, приходим вновь к динамике, аналогичной динамике материальной точки в вакууме. Если A положительна, масса будет мнимой, а фазовая скорость – меньшей[2], чем c.

[2] Скорость энергии была бы тогда выше c, и этот случай, таким образом, не может быть физически реализован.

Применим эти размышления к кванту света, проходящему через среду, показатель преломления которой подчинятся закону дисперсии:

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{\varepsilon_i}{\nu_i^2 - \nu^2},$$

справедливому только вне области поглощения. Пусть ν_i – собственные частоты дисперсионной среды, а ε_i – константы, ее характеризующие. С красной стороны каждой частоты ν_i собственная масса мнимая и фазовая скорость меньше c. С фиолетовой стороны масса действительная и фазовая скорость больше c. Наконец, для частот, сильно превышающих все ν_i, дисперсия выражается уравнением

$$n^2 = 1 - \frac{\sum_i \varepsilon_i}{\nu^2}$$

и динамика кванта становится аналогом динамики материальной точки в вакууме, с главным отличием, состоящим в том, что его собственная масса определяется свойствами среды прохождения.

5. Исследование классических возражений. Сторонники теории Френеля выдвинули против теории излучения возражение, которое для нее стало фатальным. «Рассмотрим, – говорили эти физики, – путь света между точкой A, находящейся в среде с постоянным показателем преломления n_1, и точкой B, расположенной в среде с постоянным коэффициентом преломления n_2. Этот путь состоит из двух прямых, пересекающихся в точке поверхности раздела сред (см. рис. 1). Принцип Ферма дает (мы это уже видели)

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2.$$

В противоположность этому корпускулярная теория должна исходить из принципа Мопертюи $\delta \int_A^B g dl = 0$. Так как g является произведением постоянной собственной массы световой корпускулы на скорость, получим $\delta \int_A^B v dl = 0$, откуда выводим:

$$n_1 \sin\alpha_2 = n_2 \sin\alpha_1.$$

Какая из двух формул правильна? Если среда 1 является воздухом или вакуумом с показателем преломления, равным единице, а среда 2 – водой, то эксперимент показывает, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Таким образом, получается, что для волновой теории $n_2 > 1$ и фаза распространяется в воде медленнее, чем в воздухе. В теории излучений приходят к противоположному заключению. Таким образом, эксперимент сработал в пользу первого случая: корпускулярная теория ошибочна. На сегодня предыдущее возражение неверно, так как мы знаем об изменении массы со скоростью. Тем не менее, казалось, было бы возможно с первого взгляда поставить все на ноги. Действительно, свободная материальная точка имеет согласно Эйнштейну количество движения, равное $\frac{W}{c^2}v$, где W – ее энергия. Однако переход из одной среды в другую не может изменить эту энергию. Для меня, в частности, это заключение является необходимым, так как изменение энергии сопровождается изменением частоты. Таким образом, масса W/c^2 корпускулы в движении тоже не меняется и мы должны записать

$$\delta \int_A^B v dl = 0.$$

Кажется, что возражение остается в силе.

Однако это возражение устраняется, если принять точку зрения, развитую здесь, согласно которой уравнения динамики выводятся в некоторых частных случаях из волновой теории. Действительно, надо, на мой взгляд, всегда возвращаться к определению g:

$$g = \frac{h}{c}(n\nu) = \frac{W}{c^2}nc.$$

Количество движения в этом случае равно $\frac{W}{c^2}v$ только тогда, когда

$$n = \beta = \sqrt{1 + \frac{A}{\nu^2}},$$

а это условие не выполняется вообще для преломляющих сред в обычных условиях.

Единственно правильной и общей формулировкой принципа Мопертюи является, таким образом, запись

$$\delta \int_A^B \frac{h\nu}{c} n dl = 0.$$

Она не может находиться в противоречии с волновой оптикой, потому что тождественна принципу Ферма.

Замечание при корректуре

Предполагая, что квант света обладает в преломляющей среде потенциальной энергией P, мы, естественно, должны записать:

$$g = \frac{h\nu - P}{c^2}v = \frac{h\nu}{V},$$

откуда получаем

$$P = h\nu\left(1 - n\frac{d(n\nu)}{d\nu}\right) = h\nu\left[1 - \frac{d(n^2\nu^2)}{d(\nu^2)}\right].$$

Если в среде существует только одна критическая частота ν_i, то формула Лоренца для случая вне зоны поглощения приводит к следующей:

$$P = -h\nu\frac{\varepsilon_i\nu_i^2}{\left(\nu_i^2 - \nu^2\right)^2} < 0.$$

Все происходит так, как если бы молекулы среды *притягивали* квант, и к тому же тем сильнее, чем ближе он находится к резонансу.

КОРПУСКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА ВЕЩЕСТВА И ИЗЛУЧЕНИЯ И ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА[1]

Новая механика связывает материальную точку в *заданном* поле с волновым процессом[2], уравнение распространения которого содержит потенциальную функцию $F(x, y, z, t)$. Кажется физически вероятным, что это уравнение допускает в любом случае решение в виде

$$f(x, y, z, t) \cos \varphi(x, y, z, t),$$

где функция f, содержащая точечную сингулярность, в общем случае движущееся тело, аналитически представляет существование материальной точки. В приближении прежних механик доказывается, что скорость перемещения этой сингулярности в каждый момент перпендикулярна поверхности $\varphi = \text{const}$, и это, вероятно, должно быть так, тем более когда прежние механики больше не применимы. Примем это предложение и рассмотрим облако точек, которым соответствует та же функция φ; их скорости будут в каждый момент перпендикулярны поверхностям семейства $\varphi = \text{const}$, и докажем, что *общее* движение облака может быть представлено решением с *непрерывной амплитудой* $a(x, y, z, t) \cos \varphi(x, y, z, t)$ уравнения распространения так, чтобы плотность облака задавалась формулой

$$\rho(x,y,z,t) = \text{const} \cdot a^2(x,y,z,t)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{2\pi}{h}F(x,y,z,t)\right],$$

где выражение в скобках могло бы к тому же рассматриваться как постоянная в ньютоновском приближении.

Это представление движения облака точек с помощью непрерывной волны ведет к объяснению явлений интерференции, предложенному мною ранее[3]. Оно могло бы, вероятно, также привести к пониманию роли, которую играют собственные решения (Eigenfunktionen) в новой механике. Эти решения реально не представляют атомные явления, но квадрат их амплитуды дал бы в *ньютоновском приближении* вероятности переходов между состояниями, как об этом думает Борн. Для динамики систем принятые Шредингером уравнения, которые вводят абстрактное понятие конфигурационного пространства, не были бы настоящими уравнениями распространения, но определяли бы

---

[1] *Louis de Broglie.* La structure atomique de la matière et du rayonnement et la Mécanique ondulatoire. – Compt. Rend. 1927. **184.** P. 273.

[2] См.: J. de Physique. Série VI. 1926. **7.** P. 321.

[3] См.: Compt. Rend. 1926. **183.** P. 447.

лишь вероятность присутствия. Таким образом, можно было бы понять, почему в случае нулевых взаимодействий они допускают в качестве решения *произведение* амплитуд непрерывных волн, относящихся к различным точкам.

Несмотря на трудности, которые представляет их окончательная доработка, нам кажется интересным отметить эти идеи; можно резюмировать их так: в микромеханике, как и в оптике, непрерывные решения уравнений движения должны давать только статистическое представление, точное микроскопическое описание явлений требует, несомненно, использования сингулярных решений, представляющих атомный характер вещества и излучения.

ПЯТИМЕРНАЯ ВСЕЛЕННАЯ И ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА[1]

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы нарисовать ту замечательную картину, которая возникает в механике – как в старой классической, так и в новой волновой, если принять идею пятимерной Вселенной, выдвинутую Калуцей и Крамерсом. Наиболее притягательным следствием этой идеи является возможность полного исключения из механики понятия силы и замены его геометрическими представлениями даже в случае движения точечного электрического заряда в электромагнитном поле. Более того, в рамках теории пятимерной Вселенной возможно придать законам распространения волн в новой волновой механике очень красивую форму. Это обстоятельство уже отмечалось в интересной статье О. Клейна, но предложенное им уравнение распространения волн, как нам представляется, необходимо модифицировать, что и делается в данной работе.

I. Введение

1. Понятие силы и общая теория относительности

Главный результат использования принципа эквивалентности состоит в изгнании из теории гравитации метафизического понятия силы. Движение материальной точки в гравитационном поле определяется, согласно идее Эйнштейна, простым условием, означающим, что пространственно-временная кривая, представляющая движение, является геодезической. Если гравитационного поля нет, то пространство-время евклидово, а геодезические суть прямые линии, как и утверждает принцип инерции. Если же гравитационное поле присутствует, то пространство-время не является евклидовым, а геодезические – прямыми, так что пространственные траектории материальных точек искривляются.

Успех этой красивой интерпретации гравитационного поля привел к попыткам полностью исключить из физики понятие силы и заменить его понятиями, взятыми из метрической геометрии. Однако при этом возникло одно существенное осложнение. При современном состоянии наших знаний представляется, что все силы, о которых нам свидетельствует опыт, сводятся только к двум типам – гравитационным и электромагнитным. Как мы отмечали, первый тип сил сводится к кривизне пространства-времени, но во втором случае это уже не так. В самом деле траектория точечного заряда в области пространства, занятой электромагнитным полем, при чрезвычайно слабом гравитационном

[1] *Louis de Broglie.* L'Univers a cinq dimensions et la mécanique ondulatoire. – J. de Physique. Série VI. 1927. **8,** № 2. P. 65.

поле непрямолинейна, хотя пространство-время является евклидовым. Таким образом, мировая линия заряда не является геодезической. Более того, материальные точки с одинаковыми массами, но разными зарядами будут иметь разные траектории. Поэтому ни один класс пространственно-временных кривых, определяемых их *внутренними* свойствами, не может быть отождествлен с возможными мировыми линиями точечных зарядов, так как форма мировых линий зависит от характера движущегося объекта, в частности от отношения e/m_0 заряда к его собственной массе.

Для завершения работы Эйнштейна по геометризации физики и сведения электромагнитных сил к каким-либо геометрическим величинам Калуца и Крамерс[2] построили смелую и очень красивую теорию – теорию относительности в пятимерном пространстве. О. Клейн[3] показал, что эта пятимерная теория относительности позволяет записать уравнения новой волновой механики замечательно симметричным образом. Так как все эти концепции достаточно мало известны физикам и, кроме того, по той причине, что я собираюсь несколько иначе представить некоторые уравнения из работы Клейна, я считаю полезным кратко осветить здесь динамическую сторону этого подхода.

II. Точка зрения неволновой механики

2. Движение точки в гравитационном поле

Рассмотрим движение материальной точки с собственной массой m_0 в гравитационном поле, задаваемом метрической формой

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \tag{1}$$

в которой принято обычное правило суммирования по повторяющимся индексам. Изменив обычно выбираемый знак, назовем гамильтоновым действием следующий криволинейный интеграл:

$$A(M) = \int_O^M m_0 c ds, \tag{2}$$

взятый вдоль мировой линии от начальной точки O до точки M. Из вариационного принципа Гамильтона вытекает, что мировые линии являются геодезическими пространства-времени.

Нетрудно получить уравнения движения:

$$\delta \int_O^M m_0 c ds = \delta \int_O^M m_0 c g_{ik} \frac{dx^i}{ds} dx^k = \delta \int_O^M m_0 c g_{ik} u^i u^k ds = 0, \tag{3}$$

[2] *Kaluza.* Sitzungsber. der. Berl. Akad. 1921. P. 966; *Kramers.* Proc. Amst. 1922. **28.** P. 7.
[3] *Klein O.* Zts. f. Phys. 1926. **36.** P. 895.

если заметить, что поскольку *разыскиваемые экстремали являются геодезическими,* то при варьировании линии интегрирования в первом порядке величина $s(M)$ не меняется. Таким образом, классические уравнения Эйлера – Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{ds}\left(m_0 c g_{ik} u^k\right) = \frac{1}{2} m_0 c \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} u^\mu u^\nu. \tag{4}$$

Это и есть уравнения движения, и нетрудно убедиться, что в первом приближении они приводят к ньютоновской теории гравитации. Сейчас все это хорошо известно, и представляется неуместным углубляться в детали.

3. Движение точечного заряда в электромагнитном поле

Допустим теперь с целью упрощения, что гравитационное поле пренебрежимо слабое и поэтому можно выбрать декартовы прямоугольные координаты. С релятивистской точки зрения электромагнитное поле задается 4-вектором $\vec{\varphi}$, компонентами которого являются скалярный потенциал ψ и вектор-потенциал $\vec{a}$:

$$\varphi_4 = \varphi^4 = \frac{\psi}{c}, \quad \varphi_1 = -\varphi^1 = -\frac{a_x}{c}, \quad \varphi_2 = -\varphi^2 = -\frac{a_y}{c}, \quad \varphi_3 = -\varphi^3 = -\frac{a_z}{c}. \tag{5}$$

Известно, что напряженности электрического $\vec{h}$ и магнитного $\vec{H}$ полей определяются формулами

$$\vec{h} = -\operatorname{grad}\psi - \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{a}. \tag{6}$$

Согласно Лоренцу сила, действующая на заряд e, имеет вид

$$\vec{f} = e\left\{\vec{h} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right]\right\}. \tag{7}$$

Гамильтоново действие для движущейся точки должно при этом записываться в виде

$$A(M) = \int_O^M \left(m_0 c + e\varphi_s\right) ds, \tag{8}$$

где φ_s – составляющая 4-вектора $\vec{\varphi}$, касательная к мировой линии. Так как в общем случае φ_s зависит от координат x^i точки, то теперь уже мировая линия не является геодезической и зависит от отношения e/m_0.

Поскольку экстремали гамильтоновой вариационной задачи больше не являются геодезическими, запишем интеграл с фиксированными пределами:

$$\delta \int_{t_0}^{t_M} L dt = 0,$$

$$L = m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + e\left(c\varphi_4 + v_x\varphi_x + v_y\varphi_y + v_z\varphi_z\right), \tag{9}$$

где v_x, v_y, v_z суть компоненты обычной скорости частицы. Тогда уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{10}$$

и их удобно преобразовать к векторной форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = e\vec{f}\,. \tag{11}$$

Таковы уравнения динамики электрона, в которых присутствует сила.

4. Теория относительности для пространства пяти измерений

Допустим теперь, следуя Калуце и Крамерсу, что для представления мировых событий нужно использовать пятимерное многообразие, т. е. добавляется еще и пятая координата x^0. Для нас изменения этой координаты кажутся совершенно неощутимыми, так что две мировые точки с разными координатами x^0 нам представляются неразличимыми. Мы оказываемся привязанными к своему четырехмерному пространству-времени и можем замечать только проекции мировых 5-точек на наше четырехмерное подпространство. В таком случае элемент мировой линии будет задаваться формулой

$$d\sigma^2 = \gamma_{00}\,dx^{0\,2} + 2\sum_1^4 \gamma_{oi}\,dx^0\,dx^i + \sum_1^4\sum_1^4 \gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{12}$$

где метрические функции γ считаются не зависящими от координаты x^0.

Переходя от одной системы отсчета к другой, каким-либо образом движущейся по отношению к первой, мы можем производить различные замены переменных, не затрагивающие x^0. Поэтому можно считать, что все *допустимые* замены переменных имеют вид

$$x_i' = f_i\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{13}$$

Таким образом, *для нас* величина

$$\gamma_{00}\,dx^{0\,2} + \sum_1^4 \gamma_{0i}\,dx^0\,dx^i$$

является инвариантом, и это же верно для величины

$$ds^2 = \left(\gamma_{ik} - \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}\right)dx^i\,dx^k. \tag{14}$$

В формуле (14) и последующих формулах следует суммировать по индексам 1, 2, 3, 4, отвечающим пространственно-временным координатам. Положим теперь

$$d\theta = \sqrt{\gamma_{00}}\,dx^0 + \frac{\gamma_{0i}}{\sqrt{\gamma_{00}}}\,dx^i. \tag{15}$$

Так как для нас эта величина инвариантна, можно записать

$$d\sigma^2 = ds^2 + d\theta^2. \tag{16}$$

Чтобы перейти к интерпретации электромагнитных явлений, необходимо ввести электромагнитные потенциалы. Поскольку величины γ_{0i} преобразуются как 4-векторы, то можно положить

$$\gamma_{0i} = \alpha\gamma_{00}\varphi_i, \tag{17}$$

где φ_i задаются формулами (5), а α – постоянная величина.

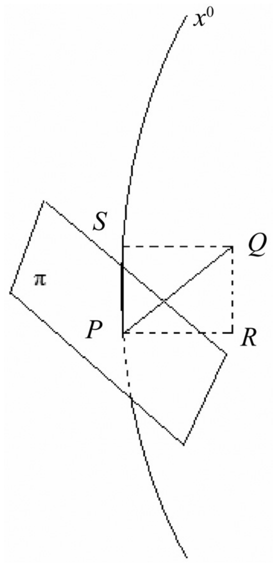

Рис. 1. $\overline{PQ} = d\sigma$, $\overline{PS} = d\theta$, $\overline{PR} = ds$

Уравнение $d\theta = 0$ означает, что рассматриваемое бесконечно малое смещение ортогонально к направлению x^0, т.е. относится к пересечению поверхностей x^1 = const, x^2 = const, x^3 = const, x^4 = const и, следовательно, не является нормальным к нашему пространству-времени x^0 = const. Уравнение $d\theta = 0$ согласно определению (17) величин γ_{0i} интегрируемо только тогда, когда электромагнитное поле исчезает. Таким образом, в общем случае не существует такого четырехмерного многообразия, которое было бы в каждой своей точке нормальным к направлению x^0. Однако естественно допустить, что всякая мировая линия, удовлетворяющая условию $d\theta = 0$ (т.е. всюду нормальная к пятому измерению), имеет меру, полностью определяемую гравитацией, и поэтому задается выражением интервала $g_{ik}dx^i dx^k$ в теории Эйнштейна. Согласно (16) и (14) это обстоятельство позволяет положить

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}} = g_{ik} + \gamma_{00}\alpha^2\varphi_i\varphi_k. \tag{18}$$

Интересно все это представить себе геометрически, как на рис. 1, на котором изображена координатная линия x^0. В некоторой точке P этой линии в виде элемента плоскости π, наклоненной к направлению x^0, изображен малый отрезок четырехмерного многообразия $x^0 = \text{const}$, проходящий через P. На этом рисунке $\overline{PQ}$ есть элемент мировой линии длиной $d\sigma$, $\overline{PS}$ – его проекция на направление x^0 (*ковариантная* компонента отрезка $d\sigma$ вдоль направления x^0), $\overline{PR}$ – проекция этого отрезка, нормальная к направлению x^0. Тогда из формулы (16) сразу видно, что

$$\overline{PS} = d\theta, \quad \overline{PR} = ds.$$

Вскоре мы увидим [см. формулу (26)], что тангенс $d\theta/ds$ угла $\widehat{QPR}$ пропорционален отношению e/m_0, характеризующему материальную точку, для которой $\overline{PQ}$ есть элемент мировой линии. Отсюда вытекает, что мировая линия всякого движущегося объекта в любой точке образует один и тот же угол с направлением x^0. Этот угол оказывается прямым, если электрический заряд исчезает.

Таким образом, очевидно, что координатная линия x^0 имеет в некотором смысле абсолютный характер, а наше пространство-время можно рассматривать как сечение пятимерного пространства, такое, что само его пересечение с координатным направлением x^0 имеет абсолютный характер. Этот факт можно интерпретировать, если вместе с О. Клейном допустить, что линии x^0 замкнуты и их длина пренебрежимо мала по сравнению с измеряемыми на опыте длинами. В некотором смысле наблюдаемый мир имеет в направлении, ортогональном к пятому измерению, чрезвычайно малые размеры.

С помощью вариационного принципа в пятимерном пространстве можно вывести одновременно и теорию гравитации Эйнштейна, и уравнения Максвелла[4]. Я не хочу здесь освещать эту сторону вопроса и ограничусь замечанием о том, что из указанных рассуждений вытекает следующий вывод. Именно: оказывается, что произведение $\gamma_{00}\alpha^2$ связано с обычной гравитационной постоянной Ньютона G соотношением

$$\gamma_{00}\alpha^2 = \frac{16\pi G}{c^2}. \tag{19}$$

5. Мировая линия всякой материальной точки является геодезической

Допустив существование пятимерной Вселенной, можно сформулировать следующий принцип: «*В пятимерном пространстве мировая линия всякой материальной точки является геодезической*». Мы убедимся в этом, показав, что данный принцип в точности приводит к уравнениям эйнштейновской

[4] *Klein O.* Zts. f. Phys. 1926. **36.** P. 897–899.

динамики частицы в гравитационном поле, если принять гипотезу о геометрическом происхождении электрического заряда.

Определим скорость в пятимерном пространстве:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\sigma}, \quad (\mathrm{i} = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{20}$$

и для нахождения геодезических запишем вариационный принцип

$$\delta \int_O^M \frac{1}{2}\, d\sigma = \delta \int_O^M \frac{1}{2}\left[\gamma_{00} u^{0^2} + 2\gamma_{0i} u^0 u^i + \gamma_{ik} u^i u^k\right] d\sigma = 0, \tag{21}$$

где O и M суть некоторые фиксированные точки. Так как экстремали являются геодезическими, нам необходимо варьировать интеграл вида $\int L d\sigma$ с фиксированными пределами (см. параграф 2), что позволяет сразу записать уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4). \tag{22}$$

Сначала, приняв во внимание (15), приходим к соотношению

$$\gamma_{00} u^0 + \gamma_{0i} u^i = \sqrt{\gamma_{00}}\, \frac{d\theta}{d\sigma} = \mathrm{const} = p_0. \tag{23}$$

Далее для переменных с индексами 1, 2, 3, 4 найдем

$$\frac{d}{d\sigma}\left(g_{ik} u^k + \alpha p_0 \varphi_i\right) = \frac{1}{2} u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} + \alpha p_0 u^\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^i}. \tag{24}$$

Если электромагнитное поле отсутствует, то нам будет достаточно вместо σ взять в качестве независимой переменной величину s, чтобы восстановить уравнение (4) теории Эйнштейна. Если же отсутствует гравитационное поле, то величины g_{ik} постоянны и поэтому найдем:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(g_{ik} u^k\right) = \alpha p_0 u^\mu \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\mu}\right) = \alpha \sqrt{\gamma_{00}}\, \frac{d\theta}{d\sigma}\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\mu}\right) u^\mu. \tag{25}$$

Предположим теперь, что наклон мировой линии частицы с массой m_0 и зарядом e к направлению x^0 определяется следующим фундаментальным соотношением:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{e}{\alpha \sqrt{\gamma_{00}}\, m_0 c}. \tag{26}$$

Тогда уравнение (25) можно переписать в виде

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{e}{m_0 c} \cdot \frac{dx^\mu}{ds}\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\mu}\right), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{27}$$

и с помощью определений (5) легко восстанавливаются уравнения (11) в прямоугольных координатах.

Итак, придав геометрический смысл потенциалам и отношению e/m_0, убеждаемся в том, что пятимерные мировые линии материальной частицы всегда являются геодезическими. Таким образом, *понятие силы полностью изгоняется из механики.*

Так как постоянные α и γ_{00} не могут зависеть от свойств движущейся частицы, уравнение (26) приводит нас к необходимости принять следующие соотношения:

$$m_0 c = I\frac{ds}{d\sigma}, \quad \frac{e}{\alpha\sqrt{\gamma_{00}}} = I\frac{d\theta}{d\sigma}, \tag{28}$$

в которых I – инвариант, имеющий согласно (16) вид[5]

$$I^2 = m_0^2 c^2 + \frac{e^2}{\alpha^2\gamma_{00}}. \tag{29}$$

Чтобы в случае нулевого заряда восстановить гамильтоново действие вида (2), положим

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_O^M I d\sigma = \int_O^M I\left(\frac{d\theta}{d\sigma}d\theta + \frac{ds}{d\sigma}ds\right) = \\ &= \int_O^M I\left(\frac{e}{\alpha\sqrt{\gamma_{00}}}d\theta + m_0 c ds\right) = \frac{e}{\alpha}x_0 + f(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \tag{30}$$

III. Точка зрения волновой механики

6. Волновая механика и теория относительности в четырехмерном мире

В предыдущей статье[6] я изложил основные принципы волновой механики. Главная идея этой новой теории состоит в том, чтобы приписать материи волновые свойства, описываемые некоторой функцией, которая подчиняется уравнению распространения волн. Если выполнены условия геометрической оптики в применении к уравнению распространения, то всякий материальный объект можно сравнить с группой монохроматических волн, частоты которых лежат в очень узком интервале $(\nu - \delta\nu, \nu + \delta\nu)$. Суперпозиция этих волн порождает в силу согласованности фаз некоторую сингулярную точку, перемещающуюся вдоль *лучей* центральной волны частоты ν. Эта точка, являющаяся математическим образом материальной точки, ведет себя в полном согласии

[5] Величины (28) суть проекции на направление x^0 и перпендикулярное ему направление 5-вектора длины I, откладываемого вдоль мировой линии. Очевидно, что этот вектор является пятимерным обобщением 4-импульса.

[6] J. de Physique. Série VI. 1926. **7.** P. 321.

с законами старой классической механики. Если же приближение геометрической оптики не справедливо, то необходимо строго исследовать решения уравнений распространения. Именно в этом и состоит обобщение, предлагаемое новой механикой, и его плодотворные возможности, подтвержденные прекрасными результатами Шредингера, далеко не исчерпаны.

В случае когда частица движется, не испытывая воздействия каких-либо полей, получается следующее уравнение распространения волн (в прямоугольных галилеевых координатах):

$$\Delta u - \frac{1}{c_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} u, \tag{31}$$

где m_0 – постоянная, характеризующая движущуюся частицу (ее собственная масса). Пользуясь четырехмерными релятивистскими обозначениями, можно переписать (31) в виде

$$g^{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 u, \tag{32}$$

где, как обычно, положено

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Допустим сначала, что электромагнитное поле отсутствует и имеется только гравитационное поле. В этом случае мы не можем сохранить форму уравнения (32), так как величины $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k}$ не являются компонентами тензора. Вводя ковариантную производную от градиента функции u, можно заменить уравнение (32) на ковариантное:

$$g^{ik}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} - \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -\frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 u, \tag{33}$$

где использовано хорошо известное обозначение

$$\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{r\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu}\right). \tag{34}$$

Уравнение (33) и будет уравнением распространения материальных волн в гравитационном поле. Убедимся теперь в том, что в приближении геометрической оптики восстанавливается эйнштейновская динамика частицы в гравитационном поле. В самом деле, центральная волна, отвечающая группе волн, связанной с некоторым материальным объектом, может быть записана в виде

$$u = C e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}. \tag{35}$$

Подставим (35) в (33) и, так как мы работаем в приближении геометрической оптики, оставим в левой части уравнения только члены, квадратичные относительно первых производных. В таком случае найдем

$$g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}=m_0^2c^2, \tag{36}$$

откуда вытекает

$$\varphi=m_0c\int_O^M u_i dx^i=\int_O^M m_0 c ds. \tag{37}$$

Таким образом, φ оказывается совпадающим с гамильтоновым действием, заданным формулой (2), а лучи центральной волны – с пространственно-временными геодезическими. Так как траектория материальной точки является одним из таких лучей, тем самым восстанавливаются уравнения эйнштейновской динамики материальной точки в гравитационном поле.

7. Волновая механика и пятимерная Вселенная

Уравнение (33) справедливо, если отвлечься от электромагнитных явлений. Чтобы их учесть, достаточно, следуя идеям Калуцы–Крамерса, обобщить уравнение (33). Для этого примем, что в пятимерной Вселенной всякий периодический материальный процесс описывается соответствующим решением уравнения

$$\gamma^{ik}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^k}-\left\{\begin{matrix} ik \\ r\end{matrix}\right\}\frac{\partial u}{\partial x^r}\right]=-\frac{4\pi^2}{h^2}I^2u, \tag{38}$$

где I – инвариант, определяемый уравнением (29) и естественным образом появляющийся в уравнении вместо члена m_0c, если частица оказывается заряженной[7].

Если приближение геометрической оптики применимо, то, как и в предыдущем параграфе, можно показать, что центральная волна в группе волн, связанной с материальной точкой, задается выражением

$$C\cdot\exp\left(\frac{2\pi i}{h}A\right)=f(x,y,z,t)\exp\left(\frac{2\pi i}{h}\frac{ex_0}{\alpha}\right),$$

где A есть действие, определяемое формулой (30). Отсюда вытекает, что пятимерная мировая линия всякой материальной точки является геодезической, и, следовательно, в приближении геометрической оптики восстанавливаются законы эйнштейновской динамики частицы в гравитационном поле и законы динамики электрона в электромагнитном поле.

О. Клейн записал уравнение (38) без правой части и заключил, что мировые линии являются геодезическими нулевой длины. Однако нет никакого сомнения в том, что правая часть в уравнении (38) все же необходима и что мировые линии действительно являются геодезическими, но *не нулевой длины.*

Отказавшись от приближения геометрической оптики, выясним, как будет выглядеть уравнение (38) при отсутствии гравитационного поля. Тогда в прямоугольных координатах метрические коэффициенты g_{ik} принимают свои га-

[7] В уравнении (38) индексы, разумеется, пробегают значения от 0 до 4.

лилеевы значения, а соотношения (17) и (18) определяют выражения для γ_{ik} и соответственно для γ^{ik}. Так как согласно (19) произведение $\gamma_{00}\alpha^2$ имеет порядок 10^{-27} ед. СГС, то подобными членами зачастую можно пренебречь.

В данном случае уже нельзя считать, что функция u имеет вид

$$C \cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{h} A\right),$$

но по-прежнему будем предполагать, что она представляется в виде произведения некоторой функции от x, y, z, t на множитель $\sin \frac{2\pi}{h} \frac{ex_0}{\alpha}$. В данных условиях вычисления позволяют, рассматривая приближенно, описывать формулу в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \left[\frac{1}{\gamma_{00}} + \frac{a^2}{c^2}\left(\Psi^2 - a^2\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^{0\,2}} - 2\sum_{xyz} \alpha \frac{a_x}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x^0 \partial x} - \\ &- \frac{2\alpha\psi}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^0 \partial t} = -\frac{4\pi^2 I^2}{h^2} u \end{aligned} \tag{39}$$

или, учитывая пересчет для u:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - \frac{4\pi i}{h}\sum_{xyz} \frac{ea_x}{c}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4\pi i}{h}\frac{e\psi}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \\ &+ \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2 c^2 - \frac{e^2}{c^2}\left(\psi^2 - a^2\right)\right] u = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Это уравнение является уравнением (59) в моей уже упоминавшейся статье в журнале «Journal de Physique». После получения этого уравнения я добавил: «Надо, однако, учесть, что уравнение (59) содержит воображаемые отношения, и эта неточность может иметь несколько возражений с точки зрения физики».

Видно, что, если не учитывать эти неточности, можно (40) представить в упрощенном виде через уравнение (39).

8. Заключение

Уравнение (38), которое выведено из (29) и (19), может быть представлено в кратком виде:

$$\gamma^{ik}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} - \left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}\frac{\partial u}{\partial x^r}\right] + \frac{4\pi^2 c^2}{h^2}\left[m_0^2 + \frac{e^2}{16\pi G}\right] u = 0, \tag{41}$$

это будет основное уравнение волновой механики с материальной точки зрения.

Чтобы вникнуть в проблему материи и ее атомной структуры, без сомнения, необходимо систематически принимать концепцию пятимерного мира, которая представляется более плодотворной, чем точка зрения Вейля.

Если удастся понять, каким образом константы e, m_0, c, h и G проявляются в уравнении (41), то нам удалось бы раскрыть наиболее загадочные тайны природы.

ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА И КОРПУСКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА ВЕЩЕСТВА И ИЗЛУЧЕНИЯ[1]

Шредингер и многие другие авторы, которые занимаются волновой механикой, пытались представить динамические явления распространением волн с постоянной амплитудой по примеру классической оптики. На первый взгляд трудно понять, как эту точку зрения можно примирить с атомной структурой вещества и излучения, которая почти не оспаривается сегодня. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы показать, что непрерывные решения дают в действительности только некоторое статистическое представление динамических явлений, точное описание которых, несомненно, требует рассмотрения волн, содержащих сингулярности. В частности, этот вид концепций позволяет придать ясный смысл уравнению, предложенному Шредингером для динамики систем.

I. Введение[2]

Целью волновой механики является создание синтеза между динамикой материальной точки и теорией волн, представляемой на основе идей Френеля. С одной стороны, этот синтез в результате должен привести к принятию оптикой понятия точек концентрации излучаемой энергии, понятия, которое сегодня навязывается недавними результатами экспериментальной физики. С другой стороны, он должен также трансформировать концепции теории волн в образ, который мы могли бы применить к материальным точкам, чтобы учесть введение квантов в механику и внутриатомные явления.

Новая механика определяет возможные движения материальных точек с помощью уравнений движения, форма которых зависит от потенциальных функций. Следует ли для представления движения материальной точки (электрон, протон или фотон) принимать непрерывное, без сингулярностей, решение уравнения движения, аналогичное решениям, которые использует оптика Френеля? Такие решения, очевидно, никак не учитывают атомную структуру вещества. Мне кажется физически предпочтительным поиск того, как представить каждую материальную точку соответствующим решением уравнения движения, амплитуда которого включала бы точечную сингулярность как аналитическую интерпретацию материальной точки. Однако применение непре-

---

[1] *Louis de Broglie.* La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. – J. de Physique. Série VI. 1927. **8,** № 5. P. 225.

[2] Эта статья является развитием двух статей, опубликованных в: Compt. Rend. 1926. **183.** P. 447 и 1927. **184.** P. 273.

рывных решений в оптике позволяло физикам в течение целого века предсказывать очень точные явления, и к тому же Шредингер только что с успехом использовал непрерывные решения для представления стационарных состояний микромеханики. Эти констатации приводят к вопросу, не существует ли между непрерывными решениями и решениями уравнений движения с сингулярностями связи, которая приближенно выражается следующим образом: непрерывные решения дают статистический образ перемещения сингулярностей, соответствующих действительным решениям, и, следовательно, позволяют предвидеть «вероятность присутствия» сингулярности в заданном объеме пространства, где происходит движение.

Именно эту идею я буду здесь пытаться развивать и уточнять, ясно раскрывая постулаты, которые я допускаю и которым было бы желательно найти оправдание. Моя концепция приближается к концепции, которая была блестяще защищена Борном, в том, что она ведет к рассмотрению непрерывных решений как дающих вероятности присутствия, но она отличается в главном пункте. Для Борна на самом деле есть только вероятности. Детерминизм индивидуальных явлений должен быть оставлен, единственно определенной оказывается вероятность статистических явлений. В способе рассмотрения, принятом здесь, напротив, материальная точка – главная реальность, и ее движение полностью определено как движение сингулярности амплитуды в распространяющейся волне. И только, как в прежней механике, движение точки зависит от начальных условий, и если не знают (во всяком случае в той мере, которая будет уточнена) этих начальных условий, можно говорить о вероятности того, что материальная точка находится в данный момент в данном элементе объема пространства. Это именно та вероятность, которая была бы получена при рассмотрении непрерывных волн. Было бы уместным сохранить атомную структуру вещества и излучения, так же как детерминизм индивидуальных явлений, приписывая непрерывным решениям статистическое значение, которое Борн и, неявно, Шредингер признали.

II. Непрерывные волны и динамика материальной точки

А. Случай отсутствия поля

1. Уравнение движения и его решения

Рассмотрим материальную точку с собственной массой m_0, помещенную вне какого-либо поля в пространстве, где не существует никакого препятствия. Относительно галилеевой системы эта точка движется прямолинейно и равномерно (или находится в покое), и волновая механика нас учит, что это движение должно быть ассоциировано с распространением волны и представлено решением следующего уравнения[3]:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}u, \tag{1}$$

где полагается

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}. \tag{2}$$

В рассуждениях, которые я провел в моей диссертации, мы пришли к поискам решений (1) в виде

$$u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)\frac{\cos 2\pi\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[t - \frac{\beta z}{c} + \tau\right] \tag{3}$$

или, полагая

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{h}, \quad V = \frac{c}{\beta}, \tag{4}$$

$$u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)\cos 2\pi\nu\left[t - \frac{z}{V} + \tau\right]. \tag{5}$$

В первой формуле (4) W обозначает полную энергию движущегося тела, включая внутреннюю энергию m_0c^2.

Если записать аргумент косинуса в виде $\frac{2\pi}{h}\varphi(x,y,z,t)$, функция φ будет не чем иным, как гамильтоновым действием.

С другой стороны, из (4) следует, что скорость материальной точки равна групповой скорости однородных плоских волн в виде

$$A\cos 2\pi\nu\left[t - \frac{z}{V} + \tau\right],$$

т. е. мы имеем

$$\frac{1}{v} = \frac{\partial(\nu/V)}{\partial\nu}. \tag{6}$$

Этот замечательный факт заставляет думать, что материальная точка должна быть ассоциирована с группой монохроматических волн. Данная концепция, принадлежащая мне, вновь была рассмотрена Шредингером и привела его к представлению материальной точки как «волнового пакета». С дидактической точки зрения очень полезно использовать этот образ, но нельзя быть уверенным в том, что он соответствует действительности, так как, и я это сейчас покажу, уравнение (6) можно получить, не прибегая к понятию группы волн.

---

[3] См.: J. de Physique. Série VI. 1926. **7.** P. 321–327, уравнение (49). Отныне я буду ссылаться на эту статью буквами J.P.

Чтобы уточнить этот пункт, надо задаться вопросом, какова может быть форма функции $f(x, y, z, t)$ в уравнениях (3) и (5). Физически кажется вероятным, что эта функция представляет сингулярность там, где находится материальная точка, и что ансамбль значений f превращается в блок, параллельный направлению движения со скоростью v. Таким образом, надо записать функцию в форме $f(x, y, z - vt)$, и если ею заменить функцию (5), записанную в комплексном виде, и подставить в уравнение (1), то, аннулируя мнимые члены, найдем

$$vV = c^2. \tag{7}$$

Однако это соотношение, тождественное второму из соотношений (4), приводит к (6) и, следовательно, (6) получается без всякого предположения, что решение уравнения (1) может представляться группой однородных волн близких частот. Этот способ интерпретации формулы (6) оказывается в лучшем согласии с размышлениями, которые я использовал в моей диссертации, чем концепция группы волн.

Избавляясь от действительных членов после подстановки (5) в (1), получаем второе уравнение:

$$\Box f = \Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{8}$$

Это уравнение является, как известно, инвариантным относительно преобразований Лоренца: функция f должна удовлетворять уравнению Лапласа в системе осей, связанных с движущимся телом, если предположить, что волновое явление стационарно в этой системе. Наиболее простая гипотеза заключается в допущении, что в этой собственной системе материальная точка обладает сферической симметрией; f является функцией только r_0 и необходимо:

$$u\left(x_0, y_0, z_0, t_0\right) = \frac{C}{r_0}\cos 2\pi\nu_0\left(t_0 + \tau_0\right). \tag{9}$$

Если материальная точка вместо сферической имеет цилиндрическую симметрию относительно оси x_0, можно будет вместо (9) принять за решение функцию

$$u\left(x_0, y_0, z_0, t_0\right) = \frac{Cx_0}{r_0^{3/2}}\cos 2\pi\nu_0\left(t_0 + \tau_0\right). \tag{10}$$

Для функции u, полученной в собственной системе, достаточно произвести преобразование Лоренца, чтобы получить ее выражение в другой галилеевой системе. Если, к примеру, взять систему, в которой тело движется вдоль z со скоростью v, решение (9) примет вид

$$u\left(x, y, z, t\right) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\left(z - vt\right)^2}{1 - \beta^2}}}\cos 2\pi\nu\left[t - \frac{z}{V} + \tau\right]. \tag{11}$$

Предыдущее решение и решения, аналогичные (10), соответствуют прежним механикам в том смысле, что фаза пропорциональна гамильтонову действию. Интересно констатировать, что есть другие решения уравнения (1) того же вида, причем некоторы из них не существуют в прежних механиках. К примеру, если мы перейдем в собственную систему, рассмотренную выше, и будем искать решение в виде $f \cdot \sin 2\pi\nu_0' t$ с $\nu_0' \neq \nu_0$, то удовлетворим уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} = \frac{4\pi^2}{c^2}\left(\nu_0^2 - \nu_0'^2\right) f. \tag{12}$$

Тогда мы найдем как «решения со сферической симметрией» функции:

$$\left.\begin{aligned} f(r_0) &= \frac{C}{r_0}\cos 2\pi\left[\frac{\sqrt{\nu_0'^2 - \nu_0^2}}{c} r_0 + C'\right], && \nu_0' > \nu_0 \\ f(r_0) &= \frac{1}{r_0}\left[C e^{\frac{2\pi}{c}\sqrt{\nu_0^2 - \nu_0'^2}\, r_0} + C' e^{-\frac{2\pi}{c}\sqrt{\nu_0^2 - \nu_0'^2}\, r_0}\right], && \nu_0 > \nu_0' \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и выведем из них путем преобразований Лоренца решение для произвольной галилеевой системы. Принимая всегда за траекторию движения ось z, получим решение вида

$$u(x,y,z,t) = f(x,y,z - vt)\cos\frac{2\pi\nu'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[t - \frac{\beta z}{c}\right]. \tag{14}$$

Можно сказать, что так мы получаем движения, неизвестные в прежней динамике, в которых тело, вместо того чтобы обладать нормальной собственной массой m_0, имеет аномальную собственную массу $h\nu_0'/c^2$. Отклонение, которое представляется здесь относительно нормального механического состояния, характеризуется ненулевым значением $\Box f$.

Таким образом, мы пришли к следующей общей точке зрения: волновая механика свободной материальной точки задается уравнением (1), *некоторые* решения которого соответствуют прежним динамикам. Но существуют другие решения, примерами которых являются формулы (13). Эти другие решения отвечают за возможные состояния движения, не предусмотренные прежними теориями. Содержание уравнения (1) более богато, чем дифференциальные уравнения прежних динамик.

2. Представление облака точек непрерывной волной

Рассмотрим облако материальных точек одной и той же природы, которые не подвержены действию внешней силы или взаимодействию и движутся все с одинаковой скоростью v в одном и том же направлении вдоль оси Oz. Если волновое явление, эквивалентное каждой точке, имеет нормальную форму (5), то общее явление будет представлено функцией

$$U(x,y,z,t) = \sum_i f_i(x,y,z - vt)\cos 2\pi\nu\left[t - \frac{vz}{c^2} + \tau_i\right]. \tag{15}$$

Выдвинем упрощающую гипотезу (которой, как мы увидим далее, не следует придавать слишком большого значения) о том, что величины τ_i равны. Тогда материальные точки имеют одинаковые фазы и можно записать:

$$U = \left[\sum_i f_i\left(x, y, z - vt\right)\right] \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{vz}{c^2}\right]. \tag{16}$$

Амплитуда, определенная выражением в скобках, содержит большое число сингулярностей, движущихся со скоростью v вдоль оси Oz.

Теперь уравнение (1) принимает также непрерывное решение[4]:

$$\Psi\left(x, y, z, t\right) = a \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{vz}{c^2}\right]. \tag{17}$$

Будем говорить, что это непрерывное решение соответствует сингулярному решению (5). Назовем плотностью облака число корпускул на единицу объема и предположим, что эта плотность имеет повсюду постоянное значение ρ. Постоянную a непрерывного решения (17), которую можно выбирать произвольно, определим соотношением

$$\rho = Ka^2, \tag{18}$$

где K – заранее заданная постоянная. Мы видим, что непрерывное решение даст благодаря своему тригонометрическому множителю распределение фаз в облаке точек, в то время как квадрат его амплитуды будет мерой плотности облака.

В жидкости, где плотность в точке xyz равна $\rho\ (x, y, z)$, вероятность того, что молекула, взятая наугад, будет находиться в элементе объема dv, окружающем рассматриваемую точку, составит величину $\rho\ (x, y, z)\ dv$. Это замечание позволяет нам представить предшествующее в различной форме. Рассмотрим *единственную* материальную точку, движущуюся прямолинейно и равномерно. Предположим, что ее скорость известна по величине и направлению, но положение ее неизвестно. Тогда произведение a^2dv будет мерой вероятности нахождения точки в какой-то момент в элементе объема dv. Таким образом, видно, что условие равенства τ_i, допущенное ранее, не является существенным, потому что облако рассмотренных выше точек можно теперь считать ансамблем возможных положений одной и той же точки.

Б. Случай постоянных полей

3. Движение материальной точки в постоянном поле

Рассмотрим вначале случай постоянного поля, определяемого потенциальной функцией $F(x, y, z)$. Волновая механика допускает уравнение движения, которому должна удовлетворять волна, записанная в комплексном виде:

---

[4] Здесь мы всегда будем обозначать буквой Ψ непрерывные решения уравнений движения. Наши функции Ψ идентичны тем, которые Шредингер обозначает этой же буквой.

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h}\frac{F(x,y,z)}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right]u = 0. \tag{19}$$

Представим себе, что тело начинает перемещаться в область R_0 пространства, где функция F равна нулю, а затем проникает в область R, где действует рассматриваемое поле. В области R_0 уравнение (19) сводится к (1) и материальная точка, таким образом, представляется функцией

$$u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)\cos\frac{2\pi}{h}\varphi. \tag{20}$$

Функция f содержит одну движущуюся сингулярность, и функция φ является гамильтоновым действием прежних механик. Для получения волнового представления материальной точки там, где действует поле сил, надо распространить решение (20) на область R. Посмотрим, каким соотношениям должны там удовлетворять функции f и φ. Для этого запишем (20) в комплексном виде, подставляя в (19), и разделим действительную и мнимую части. Получим два уравнения:

$$\frac{1}{f}\,\Box f = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{2F}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(m_0^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right)\right], \tag{21_1}$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}f\,\Box\varphi + \frac{F}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{21_2}$$

При постоянном поле область R является аналогом преломляющей среды с постоянными свойствами, проникая в которую волна остается монохроматической с частотой $\nu = W/h$, равной ее частоте в области R_0. В новой механике это отражает тот факт, что в постоянном поле энергия остается постоянной. Таким образом, имеем:

$$\varphi(x,y,z,t) = Wt - \varphi_1(x,y,z);\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = W = h\nu;\quad \Box\varphi = \Delta\varphi. \tag{22}$$

Уравнение (21_1) тогда запишется так:

$$\frac{1}{f}\,\Box f = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(W-F)^2 + m_0^2 c^2\right]. \tag{23}$$

Если первый член пренебрежимо мал, это уравнение будет идентичным уравнению Якоби в релятивистской динамике постоянных полей и φ_1 будет функцией Якоби. Различие с прежними механиками кажется здесь, таким образом, связанным с ненулевым значением $\Box f$.

В прежнем приближении скорость материальной точки, проходящей точку M, имеет направление $\operatorname{grad}\varphi_1$ в этой точке. Мы *допустим*, что то же самое имеет место при строгом определении f и φ.

Согласно нашим представлениям материальная точка является сингулярностью функции f, где она становится бесконечной по причине обратно пропорциональной зависимости от некоторой степени расстояния. Таким образом, обозначая через n расстояние, откладываемое в направлении движения точки M тела в момент t, получаем

$$\left[\frac{f}{\partial f/\partial n}\right]_{M,t} = 0. \tag{24}$$

Будем считать, что n направлено по нормали в точке M к поверхности $\varphi_1(x, y, z) = \text{const}$, и применим уравнение ($21_2$), учитывая (22) и (24). Получаем:

$$\left[-\frac{\partial f/\partial t}{\partial f/\partial n}\right]_{M,t} = \frac{c^2\,\mathrm{grad}\varphi_1}{W-F}. \tag{25}$$

В силу гипотезы о направлении скорости она равна

$$\vec{v}_M = \frac{c^2\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\varphi_1}}{W-F}. \tag{26}$$

В приближении прежних механик φ_1 совпадает с функцией Якоби и соотношение (26) является, таким образом, уравнением, которое связывает количество движения и скорость в динамике Эйнштейна. Предшествующие рассуждения имеют целью сделать правдоподобным то, что уравнение (26) может быть применимо со всей строгостью в новой механике.

Мы уточним далее (в разделе III), что́ следует понимать в волновой механике под ньютоновским приближением, и увидим, что в этом приближении знаменатель в (26) может быть заменен на m_0c^2, в результате чего просто получаем

$$\vec{v}_M = \frac{1}{m_0}\overrightarrow{\mathrm{grad}\varphi_1}. \tag{26'}$$

4. Движение облака точек в постоянном поле

Пусть теперь имеются одинаковые невзаимодействующие материальные точки, которые в начале их движения пересекают область R_0 и обладают одинаковыми скоростями, направленными в одну и ту же сторону. Если точки имеют одинаковые фазы в объясненном выше смысле, можно будет представить облако в R_0 функцией (16). Мы допустим, что расширение этой функции на область R еще содержит множитель единственной фазы, или, другими словами, что функция $\varphi_1(x, y, z)$ предыдущего параграфа та же самая для всех точек облака. Тогда эти точки имеют скорости, определенные уравнением (26), и их движение сравнимо с непрерывным движением молекул жидкости, так как скорость одной частицы во время ее перехода в точку зависит только от положения этой точки, а не от времени перехода. Когда необходимость в применении уравнения (26') отпадает, функция φ_1 играет роль потенциала скоростей.

В соответствии с нашими концепциями скорости всегда являются касательными к кривым, ортогональным к семейству поверхностей φ_1 = const. Таким образом, эти кривые являются линиями потока и образуют трубки, внутри которых перемещаются частицы. Так как эти трубки не имеют постоянного сечения в области R, плотность жидкости ρ меняется от одной точки к другой, оставаясь неизменной во времени в каждой точке, потому что движение стационарно. Отсюда следует, что гидродинамическое уравнение непрерывности дает нам уравнение, которому должна удовлетворять функция $\rho(x, y, z)$:

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\rho v} = 0. \tag{27}$$

С учетом (26) можно переписать (27) в виде

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\ln\left(\frac{\rho}{W-F}\right)\right] = -\frac{\Delta\varphi_1}{\operatorname{grad}\varphi_1}. \tag{28}$$

Как в случае равномерного движения, будем искать представление облака точек непрерывной волной. В области R_0 облако может быть представлено непрерывной волной (17), а плотность связана с амплитудой соотношением (18). Непрерывная волна (17), проникая в область R, где распространение подчиняется (19), будет там представляться функцией вида

$$\Psi(x,y,z,t) = a(x,y,z)\cos\frac{2\pi}{h}\varphi'(x,y,z,t) =$$
$$= a(x,y,z)\cos 2\pi\left[\nu t - \frac{1}{h}\varphi_1'(x,y,z)\right]. \tag{29}$$

Область R_0 аналогична однородной преломляющей среде, а область R – среде с неоднородным преломлением. Определение функций a и φ_1' возвращает нас к решению задачи классической оптики.

Если мы запишем решение (29) в комплексной форме и если мы его подставим в (19), то, разделяя действительную и мнимую части, получим два уравнения:

$$\frac{1}{a}\Delta a = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)^2 + \frac{2F}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \left(m_0^2c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right)\right], \tag{30_1}$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{1}{2}a\Delta\varphi' = 0. \tag{30_2}$$

Форма φ' позволяет записать вместо (30_1):

$$\frac{1}{a}\Delta a = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(h\nu - F)^2 + m_0^2c^2\right]. \tag{31}$$

Если пренебречь первым членом, получим уравнение геометрической оптики, соответствующее уравнению движения (19). Сравнивая уравнения (23) и (31), видим, что если пренебречь в них первыми членами, то получим, с одной стороны, прежнюю механику, а с другой – геометрическую оптику. Функции φ_1 и φ_1'являются идентичными и совпадают с функцией Якоби.

Мы выдвинем теперь главную гипотезу о том, что φ_1 и φ'_1 являются еще идентичными, когда первые члены уравнений (23) и (31) не могут больше быть пренебрежимо малыми. Очевидно, это требует, чтобы

$$\frac{1}{a}\Delta a = \frac{1}{f}\,\Box f. \tag{32}$$

Мы назовем этот постулат принципом двойного решения, так как он приводит к существованию двух синусоидальных решений уравнения (19), имеющих одинаковый показатель фазы. Одно из решений содержит точечную сингулярность, а другое, напротив, непрерывную амплитуду. Естественно, это предварительный принцип в том смысле, что он должен быть подтвержден или отвергнут строгими рассуждениями. Но он настойчиво выдвигается необходимостью примирить атомную структуру вещества и света с успехами классической оптики и теорией Шредингера.

Поскольку функция φ_1' идентична φ_1, то уравнение (30_2) будет записано так:

$$\frac{2}{a}\frac{\partial\alpha}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left[\ln a^2\right] = -\frac{\Delta\varphi_1}{\mathrm{grad}\varphi_1}, \tag{33}$$

откуда, сравнивая с (28), заключаем, что вдоль трубки тока величина $\dfrac{\rho}{a^2\left(W-F\right)}$ остается постоянной. Так как в области R_0, где функция F равна нулю, выполняется соотношение (18), то в R плотность должна удовлетворять соотношению

$$\rho\left(x,y,z,\right) = Ka^2\left(x,y,z\right)\left[1-\frac{F\left(x,y,z\right)}{W}\right]. \tag{34}$$

При заданной функции F видно, что определение непрерывной волны (29) должно дать плотность в каждой точке.

Когда допустимо пренебречь потенциальной энергией по сравнению с полной (ньютоновское приближение), можно записать приближенную формулу:

$$\rho\left(x,y,z\right) = Ka^2\left(x,y,z\right). \tag{34'}$$

Естественно, мы можем рассмотреть предшествующее под другим углом, полагая, что частицы облака являются лишь *повторением одной и той же материальной точки*. Действительно, предположим, что начальная скорость в области R_0 задана по величине и направлению. Если нам больше ничего не известно, т.е. если все начальные *положения* равновероятны, то каждой гипотезе о начальном положении будет соответствовать одно движение и, мысленно сопоставляя все эти возможности, мы получим эквивалент движения бесконечно плотного облака идентичных точек. Вероятность того, что материальная точка в заданный момент времени действительно находится в элементе объема dv, окружающем точку с координатами x, y, z области R, очевидно, пропорциональна $\rho(x, y, z)dv$. Таким образом, она задана формулами (34) и (34′) как функция амплитуд непрерывной волны. К тому же траектория определена формой непрерывной волны, потому что эти траектории ортогональны к поверхностям равной фазы.

В качестве примера рассмотрим облако электрически заряженных частиц, движущихся с одинаковой скоростью в одном и том же направлении, которые проходят около неподвижного заряженного центра. По мере удаления первоначально прямолинейной траектории от заряженного центра каждая частица будет более или менее отклоняться от начального направления. Прежняя механика позволяет найти долю частиц, отклоненных в заданном направлении, когда предполагается однородность плотности падающего облака. Это вычисление было проведено сэром Э. Резерфордом, чтобы предсказать рассеяние β-лучей веществом. Новая механика принимает другую точку зрения и рассматривает пространство вокруг центра как обладающее коэффициентом преломления для падающих электронных волн. Если предложенные выше идеи точны, статистический результат рассеяния должен получиться в следующем предположении. Будет рассматриваться плоская непрерывная волна, падающая на преломляющую сферу, показатель которой меняется согласно подходящему закону, как функция расстояния от центра, и рассчитываются интенсивности рассеяния в различных направлениях. Расчет этих интенсивностей должен дать долю электронов, рассеянных в этих направлениях. Именно это и следует из интересного расчета Г. Вентцеля[5], который получил в первом приближении закон Резерфорда.

B. Случай переменных полей

5. Уравнение движения

Уравнением движения, соответствующим движению точки с электрическим зарядом e в электромагнитном поле со скалярным потенциалом $\Phi(x,y,z,t)$ и вектор-потенциалом $\vec{A}(x,y,z,t)$, будет[6]

$$\begin{aligned}&\Delta u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{4\pi i}{h}\frac{e\Phi}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\\&+\frac{4\pi i}{h}\sum_{xyz}\frac{e}{c}A_x\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2c^2-\frac{e^2}{c^2}\left(\Phi^2-A^2\right)\right]u=0.\end{aligned}\tag{35}$$

[5] Zts. f. Phys. 1926. **40.** P. 590. Я предсказал этот результат в моей книге «Ondes et mouvements», p. 84.

[6] J.P., уравнение (59).

В принципе всегда надо вводить члены, содержащие вектор-потенциал, так как согласно уравнению Лоренца вектор-потенциал не может быть равен нулю, если изменяется скалярный потенциал. Если, тем не менее, влияние этих членов пренебрежимо мало, можно, положив $F(x, y, z, t) = e\Phi$, довольствоваться записью

$$\square u + \frac{4\pi i}{h}\frac{F}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right]u = 0. \tag{35'}$$

Мы всегда будем полагать, что исследуемое тело начинает движение в области R_0 пространства с нулевыми потенциалами, затем проникает в область R, где действует рассматриваемое переменное поле. Попытаемся обобщить решение типа (5), пригодного в R_0, решением (35) в форме

$$u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)\cos\frac{2\pi}{h}\varphi(x,y,z,t), \tag{36}$$

где f представляет движущуюся сингулярность. Подставляя в (35), получаем, как всегда, два уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}\,\square f = \frac{4\pi^2}{h^2}\Bigg[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{2e\Phi}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \\ + 2\frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m_0^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}\left(\Phi^2 - A^2\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{37_1}$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}f\,\square\varphi + \frac{e\Phi}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{37_2}$$

Если первый член (37_1) пренебрежимо мал, $\varphi(x,y,z,t)$ будет функцией Якоби релятивистской динамики переменных полей. Отклонение от прежних механик, как всегда, связано с ненулевым значением $\square f$.

В приближении прежних теорий скорость материальной точки, проходящей M (x, y, z) в момент t, направлена по вектору количества движения, который определяется соотношением

$$\vec{g} = -\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}\varphi} + \frac{e}{c}\vec{A}\right]. \tag{38}$$

Как и ранее, мы допустим, что все будет происходить так же, если рассмотреть строгие решения уравнений движения.

Очевидно, что уравнение (34) должно здесь быть приемлемым. Мы применим его, выбрав систему отсчета так, чтобы направление отсчета переменной n в момент t и в точке M совпало с направлением вектора $\vec{g}$. Уравнение (37_2) становится тогда таким:

$$\left[-\frac{\partial f/\partial t}{\partial f/\partial n}\right]_{M,t} = \frac{c^2 g}{\partial\varphi/\partial t - e\Phi}, \tag{39}$$

и гипотеза о направлении скорости дает нам

$$\vec{v}(M,t) = \frac{c^2\vec{g}}{\partial\varphi/\partial t - e\Phi}, \tag{40}$$

уравнение, для которого (26), очевидно, является частным случаем. В приближении прежней механики уравнение (40) является уравнением, которое связывает количество движения и скорость.

И еще: если энергия движения мала по сравнению с внутренней энергией m_0c^2, получим

$$\vec{v}(M,t) = \frac{1}{m_0}\vec{g}. \tag{40'}$$

6. Движение облака точек

Все указывает на то, чтобы перенести рассуждения параграфа 4 на случай переменных полей. Снова рассмотрим облако одинаковых невзаимодействующих точек, находящихся «в фазе», которые в начале их движения пересекают область R_0 в одном направлении и с одинаковой скоростью. Это облако, плотность которого в R_0 предположительно однородна, будет там представлено функцией (16). Продленное в область R, это решение представило бы единственную фазу, если бы приближения прежней механики были справедливы, эта фаза была бы задана функцией Якоби. Допустим, что в строгом решении фаза еще единственна, т. е. что в R облако может изображаться функцией

$$U(x,y,z,t) = \left[\sum_i f_i(x,y,z,t)\right]\cos\frac{2\pi}{h}\varphi(x,y,z,t), \tag{41}$$

где f_i представляет движущуюся сингулярность.

Скорости задаются формулой (40), но движение, естественно, не является постоянным и уравнение непрерывности должно записываться так:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\frac{\rho c^2\vec{g}}{\partial\varphi/\partial t - e\Phi}\right]. \tag{42}$$

Вводим обозначение

$$\rho' = \rho\frac{1}{\partial\varphi/\partial t - e\Phi}. \tag{43}$$

Мы легко находим, учитывая (38) и соотношение Лоренца между потенциалами, уравнение

$$g\frac{\partial(\ln\rho')}{\partial n} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\Phi\right]\frac{\partial(\ln\rho')}{\partial t} = \Box\varphi. \tag{44}$$

Как и ранее, будем искать представление движения облака в виде движения непрерывной волны классического типа. В R_0 эта волна будет иметь вид (17) и амплитуду, связанную с плотностью соотношением (18). Область R играет роль преломляющей среды, показатель преломления которой в каждой точке зависит от времени, и непрерывная волна, проникая туда, принимает вид

$$\Psi(x,y,z,t) = a(x,y,z,t)\cos\frac{2\pi}{h}\varphi'(x,y,z,t); \tag{45}$$

(45) отличается от (29), так как a зависит от времени, а φ' больше не линейно относительно t. Естественно, функция Ψ должна удовлетворять уравнению движения (35), и это приводит нас, как обычно, к двум выражениям:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\Box a = \frac{4\pi^2}{h^2}\Bigg[&\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)^2 + \frac{2e\Phi}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \\ &+2\frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + m_0^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}\left(\Phi^2 - A^2\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{46_1}$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \frac{1}{2}a\Box\varphi' + \frac{e\Phi}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial a}{\partial x} = 0. \tag{46_2}$$

Введем еще принцип двойного решения, полагая, что функция φ' идентична функции φ, т.е. что решению (41), амплитуда которого содержит сингулярности, соответствует решение с непрерывной амплитудой, имеющий тот же фазовый множитель. Сравнение (37_1) и (46_1) приводит к равенству

$$\frac{1}{a}\Box a = \frac{1}{f}\Box f. \tag{47}$$

При допущении этого уравнение (46_2) дает нам

$$g\frac{\partial\left(\ln a^2\right)}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\Phi\right]\frac{\partial\left(\ln a^2\right)}{\partial t} = \Box\varphi. \tag{48}$$

Сравнивая с (44), видим, что при движении одинаковых частиц облака отношение ρ'/a остается постоянным. Так как в R_0 соотношение (18) справедливо, в любой точке R и в любой момент

$$\rho(x,y,z,t) = \frac{K}{W_0}a^2(x,y,z,t)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\Phi\right] = K'a^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\Phi\right]. \tag{49}$$

Если кинетическая энергия мала по сравнению с внутренней энергией m_0c^2, то можно еще рассматривать плотность облака пропорциональной квадрату амплитуды Ψ.

Естественно, можно рассматривать облако в виде совокупности всевозможных положений одной и той же материальной точки, зная только величину и направление ее скорости в R_0. Вероятность того, что тело находится в момент t в объеме dv, окружающем точку xyz, равна $\rho(x, y, z, t)dv$, и она определяется уравнением (49) как функция характеристик непрерывной волны.

7. Вектор потока в облаке электризованных точек

Следуя хорошо известной процедуре, мы можем определить в каждой точке нашего облака и в каждый момент времени четырехмерный вектор потока, полагая $ict = x_4$, компонентами которого будут:

$$s_1 = \rho e \frac{v_x}{c}, \quad s_2 = \rho e \frac{v_y}{c}, \quad s_3 = \rho e \frac{v_z}{c}, \quad s_4 = i\rho e. \tag{50}$$

Учитывая (38), (40) и (49), легко находим

$$s_1 = -K' e a^2 c \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right], \ldots \quad s_4 = ieK' a^2 c \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - e\Phi \right]. \tag{51}$$

Введем четырехмерный вектор $\vec{P}$ с компонентами

$$P_1 = A_x, \quad P_2 = A_y, \quad P_3 = A_z, \quad P_4 = i\Phi. \tag{52}$$

Тогда имеем:

$$s_\alpha = -K' e a^2 c \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{e}{c} P_\alpha \right]. \tag{53}$$

Это выражение мирового потока совпадет с предложенным Гордоном[7] и Шредингером[8]. Действительно, эти авторы исходят из функции, которая в наших обозначениях записывается так:

$$L = \sum_{\alpha=1}^{4} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha} + \frac{2\pi e}{hc} i P_\alpha \Psi \right) \left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x_\alpha} - \frac{2\pi e}{hc} i P_\alpha \overline{\Psi} \right) + \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} \overline{\Psi} \Psi \right], \tag{54}$$

где Ψ обозначает непрерывную волну, записанную в комплексном виде, а $\overline{\Psi}$ – сопряженную с ней функцию. Затем они определяют четырехмерный вектор потока формулой

$$s_\alpha = -\lambda \frac{\partial L}{\partial P_\alpha}, \tag{55}$$

где λ – коэффициент однородности. Однако нетрудно проверить, что выражения (53) и (55) согласуются друг с другом.

III. Переход от старых механик к новой

8. Уравнения Лагранжа в волновой механике

Если бросить взгляд на общие уравнения (37_1) и (46_1), учитывая принцип двойного решения и уравнение (47), которое из них вытекает, мы видим, что можно записать *строго* уравнение Якоби в обычном виде, при условии приписывания телу переменной собственной массы

[7] Zts. f. Phys. 1926. **40**. P. 117.
[8] Ann. der Phys. 1927. **82**. P. 265. См. также: *Klein O.* Zts. f. Phys. 1927. **21**. P. 407.

$$M_0(x,y,z,t) = \sqrt{m_0^2 - \frac{h^2}{4\pi^2 c^2}\frac{\Box a}{a}}. \tag{56}$$

Прежние динамики пренебрегают вторым членом под знаком радикала, что ведет к предположению о бесконечной малости h.

Приняв это, новая механика может использовать принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа при условии введения в них переменной массы M_0. Сейчас мы проверим это, для простоты пренебрегая вектор-потенциалом. Принцип Гамильтона запишется в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \tag{57}$$

где

$$L = -M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - F. \tag{58}$$

Как обычно, приходим к уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v_x}\right] = \frac{\partial L}{\partial x} \text{ и т. д.} \tag{59}$$

и определяем компоненты количества движения формулами

$$g_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{M_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ и т. д.} \tag{60}$$

Назовем энергией выражение (постоянное в постоянном поле):

$$W = \sum_{xyz} g_x v_x - L = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + F. \tag{61}$$

С помощью формул (60) и (61) проверяем, полагая

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = W, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -g_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -g_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -g_z, \tag{62}$$

получаем уравнение Якоби

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - F\right)^2 - \sum_{xyz}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = M_0^2 c^2, \tag{63}$$

и это уравнение с учетом определения M_0 является видом, который принимают (37_1) и (46_1) в настоящем случае. Заметим также, что, комбинируя (60) и (61), находим сразу для скорости фундаментальную формулу (40).

Резюмируя, заметим, что *если положить известной функцию* a (x, y, z, t), то теория Лагранжа–Гамильтона позволяет найти форму траекторий и закон движения частиц облака.

Уточним теперь, в чем состоит в новой механике ньютоновское приближение. Оно приписывает величине β достаточно малое значение для того, чтобы можно было пренебречь ее квадратом по сравнению с единицей. Но к тому же оно рассматривает второй член под радикалом в (56) как достаточно малый в сравнении с первым, что позволяет записать

$$M_0(x,y,z,t) = m_0 + \varepsilon(x,y,z,t), \tag{64}$$

где ε / m_0 – *величина порядка* β^2. Отсюда получим для количества движения и энергии приближенные формулы:

$$g_x = m_0 v_x, \quad g_y = m_0 v_y, \quad g_z = m_0 v_z, \quad W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \varepsilon c^2 + F, \tag{65}$$

и каждый раз, когда речь идет об абсолютном значении величины W, а не о ее изменениях, мы сможем взять ее равной $m_0 c^2$, что узаконивает, в частности, переход от (40) к (40'). Наконец, функция Лагранжа (58) принимает свою приближенную форму

$$L = - m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - \varepsilon c^2 - F. \tag{66}$$

Все происходит так, как если бы существовал кроме F член потенциальной энергии εc^2.

IV. Случай движения системы материальных точек

9. Точка зрения Шредингера

В своих работах Шредингер систематически рассматривает непрерывные решения уравнений движения. Мы мельком заметили, как точность результатов, которые получаются, таким образом, может быть согласована с существованием дискретной структуры материи в случае одной материальной точки.

Перейдем теперь к случаю изолированной системы N материальных точек, *собственные* массы которых я обозначу через $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Ограничиваясь ньютоновским приближением, Шредингер рассматривает конфигурационное пространство, которое можно построить с помощью $3N$ координат $x_1, y_1, \ldots, z_N$ N точек, и рассматривает распространение одной волны в гиперпространстве. Согласно Шредингеру движение происходит в соответствии с уравнением

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - F] u = 0, \tag{67}$$

где E – полная энергия в ньютоновском смысле, а $F(x_1, \ldots, z_N)$ – функция потенциальной энергии.

Эта гипотеза кажется естественной, так как уравнение (19), справедливое для точки в постоянном поле, в ньютоновском приближении с учетом формы u и снятия индекса собственной массы, может быть записано в виде уравнения

$$\frac{1}{m} \Delta u + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - F] = 0, \tag{67'}$$

для которого (67) является обобщением.

Но уравнение (67) вызывает две трудности. Прежде всего в идеях Шредингера материальная точка, образованная группой волн, не имеет характера точечной сингулярности, и в микромеханике невозможно говорить ни о ее положении, ни о ее траектории. Но тогда каков смысл координат $x_1, \ldots, z_N$, с помощью которых производится построение абстрактного конфигурационного пространства? Эта трудность исчезает, если допустить вместе с нами, что материальная точка всегда хорошо определена.

Но имеется и другая трудность. В самом деле физически не может ставиться вопрос о движении в конфигурационном пространстве, существование которого чисто абстрактное. Волновой образ нашей системы должен содержать N волн, распространяющихся в реальном пространстве, а не одну волну, движущуюся в конфигурационном пространстве. Каков тогда истинный смысл уравнений Шредингера? Это то, что нам надо найти.

10. Значение уравнения (67)

Для упрощения рассмотрим изолированную систему из двух материальных точек, хотя в принципе распространение рассуждений на случай системы из N точек не представляет никакой трудности. Для нас каждая из двух точек представляет собой сингулярность в некотором пространственном волновом процессе. Если пренебречь действиями магнитных полей, то распространение двух волн происходит согласно уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\Box u_1 + \frac{4\pi i}{h}\frac{F_1}{c^2}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_1^2c^2 - \frac{F_1}{c^2}\right]u_1 = 0\\ \Box u_2 + \frac{4\pi i}{h}\frac{F_2}{c^2}\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_2^2c^2 - \frac{F_2}{c^2}\right]u_2 = 0\end{aligned}\right\}. \tag{68}$$

Чтобы различать положение двух точек в переменных x, y, z, обозначим их координаты соответственно x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Согласно принципу действия и противодействия придадим потенциальным функциям $F_1(x, y, z, x_2, y_2, z_2)$ и $F_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ следующие формы:

$$\begin{aligned}F_1 &= F\left(\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}\right),\\ F_2 &= F\left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}\right),\end{aligned} \tag{69}$$

так что значение F_1 в месте, занимаемом первой точкой, равно значению F_2 в месте, занимаемом второй точкой; если r – расстояние между этими двумя точками, то обычный вид $F(r)$. Распространение в пространстве одной из двух волн зависит, таким образом, в каждой точке от значения потенциала, который соответствует одновременному положению сингулярности в другой волне.

Надо найти для каждого из уравнений (68) решение, содержащее сингулярность такую, чтобы удовлетворить совокупности двух соотношений. Воспользуемся вместе с Шредингером ньютоновским приближением. В прежних механиках существует функция Якоби системы $\varphi(x_1, \ldots, z_2)$ такая, что количества движения имеют вид

$$m_1 v_{1x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \text{ и т. д., } m_2 v_{2x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \text{ и т. д.} \tag{70}$$

Может ли новая механика в ньютоновском приближении определить такую функцию φ? Сейчас мы будем считать известным движение второй материальной точки. Движение первой происходит тогда в поле, которое является известной функцией x, y, z, t. Это как раз изучаемый нами случай. Если начальное значение скорости первой точки предполагается заданным, то мы знаем, что совокупность этих возможных движений представляется одной непрерывной волной с амплитудой

$$a_1(x,y,z,t)\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}\varphi_1(x,y,z,t)}.$$

В соответствии с предыдущим параграфом можно записать уравнения движения в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_1}{\partial v_{1x}}\right] = \frac{\partial L_1}{\partial x_1} \text{ и т. д.,} \tag{71}$$

полагая, что

$$L_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \varepsilon_1(x_1,y_1,z_1,t)c^2 - F(r). \tag{72}$$

Аналогично если положить движение первой материальной точки известным, то движение второй точки будет определяться уравнениями

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_2}{\partial v_{2x}}\right] = \frac{\partial L_2}{\partial x_2} \text{ и т. д.,} \tag{73}$$

с функцией

$$L_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \varepsilon_2(x_2,y_2,z_2,t)c^2 - F(r). \tag{74}$$

Нам предстоит решить одновременно уравнения (71) и (73). В классической механике возможно найти функцию Лагранжа L для любой системы такую, что уравнения (71) и (73) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q'}\right] = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad \left(q' = \frac{dq}{dt}\right), \tag{75}$$

где q – одна из шести переменных $x_1, \ldots, z_2$. Известно, что возможно определить функцию Якоби $\varphi(x_1, \ldots, z_2)$, решая уравнения (70). Ранее я показал[9], что для получения этой функции L надо уметь выделить в L_1 и L_2 члены, зависящие от взаимодействий, и члены, от них не зависящие. Предполагая, что это выделение произведено, принимают за функцию L сумму членов второго порядка, сложенную с полусуммой членов первого порядка. Можно применять эту процедуру также и в классической механике, так как в L_1 и L_2 членами ε_1 и ε_2 пренебрегают, что позволяет записать

[9] Ondes et mouvements. P. 43.

$$L_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - F(r). \tag{76}$$

Чтобы получить то же самое в новой механике, надо, чтобы ε_1 и ε_2 свелись к *той же самой* функции расстояния r; иначе говоря, дополнительные члены потенциальной энергии, введенные новыми концепциями, должны иметь тот же взаимный характер, что и те, которые определены функциями F_1 и F_2. Это естественное расширение принципа действия и противодействия. Если мы его применим, то сможем построить функцию Лагранжа системы, добавив ко второму члену (76) новый взаимный член – $\varepsilon(r)c^2$, и тогда выведем, как обычно, существование функции $\varphi\ (x_1, \ldots, z_2)$, сверяя с уравнениями (70).

Так как для нас материальные точки имеют полностью определенные координаты, мы сможем однозначно построить конфигурационное пространство. Система из двух движущихся точек будет в нем фигурировать изображающей точкой, шесть компонент скорости которой заданы уравнениями (70). Всегда будем предполагать, что заданы начальные скорости, но не заданы начальные положения. Различным гипотезам, которые мы предложим относительно этих начальных положений, будут соответствовать различные траектории изображающей точки, и совокупности всех мыслимых возможностей – облако изображающих точек. Движение этого облака непрерывно и подчиняется уравнению непрерывности

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0, \tag{77}$$

где $\rho(x_1, \ldots, z_2)$ – плотность облака, а v – его скорость. С учетом (70) это уравнение запишется в обозначениях, смысл которых очевиден:

$$\sum_{xyz}\left[\frac{1}{m_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial x_1} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial x_2}\right] + \frac{1}{m_1}\Delta_1\varphi + \frac{1}{m_2}\Delta_2\varphi = 0. \tag{78}$$

Однако если мы рассмотрим уравнение (67) Шредингера и если будем искать его непрерывное решение в виде

$$\Psi(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,t) = A(x_1 \ldots z_2)\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}, \tag{79}$$

то при подстановке мы обнаружим, что A должно удовлетворять уравнению

$$\sum_{xyz}\left[\frac{1}{m_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial(\ln A^2)}{\partial x_1} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial(\ln A^2)}{\partial x_2}\right] + \frac{1}{m_1}\Delta_1\varphi + \frac{1}{m_2}\Delta_2\varphi = 0. \tag{80}$$

Согласно (78) и (80) амплитуда A фиктивной волны (79) должна играть здесь ту же роль, что и амплитуда непрерывной волны в случае одной точки. Иначе говоря, произведение $A^2 dv$ будет в каждой точке конфигурационного пространства мерой вероятности присутствия изображающей точки в элементе объема dv.

Это заключение подтверждается следующим замечанием: если две точки не взаимодействуют между собой, уравнение Шредингера допускает в качестве решения *произведение* непрерывных функций Ψ, относящихся к двум точкам, и тогда вероятности присутствия двух точек будут совсем независимыми, что согласуется с теоремой сложения вероятностей.

Резюмируя, отметим следующее. 1. Уравнение Шредингера имеет смысл, только если возможно построить конфигурационное пространство, т. е. если материальные точки занимают четко определенные положения в пространстве. 2. Это уравнение не является истинным уравнением физического движения, но оно дает через квадрат амплитуды соответствующего решения вероятность того, что система находится в заданном состоянии, когда неизвестно начальное положение ее составляющих.

Добавлю, что представляется трудным найти решение, играющее роль, аналогичную (67), если не хотят довольствоваться ньютоновским приближением.

Прекрасный расчет Ферма, примененный к рассеянию электронов отклоняющим центром, может выглядеть иллюстрацией предшествующему изложению[10].

Заключение и замечания

11. Волна-пилот

Если исследовать совокупности результатов, полученных в части II, то становится очевидным, что их можно резюмировать двумя основными формулами (40) и (49):

$$\vec{v} = -\,c^2\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}\varphi} + \frac{e}{c}\vec{A}}{\partial\varphi/\partial t - e\Phi}, \tag{I}$$

$$\rho\left(x,y,z,t\right) = \mathrm{const} \times a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\Phi\right). \tag{II}$$

Я пришел к первому из этих уравнений (следствием которого является второе), применяя принцип двойного решения. Этот принцип подтверждается в случае отсутствия поля, но остается гипотезой для общего случая. На мой взгляд, необходимо, как и в микромеханике, сохранить понятие атомистичности материи, хотя бы для того, чтобы придать смысл уравнению (67) Шредингера. Но если нет желания применять принцип двойного решения, то приемлимо принять следующую точку зрения: допустим существование как различимых реальностей материальной точки и непрерывной волны, представляемой функцией Ψ, и постулируем, что движение точки определяется как функция фазы волны уравнением (I). Придумаем непрерывную волну, управляющую движением частицы. Это волна-пилот.

[10] Zts. f. Phys. 1926. **40.** P. 399.

Приняв, таким образом, уравнение (I) как постулат, избегают оправдания его принципом двойного решения. Но это может быть лишь предварительной позицией. Без сомнения, необходимо *встроить* корпускулу в волновое явление, и тогда возможно вновь прийти к идеям, аналогичным тем, которые были развиты выше.

Я отмечу два наиболее важных применения формул (I) и (II).

Для света непрерывная волна является волной, рассматриваемой классической оптикой, и, так как согласно (II) плотность фотонов пропорциональна квадрату амплитуды, явления волновой оптики должны даже предвидеться как прежней, так и новой теорией света.

Наши основные формулы, кажется, приводят к обоснованию одной из гипотез Шредингера. Рассмотрим совокупность атомов водорода, состояние которой определено, с точки зрения Шредингера, той же функцией Ψ, суммируя основные функции. Для нас электрон имеет в каждом атоме хорошо определенные положение и скорость, но если мы мысленно наложим один атом на другой, то получим некий вид среднего атома, в котором плотность электричества задана в ньютоновском приближении, согласно (II), выражением

$$\delta = e\rho = \mathrm{const} \times a^2 = \mathrm{const} \cdot \Psi\overline{\Psi}.$$

Это выражение является тем уравнением, которое предложил Шредингер. Оно представляется здесь в виде, определяющем среднюю плотность.

Опираясь на эту точку зрения, по крайней мере легче вывести все формулы матричной теории Гейзенберга в той форме, которую им придал Шредингер.

12. Вынужденные состояния материальной точки

В уже процитированной статье Шредингера дано выражение тензора энергии-импульса, соответствующее непрерывным волнам Ψ. Если придать непрерывным волнам смысл, уточненный выше, то этот тензор разлагается на тензор, дающий энергию и количество движения частиц, и тензор, который соответствует напряжениям, существующим в волновом явлении вокруг частиц. Эти напряжения равны нулю в механических состояниях, соответствующих прежним динамикам. Они характеризуют новые состояния, предсказываемые волновой механикой [например, формулами (13)], которые предстают здесь как вынужденные состояния материальной точки.

Это замечание позволяет снять трудность, связанную с давлением, производимым на стенку потоком корпускул. Обычно это давление вычисляют, предполагая, что корпускулы, отскакивая от стенки, сообщают ей при ударе некоторый импульс. Так предсказывается давление газа в кинетической теории или теории излучения абсолютно черного тела в корпускулярной теории света.

Но с точки зрения волновой механики возле стенки существует состояние интерференции, связанное с суперпозицией падающих и отраженных волн, и применение формулы (I) показывает, что частицы больше не ударяются о стенку. Каким образом тогда она испытывает давление? Это возможно только посредством напряжений, которые действуют в области интерференции. Из-за этих напряжений стенка должна испытывать такое же давление, которое производили бы на нее частицы, сообщая импульс при отражении от ее поверхности. И это именно показывает вычисление, проведенное с применением формул Шредингера.

Луи де Бройль

Труды
периода становления
квантовой физики

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ КВАНТОВ[1]
Докторская диссертация

РЕЗЮМЕ

История оптических теорий показывает, что научная мысль долгое время колебалась в выборе между динамической и волновой концепциями света: эти два представления, без сомнения, находятся в меньшем противоречии, чем предполагалось, и развитие теории квантов, кажется, подтверждает такой вывод.

Руководствуясь идеей общей связи между понятиями частоты и энергии, мы в данной работе допускаем существование периодического процесса, природу которого еще предстоит уточнить, связанного с каждой изолированной порцией энергии и зависящего от собственной массы согласно уравнению Планка – Эйнштейна. Теория относительности приводит к необходимости связать равномерное движение материальной точки с распространением некоторой волны, *фаза* которой движется в пространстве быстрее света (глава I).

Для обобщения этого результата на случай неравномерного движения пришлось допустить пропорциональность между вектором мирового импульса материальной точки и волновым вектором распространения связанной волны, временной компонентой которого служит частота. Принцип Ферма в приложении к волне становится, таким образом, идентичным принципу наименьшего действия, применяемому к движущейся материальной точке. Волновые лучи будут идентичны возможным траекториям движущейся точки (глава II).

Приложение предыдущего предположения к периодическому движению электрона в атоме Бора позволяет найти условие квантовой стабильности как выражение резонанса волны на длине траектории (глава III). Этот результат может быть распространен на случай кругового движения ядра и электрона вокруг их общего центра тяжести в атоме водорода (глава IV).

Приложение этих основных идей к квантам света, предложенных Эйнштейном, ведет к многочисленным интересным согласованиям. Оно позволяет надеяться, несмотря на существующие трудности, на построение одновременно корпускулярной и волновой оптической теории, устанавливающей некоторый вид статистического соответствия между волной, связанной с порцией световой энергии, и электромагнитной волной Максвелла (глава V).

В частности, исследования по рассеянию X- и γ-лучей аморфными телами позволяет нам показать, насколько согласованность этого рода сегодня желательна (глава VI).

Наконец, введение понятия фазовой волны в статистическую механику приводит к оправданию введения квантов в динамическую теорию газов и нахождению законов излучения черного тела, представляя это излучение как распределение энергии между атомами в газе из квантов света.

[1] *Louis de Broglie.* Recherches sur la théorie des quanta. – Ann. de Physique. Série X. 1925. **3.** P. 22. Докторская диссертация, защищенная в 1924 г.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

I. От XVI до XX в.

Современная наука возникла в конце XVI в. под влиянием интеллектуального обновления, вызванного эпохой Возрождения. В то время как астрономическая наука развивалась очень быстро, науки о равновесии и движении – статика и динамика – создавались медленно. Известно, что Ньютон был первым, кто превратил динамику в однородную доктрину и своим знаменитым законом всемирного тяготения открыл для этой новой науки огромное поле применения и проверки. В XVIII и XIX вв. очень многие геометры, астрономы и физики развивали принципы Ньютона, и механика дошла до таких вершин красоты и рациональной гармонии, что физическая сторона этой науки была почти забыта. В частности, всю механику стали выводить из одного принципа – принципа наименьшего действия, выдвинутого сначала Мопертюи, а затем, в несколько другом виде, Гамильтоном и имеющего исключительно изящную и лаконичную математическую форму.

Благодаря проникновению в акустику, гидродинамику, оптику и в теорию капиллярности механика некоторое время как бы преобладала над всеми этими областями. Труднее было ей вобрать в себя новую область науки, возникшую в XIX в., – термодинамику. Если один из двух основных принципов этой науки – принцип сохранения энергии – может быть легко объяснен на основании понятий механики, то этого нельзя сказать о втором – о возрастании энтропии. Работы Клаузиуса и Больцмана по изучению аналогии между термодинамическими величинами и некоторыми величинами, имеющими место в периодических движениях, работы, которые и сейчас вполне современны, не смогли все-таки связать оба подхода воедино. Но замечательная кинетическая теория газов Максвелла и Больцмана и более общая доктрина – так называемая статистическая механика Больцмана и Гиббса – показали, что динамика, если дополнить ее понятиями теории вероятности, позволяет интерпретировать основные положения термодинамики.

Начиная с XVII в., наука о свете – оптика – привлекала внимание исследователей. Наиболее обычные явления (прямолинейное распространение, отражение, преломление), составляющие нашу современную геометрическую оптику, были, естественно, изучены первыми. Многие ученые, в частности Декарт и Гюйгенс, работали над установлением законов для этих явлений, а Ферма обобщил их, введя синтетический принцип, носящий его имя, который, будучи выражен в терминах современной математики, напоминает по форме принцип наименьшего действия. Гюйгенс склонялся к волновой теории света, но Ньютон, чувствуя в основных законах геометрической оптики глубокую аналогию с созданной им динамикой материальной точки, развил корпускулярную теорию света, так называемую теорию испускания, и смог даже с помощью несколько искусственных гипотез объяснить явления, которые сейчас считаются областью волновой оптики (кольца Ньютона).

В начале XIX в. идеи Гюйгенса начали превалировать над идеями Ньютона. Опыты по интерференции света, впервые поставленные Юнгом, было трудно и практически невозможно интерпретировать с точки зрения корпускулярной теории. Френель развил в то время свою замечательную теорию упругого распространения световых волн, и с этого момента доверие к концепции Ньютона стало непрерывно уменьшаться. Одним из больших успехов Френеля было объяснение прямолинейного распространения света, интерпретация которого в теории испускания была чисто интуитивной. Если две теории, основанные на идеях, кажущихся совершенно различными, объясняют с одинаковым изяществом одну и ту же экспериментально доказанную истину, то всегда возникает вопрос, действительно ли противоположны обе точки зрения и не является ли эта противоположность лишь следствием того, что наши усилия синтезировать их оказались недостаточными. Такой вопрос не поднимался в эпоху Френеля: представление о корпускулах света было признано наивным и отброшено.

XIX век увидел рождение совершенно новой области физики, которая произвела грандиозный переворот как в наших представлениях о природе вещей, так и в нашей промышленности, – науки об электричестве. Мы не будем напоминать здесь, как она создавалась работами Вольта, Ампера, Лапласа, Фарадея и других исследователей. Важно только сказать, что Максвелл сумел обобщить в исключительно точных математических формулах результаты, полученные его предшественниками, и показать, что всю оптику можно рассматривать как часть электромагнетизма. Работы Герца и в еще большей степени работы Х.А. Лоренца усовершенствовали теорию Максвелла; кроме того, Лоренц ввел в нее понятие о дискретности электричества, разработанное ранее Дж. Томсоном и так блестяще подтвержденное опытом. Правда, развитие электромагнитной теории показало нереальность представлений Френеля об упругом эфире и этим как бы отделило оптику от механики. Однако многие физики после самого Максвелла пытались еще в конце прошлого века найти механическое объяснение свойств электромагнитного эфира и, таким образом, не только интерпретировать новые представления оптики с точки зрения динамики, но и трактовать с помощью этих представлений все электрические и магнитные явления.

Таким образом, в конце века появилась надежда на близкий и полный синтез всей физики.

II. XX век: Теория относительности и кванты

Между тем на этой картине оставалось несколько темных пятен. Лорд Кельвин в 1900 г. сказал, что на горизонте физики собираются две угрожающие темные тучи. Одной из них были трудности, возникшие после знаменитого опыта Майкельсона и Морли, результаты которого казались несовместимыми с существовавшими тогда представлениями. Второй тучей был крах методов статистической механики в области теории излучения черного тела; теорема равномерного распределения энергии – неизбежное следствие статистической механики – действительно приводила к определенному распределению энергии между различными частотами в излучении, находящемся в равновесии. Однако закон этого распределения (закон Рэлея – Джинса) находится в грубом противоречии с опытом и является почти абсурдным, так как из него вытекает бесконечное значение спектральной плотности энергии, что, очевидно, не имеет никакого физического смысла.

В первые годы XX в. обе тучи лорда Кельвина, если можно так выразиться, сконденсировались: одна в теорию относительности, другая – в теорию квантов.

Мы не будем говорить здесь о том, как трудности, возникшие вследствие опыта Майкельсона, изучались сначала Лоренцем и Фитцджеральдом и как они были затем решены А. Эйнштейном, усилием мысли, может быть беспримерным. В последние годы об этом много писали более авторитетные, чем мы, лица. Мы считаем здесь основные положения теории относительности, по крайней мере в ее специальной форме, известными и будем пользоваться ими по мере надобности.

Напротив, теорию квантов мы здесь кратко изложим. Понятие кванта было введено в науку в 1900 г. Максом Планком. Этот ученый изучал тогда теоретически проблему излучения черного тела, и, так как термодинамическое равновесие зависит от природы излучателя, он придумал очень простой излучатель, так называемый резонатор Планка, состоящий из квазиупруго связанного электрона, обладающего, таким образом, частотой колебаний, независимой от его энергии. Если применить классические законы электромагнетизма и статистической механики к обмену энергией между такими резонаторами и излучением, то это приведет к закону Рэлея, о безусловной неточности которого говорилось выше. Во избежание этого и для получения результатов, более согласных с экспериментальными фактами, Планк выдвигает странный постулат: «Обмен энергией между резонаторами (или веществом) и излучением происходит только конечными порциями, равными частоте, умноженной на h, причем h представляет собой новую универсальную константу физики». Каждой частоте соответствует, таким образом, в некотором роде атом энергии – *квант* энергии. Рассмотрение экспериментальных данных дало Планку необходимые основания для расчета константы h, и найденное при этом значение ($h = 6{,}545 \cdot 10^{-27}$ эрг·с), по существу, не было изменено[2], несмотря на многочисленные последующие определения, сделанные самыми различными методами. Это один из наиболее прекрасных примеров могущества теоретической физики.

Кванты, как масляное пятно, быстро пропитали собой все области физики. Введение квантов устраняло некоторые трудности, относящиеся к удельным теплоемкостям газа, одновременно оно же позволило сначала Эйнштейну, затем Нернсту и Линдеману и наконец в более совершенной форме Дебаю,

[2] Современное значение $h = 6{,}626176(36) \cdot 10^{-27}$ эрг·с. – *Прим. ред.*

Борну и Карману создать удовлетворительную теорию удельной теплоемкости твердых тел и объяснить, почему в некоторых случаях наблюдаются заметные отклонения от закона Дюлонга и Пти, основанного на классической статистике и выполняющегося, как и закон Рэлея, только в ограниченной области.

Кванты проникли также в такую область науки, в которой их никто не ожидал встретить, – в теорию газов. Метод Больцмана оставлял неопределенным значение аддитивной константы, входящей в выражение для энтропии. Чтобы получить возможность применения теоремы Нернста и установить точные значения химических констант, Планк ввел кванты и сделал это в довольно парадоксальной форме, приписав элементу фазового объема молекулы конечное значение, равное h^3.

Изучение фотоэлектрического эффекта привело к новой загадке. Фотоэлектрическим эффектом называют испускание веществом движущихся электронов под действием излучения. Опыт показывает, что энергия испущенных электронов зависит от частоты возбуждающего излучения, а не от его интенсивности, что является парадоксальным. Эйнштейн объяснил в 1905 г. это странное явление, приняв, что излучение может поглощаться только квантами $h\nu$; с тех пор считается, что если электрон поглощает энергию $h\nu$ и для выхода из вещества затрачивает работу w, то его конечная кинетическая энергия будет $h\nu - w$. Этот закон был неоднократно подтвержден. Благодаря своей глубокой интуиции Эйнштейн почувствовал, что настало время каким-то образом вернуться к корпускулярной концепции света, и выдвинул гипотезу: всякое излучение с частотой ν состоит из атомов энергии величиной $h\nu$. Эта гипотеза квантов света (licht quanten), противоречащая всем фактам волновой оптики, показалась слишком упрощенной и была отвергнута большинством физиков. В ответ на возражения Лоренца, Джинса и других ученых, Эйнштейн показал, что исследование флуктуации излучения черного тела приводит к представлению о дискретности излученной энергии. Международный конгресс физиков, организованный Сольвеем в Брюсселе в 1911 г., был целиком посвящен проблеме квантов; после него Анри Пуанкаре, незадолго до своей смерти, опубликовал несколько работ по квантам, показывающих необходимость принятия идей Планка.

В 1913 г. Нильс Бор выдвинул свою теорию атома. Он предположил, совместно с Резерфордом и Ван ден Бруком, что атом состоит из положительного ядра, окруженного облаком электронов, причем ядро имеет N элементарных положительных зарядов $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, а число электронов равно N, благодаря чему атом является нейтральным. N – это атомное число, равное номеру элемента в периодической системе Менделеева. Для того чтобы иметь возможность предсказать оптические частоты, например для водорода, атом которого содержит один электрон и является поэтому наиболее простым, Бор выдвигает две гипотезы:

1) из бесконечного числа траекторий, которые электрон может описывать вокруг ядра, устойчивы только некоторые, и условие устойчивости определяется через константу Планка. В главе III мы рассмотрим эти условия;

2) когда внутриатомный электрон переходит с одной стабильной орбиты на другую, происходит испускание или поглощение кванта энергии частоты ν. Испускаемая или поглощаемая частота ν связана, таким образом, с изменением полной энергии $\delta\varepsilon$ атома соотношением $|\delta\varepsilon| = h\nu$.

Хорошо известна великолепная судьба теории Бора за эти 10 лет. Она сразу дала возможность предсказать спектральные серии водорода и ионизированного гелия и исследовать спектры *X*-лучей. А знаменитый закон Мозли, связывающий атомный номер с частотой характеристического рентгеновского излучения, значительно расширил сферу ее применения. Зоммерфельд, Эпштейн, Шварцшильд, сам Бор и другие исследователи усовершенствовали теорию Бора, установили более общие правила квантования, объяснили эффекты Штарка и Зеемана, детально интерпретировали оптические спектры и т. д. Но глубокий смысл квантов оставался еще непонятым. Изучение фотоэлектрического действия *X*-лучей, проведенное Морисом де Бройлем, открытие фотоэлектрического действия гамма-лучей Резерфордом и Эллисом еще больше подчеркнули корпускулярный характер этих излучений, так что квант энергии $h\nu$ с каждым днем все более становился истинным атомом света. Но продолжали еще существовать прежние возражения против этих представлений. Даже в области *X*-лучей волновая теория приводила к прекрасным результатам, как, например, предсказание явления интерференции в работах Лауэ и явления рассеяния в работах Дебая, Брэгга и др. Однако совсем недавно и рассеяние было в свою очередь рассмотрено с корпускулярной точки зрения А. Комптоном: его теоретические и экспериментальные работы показали, что электрон, рассеивающий излучение, получает некоторый импульс, как при ударе. Естественно, что энергия кванта излучения при этом уменьшается; вследствие этого рассеянное излучение обладает переменной частотой, зависящей от направления рассеяния и меньшей, чем частота падающего излучения.

Короче говоря, по-видимому, настал момент попытаться объединить корпускулярные и волновые представления и несколько углубить понимание истинной сущности кванта. Это и было проделано нами недавно, и основной целью настоящей работы является более полное рассмотрение вводимых нами новых идей, тех успехов, к которым они привели, а также большого числа содержащихся в них пробелов[3].

---

[3] Приведем здесь несколько работ по теории квантов: *Perrin J.* Les atomes. Alcan, 1913; *Poincaré H.* Dernières pensées. Flammarion, 1913; *Bauer E.* Recherches sur le rayonnement. These de doctorat, 1912 ; La théorie du rayonnement et les quanta (l[er] Congrès Solvay, 1911), publiée par P. Langevin et M. de Broglie; *Planck M.* Theorie der Wärmestrahlung (4[e] edit). Y.A. Barth, Leipzig, 1921; *Bri11ouin L.* La théorie des quanta et l’atome de Bohr (Conf. rapports), 1921; *Reiche F.* Die Quantentheorie. J. Springer, Berlin, 1921; *Sommerfeld A.* La constitution de l’atome et les raies spectrales. Trad. Bellenot, A. Blanchard, 1923; *Landé A.* Vorschritte der Quantentheorie. F. Steinhopff, Dresden, 1922; Atomes et électrons (3[e] Congrès Solvay). Gauthier-Villars, 1923.

ГЛАВА I. Фазовая волна

I. Связь квантов и теории относительности

Одним из наиболее замечательных современных представлений, выведенных теорией относительности, является инертность энергии. Согласно Эйнштейну, энергия обладает массой, а всякая масса представляет собой энергию. Масса и энергия всегда связаны друг с другом общим выражением:

$$\text{энергия} = \text{масса} \times c^2,$$

где c – константа, которую называют «скоростью света», но которую мы предпочтем назвать «предельной скоростью энергии» по причинам, изложенным дальше. Так как всегда существует пропорциональность между массой и энергией, то материю и энергию следует рассматривать как синонимы, обозначающие одну и ту же физическую реальность.

Сначала атомная теория, затем электронная теория приучили нас считать материю существенно дискретной; из этого следовало, что все формы энергии, в противоположность прежним представлениям о свете, если не полностью сконцентрированы маленькими порциями в пространстве, то во всяком случае сосредоточиваются в некоторых особых точках.

Согласно принципу инертности энергии, тело, собственная масса которого (т. е. масса, измеренная связанным с ним наблюдателем) равна m_0, обладает собственной энергией m_0c^2. Если тело движется равномерно со скоростью $v = \beta c$ по отношению к наблюдателю, которого мы для простоты назовем неподвижным наблюдателем, то его масса будет иметь значение

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

а его энергия, согласно хорошо известному результату релятивистской динамики, будет, следовательно,

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Увеличение энергии тела по отношению к неподвижному наблюдателю при переходе тела от состояния покоя к движению со скоростью $v = \beta c$ можно определить как кинетическую энергию. Ее значение выражается следующим уравнением:

$$E_{\text{cin}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

которое для малых значений β естественно приводит к классической форме:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Напомнив это, попытаемся выяснить, в какой форме можно ввести кванты в релятивистскую динамику. Нам кажется, что основной идеей теории квантов является невозможность рассматривать некоторое изолированное количество энергии, не приписывая ей определенной частоты. Эта связь выражается соотношением, которое я назову квантовым соотношением:

$$\text{энергия} = h \times \text{частота},$$

где h – константа Планка.

В ходе развития теории квантов много раз возникал вопрос о механическом действии и неоднократно делались попытки интерпретировать квантовое соотношение, вводя в него действие вместо энергии. Действительно, константа h имеет размерность действия, а именно ML^2T^{-1}, и это не случайно, так как теория относительности учит нас причислять действие к основным «инвариантам» физики. Но действие – величина очень абстрактная, и после длительных размышлений о квантах света и о фотоэлектрическом эффекте мы были принуждены принять за основу энергетическое изложение, не отказываясь от дальнейшего исследования причин значительной роли действия в большом числе вопросов.

Квантовое соотношение не имело бы большого смысла, если бы энергия распределялась в пространстве непрерывно, но мы только что показали, что это совсем не так. Таким образом, можно себе представить, что, согласно какому-то великому закону природы, каждая порция энергии массы m_0 связана с периодическим процессом частоты ν_0 уравнением

$$h\nu_0 = m_0c^2,$$

где ν_0, конечно, измеряется в системе, связанной с порцией энергии. Эта гипотеза является основой нашей системы: ценность ее, как и всякой гипотезы, заключается в важности тех выводов, к которым она приводит.

Следует ли считать периодический процесс локализованным *внутри* порции энергии? Это совсем не обязательно. Из параграфа III будет видно, что он наблюдается на большой части пространства. Впрочем, что следует понимать под выражением «внутри порции энергии»? Электрон представляется нам изолированной порцией энергии, которую, как нам, может быть и необоснованно, кажется, мы лучше всего знаем; между тем, исходя из имеющихся представлений, энергия электрона рассредоточена по всему пространству с очень высокой концентрацией в области чрезвычайно малых размеров, свойства которой нам к тому же весьма мало известны. То, что характеризует электрон как атом энергии, это не маленькое место, занимаемое им в пространстве (я повторяю, что он занимает все пространство целиком), а тот факт, что он неделим, что он не может быть разбит на части, что он представляет собой *единство*[4].

[4] По поводу трудностей, возникающих при взаимодействии нескольких электрически заряженных центров, см. ниже в гл. IV.

Принимая существование частоты, связанной с порцией энергии, найдем, каким образом эта частота представляется неподвижному наблюдателю, о котором говорилось выше. Преобразование времени Лоренца – Эйнштейна показывает, что периодический процесс, связанный с движущимся телом, представляется неподвижному наблюдателю замедленным в пропорции 1 к $\sqrt{1-\beta^2}$. Это и есть знаменитое соотношение замедления часов. Таким образом, частота, регистрируемая неподвижным наблюдателем, будет

$$\nu_1 = \nu_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0c^2}{h}\sqrt{1-\beta^2}.$$

С другой стороны, так как энергия движущегося тела по отношению к тому же наблюдателю равна $m_0c^2\big/\sqrt{1-\beta^2}$, то соответствующая частота, согласно квантовому соотношению, будет $\nu = \frac{1}{h}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Обе частоты ν_1 и ν существенно различны, поскольку фактор $\sqrt{1-\beta^2}$ входит в их выражения по-разному. Здесь есть трудность, которую я долго не мог преодолеть; мне удалось разрешить ее с помощью следующей теоремы, которую я назову теоремой гармонии фаз:

«Периодический процесс, связанный с движущимся телом, частота которого для неподвижного наблюдателя равна $\nu_1 = \frac{m_0c^2}{h}\sqrt{1-\beta^2}$, кажется ему постоянно находящимся в одной фазе с волной частоты $\nu = \frac{m_0c^2}{h}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, распространяющейся в том же направлении, что и движущееся тело, со скоростью $V=c/\beta$».

Показать это можно просто. Предположим, что при $t = 0$ периодический процесс, присущий движущемуся телу, и упомянутая выше волна находятся в одной фазе. За время t движущееся тело успевает пройти расстояние, равное $x=\beta ct$, и фаза периодического процесса изменяется на

$$\nu_1 t = \frac{m_0c^2}{h}\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{x}{\beta c}.$$

Фаза того участка волны, который пересекает движущееся тело, изменилась на

$$\nu\left(t-\frac{\beta x}{c}\right) = \frac{m_0c^2}{h}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{x}{\beta c}-\frac{\beta x}{c}\right) = \frac{m_0c^2}{h}\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{x}{\beta c}.$$

Как мы и предположили, существует согласованность фаз.

Эту теорему можно доказать и другим способом, идентичным по существу, но, может быть, более убедительным.

Если t_0 представляет собой время для наблюдателя, связанного с движущимся телом (собственное время этого тела), преобразование Лоренца дает

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{\beta x}{c}\right).$$

Периодический процесс, который мы вообразили, представляется этому наблюдателю в виде синусоидальной функции $\nu_0 t_0$. Для неподвижного наблюдателя это явление представляется такой же синусоидальной функцией

$$\nu_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{\beta x}{c}\right),$$

которая является волной с частотой $\nu_0\big/\sqrt{1-\beta^2}$, распространяющейся со скоростью c/β в том же направлении, что и движущееся тело.

Необходимо теперь подумать о природе волны, существование которой мы только что предположили. Тот факт, что ее скорость $V=c/\beta$ обязательно больше, чем c (β всегда меньше единицы, так как иначе масса была бы бесконечной или мнимой), показывает, что эта волна не переносит энергии. Наша теорема устанавливает, что эта волна представляет собой распределение *фаз* рассматриваемого периодического явления в пространстве; это «фазовая волна».

Для большей точности мы сделаем несколько грубое, но достаточно наглядное сравнение с одним механическим явлением. Вообразим, что есть горизонтальная круглая площадка очень большого радиуса; к этой площадке подвешены идентичные системы, представляющие собой пружины с грузом. Число таких систем, приходящихся на единицу поверхности, и их плотность быстро уменьшаются по мере удаления от центра площадки; наибольшая концентрация их имеет место около центра. Все системы – пружины с грузом – вполне идентичны и имеют один и тот же период; предположим теперь, что они колеблются с одной и той же амплитудой и в одной и той же фазе. Поверхность, проходящая через центры тяжестей этих грузов, будет плоскостью, попеременно то поднимающейся, то опускающейся. Мы получаем, таким образом, грубую аналогию с воображаемой нами изолированной порцией энергии.

Именно так представляется описанное выше явление наблюдателю, связанному с указанной площадкой. Если другой наблюдатель видит, что площадка перемещается, причем скорость ее равномерного поступательного движения равна $v=\beta c$, то каждый груз будет ему представляться в виде маленьких часов, подчиняющихся закону замедления Эйнштейна; кроме того, площадка и распределение колебательных систем не будут более изотропны вокруг центра вследствие сокращения Лоренца. Но самый важный факт для нас (как будет лучше объяснено в параграфе III) – это сдвиг по фазе движений различных грузов. Если в какой-то момент времени неподвижный наблюдатель будет рассматривать геометрическое место центров тяжести различных грузов, то в горизонтальном направлении оно представится ему в виде цилиндрической поверхности, вертикальные сечения которой являются синусоидами, параллельными скорости площадки. Эта поверхность соответствует в нашем случае фазовой волне; согласно нашей общей теореме, эта поверхность движется со скоростью c/β, параллельной скорости площадки, и частота колебаний точки с фиксированной абсциссой, покоящейся на ней постоянно, равна частоте собственных колебаний пружин, умноженной на $1\big/\sqrt{1-\beta^2}$. Из этого примера ясно видно (и это служит оправданием его пространного изложения), что фазовая волна соответствует переносу фазы, а не энергии.

Нам кажется, что изложенные результаты имеют чрезвычайно важное значение, так как они устанавливают при помощи гипотезы, в сильной степени внушенной представлениями о квантах, связь между движением тела и распространением волны и предусматривают возможность объединения антагонистических теорий о природе излучения. Мы уже знаем теперь, что прямолинейное распространение фазовой волны связано с прямолинейным движением тела; принцип Ферма, примененный к фазовой волне, определяет ее лучи как прямые, в то время как принцип Мопертюи, примененный к движущемуся телу, определяет его прямолинейную траекторию как один из лучей волны. В главе II мы попытаемся обобщить это совпадение.

II. Фазовая и групповая скорости

Сейчас нам надо доказать важное соотношение, существующее между скоростью движущегося тела и скоростью фазовой волны. Если волны очень близких частот распространяются в одном и том же направлении Ox со скоростями V, которые мы назовем скоростями распространения фазы, то эти волны при их суперпозиции приведут к эффекту биений, если скорость V меняется с частотой ν. Эти эффекты были, в частности, изучены лордом Рэлеем в случае рассеивающих сред.

Рассмотрим две волны с близкими частотами ν и $\nu' = \nu + \delta\nu$ и скоростями V и $V' = V + (dV/d\nu)\delta\nu$; их суперпозиция аналитически выражается следующим уравнением, которое получено в пренебрежении квадратичным членом $\delta\nu$ по сравнению с ν:

$$\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{\nu x}{V} + \varphi\right) + \sin 2\pi\left(\nu' t - \frac{\nu' x}{V} + \varphi'\right) =$$
$$= 2\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{\nu x}{V} + \psi\right)\cos 2\pi\left[\frac{\delta\nu}{2}t - x\frac{d(\nu/V)}{d\nu}\frac{\delta\nu}{2} + \psi\right].$$

Мы получаем результирующую синусоидальную волну, амплитуда которой модулирована частотой $\delta\nu$, так как знак косинуса здесь маловажен. Это хорошо известный результат. Если обозначить буквой U скорость распространения биений или групповую скорость волн, то получим

$$\frac{1}{U} = \frac{d(\nu/V)}{d\nu}.$$

Вернемся к фазовым волнам. Если приписать движущемуся телу скорость $v=\beta c$, не придавая β совсем определенного значения, а заключая его только между β и $\beta + \delta\beta$, то частоты соответствующих волн заполнят малый интервал между ν, $\nu+\delta\nu$.

Сформулируем теперь следующую теорему, которая пригодится нам впоследствии: «Групповая скорость фазовых волн равна скорости движения тела». Действительно, эта групповая скорость определена формулой, приведенной ниже, в которой V и ν могут рассматриваться как функции β, так как

$$V = \frac{c}{\beta}; \quad \nu = \frac{1}{h}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Можно записать:

$$U = \frac{d\nu/d\beta}{d(\nu/V)/d\beta}.$$

Однако

$$\frac{d\nu}{d\beta} = \frac{m_0 c^2}{h}\frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}},$$

$$d\frac{(\nu/V)}{d\beta} = \frac{m_0 c}{h}\frac{d\left(\beta/\sqrt{1-\beta^2}\right)}{d\beta} = \frac{m_0 c}{h}\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}.$$

Таким образом, $U = \beta c = v$. Групповая скорость фазовых волн равна скорости движущегося тела. Этот результат вызывает следующее замечание: в волновой теории рассеяния, если исключить зоны поглощения, скорость переноса энергии равна групповой скорости[5]. Хотя здесь рассмотрение ведется с другой точки зрения, мы получаем аналогичный результат, так как скорость тела есть не что иное, как скорость перемещения энергии.

III. Фазовая волна в пространстве-времени

Минковский первым показал, что, рассматривая евклидово многообразие в четырех измерениях, так называемую вселенную, или пространство-время, можно геометрически просто представить введенные Эйнштейном связи между пространством и временем. Для этого он брал три оси в прямоугольных координатах пространства и четвертую ось, нормальную к трем первым, на которую наносились значения времени, умноженные на $c\sqrt{-1}$. Сейчас принято относить к четвертой оси вещественное значение ct, но в этом случае плоскости, проходящие через эту ось и нормальные к пространству, будут иметь гиперболическую псевдоевклидову геометрию, основной инвариант которой

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

[5] См., например: *Brillouin Léon.* La théorie des quanta et l'atome de Bohr, chapitre I.

Рассмотрим, таким образом, пространство-время, отнесенное к четырем прямоугольным осям так называемого «неподвижного» наблюдателя. Примем за ось x прямолинейную траекторию движущегося тела и нанесем на график плоскость ctx, содержащую ось времени и названную траекторию. В этих условиях мировая линия движущегося тела представлена прямой, проходящей под углом, не превышающим 45°, к оси времени; эта линия является к тому же осью времени для наблюдателя, связанного с движущимся телом. На нашем графике две оси времени проходят через нуль, что не ограничивает общности рассуждений.

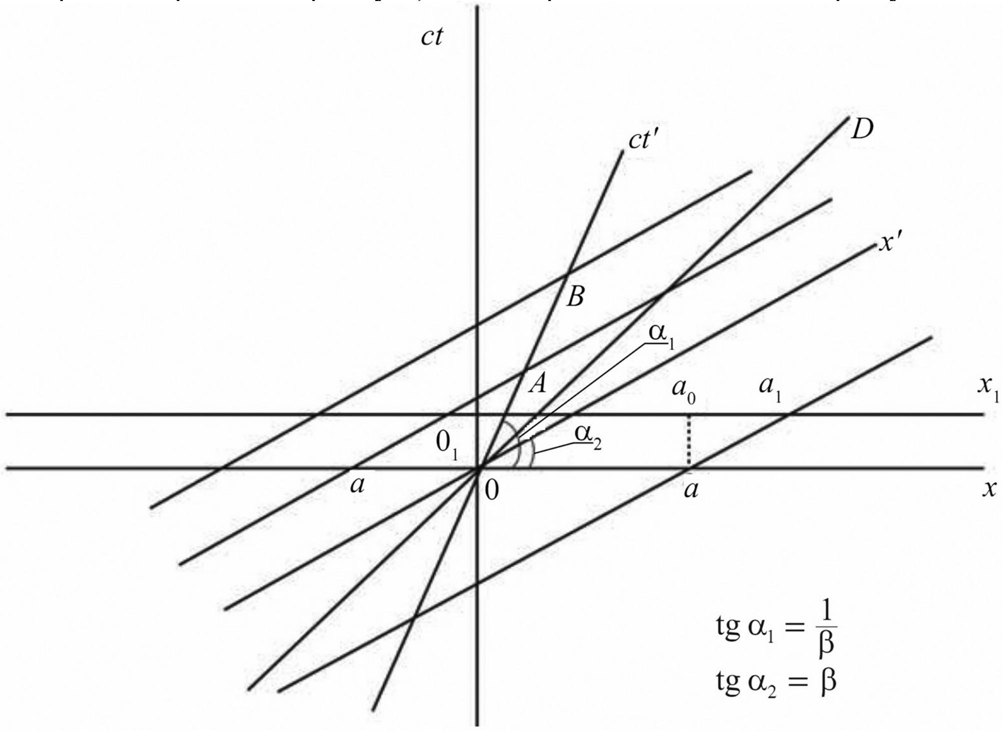

Рис. 1

Если скорость движущегося тела для неподвижного наблюдателя равна βc, то наклон Оt' будет иметь значение $1/\beta$. Прямая ox', расположенная в плоскости tox пространства наблюдателя и начинающаяся от времени О, проходит симметрично Оt' относительно биссектрисы OD. Это легко показать аналитически с помощью преобразования Лоренца, но это является также прямым следствием того факта, что предельная скорость переноса энергии c имеет одинаковое значение для всех систем отсчета. Наклон Оx' равен, таким образом, β. Если пространство, окружающее движущееся тело, является местом протекания периодического процесса, то состояние пространства будет повторяться для перемещающегося наблюдателя каждый раз, когда пройдет время $\frac{1}{c}\overline{OA} = \frac{1}{c}\overline{AB}$, равное собственному периоду процесса $T_0 = 1/\nu_0 = h/(m_0 c^2)$.

Прямые, параллельные ox', являются, таким образом, следами «равнофазных пространств» наблюдателя, смещающегося на плоскости $xo't$. Точки ...a', o, a... представляют собой проекцию их пересечений с пространством неподвижного наблюдателя в момент $t = 0$; эти пересечения двух трехмерных пространств суть двумерные поверхности, и даже плоскости, потому что все рассматриваемые здесь пространства евклидовы. Сечение пространства-времени, которое является пространством для неподвижного наблюдателя, с течением времени будет представляться прямой, параллельной ox и равномерно смещающейся по направлению возрастания t. Нетрудно видеть, что равнофазные плоскости ...a', o, a... смещаются в пространстве неподвижного наблюдателя со скоростью c/β. Действительно, если прямая ox' на рис. 1 представляет собой пространство неподвижного наблюдателя при $t = 1$, то $aa_0 = c$. Фаза, которая при $t = 0$ находилась в a, теперь находится в a_1; таким образом, она сместилась в пространстве неподвижного наблюдателя на расстояние a_0a_1 в направлении ox за единицу времени. Можно, таким образом, сказать, что ее скорость будет

$$V = a_0 a_1 = aa_0 \operatorname{ctg}\left(\widehat{xox'}\right) = c/\beta.$$

Ансамбль равнофазных плоскостей представляет собой так называемую фазовую волну.

Остается рассмотреть вопрос о частотах. Начертим опять небольшой упрощенный рисунок.

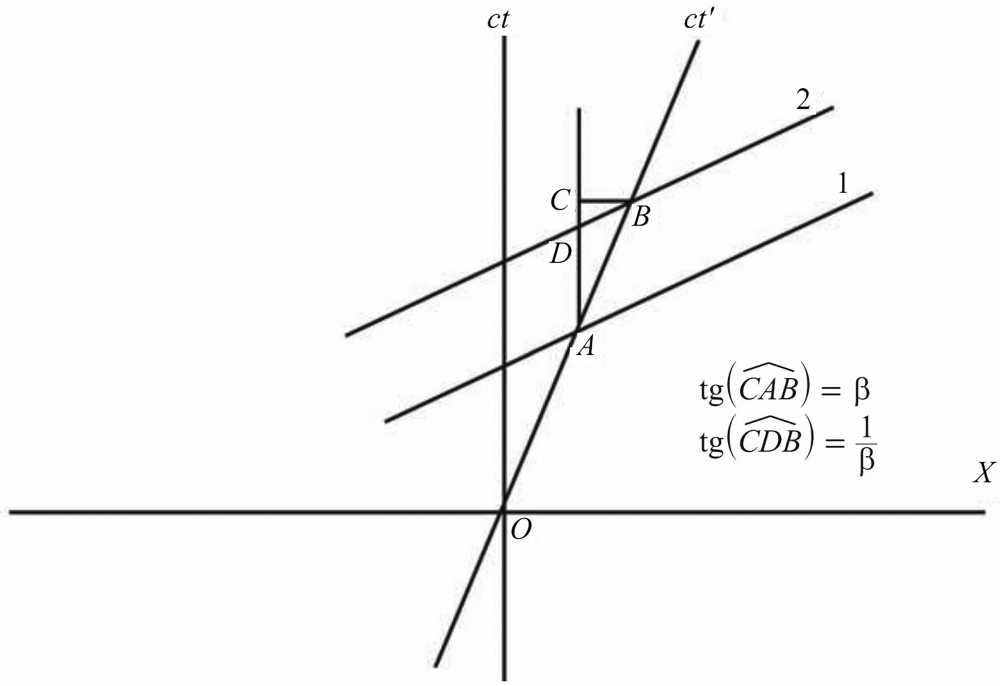

Рис. 2

Прямые *1* и *2* представляют собой для связанного с ними наблюдателя два последовательных равнофазных пространства. Как было сказано, $\overline{AB}$ в c раз больше собственного периода $T_0 = h/\left(m_0 c^2\right)$.

Отрезок AC, являющийся проекцией AB на ось Ot, равен

$$cT_1 = cT_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Это является результатом простого применения тригонометрических соотношений; однако следует отметить, что, применяя тригонометрию к фигурам плоскости xot, необходимо всегда помнить об анизотропии, свойственной этой плоскости.

Треугольник ABC дает

$$\overline{AB}^{\,2} = \overline{AC}^{\,2} - \overline{CB}^{\,2} = \overline{AC}^{\,2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \widehat{CAB}\right) = \overline{AC}^{\,2}\left(1-\beta^2\right),$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

что и требовалось доказать.

Частота $1/T_1$ представляет собой ту частоту периодического процесса, которую отмечает неподвижный наблюдатель, следящий за смещением этого процесса, а именно:

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0 c^2}{h}\sqrt{1-\beta^2}.$$

Период волн в одной точке пространства для неподвижного наблюдателя выражается не величиной $\left(1/c\right)\overline{AC}$, а величиной $\left(1/c\right)\overline{AD}$. Произведем расчет этого периода.

Из маленького треугольника BCD находим соотношение

$$\overline{CB}/\overline{DC} = 1/\beta,$$

откуда $\overline{DC} = \beta\overline{CB} = \beta^2\overline{AC}$. Но $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{DC} = \overline{AC}\left(1-\beta^2\right)$. Новый период T будет, таким образом, равен

$$T = \frac{1}{c}\overline{AC} = \left(1-\beta^2\right) = T_0\sqrt{1-\beta^2},$$

а частота ν волн будет $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{m_0 c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}$.

Таким образом, мы получаем хорошее совпадение с результатами, найденными аналитически в параграфе I, но теперь можно видеть, как они связаны с общей концепцией пространства-времени и почему смещение по фазе периодических движений, происходящее в различных точках пространства, зависит от способа определения одновременности в теории относительности.

ГЛАВА II. Принцип Мопертюи и принцип Ферма

I. Цель данной главы

В этой главе мы попытаемся обобщить результаты главы I на случай движущегося тела, перемещение которого непрямолинейно и неравномерно. Переменное движение предполагает существование силового поля, которому это движущееся тело подчинено. Согласно современному состоянию наших знаний, есть только два вида полей: поле тяготения и электромагнитное поле. Общая теория относительности интерпретирует поле тяготения как искривление пространства-времени. В настоящей работе мы будем систематически отбрасывать все, касающееся тяготения, оставляя за собой право вернуться к этому в другой работе. Таким образом, в настоящий момент силовое поле будет для нас электромагнитным полем и динамика переменного движения будет изучать движение тела, имеющего электрический заряд в электромагнитном поле.

Нам придется встретиться в этой главе с достаточно большими трудностями, потому что теория относительности – надежный путеводитель при исследовании равномерных движений – еще не дает окончательного заключения относительно неравномерных движений. Во время недавнего пребывания Эйнштейна в Париже Пенлеве выдвинул интересные возражения против теории относительности; Ланжевен легко сумел их отвести, так как все они предполагали ускорения, в то время как преобразование Лоренца – Эйнштейна применимо только к равномерному движению. Аргументы знаменитого математика лишний раз доказали, что применение идей Эйнштейна становится вопросом деликатным, как только дело касается ускорений, и в этом отношении такие аргументы очень поучительны. Метод, позволивший нам изучить фазовую волну в главе I, здесь абсолютно непригоден.

Фазовая волна, сопровождающая движение тела, при условии, конечно, что принимаются наши представления, имеет свойства, которые зависят от природы этого движущегося тела, поскольку ее частота, например, зависит от полной энергии. Поэтому естественно будет предположить, что если силовое поле воздействует на движение тела, то оно будет действовать также и на распространение его фазовой волны. Руководствуясь идеей полной идентичности принципа наименьшего действия и принципа Ферма, я был вынужден с самого начала моих исследований в этой области *принять*, что для заданного значения полной энергии движущегося тела и вследствие этого для частоты его фазовой волны возможные динамические траектории данного тела совпадают с возможными лучами фазовой волны. Это привело меня к хорошему результату, который будет изложен в главе III, а именно к интерпретации установленных Бором условий внутриатомной устойчивости. К сожалению, это потребовало довольно произвольных гипотез о значении скоростей распространения V

фазовой волны в каждой точке поля. Здесь мы, напротив, воспользуемся методом, который кажется нам значительно более общим и более подходящим. С одной стороны, мы исследуем механический принцип наименьшего действия в его классических формах Гамильтона и Мопертюи и в релятивистской динамике, а с другой стороны, с очень общей точки зрения, – распространение волн и принцип Ферма. В этом случае нам придется представить себе некоторый синтез этих двух исследований, синтез, может быть, спорный, но теоретическое изящество его неоспоримо. Одновременно мы получим решение поставленной задачи.

II. Два принципа наименьшего действия в классической динамике

Принцип наименьшего действия в гамильтоновой форме выражается в классической динамике следующим образом:

«Динамические уравнения могут быть выведены из того, что интеграл $\int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0$, взятый в *фиксированных* пределах времени для начальных и конечных значений, задаваемых параметрами q_i, которые определяют состояние системы, имеет стационарное значение». По определению, L называют функцией Лагранжа и предполагают, что она зависит от переменных q_i и $\dot{q}_i = dq_i/dt$. Таким образом, имеем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0.$$

С помощью известного метода вариационного исчисления отсюда выводятся так называемые уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

число которых равно числу переменных q_i.

Остается определить функцию L. Классическая динамика полагает функцию L равной разности кинетической и потенциальной энергии:

$$L = E_{\text{cin}} - E_{\text{pot}}.$$

Дальше мы увидим, что релятивистская динамика применяет другое выражение для L.

Перейдем теперь к принципу наименьшего действия в форме Мопертюи. Для этого заметим сначала, что уравнения Лагранжа в своей общей форме, приведенной выше, допускают первый интеграл, так называемую «энергию системы», равную

$$W = -L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} q_i$$

при условии, однако, что функция L не зависит явно от времени, это мы и будем предполагать в дальнейшем. Действительно, получаем

$$\frac{dW}{dt} = -\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i =$$

$$= \sum_i \dot{q}_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right],$$

что, согласно уравнениям Лагранжа, равно нулю. Таким образом,

$$W = \text{const}.$$

Применим теперь принцип Гамильтона ко всем «варьированным» траекториям, которые переводят систему из начального состояния A в конечное состояние B и которые соответствуют определенному значению энергии W. Поскольку W, t_1 и t_2 – константы, можно написать

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W)\, dt = 0$$

или

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i dt = \delta \int_A^B \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i = 0,$$

причем последний интеграл распространяется на все значения q_i в пределах между значениями, определяющими состояния A и B, таким образом, чтобы время при этом исключалось. Тогда для полученной новой формы не приходится вводить никаких ограничений, относящихся ко времени. Однако варьированные траектории должны всегда соответствовать одному и тому же значению W энергии.

Согласно классической записи канонических уравнений, примем $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$. Импульсы p_i являются каноническими сопряженными переменных q_i. Принцип Мопертюи напишется в классической динамике так:

$$\delta \int_A^B \sum_i p_i dq_i = 0,$$

где $L = E_{\text{cin}} - E_{\text{pot}}$, причем E_{pot} не зависит от $\dot{q}_i$, а E_{cin} является однородной квадратичной функцией $\dot{q}_i$. В силу теоремы Эйлера $\sum_i p_i dq_i = \sum_i p_i \dot{q}_i dt = 2E_{\text{cin}} dt$. Для материальной точки $E_{\text{cin}} = (1/2)mv^2$, и принцип наименьшего действия принимает форму, которая была известна ранее всех других:

$$\delta \int_A^B mv dl = 0,$$

где dl – элемент траектории.

III. Два принципа наименьшего действия в динамике электрона

Вернемся к вопросу динамики электрона с релятивистской точки зрения. Слово «электрон» следует понимать в общем смысле как материальную точку, обладающую электрическим зарядом. Предположим, что электрон, помещенный вне поля, обладает собственной массой m_0; его электрический заряд обозначается через e.

Рассмотрим снова пространство-время; пространственные координаты обозначим через x^1, x^2 и x^3; координату ct через x^4. Основной инвариант – «элемент длины» – выражается соотношением

$$ds = \sqrt{\left(dx^4\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2}.$$

В этом и в следующих параграфах мы постоянно будем применять некоторые обозначения тензорного исчисления.

Мировая линия в каждой точке имеет касательную, направление которой определяет вектор мировой скорости, длина этого вектора равна единице и контравариантные составляющие его даются соотношением

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Отсюда следует, что $u^i u_i = 1$.

Представим себе движущееся тело, описывающее мировую линию; при прохождении через рассматриваемую точку скорость его равна $v = \beta c$ с компонентами v_x, v_y, v_z. Компоненты мировой скорости будут

$$u_1 = -u^1 = -\frac{v_x}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \quad u_2 = -u^2 = -\frac{v_y}{c\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$u_3 = -u^3 = -\frac{v_z}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \quad u_4 = u^4 = \frac{v_z}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Чтобы определить электромагнитное поле, следует при помощи уравнений

$$\varphi_1 = -\varphi^1 = -a_x; \quad \varphi_2 = -\varphi^2 = -a_y; \quad \varphi_3 = -\varphi^3 = -a_z; \quad \varphi_4 = -\varphi^4 = \frac{1}{c}\psi$$

ввести второй мировой вектор, компоненты которого равны функциям вектор-потенциала $\vec{a}$ и скалярного потенциала ψ.

Рассмотрим теперь две точки P и Q пространства-времени, соответствующие заданным значениям координат пространства и времени. Можно рассматривать криволинейный интеграл, взятый по мировой линии, идущей от P к Q; интегрируемая функция, естественно, должна быть инвариантной.

Положим, что

$$\int_P^Q \left(-m_0 c - e\varphi_i u^i\right) ds = \int_P^Q \left(-m_0 c u_i - e\varphi_i\right) u^i\, ds$$

является этим интегралом.

Принцип Гамильтона утверждает, что если мировая линия движущегося тела проходит через P и Q, то она имеет такую форму, для которой определенный выше интеграл имеет стационарное значение.

С помощью соотношения

$$J_i = m_0 c u_i + e\varphi \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

определим третий мировой вектор. Принцип наименьшего действия примет вид

$$\delta \int_P^Q \left(J_1 dx^1 + J_2 dx^2 + J_3 dx^3 + J_4 dx^4 \right) = \delta \int_P^Q J_i dx^i = 0.$$

Несколько далее мы раскроем физический смысл мирового вектора J.

Пока вернемся к обычной форме уравнений динамики, заменив в первой форме интеграла действия величину ds на $cdt\sqrt{1-\beta^2}$.

Таким образом, получаем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[-m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - ec\varphi_1 - e\left(\varphi_1 v_x + \varphi_2 v_y + \varphi_3 v_z \right) \right] dt = 0,$$

где t_1 и t_2 соответствуют точкам P и Q пространства-времени.

Если существует чисто электростатическое поле, то величины φ_1, φ_2, φ_3 равны нулю и функция Лагранжа примет часто употребляемую форму

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - e\psi.$$

Поскольку во всех случаях принцип Гамильтона имеет форму $\delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0$, он всегда приводит к уравнениям Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Во всех случаях, в которых потенциалы не зависят от времени, мы снова встречаемся с принципом сохранения энергии:

$$W = -L + \sum_i p_i q_i = \text{const}, \quad p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Рассуждая так же, как это было сделано выше, приходим к принципу Мопертюи:

$$\delta \int_A^B \sum_i p_i dq_i = 0,$$

где A и B – две точки пространства, соответствующие системе отсчета, применяемой в точках P и Q пространства-времени.

Величины p_1, p_2, p_3, равные частным производным функции L по соответствующим скоростям, могут помочь определить вектор $\vec{p}$, который мы назовем «вектором импульса». Если нет магнитного поля (независимо от того, есть ли электрическое поле), то прямолинейные компоненты этого вектора будут:

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Таким образом, этот вектор тождествен количеству движения, и интеграл действия Мопертюи представляется в простой форме, предложенной самим Мопертюи, с той только разницей, что масса изменяется теперь с изменением скорости по закону Лоренца. Если есть магнитное поле, то для компонент вектора импульса находят выражения:

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} + ea_x; \; p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} p_z + ea_y; \; p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} + ea_z.$$

Теперь уже нет тождества между вектором p и количеством движения; из этого следует, что выражение для интеграла действия становится более сложным.

Рассмотрим помещенное в поле движущееся тело, полная энергия которого задана в каждой точке поля, доступной движущемуся телу; скорость последнего определяется уравнением энергии, но *a priori* направление его движения может быть любым. Выражения для p_x, p_y и p_z показывают, что вектор импульса имеет одну и ту же величину в любой точке электростатического поля независимо от рассматриваемого направления. Это, однако, не так при существовании магнитного поля: величина вектора $\vec{p}$ зависит в этом случае от угла между выбранным направлением и вектор-потенциалом, как это следует из выражения $p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2$. Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

Чтобы закончить этот параграф, вернемся к физическому смыслу мирового вектора J, от которого зависит интеграл Гамильтона. Мы выразили его как

$$J_i = m_0 c u_i + e\varphi_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

С помощью значений u_i и φ_i находим

$$J_1 = -p_x; \quad J_2 = -p_y; \quad J_3 = -p_z; \quad J_4 = W/c.$$

Контравариантные компоненты будут

$$J^1 = p_x; \quad J^2 = p_y; \quad J^3 = p_z; \quad J^4 = W/c.$$

Таким образом, мы имеем дело со знаменитым вектором «мирового импульса», который объединяет энергию и количество движения. Из выражения

$$\delta \int_P^Q J_i dx^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

можно вывести (если J_4 постоянно)

$$\delta \int_A^B J_i dx^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Это наиболее лаконичная форма для перехода от одного способа изложения стационарности действия к другому.

IV. Распространение волн. Принцип Ферма

Тем же методом, который применялся в двух предыдущих параграфах, мы рассмотрим распространение фазы синусоидального колебания. Для этого мы перейдем к очень общей точке зрения, и нам снова придется рассматривать пространство-время.

Рассмотрим функцию $\sin\varphi$, предположив, что дифференциал φ зависит от переменных x^i пространства и времени. В пространстве-времени имеется бесконечное число мировых линий, вдоль которых функция φ постоянна.

Волновая теория в той форме, в которой она представлена в работах Гюйгенса и Френеля, заставляет нас различать некоторые из этих линий, проекции которых на пространство наблюдателя являются для него «лучами» в обычном оптическом смысле.

Положим, как и раньше, что P и Q – две точки пространства-времени. Если мировой луч пройдет через эти две точки, то какой закон будет определять его форму?

Рассмотрим криволинейный интеграл $\int\limits_P^Q d\varphi$ и определим мировой луч в гамильтоновой форме $\delta\int\limits_P^Q d\varphi = 0$.

Интеграл действительно должен быть стационарным, иначе совпадающие по фазе возмущения, исходящие из некоторой точки пространства и после пробега по нескольким различным путям пересекающиеся в другой точке, окажутся различными по фазе.

Фаза φ инвариантна; таким образом, если мы положим

$$\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left(O_1 dx^1 + O_2 dx^2 + O_3 dx^3 + O_4 dx^4\right) = 2\pi O_i dx^i,$$

то величины O_i, обычно являющиеся функциями x_i, будут ковариантными компонентами мирового вектора – вектора мировой волны. Если l – направление луча в обычном смысле, то $d\varphi$, как правило, рассматривают в форме

$$d\varphi = 2\pi\left(\nu dt - \frac{\nu}{V} dl\right),$$

где ν – частота, а V – скорость распространения. Тогда можно положить

$$O_1 = -\frac{\nu}{V}\cos(x,l);\; O_2 = -\frac{\nu}{V}\cos(y,l);\; O_3 = -\frac{\nu}{V}\cos(z,l);\; O_1 = \frac{\nu}{c}.$$

Вектор мировой волны распадается, следовательно, на временную компоненту, пропорциональную частоте, и *пространственный* вектор $\vec{n}$ длиной ν/V, ориентированный по направлению распространения. Мы назовем этот вектор «волновым числом», потому что он равен обратной величине длины волны. Если частота ν постоянна, то нужно перейти от гамильтоновой формы

$$\delta \int_P^Q O_i dx^i = 0$$

к форме Мопертюи

$$\delta \int_A^B \left(O_1 dx^1 + O_2 dx^2 + O_3 dx^3\right) = 0,$$

где A и B – точки пространства, соответствующие P и Q. Подставляя вместо O_1, O_2 и O_3 их значения, получаем

$$\delta \int_A^B \frac{\nu dl}{V} = 0.$$

В таком виде принцип Мопертюи совпадает с принципом Ферма.

Аналогично тому, как в предыдущем параграфе надо было знать распределение вектора $\vec{p}$ в поле, чтобы найти проходящую через две определенные точки траекторию движущегося тела с заданной полной энергией, так и здесь, чтобы найти луч волны известной частоты, проходящий через две заданные точки, достаточно знать распределение в пространстве вектора волнового числа, определяющего в каждой точке и для каждого направления скорость распространения.

V. Трактовка квантового соотношения

Мы подошли теперь к кульминационному пункту этой главы. В самом ее начале мы поставили следующий вопрос: «Если движущееся тело перемещается в силовом поле неравномерно, то как происходит распространение его фазовой волны?» Вместо того чтобы находить путем последовательных приближений, как я это делал сначала, скорость распространения в каждой точке и для каждого направления, я применил квантовое соотношение, может быть, несколько гипотетически, но в глубоком и бесспорном согласии с духом теории относительности.

Мы до сих пор принимали, что $h\nu = w$, где w – полная энергия движущегося тела, а ν – частота его фазовой волны. С другой стороны, предыдущие параграфы научили нас определять два мировых вектора J и O, которые играют совершенно симметричную роль в изучении движения тела и распространения волны.

Если ввести эти векторы, то соотношение $h\nu = w$ примет вид

$$O_4 = \frac{1}{h} J_4.$$

Тот факт, что два вектора имеют одну одинаковую компоненту, еще не доказывает, что то же имеет место и для других. Вводя само собой напрашивающееся обобщение, положим

$$O_i = \frac{1}{h} J_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Изменение $d\varphi$, относящееся к бесконечно малой части фазовой волны, будет равно:

$$d\varphi = 2\pi O_i dx^i = \frac{2\pi}{h} J_i dx^i.$$

Принцип Ферма примет при этом вид

$$\delta \int_A^B \sum_1^3 J_i dx^i = \delta \int_A^B \sum_1^3 p_i dx^i = 0.$$

Таким образом, мы приходим к следующему положению:

«Принцип Ферма, примененный к фазовой волне, идентичен принципу Мопертюи, примененному к движущемуся телу. Возможные динамические траектории движущегося тела идентичны с возможными лучами волны».

Нам представляется, что такая идея глубокой связи между двумя принципами геометрической оптики и динамики является чрезвычайно ценной для отыскания пути к синтезу волн и квантов.

Гипотеза о пропорциональности векторов J и O является в некотором смысле истолкованием квантового соотношения, обычное изложение которого явно недостаточно, так как оно вводит энергию без неразлучного ее спутника – количества движения. Новое изложение гораздо более удовлетворительно, потому что оно выражается через равенство двух мировых векторов.

VI. Частные случаи. Обсуждение

Общие концепции, изложенные в предыдущем параграфе, должны быть теперь применены к частным случаям с целью уяснения их смысла.

а) Рассмотрим сначала прямолинейное и равномерное движение свободного тела. Гипотезы, выдвинутые в начале главы I, позволили нам полностью изучить этот случай на основе специального принципа относительности. Посмотрим, сможем ли мы найти предсказанное значение для скорости распространения фазовой волны: $V = c/\beta$. Положим

$$\nu = \frac{W}{h} = \frac{m_0 c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \frac{1}{h}\sum_1^3 p_i dq_i = \frac{1}{h}\frac{m_0 \beta^2 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} dt = \frac{1}{h}\frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} dl = \frac{\nu dl}{V},$$

откуда $V = c/\beta$. Мы дали истолкование этого результата с точки зрения пространства-времени.

б) Рассмотрим электрон в электростатическом поле (атом Бора). Мы должны предположить, что для фазовой волны, имеющей частоту ν, равную частному от деления полной энергии движущегося тела на h, будет

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\psi = h\nu.$$

Поскольку магнитное поле равно нулю, получаем просто

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и т. д.}$$

$$\frac{1}{h}\sum_1^3 p_i dq_i = \frac{1}{h}\frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} dl = \frac{\nu}{V} dl.$$

Отсюда

$$V = \frac{m_0 c^2 \big/ \sqrt{1-\beta^2} + e\psi}{m_0 \beta c \big/ \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c}{\beta}\left(1 + \frac{e\psi\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 c^2}\right) =$$
$$= \frac{c}{\beta}\left(1 + \frac{e\psi}{W - e\psi}\right) = \frac{c}{\beta} \cdot \frac{W}{W - e\psi}.$$

Этот результат требует нескольких замечаний. С физической точки зрения он означает, что фазовая волна с частотой $\nu = W/h$ распространяется в электростатическом поле от одной точки к другой с переменной скоростью, соответствующей значению потенциала. Действительно, скорость V выражается непосредственно через ψ с помощью члена $\frac{e\psi}{W - e\psi}$ (обычно малого по сравнению с единицей) и неявно через β, которое рассчитывается в каждой точке как функция W и ψ.

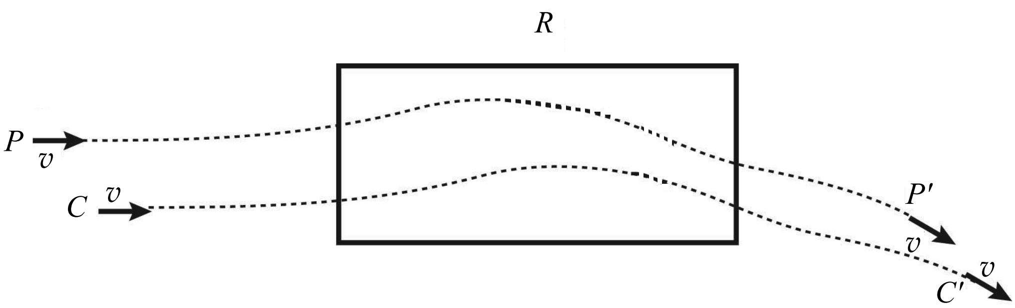

Рис. 3

Кроме того, заметим, что V есть функция массы и заряда движущегося тела. Это может показаться странным, но на самом деле это не так странно, как кажется. Рассмотрим электрон, центр C которого перемещается со скоростью v; по классическому представлению, в некоторой точке P, координаты которой в связанной с электроном системе известны, сосредоточено определенное количество электромагнитной энергии, являющейся некоторым образом частью электрона. Предположим, что после прохождения области R, где существует более или менее сложное электромагнитное поле, электрону сообщается та же скорость v, но иначе направленная.

Точка P системы, связанная с электроном, переместилась в точку P', и можно сказать, что энергия, первоначально находившаяся в P, перешла в P'. Смещение этой энергии в R возможно рассчитать только при заданных массе и заряде электрона, даже если известны поля. Это бесспорное заключение может с первого взгляда показаться странным, потому что мы обычно привыкли рассматривать массу и заряд (так же как количество движения и энергию) как величины, связанные с центром электрона. Таким же образом распространение в поле фазовой волны, которую, по нашему мнению, следует считать основной составной частью электрона, должно зависеть от заряда и массы.

Напомним теперь результаты, полученные в предыдущей главе для случая равномерного движения. Там нам пришлось рассматривать фазовую волну как результат пересечений пространством неподвижного наблюдателя прошедших, настоящих и будущих пространств перемещающегося наблюдателя. Мы могли бы попытаться вновь найти данное выше значение V, исследуя последовательные «фазы» движущегося тела и устанавливая смещение для неподвижного наблюдателя сечений его пространства состояниями равных фаз.

К сожалению, мы сталкиваемся здесь с большими трудностями. Теория относительности не дает нам определенного указания на то, каким образом наблюдатель, увлекаемый неравномерным движением, отсекает в каждый момент свое пространство в пространстве-времени; по-видимому, нет оснований считать это сечение плоским, как в случае равномерного движения. Но даже если бы эта трудность была преодолена, мы все равно были бы в затруднении. Действительно, тело, движущееся равномерно, должно описывать одинаковую кривую для связанного с ней наблюдателя независимо от скорости равномерного движения по отношению к осям отсчета; это следует из принципа, что галилеевы оси, совершающие по отношению друг к другу движение равномерного переноса, эквивалентны. Если наше равномерно движущееся тело окружено для связанного с ним наблюдателя периодическим процессом, имеющим повсюду одну и ту же фазу, то это же должно иметь место для всех скоростей равномерного движения, и это оправдывает наш метод, изложенный в главе I. Но если движение неравномерно, то описание движущегося тела, сделанное связанным с ним наблюдателем, не может быть таким же; мы совершенно не можем сказать, как он определит периодический процесс и припишет ли он ему одну и ту же фазу в любой точке пространства.

Вероятно, можно подойти к проблеме с другого конца – принять результаты, полученные в этой главе из совершенно других соображений, и попытаться вывести из них, каким образом теория относительности должна рассматривать вопросы переменного движения, чтобы прийти к таким же заключениям. Мы не можем заниматься этой трудной проблемой.

в) Рассмотрим общий случай движения электрона в электромагнитном поле. Мы имеем:

$$h\nu = W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\psi.$$

Кроме того, мы показали выше, что следует положить

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} + ea_x, \quad \text{и т.д.,}$$

где a_x, a_y и a_z – компоненты вектор-потенциала. Таким образом,

$$\frac{1}{h}\sum_1^3 p_i dq^i = \frac{1}{h}\frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}dl + \frac{e}{h}a_l dl = \frac{\nu dl}{V}.$$

Отсюда находим

$$V = \frac{m_0 c^2 \big/ \sqrt{1-\beta^2} + e\psi}{m_0\beta c \big/ \sqrt{1-\beta^2} + ea_l} = \frac{c}{\beta}\cdot\frac{W}{W-e\psi}\cdot\frac{1}{1+e\frac{a_l}{G}},$$

где G – количество движения, а a_l – проекция вектор-потенциала на направление l. Среда в каждой точке уже неизотропна. Скорость V изменяется в зависимости от рассматриваемого направления, а скорость движущегося тела $\vec{v}$ уже не совпадает по направлению с нормалью к фазовой волне, определяемой вектором $\vec{p} = h\vec{n}$. Луч не совпадает более с нормалью волны – классическое заключение для оптики анизотропных сред.

Можно спросить, что будет с теоремой равенства скоростей движущегося тела и группы фазовых волн: $v = \beta c$.

Заметим сначала, что скорость V фазы *вдоль луча* определяется соотношением

$$\frac{1}{h}\sum_1^3 p_i dq^i = \frac{1}{h}\sum_1^3 p_i \frac{dq^i}{dl}dl = \frac{\nu}{V}dl,$$

где ν/V не равно p/h, потому что здесь dl и p не имеют одного и того же направления.

Мы можем, не нарушая общности, принять за ось x направление движения тела в рассматриваемой точке и проекцию вектора $\vec{p}$ на это направление назвать p_x. Тогда, по определению, имеем

$$\frac{\nu}{V} = \frac{1}{h}p_x.$$

Первое из канонических уравнений дает равенство

$$\frac{dq}{dt} = v = \beta c = \frac{\partial W}{\partial p_x} = \frac{\partial(h\nu)}{\partial(h\nu/V)} = U,$$

где U – групповая скорость вдоль луча.

Результат параграфа II главы I является, таким образом, совершенно общим и вытекающим непосредственно из первой группы уравнений Гамильтона.

ГЛАВА III. Квантовые условия устойчивости траекторий

I. Условия устойчивости Бора – Зоммерфельда

В своей теории атома Бор впервые высказал предположение, что из числа замкнутых траекторий, описываемых электроном вокруг положительного центра, только некоторые устойчивы, другие же либо не реализуются в природе, либо настолько неустойчивы, что их не стоит принимать в расчет. Ограничиваясь круговыми орбитами, имеющими только одну степень свободы, Бор установил следующее условие: устойчивы только такие круговые орбиты, для которых момент количества движения является целым кратным числа $h/(2\pi)$, где h – константа Планка. Это можно записать в виде

$$m_0\omega R^2 = n\frac{h}{2\pi} \quad (n \text{ – целое})$$

или

$$\int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = nh,$$

где θ – азимутальный угол, выбранный как координата q Лагранжа, а p_θ – соответствующий импульс.

Чтобы распространить этот вывод на случай большого числа степеней свободы, Зоммерфельд и Вильсон показали, что можно выбрать такие координаты q_i, для которых условия квантования орбит будут

$$\oint p_i dq_i = n_i h \quad (n \text{ – целое}).$$

Знак $\oint$ показывает, что интеграл распространен на всю область изменения координат.

В 1917 г. Эйнштейн дал условие квантования в инвариантной форме по отношению к изменению координат[6]. Мы выскажем его для случая *замкнутых* орбит; оно будет иметь вид

$$\oint \sum_1^3 p_i dq_i = nh \quad (n \text{ – целое}),$$

где интеграл распространен на всю длину траектории. Мы узнаем интеграл действия Мопертюи, который имеет большое значение в теории квантов. К тому же этот интеграл не зависит от выбора координат пространства благодаря известному свойству, выражающему ковариантный характер компонент p_i вектора момента. При помощи классического метода Якоби этот интеграл определяется как общее решение уравнения в частных производных:

$$H\left(\frac{\partial s}{\partial q_i}, q_i\right) = W, \quad i = 1, 2, ..., f,$$

[6] Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein (Ber. der deutschen. Phys. Ges. 1917. P. 82).

содержащий f произвольных констант, одна из которых – энергия W. Если имеется только одна степень свободы, то соотношение Эйнштейна фиксирует энергию W; если число степеней свободы больше единицы (в наиболее важном случае движения электрона во внутриатомном поле имеются *a priori* три степени свободы), то получается только одно соотношение между W и целым числом n, а именно для эллипсов Кеплера, если пренебречь изменением массы при изменении скорости. Но если движение квазипериодично, что, кстати говоря, имеет место благодаря изменению, о котором говорилось выше, то можно найти координаты, которые колеблются в определенных пределах (либрации), и существует бесконечное число псевдопериодов, приблизительно равных целым кратным периодов либрации. В конце каждого из этих псевдопериодов движущееся тело возвращается в состояние, сколь угодно близкое к начальному состоянию. Уравнение Эйнштейна, примененное к каждому из этих псевдопериодов, приводит к бесконечному числу условий, которые совместимы только в том случае, если выполняются условия Зоммерфельда; так как число последних равно числу степеней свободы, все константы оказываются фиксированными и не остается никакой неопределенности.

Чтобы рассчитать интегралы Зоммерфельда, можно с успехом воспользоваться уравнением Якоби и теоремой о вычетах, а также понятием угловых переменных. За последние годы эти вопросы были предметом многочисленных работ, изложенных в прекрасной книге Зоммерфельда «Atombau und Spectrallinien» (франц. издание, перевод Bellenot, изд-во Blanchard, 1923 г.). Мы не будем здесь заниматься этими вопросами, а ограничимся замечанием, что, в конце концов, проблема квантования в принципе полностью сводится к условию Эйнштейна для замкнутых орбит. Если нам удастся объяснить это условие, то тем самым мы выясним вопрос об устойчивых траекториях.

II. Интерпретация условия Эйнштейна

Понятие фазовой волны дает нам возможность объяснить условие Эйнштейна. Из рассуждений главы II следует, что траектория движущегося тела является одним из лучей его фазовой волны; последняя должна пробегать вдоль траектории с постоянной частотой (потому что полная энергия постоянна) и с переменной скоростью, значение которой мы научились вычислять. Распространение, таким образом, аналогично распространению волны жидкости в замкнутом канале с переменной глубиной. С физической точки зрения очевидно, что для того чтобы получить стабильный режим, длина канала должна находиться в резонансе с волной; иначе говоря, участки волны, следующие один за другим на расстоянии, равном целому кратному длины l канала и потому находящиеся в одной и той же точке последнего, должны совпадать по фазе. Условие резонанса будет $l = n\lambda$, если длина волны постоянна, и $\oint \frac{\nu}{V} dl = n$ (целое) в общем случае.

Появляющийся здесь интеграл есть интеграл принципа Ферма; мы показали, что его следует считать равным интегралу действия Мопертюи, деленному на h. Условие резонанса идентично, таким образом, условию устойчивости, требуемому теорией квантов.

Этот прекрасный результат, являющийся непосредственным следствием идей, высказанных в предыдущей главе, служит наилучшим оправданием нашего способа рассмотрения проблемы квантов.

В частном случае круговых орбит в атоме Бора имеем

$$m_0 \oint v dl = 2\pi R m_0 v = nh,$$

а так как $v = \omega R$, где ω – угловая скорость, то

$$m_0 \omega R^2 = n\frac{h}{2\pi}.$$

Это и есть простая форма, впервые рассмотренная Бором.

Таким образом, мы видим, почему некоторые орбиты устойчивы, но не знаем еще, каким образом происходит переход от одной устойчивой орбиты к другой. Характер возмущения, сопровождающего этот переход, может быть изучен только с помощью соответствующим образом измененной электромагнитной теории, а такой теорией мы пока не владеем.

III. Условие Зоммерфельда для квазипериодических движений

Я постараюсь показать, что если условие устойчивости для *замкнутой орбиты* есть

$$\oint \sum_1^3 p_i dq^i = nh,$$

то условия устойчивости для квазипериодических движений с необходимостью будут иметь вид

$$\oint p_i dq^i = n_i h \quad (n \text{ – целое, } i = 1, 2, 3).$$

Таким образом, условия кратности Зоммерфельда также приводят к резонансу фазовой волны.

Отметим сначала, что поскольку электрон имеет конечные размеры (если, как мы принимаем, условия устойчивости зависят от реакций, оказываемых на него его собственной фазовой волной), то должно быть совпадение по фазе между всеми участками волны, проходящей на расстоянии от центра электрона, которое меньше малого, но *конечного* значения, например порядка величины радиуса электрона (10^{-13}см). Непринятие этого предположения означало бы, что электрон является геометрической точкой без размеров и луч его фазовой волны представляет собой линию нулевой плотности. Это невозможно с физической точки зрения.

Напомним теперь известное свойство квазипериодических траекторий. Если M – положение центра движущегося тела на траектории в заданный момент и если из M как центра будет описана произвольная сфера малого, но конечного радиуса R, то можно будет найти бесконечное число таких интервалов времени, к концу каждого из которых движущееся тело вернется в сферу радиуса R. Кроме того, каждый из этих интервалов времени или «периодов возврата» τ будет удовлетворять равенствам

$$\tau = n_1\, T_1 + \varepsilon_1 = n_2\, T_2 + \varepsilon_2 = n_3\, T_3 + \varepsilon_3\,,$$

где T_1, T_2 и T_3 являются периодами изменения (либрации) координат q^1, q^2 и q^3. Величины ε_i могут быть сделаны меньшими некоторого заранее заданного малого, но конечного числа η. Чем меньше будет η, тем длиннее будет наиболее короткий из периодов τ.

Предположим, что радиус R выбран равным максимальному расстоянию действия фазовой волны на электрон, т. е. расстоянию, которое было определено выше. Тогда к каждому периоду возврата τ можно будет применить условие совпадения фаз в форме

$$\int_0^\tau \sum_1^3 p_i\, dq^i = nh,$$

которое можно также написать в виде

$$n_1 \int_0^{T_1} p_1 \dot{q}_1\, dt + n_2 \int_0^{T_2} p_2 \dot{q}_2\, dt + n_3 \int_0^{T_3} p_3 \dot{q}_3\, dt +$$
$$+ \varepsilon_1 \left(p_1 \dot{q}_1\right)_\tau + \varepsilon_2 \left(p_2 \dot{q}_2\right)_\tau + \varepsilon_3 \left(p_3 \dot{q}_3\right)_\tau = nh\,.$$

Но условие резонанса никогда не выполняется строго. Если математик требует, чтобы разность фаз при резонансе была точно равна $n \times 2\pi$, то физик должен удовлетвориться тем, что она равна $2\pi n \pm \alpha$, где α меньше малой, но конечной величины ε, которая, если можно так выразиться, измеряет область, где резонанс можно считать физически реализованным.

Величины p_i и q_i остаются во время движения конечными; можно найти шесть таких величин P_i и $\dot{Q}_i$, которые всегда дадут

$$p_i < P_i\,, \quad \dot{q}_i < \dot{Q}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Выберем предел η так, чтобы $\eta \sum_1^3 P_i \dot{Q}_i < \frac{\varepsilon h}{2\pi}$; мы видим, что при написании условия резонанса для каждого из периодов возврата можно будет пренебречь членами с ε_i и записать:

$$n_1 \int_0^{T_1} p_1 \dot{q}_1\, dt + n_2 \int_0^{T_2} p_2 \dot{q}_2\, dt + n_3 \int_0^{T_3} p_3 \dot{q}_3\, dt = nh.$$

В левой части уравнения n_1, n_2 и n_3 являются известными целыми числами, в правой части n – *произвольное* целое. Мы имеем бесконечное число подобных уравнений с различными значениями n_1, n_2 и n_3. Чтобы удовлетворить этим уравнениям, необходимо и достаточно, чтобы каждый из интегралов

$$\int_0^{T_1} p_i \dot{q}_i dt = \oint p_i dq_i$$

был равен целому кратному числа h.

Это и есть условие Зоммерфельда.

Предыдущее доказательство кажется убедительным. Однако здесь нужно выдвинуть одно возражение. Условия устойчивости могут начать играть роль только через промежуток времени порядка самого короткого из интервалов времени τ, который уже очень велик; если бы, например, этого пришлось ждать миллион лет, то это равносильно тому, что такие условия никогда не осуществятся. Данное возражение несущественно, так как периоды τ являются очень большими по сравнению с периодом либрации T_i, но могут быть очень малыми по отношению к обычной шкале времени; действительно, в атоме периоды T_i имеют величину от 10^{-15} до 10^{-20} с.

Можно себе представить величину периодов возврата в случае траектории Зоммерфельда L_2 для водорода. Вращение перигелия во время периода либрации радиус-вектора порядка $10^{-5}\cdot 2\pi$. Наиболее короткий из периодов возврата будет, таким образом, примерно в 10^5 раз больше периода радиальной переменной (10^{-15} с) и составит порядка 10^{-10} с. Таким образом, действительно получается, что условия устойчивости начнут играть роль через промежуток времени, недоступный нашим наблюдениям, и, следовательно, траектории без резонанса покажутся нам несуществующими.

Принцип примененного здесь рассуждения был заимствован у Л. Бриллюэна, который писал в своей диссертации (с. 351): «Чтобы интеграл Мопертюи, взятый для всех периодов возврата τ, был целым кратным числа h, нужно, чтобы каждый из интегралов, относящихся к каждой переменной и взятый для соответствующего периода, был равен целому числу квантов; именно так Зоммерфельд излагает свои квантовые условия».

ГЛАВА IV. Квантование одновременных движений двух электрических центров

I. Затруднения, вызванные проблемой квантования

В предыдущих главах мы постоянно рассматривали «изолированную порцию» энергии. Это выражение понятно, когда речь идет об электрически заряженной частице (протоне или электроне), удаленной от других электризованных тел. Но если электрические центры находятся во взаимодействии, понятие изолированной порции энергии становится менее ясным. В этом заключается затруднение, которое никоим образом не является присущим теории, представленной в настоящей работе, и которое не объясняется при современном состоянии релятивистской динамики.

Чтобы лучше понять это затруднение, рассмотрим протон (ядро водорода) с собственной массой M_0 и электрон с собственной массой m_0. Если эти два объекта настолько удалены друг от друга, что можно пренебречь их взаимодействием, принцип инертности энергии применяется без затруднений: протон обладает внутренней энергией M_0c^2, а электрон m_0c^2. Полная энергия равна $(M_0 + m_0)c^2$. Но если два центра находятся достаточно близко, так что приходится учитывать их взаимную потенциальную энергию $-P(< 0)$, то каким образом будет выражаться идея инертности энергии? Можно ли допустить, что протон имеет по-прежнему собственную массу M_0, а электрон – собственную массу m_0, когда их полная энергия очевидно становится равной $(M_0 + m_0)c^2 - P$? Должны ли мы, напротив, разделить потенциальную энергию между двумя составляющими частями системы и приписать электрону собственную массу $m_0 - \frac{\alpha P}{c^2}$, а протону собственную массу $M_0 - (1 - \alpha)\frac{P}{c^2}$? Какова в этом случае величина α и как она зависит от M_0 и m_0?

В теориях атома Бора и Зоммерфельда допускается, что электрон всегда имеет собственную массу m_0, каково бы ни было его положение в электростатическом поле ядра. Гипотеза о том, что потенциальная энергия всегда намного меньше, чем внутренняя энергия m_0c^2, приблизительно верна, но ничто не говорит о том, что она точна. Легко вычислить порядок величины максимальной коррекции (соответствующей $\alpha = 1$), которую надо было бы внести в постоянную Ридберга для различных термов серии Бальмера, если принять обратную гипотезу. Находим $\delta R/R = 10^{-5}$. Эта коррекция будет намного меньше, чем разность между постоянными Ридберга для водорода и гелия $\left(\frac{1}{2000}\right)$, разность, которую Бор замечательным образом учел при рассмотрении увлечения ядра. Однако, принимая во внимание чрезвычайную точность спектроскопических измерений, может быть, позволительно думать, что вариации постоянной Ридберга, обязанные изменениям собственной массы электрона в зависимости от его потенциальной энергии, могли бы быть измерены, если они существуют.

II. Увлечение ядра в атоме водорода

Проблема, тесно связанная с предыдущей, это проблема метода, который следует использовать, чтобы применить условия квантования к ансамблю электрических центров, находящихся в относительном движении. В простейшем случае это движение электрона в атоме водорода, когда одновременно учитывается перемещение ядра. Бор смог трактовать эту проблему, опираясь на следующую теорему рациональной механики: «Если принять в качестве координат движения электрона оси фиксированного направления, связанные с ядром, то это движение будет таким же, как если бы эти оси были бы галилеевыми и если бы электрон обладал массой $\mu_0 = \dfrac{m_0 M_0}{M_0 + m_0}$».

В системе осей, связанной с ядром, электростатическое поле, действующее на электрон, может рассматриваться как постоянное во всех точках пространства и, таким образом, задача сводится к рассмотрению проблемы неподвижного ядра благодаря замене фиктивной массы μ_0 на реальную массу m_0.

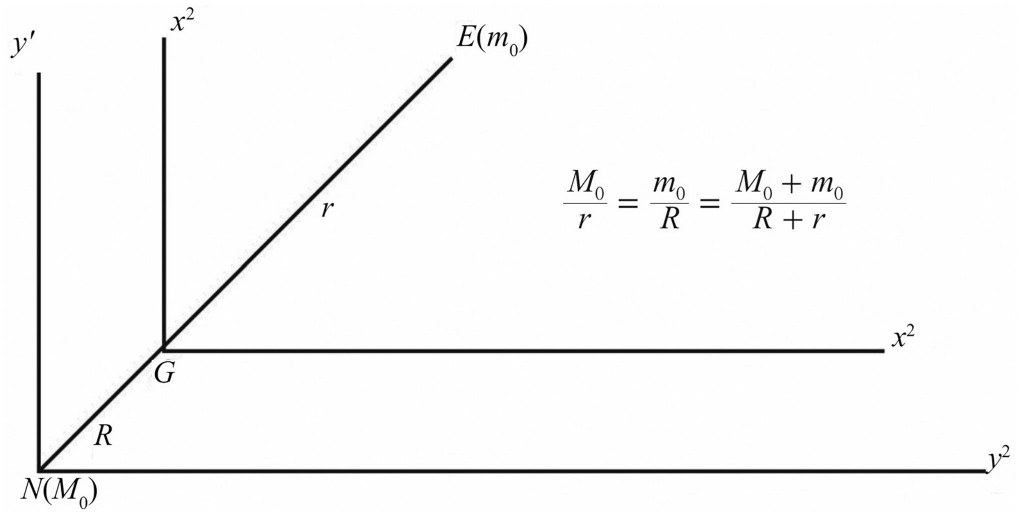

Рис. 4

В главе II настоящей работы мы установили общий параллелизм между фундаментальными величинами динамики и фундаментальными величинами волновой теории: теорема, сформулированная выше, определяет, таким образом, какие значения надо придать частоте электронной фазовой волны и ее скорости в системе, связанной с ядром, которая не является галилеевой. Благодаря такому приему квантовые условия стабильности могут в этом случае объясняться резонансом фазовой волны. Сделаем некоторые уточнения, сосредоточившись на случае, когда ядро и электрон описывают круговые орбиты вокруг общего центра тяжести. Плоскость этих орбит берется как плоскость координат индексов 1 и 2 в двух системах. Пространственные координаты в галилеевой системе, связанной с центром гравитации, обозначим через x^1, x^2 и x^3, а системы, связанной с ядром, – через y^1, y^2 и y^3. Наконец запишем $x^4 = y^4 = ct$.

Назовем ω скоростью вращения прямой NE вокруг точки G.

Запишем по определению:

$$\eta = \frac{M_0}{M_0 + m_0}.$$

Формулы, позволяющие перейти из одной системы осей в другую, записываются в виде:

$$y^1 = x^1 + R\cos\omega t, \quad y^2 = x^2 + R\sin\omega t, \quad y^3 = x^3, \quad y^4 = x^4.$$

Отсюда выводим:

$$\begin{aligned} ds &= \left(dx^4\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 = \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}\right)\left(dx^4\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 - \\ &- 2\frac{\omega R}{c}\sin\omega t\, dy^1 dy^4 + 2\frac{\omega R}{c}\cos\omega t\, dy^2 dy^4. \end{aligned}$$

Составляющие вектора обобщенного импульса определяются выражениями

$$u^i = \frac{dy^i}{ds}, \quad p_i = m_0 c u_i + e\varphi_i = m_0 c g_{ij} u^j + e\varphi_i.$$

Легко получаем:

$$p_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \eta^2\beta^2}}\left[\frac{dy^1}{dt} + \omega R\sin\omega t\right],$$

$$p_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \eta^2\beta^2}}\left[\frac{dy^2}{dt} + \omega R\cos\omega t\right], \quad p_3 = 0.$$

Резонанс фазовой волны выражается в соответствии с главными идеями главы II следующим соотношением:

$$\left|\oint \frac{1}{h}\left(p_1 dy^1 + p_2 dy^2\right)\right| = n, \quad (n \text{ – целое}),$$

где интеграл берется вдоль круговой траектории радиуса $R + r$, описываемой электроном вокруг ядра.

Так как

$$\frac{dy^1}{dt} = -\omega\left(R + r\right)\sin\omega t, \quad \frac{dy^2}{dt} = \omega\left(R + r\right)\cos\omega t,$$

то получаем

$$\frac{1}{h}\oint\left(p_1 dy^1 + p_2 dy^2\right) = \frac{1}{h}\oint \frac{m_0}{\sqrt{1 - \eta^2\beta^2}}\left(vdl - \omega R v dt\right).$$

Обозначая через v скорость электрона относительно осей y и через dl элемент длины траектории, получаем

$$v = \omega\left(R + r\right) = \frac{dl}{dt}.$$

Окончательно условие резонанса имеет вид

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\eta^2\beta^2}}\omega\left(R+r\right)\left(1-\frac{\omega R}{v}\right)\cdot 2\pi\left(R+r\right)=nh,$$

где, полагая в соответствии с классической механикой β^2 пренебрежимо малой величиной по сравнению с единицей, получаем

$$2\pi m_0\frac{M_0}{M_0+m_0}\omega\left(R+r\right)^2=nh.$$

Это именно формула Бора, которая выведена из теоремы, сформулированной выше, и которая здесь еще может рассматриваться как условие резонанса электронной волны, записанное в системе, связанной с ядром атома.

III. Две фазовые волны ядра и электрона

В предшествующем изложении введение осей, связанных с ядром, позволило в некотором роде устранить движение ядра и рассматривать движение электрона в постоянном электростатическом поле; мы, таким образом, вернулись к проблеме, изложенной в главе II.

Но если мы перейдем к другим осям, связанным, например, с центром тяжести, ядро и электрон опишут замкнутые траектории, и идеи, которыми мы руководствовались до этого, должны с необходимостью привести нас к рассмотрению двух фазовых волн: волны электрона и волны ядра. Нам следует изучить, как должны выражаться условия резонанса этих двух волн и почему они являются совместными.

Рассмотрим сначала фазовую волну электрона. В системе, связанной с ядром, условие резонанса для этой волны записывается следующим образом:

$$\oint\left(p_1dy^1+p_2dy^2\right)=2\pi\frac{m_0M_0}{M_0+m_0}\omega\left(R+r\right)^2=nh,$$

где контурный интеграл берется, *при* $t=\mathrm{const}$, по кругу с центром в точке N, имеющему радиус $R+r$, который является и радиусом относительной траектории движущегося тела, и радиусом фронта его волны (рис. 5).

Если мы перейдем к осям, связанным с точкой G, относительная траектория становится окружностью радиуса r с центром в G. Луч фазовой волны, проходящий через E, *в каждый момент* является окружностью радиуса $R+r$ с центром N, но окружностью подвижной, так как ее центр равномерно вращается вокруг начала координат. Условие резонанса волны электрона в данный момент не изменяется. Оно всегда записывается в виде

$$2\pi\frac{m_0M_0}{M_0+m_0}\omega\left(R+r\right)^2=nh.$$

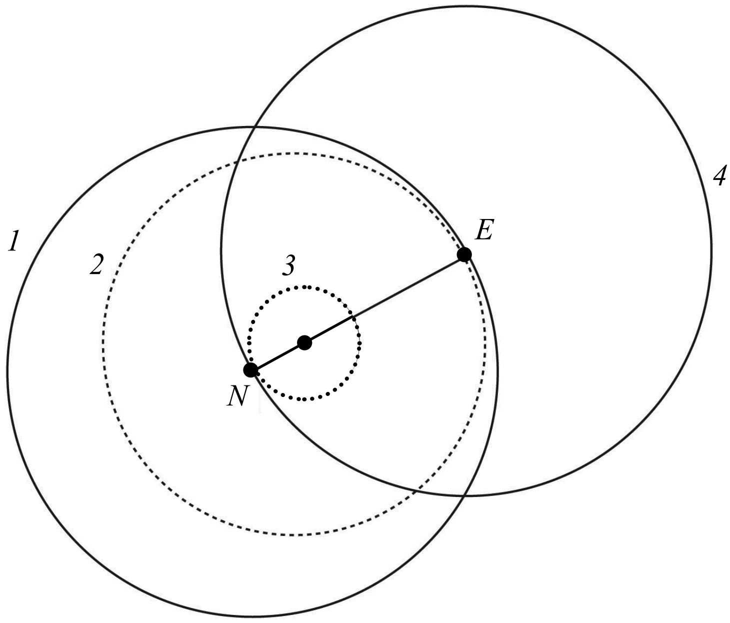

Рис. 5. Обозначения: *1* – область электронной волны в момент времени t, *2* – траектория электрона, *3* – траектория ядра, *4* – область волны ядра в момент времени t

Перейдем теперь к волне ядра. В предыдущем изложении ядро и электрон играют совершенно симметричную роль, и мы получим условие резонанса, меняя местами M_0 и m_0, R и r. Таким образом, возвращаемся к прежней формуле.

В итоге приходим к выводу, что условие Бора может интерпретироваться как выражение резонанса каждой из рассматриваемых волн. Условия стабильности для движений ядра и электрона, рассматриваемые изолированно, являются совместными, так как они тождественны.

Поучительно изобразить в системе осей, связанной с центром тяжести в момент t, две фазовые волны (сплошные линии) и траектории, описываемые двумя движущимися телами с течением времени (пунктирные линии). Таким образом, приходим к представлению, как каждое тело описывает свою траекторию со скоростью, которая в каждый момент касательна к лучу фазовой волны.

Будем настаивать на последнем пункте. Лучи волны в момент t являются огибающими скорости распространения, но эти лучи не являются траекториями переноса энергии, они к ним только касательны в каждой точке. Это напоминает известные заключения в гидродинамике, где линии тока, огибающие скоростей, являются траекториями частиц жидкости только тогда, когда их форма неизменна, иначе говоря, при постоянном и непрерывном движении.

ГЛАВА V. Кванты света[7]

I. Атом света

Как было сказано во введении, развитие физики излучений происходит в направлении возвращения, по крайней мере частичного, к корпускулярной теории света. Попытка, сделанная нами для построения атомной теории излучения черного тела, была опубликована в «Journal de Physique» в ноябре 1922 г. в статье «Кванты света и излучение черного тела». Основные результаты этой статьи будут приведены в главе VII, где мы подтвердим идею реального существования атомов света. Идеи, изложенные в главе I и приведшие к выводу условий стабильности атома Бора в главе III, что подтверждает их справедливость, заставляют нас сделать небольшой шаг к объединению концепций Ньютона и Френеля.

Не скрывая трудностей, вызываемых такой смелой попыткой, мы попробуем уточнить, как можно сегодня представить себе атом света. Мы представляем его следующим образом: для наблюдателя, связанного с ним, он кажется малой областью пространства, вокруг которого энергия очень сильно сконденсирована и образует неделимый ансамбль. Этому скоплению полной энергии ε_0 (измеряемой связанным с ней наблюдателем) надо, согласно принципу инертности энергии, приписать собственную массу

$$m_0 = \frac{\varepsilon_0}{c^2}.$$

Это определение полностью аналогично определению, которое можно дать электрону. Однако имеется существенное различие в структуре электрона и атома света. В то время как электрон до сегодняшнего дня должен рассматриваться как образование, обладающее сферической симметрией, атом света должен обладать осью симметрии соответствующей поляризации. Таким образом, мы представляем себе квант света обладающим той же симметрией, что и диполь в электромагнитной теории. Это представление является только предварительным, и структуру светового кванта можно будет уточнить достаточно надежно только после того, как будет осуществлен более глубокий пересмотр теории электромагнетизма, а эта работа еще не выполнена.

В подтверждение наших главных идей предположим, что в структуре самого кванта света присутствует периодический процесс, собственная частота ν_0 которого определяется уравнением

$$\nu_0 = \frac{1}{h} m_0 c^2.$$

Фазовая волна, соответствующая движению кванта со скоростью βc, будет иметь частоту

$$\nu = \frac{1}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

[7] См.: *Einstein A.* Ann. der Phys. 1903. **17.** P. 132; Phys. Zeitschr., 1909. **10.** P. 185.

и все указывает на то, что эта волна идентична волне, рассматриваемой в волновых теориях или, более точно, что распределение волн в пространстве, понимаемое в классическом смысле, является некоторым средним по времени от реального распределения фазовых волн, сопровождающих атомы света.

Это экспериментальный факт, что световая энергия распространяется со скоростью, не отличающейся от предельного значения c. Считая, что c является той скоростью, которая недостижима как скорость переноса энергии в силу известного закона изменения массы со скоростью, мы, естественно, приходим к предположению, что излучение состоит из атомов света, которые движутся со скоростями, очень близкими к c, но немного меньшими.

Если тело имеет собственную массу, необычайно малую, чтобы ему можно было сообщить значительную кинетическую энергию, необходимо придать ему скорость, очень близкую к c; это следует из выражения кинетической энергии:

$$E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Кроме того, скоростям, заключенным в очень малом интервале ($c - \varepsilon$, c), соответствуют энергии, принимающие значения от 0 до $+\infty$. Таким образом, полагая массу m_0 чрезвычайно малой (что мы уточним позже), мы предполагаем, что все атомы света, обладающие значительной энергией, имеют скорость, близкую к скорости света и, несмотря на почти равные скорости, имеют очень различные энергии.

Так как мы приводим в соответствие фазовой волне классическую световую волну, частота ν излучения определится выражением

$$\nu = \frac{1}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Заметим, что когда речь идет об атомах света, всегда надо помнить об исключительной малости $m_0 c^2$ относительно $m_0 c^2 \big/ \sqrt{1-\beta^2}$; кинетическая энергия здесь может быть записана просто как

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Световая волна частоты ν соответствовала бы перемещению светового атома со скоростью $v = \beta c$, связанной с ν уравнением

$$v = \beta c = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}}.$$

Исключая случаи очень медленных колебаний, для которых отношение $m_0 c^2 \big/ h\nu$, и *тем более* квадрат этого отношения, очень мало, можно записать

$$v = c \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2} \right).$$

Мы можем попытаться зафиксировать верхний предел значения m_0. Действительно, эксперименты по изучению явлений беспроволочной телеграфии показали, что излучения с длиной волны в несколько километров распространяются со скоростью, очень близкой к скорости c. Допустим, что волны, для которых $1/\nu = 10^{-4}$ с, имеют скорость, на одну сотую отличающуюся от скорости c. Тогда верхний предел m_0 будет

$$\left(m_0\right)_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{h\nu}{c^2},$$

т.е. приблизительно 10^{-44} г. Вероятно, что величина m_0 может быть еще более малой; можно надеяться, что, измеряя в пустоте скорость волн очень низких частот, мы найдем их скорости значительно меньшими скорости c.

Не надо забывать, что скорость распространения, о которой идет речь, является не скоростью фазовой волны, всегда большей c, а скоростью распространения энергии, определяемой только экспериментально[8].

II. Движение атома света

Атомы света, для которых $\beta = 1$ (величина β бесконечно близка к единице), должны бы сопровождаться фазовой волной, скорость которой c/β также должна быть очень близка к c. Мы думаем, что это совпадение могло бы установить, в частности, тесную связь между световым атомом и фазовой волной, отражающуюся в двух точках зрения на природу излучений: корпускулярной и волновой. Тождественность принципов Ферма и наименьшего действия объяснила бы, почему прямолинейное распространение света совместимо с обеими точками зрения.

Траектория световой частицы была бы одним из лучей ее фазовой волны. Как мы увидим далее, есть причины думать, что несколько частиц могли бы иметь одну и ту же фазовую волну, в то время как их траектории были бы различными лучами этой волны. Старая идея о том, что луч является траекторией энергии, оказалась бы подтвержденной и уточненной.

Однако прямолинейное распространение не является абсолютно общим фактом; световая волна, падающая на край экрана, преломляется и проникает в геометрическую тень; лучи, которые проходят на расстояниях от экрана малых по сравнению с длиной волны, отклоняются и более не подчиняются закону Ферма. С волновой точки зрения отклонение лучей объясняется нарушением равновесия, вносимым действиями различных очень близких зон волны в присутствии экрана. Находясь на противоположной точке зрения, Ньютон объяснял это отклонение действием на частицу си-

[8] В приложении изложено все, что касается возражений, связанных с идеями, содержащимися в этом параграфе.

лы со стороны экрана. Кажется, мы можем прийти к синтетической точке зрения: луч волны искривляется, как это предполагает волновая теория, и движущаяся частица, для которой закон инерции больше не соблюдается, испытывает то же отклонение, что и луч, движение которого с ним согласуется. Можно было сказать, что край экрана действует на луч с некоторой силой, если рассматривать искривление траектории как критерий существования силы.

В предыдущем рассмотрении мы руководствовались идеей, что частица и ее фазовая волна не являются различными физическими реальностями. При некотором размышлении можно прийти к следующему заключению: «Наша динамика (включая ее эйнштейновскую форму) отстает в области оптики, она все еще находится на уровне геометрической оптики». Если нам сегодня кажется вероятным, что всякая волна несет сгустки энергии, то, напротив, динамика материальной точки несомненно маскирует распространение волн, и в действительности принцип наименьшего действия выражает согласованность фаз.

Было бы интересным поискать интерпретацию дифракции в пространстве-времени, но здесь встречаются трудности, отмеченные в главе II по поводу переменного движения, и мы не смогли уточнить вопрос удовлетворительным образом.

III. Некоторые совпадающие элементы противоположных теорий излучения

Покажем на нескольких примерах, с какой легкостью корпускулярная теория объясняет некоторые известные результаты волновых теорий.

а) Эффект Доплера при движении источника.

Рассмотрим источник света, движущийся со скоростью $v = \beta c$ в направлении неподвижного наблюдателя. Предполагается, что источник излучает атомы света с частотой фазовой волны ν и скоростью $c(1-\varepsilon)$, где $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}$.

Для неподвижного наблюдателя эти величины имеют значения ν' и $c(1-\varepsilon')$. Теорема сложения скоростей дает

$$c(1-\varepsilon') = \frac{c(1-\varepsilon)+v}{1+c(1-\varepsilon)v/c^2},$$

где

$$1-\varepsilon' = \frac{1-\varepsilon+\beta}{1+(1-\varepsilon)\beta},$$

пренебрегая $\varepsilon\,\varepsilon'$:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\nu'^2}{\nu^2} = \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad \frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

и, если β – малая величина, получаем формулы старой геометрической оптики:

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1+\beta \quad \frac{T'}{T} = 1-\beta = 1-\frac{v}{c}.$$

Так же легко найти отношение интенсивностей излучения для двух наблюдателей. В течение единицы времени движущийся наблюдатель видит источник излучившим n световых атомов на единицу поверхности. Плотность энергии пучка, измеренная этим наблюдателем, равна $nh\nu/c$, а интенсивность $I = nh\nu$. Для неподвижного наблюдателя n атомов излучаются за время, равное $1\big/\sqrt{1-\beta^2}$, и они заполняют объем $c(1-\beta)\big/\sqrt{1-\beta^2} = c\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$. Плотность энергии пучка воспринимается как

$$\frac{nh}{c}\nu'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

а интенсивность

$$I' = nh\nu'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = nh\nu'\cdot\frac{\nu'}{\nu}.$$

Отсюда следует

$$\frac{I'}{I} = \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2.$$

Эти формулы доказаны с волновой точки зрения в книге Лауэ «Die Relativitätstheorie» (3 ed., t. 1, p. 119).

б) Отражение от движущегося зеркала.

Рассмотрим отражение световых корпускул, падающих перпендикулярно на плоское, полностью отражающее зеркало, которое перемещается со скоростью βc в направлении, перпендикулярном своей поверхности.

Пусть для неподвижного наблюдателя ν_1' – частота фазовых волн, сопровождающих падающие частицы, и $c(1-\varepsilon_1')$ – их скорость. Те же самые величины, связанные с наблюдателем, движущимся с зеркалом, будут ν_1 и $c(1-\varepsilon_1)$.

Для отраженных корпускул соответствующие величины обозначим как ν_2, $c(1-\varepsilon_2)$ и ν_2', $c(1-\varepsilon_2')$.

В результате сложения скоростей получаем

$$c(1-\varepsilon_1) = \frac{c(1-\varepsilon_1')+\beta c}{1+\beta(1-\varepsilon_1')}, \quad c(1-\varepsilon_2) = \frac{c(1-\varepsilon_2')-\beta c}{1-\beta(1-\varepsilon_2')}.$$

Для наблюдателя, связанного с зеркалом, имеет место отражение без изменения частоты, так как энергия сохраняется. Отсюда

$$\nu_1 = \nu_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \frac{1 - \varepsilon_1' + \beta}{1 + \beta\left(1 - \varepsilon_1'\right)} = \frac{1 - \varepsilon_2' - \beta}{1 - \beta\left(1 - \varepsilon_2'\right)}.$$

Пренебрегая $\varepsilon_1'\varepsilon_2'$, получаем

$$\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_2'} = \left(\frac{\nu_2'}{\nu_1'}\right)^2 = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2, \quad \text{где } \frac{\nu_2'}{\nu_1'} = \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Если β мало, приходим к классической формуле

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - 2\frac{v}{c}.$$

Так же нетрудно исследовать задачу при наклонном падении корпускул на зеркало.

Обозначим через n число частиц, отраженных зеркалом в течение заданного времени. Отношение полной энергии n корпускул после отражения E_2' к их полной энергии до отражения равно

$$\frac{nh\nu_2'}{nh\nu_1'} = \frac{\nu_2'}{\nu_1'}.$$

Электромагнитная теория приводит к тому же выражению, но здесь оно очевидно.

Если n корпускул занимают до отражения объем V_1, то после отражения их объем будет $V_2 = V_1\dfrac{1-\beta}{1+\beta}$, как это показывает простое геометрическое рассмотрение. Интенсивности I_1' и I_2' до и после отражения находятся в следующем отношении:

$$\frac{I_2'}{I_1'} = \frac{nh\nu_2'}{nh\nu_1'} \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta} = \left(\frac{\nu_2'}{\nu_1'}\right)^2.$$

Все эти результаты с волновой точки зрения доказаны в работе Лауэ (с. 124).

c) Давление излучения черного тела.

Пусть имеется полость, заполненная излучением абсолютно черного тела при температуре T. Каково будет давление, производимое на стенки этой полости? Для нас излучение черного тела представляется газом световых атомов, распределение скоростей которых изотропно. Пусть u – полная энергия (или, как в нашем случае, полная кинетическая энергия) световых атомов, содержащихся в единице объема. Пусть ds – элемент поверхности стенки, dv – элемент объема, r – расстояние, θ – угол между прямой, соединяющей атомы, и нормалью к элементу поверхности.

Телесный угол, под каким элемент ds виден из точки O, центра dv, равен

$$d\Omega = \frac{ds\cos\theta}{r^2}.$$

Рассмотрим только те из атомов объема dv, энергия которых заключена между w и $w+dw$, в количестве $n_w dwdv$; число атомов, скорость которых направлена к ds , в силу изотропности равно

$$\frac{d\Omega}{4\pi}\times n_w dwdv = n_w dw\frac{ds\cos\theta}{4\pi r^2}dv.$$

Выбрав систему сферических координат с нормалью к ds как полярной осью, находим:

$$dv = r^2\sin\theta d\theta d\psi dr.$$

Более того, так как кинетическая энергия светового атома равна $m_0 c^2\big/\sqrt{1-\beta^2}$, а его количество движения $G = m_0 v\big/\sqrt{1-\beta^2}$, с предельным равенством $v = c$, имеем $W/c = G$.

Таким образом, отражение под углом θ атома с энергией W сообщает площадке ds импульс $2G\cos\theta = 2\frac{W}{c}\cos\theta$.

Атомы объема dv, имеющие эту энергию, сообщат ей при отражении импульс, равный

$$2\frac{W}{c}\cos\theta\cdot n_w dw\cdot r^2\sin\theta d\theta d\psi dr\frac{ds\cdot\cos\theta}{4\pi r^2}.$$

Проинтегрируем по w от 0 до ∞, заметив, что $\int_0^\infty w n_w dw = u$, при углах ψ и θ, изменяющихся соответственно от 0 до 2π и от 0 до π/2, и, наконец, для r, изменяющегося от 0 до c([9]). Итак, мы получаем полный импульс, испытываемый в одну секунду элементом ds, разделив который на ds, находим давление излучения:

$$p = u\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta = \frac{u}{3}.$$

Давление излучения, по классической теории излучения, равно трети энергии, содержащейся в единице объема.

Легкость, с которой мы нашли в этом параграфе некоторые результаты, тождественные получаемым с помощью волновых теорий излучения, приоткрывает нам существование между двумя точками зрения, кажущимися противоречащими друг другу, скрытой гармонии, природу которой позволяет нам вскрыть представление о фазовой волне.

[9] Так как расстояние, пройденное фотоном за одну секунду, по величине равно c. – *Прим. ред.*

IV. Волновая оптика и кванты света[10]

Камнем преткновения теории квантов света является объяснение явлений волновой оптики. Основная причина этого заключается в необходимости введения понятия фазы периодических процессов. Может показаться, что мы сделали очень большой шаг в решении вопроса, достигнув установления тесной связи между движением корпускулы света и распространением некоторой волны. Действительно, очень вероятно, что если теория квантов света однажды сможет объяснить явления волновой оптики, то она достигнет этого с помощью подобных концепций. К сожалению, пока еще невозможно прийти к удовлетворительным результатам в этом конгломерате идей, и только будущее покажет нам, сможет ли смелая концепция Эйнштейна, утонченная и законченная, уложить в свои рамки многочисленные явления, изучение которых с восхитительной точностью привело физиков XIX в. к рассмотрению волновой гипотезы как окончательной.

Мы попробуем обойти эту трудную проблему, не пытаясь атаковать ее в лоб. Чтобы продвигаться дальше по пути, которым мы следовали до сих пор, надо бы установить, как мы уже об этом говорили, некоторую, по своей природе, несомненно, статистическую связь между волной, представляемой подобно классической, и суперпозицией фазовых волн. Это, разумеется, привело бы к наделению фазовой волны и, как следствие, периодического процесса, определенного в главе I, электромагнитными свойствами.

Можно считать почти наверняка доказанным, что испускание и поглощение излучения имеют дискретный характер. Электромагнетизм, или, точнее, теория электронов, дает неточное описание механизма этих явлений. Однако Бор, опираясь на свой принцип соответствия, убедил нас в том, что если рассматривать предсказания этой теории для излучения, испущенного системой электронов, то они обладают, несомненно, своего рода всеохватывающей точностью. Может быть, что вся электромагнитная теория имеет только статистическое толкование. Законы Максвелла представлялись бы как непрерывное приближение дискретной реальности, это слегка похоже (но только слегка) на то, как законы гидродинамики выступают в качестве непрерывного приближения для очень сложных и очень быстро меняющихся движений молекул жидкости. Эта идея соответствия, кажущаяся пока еще достаточно неопределенной и податливой, должна служить руководством для смелых исследователей, которые захотят создать новую электромагнитную теорию, находящуюся в большем согласии, чем нынешняя теория, с квантовыми явлениями.

В следующем параграфе мы воспроизведем соображения, которые мы высказали об интерференции. Откровенно говоря, их надо рассматривать скорее как смутные предположения, чем как истинные объяснения.

---

[10] См. на эту тему: *Bateman H.* On the theory of light quanta. – Phil. Mag. 1923. **46.** P. 977, где можно найти исторический обзор и библиографию.

V. Интерференция и когерентность

Прежде всего зададимся вопросом, как мы констатируем присутствие света в точке пространства. Там можно расположить тело, воздействуя на которое излучение вызывает фотоэлектрический эффект, а также производит химическое, тепловое и другие действия. Вполне возможно, что в конце концов все эти явления будут фотоэлектрическими. Можно также наблюдать рассеяние волн, производимое материей в рассматриваемой точке пространства. Таким образом, мы можем сказать, что там, где излучение не может воздействовать на материю, оно не обнаруживается экспериментально. Электромагнитная теория допускает, что фотографические действия (эксперименты Винера) и рассеяние связаны с интенсивностью результирующего электрического поля: там, где электрическое поле равно нулю, но имеется магнитная энергия, указанные выше эффекты не проявляются.

Идеи, развитые здесь, ведут к уподоблению фазовых волн электромагнитным волнам, что же касается распределения фаз в пространстве, то вопрос интенсивностей должен быть отложен. Эта идея вместе с принципом соответствия позволяет нам заключить, что локальная вероятность процессов взаимодействия света с веществом связана с суперпозицией (или, скорее, с ее средним значением) векторов, характеризующих фазовую волну. Там, где этот результат суперпозиции нулевой, свет не наблюдается; т.е. имеет место интерференция. Однако полагают, что световой атом, пересекающий область интерференции фазовых волн, может быть поглощен атомами материи в одних точках и не может быть поглощен в других. Имеется также пока еще очень качественный принцип объяснения интерференции, совместимый с дискретностью излучаемой энергии. Норман Кемпбелл в своей книге «Modern electrical theory» (1913), кажется, смутно предвидел решения такого вида, когда писал: «В рамках корпускулярной теории можно объяснить, как энергия излучения переносится из одного места в другое, в то время как в рамках волновой теории можно объяснить, почему перенос вдоль одной траектории зависит от переноса по другой. Похоже, что сама энергия переносится корпускулами, в то время как способность к ее поглощению и обнаружению в эксперименте передается сферическими волнами».

Для того чтобы интерференционная картина была четкой, необходимо, чтобы существовала некоторая зависимость между излучениями различных атомов в одном источнике. Мы предложили выразить эту зависимость следующим постулатом: «Фазовая волна, связанная с движением атома света, может, проходя мимо возбужденных атомов материи, вызвать испускание (эмиссию) других атомов света, фаза которых будет согласована с фазой волны». Одна волна могла бы, таким образом, переносить многочисленные сгустки энергии, которые, кроме того, легко скользили бы вдоль ее поверхности, оставаясь всегда в фазе с ней. Если бы число переносимых атомов было чрезвычайно велико, то структура волны приближалась бы к классической волне как предельной.

VI. Закон частоты Бора. Заключения

Какой бы точки зрения ни придерживаться, детали внутренних преобразований, происходящих в атоме при поглощении или испускании излучения, пока еще едва ли можно представить. Принимая гранулярную гипотезу, мы не знаем, сливается ли поглощенный квант с атомом или же существует внутри его в состоянии самостоятельного образования, и тем более не знаем, является ли излучение света процессом выбрасывания кванта, до этого существовавшего в атоме, или же представляет собой процесс создания нового образования за счет внутренней энергии атома. Как бы то ни было, кажется достоверным, что испускание касается только одного кванта. Поэтому полная энергия корпускулы, равная произведению h на частоту фазовой волны, которая ее сопровождает, должна для обеспечения сохранения энергии быть равной уменьшению полной энергии атома, и это приводит к закону частот Бора:

$$h\nu = W_1 - W_2 \, .$$

Таким образом, видим, что наши концепции, приводя нас к простому объяснению условий стабильности, позволяют также получить закон частот *при условии допущения, что всякий раз эмиссия относится только к одной частице.*

Отметим, что представление эмиссии, даваемое теорией квантов света, кажется, подтверждено заключениями Эйнштейна и Леона Бриллюэна[11], которые показали, что при анализе процессов взаимодействия между излучением черного тела и свободной частицей необходимо привлечь идею о вынужденном излучении.

Какое заключение мы должны сделать в конце главы? Конечно, такое явление, как дисперсия, которая, казалось бы, несовместима с понятием квантов света в его упрощенной форме, представляется нам теперь менее невозможным, и примириться с этим можно благодаря введению фазы. Недавняя теория рассеяния лучей X и γ, данная А.Х. Комптоном, которую мы изложим позже, кажется опирающейся на серьезные экспериментальные доказательства и делает осязаемым существование световых корпускул в области, где справедливы волновые представления. Однако бесспорно, что концепция зерен световой энергии пока еще никоим образом не позволяет разрешить проблемы волновой оптики и сталкивается в этом с очень серьезными трудностями; было бы преждевременным, как нам кажется, высказаться по этому вопросу: сможет ли она их преодолеть или нет.

---

[11] *Einstein A.* Phys. Zeitschr. 1917. **18.** P. 121; *Brillouin L.* J. de Physique. Sér. VI. 1921. **2.** P. 142.

ГЛАВА VI. Рассеяние *X*- и ϒ-лучей

I. Теория Дж. Дж. Томсона[12]

В этой главе мы хотим изучить рассеяние X- и γ-лучей и проиллюстрировать на этом особенно ярком примере современную согласованность электромагнитной теории света и квантовой теории света.

Начнем с определения самого явления рассеяния. Когда пучок света направляется на мишень, то в общем случае часть содержащейся в нем энергии рассеивается по всем направлениям. Говорят, что происходит рассеяние и ослабление из-за рассеяния пучка во время его прохождения через вещество.

Электронная теория очень просто объясняет это явление. Она предполагает (то, что, кажется, находится в прямом противоречии с атомной моделью Бора), что электроны, содержащиеся в атоме, подвергаются действию квазиупругих сил и обладают хорошо определенным периодом колебаний. Поэтому прохождение электромагнитной волны по этим электронам сообщит им колебательное движение, амплитуда которого зависит, в общем, одновременно от частоты падающей волны и собственной резонансной частоты электронов. Согласно теории волн в случае движения электрона с ускорением, скорость его будет уменьшаться из-за излучения волны с цилиндрической симметрией. Установится режим равновесия, при котором резонатор черпает из падающего излучения энергию, необходимую для компенсации этого затухания. Конечным результатом будет излучение части падающей энергии по всем направлениям пространства.

Для вычисления масштаба явления рассеяния надо вначале определить движение колеблющегося электрона. Для этого следует выразить равновесие между равнодействующей силы инерции и квазиупругой силы, с одной стороны, и электрической силой, с которой действует падающее на электрон излучение, – с другой. В области видимого света изучение численных данных показывает, что можно пренебречь членом силы инерции по сравнению с членом квазиупругой силы и приписать амплитуде колебательного движения значение, пропорциональное амплитуде возбуждающего света, но независимое от его частоты. Согласно теории излучения диполя, полное вторичное излучение обратно пропорционально четвертой степени длины волны. Таким образом, рассеяние тем больше, чем выше частота излучения. На эти заключения лорд Рэлей опирался при построении своей красивой теории голубого цвета неба[13].

---

[12] *Passage de l'électricité à travers les gaz.* Traduction française Fric et Faure. Gauthier-Villars. 1912. P. 321.

[13] Лорд Рэлей построил эту теорию, исходя из концепции упругости света, но эта концепция полностью согласуется с электромагнитной.

В области очень высоких частот (X- и γ-лучи), напротив, членом квазиупругой силы можно пренебречь по сравнению с членом силы инерции. Все происходит так, как если бы электрон был свободен и амплитуда его колебательного движения была пропорциональна не только амплитуде падающего излучения, но и второй степени длины волны. Дж. Дж. Томсон первым привлек внимание к этому факту и построил первую теорию рассеяния X- и γ-лучей. Два главных заключения этой теории были следующими:

1. Если обозначить через θ угол между продолжением направления падающего излучения и направлением рассеянного, то энергия рассеянного излучения меняется в зависимости от θ как $\frac{1+\cos^2\theta}{2}$.

2. Полная энергия, рассеянная электроном в одну секунду, связана с интенсивностью падающего излучения соотношением

$$\frac{I_\alpha}{I} = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m_0^2 c^4},$$

где e и m_0 – константы электрона, c – скорость света.

Конечно, атом содержит несколько электронов. Сегодня имеются причины думать, что их число p равно атомному номеру элемента. Томсон предположил, что волны, испускаемые p электронами одного и того же атома, «некогерентны», и поэтому рассматривал энергию, рассеиваемую одним атомом, как равную p-кратному значению энергии, рассеиваемой одним электроном. С экспериментальной точки зрения, рассеяние проявляется в постепенном ослаблении светового пучка по экспоненциальному закону:

$$I_x = I_0 \mathrm{e}^{-sx},$$

где s – коэффициент ослабления в результате рассеяния или, короче, коэффициент рассеяния.

Отношение s/ρ этого коэффициента к плотности рассеивающего тела называется массовым коэффициентом диффузии. Если назвать атомным коэффициентом рассеяния σ отношение рассеянной энергии в одном атоме к интенсивности падающего излучения, нетрудно заметить, что он связан с s уравнением

$$\sigma = \frac{s}{\rho} A m_H,$$

где A – атомный вес рассеивателя, m_H – масса атома водорода. Подставляя численные значения в множителе $\frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m_0^2 c^4}$, находим

$$\sigma = 0{,}54 \cdot 10^{-24} p.$$

Эксперимент показал, что отношение s/ρ очень близко к 0,2 и, таким образом, имеем

$$\frac{A}{p} = \frac{0{,}54 \cdot 10^{-24}}{0{,}2 \cdot 1{,}46 \cdot 10^{-24}} = \frac{0{,}54}{0{,}29}.$$

Это число близко к 2, что полностью согласуется с нашей нынешней концепцией о соотношении между числом внутриатомных электронов и атомным весом. Таким образом, теория Томсона приводит к интересным совпадениям, и работы различных экспериментаторов, в частности Баркла, уже давно показали, что они подтверждаются в широком диапазоне измерений[14].

II. Теория Дебая[15]

Однако трудности продолжали существовать. В частности, В.Х. Брэгг обнаружил, что в некоторых случаях происходит более сильное рассеяние, чем описанное предыдущей теорией, и он заключил, что рассеянная энергия пропорциональна не числу атомных электронов, а квадрату этого числа. Дебай представил теорию, более совместимую одновременно с результатами и Брэгга, и Баркла.

Дебай рассматривает внутриатомные электроны как равномерно распределенные в объеме, размеры которого порядка 10^{-8} см. Для облегчения вычислений он представил их размещенными на одном круге. Если длина волны велика по сравнению со средними расстояниями между электронами, движения последних должны быть почти в фазе и во всей волне, амплитуды волн, излученных каждым электроном, будут складываться. Рассеянная энергия в этом случае будет пропорциональна p^2, а не p и, таким образом, коэффициент σ запишется в виде

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m_0^2 c^4}p^2.$$

Что касается распределения в пространстве, то оно будет тождественно тому, которое предусматривал Томсон.

Для волн, длина волны которых постепенно уменьшается, распределение в пространстве станет асимметричным, энергия, рассеянная в направлении, откуда приходит излучение, более слаба, чем в противоположном направлении. И вот причина этого: можно рассматривать колебания электронов как находящиеся в фазе, когда длина волны становится сравнимой с расстояниями между электронами. Амплитуды волн, излученных в различных направлениях, не будут больше складываться из-за сдвига по фазе, и рассеянная энергия будет меньшей. Однако в конусе рассеяния небольшого раствора, окружающем продолжение направления падения, колебания будут в фазе и их амплитуды будут скалываться таким образом, что в направлениях, содержащихся в конусе рассеяния, они будут большими, чем в других направлениях. К тому же Дебай

[14] Старые работы по распространению X-лучей можно найти в книге*: Ledoux-Lebard R.* et *Dau-Villier A*. La physique des Rayons X. Gauthier-Villars, 1921. P. 137.
[15] Ann. der Phys. 1915. **46.** P. 809.

предвидел такой интересный феномен: при постепенном удалении от оси конуса, определенного выше, интенсивность уменьшается не регулярно, а вначале испытывает периодические изменения. При этом можно наблюдать на экране, помещенном перпендикулярно падающему пучку, светлые и темные кольца с центрами на направлении пучка. Хотя Дебай вначале полагал обнаружить этот эффект в некоторых экспериментальных результатах Фридриха, похоже, что он до сих пор не был четко подтвержден.

Для коротких длин волн эти явления должны упроститься. Конус сильного рассеяния все больше суживается, распределение снова становится симметричным и должно теперь удовлетворять формулам Томсона, так как фазы различных электронов становятся совсем некогерентными и теперь складываются энергии, а не амплитуды.

Большой интерес к теории Дебая вызван тем, что она объясняет сильное рассеяние мягких X-лучей и показывает, как при увеличении частоты должен произойти переход от этого явления к явлению Томсона. Здесь важно отметить, что, согласно идеям Дебая, при возрастании частоты увеличивается симметричность рассеянного излучения и значение 0,2 для коэффициента s/ρ должно хорошо подтверждаться. Однако, как мы увидим в следующем параграфе, этого не происходит.

III. Последние теории Дебая и Комптона[16]

Эксперименты в области жестких X-лучей и γ-лучей обнаружили факты, сильно отличающиеся от того, что описанные выше теории могли предвидеть. Прежде всего, с возрастанием частоты увеличивается асимметричность рассеянного излучения. С другой стороны, полная энергия рассеяния уменьшается, значение массового коэффициента s/ρ имеет тенденцию к быстрому уменьшению, когда длина волны падает ниже 0,3 или 0,2 Å, и становится очень малой для γ-лучей. Таким образом, там, где теория Томсона должна бы работать все лучше и лучше, она все менее и менее применима.

Два других явления были обнаружены в недавних экспериментальных исследованиях, и в первую очередь в опытах А.Х. Комптона. Они действительно показали, что рассеяние сопровождается уменьшением частоты, которая, кроме того, изменяется с направлением наблюдения и, с другой стороны, вызывает ускорение электронов. Почти одновременно и независимо друг от друга П. Дебай и А.Х. Комптон смогли дать этим отклонениям от классических законов интерпретацию, основанную на понятии кванта света.

И вот как формулируется их принцип: если квант света отклоняется от своего прямолинейного распространения, проходя вблизи электрона, мы должны предположить, что в течение времени, когда два центра энергии находятся ря-

[16] *Debye P.* Phys. Zeitschr. 1923. **24.** P. 161-166; *Compton A.H.* Phys. Rev. 1923. **21.** P. 207, 483; Phil. Mag. 1923. **46.** P. 897.

дом, они производят друг на друга некоторое действие. В течение этого взаимодействия электрон, прежде находившийся в покое, получает от световой корпускулы некоторую энергию. Согласно квантовому уравнению, рассеянная частота будет меньше частоты падающей. Закон сохранения количества движения помогает решить эту проблему. Предположим, что рассеянный квант перемещается в направлении, составляющем угол θ с продолжением направления падающего излучения. Обозначив частоты до рассеяния и после рассеяния через ν_0 и ν_θ, а собственную массу электрона через m_0, получим

$$h\nu_\theta = h\nu_0 - m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

$$\left(\frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_\theta}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu_0}{c}\cdot\frac{h\nu_\theta}{c}\cos\theta.$$

Это второе уравнение проиллюстрировано на рис. 6.

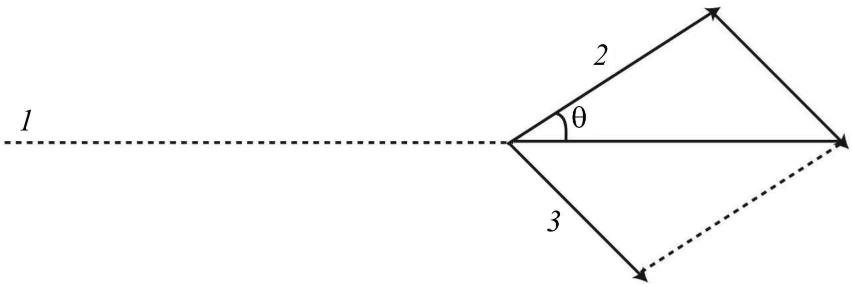

Рис. 6. Обозначения: *1* – направление падения; *2* – направление рассеяния $h\nu_\theta/c$; *3* – направление импульса отдачи $m_0\beta c\big/\sqrt{1-\beta^2}$

Скорость $v = \beta c$ – это та скорость, которую получает электрон в данном процессе.

Обозначим через α отношение $\dfrac{h\nu_0}{m_0 c^2}$, равное частному от деления ν_0, на то, что мы называем собственной частотой электрона.

Получаем

$$\nu_\theta = \frac{\nu_0}{1 + 2\alpha\sin^2\dfrac{\theta}{2}},$$

где

$$\lambda_\theta = \lambda_0 + 2\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Можно также с помощью этих формул исследовать скорость и направление вылета электрона «отдачи». Находим, что в направлениях рассеяния, меняющихся от 0 до π, соответствующих электрону, углы отклонения меняются от $\pi/2$ до 0, скорость одновременно меняется от нуля до некоторого максимального значения.

Комптон, обращаясь к гипотезам, навеянным принципом соответствия, полагал, что возможно вычислить значения всей рассеянной энергии и объяснить, таким образом, быстрое уменьшение коэффициента s/ρ. Дебай применил идею соответствия в немного измененной форме, но также пришел к объяснению того же явления.

В статье, опубликованной в «Physical Review» в мае 1923, и в более свежей статье в «Philosophical Magazine» (ноябрь 1923), А.Х. Комптон показал, что новые, изложенные выше, идеи объясняют многие экспериментальные результаты и что, в частности для жестких лучей и легких частиц, предсказанное изменение длины волны качественно проверяется. Для более тяжелых частиц и более мягкого излучения, казалось, имеет место одновременное присутствие линии рассеяния без изменения частоты и другой линии рассеяния, подчиняющейся закону Комптона – Дебая. Для низких частот первая становится превалирующей и зачастую единственно существующей. Эксперименты Росса по рассеянию парафином линий $\mathrm{Mo}K_\alpha$ и зеленого света подтверждают этот способ рассмотрения. Линия K_α дает интенсивную линию рассеяния, подчиняющуюся закону Комптона, и слабую линию неизменной частоты, которая кажется единственно существующей для зеленого света.

Существование одной не смещенной линии, кажется, должно объяснить, почему отражение от кристаллов (феномен Лауэ) не сопровождается изменением длины волны. Джонси и Волферс недавно действительно показали, что если бы в линиях рассеяния на кристаллах, используемых обычно в качестве отражателей, наблюдался ощутимый эффект Комптона – Дебая, то точные измерения рентгеновских длин волн обнаружили бы данный эффект. В этом случае надо предположить, что рассеяние происходит без деградации кванта.

Вначале пытались объяснить существование двух видов рассеяния следующим образом: эффект Комптона имеет место всякий раз, когда рассеивающий электрон свободен или, по крайней мере, когда его энергия связи со своим атомом мала по сравнению с энергией падающего кванта. В противном случае происходило бы рассеяние без изменения длины волны, потому что тогда атом в целом участвовал бы в процессе, не получая значительной скорости из-за своей большой массы. Комптон встречает трудности в применении этой идеи и предпочитает объяснять существование не смещенной линии вкладом многих электронов в отклонение одного и того же кванта. Но тогда получилось бы завышенное значение суммы их масс, что помешало бы заметному переносу энергии излучения через вещество. Как бы то ни было, становится ясным, почему тяжелые элементы и жесткие лучи ведут себя иначе, нежели легкие элементы и мягкие лучи.

Что касается способа приведения в соответствие концепции рассеяния как отклонения световой частицы и сохранения фазы, способа, необходимого для объяснения картины Лауэ, то он вызывает значительные, пока еще не разрешенные затруднения, как мы об этом говорили в предыдущей главе по поводу волновой оптики.

Когда работают с жесткими X-лучами и легкими элементами, как это имеет место на практике в радиотерапии, явления должны быть полностью изменены вследствие эффекта Комптона, и это, кажется, происходит на самом деле. Приведем один пример. Известно, что в дополнение к ослаблению из-за рассеяния пучок X-лучей испытывает ослабление из-за поглощения при прохождении через вещество, которое сопровождается испусканием фотоэлектронов. Эмпирический закон Брэгга и Пирса показывает, что это поглощение меняется как куб длины волны и претерпевает резкие разрывы на всех характеристических частотах, отвечающих внутриатомным уровням рассматриваемого вещества; более того, для той же длины волны и различных элементов атомный коэффициент поглощения меняется как четвертая степень атомного номера.

Этот закон хорошо проверен в области средних рентгеновских частот и очень вероятно, что он применим к жестким лучам. Так как, согласно идеям, принятым до теории Комптона – Дебая, рассеяние рассматривалось как распыление излучения, только поглощенная энергия в соответствии с законом Брэгга могла бы вызвать ионизацию газа и фотоэлектрические электроны, ускоренные до громадных скоростей, ионизировали бы встречные атомы в результате столкновений с ними. Закон Брэгга-Пирса позволял вычислить отношение интенсивностей ионизации, производимой жестким излучением в двух ампулах, одна из которых содержала тяжелый газ (например, CH^3I), а другая – легкий газ (например, воздух). Но даже с учетом многочисленных дополнительных коррекций это отношение, полученное экспериментально, было много меньше, чем ожидалось. Довилье установил этот феномен для X-лучей, и его объяснение долгое время интриговало нас.

Новая теория рассеяния, кажется, хорошо объясняет эту аномалию. Действительно, если, по крайней мере для жестких лучей, часть энергии кванта света перейдет к рассеянному электрону, то будет наблюдаться не только распыление излучения, но и «поглощение при рассеянии». Ионизация газа будет вызвана одновременно и электронами, выброшенными из атома, в соответствии с механизмом поглощения как такового, и электронами, ускоренными в результате рассеяния. В тяжелом газе (CH^3I) брэгговское поглощение интенсивно, а комптоновское по сравнению с ним пренебрежимо мало. Для легкого газа (воздух) это происходит совсем не так. Первое поглощение из-за его изменения по закону N^4 очень слабо, а второе, которое не зависит от N, становится более значительным. Отношение полных поглощений и как следствие ионизаций в обоих газах должно быть много меньше, чего не предвидели раньше. Возможно даже количественным образом оценить отношение интенсивностей ионизации. На этом примере виден большой практический интерес к идеям Комптона и Дебая. Учет отдачи рассеивающих электронов, по-видимому, может дать ключ ко многим другим необъяснимым явлениям.

IV. Рассеяние движущимся электроном

Можно обобщить теорию Комптона – Дебая, рассматривая рассеяние кванта излучения движущимся электроном. Возьмем в качестве оси x направление первоначального движения кванта с начальной частотой ν_1, оси y и z выберем произвольно под прямым углом друг к другу в плоскости, перпендикулярной к ox и проходящей через точку, где происходит рассеяние. Направление скорости $\beta_1 c$ электрона до соударения определим направляющими косинусами $a_1 b_1 c_1$, обозначим через θ_1 угол, который она составляет с ox, таким образом, что $a_1 = \cos\theta_1$; после соударения рассеянный квант с частотой ν_2 распространяется в направлении, определяемом направляющими косинусами pqr, которое составляет угол φ с направлением начальной скорости электрона $\left(\cos\varphi = a_1 p + b_1 q + c_1 r\right)$ и угол θ с осью ox $\left(p = \cos\theta\right)$. Наконец, будем считать, что электрон имеет конечную скорость $\beta_2 c$, направляющие косинусы которой $a_2 b_2 c_2$.

Сохранение энергии и количества движения в течение соударения позволяет написать следующие уравнения:

$$h\nu_1 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = h\nu_2 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}},$$

$$\frac{h\nu_1}{c} + \frac{m_0 \beta_1 c}{\sqrt{1-\beta_1^2}} a_1 = \frac{h\nu_2}{c} p + \frac{m_0 \beta_2 c}{\sqrt{1-\beta_2^2}} a_2,$$

$$\frac{m_0 \beta_1 c}{\sqrt{1-\beta_1^2}} b_1 = \frac{h\nu_2}{c} q + \frac{m_0 \beta_2 c}{\sqrt{1-\beta_2^2}} b_2,$$

$$\frac{m_0 \beta_1 c}{\sqrt{1-\beta_1^2}} c_1 = \frac{h\nu_2}{c} r + \frac{m_0 \beta_2 c}{\sqrt{1-\beta_2^2}} c_2.$$

Избавимся от $a_2 b_2 c_2$ благодаря соотношению $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$; затем в полученном таким образом соотношении и в том, которое выражает сохранение энергии, избавимся от β_2. Положим, вместе с Комптоном $\alpha = \frac{h\nu_1}{m_0 c^2}$. Отсюда следует:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1 - \beta_1 \cos\theta_1}{1 - \beta_1 \cos\varphi + 2\alpha\sqrt{1-\beta_1^2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}}.$$

Если начальная скорость электрона рана нулю или пренебрежимо мала, мы получаем формулу Комптона

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1}{1 + 2\alpha \sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

В общем случае эффект Комптона, представленный членом α, остается, но значительно сниженным; более того, сюда добавляется эффект Доплера. Если эффект Комптона незначителен, находим

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1 - \beta_1 \cos\theta_1}{1 - \beta_1 \cos\varphi}.$$

Так как в этом случае рассеяние кванта не нарушает движение электрона, можно ожидать, что результат окажется тождественным результату, полученному на основе электромагнитной теории. Это действительно имеет место. Вычислим частоту рассеянного света согласно электромагнитной теории (с учетом теории относительности). Для электрона падающее излучение имеет частоту

$$\nu' = \nu_1 \frac{1 - \beta_1 \cos\theta_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}.$$

Если электрон, сохраняя скорость движения $\beta_1 c$, начнет колебаться с частотой ν', то наблюдатель, который получает рассеянное излучение в направлении, образующем имеющем угол φ со скоростью $\beta_1 c$ источника, припишет электрону частоту

$$\nu_2 = \nu' \frac{\sqrt{1 - \beta_1^2}}{1 - \beta_1 \cos\varphi},$$

откуда следует:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1 - \beta_1 \cos\theta_1}{1 - \beta_1 \cos\varphi}.$$

Эффект Комптона обычно остается достаточно слабым, напротив, эффект Доплера может достигать для электронов, ускоренных разностью потенциалов в несколько сотен киловольт, очень больших значений (частота возрастает на треть при 200 кВ).

Здесь мы имеем дело с увеличением энергии кванта, потому что рассеивающее тело, движущееся с большой скоростью, может передавать часть энергии атому излучения. Условия применения правила Стокса не реализуются. Вполне возможно, что некоторые из вышезаявленных заключений могли бы быть проверены экспериментально, по крайней мере в том, что касается *X*-лучей.

ГЛАВА VII. Статистическая механика и кванты

I. Напоминание некоторых результатов статистической термодинамики

Объяснение законов термодинамики с помощью статистических представлений – это одно из наиболее красивых достижений научной мысли, но оно не обходится без некоторых трудностей и некоторых возражений. В задачу данной работы не входит критика этих методов. Мы будем довольствоваться здесь, после напоминания в их современном наиболее применяемом виде, некоторыми фундаментальными результатами, а также исследованиями и тем, как наши новые идеи могли бы быть использованы в теории газов и теории излучения абсолютно черного тела.

Больцман первым показал, что энтропия газа в определенном состоянии является аддитивной постоянной; она равна произведению логарифма вероятности этого состояния и константы k, называемой «постоянной Больцмана», которая зависит от выбора шкалы температур; вначале к этой идее пришли, анализируя соударения между атомами, приняв гипотезу полностью беспорядочного движения атомов. Сегодня, благодаря работам Планка и Эйнштейна, уравнение $S = k\ln P$ рассматривают даже как определение энтропии S системы. В этом определении P не является математической вероятностью, равной отношению числа микроскопических конфигураций, дающих ту же полную макроскопическую конфигурацию, к полному числу возможных конфигураций. «Термодинамическая» вероятность равна просто числителю этой дроби. Этот выбор смысла P возвращает нас к фиксации некоторым образом (вообще-то произвольным) константы энтропии. Приняв этот постулат, напомним хорошо известное доказательство аналитического выражения термодинамических величин, которое имеет то преимущество, что оно справедливо как в случае дискретного, так и в случае непрерывного спектра возможных состояний.

Рассмотрим для этого $\mathfrak{R}$ «объектов», которые можно распределять произвольным образом по m «состояниям» или «ячейкам» полагаемых *a priori* равновозможными. Некоторая конфигурация системы будет реализована, если поместить n_1 объектов в ячейку *1*, n_2 объектов в ячейку *2* и т.д. Термодинамическая вероятность такой конфигурации будет

$$P = \frac{\mathfrak{R}!}{n_1!\ n_2!\dots n_n!}.$$

Если $\mathfrak{R}$ и все n_i являются большими числами, то формула Стирлинга для энтропии системы имеет вид

$$S = k\ln P = k\mathfrak{R}\ln\mathfrak{R} - k\sum_1^m n_1 \ln n_i.$$

Предположим, что каждой ячейке соответствует заданное значение некоторой функции ε, которую мы назовем «энергией объекта, помещенного в эту ячейку». Рассмотрим изменение распределения объектов между ячейками, подчиняющимся условиям неизменности суммы энергий. Энтропия S изменится на величину

$$\delta S = -k\delta\left[\sum_1^m n_i \ln n_i\right] = -k\sum_1^m \delta n_i - k\sum_1^m \ln n_i \delta n_i$$

с дополнительными условиями: $\sum_1^m \delta n_i = 0$ и $\sum_1^m \varepsilon_i \delta n_i = 0$. Максимальная энтропия определяется условием $\delta S = 0$.

Метод неопределенных коэффициентов говорит нам, что для реализации этого условия необходимо удовлетворить уравнению

$$\sum_{1}^{m}\left[\ln n_i + \eta + \beta\varepsilon_i\right]\delta n_i = 0,$$

где η и β – постоянные, вне зависимости от того, каковы δn_i.

Из этого заключаем, что наиболее вероятное распределение, только одно реализуемое на практике, подчиняется закону:

$$n_i = \alpha \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}, \quad \left(\alpha = \mathrm{e}^{-\eta}\right).$$

Это распределение называется «каноническим». Наиболее вероятное значение термодинамической энтропии системы, соответствующее этому распределению, определяется уравнением

$$S = k\mathfrak{R}\ln\mathfrak{R} - \sum_{1}^{m}\left[k\alpha \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}\left(\ln\alpha - \beta\varepsilon_i\right)\right]$$

или, так как

$$\sum_{1}^{m} n_i = \mathfrak{R}$$

и

$$\sum_{1}^{m}\varepsilon_i n_i = \text{полная энергия } E,$$

$$S = k\mathfrak{R}\ln\frac{\mathfrak{R}}{\alpha} + k\beta E = k\mathfrak{R}\ln\sum_{1}^{m}\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i} + k\beta E.$$

Для определения β используем термодинамическое соотношение

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} = \frac{\partial S}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial E} + \frac{\partial S}{\partial E} = -k\mathfrak{R}\frac{\sum_{1}^{m}\varepsilon_i \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}d\beta}{\sum_{1}^{m}\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}dE} + kE\frac{d\beta}{dE} + k\beta$$

и поскольку

$$\mathfrak{R}\frac{\sum_{1}^{m}\varepsilon_i \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}}{\sum_{1}^{m}\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}} = \mathfrak{R}_{\bar{\varepsilon}} = E,$$

$$\frac{1}{T} = k\beta, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Свободная энергия вычисляется из выражения

$$F = E - TS = E - k\mathfrak{R}T\ln\left[\sum_{1}^{m}\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}\right] - \beta kTE = -k\mathfrak{R}T\ln\left[\sum_{1}^{m}\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}\right].$$

Среднее значение свободной энергии, отнесенное к одному из объектов, таким образом, равно:

$$\overline{F} = -\,kT\ln\left[\sum_{1}^{m} \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}\right].$$

Применим эти общие рассуждения к газу, составленному из одинаковых молекул массой m_0. Теорема Лиувилля (применимая также в релятивистской динамике) говорит нам, что элемент фазового объема для некоторой молекулы, равный $dx\,dy\,dz\,dp\,dq\,dr$ (где x, y и z – координаты, а p, q, r – соответствующие им моменты), является инвариантом уравнений движения, значение которого не зависит от выбора координат. Впоследствии пришлось допустить, что число состояний одинаковой вероятности, представленное элементом этого фазового объема, пропорционально его величине. Это непосредственно ведет к закону распределения Максвелла, определяющему число атомов, изображающая точка которого попадает в элемент $dx\,dy\,dz\,dp\,dq\,dr$:

$$dn = \mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{w}{kT}}\,dxdydzdpdqdr,$$

где w – кинетическая энергия этих атомов.

Для оправдания применимости классической динамики предположим, что скорости достаточно малы, тогда мы находим:

$$w = \frac{1}{2}m_0 v^2, \quad dpdqdr = 4\pi G^2\,dG,$$

где $G = m_0 v = \sqrt{2m_0 w}$ – количество движения. Наконец, число атомов, содержащихся в единице объема, энергия которых заключена между w и $w + dw$, определяется классической формулой:

$$dn = \mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{w}{kT}}\cdot 4\pi m_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{2w}\,dwdxdydz.$$

Остается вычислить свободную энергию и энтропию. Для этого возьмем в качестве цели общую теорию не изолированной молекулы, а газа, состоящего полностью из N одинаковых молекул массой m_0, состояние которого определяется $6N$ параметрами. Свободная энергия газа в термодинамическом смысле будет определяться, согласно Гиббсу, как среднее значение свободной энергии $\mathfrak{N}$ газа, т.е.

$$\overline{F} = -\,kT\ln\left[\sum_{1}^{m} \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}\right], \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Планк уточнил, как эта сумма должна быть получена, она может выразиться интегралом в фазовом пространстве $6N$ измерений, который сам по себе тождествен произведению N шестикратных интегралов по фазовому объему каждой молекулы. Необходимо еще позаботиться о том, чтобы поделить результат на $N!$ по причине одинаковости молекул.

Вычислив, таким образом, свободную энергию, легко найти энтропию и энергию по классическим термодинамическим уравнениям:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad E = F + TS.$$

Чтобы произвести вычисления, надо уточнить, чему равна константа, произведение которой на элемент фазового объема дает число равновероятных состояний, представляемых точками в этом элементе. Этот фактор имеет размерность, обратно пропорциональную кубу действия. М. Планк определяет его следующей несколько озадачивающей гипотезой: «Фазовый объем молекулы разделяется на ячейки равной вероятности, величина которой конечна и равна h^3». Можно сказать, что либо внутри каждой ячейки находится только одна точка, вероятность которой не равна нулю, либо все точки одной и той же ячейки соответствуют состояниям, которые физически невозможно различить.

Гипотеза Планка приводит к записи свободной энергии в виде

$$\overline{F} = -kT\ln\left[\frac{1}{N!}\left(\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{dxdydxdpdqdr}{h^3}\right)^N\right] =$$
$$= NkT\ln\left[\frac{e}{N}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{h^3}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{dxdydxdpdqdr}{h^3}\right].$$

Производя интегрирование, получаем

$$F = Nm_0c^2 - NkT\ln\left[\frac{eV}{Nh^3}(2\pi m_0kT)^{\frac{3}{2}}\right], \quad V = \text{полный объем газа},$$

и, как следствие,

$$S = kN\ln\left[\frac{eV}{Nh^3}(2\pi m_0kT)^{\frac{3}{2}}\right],$$
$$E = Nm_0c^2 + \frac{3}{2}kNT.$$

В конце своей книги «Wärmestrahlung»[17] (4-е изд.) Планк показывает, как отсюда выводится «химическая постоянная», входящая в условие равновесия газа со своей конденсированной фазой. Измерения этой химической постоянной убедительно подтвердили справедливость метода Планка.

До сих пор мы не привлекали ни теорию относительности, ни наши идеи о связи динамики и волновой теории. Далее мы выясним, как модифицируются предыдущие формулы в результате учета этих двух представлений.

[17] Wärmestrahlung – тепловое излучение (нем.) – *Прим. пер.*

II. Новая концепция статистического равновесия газа

Если движение атомов газа сопровождается распространением волн, то сосуд, содержащий газ, будет изборожден во всех направлениях этими волнами. Мы, естественно, приходим к рассмотрению, как и в теории черного излучения Джинса, фазовых волн как единственно стабильных стоячих волн (т. е. находящихся в резонансе с размерами полости). Только они будут предметом изучения термодинамического равновесия.

Это несколько аналогично тому, что мы встречали при рассмотрении атома Бора. Там также устойчивые траектории определялись условием резонанса, а другие траектории должны были рассматриваться как обычно нереализуемые в атоме.

Можно было бы задаться вопросом: каким образом могут существовать в газе стационарные системы фазовых волн, если движение атомов постоянно возмущается в результате взаимных соударений? Прежде всего, можно ответить, что благодаря несогласованности молекулярного движения число атомов, отклоненных из-за столкновений от их первоначального направления движения в течение времени dt, точно компенсируется числом тех, которые вследствие тех же столкновений приведены в движение в прежнем направлении. В общем, все происходит так, как будто атомы описывают прямолинейные траектории от стенки к стенке, так как их тождественная структура избавляет от необходимости учитывать их индивидуальность. Более того, за время свободного пробега фазовая волна может многократно пройти расстояние между стенками даже в очень большом сосуде. Если, к примеру, средняя скорость атомов газа равна 10^5 см/с, а средний пробег составляет 10^{-5} см, средняя скорость фазовых волн будет $c^2/v = 9 \cdot 10^{15}$ см/с, и в течение времени 10^{-10} с, требующегося в среднем для свободного пробега, волна пройдет расстояние $9 \cdot 10^5$ см, или 9 км. Таким образом, кажется возможным представить существование стационарных фазовых волн в газовой массе, находящейся в равновесии.

Чтобы лучше понять природу модификаций, которые мы внесем в статистическую механику, мы сначала рассмотрим простой случай, когда молекулы движутся вдоль отрезка прямой AB длиной l, отражаясь в точках A и B. Начальное распределение положений и скоростей предполагается случайным. Вероятность того, что молекула находится на элементе dx прямой AB, составляет dx/l. В рамках классических представлений необходимо к тому же принять, что вероятность скорости, имеющей значения между v и $v + dv$, пропорциональна dv. Таким образом, если строить фазовый объем, взяв за переменные x и v, то все элементы, равные $dxdv$, будут равновероятны. Все будет по-другому, когда вводятся условия устойчивости, рассмотренные выше. Если скорости малы, то можно пренебречь членами, соответствующими теории относительности, тогда длина волны, связанная с движением молекулы со скоростью v, будет равна

$$\lambda = \frac{c/\beta}{m_0 c^2/h} = \frac{h}{m_0 v}$$

и условие резонанса запишется так:

$$l = n\lambda = n\frac{h}{m_0 v}, \quad (n - \text{целое}).$$

Положив $\frac{h}{m_0 l} = v_0$, получим:

$$v = nv_0.$$

Скорость сможет принимать только значения, равные целым значениям v_0.

Изменение δn целого числа n, соответствующего изменению δv, совместимо с существованием стационарных фазовых волн. Отсюда следует, что

$$\delta n = \frac{m_0 l}{h}\delta v.$$

Все будет происходить так, как будто каждому элементу фазового объема $\delta x \delta v$ соответствует число возможных состояний $\frac{m_0}{h}\delta x \delta v$, что получится, если классический элемент фазового объема разделить на h. Численный анализ показывает, что некоторому значению δv, даже чрезвычайно малому в масштабах наших экспериментальных измерений, соответствует большой интервал δn; каждой, даже очень маленькой, ячейке фазового объема соответствует громадное число «возможных» значений v. Таким образом, в общем случае при соответствующих расчетах величину $\frac{m_0}{h}\delta x \delta v$ можно рассматривать как дифференциал. Но, в принципе, распределение характерных точек совсем не является таким, как его представляет статистическая механика. Оно дискретно и предполагает, что под действием механизма, который еще невозможно уточнить, автоматически устранены движения атомов, которые были бы связаны с нестационарными системами фазовых волн.

Перейдем теперь к более реальному случаю газа в трех измерениях. Распределение фазовых волн в полости будет полностью аналогично тому, которое дают прежние теории излучения абсолютно черного тела для тепловых волн. Можно будет, как сделал Джинс для этого случая, вычислить число стационарных волн, содержащихся в единице объема, частоты которых будут заключены между ν и $\nu + \delta\nu$. Для этого числа находят, различая групповую скорость U и фазовую скорость V, следующее выражение:

$$n_\nu \delta\nu = \gamma\frac{4\pi}{UV^2}\nu^2\delta\nu,$$

где $\gamma = 1$ для продольных волн и $\gamma = 2$ для поперечных волн. Предыдущее выражение не должно, однако, вызывать у нас иллюзий. Все значения ν не представлены в системе волн, и если позволено рассматривать в вычислениях приведенное выше выражение как дифференциал, то, в общем, в очень малом интервале частот будет иметься громадное число значений, допускаемых для ν.

Настал момент использовать теорему, доказанную в параграфе II главы I. Атому со скоростью $v = \beta c$ соответствует волна с фазовой скоростью $V = c/\beta$, групповой скоростью $U = \beta c$ и частотой $\nu = \frac{1}{h} \cdot \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Если w обозначает кинетическую энергию, то по формулам теории относительности находим

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 + w = m_0 c^2 (1 + \alpha), \quad \left(\alpha = \frac{w}{m_0 c^2}\right).$$

Отсюда

$$n_w dw = \gamma \cdot \frac{4\pi}{UV^2} \nu^2 \delta\nu = \gamma \cdot \frac{4\pi}{h^3} m_0^2 c (1 + \alpha) \sqrt{\alpha(\alpha + 2)}\, dw.$$

Если применить к ансамблю атомов закон канонического распределения, доказанный выше, получаем для числа атомов, содержащихся в элементе объема $dxdydz$, кинетическая энергия которых заключена между w и $w + dw$:

$$\mathrm{const} \cdot \gamma \cdot \frac{4\pi}{h^3} m_0^2 c (1 + \alpha) \sqrt{\alpha(\alpha + 2)}\, \mathrm{e}^{-\frac{w}{kT}} dwdxdydz. \tag{1}$$

Для материальных атомов фазовые волны должны, по причине симметрии, быть аналогичны продольным волнам. Положим, что $\gamma = 1$. К тому же для этих атомов, за исключением некоторых в пренебрежимо малом количестве (при обычных температурах), собственная энергия $m_0 c^2$ бесконечно больше, чем кинетическая. Мы, таким образом, можем не отличать $1 + \alpha$ от единицы и получаем для определенного выше числа:

$$\mathrm{const} \cdot \frac{4\pi}{h^3} m_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2w}\, \mathrm{e}^{-\frac{w}{kT}} dwdxdydz =$$
$$= \mathrm{const} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{w}{kT}} \int_w^{w+dw} \frac{dxdydzdpdqdr}{h^3}.$$

Видно, что для измерения числа возможных состояний молекулы, соответствующей элементу ее фазового объема, наш метод заставляет принять не саму величину данного элемента, а эту величину, деленную на h^3. Таким образом, мы оправдываем гипотезу Планка и, следовательно, полученные им результаты, изложенные выше. Заметим, что именно опираясь на величины, полученные для скорости V и скорости U фазовой волны, удалось прийти к этому результату, исходя из формулы Джинса[18].

[18] По теме данного параграфа см.: *Sackur O.* Ann. der Phys. 1911. **36.** P. 958; 1913. **40.** P. 67; *Tetrode H.* Phys. Zeitschr. 1913. **14.** P. 212; Ann. der Phys. 1912. **38.** P. 434; *Keesom W.H.* Phys. Zeitschr. 1914. **15.** P. 695; *Stern O.* Phys. Zeitschr. 1913. **14.** P. 629; *Brody E.* Zts. f. Phys. 1921. **16.** P. 79.

III. Газ из световых атомов

Если свет разделен на атомы, то излучение абсолютно черного тела может рассматриваться как газ таких атомов в состоянии равновесия с веществом, что немного похоже на состояние равновесия насыщенного пара со своей конденсированной фазой. Мы уже показали в главе V, что эта идея приводит к точному предсказанию давления излучения.

Попробуем применить к такому световому газу общую формулу (1) предыдущего параграфа. Здесь надо положить $\gamma = 2$ по причине симметрии светового ансамбля, на которой мы настаивали в главе V. К тому же α очень велико по сравнению с единицей, если исключить незначительное число атомов при обычных температурах, что позволит считать значения $\alpha + 1$ и $\alpha + 2$ равными α. Таким образом, для числа атомов в элементе объема получим энергию, значение которой лежит между $h\nu$ и $h(\nu + d\nu)$:

$$\text{const} \cdot \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu dx dy dz$$

и для плотности энергии, соответствующей тем же частотам,

$$u_\nu d\nu = \text{const} \cdot \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu.$$

К тому же было бы легко показать, что постоянная равна –1, следуя доказательству, содержащемуся в моей статье «Кванты света и излучение черного тела», опубликованной в «Journal de Physique» в ноябре 1922 г.

К несчастью, закон, полученный таким образом, это закон Вина, который является только первым членом ряда, представляющего точный экспериментальный закон Планка. Это не должно нас удивлять, так как, полагая движения световых атомов полностью независимыми, мы должны с необходимостью прийти к закону, показатель экспоненты которого идентичен тому же показателю в законе Максвелла.

Кроме того, мы знаем, что непрерывное распределение излучаемой в пространство энергии, как показывает вывод Джинса, приводит к закону Рэлея. Однако закон Планка допускает выражения, предложенные Вином и лордом Рэлеем, как предельные формы, справедливые соответственно для очень больших и очень малых значений отношения $h\nu/kT$. Чтобы вновь прийти к закону Планка, необходимо выдвинуть *новую гипотезу*, которая, не удаляя нас от концепции квантов света, позволяет нам объяснить, как классические формулы могут быть справедливы в некоторой области. Мы сформулируем эту гипотезу следующим образом:

«Если два или несколько атомов имеют фазовые волны, которые точно налагаются друг на друга, так что можно сказать, что они переносятся одной и той же волной, их движения не могут больше рассматриваться как полностью независимые и эти атомы не смогут больше интерпретироваться как различимые в вычислениях вероятности». Движение этих атомов «в волне» представляло бы некий вид когерентности вследствие взаимодействий, которые, при невозможности их уточнения, вероятно, сходны с механизмом, делающим нестабильным движение атомов, фазовая волна которых не будет стационарной.

Эта гипотеза когерентности обязывает нас полностью повторить доказательство закона Максвелла. Так как мы не можем больше принимать каждый атом как «объект» общей теории, то эту роль должны будут играть элементарные стационарные фазовые волны. Что мы назовем элементарной стационарной волной? Стационарная волна может рассматриваться как результат суперпозиции двух волн, определяемых формулами

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda} + \varphi_0\right)\right] \quad \text{и} \quad \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left[2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda} + \varphi_0\right)\right],$$

где φ_0 может принимать все значения от 0 до 1. Придавая ν одно из разрешенных значений и φ_0 – произвольное значение между 0 и 1, определяем элементарную стационарную волну. Рассмотрим определенное значение φ_0 и все разрешенные значения ν в малом интервале $d\nu$. Каждая элементарная волна может переносить 0, 1, 2… атомов и, так как каноническое распределение должно быть применимо к рассматриваемым волнам, мы находим для числа соответствующих атомов:

$$N_\nu d\nu = n_\nu d\nu \frac{\sum_1^\infty p e^{-p\frac{h\nu}{kT}}}{\sum_0^\infty e^{-p\frac{h\nu}{kT}}}.$$

Придавая φ_0 другие значения, получим другие стабильные состояния и, объединяя множество этих стабильных состояний таким образом, чтобы даже одной стационарной волне соответствовало несколько элементарных волн, получим еще одно стационарное состояние. Из этого мы заключаем, что число атомов, полная энергия которых соответствует частотам, заключенным между ν и $\nu + d\nu$, равно

$$N_\nu d\nu = A\gamma \frac{4\pi}{h^3} m_0^2 c(1+\alpha)\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\, dw \sum_1^\infty e^{-p\frac{m_0c^2+w}{kT}}$$

на единицу объема, где A может быть функцией от температуры.

Для газа в обычном понимании этого слова величина m_0 столь велика, что можно пренебречь всеми членами ряда, кроме первого. Тогда в точности получаем формулу (1) предыдущего параграфа.

Теперь для светового газа получим

$$N_\nu d\nu = A\frac{8\pi}{c^3}\nu^2 \sum_1^\infty e^{-p\frac{h\nu}{kT}} d\nu$$

и, следовательно, плотность энергии равна

$$u_\nu d\nu = A\frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 \sum_1^\infty e^{-p\frac{h\nu}{kT}} d\nu.$$

Это и есть формула Планка. Но надо показать, что в этом случае $A=1$. Прежде всего, A здесь, конечно, постоянная величина, не являющаяся функцией температуры. Действительно, полная энергия излучения на единицу объема

$$u = \int_0^{+\infty} u_\nu d\nu = A\frac{48\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \sum_1^\infty \frac{1}{p^4},$$

а полная энтропия определяется выражением

$$dS = \frac{1}{T}\left[d(uV) + PdV\right] = V\frac{du}{T} + (u+P)\frac{dV}{T} = \frac{V}{T}\frac{du}{dT}dT + \frac{4}{3}u\frac{dV}{T}$$

(где V – полный объем), так как $u = f(T)$ и $P = \frac{1}{3}u$. Поскольку dS является полным дифференциалом, то условие интегрируемости запишется следующим образом:

$$\frac{1}{T}\frac{du}{dT} = \frac{4}{3}\frac{1}{T}\frac{du}{dT} - \frac{4}{3}\frac{u}{T^2}, \quad \text{или} \quad 4\frac{u}{T} = \frac{du}{dT}, \quad u = aT^4.$$

Это классический закон Стефана, который обязывает нас положить $A = \text{const}$. Предыдущий вывод дает нам значения энтропии и свободной энергии:

$$S = A\frac{64\pi}{h^3c^3}k^4T^3V\sum_1^\infty \frac{1}{p^4},$$

$$F = U - TS = -A\frac{16\pi}{h^3c^3}k^4T^4V\sum_1^\infty \frac{1}{p^4}.$$

Остается определить постоянную A. Если нам удастся доказать, что она равна единице, мы снова получим все формулы теории Планка.

Как мы сказали выше, если пренебречь членами, в которых $p > 1$, дело облегчается и распределение атомов, подчиняющееся простому каноническому закону

$$A\frac{8\pi}{c^3}\nu^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}}d\nu,$$

позволяет вычислить свободную энергию методом Планка, как для обычного газа и, идентифицируя результат с приведенным выше выражением, находим, что $A = 1$.

В общем случае можно применить более строгий метод. Рассмотрим p-й член ряда Планка:

$$u_{\nu p}d\nu = A\frac{8\pi}{c^3}h\nu^3 e^{-p\frac{h\nu}{kT}}d\nu.$$

Можно также записать:

$$A\frac{8\pi}{c^3 p}\nu e^{-p\frac{h\nu}{kT}}d\nu \cdot ph\nu,$$

что позволяет сказать:

«Излучение абсолютно черного тела может рассматриваться как смесь бесконечного количества газов, каждый из которых характеризуется целым значением p и обладает следующим свойством: число возможных состояний газовой единицы, расположенной в элементе объемом $dxdydz$ и имеющей энергию в пределах от $ph\nu$ до $ph(\nu + d\nu)$, равно $\frac{8\pi}{c^3 p}\nu^2 d\nu\, dx\, dy\, dz$». С этого момента можно вычислять свободную энергию методом, изложенным в параграфе I. Получаем

$$F = \sum_1^\infty F_p = -kT\sum_1^\infty \ln\left[\frac{1}{n_p!}\left(V\int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3 p}\nu^2 \mathrm{e}^{-p\frac{h\nu}{kT}} d\nu\right)^{n_p}\right] = \\ = -kT\sum_1^\infty n_p \ln\left[\frac{e}{n_p} V\int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3 p}\nu^2 \mathrm{e}^{-p\frac{h\nu}{kT}} d\nu\right],$$

где

$$n_p = V\int_0^\infty A\frac{8\pi}{c^3 p}\nu^2 \mathrm{e}^{-p\frac{h\nu}{kT}} d\nu = A\cdot\frac{16\pi}{c^3}\cdot\frac{k^3 T^3}{h^3}\cdot\frac{1}{p^4}\cdot V.$$

Таким образом,

$$F = -A\frac{16\pi}{h^3 c^3}k^4 T^4 \ln\left(\frac{e}{A}\right)\sum_1^\infty \frac{1}{p^4}\cdot V$$

и, отождествляя с ранее найденным уравнением, получаем

$$\ln\left(\frac{e}{A}\right) = 1, \quad A = 1.$$

Это то, что мы хотели доказать.

Гипотеза когерентности, принятая выше, ведет нас в хорошую гавань, избегая провалов на законах Рэлея или Вина. Изучение флуктуаций излучения абсолютно черного тела принесет нам новое свидетельство своей важности.

IV. Флуктуации энергии при излучении абсолютно черного тела[19]

Если зерна энергии величиной q в огромном количестве распределены в некотором пространстве и если их положения постоянно меняются по случайным законам, то элемент объема будет в среднем содержать $\overline{n}$ зерен с энергией $\overline{E} = \overline{n}q$. Но реальное значение n будет постоянно отклоняться от $\overline{n}$ и будем иметь $\overline{(n-\overline{n})^2}$, согласно известной теореме теории вероятности; как следствие, средний квадрат флуктуации энергии будет

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(n-\overline{n})^2}q^2 = \overline{n}q^2 = \overline{E}q.$$

[19] La théorie du rayonnement noir et les quanta. Réunion Solvay, rapport de M. Einstein, p. 419; Les théories statistiques en thermodynamique. Conférences de M. H.-A. Lorentz au Collège de France. Teubner, 1916. P. 70 et 114.

С другой стороны, известно, что флуктуации энергии излучения абсолютно черного тела в объеме V подчиняются закону статистической термодинамики:

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2 V \frac{d(u_\nu d\nu)}{dT},$$

если они относятся к интервалу частот ν, $\nu + d\nu$. Если принять закон Рэлея

$$u_\nu = \frac{8\pi k}{c^3}\nu^2 T, \quad \overline{\varepsilon^2} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\cdot\frac{(Vu_\nu d\nu)}{V},$$

то этот результат, как и следовало ожидать, совпадет с результатом вычисления интерференции согласно правилам электромагнитной теории.

Если, напротив, примем закон Вина, который соответствует гипотезе излучения испускаемого полностью независимыми атомами, то найдем:

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2 V \frac{d}{dT}\left(\frac{8\pi h}{c^3}\nu^2 \mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu\right) = (u_\nu V d\nu) h\nu,$$

формулу, которая выводится также из $\overline{\varepsilon^2} = \overline{E} h\nu$.

Наконец, в реальном случае закона Планка приходят, как это первым отметил Эйнштейн, к выражению

$$\overline{\varepsilon^2} = (u_\nu V d\nu) h\nu + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\cdot\frac{(u_\nu d\nu V)^2}{V},$$

где $\overline{\varepsilon^2}$ представляется суммой того, что было бы: 1) если бы излучение было сформировано из независимых квантов $h\nu$; 2) если бы излучение было чисто волновым.

С другой стороны, концепция группировки атомов «в волны» приводит к записи закона Планка:

$$u_\nu d\nu = \sum_1^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 \mathrm{e}^{-p\frac{h\nu}{kT}} d\nu = \sum_1^\infty n_{p,\nu} p h\nu d\nu.$$

И, применяя к каждому типу группировок формулу $\overline{\varepsilon^2} = \overline{n} q^2$, получаем

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_1^\infty n_{p,\nu} d\nu (ph\nu)^2.$$

Естественно, это выражение по сути идентично выражению Эйнштейна, только вид записи иной. Но наш интерес к этому вопросу позволяет прийти к следующему заключению: «Можно правильно оценить флуктуации излучения абсолютно черного тела, не прибегая никоим образом к волновой теории, но только вводя когерентность атомов, связанных с той же самой фазовой волной».

Таким образом, кажется почти достоверным, что всякая попытка примирения между дискретностью излучаемой энергии и волновыми явлениями должна привести к введению гипотезы когерентности, изложенной в предыдущем параграфе.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ V

О квантах света

Мы предложили рассматривать световые атомы как малые центры энергии, характеризующиеся очень малой собственной массой m_0 и движущиеся со скоростью, очень близкой к c, таким образом, что между частотой ν, собственной массой m_0 и скоростью βc существует соотношение

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда выводим:

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{m_0 c^2}{h\nu}\right)^2}.$$

Этот способ рассмотрения приводит нас к известным разногласиям, касающимся эффекта Доплера и давления излучения.

К сожалению, они вызывают большую трудность: для частот ν, все более и более низких скорость βc излучаемой энергии становилась бы все более и более малой, равной нулю при $h\nu = m_0 c^2$, а затем мнимой (?). Это тем более трудно допустить, так как в области очень низких частот должны подтвердиться прежние теории, которые приписывают энергии излучения скорость c.

Это возражение очень интересно, потому что привлекает внимание к переходу от чисто корпускулярного представления о свете, проявляющегося в области высоких частот, к представлению чисто волновому в области очень низких частот. В главе VII мы показали, что чисто корпускулярная концепция ведет к закону Вина, в то время как, и это хорошо известно, чисто волновая концепция приводит к закону Рэлея. Переход от одного закона к другому должен быть, как мне кажется, тесно связан с ответами, которые могут быть получены на возражения, приведенные выше.

Скорее в качестве примера, чем в надежде дать удовлетворительное решение, я разовью идею, подсказанную предыдущими размышлениями.

В главе VII я показал, что можно было бы интерпретировать переход от закона Вина к закону Рэлея, представляя себе существование объединений световых атомов, связанных с распространением *той же самой* фазовой волны. Я настаивал на сходстве, которое приобретет такая волна, носительница многочисленных квантов, с классической волной, когда число квантов увеличится до бесконечности. Однако в концепции, изложенной в тексте, это сходство ограничено тем фактом, что каждое зерно энергии сохраняет очень малую, но конечную собственную массу m_0, в то время как электромагнитная теория приписывает свету нулевую собственную массу. Частота волны для многочисленных центров энергии определяется выражением

$$h\nu = \frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где μ_0 – собственная масса *каждого* из центров: это кажется необходимым, чтобы учесть, что излучение и поглощение энергии происходит конечными порциями $h\nu$. Но мы могли бы, возможно, предположить, что масса центров энергии, связанных с *той же самой* волной, отличается от собственной массы m_0 изолированного центра и зависит от числа других центров, с которыми они находятся во взаимодействии. Тогда, обозначив через p число центров, переносимых волной, будем иметь

$$\mu_0 = f(p) \quad \text{с} \quad f(1) = m_0.$$

Необходимость возврата к формулам электромагнетизма для очень низких частот приводит к предположению, что $f(p)$ является убывающей функцией от p и стремящейся к нулю, когда p стремится к бесконечности. Скорость ансамбля p центров, образующего волну, тогда будет равна

$$\beta c = c\sqrt{1-\left[\frac{f(p)c^2}{h\nu}\right]^2}.$$

Для очень высоких частот p почти всегда будет равно единице, зерна энергии будут изолированы, будем иметь закон Вина для излучения абсолютно черного тела, а для скорости излучаемой энергии по формуле из приведенного выше текста получаем

$$\beta = \sqrt{1-\frac{m_0^2 c^4}{h^2\nu^2}}.$$

Для очень низких частот p было бы всегда очень велико, зерна объединялись бы в очень многочисленные группы в одной и той же волне. Излучение абсолютно черного тела подчинялось бы закону Рэлея и скорость стремилась бы к c, когда ν стремится к нулю.

Предыдущая гипотеза немного нарушает простоту концепции «квантов света», но эта простота не может, конечно, быть полностью сохранена, если хочется связать электромагнитную теорию с дискретностью, подтвержденной фотоэлектрическими явлениями. Мне кажется, что это объединение было бы реализовано введением функции $f(p)$, так как для заданной энергии волна должна включать число p зерен все более и более значительное при уменьшении ν и $h\nu$. Когда частота становится все более и более низкой, число зерен должно увеличиваться бесконечно, их собственная масса m_0 стремится к нулю и их скорость к c так, что переносящая их волна становится более и более аналогичной электромагнитной волне.

Надо признать, что реальная структура световой энергии все еще остается очень загадочной.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЯ

В кратком историческом обзоре развития физики начиная с XVII в., в частности динамики и оптики, мы показали, каким образом проблема квантов зародилась из параллелизма корпускулярной и волновой концепций света; затем мы показали, с какой ежедневно возрастающей силой понятие квантов стало влиять на умы ученых XX в.

В главе I мы приняли за основной постулат существование периодического процесса, связанного с каждой отдельной порцией энергии, зависимость которой от собственной массы выражена соотношением Планка – Эйнштейна. Теория относительности показала нам, таким образом, необходимость связать с равномерным движением всякого движущегося тела распространение с постоянной скоростью некоторой фазовой волны, и мы смогли объяснить это распространение, пользуясь представлением Минковского о пространстве-времени.

Рассматривая в главе II этот вопрос в более общем случае – для тела, имеющего электрический заряд и перемещающегося с переменной скоростью в электромагнитном поле, мы показали, что, по нашим представлениям, принцип наименьшего действия в форме Мопертюи и принцип согласованности фаз Ферма, весьма вероятно, могут быть двумя аспектами одного и того же закона; это позволяет нам понять, как распространить квантовое соотношение для скорости фазовой волны на случай внешнего электромагнитного поля. Конечно, идея, что за движением материальной точки всегда скрывается распространение волны, должна быть изучена и дополнена, но если удастся найти для нее совершенно удовлетворительную форму, то она представит собой синтез большой рациональной красоты.

Наиболее важное следствие, которое может быть выведено из этой идеи, изложено в главе III. Напомнив законы устойчивости квантованных траекторий, которые были получены в результате недавних многочисленных работ, мы показали, что их можно интерпретировать как законы, выражающие резонанс фазовой волны и длины замкнутых или квазизамкнутых траекторий. Мы полагаем, что это первое физически правдоподобное объяснение условий устойчивости Бора – Зоммерфельда.

Трудности, возникшие при одновременном смещении двух заряженных центров, были изложены в главе IV, в частности, в случае круговых движений ядра и электрона вокруг их общего центра тяжести в атоме водорода.

В главе V, руководствуясь ранее полученными результатами, мы попытались представить себе возможность концентрации излученной энергии вокруг некоторых особых точек и показали, какая глубокая гармония, очевидно, существует между противоположными точками зрения Ньютона и Френеля, гармония, которая подтверждается идентичностью многочисленных предвидений. Электромагнитная теория не может быть сохранена в своей обычной форме, но перестроить ее очень трудно. Мы предлагаем для этой цели качественную теорию интерференции.

В главе VI мы резюмировали различные последовательные теории рассеяния X- и γ-лучей аморфными телами, обращая особое внимание на предложенную недавно теорию П. Дебая и А.Х. Комптона, которая, кажется, делает почти осязаемым существование квантов света.

Наконец, в главе VII мы вводим в статистическую механику понятие фазовой волны, находим вновь величину элемента фазового объема, предложенную Планком, и получаем закон излучения черного тела в виде закона Максвелла для газа, образованного из атомов света, при условии все-таки допущения некоторой когерентности между движениями отдельных атомов, значение которой видно также из изучения флуктуации энергии.

Короче говоря, я развил новые идеи, которые, быть может, помогут ускорить необходимый синтез, объединяющий физику излучений, так странно разделенную в настоящее время на две области, где царят две противоположные концепции: корпускулярная и волновая. Я предчувствовал, что с помощью принципов динамики материальной точки, если правильно их анализировать, можно, без сомнения, выразить распространение и согласованность фаз, и старался, насколько мог, найти из этих идей объяснение некоторых загадок, выдвигаемых теорией квантов. Пытаясь это сделать, я пришел к некоторым интересным заключениям, которые, может быть, позволяют надеяться прийти к более полным результатам, следуя по тому же пути. Но сначала нужно было бы создать новую электромагнитную теорию, естественно, удовлетворяющую принципу относительности, учитывающую дискретную структуру излучаемой энергии и физическую природу фазовых волн и придающую, наконец, теории Максвелла – Лоренца характер статистического приближения, которое объяснило бы правомерность ее применения и точность ее предвидений в очень большом числе случаев.

Я намеренно дал довольно нечеткие определения фазовой волны и периодического процесса, которые она, так же как и кванты света, некоторым образом выражает. Настоящую теорию нужно, таким образом, рассматривать скорее как форму, физическое содержание которой не вполне установлено, а не как окончательно разработанную стройную схему.

МАГНИТНЫЙ ЭЛЕКТРОН (ТЕОРИЯ ДИРАКА)

ОТ РЕДАКЦИИ

Книга Луи де Бройля «Магнитный электрон» занимает особое место среди учебников по релятивистской квантовой механике. Написанная в 1934 г. по горячим следам сразу после создания Дираком его знаменитой теории электрона, эта книга стала первым учебником по теории Дирака. В нашей стране перевод «Магнитного электрона» был опубликован в 1936 г. Хотя вскоре появились и другие книги, посвященные уравнению Дирака, в том числе и книга самого Дирака, «Магнитный электрон» попрежнему пользовался среди читателей во всем мире громадной популярностью.

Блестящий литературный язык, подробное (с многочисленными выкладками) изложение предмета, выяснение физического смысла вводимых понятий и эффектов – все это составляло несомненные достоинства книги де Бройля. Особенность стиля автора – оригинальный подход к предмету, умение выявить классические аналогии, подчеркнуть характерные черты квантового аппарата. В частности, эта оригинальность проявилась и в том, что де Бройль использовал собственное (сопряженное) представление в квантовой механике, которое теперь не применяется. Кроме того, он работал в левой (французской) системе координат.

С учетом этих обстоятельств при подготовке данного издания редакция сочла необходимым привести все результаты к общепринятому в настоящее время представлению и был переработан первый перевод (Харьков: ОНТИ – ДНТВУ – НКТП, 1936). Мы надеемся, что книга де Бройля «Магнитный электрон» сохранит свое значение не только в качестве популярного руководства по теории Дирака, но и как справочное пособие.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория электронов Дирака представляет огромный интерес с нескольких точек зрения. Она является наиболее совершенной из имеющихся форм волновой механики электрона; она примиряет, по крайней мере до некоторой степени, идеи теории относительности с квантовыми концепциями; она уточняет в форме, вполне согласующейся с принципами новой физики, столь плодотворную гипотезу о заряженной, намагниченной и вращающейся частице Уленбека и Гаудсмита; наконец, она дает возможность, в том, что касается тонкой структуры спектров и аномальных эффектов Зеемана, объяснить очень важные экспериментальные данные, которые, в свою очередь, ее блестяще подтверждают. Редактируя курс, который мы читали в последние годы в Институте Анри Пуанкаре, мы сочли небесполезным опубликовать общий очерк упомянутой теории.

Чтобы доказать, что теория Дирака не является простой игрой досужего теоретика, а прекрасно подходит для объяснения важных фактов, мы считаем нужным в первой части книги дать обзор явлений, которые получили благодаря настоящей теории вполне удовлетворительное истолкование, тогда как они не поддавались полному объяснению ни в рамках прежней квантовой теории, ни даже в рамках волновой механики в ее первоначальной форме.

В первой части нашей работы мы также выделили несколько страниц для того, чтобы напомнить общие принципы новой механики и изложить вытекающие из нее физические законы. В самом деле, если не проникнуться глубиной этих принципов, совершенно невозможно понять теорию Дирака.

В изложении теории, которой посвящена вторая часть, мы сохранили несколько асимметричную форму уравнений, использованную с самого начала самим Дираком, не пытаясь вводить более симметричные с точки зрения теории относительности обозначения, как это делали впоследствии многочисленные авторы. Этот поиск симметрии формы нам кажется несколько тщетным, поскольку, как это мы попытались показать в последней главе, в теории Дирака, несмотря на инвариантность уравнений по отношению к преобразованию Лоренца, времени выделяется особая роль, чтобы имело место согласие с общими принципами квантовой физики. В конце второй части мы посвятили одну главу систематическому обзору теории в целом, чтобы помочь читателю воспринять ее гармонию.

Третья часть работы посвящена объяснению с точки зрения теории Дирака экспериментальных данных, упоминаемых в первой части. Далее идет изложение некоторых несколько необычных следствий из основных уравнений, особенно в отношении предсказания состояний с отрицательной энергией. Мы изложили эти трудности теории, не предлагая никакого их решения. Каким бы образом они ни разрешились в будущем, они заслуживают того, чтобы их изучить, так как их корни лежат в самих основах теории Дирака.

Мы надеемся, что наша работа в целом даст возможность читателю оценить красоту теории Дирака, ее полезность для объяснения экспериментальных данных, а также понять ее пробелы и слабые места.

Выражаю глубокую признательность Жану Луи Детушу за оказанную им помощь в чтении корректуры.

Луи де Бройль

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УСПЕХИ И НЕУДАЧИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ В ЕЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЕ

ГЛАВА I. Атомный спектр водорода. Теории Бора и Зоммерфельда

1. Формула Бальмера и спектральные термы водорода

Из всех серий линий видимого спектра водорода ранее всех стала известной серия Бальмера. Она состоит из четырех главных линий (которые в действительности являются узкими дублетами, как мы в этом убедимся позднее). Вот названия и длины волн этих четырех первых линий:

$$H_\alpha: 6563\ \text{Å}\,,\quad H_\beta: 4861\ \text{Å}\,,\quad H_\gamma: 4340\ \text{Å}\,,\quad H_\delta: 4102\ \text{Å}\,.$$

Еще полвека тому назад Бальмеру удалось отыскать формулу, дающую частоты этих линий. Эта формула представляется в следующем виде:

$$\nu_m = R\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right],\quad m = 3, 4, 5, 6, \ldots\,, \tag{1}$$

где ν_3 – частота линии H_α; ν_4 – частота линии H_β (и т. д.); R – постоянная, называемая «постоянной Ридберга», с большой точностью[1] равная $3{,}29201 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$.

Прочие, открытые позже серии линий невидимого спектра водорода подчиняются аналогичным законам. Таковы, например, ультрафиолетовая серия Лаймана, для которой частота линий дается формулой

$$\nu_m = R\left[1 - \frac{1}{m^2}\right],\quad m = 2, 3, \ldots\,, \tag{2}$$

и инфракрасная серия Пашена, для которой

$$\nu_m = R\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{m^2}\right],\quad m = 4, 5, \ldots\,. \tag{3}$$

Отсюда видно, что все эти формулы приводятся к общему виду

$$\nu_{nm} = R\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right],\quad n < m\,. \tag{4}$$

Для линий серии Лаймана $n = 1$; для серии Бальмера $n = 2$; для серии Пашена $n = 3$.

---

[1] Современное значение $R = 3{,}2898419499 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$. – *Прим. пер.*

На основании сказанного можно прийти к общему закону, оказавшемуся справедливым в отношении спектральных линий всех веществ. Это – «комбинационный принцип Ритца», который гласит:

«Частота любой спектральной линии равна разности двух характеристических спектральных термов излучающего тела».

Или в другой форме:

«Для всякого излучающего тела можно составить таблицу чисел, называемых спектральными термами, таким образом, что частота каждой спектральной линии тела будет представлять собой разность двух из этих спектральных термов».

Таким образом, формула (4) показывает, что для водорода спектральные термы, по крайней мере по их абсолютному значению, имеют вид R/n^2 при $n = 1, 2, 3\ldots$

Более детальное экспериментальное изучение линий серии Бальмера показало, что в действительности каждая из этих линий состоит из двух очень близких линий. Иначе говоря, анализируя серию Бальмера с достаточной степенью точности, замечаем, что каждая линия, принимавшаяся вначале за простую, в действительности является узким дублетом. Для каждого из этих дублетов разность частот между двумя составляющими одна и та же. Позднее мы увидим, как Зоммерфельду удалось объяснить эту тонкую структуру серии Бальмера.

2. Теория Бора для спектральных термов водорода

В 1912 г. Бору удалось объяснить спектральные термы водорода и, исходя из этого, построить на совершенно новых основаниях современную теорию атома.

Несколько ранее появления теории Бора физики, действуя на ощупь, пришли, согласно предположению Резерфорда, к планетарной модели атома. По этим представлениям, атом химического элемента с номером N в таблице Менделеева имеет центральное ядро с положительным зарядом Ne, причем e представляет собой элементарный электрический заряд $+\,4{,}77\cdot10^{-10}$ ед. СГСЭ([2]), вокруг которого обращаются N электронов с зарядом $-e$ таким образом, что атом в целом является электрически нейтральным. Бор решил описать эту модель атома, применяя к ней законы теории квантов, с успехом введенные Планком при изучении излучения абсолютно черного тела. Он предположил, что планетарный электрон в атоме может описывать около положительного центрального ядра-солнца только определенные траектории, предусмотренные классической механикой. Этим стабильным движениям электронов в атоме соответствуют «стационар-

[2] Современное значение $e = 4{,}803206799\cdot10^{-10}$ ед. СГСЭ. – *Прим. пер.*

ные состояния», т.е. движения, при которых, в противовес предсказаниям классической электромагнитной теории, не может испускаться никакое излучение. Таким образом, испускание лучей, отвечающих спектральным линиям, может иметь место только во время мгновенных переходов атома из первоначального стационарного состояния в другое стационарное состояние с меньшей энергией.

Какова же будет частота линии, отвечающей такому переходу?

Бор определяет ее, допуская, что потерянная атомом энергия излучается в виде единственного кванта света с энергией $h\nu$, или фотона, выражаясь современным языком. Таким образом, если E_i и E_j означают энергии атома соответственно в первоначальном стационарном состоянии и в конечном состоянии, то частота ν_{ij}, испускаемая во время перехода из одного состояния в другое, представится в виде

$$\nu_{ij} = \frac{E_i - E_j}{h}. \tag{5}$$

Эта формула сразу же объясняет комбинационный принцип Ритца и показывает, что спектральные термы атома равны энергиям его различных стационарных состояний, деленным на постоянную Планка.

Следовательно, существенной задачей является определение энергии стационарных состояний. Для этого в своей первоначальной работе Бор делает допущение, что электрон ведет себя, как точечный заряд, подчиняющийся законам динамики Ньютона, но в то же время он ограничивает количество возможных траекторий, вводя правила квантования Планка. Во времена Бора квантовать умели только периодические движения, определяемые одной переменной q. Метод квантования для этого случая состоял в следующем: имея p, представляющее собой импульс Лагранжа, сопряженный с координатой q, писали:

$$\oint p\,dq = nh \quad (n - \text{целое}). \tag{6}$$

При этом интеграл распространялся на весь период движения, а h – постоянная Планка. Вполне естественно, Бор пришел к предположению, что движения электрона, удовлетворяющие условию (6), являются устойчивыми движениями, соответствующими стационарным состояниям атома.

Этот метод позволяет легко вычислить энергию для устойчивых круговых траекторий атома водорода, который, согласно Резерфорду, состоит из ядра с зарядом $+e$ и из планетарного электрона с зарядом $-e$. Если θ обозначает азимут, задающий положение электрона на круговой траектории радиуса r, то условие (6) дает:

$$mr^2\dot{\theta} = n \cdot \frac{h}{2\pi}, \quad \text{где} \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{7}$$

Это равенство означает, что угловой момент электрона на устойчивой орбите есть целое кратное $h/2\pi$.

Поскольку, с другой стороны, законы динамики дают соотношение

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{e^2}{r^2}, \tag{8}$$

для энергии n-го квантованного кругового движения легко находим:

$$E_n = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = -\frac{2\pi^2 me^4}{n^2h^2}. \tag{9}$$

Следовательно, если ограничиваться круговыми движениями, спектральные термы водорода должны быть вида

$$\frac{E_n}{h} = -\frac{2\pi^2 me^4}{n^2h^3}. \tag{10}$$

По формуле (5) линии водорода должны иметь частоты, определяемые из общего соотношения:

$$\nu_{nn'} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \quad (n' > n), \tag{11}$$

и мы снова возвращаемся к формуле (4), выведенной экспериментальным путем, допуская, что

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}. \tag{12}$$

Таким образом, численная оценка правой части (12) показывает, что ее значение довольно точно совпадает с экспериментальным значением постоянной Ридберга.

Можно повторить то же самое вычисление, предполагая, что мы имеем уже дело с атомом, имеющим атомный номер N, ионизированным $(N-1)$-кратно. Следовательно, придется решать задачу, аналогичную предыдущей, об атоме водорода, за исключением того, что центральный заряд теперь уже Ne вместо e([3]). Повторяя тот же ход рассуждений, нетрудно найти для спектральных термов вместо (10):

$$\frac{E_n}{h} = -\frac{2\pi^2 me^4}{n^2h^3}N^2 = -\frac{RN^2}{n^2}. \tag{13}$$

Спектральные термы пропорциональны квадрату атомного номера. Наипростейший случай представляет атом гелия, однократно ионизированный, для которого имеем $N = 2$. Спектральные термы и частоты соответственно учетверяются. Однако экспериментальные данные показывают, что постоянная Ридберга вовсе не имеет одинакового значения для H и He^+. Бор смог определить это различие, учитывая обратное действие электрона на ядро.

[3] Часто говорят, что атом с номером N, ионизированный $(N-1)$-кратно, является водородоподобным.

3. Квантованные энергии эллиптических орбит

Приведенные выше вычисления Бора не могут рассматриваться как исчерпывающие, ибо изучение движения электрона вокруг ядра в принципе является задачей с двумя переменными: радиальной переменной и азимутом. Исключение изменений радиальной переменной, когда ограничиваются только круговыми траекториями, очевидно, искусственно. А чтобы целиком и полностью разрешить задачу, необходимо прежде всего написать квантовые условия для движений с несколькими степенями свободы. Вот как это удалось сделать.

Пусть мы имеем систему с n степенями свободы, определяемую переменными $q_1 \ldots q_n$. Если все переменные допускают тот же самый период изменения T, т.е. если через интервалы времени, равные T, они принимают те же самые значения, а конфигурации системы оказываются прежними, она периодична. Если каждая переменная q_i имеет свой период T_i, причем эти периоды несоизмеримы, то система является квазипериодической. Квантовые условия имеют смысл только для систем периодических или квазипериодических. Для систем такого рода, которые приходилось квантовать в старой квантовой теории, всегда представлялось возможным выбирать переменные так, что они оказывались «разделенными», иначе говоря, каждый из импульсов Лагранжа p_i мог быть выражен через функцию от одной соответствующей координаты q_i. Выбрав таким образом переменные, Вильсон и Зоммерфельд показали, что квантование должно выражаться n условиями:

$$\oint p_i dq_i = n_i h \quad (n_i \text{ – целое}),\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

причем каждый интеграл берется по периоду T_i переменной q_i.

Зоммерфельд воспользовался этими новыми условиями, чтобы более полно разрешить проблему атома водорода, принимая во внимание и эллиптические движения. Пусть r – радиальная переменная, а θ – азимут электрона на его кеплеровой траектории. Тогда кинетическая энергия T будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right), \tag{15}$$

и импульсы Лагранжа будут, по определению,

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \tag{16}$$

Здесь могут быть применены условия (14), которые примут вид

$$\int_0^{2\pi} mr^2\dot{\theta}d\theta = n_1 h, \quad \oint m\dot{r}dr = n_2 h. \tag{17}$$

Однако $mr^2\dot{\theta}$ является постоянным угловым моментом в центральном поле, по теореме площадей.

Следовательно, первое условие (17) дает

$$mr^2\dot{\theta} = n_1\frac{h}{2\pi} \tag{18}$$

и совпадает с условием (7) Бора для круговых орбит.

Чтобы вычислить второй интеграл (17), мы должны написать выражение энергии:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{e^2}{r} = \frac{1}{2m}\left[m^2\dot{r}^2 + \frac{\left(mr^2\dot{\theta}\right)^2}{r^2}\right] - \frac{e^2}{r}, \tag{19}$$

откуда, принимая во внимание (18), получим формулу

$$m\dot{r} = p_r = \pm\sqrt{2m\left(E + \frac{e^2}{r}\right) - \frac{n_1^2h^2}{4\pi^2r^2}}, \tag{20}$$

подтверждающую разделение переменных.

Во время движения радиальная переменная r колеблется между значениями r_1 и r_2, которые обращают корень (20) в нуль, так как p_r должно быть действительным. Предполагая, что $r_1 < r_2$, напишем:

$$\oint p_r\,dr = 2\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m\left(E + \frac{e^2}{r}\right) - \frac{n_1^2h^2}{4\pi^2r^2}}\,dr, \tag{21}$$

ибо в формуле (20) необходимо брать знак «+», когда r возрастает, и знак «–», когда r убывает. Зоммерфельд вычислил интеграл (21) при помощи теории вычетов Коши и нашел для него значение: $-\left|n_1\right|h + \dfrac{2\pi me^2}{\sqrt{2m\left|E\right|}}$. Приравнивая его к n_2h, нетрудно найти:

$$E_{n_1n_2} = -\frac{2\pi^2me^4}{\left(\left|n_1\right| + n_2\right)^2h^2}. \tag{22}$$

Эта формула дает квантованную энергию стационарного состояния, соответствующего квантовым числам n_1 и n_2. Так как $|n_1|$ и n_2 являются целыми положительными числами или нулями, и при этом не могут быть одновременно равны нулю, как в этом легко убедиться, то можно положить:

$$|n_1| + n_2 = n \quad (n = 1, 2, ...), \tag{23}$$

и тогда формула (22) дает те же самые уровни энергии, что и первоначальная теория Бора. Иначе говоря, рассмотрение эллиптических орбит не приводит к новым спектральным термам. Введение двух степеней свободы не может само по себе объяснить тонкую структуру серии Бальмера.

4. Теория тонкой структуры Зоммерфельда

Чтобы объяснить тонкую структуру спектра водорода, Зоммерфельд решил применить вместо классической механики механику релятивистскую. Это можно оправдать, если заметить, что в атоме Бора скорость электронов на внутренних орбитах должна быть сравнима со скоростью света.

В релятивистской механике для кинетической энергии электрона имеется выражение

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \tag{24}$$

где m_0 – собственная масса электрона, а β имеет обычное значение:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}. \tag{25}$$

Но здесь уже нельзя больше определять импульс p_i, сопряженный с переменной q_i, как производную от T по $\dot{q}_i$; здесь необходимо ввести релятивистскую функцию Лагранжа:

$$L = -\, m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - U, \tag{26}$$

где U представляет потенциальную энергию, и тогда

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{27}$$

В случае водородного атома потенциальная энергия не зависит от $\dot{q}_i$ и поэтому имеем

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_0 c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\partial \beta^2}{\partial \dot{r}} = \frac{m_0 \dot{r}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_0 c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\partial \beta^2}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_0 r^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Следовательно, квантовые условия (14) здесь представятся в виде

$$\int_0^{2\pi} \frac{m_0 r^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1-\beta^2}} d\theta = n_1 h; \quad \oint \frac{m_0 \dot{r}}{\sqrt{1-\beta^2}} dr = n_2 h. \tag{29}$$

Подробное изучение траектории, которым мы здесь заниматься не будем, показывает, что электрон описывает эллипс с вращающимся перигелием. Иначе говоря, траектория в каждый данный момент является касательной к оскулирующему эллипсу, который медленно вращается в своей плоскости (рис. 1). Радиус колеблется между значениями r_1 и r_2, но время, которое тратится на описание цикла $r_1 \to r_2 \to r_1$ (период переменной r), несколько больше, чем время, необходимое для возрастания азимута на 2π (период переменной θ). Таким образом, орбита точно не замыкается, и движение является квазипериодическим.

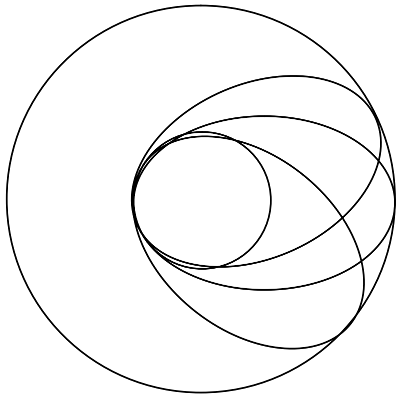

Рис. 1

Импульс p_θ представляет собой, кроме того, угловой момент вращения вокруг центра, и легко показать, что он здесь является константой, т.е. теорема площадей всегда верна. Следовательно, первое условие (29) дает

$$p_\theta = \frac{m_0 r^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1-\beta^2}} = n_1 \frac{h}{2\pi}. \tag{30}$$

Полная энергия представляет собой сумму энергии внутренней m_0c^2, энергии кинетической и энергии потенциальной. Следовательно, она равна

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{e^2}{r}. \tag{31}$$

Принимая во внимание (28) и (25), эту формулу нетрудно привести к виду

$$W = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}} - \frac{e^2}{r}. \tag{32}$$

Обозначим через E энергию W, уменьшенную на величину m_0c^2; тогда E будет совпадать с энергией, определяемой в классической механике. В соотношении (32) заменим W выражением $E + m_0c^2$ и разрешим его относительно p_r. Получим

$$p_r = \pm\sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}, \tag{33}$$

где

$$A = \frac{E^2}{c^2} + 2m_0 E = m_0^2 c^2\left[\left(1 + \frac{E}{m_0 c^2}\right)^2 - 1\right],$$

$$B = \frac{Ee^2}{c^2} + m_0 e^2 E, \tag{34}$$

$$C = \frac{e^4}{c^2} - p_\theta^2 = \frac{e^4}{c^2} - \frac{n_1^2 h^2}{4\pi^2}.$$

Зоммерфельд далее ввел в употребление выражение, которое теперь называют «постоянной тонкой структуры»

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \quad \left(\alpha^2 = 5{,}2 \cdot 10^{-5}\right)(^4). \tag{35}$$

Таким образом, можно написать:

$$C = -\frac{n_1^2 h^2}{4\pi^2}\left[1 - \frac{\alpha^2}{n_1^2}\right]. \tag{36}$$

Применение теоремы вычетов позволяет установить, что

$$\oint \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}}\,dr = -2\pi i\left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right). \tag{37}$$

Приравнивая правую часть (37) к $n_2 h$ согласно (29) и заменяя A, B и C их значениями, путем простых преобразований Зоммерфельд находит формулу

$$1 + \frac{E}{m_0 c^2} = \left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(n_2 + \sqrt{n_1^2 - \alpha^2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

которая в точности дает энергию E стационарного состояния, определяемого квантовыми числами $|n_1|$ и n_2.

Так как величина α^2 очень мала, в первом приближении можно пренебречь членами выше первой степени по α^2. Тогда, как и следовало ожидать, мы возвращаемся к формуле (22) нерелятивистской теории и не обнаруживаем тонкой структуры. Лучшее приближение возникает, если сохранить члены, пропорциональные α^4, и написать

$$\begin{aligned}&\left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(n_2 + \sqrt{n_1^2 - \alpha^2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{2\left(|n_1| + n_2\right)^2} - \frac{\alpha^4}{2\left(|n_1| + n_2\right)^4}\left(\frac{1}{4} + \frac{n_2}{|n_1|}\right).\end{aligned} \tag{39}$$

Внося это значение в формулу (38), находим:

$$E = -\frac{2\pi^2 m_0 e^4}{\left(|n_1| + n_2\right)^2 h^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(|n_1| + n_2\right)^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{n_2}{|n_1|}\right)\right]. \tag{40}$$

Третий член в скобках объясняет существование тонкой структуры серии Бальмера, так как он зависит отдельно и от $|n_1|$, и от n_2, а не только от $|n_1| + n_2$.

Теперь мы несколько изменим обозначения. Число $n = |n_1| + n_2$ мы назовем «главным квантовым числом», а число $k = |n_1|$ – «азимутальным квантовым числом». Очевидно, что каждый уровень квантованной энергии вместо чисел n_1 и n_2 можно характеризовать числами n и k.

[4] Современное значение $\alpha^2 = 5{,}325\,136\,197 \cdot 10^{-5}$. – *Прим. пер.*

Формула (40) теперь примет вид (после введения постоянной Ридберга)

$$E_{nk} = -\frac{Rh}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right)\right]. \tag{41}$$

В старой квантовой теории считалось, что азимутальное число k никогда не может принимать нулевое значение; для круговых траекторий полагалось $n_2 = 0$ или $n = k$, а для траекторий эллиптических $0 < k < n$. По формуле (41) каждая стационарная орбита характеризуется энергией E_{nk}, которая зависит не только от n, но также и от k. Но так как α^2 – величина очень малая по сравнению с единицей, то различные спектральные термы, соответствующие одному и тому же значению n, очень близки друг к другу, и, таким образом, получаем тонкую структуру линий прежней теории Бора.

Ясно, что спектральный терм Бора, соответствующий данному значению n, разбивается на n близких термов, так как при определенном n число k может принимать n значений: 1, 2, …, n. Полезно отметить, что расхождение между соседними термами тем меньше, чем больше n, благодаря наличию n^2 в знаменателе члена с α^2.

Рассмотрим серию Бальмера. В первом приближении частоты линий даются формулой

$$\nu = R\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right], \quad n = 3, 4, \ldots . \tag{42}$$

Во втором приближении, по Зоммерфельду, необходимо спектральный терм $\frac{R}{2^2}$ заменить на $\frac{R}{2^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{2^2}\left(\frac{2}{k} - \frac{3}{4}\right)\right]$, а также спектральный терм $\frac{R}{n^2}$ на $\frac{R}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right)\right]$.

Следовательно, в серии Бальмера имеется тонкая структура с постоянным расхождением между линиями, обусловленная раздвоением ($k = 1, 2$) первого спектрального терма, и вторая тонкая структура, с расхождением между линиями, убывающим при движении вверх в пределах серии, обусловленная сложностью второго (переменного) спектрального терма. Эта вторая тонкая структура практически ненаблюдаема, так как она слишком тонка. Первая соответствует разбиению каждой из линий, задаваемых формулой Бальмера, на дублет с постоянным расхождением между составляющими для всей серии, которое равняется:

$$\Delta\nu_{\mathrm{H}} = \frac{R}{2^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{2^2}\left(\frac{2}{1} - \frac{3}{4}\right)\right] - \frac{R}{2^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{2^2}\left(\frac{2}{2} - \frac{3}{4}\right)\right] = \frac{R\alpha^2}{16}. \tag{43}$$

При замене частот волновыми числами значение этого расхождения оказывается 0,365 $см^{-1}$. Данная величина очень хорошо согласуется со значением, найденным экспериментальным путем. Таким образом, дополняя теорию Бора релятивистским рассмотрением, получаем объяснение существованию дублетов в серии Бальмера.

Если мы вернемся к вычислениям Зоммерфельда, предполагая, что имеем дело не с атомом водорода, а с атомом, имеющим атомный номер N и $(N-1)$-кратно ионизированным, то для энергии стационарного состояния, характеризуемого числами n и k, найдем:

$$E_{nk} = -\frac{RN^2 h}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2 N^2}{n^2}\left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right)\right]. \tag{44}$$

Следовательно, релятивистская поправка в квадратных скобках содержит множитель N^2, и поэтому расхождение между компонентами дублета пропорционально N^4. Таким образом, для ионизированного гелия ($N = 2$) расхождение между компонентами дублетов в серии, соответствующей серии Бальмера, должно быть в 16 раз больше, нежели в самой серии Бальмера. Отсюда ясно, что изучение дублетов в спектре He^+ могло послужить для проверки теории Зоммерфельда. Такая проверка, произведенная Пашеном, привела к очень хорошему согласию с теорией.

Таким образом, теория тонкой структуры Зоммерфельда для H и He^+ дала очень хорошие результаты. Она оказалась с успехом применимой и для объяснения важного класса дублетов в спектре рентгеновских лучей. Но позднее выяснилось, что для рентгеновских лучей и даже для простого спектра водорода применение формулы (41) наталкивается на большие трудности. Подробнее мы остановимся на этом в главе III.

ГЛАВА II. Общие понятия о дублетных оптических спектрах и их интерпретация

1. Формула Ридберга и спектральные серии

Успех формулы Бальмера и формул того же типа для водорода долго заставлял спектроскопистов биться над вопросом, нельзя ли отыскать аналогичные формулы и для прочих элементов. Так как комбинационный принцип справедлив для всех оптических линий, оставалось лишь отыскать для спектральных термов любого элемента выражение, обобщающее выражение R/n^2, найденное для водорода.

Ридберг показал, что в первом приближении спектральные термы любого элемента могут быть написаны в виде

$$\frac{R}{(n+\Delta)^2}, \tag{1}$$

где R – та же постоянная, что и для водорода. В выражении (1) n есть целое положительное число, а Δ является нецелым числом, могущим принимать для каждого элемента различные значения. Формула Ридберга не очень точно описывает спектральные термы. Ритц предложил более правильное выражение, где также фигурируют целое число n и параметр Δ. Не останавливаясь здесь на более точном представлении спектральных термов как функций от n и Δ, мы примем, что каждый спектральный терм может быть выражен при помощи этих двух параметров, а следовательно, обозначен как (n, Δ). При данном значении n параметр Δ вообще может принимать несколько различных значений. Следовательно, тому же самому n может соответствовать несколько спектральных термов. Спектроскописты обычно обозначают возможные значения Δ последовательностью букв: *s, p, d, f, g, h*… и, составляя таблицу спектральных термов, придают ей следующий вид:

$$\begin{array}{llllll} (1,s) & (2,s) & (3,s) & (4,s) & (5,s) & \ldots.. \\ & (2,p) & (3,p) & (4,p) & (5,p) & \ldots.. \\ & & (3,d) & (4,d) & (5,d) & \ldots... \\ & & & (4,f) & (5,f) & \ldots... \\ & & & & (5,g) & \ldots...\,, \end{array} \tag{2}$$

и т. д.

Таким образом, для $n = 1$ параметр Δ имеет одно значение s. Для $n = 2$ параметр Δ может иметь значения s или p. Для $n = 3$ параметр Δ принимает одно из значений *s, p, d* и т. д. В общем, когда n возрастает на единицу, то и число возможных значений Δ точно так же возрастает на единицу.

Как и для водорода, частоты линий одной и той же спектральной серии всегда представляют собой разность между характеристическим постоянным термом серии и переменным термом. Вот формулы частот четырех серий, наблюдаемых во всех спектрах и особенно хорошо изученных спектроскопистами:

Главная серия	$\nu_n = (1, s) - (n, p), \quad n = 2, 3, \ldots$	
Диффузная серия, или 1-я серия второго порядка	$\nu_n = (2, p) - (n, d), \quad n = 3, 4, \ldots$	
Узкая серия, или 2-я серия второго порядка	$\nu_n = (2, p) - (n, s), \quad n = 3, 4, \ldots$	(3)
Серия Бергмана, или основная серия	$\nu_n = (3, d) - (n, f), \quad n = 4, 5, \ldots$	

Так как значения спектральных термов всегда уменьшаются по мере возрастания n, то при движении вверх по спектральной серии мы находим линии, частота которых все более и более приближается к постоянному спектральному терму, который характеризует данную серию. Поэтому этот спектральный терм может быть назван «пределом серии».

Из формул серий (2) видна одна особенность, наблюдаемая во всех сериях, получающихся в обычных условиях: если возможные значения Δ расположить в порядке *s, p, d, f, g* (и т. д.), то значения Δ, фигурирующие в формуле серии, всегда располагаются в правильном порядке. Если значения Δ вместо букв *s, p, d, …* обозначить цифрами 1, 2, 3, …, можно сказать: «При переходе от одного терма к другому в формуле серии Δ увеличивается или уменьшается на единицу». Это называется «правилом отбора», которое показывает, что громадное число комбинаций спектральных термов, по крайней мере в обычных условиях лучеиспускания, не соответствует фактически наблюдаемым линиям.

2. Дублетный спектр щелочных металлов

Таблица (2) спектральных термов является лишь первым приближением; к сожалению, действительность далеко не так проста. Прогресс спектроскопии показал, что линии, которые в только что изложенной схеме Ридберга – Ритца считались простыми, на самом деле состоят из группы близких линий, образующих дублеты, или триплеты, или вообще мультиплеты. Так как мы не можем здесь останавливаться на подробном изложении этого действительно сложного вопроса, мы ограничимся исследованием спектра щелочных металлов, в котором линии образуют дублеты.

Изучение спектра щелочных металлов показало, что для этих элементов большая часть спектральных термов схемы Ридберга – Ритца раздваивается. Точнее выражаясь, значение s параметра Δ всегда остается одним и тем же, а значения $p, d, f, g\dots$ все двойные: есть два близких значения p_1 и p_2, два очень близких значения d_1 и d_2 и т. д. Следовательно, имеется полное основание заменить таблицу (2) следующей таблицей:

$$
\begin{array}{cccccc}
(1, s) & (2, s) & (3, s) & (4, s) & (5, s) & \dots\dots \\
 & (2, p_1) & (3, p_1) & (4, p_1) & (5, p_1) & \dots\dots \\
 & (2, p_2) & (3, p_2) & (4, p_2) & (5, p_2) & \dots\dots \\
 & & (3, d_1) & (4, d_1) & (5, d_1) & \dots\dots \\
 & & (3, d_2) & (4, d_2) & (5, d_2) & \dots\dots \\
 & & & (4, f_1) & (5, f_1) & \dots\dots \\
 & & & (4, f_2) & (5, f_2) & \dots\dots \\
 & & & & (5, g_1) & \dots\dots \\
 & & & & (5, g_2) & \dots\dots
\end{array}
\tag{4}
$$

Обычные спектральные серии получаются в результате комбинирования спектральных термов, причем Δ принимает два близких значения из списка: $s, p, d, f, g, \dots$ Это уже упоминавшееся выше правило отбора. Но здесь мы обнаруживаем другое, дополнительное правило отбора. Например, возьмем диффузную серию, описываемую формулой

$$\nu = (2, p) - (n, d), \tag{5}$$

и рассмотрим линии этой серии, для которых $n = 3$. *A priori* эта группа линий могла бы включать в себя четыре следующие линии:

$$
\begin{array}{ll}
(2, p_1) - (3, d_1); & (2, p_1) - (3, d_2); \\
(2, p_2) - (3, d_1); & (2, p_2) - (3, d_2).
\end{array}
\tag{6}
$$

Однако опыт показывает, что вторая из этих линий в обычных условиях никогда не наблюдается. В этом заключается новое правило отбора, точную формулировку которого мы дадим после введения квантовых чисел в определение спектральных термов таблицы (4).

3. Объяснение схемы Ридберга – Ритца при помощи теории Бора

Ввиду того что теория Бора дала прекрасные результаты для водорода и ионизированного гелия, вполне естественным было стремление распространить ее на более сложные атомы, и понятно, что первой задачей в этом направлении было объяснение таблицы (2) спектральных термов Ридберга – Ритца.

Когда теорию Бора пытались распространить на атомы, содержащие более одного планетарного электрона, то столкнулись со значительными трудностями. Динамическая проблема усложнилась, и применение квантовых правил стало неопределенным. Тем не менее общее сходство спектров всех элементов и присутствие в соответствующих формулах постоянной Ридберга R привело к мысли, что планетарная схема, столь полезная при изучении атома водорода, должна оказаться применимой, во всяком случае до некоторой степени, и для всех прочих элементов. Чтобы этого добиться, начали с принятия очень грубой гипотезы: в атоме с атомным числом N допускается наличие N–1 планетарных электронов, вращающихся вблизи ядра и образующих вокруг него «электронный каркас», в то время как орбита N-го планетарного электрона, называемого «оптическим», расположена вне электронного каркаса. Переходы оптического электрона из одного стационарного состояния в другое и определяют оптический спектр элемента. Благодаря гипотезе об электронном каркасе можно приближенно считать, что действие ядра с зарядом $+Ne$ и каркаса с зарядом $-(N-1)e$ на оптический электрон эквивалентно, вследствие их взаимной компенсации, действию центрального заряда $+e$. Это привело к задаче об атоме водорода с одним квантовым числом. Во втором приближении Зоммерфельд пытался учесть то, что заряды ядра и каркаса не компенсируются точно, давая единичный заряд. Траектория электрона при этом оказывается незамкнутой, приходится вводить второе квантовое число k, и это даст возможность перейти от термов, имеющих форму Бальмера, к термам вида (n, Δ). Зоммерфельд вычислил, правда, довольно грубо, термы (n, Δ), получаемые этим способом, и снова пришел к формулам Ридберга – Ритца. Теория Зоммерфельда и другие, более тщательно разработанные теории, которые можно найти в трудах по старой квантовой теории[1]), помогли найти следующее соответствие различных значений Δ ($s, p, d, \ldots$) и значений квантового азимутального числа Зоммерфельда k:

$$\begin{array}{l} k = 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ldots \\ \Delta = s\ \ p\ \ d\ \ f\ \ g\ \ h\ \ldots \end{array} \tag{7}$$

Это дает нам возможность записать любой спектральный терм (n, Δ) в форме (n, k): например, терм (2, p) запишется как (2, 2).

Так как азимутальное число k всегда меньше или равно главному числу n и не может принимать нулевое значение, то это объясняет, почему для $n = 1$ параметр Δ может иметь только значение s, для $n = 2$ – только значения s и p и т. д. Особенности таблицы (2), таким образом, оказались вполне объяснимыми. Более того, исходя из рассуждений, основанных на принципе соответствия Бора, в старой квантовой теории удалось показать, что единственными переходами, которые могут иметь место, являются переходы, для которых $\delta k = \pm 1$. В этом заключается «правило отбора», о котором мы уже упоминали в связи с таблицей (2), так как увеличение или уменьшение k на единицу, согласно (7), соответствует смещению на один шаг в последовательности возможных значений Δ.

[1] См., в частности: *Brillouin Léon*. L'Atome de Bohr. Paris: Presses universitaires. 1931. Ch. XII.

4. Дублетные спектры и квантовое число j

Итак, благодаря теориям Бора и Зоммерфельда, вводя два квантовых числа n и k, удалось объяснить спектральные термы (2) схемы Ридберга – Ритца; но мы уже видели, что таблица (2) недостаточна, так как спектральные термы, фигурирующие в ней как простые, в действительности оказываются составными. Вполне естественно предположить, что для описания каждого составного спектрального терма, соответствующего такому же терму таблицы (2), нужно ввести третье квантовое число. Это и было сделано еще во времена старой квантовой теории исключительно эмпирическим путем: наряду с числами n и k было введено третье число j. Тогда же Зоммерфельд дал ему название «внутреннее квантовое число», которое теперь уже представляется необоснованным.

Не вдаваясь здесь в объяснение того, как введение квантового числа j позволило классифицировать сложные оптические мультиплеты, мы ограничимся изучением с этой точки зрения дублетных спектров щелочных металлов. В данном случае, как мы уже видели, каждый спектральный терм (n, Δ) вообще является двойным. Согласно идеям, изложенным в предыдущем параграфе, это означает, что одному и тому же значению числа k вместо одного значения Δ соответствуют два очень близких значения. Эти два близких значения Δ, соответствующие определенным значениям чисел n и k, должны характеризоваться различными значениями квантового числа j. Это в конце концов привело к тому, что двум соседним спектральным термам приписываются, таким образом, два значения j:

$$j = k - 1 \pm \frac{1}{2} = l \pm \frac{1}{2}, \tag{8}$$

где введено обозначение:

$$k - 1 = l, \tag{9}$$

в полезности которого мы убедимся позже. Кроме того, предположим, что число j не может принимать отрицательные значения, вследствие чего для $k = 1$ возможным значением j является только $j = 1/2$. Так объясняется единственность термов s в таблице (4). Формула (8) непосредственно приводит к следующей таблице соответствия между квантовыми числами k и j и значениями Δ:

$$\begin{array}{ccccccc} k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ l & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ j & \overbrace{\qquad \tfrac{1}{2}} & \overbrace{\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{2}} & \overbrace{\tfrac{3}{2} \quad \tfrac{5}{2}} & \overbrace{\tfrac{5}{2} \quad \tfrac{7}{2}} & \overbrace{\tfrac{7}{2} \quad \tfrac{9}{2}} & \ldots \\ \Delta & s & p_1 \quad p_2 & d_1 \quad d_2 & f_1 \quad f_2 & g_1 \quad g_2 & \ldots \end{array} \tag{10}$$

Следовательно, теперь мы можем каждый спектральный терм таблицы (4) представить при помощи символа (n, k, j) и вместо таблицы (4) получим следующую:

$$
\begin{array}{ccccc}
\left(1,1,\frac{1}{2}\right) & \left(2,1,\frac{1}{2}\right) & \left(3,1,\frac{1}{2}\right) & \left(4,1,\frac{1}{2}\right) & \left(5,1,\frac{1}{2}\right)\ldots \\
 & \left(2,2,\frac{1}{2}\right) & \left(3,2,\frac{1}{2}\right) & \left(4,2,\frac{1}{2}\right) & \left(5,2,\frac{1}{2}\right)\ldots \\
 & \left(2,2,\frac{3}{2}\right) & \left(3,2,\frac{3}{2}\right) & \left(4,2,\frac{3}{2}\right) & \left(5,2,\frac{3}{2}\right)\ldots \\
 & & \left(3,3,\frac{3}{2}\right) & \left(4,3,\frac{3}{2}\right) & \left(5,3,\frac{3}{2}\right)\ldots \\
 & & \left(3,3,\frac{5}{2}\right) & \left(4,3,\frac{5}{2}\right) & \left(5,3,\frac{5}{2}\right)\ldots \\
 & & & \left(4,4,\frac{5}{2}\right) & \left(5,4,\frac{5}{2}\right)\ldots \\
 & & & \left(4,4,\frac{7}{2}\right) & \left(5,4,\frac{7}{2}\right)\ldots \\
 & & & & \left(5,5,\frac{7}{2}\right)\ldots \\
 & & & & \left(5,5,\frac{9}{2}\right)\ldots
\end{array}
\tag{11}
$$

Мы уже отметили, что для спектральных термов щелочных металлов кроме правила отбора, справедливого для таблицы (2) (т. е. $\delta k = \pm 1$), существует другое правило того же типа, так как, например, вторая из четырех линий (6) в обычных условиях не наблюдается. Это новое правило задается при помощи числа j формулой $\delta j = \begin{cases} +1 \\ \ \ 0 \\ -1 \end{cases}$. Таким образом, в целом, имеем два следующих правила:

$$
\delta k = \begin{cases} +1 \\ \\ -1 \end{cases}, \quad \delta j = \begin{cases} +1 \\ \ \ 0 \\ -1 \end{cases}. \tag{12}
$$

Проверим эти правила на четырех линиях ($2p - 3d$), приведенных в (6). В принятых обозначениях они представятся так:

$$
\begin{array}{ll}
\left(2,2,\frac{3}{2}\right) - \left(3,3,\frac{5}{2}\right); & \left(2,2,\frac{1}{2}\right) - \left(3,3,\frac{5}{2}\right); \\
\left(2,2,\frac{3}{2}\right) - \left(3,3,\frac{3}{2}\right); & \left(2,2,\frac{1}{2}\right) - \left(3,3,\frac{3}{2}\right).
\end{array}
\tag{13}
$$

Для всех четырех линий $\delta k = +1$, но одна из них $(2, 2, \frac{1}{2}) - (3, 3, \frac{5}{2})$ не удовлетворяет второму правилу (12). Это как раз именно та, которая экспериментально не наблюдается.

В старой квантовой теории смысл числа j оставался неизвестным, и все попытки понять его оказались тщетными. Гипотеза о магнитном вращающемся электроне Уленбека и Гаудсмита вскрыла его действительное значение, и мы увидим, как совершенно естественно оно появляется в теории Дирака.

ГЛАВА III. Спектры рентгеновских лучей и теории Бора и Зоммерфельда

1. Закон Мозли и теория Бора

В основном спектры рентгеновских лучей обнаруживают те же самые общие черты, что и оптические спектры. К ним применим комбинационный принцип; в них встречаются серии, соответствующие комбинации постоянного спектрального терма с переменным; в них наблюдаются и правила отбора.

В первом приближении спектральные термы рентгеновских лучей можно задать выражением

$$\frac{RN^2}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots , \tag{1}$$

где R – постоянная Ридберга и N – атомный номер элемента в случае простого излучающего тела. Это и есть закон Мозли. Кроме того, наличие здесь постоянной Ридберга указывает на близкое родство рентгеновских спектров с оптическими.

В действительности форма (1) спектральных термов является только первым приближением, а реальные спектральные термы рентгеновских лучей обнаруживают столь же сложную структуру, как и оптические спектральные термы щелочных металлов. Встречающиеся здесь дублеты на первый взгляд вполне объясняются теорией тонкой структуры Зоммерфельда, но более внимательное изучение показало, что эта теория недостаточна, и только теория магнитного электрона, особенно в форме, предложенной Дираком, в конце концов привела все в порядок.

По прежним простым представлениям теории Бора испускание рентгеновских лучей связано с перестройкой электронного каркаса. Бор, как это мы видели в предыдущей главе, считал, что испускание световых линий происходит в результате переходов внешнего электрона с одной устойчивой орбиты на другую, причем совокупность внутренних электронов вследствие переплетения их орбит образует некоторого рода каркас. Следовательно, и испускание рентгеновских лучей соответствовало бы тем изменениям, которые может испытать эта внутренняя система при переходе из одного устойчивого состояния в другое. Естественно, что строгое описание этих устойчивых состояний даже в старой квантовой теории является неосуществимым.

К настоящему времени удалось выполнить лишь приближенные расчеты, к тому же очень грубые, следующим образом. Предположим, что электронные орбиты каркаса, каждая в отдельности, характеризуются одним или несколькими квантовыми числами, что позволяет в некотором смысле пренебречь взаимодействием электронов, рассматривая их как независимые. Тогда говорят, что электроны, обладающие одинаковыми или почти одинаковыми энергиями, образуют «оболочку»; кроме того, оболочка может включать орбиты различных типов, характеризующиеся различными наборами квантовых чисел, но энергии этих орбит должны быть очень близкими.

Расчеты, выполненные для водорода, показывают, что орбиты одной и той же оболочки должны характеризоваться одним и тем же главным квантовым числом n. Опытным путем в атомах открыто существование оболочек, которые принято обозначать последовательно буквами латинского алфавита K, L, M и т. д. Выяснилось, что для оболочки K число $n = 1$, для оболочки L число $n = 2$ и т. д.

Орбиты оболочки K имеют наименьшую энергию. Согласно хорошо известному принципу, казалось бы, что в нормальном состоянии все электроны атома должны находиться в оболочке K. Изучение спектров рентгеновских лучей и периодичности химических свойств в таблице Менделеева показывает, что дело обстоит совсем не так. Мы должны предположить своего рода «насыщение оболочек», т. е. допустить, что в каждой оболочке существует некоторое максимальное число электронов. Критический анализ сведений, которые дает по этому поводу опыт, позволяет сформулировать следующее правило:

«Максимальное число электронов, которые могут принадлежать оболочке, определяемой главным квантовым числом n, равно $2n^2$».

Далее мы увидим, как можно уточнить распределение электронов по уровням энергии, принадлежащим одной и той же оболочке.

Вспомним теперь, как представляли себе испускание рентгеновских лучей Бор и Коссель. Внешний агент (материальная падающая частица или излучение), действуя на атом в нормальном состоянии, может вырвать и выбросить наружу один из электронов каркаса. Тогда атом оказывается в возбужденном состоянии; он подвергается «внутренней ионизации». Пусть далее W_0 есть нормальная минимальная энергия атома, а W_1 – его энергия после внутренней ионизации.

Разницу $W_1 - W_0$ дает ионизирующий агент. Мы увидим, что она соответствует (с точностью до множителя $1/h$) предельной частоте какой-то спектральной серии рентгеновских лучей. Следовательно, в каркасе атома имеется свободное место, и перестройка каркаса может произойти самопроизвольно, так как электрон сможет покинуть место, которое он занимал вначале, и занять свободное место. Естественно, это превращение может произойти только в том случае, если оно соответствует уменьшению полной энергии атома, и должно сопровождаться излучением, которое относится к спектральной области рентгеновских лучей.

Проще говоря, происхождение рентгеновских лучей, согласно этой концепции, связано с переходом электрона из одной оболочки в другую, с меньшей энергией, в которой в результате предварительной ионизации было создано пустое место.

После перестройки каркаса атом оказывается в состоянии менее глубокой ионизации с энергией W_2, промежуточной между W_0 и W_1.

Рассмотрим это второе ионизированное состояние и вспомним, что все электроны считаются одинаковыми: это новое состояние будет идентичным тому, которое создалось бы внешним агентом, если бы вместо того, чтобы выбросить первый электрон, он выбросил второй, тот самый, который переместился во время перестройки каркаса. Тогда энергия $W_2 - W_0$ представляет собой работу, соответствующую менее глубокой ионизации.

Следовательно, правило Бора приводит к тому, что рентгеновскому излучению, испускаемому во время перестройки, приписывается частота

$$\nu = \frac{1}{h}(W_1 - W_2) = \frac{1}{h}\left[(W_1 - W_0) - (W_2 - W_0)\right]. \qquad (2)$$

Составим список энергий $W_1 \ldots$ атома в его различных состояниях внутренней ионизации, вычитая из каждой энергию W_0 нормального состояния. Мы получим то, что можно назвать уровнями энергии атома относительно нормального состояния. Деля на h, получим рентгеновские спектральные термы:

$$\frac{W_1 - W_0}{h}, \quad \frac{W_2 - W_0}{h}, \ldots, \frac{W_n - W_0}{h}, \ldots \qquad (3)$$

Следовательно, рентгеновский спектральный терм равен работе ионизации, разделенной на h. Частоты рентгеновских линий имеют вид:

$$\nu = \left[\frac{W_n - W_0}{h} - \frac{W_m - W_0}{h}\right]. \qquad (4)$$

Линии одной и той же серии соответствуют одной и той же энергии W_n, т. е. одному и тому же конечному уровню, на котором оказался электрон в результате перестройки каркаса. Второй терм в (4) различен для разных линий той же самой серии и для линий восходящего порядка стремится к нулю: частота линий по мере роста порядкового номера линий серии стремится к пределу, равному спектральному терму $\frac{W_n - W_0}{h}$, который характеризует серию.

Закон Мозли гласит, что в последовательности элементов каждый из спектральных термов (3) изменяется, в первом и достаточно грубом приближении, пропорционально квадрату атомного номера. Чтобы вывести этот закон с помощью теории Бора, принимаем, что каждый электрон каркаса может рассматриваться как находящийся в центральном поле силы $(N - z)\frac{e}{r^2}$, причем член $\frac{ze}{r^2}$ очень грубо представляет отталкивающее действие электронов, наиболее близких к ядру. Таким образом, приходим еще раз к водородоподобному случаю и, полагая $N' = N - z$, получаем для спектральных термов общую форму:

$$R\frac{N'^2}{n^2}. \qquad (5)$$

Для глубоких оболочек тяжелых атомов z мало и можно заменить N' на N. Мы приходим, таким образом, к форме (1) закона Мозли. Вполне очевидно, что наш расчет не особенно строг: теория Бора скорее показывает, что она не противоречит закону Мозли.

2. Общий анализ рентгеновских спектров

Спектроскопистов, изучавших рентгеновские спектры, прежде всего поразило то, что рентгеновские линии разделяются на группы, четко изолированные друг от друга, в виде лестницы частот или длин волн. Сначала полагали, что каждая из этих групп линий образует одну серию, и обозначали эти серии последовательно буквами алфавита, начиная с буквы *K*: серия *K*, серия *L*, серия *M* и т. д. При переходе от одного элемента к другому, более тяжелому, совокупность серий смещается в направлении больших частот приблизительно как квадрат атомного номера *N* (Мозли). Более внимательное изучение затем показало, что группы линий, называвшиеся сначала серией *L*, серией *M* (и т. д.), в действительности распадаются на подгруппы, образующие настоящие серии, линии которых, впрочем, перепутываются на спектрограммах. Таким образом, существует несколько уровней *L*, несколько уровней *M* (и т. д.) с немного различающимися энергиями. Только уровень *K* оказывается одиночным.

Опытные данные показывают, что существует 3 уровня *L*, 5 уровней *M*, 7 уровней *N*... Каждому из этих уровней, разумеется, соответствует некоторый спектральный терм. Уровни и соответствующие им спектральные термы различают по присвоенным им римским цифрам: меньшие цифры соответствуют более глубоким уровням, т. е. большим работам ионизации.

Вот для примера таблица рентгеновских линий серий *K*, *L*, *M* для тяжелых элементов:

Термы	Серия *K*	Серии *L*			Серии *M*				
	K	L_{I}	L_{II}	L_{III}	M_{I}	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_{V}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_{I}	.	.	.	.	.	.	.	.	.
L_{II}	α_2	.	.	.	.	.	.	.	.
L_{III}	α_1	.	.	.	.	.	.	.	.
M_{I}	.	.	η	l	.	.	.	.	.
M_{II}	β_2	β_4	.	.	.	.	.	.	.
M_{III}	β_1	β_3	.	.	.	.	.	.	.
M_{IV}	.	.	β_1	α_2	.	.	.	.	.
M_{V}	.	.	.	α_1	.	.	.	.	.
N_{I}	.	.	γ_5	β_6	.	.	.	.	.
N_{II}	γ_2	γ_7	.	.	.	.	.	.	.
N_{III}	γ_1	γ_3	.	.	.	.	.	.	.
N_{IV}	.	.	γ_1	β'_2	.	ε	.	.	.
N_{V}	.	.	.	β_2	.	.	γ	.	.
N_{VI}	.	.	.	.	.	.	.	β	α_2
N_{VII}	.	.	.	.	.	.	.	.	α_1

Окончание таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
O_{I}	.	.	γ_{11}	β_7	.	.	.	.	.
O_{II}	δ_2	γ'_4	.	.	.	.	.	.	.
O_{III}	δ_1	γ_4	.	.	.	.	.	.	.
O_{IV}	.	.	γ_2	.	.	.	.	.	.
O_{V}	.	.	.	β_5	.	.	δ	.	.
P_{I}	.	.	γ'_2	β'_5	.	.	.	.	.
P_{II}	.	.	.		.	.	.	.	.
P_{III}	.	γ_8	.		.	.	.	.	.

Эту таблицу легко понять. Название каждой линии написано на пересечении строки и столбца: ее частота представляет собой разность между спектральным термом, расположенным в начале столбца, и спектральным термом в начале строки. Таким образом, линии одной и той же серии расположены в одном столбце.

Одиночная серия K образуется последовательностью дублетов: $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$, $\gamma_1 - \gamma_2$,…, интервалы которых последовательно суживаются. Все эти дублеты расширяются по мере того, как возрастает атомный номер, а разность их частот растет как четвертая степень атомного номера. Такого сорта дублеты называются «правильными дублетами», или «дублетами Зоммерфельда». Серия L_{I} имеет структуру, аналогичную серии K; она точно так же образуется из правильных дублетов, расхождение между компонентами которых уменьшается по мере восхождения в пределах серии.

Напротив, серии L_{II} и L_{III} представляют картину, весьма отличную от предыдущих. Гомологичные линии этих двух серий (фигурирующие в одной и той же строке таблицы) образуют дублеты с постоянным расхождением в пределах серии $\left(\eta - l, \beta_1 - \alpha_2, \gamma_5 - \beta_6, \gamma_1 - \beta_2', \gamma_{11} - \beta_7, \gamma_2' - \beta_5'\right)$. Это постоянное расхождение равно $\nu_{L_{\mathrm{II}}} - \nu_{L_{\mathrm{III}}}$ и изменяется как N^4 в ряду элементов. Эти дублеты точно так же относятся к «правильным дублетам».

Законы спектров рентгеновских лучей можно резюмировать так: спектральные термы рентгеновских лучей в основном изменяются как N^2 (закон Мозли); разность между двумя последовательными спектральными термами одного и того же наименования (L, M, ...), из которых первый имеет четный индекс, например $\nu_{L_{\mathrm{II}}} - \nu_{L_{\mathrm{III}}}$, изменяется как N^4 и порождает правильные дублеты.

Кроме того, заметим следующее: разность между двумя спектральными термами одного и того же наименования, из которых первый имеет нечетный индекс, например $\nu_{L_{\mathrm{I}}} - \nu_{L_{\mathrm{II}}}$, изменяется в последовательности элементов таким образом, что величина $\sqrt{\nu_{L_{\mathrm{I}}}} - \sqrt{\nu_{L_{\mathrm{II}}}}$ остается постоянной и определяет дублет, называемый «неправильным дублетом».

3. Классификация спектральных термов рентгеновских лучей

Схема Бора и Косселя приводит к предположению о том, что испускание спектральной серии рентгеновских лучей является результатом внутренней ионизации атома. Если эта ионизация приводит к изменению энергии атома от ее нормального значения W_0 к значению W_n, то характеристический спектральный терм серии есть $(W_n - W_0)/h$.

Допустим, что каждая электронная орбита может быть проквантована отдельно; тогда можно предположить, что квантование введет три квантовых числа *n, k, j,* как и для оптических спектров. Следовательно, внутренняя ионизация, которой соответствует энергия W_n, может быть задана символом (n, k, j), образованным тремя квантовыми числами, которые определяют орбиту выбрасываемого электрона до ионизации. Из этого следует, что мы должны найти соответствие каждого спектрального терма рентгеновских лучей одному из символов (n, k, j), уже встречавшихся в оптических спектрах. Итак, изучение рентгеновских серий показывает, что они имеют совершенно ту же структуру, что и спектры щелочных металлов. Следовательно, должно существовать однозначное соответствие между спектральными термами рентгеновских лучей и спектральными термами щелочных металлов (таблица (2) главы II). Соответствие это следующее:

		$(1, 1, \frac{1}{2}) = K$			
		$1s$			
$(2, 1, \frac{1}{2}) = L_{\mathrm{I}}$	$(3, 1, \frac{1}{2}) = M_{\mathrm{I}}$	$(4, 1, \frac{1}{2}) = N_{\mathrm{I}}$	$(5, 1, \frac{1}{2}) = O_{\mathrm{I}}$	$(6, 1, \frac{1}{2}) = P_{\mathrm{I}}$	
$2s$	$3s$	$4s$	$5s$	$6s$	
$(2, 2, \frac{1}{2}) = L_{\mathrm{II}}$	$(3, 2, \frac{1}{2}) = M_{\mathrm{II}}$	$(4, 2, \frac{1}{2}) = N_{\mathrm{II}}$	$(5, 2, \frac{1}{2}) = O_{\mathrm{II}}$	$(6, 2, \frac{1}{2}) = P_{\mathrm{II}}$	
$2p_1$	$3p_1$	$4p_1$	$5p_1$	$6p_1$	
$(2, 2, \frac{3}{2}) = L_{\mathrm{III}}$	$(3, 2, \frac{3}{2}) = M_{\mathrm{III}}$	$(4, 2, \frac{3}{2}) = N_{\mathrm{III}}$	$(5, 2, \frac{3}{2}) = O_{\mathrm{III}}$	$(6, 2, \frac{3}{2}) = P_{\mathrm{III}}$	
$2p_2$	$3p_2$	$4p_2$	$5p_2$	$6p_2$	
	$(3, 3, \frac{3}{2}) = M_{\mathrm{IV}}$	$(4, 3, \frac{3}{2}) = N_{\mathrm{IV}}$	$(5, 3, \frac{3}{2}) = O_{\mathrm{IV}}$		(6)
	$3d_1$	$4d_1$	$5d_1$		
	$(3, 3, \frac{5}{2}) = M_{\mathrm{V}}$	$(4, 3, \frac{5}{2}) = N_{\mathrm{V}}$	$(5, 3, \frac{5}{2}) = O_{\mathrm{V}}$		
	$3d_2$	$4d_2$	$5d_2$		
		$(4, 4, \frac{5}{2}) = N_{\mathrm{VI}}$			
		$4f_1$			
		$(4, 4, \frac{7}{2}) = N_{\mathrm{VII}}$			
		$4f_2$			

Из этой таблицы видно, что построение оболочек O и P не завершается даже в тяжелых атомах вследствие недостатка электронов.

Руководствуясь оптической аналогией, мы теперь видим, что серия K имеет спектральную формулу $(1, s) - (n, p)$: это есть, следовательно, первая главная серия дублетов, построенная как серия дублетов щелочных металлов, которые постепенно суживаются. Серия L является «второй главной серией» с формулой $(2, s) - (n, p)$ и имеет аналогичную структуру. Таким образом, объясняется сходство серий K и L_{I}.

С современной точки зрения, серии L_{II} и L_{III} распадаются на две совокупности линий. Первая совокупность образуется правильными дублетами с постоянным расхождением и простыми компонентами $\eta - l, \gamma_5 - \beta_6, \gamma_{11} - \beta_7, \gamma_2' - \beta_5'$, она аналогична узкой серии $(2, p) - (n, s)$ щелочных металлов. Вторая совокупность линий образует диффузную серию с формулой $(2, p) - (n, d)$ и содержит наиболее интенсивные линии группы L; они образуют дублеты с постоянным расхождением, которые, однако, обнаруживают тонкую структуру благодаря сложности термов d. По приведенной выше таблице линий рентгеновских лучей можно, как и для оптических спектров, проверить справедливость правил отбора $\delta k = \pm 1, \delta j = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$. Классификация линий рентгеновских лучей по аналогии с дублетными спектрами щелочных металлов, распространяющаяся и на серии M и N, дает совершенно ясную и согласованную схему, по-видимому, определяющую распределение квантовых чисел по уровням, заданное таблицей (6).

4. Теоретическое объяснение. Формула тонкой структуры Зоммерфельда

Посмотрим теперь, как пытались объяснить структуру спектральных термов рентгеновских лучей в старой квантовой теории. Первоначальное и самое простое представление состояло в том, что атом с атомным номером N считали содержащим N планетарных электронов, обращающихся по концентрическим круговым орбитам, находящимся в одной плоскости (круг K, круг L и т. д.). Чтобы грубо описать взаимодействие электронов, предполагалось, что оно может быть сведено к простому экранирующему эффекту, который проявляется как бы в уменьшении заряда ядра. Таким образом, электрон K будет подвергаться действию силы $\left(N - k\right)\frac{e^2}{r^2}$, электрон L – действию силы $\left(N - l\right)\frac{e^2}{r^2}$ и так далее, причем k, l... называются «числами экранирования». Следовательно, здесь автоматически могут быть применены расчеты, выполненные для водородного атома, и мы находим спектральные термы:

$$\frac{-Rh\left(N-k\right)^2}{1^2}, \quad \frac{-Rh\left(N-l\right)^2}{2^2}, \ldots \tag{7}$$

т. е. почти по закону Мозли. Эта первая приближенная теория явно неудовлетворительна по многим причинам и особенно потому, что она предсказывает только один уровень L, один уровень M и т. д.

Чтобы объяснить множественность уровней в оболочках, Зоммерфельд применил еще динамику теории относительности, учитывая все круговые или эллиптические орбиты. Мы видели, что этим способом для атома с атомным номером N, ионизированного $(N-1)$-кратно, он нашел спектральные термы:

$$\frac{E_{nk}}{h} = -\frac{RN^2}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2 N^2}{n^2}\left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right)\right], \tag{8}$$

где α – постоянная тонкой структуры и k – азимутальное квантовое число такое, что $0 < k \leq n$. Если принять, что отталкивание электронов можно грубо описать при помощи числа экранирования, то рентгеновский спектральный терм, характеризующийся квантовыми числами n и k, задается формулой

$$\frac{E_{nk}}{h} = -\frac{R\left(N - z_{nk}\right)^2}{n^2}\left[1 + \alpha^2\frac{\left(N - z_{nk}\right)^2}{n^2}\left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right)\right], \tag{9}$$

где z_{nk} – число экранирования, относящееся к траектории, определяемой n и k. Так как для одного данного значения n число k может принимать n различных значений, формула (9) предусматривает 1 уровень K, 2 уровня L, 3 уровня M, 4 уровня N (и т. д.), чего, как мы это видели в предыдущем параграфе, еще недостаточно. Теория Зоммерфельда, хотя и более полная, нежели первоначальная теория, все же еще слишком ограничена, так как она не вводит квантовое число j.

Тем не менее, несмотря на очевидную неполноту, теория Зоммерфельда имела очень большой успех благодаря тому, что дала количественное описание правильных дублетов. Возьмем для примера правильные дублеты серий L. Они получаются путем комбинации одного и того же терма M, N (и т. д.) с термами L_{II} и L_{III} соответственно. Следовательно, две линии дублетов имеют частоты вида $\nu_{L_{\mathrm{II}}} - \nu_i$ и $\nu_{L_{\mathrm{III}}} - \nu_i$. Разность их частот $\delta\nu_L$, или расхождение дублета, есть $\nu_{L_{\mathrm{II}}} - \nu_{L_{\mathrm{III}}}$. В своей теории Зоммерфельд оставил уровень L_{I} как временно необъяснимый и приписал уровням L_{II} и L_{III} соответственно квантовые числа $n = 2$, $k = 1$ и $n = 2$, $k = 2$. В результате[1] формула (9) дала ему:

$$\delta\nu_L = \nu_{L_{\mathrm{II}}} - \nu_{L_{\mathrm{III}}} = R\alpha^2\frac{\left(N - z_L\right)^4}{2^4}\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) = \frac{\pi^4 me^8}{2c^2h^5}\left(N - z_{\mathrm{L}}\right)^4. \tag{10}$$

Расхождение дублетов L должно, таким образом, изменяться как $(N - z_L)^4$, а это с достаточной точностью совпадает с законом, выведенным экспериментально, ибо для атомов не слишком легких z_L должно быть малым по сравнению с N. Если положим $N = 1$, $z_L = 0$, то мы снова вернемся к расхождению $\Delta\nu_{\mathrm{H}}$ дублетов серии Бальмера [формула (43) главы I].

[1] Приравнивая z_{21} и z_{22} и полагая оба равными z_L.

Следовательно, мы имеем:

$$\delta\nu_L = \Delta\nu_{\mathrm{H}}\,(N - z_L)^4. \tag{11}$$

Формула (11) хорошо подтверждается численно экспериментальными данными, если положить $z_L = 3{,}5$, что является вполне разумной гипотезой. Дублеты серий M и N так же хорошо описываются численно при применении формулы (9). Это точное предсказание правильных дублетов обеспечило первоначальный громадный успех теории тонкой структуры Зоммерфельда. Позднее, однако, возникло серьезное возражение, которое мы и изложим далее.

5. Недостаточность теории тонкой структуры Зоммерфельда

Введя только два квантовых числа n и k, теория Зоммерфельда не дала нам достаточное количество уровней для описания спектров рентгеновских лучей. Нужно ввести третье число j, и оптическая аналогия приводит нас к распределению квантовых чисел по уровням такому, как это показано в таблице (6). Но тогда возникает трудность, непреодолимая для теории Зоммерфельда. В самом деле, по таблице (6), уровни L_{II} и L_{III} имеют символы $(2,\ 2,\ \frac{1}{2})$ и $(2,\ 2,\ \frac{3}{2})$; следовательно, они имеют одно и то же число $k = 2$ и различаются числами j. Но это разрушает описание правильных дублетов L при помощи формулы (9), которую дал Зоммерфельд, так как она предполагает, самое главное, что числа k для L_{II} и L_{III} различаются на единицу. Пришлось убедиться (и это было, однако, большой неожиданностью), что успех теории Зоммерфельда был чисто случайным. Создание более современных теорий, и в особенности той, которая будет предметом этой книги, показало затем, что случайность этого успеха была очевидной. Только привлечение теории относительности позволило верно истолковать правильные дублеты, но при условии одновременного учета магнитных свойств электрона. Именно отсутствие этого последнего элемента в теории Зоммерфельда и составляло ее слабость.

Как мы увидим дальше, внимательное изучение спектров рентгеновских лучей показывает недостаточность теории тонкой структуры Зоммерфельда. Но даже в простом случае водорода дальнейшее изучение дублетов серии Бальмера показало, что его теория неправильно описывала и эти дублеты. Возьмем линию H_α серии Бальмера. Она получается в результате перехода из одного стационарного состояния, для которого $n = 3$, в другое стационарное состояние, для которого $n = 2$. Эта линия в действительности является составной (мультиплетной), и, если мы воспользуемся хорошо известным теперь способом представления уровней, теория Зоммерфельда для тонкой структуры этой линии дает следующую схему (рис. 2):

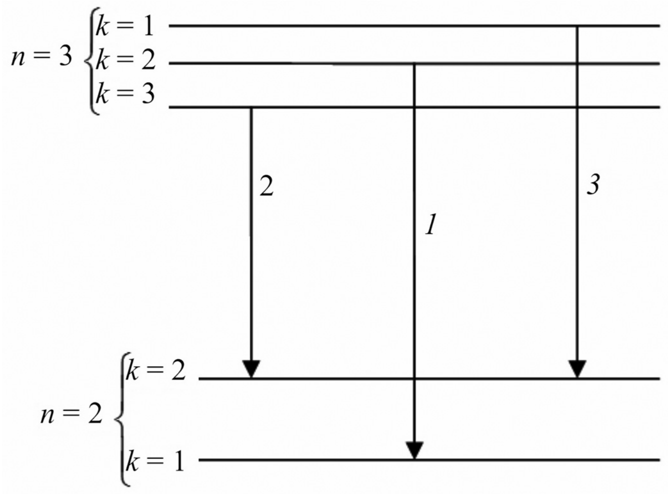

Рис. 2

Применяя правило отбора $\delta k = \pm 1$, можно предсказать три линии, проявляющиеся в тонкой структуре H_α. Дублет Зоммерфельда образуется линией *1* и совокупностью двух линий с очень близкими частотами *2* и *3*, вообще мало различимых.

При помощи схемы с тремя квантовыми числами *n, k, j* тонкая структура представляется в следующем виде (рис. 3).

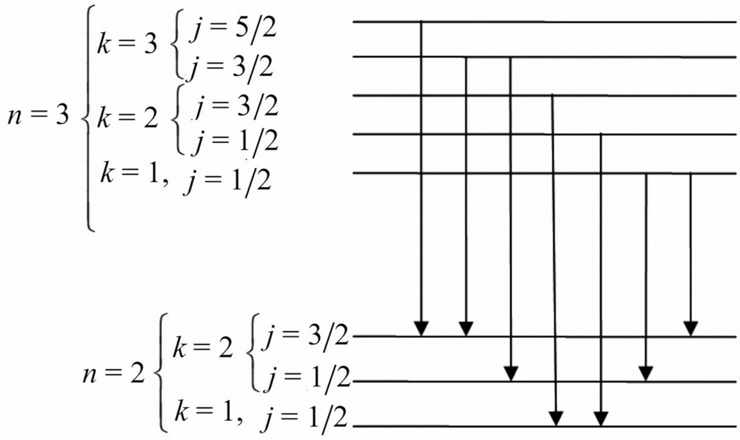

Рис. 3

Правила отбора $\delta k = \pm 1$ и $\delta j = 0, \pm 1$ разрешают 7 линий, обозначенных на рис. 3. Но в силу соображений, которые выяснятся позже, *для водорода* на основании новых теорий магнитного электрона необходимо считать совпадающими уровни, которые имеют одно и то же *j* и различные *k*. Тогда мы получаем следующую упрощенную схему (рис. 4).

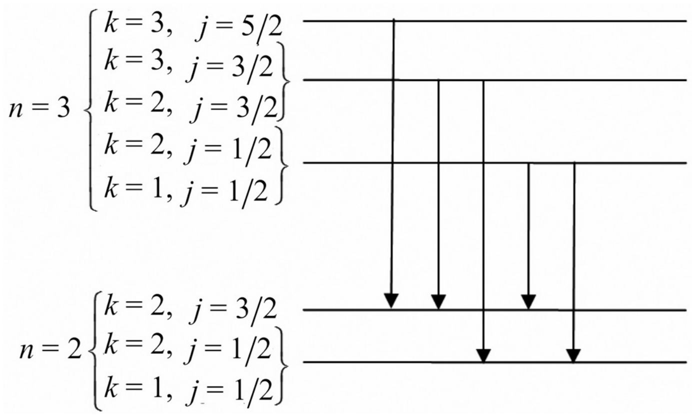

Рис. 4

Следовательно, в тонкой структуре H_α должно быть пять компонент, тогда как теория Зоммерфельда предсказывала только три. Тщательное изучение этой тонкой структуры подтвердило, что она содержит более трех линий, тем самым подтверждая новую схему уровней, а не схему Зоммерфельда. Изучение дублетов He^+ подтвердило это заключение.

Итак, даже для водорода и ионизированного гелия теория Зоммерфельда потерпела крушение, по крайней мере, в своей первоначальной форме.

6. Распределение электронов по уровням. Правило Стонера

В тяжелом атоме, как мы уже говорили, различные электроны распределяются по ряду оболочек: K, L и т.д. Эти оболочки, в свою очередь, распадаются на подоболочки или уровни: так, оболочка L содержит уровни L_{I}, L_{II} и L_{III}.

Мы видели, что каждая оболочка может содержать не больше определенного числа электронов. Мы говорили о насыщении оболочек. Вполне естественно предположить, что имеет место и насыщение уровней. Используя химические свойства элементов и характер их оптических и рентгеновских спектров, различные авторы (Бор, Мен Смит, Довилье и Л. де Бройль и др.) смогли изучить распределение электронов по уровням для разных элементов. Таким образом, пришли к предположению о максимальном числе электронов, которое содержится на каждом уровне. Стонер высказал по этому поводу правило, которое теперь считается общепризнанным: *«Уровень, которому соответствует символ (n, k, j), содержит максимум 2j + 1 электронов»*.

Правило Стонера позволяет вычислить максимальное число электронов, принадлежащих к оболочке, определяемой данным значением главного квантового числа n. Действительно, так как для данного значения k число j принимает значения $k-1\pm\frac{1}{2}$, уровни

$$\left(n, k, k-\frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(n, k, k-\frac{3}{2}\right)$$

содержат максимум

$$2\left(k-\frac{1}{2}\right)+1+2\left(k-\frac{3}{2}\right)+1 = 2(2k-1)$$

электронов, а всего оболочка n содержит их максимум

$$2\sum_{1}^{n}{}_{k}(2k-1) = 2\left[n(n+1)-n\right] = 2n^2. \tag{12}$$

Этот закон уже упоминался в параграфе 1.

ГЛАВА IV. Магнитные аномалии и гипотеза о вращающемся электроне

1. Гиромагнитные аномалии

Простые правила электродинамики позволяют установить общее соотношение между магнитным моментом $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$, порождаемым смещением заряда под действием центральной силы, и угловым моментом $\overrightarrow{M}$, соответствующим этому движению. Рассмотрим плоскую замкнутую траекторию, описываемую частицей с массой m_0 и электрическим зарядом ε под действием *центральной силы*[1]. По теореме площадей угловой момент $M = m_0 vr \sin\alpha$ есть величина постоянная.

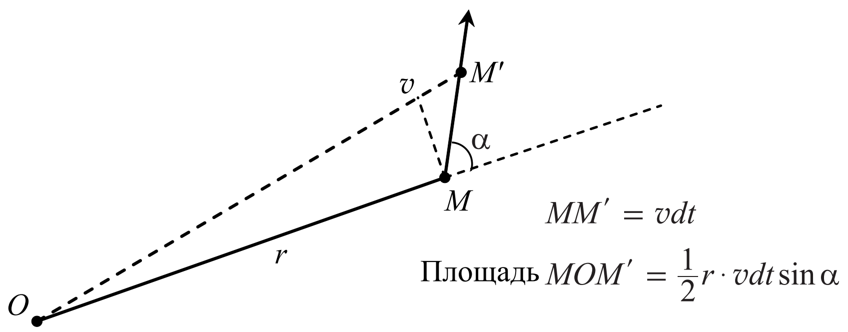

Рис. 5

Если $d\mathfrak{A}$ есть площадь, описываемая радиус-вектором в течение времени dt, мы имеем

$$d\mathfrak{A} = \frac{1}{2}vrdt \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2m_0}Mdt. \tag{1}$$

Так как M по теореме площадей есть постоянная, после интегрирования по периоду T движения находим

$$\mathfrak{A} = \frac{M}{2m_0}T, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}$ – полная площадь, охватываемая траекторией.

С другой стороны, движение заряда ε эквивалентно существованию тока i. По определению, сила тока равна количеству электричества, которое проходит за секунду сквозь единицу площади нормально к траектории. Так как эту площадку пересекает заряд ε в течение времени T, имеем

$$i = \frac{\varepsilon}{T}, \tag{3}$$

предполагая, что ε выражается в электромагнитных единицах.

[1] Массу частицы мы обозначаем m_0 вместо m, чтобы в дальнейшем не путать эту массу с квантовым числом m и чтобы подготовить переход к релятивистским уравнениям.

Из (2) и (3) выводим

$$i = \frac{M\varepsilon}{2m_0\mathfrak{A}}. \tag{4}$$

С магнитной точки зрения этот ток эквивалентен магнитному листку мощности i с поверхностью $\mathfrak{A}$. Магнитный момент $\vec{\mathfrak{M}}$ этого листка равен:

$$\mathfrak{M} = i\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon M}{2m_0}. \tag{5}$$

Это соотношение справедливо и по величине и по направлению, т.е. для векторов $\vec{\mathfrak{M}}$ и $\vec{M}$, откуда

$$\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{\vec{M}} = \frac{\varepsilon}{2m_0}. \tag{6}$$

В более общем виде можно показать, что, если рассматривать совокупность частиц с одной и той же массой m и одним и тем же зарядом ε, образующих систему в стационарном состоянии, соотношение (6) между полным магнитным моментом $\vec{\mathfrak{M}}$, создаваемым движением этих зарядов, и постоянным полным угловым моментом $\vec{M}$ системы по-прежнему верно[2].

По теории Бора, атомы представляют собой совокупности электронов в стационарном движении. Следовательно, к атомам можно применить соотношение (6) при условии, что $\varepsilon = -e/c$, где e есть элементарный положительный заряд, выраженный, как обычно, в электростатических единицах. Тогда для атомов мы имеем формулу[3]:

$$\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{\vec{M}} = -\frac{e}{2m_0 c} \quad (m_0 - \text{масса электрона}). \tag{7}$$

Эта фундаментальная формула приводит к идее «магнетона Бора». Действительно, в старой квантовой теории всегда полагалось, что общий угловой момент для атома равен целому кратному $h/(2\pi)$, откуда

$$\mathfrak{M} = n\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{e}{2m_0 c} = n\frac{eh}{4\pi m_0 c} \quad (n - \text{целое положительное или отрицательное}). \tag{8}$$

Таким образом, магнитный момент атома всегда оказывается целым кратным определенной единицы, называемой «магнетоном Бора», равной

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_0 c}. \tag{9}$$

Хорошо известный опыт Штерна и Герлаха уверенно подтвердил реальное существование магнетона Бора.

[2] Это показал Эйнштейн. См. доклад де Гааза в: «Atomes et Electrons» (Rapports du Conseil de Physique Solvay de 1921. Paris: Gauthier-Villars, 1923).

[3] Эта формула справедлива *со своим знаком* при следующих условиях: рассматривается *прямоугольная система координат* и моменты определяют таким образом, что угловой момент частицы, вращающейся вокруг оси z в прямом направлении (обратном направлению часовой стрелки), должен быть направлен в ту же сторону, что и ось oz.

Соотношение (7), однако, не может быть досконально проверено в общем случае. Так, проверялось, не начнет ли вращаться магнитный стержень, если его поместить в магнитное поле. Теория действительно указывает, что стержень должен прийти во вращательное движение, причем отношение его магнитного момента к его угловому моменту дается соотношением (7). Такое явление в самом деле наблюдается (опыт Эйнштейна и де Гааза), но отношение $(\mathfrak{M}/M)$ было найдено равным $\frac{e}{m_0 c}$ вместо $\frac{e}{2m_0 c}$! Барнет нашел то же самое аномальное отношение, изучая обратный эффект (намагничивание стержня при его вращении). Именно в этом несовпадении состоит главное затруднение, разрешение которого, как это мы увидим далее, приводит к возникновению идеи о собственном магнетизме электрона.

2. Нормальный эффект Зеемана

Другая трудность, которая подсказала гипотезу о магнитном электроне, это существование аномалий эффекта Зеемана.

Напомним сначала вкратце классическую теорию нормального эффекта Зеемана, данную в свое время Лоренцем. Рассмотрим движение частицы с массой m_0 и зарядом ε в однородном магнитном поле H. Частица подвергается действию силы

$$\vec{F} = \left[\frac{\varepsilon}{c}\vec{v} \times \vec{H}\right]. \tag{10}$$

Дж. Лармор доказал очень интересную и знаменитую теорему о движении заряженной частицы, которое следует из (10): «Если рассматривать систему координат, которая вращается вокруг направления однородного магнитного поля с постоянной угловой скоростью:

$$\omega_L = -\frac{\varepsilon H}{2m_0 c} \quad (\varepsilon \text{ измеряется в еденицах СГСЭ}), \tag{11}$$

то движение частицы в этой системе координат такое же, какое было бы в неподвижной системе координат в отсутствие магнитного поля при условии, что остальные силы остаются теми же».

Применим эту теорему к внутриатомному электрону, совершающему периодическое движение с частотой ν. Если создать однородное магнитное поле, то движение, им вызванное, могло бы совершаться электроном в системе координат, вращающейся с угловой скоростью прецессии Лармора (11). Частота $\frac{\omega_L}{2\pi}$, соответствующая этой прецессии, прибавляется к частоте ν движения электрона или вычитается из нее, в зависимости от относительной ориентации магнитного поля и орбиты. Выходит, что материальное тело, которое в отсутствие магнитного поля H испускает излучение частоты v, в присутствии однородного магнитного поля H должно испускать также частоты $\nu + \frac{1}{4\pi}\frac{eH}{m_0 c}$ и $\nu - \frac{1}{4\pi}\frac{eH}{m_0 c}$. Из теории следует также, что, наблюдая излучение под прямым углом к магнитному полю, мы заметим линию частоты ν, поляризованную вдоль поля, и две линии с частотами $\nu \pm \frac{1}{4\pi}\frac{eH}{m_0 c}$, поляризованные под прямым углом к полю, тогда как, наблюдая в направлении поля, мы должны заметить только две последние линии с круговыми поляризациями в противоположных направлениях. Это и составляет нормальный эффект Зеемана, который действительно наблюдался в определенном числе случаев и открытие которого 30 лет тому назад послужило блестящим подтверждением электронной теории Лоренца.

Старая квантовая теория не добавила ничего особенно нового в описании эффекта Зеемана. Пусть имеем электрон в атоме в устойчивом состоянии в отсутствие внешнего магнитного поля; обозначим через W_0 энергию этого электрона и через $\mathfrak{M}$ магнитный момент его орбиты, допуская, что мы имеем право рассматривать независимо любой из электронов атома. В присутствии внешнего однородного магнитного поля H энергия электронной орбиты будет

$$W_H = W_0 - \left(\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{H}\right), \tag{12}$$

или в силу (6):

$$W_H = W_0 + \frac{e}{2m_0 c}\left(\vec{M} \cdot \vec{H}\right). \tag{13}$$

Чтобы составить скалярное произведение $\left(\vec{M} \cdot \vec{H}\right)$, мы должны взять составляющую углового момента $\vec{M}$ вдоль поля, и эта составляющая по старой квантовой теории должна быть кратной $\frac{h}{2\pi}$([4]). Таким образом, формула (13) принимает вид

$$W_H = W_0 + m\frac{ehH}{4\pi m_0 c}, \tag{14}$$

где m обозначает квантовое число, которое называется «магнитным квантовым числом».

Возьмем затем линию излучения, обусловленную переходом электрона из устойчивого состояния с энергией W_0 в устойчивое состояние с меньшей энергией W_0'. В отсутствие внешнего поля эта линия будет иметь частоту

$$\nu_0 = \frac{W_0 - W_0'}{h}. \tag{15}$$

[4] См.: *Brillouin Léon.* L'Atome de Bohr. P. 167.

В присутствии однородного магнитного поля H частота линии в силу (14) становится равной

$$\nu_H = \frac{W_H - W_H{}'}{h} = \nu_0 + \left(m - m'\right)\frac{eH}{4\pi m_0 c}, \tag{16}$$

где $\left(m - m'\right)$ может принимать всевозможные целые положительные и отрицательные значения, включая нуль. Для описания нормального эффекта Зеемана в старой квантовой теории, руководствуясь принципом соответствия, принимали правило отбора $\Delta m = 0, \pm 1$. Тогда в точности восстанавливались выводы классической теории, так как при объединении формул (14) и (15) исключалась постоянная h.

3. Аномалии эффекта Зеемана. Множитель Ланде

Теория нормального эффекта Зеемана, изложенная в предыдущем параграфе, подтверждалась только в небольшом количестве случаев. Большая часть наблюдаемых эффектов Зеемана оказывается аномальной. Мы довольствуемся описанием аномального эффекта Зеемана для щелочных металлов, ибо это наиболее простой случай, а также и единственный объясненный теорией Дирака, которая до сих пор не в состоянии учесть взаимодействие электронов.

Эффект Зеемана для щелочных металлов подчиняется следующим общим правилам:

а) гомологичные линии различных щелочных элементов дают один и тот же эффект Зеемана;

б) линии одной и той же спектральной серии обнаруживают одно и то же расщепление (правило Престона);

в) линии, смещенные под действием магнитного поля, всегда располагаются относительно первоначальной линии симметрично по частотам и поляризациям, как в случае нормального эффекта;

г) спектральный интервал (разность частот) между смещенной линией и первоначальной всегда равен произведению нормального интервала Лоренца на простую дробь (правило Рунге).

Таким образом, для определенной линии смещенные компоненты в эффекте Зеемана всегда находятся в ряду частот на расстояниях от первоначальной линии, даваемых выражением $\pm\frac{s}{r}\frac{eH}{4\pi m_0 c}$, где r есть характеристическое целое число рассматриваемой линии (знаменатель Рунге) и где s принимает определенный набор целых значений, который и определяет мультиплетность расщепленной линии.

Правило (г) Рунге может быть истолковано следующим образом. По комбинационному принципу расщепление линии определяется расщеплением спектральных термов. Таким образом, пришли к мысли, что каждый спектральный терм должен иметь свой знаменатель Рунге. Пусть r_1 и r_2 – знаменатели двух спектральных термов; тогда правило Рунге можно формулировать так, что под влиянием магнитного поля эти термы соответственно переходят в $\frac{q_1}{r_1}\Delta\nu_H$ и $\frac{q_2}{r_2}\Delta\nu_H$, причем q_1 и q_2 – целые числа, а $\Delta\nu_H$ обозначает нормальный интервал Лоренца $\frac{eH}{4\pi m_0 c}$. Линия, возникающая в результате комбинирования рассматриваемых термов, действительно испытывает спектральное смещение:

$$\left(\frac{q_1}{r_1}-\frac{q_2}{r_2}\right)\Delta\nu_H=\frac{q_1r_2-q_2r_1}{r_1r_2}\Delta\nu_H. \tag{17}$$

Так как это можно написать в виде $\frac{s}{r}\Delta\nu_H$, мы приходим к формулировке правила Рунге (г).

Характер расщепления спектральных термов в присутствии магнитного поля был уточнен Ланде, который многое сделал для расшифровки аномальных эффектов Зеемана. Он сформулировал следующие правила.

1. Каждый спектральный терм с символом (n, l, j) (используется обозначение $l = k - 1$) распадается в *слабом* магнитном поле на $2j + 1$ термов, характеризующихся *полуцелыми* магнитными квантовыми числами m: $-j, -(j-1), ..., +(j-1), +j$.

2. Взяв за единицу нормальный интервал Лоренца $\frac{eH}{4\pi m_0 c}$, отклонения между частотами расщепленных термов и первоначальным термом можно дать в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{lll}
\text{Термы } s & \left[n,0,\frac{1}{2}\right] & -1,+1 \\
\text{Термы } p_1 & \left[n,1,\frac{1}{2}\right] & -\frac{1}{3},+\frac{1}{3} \\
\text{Термы } p_2 & \left[n,1,\frac{3}{2}\right] & -\frac{6}{3},-\frac{2}{3},+\frac{2}{3},+\frac{6}{3} \\
\text{Термы } d_1 & \left[n,2,\frac{3}{2}\right] & -\frac{6}{5},-\frac{2}{5},+\frac{2}{5},+\frac{6}{5} \\
\text{Термы } d_2 & \left[n,2,\frac{5}{2}\right] & -\frac{15}{5},-\frac{9}{5},-\frac{3}{5},+\frac{3}{5},+\frac{9}{5},+\frac{15}{5}
\end{array} \tag{18}$$

Эта таблица показывает, что знаменатели Рунге равны 1 для термов s, 3 – для термов p, 5 – для термов d и т. д. В общем случае знаменатель Рунге для терма (n, l, j) равен $2l+1$.

3. В переходах, которые порождают наблюдаемые линии спектра, магнитное квантовое число может изменяться только на –1, 0 или +1. Для $\Delta m = \pm 1$ испускаемая линия, если она наблюдается под прямым углом к полю, линейно поляризована нормально к направлению поля; для $\Delta m = 0$, наблюдаемая в тех же условиях, она поляризована параллельно полю.

При значениях магнитного числа m, данных правилом 1, Ланде записал частотные отклонения, представленные в таблице (18), в форме mg, где g есть число, множитель Ланде, который имеет следующие значения:

Оболочка	l	g			
		$j=1/2$	$j=3/2$	$j=5/2$	$j=7/2$
s	0	2			
p	1	$2/3$	$4/3$		
d	2		$4/5$	$6/5$	
f	3			$6/7$	$8/7$

(19)

Таблицу (19) можно резюмировать формулой:

$$g = \frac{j+1/2}{l+1/2} = \frac{2j+1}{2l+1}. \tag{20}$$

Таковы значения множителя Ланде для терма (n, l, j) *щелочного металла*.

Спектральный терм атома щелочного металла, который в отсутствие поля имел значение $(n, l, j)_0$, в присутствии однородного поля H может принимать $2j+1$ значений:

$$\left(n, l, j\right)_H = \left(n, l, j\right)_0 + mg\frac{eH}{4\pi m_0 c}, \tag{21}$$

причем g имеет значение (20), а m может принимать любое из полуцелых значений между $-j$ и $+j$[5].

Старая квантовая теория, точно так же, как и классическая теория, не в состоянии объяснить происхождение множителя g. Мы увидим, что и волновой механике здесь посчастливилось не больше. Только введение магнетизма электрона объяснило происхождение множителя g, правильную форму которого, не вызывающую никаких возражений, позволит нам предсказать теория Дирака.

Формула (21) верна только для слабого магнитного поля. Что же надо под этим подразумевать? Будем говорить, что магнитное поле, порождающее аномальное расщепление Зеемана дублета щелочного металла, слабо, если смещение спектральных термов, которое вызвано присутствием этого магнитного поля, мало по сравнению с расхождением между составляющими дублета в отсутствие поля. Согласно этому определению, одно и то же магнитное поле может проявлять себя то как сильное, то как слабое, в зависимости от случая. Когда поле слабо в смысле, который только что был уточнен, формула (21) применима. Когда оно не может считаться слабым, налицо более сложное яв-

[5] Правило Престона (б) становится понятным, если заметить, что расщепление Зеемана всегда независимо от главного квантового числа n, а именно оно и меняется, когда переходят от одной линии к другой в пределах одной серии.

ление, подчиняющееся закону, сформулированному Фойгтом, о котором мы здесь распространяться не будем. Но если поле очень сильное, т.е. если расщепление Зеемана, порождаемое им, велико по сравнению с нормальным расхождением между компонентами дублета, снова получаем простое явление, эффект Пашена – Бака. Тогда наблюдается *нормальное* расщепление Зеемана с центром в центре тяжести двух составляющих первоначального дублета.

4. Гипотеза о вращающемся магнитном электроне

Если обратиться к законам аномального эффекта Зеемана и сравнить их с классической теорией Лоренца, то заметим, что для их получения следовало бы вместо формулы (7) взять другое соотношение:

$$\left|\frac{\mathfrak{M}}{M}\right| = g\frac{e}{2m_0 c}. \tag{22}$$

Таким образом, это приводит нас к мысли, что в веществе существуют угловые моменты и магнитные моменты, не связанные соотношением (7). Аномалии гиромагнитного эффекта, о которых говорилось в конце параграфа 1, приводят к тому же выводу. Следовательно, нельзя предполагать, что весь магнетизм атома вызывается обращением по орбитам электронов, рассматриваемых как точечные заряды. Таким образом, может возникнуть идея приписать самому электрону собственный магнитный момент и собственный угловой момент, которые были бы связаны друг с другом соотношением, отличающимся от (7). Именно эту остроумную идею выдвинули Уленбек и Гаудсмит еще до создания новой механики (квантовой).

Предложив классический образ электрона, Уленбек и Гаудсмит уподобили его электрически заряженному шару, вращающемуся вокруг одного из своих диаметров и имеющему угловой момент $M = \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ и магнитный момент, равный магнетону Бора $\mathfrak{M} = \frac{eh}{4\pi m_0 c}$, таким образом, что для $\left|\frac{\mathfrak{M}}{M}\right|$ получилось значение $\frac{e}{m_0 c}$, как это показали опыты Эйнштейна и де Гааза. Так как отношение $\left|\frac{\mathfrak{M}}{M}\right|$ для электрона является удвоенным нормальным отношением (7), можно говорить о «двукратном магнетизме» электрона. После успеха гипотезы Уленбека и Гаудсмита предпринимались различные попытки получить классическую модель вращающегося электрона, но сейчас интерес к этим попыткам в значительной мере утратился в связи с созданием новой (квантовой) механики, согласно которой мы не можем считать электрон маленьким телом, локализованным в пространстве.

Гипотеза о вращающемся магнитном электроне с самого момента своего возникновения позволила предугадать пути разрешения трудностей, уже перечисленных нами. Рассмотрим сначала вопрос о правильных дублетах рентгеновских лучей. Уленбек и Гаудсмит приняли, что магнитная ось электрона всегда нормальна к плоскости его траектории. Так как для вектора собственного углового момента (часто называемого вектором «спина») остаются два возможных направления, каждой траектории с квантовыми числами n и k соответствуют две возможности. Тогда становится понятной необходимость для окончательного квантового определения устойчивой траектории ввести новое число j, способное принимать два различных значения для данных n и k. Полный угловой момент, представляемый как сумма орбитального углового момента электрона, равного $k\frac{h}{2\pi}$, и спина, равного $\pm\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, можно написать в виде

$$M_{\text{полный}} = \left(k \pm \frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}. \tag{23}$$

Можно попытаться положить $j = k \pm 1/2$. Однако мы скоро увидим, что новая механика приводит к замене k на $l = k - 1$. Поэтому понятно, что правильная связь j и k будет даваться уже приведенной ранее формулой

$$j = k - 1 \pm \frac{1}{2} = l \pm \frac{1}{2}. \tag{24}$$

Тогда число j задает полный угловой момент в единицах $h/2\pi$. По классическим представлениям, маленький магнит, задающий модель электрона, движется в кулоновском или квазикулоновском поле ядра и электронного каркаса. Тогда все происходит так, как будто маленький магнит подвергается действию магнитного поля

$$\vec{H} = -\frac{1}{c}[\vec{v} \times \vec{h}], \tag{25}$$

где $\vec{h}$ – кулоновское поле. Формула (25) определяет действие электростатического поля на магнитный полюс, движущийся со скоростью $\vec{v}$. Так как поле $\vec{H}$ перпендикулярно плоскости орбиты, описываемой маленьким магнитом-электроном в кулоновском поле, потенциальная энергия этого маленького магнита в поле $\vec{H}$ есть

$$U = \pm \mathfrak{M} H, \tag{26}$$

где $\mathfrak{M}$ равно магнетону Бора, согласно гипотезе Уленбека и Гаудсмита, и где нужно брать знак «+» или «–» в зависимости от проекции момента $\mathfrak{M}$ на нормаль к плоскости траектории, а ориентация нормали зависит от направления движения. Вследствие существования потенциальной энергии (26) каждый уровень (n, k) теории Зоммерфельда расщепляется на два уровня (n, k, j). Расчеты, выполненные Уленбеком и Гаудсмитом, затем повторенные и усовершенствованные Томасом и Френкелем и опиравшиеся только на старую квантовую теорию, позволили подтвердить закон о N^4 для дублетов, получаемых комбинацией спектральных термов, у которых число j различается на единицу, и таким образом ликвидируется трудность, с которой столкнулась первоначальная теория Зоммерфельда (см. параграф 5 предыдущей главы). Но эти расчеты дают повод для критики и приводят к хорошим результатам, только если используются искусственные гипотезы, как, например, замена квантовым числом l квантового числа k; замена, никак не оправдываемая, если исходить из старой квантовой теории. Сегодня очевидно, что невозможно исследовать внутриатомные проблемы методами старой механики и необходимо обращаться к методам волновой механики. Поэтому мы не останавливаемся на расчетах первоначальной теории магнитного электрона[6].

Гипотеза о вращающемся магнитном электроне положила начало объяснению аномального эффекта Зеемана и формулы Ланде. Мы все время будем ограничиваться только случаем щелочных металлов. Внешний оптический электрон щелочного металла имеет полный угловой момент (момент орбитальный + спин), равный $j = l \pm 1/2$ в единицах $h/2\pi$, если принять несколько произвольно замену k на l.

Какова же будет потенциальная энергия этого оптического электрона в присутствии внешнего магнитного поля H? Положим, согласно старой квантовой теории, что составляющая M_H полного углового момента в направлении поля H будет вида $mh/2\pi$, где m – магнитное квантовое число, которое может принимать одно из полуцелых значений от $-j$ до $+j$. Тогда полный магнитный момент образует с полем H угол, косинус которого равен m/j. Если бы электрон не имел собственного двойного магнитного момента, его энергия в поле H имела бы вид

$$W_H = W_0 - \mathfrak{M}_H \cdot H = W_0 + \frac{e}{2m_0 c} M_H H = W_0 + m\frac{ehH}{4\pi m_0 c}. \tag{27}$$

Мы снова возвратились бы к формуле (14) и нормальному эффекту Зеемана. Но благодаря двойному магнитному моменту электрона мы имеем (все время ставя l вместо k):

$$\mathfrak{M}_H = -\frac{e}{2m_0 c} \cdot l\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{m}{j} \mp 2\frac{e}{2m_0 c} \cdot \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{m}{j} = -\frac{e}{2m_0 c} \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{l \pm 1}{j} \cdot m. \tag{28}$$

Поэтому получаем формулу

$$W_H = W_0 - \mathfrak{M}_H \cdot H = W_0 + m\frac{l \pm 1}{j}\frac{ehH}{4\pi m_0 c}, \tag{29}$$

которая эквивалентна эмпирическому соотношению (21) при условии, если положить

$$g = \frac{l \pm 1}{j} = \frac{j \pm 1/2}{l \pm 1/2} = \frac{2j \pm 1}{2l \pm 1}. \tag{30}$$

[6] См.: *Brillouin Léon.* Op. cit. Ch. XVI.

Эта формула, полученная с помощью довольно произвольных гипотез, обнаруживает бесспорное сходство с эмпирической формулой Ланде (20).

Гипотеза о магнитном электроне, частично использованная в старой квантовой теории, дала все же интересные результаты. Но нынешний успех новой механики показал, что вопросы, относящиеся к электрону, нужно ставить совершенно иначе. Итак, нам необходимо теперь сформулировать основные принципы волновой механики. Одновременно мы посмотрим, как безуспешно пытались вводить в первоначальную форму этой новой механики релятивистские идеи. Эти попытки не дали возможности разрешить трудности, изложенные на предыдущих страницах. Только теория Дирака, введя в волновую механику одновременно принцип относительности и собственный магнетизм электрона, смогла устранить эти затруднения.

ГЛАВА V. Краткое изложение принципов волновой механики

1. Точка зрения новой механики

В прежней механике частицы или материальные точки рассматривались как небольшие тела ничтожных размеров, имеющие в каждый данный момент вполне определенное положение в пространстве. Если частица находится в движении, совокупность ее последовательных положений составляет в таком случае ее траекторию. Классические уравнения ньютоновской динамики (или слегка модифицированные уравнения эйнштейновской динамики) позволяют, зная силы, действию которых подвергается частица, и определенные начальные условия, предвидеть все дальнейшее движение. Частицу характеризуют некоторые величины, такие как ее координаты, энергия, составляющие ее импульса, углового момента по отношению к некоторой точке и другие; прежняя механика приписывает этим величинам точно определенное в каждый данный момент значение, и ее уравнения позволяют точно вычислить последовательность этих значений во времени.

Совершенно отлична точка зрения новой механики, а именно: для нее величины, связанные с частицей, вообще не имеют точно определенных значений, вследствие чего больше не приходится строго говорить о положении в каждый данный момент и о траектории. В каждый данный момент любой величине, связанной с частицей, можно приписать только определенное число возможных значений, причем каждое из них может быть реализовано с определенной вероятностью. Это значит, что если в данный момент произвести точное измерение искомой величины, то это измерение даст одно из значений, предусмотренных как возможные. Вероятность того, что одно из этих возможных значений будет результатом измерения, может быть вычислена заранее.

Таким образом, в то время как целью прежней механики было, исходя из первоначального данного состояния, строго и точно предсказать эволюцию величин, приписываемых частице, более скромной целью новой механики является только вычисление возможных значений этих величин в каждый данный момент и соответствующих вероятностей. С математической точки зрения, различие между обеими механиками заключается в следующем. В то время как старая теория исходит из обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющих выражать координаты материальных точек как функции времени, новая исходит из некоторого уравнения в частных производных, имеющего форму волнового уравнения. Мы ознакомимся с выводом этого основного уравнения, ограничившись случаем одной частицы, находящейся во внешнем поле, так как общий случай системы частиц, взаимодействующих друг с другом, просто описываемый в рамках волновой механики в ее первоначальной форме, нас здесь не интересует, ибо теорию Дирака до сих пор не удалось удовлетворительным образом распространить на случай системы магнитных электронов.

2. Вывод нерелятивистского волнового уравнения

Запишем волновое уравнение новой механики в его первоначальной нерелятивистской форме. Это уравнение можно получить до некоторой степени автоматически исходя из выражения энергии в прежней ньютоновской механике. Пусть частица с массой m движется в поле, имеющем потенциал $U(x, y, z, t)$. Классическое выражение для энергии частицы есть

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z, t), \tag{1}$$

а импульс частицы, по определению, вектор

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2}$$

с компонентами $p_x = mv_x$ и т. д.

Следовательно, между энергией и составляющими импульса существует соотношение

$$E = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x, y, z, t). \tag{3}$$

Правая часть (3) может быть обозначена через $H(x, y, z, t, p_x, p_y, p_z)$: это гамильтонова функция, которая выражает энергию в каждый данный момент t как функцию координат частиц и составляющих ее импульса (или импульсов Лагранжа).

Теперь мы покажем, как находится волновое уравнение для рассматриваемой частицы в волновой механике. В гамильтоновой функции p_x заменяется на $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$, p_y – на $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}$ и p_z – на $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$; таким образом, получается оператор

$$H\left(x, y, z, t, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

называемый «оператором Гамильтона». Тогда мы получим волновое уравнение новой механики, написав:

$$H(\Psi) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{4}$$

где $\Psi(x, y, z, t)$ – волновая функция частицы; функция, существенно комплексная. Используя форму оператора H, легко находим следующее выражение для (4):

$$\Delta\Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2}U(x, y, z, t)\Psi = -\frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{5}$$

где Δ – хорошо известный оператор Лапласа. Так как волновое уравнение по отношению ко времени является уравнением первого порядка, оно позволяет определить форму волновой функции в каждый момент, если известна ее форма в первоначальный момент.

В очень важном случае, когда U не зависит от времени (постоянное внешнее поле), волновое уравнение допускает монохроматические решения, т. е. зависимость от времени определяется только множителем вида $e^{-\frac{2\pi i}{h}Et}$. Такая монохроматическая волна удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E - U(x, y, z)\right]\Psi = 0, \tag{6}$$

или уравнению Шредингера, которое представляет собой вырожденную форму уравнения (5).

В частном случае, когда $U = 0$ (внешнее поле отсутствует), для монохроматических волн можно также написать уравнение (6) с $U = 0$, и решением будет плоская монохроматическая волна:

$$\Psi = a e^{-\frac{2\pi i}{h}\left[Et - \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right]}, \tag{7}$$

где a – постоянная амплитуда, α, β, γ – направляющие косинусы вектора распространения волны. Волна (7) имеет частоту $\nu = E/h$ и длину волны $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{mv}$.

Это плоская монохроматическая волна, которую волновая механика с момента своего возникновения приписывает свободному прямолинейному и равномерному движению частицы с массой m, энергией E и импульсом mv.

3. Новое понимание величин, приписываемых частице

Мы видели, что переход от прежней механики к новой совершается путем замены составляющих импульса операторами $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$ и т. д. Это только один из частных случаев применения общей идеи новой механики, идеи, которая заключается в замене операторами всех величин классической динамики. Нетрудно уточнить рецепт, по которому образуются эти операторы. Мы уже знаем, каковы операторы, соответствующие p_x, p_y, p_z; с другой стороны, оператор, соответствующий энергии, есть определенный выше оператор Гамильтона H. Координате частицы, например x, сопоставляется оператор x (что означает «оператор умножения на x»). Все же остальные механические величины суть производные от $x, y, z, t, p_x, p_y, p_z$. Следовательно, каждый раз, когда величина выражается целой рациональной функцией от координат и импульсов, мы умеем находить соответствующий оператор[1].

[1] Здесь могла бы иметь место неопределенность в расположении множителей, но этим мы заниматься не будем, так как данная проблема нам далее не встретится.

Таким образом, например, z-составляющая углового момента частицы по отношению к началу координат будет заменена оператором

$$M_z = xp_y - yp_x = \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{8}$$

где выбраны прямоугольные координаты и принято, что вращательному движению в положительном направлении в плоскости xy соответствует положительный угловой момент.

Операторы, соответствующие измеримым механическим величинам, к построению которых привела нас волновая механика, вообще представляют собой комплексные операторы, принадлежащие к особому классу: это эрмитовы операторы.

Вот как определяется класс эрмитовых операторов. Условимся, что если в дальнейшем в этой работе определенной буквой обозначен оператор или функция, то та же буква со звездочкой будет представлять комплексно сопряженную величину. Примем во внимание это условие, и пусть A будет оператор рассматриваемого вида. Если $d\tau$ обозначает элемент объема $dxdydz$ пространства, то оператор A является, согласно определению, эрмитовым, если имеем

$$\int f^* A(g)d\tau = \int gA^*(f^*)d\tau. \tag{9}$$

При этом интегрирование осуществляется по всему пространству, а функции f и g от координат конечны и равномерно непрерывны во всем пространстве, достаточно быстро стремясь к нулю на бесконечности, чтобы интегралы по поверхности, полученные при интегрировании по частям в левой части (9), были равны нулю. Все операторы, рассматриваевые в волновой механике, эрмитовы. Это легко доказать для каждого оператора, и в частности, например, для оператора M_z (8).

Кроме эрмитовости, операторы волновой механики всегда обладают еще и другим общим свойством: они линейны, т. е. всегда имеем:

$$A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2), \tag{10}$$

а также

$$A(c\varphi) = cA(\varphi), \quad c = \text{const}. \tag{11}$$

Нужно сказать, что между операторами, приписываемыми новой механикой каждой частице, существует важное отличие. Одни из них затрагивают в своем действии совокупность трех координат x, y, z и называются «полными операторами». Другие затрагивают только одну или две координаты и поэтому являются «неполными операторами». Например, оператор Гамильтона H является полным, в то время как операторы p_x или M_z – неполные. Позже мы убедимся в важности этого различия.

Короче говоря, в волновой механике каждой механической величине, приписываемой частице, ставится в соответствие линейный эрмитов оператор. Но совершенно очевидно, что при точном измерении одной из этих механических величин результат измерения выразится действительным числом. Таким образом, как это мы уже говорили в параграфе 1, целью новой механики является предсказание того, каковы те действительные числа, которые нам может дать точное измерение значения механической величины. Следовательно, располагая эрмитовым оператором, который новая механика ставит в соответствие величине, приписываемой частице, мы должны суметь вывести набор действительных чисел, представляющих все возможные результаты точного измерения данной величины. Последнее возможно, так как все эрмитовы операторы волновой механики имеют ряд «собственных значений», являющихся действительными числами. Вот это мы теперь и объясним.

4. Собственные значения и собственные функции эрмитова оператора

Пусть A – линейный эрмитов оператор. Напишем уравнение:

$$A(\varphi) = \alpha\varphi, \tag{12}$$

в котором α – некоторая постоянная, а φ – функция от координат x, y, z.

По определению, «собственными значениями оператора A» мы назовем значения постоянной α, для которых уравнение (12) допускает по крайней мере одно решение $\varphi(x, y, z)$, называемое «собственной функцией оператора A», обладающей следующими свойствами[2]: она везде конечна и равномерно непрерывна, и интеграл от квадрата ее модуля по всему пространству имеет смысл и сходится. Естественно, если оператор A зависит от времени, то от него зависят также и его собственные значения и собственные функции.

Мы примем существование собственных значений линейных и эрмитовых операторов волновой механики, но покажем, что эти собственные значения обязательно действительные. В самом деле, уравнение, сопряженное с (12), запишется в виде

$$A^*(\varphi^*) = \alpha^*\varphi^*, \tag{12*}$$

а так как A – линейный оператор, мы имеем:

$$\int_D \varphi^* A(\varphi)d\tau - \int_D \varphi A^*(\varphi^*)d\tau = (\alpha - \alpha^*)\int_D \varphi\varphi^* d\tau, \tag{13}$$

причем интегрирование распространяется по всей области D изменения переменных, которые встречаются в φ, т. е. в A. Но левая часть (13) равна нулю, так как A является эрмитовым. Ввиду того что интеграл в правой части существенно положителен, мы должны иметь $\alpha = \alpha^*$; следовательно, α – число действительное.

[2] Различными здесь считаются только линейно независимые функции.

Совокупность собственных действительных значений эрмитова оператора называется «спектром» этого оператора. Этот спектр дискретен, если собственные значения изолированы, и сплошной, если они образуют непрерывную последовательность. Спектр может быть даже частично сплошным, частично дискретным. Сначала мы рассмотрим дискретные спектры.

Обозначим через α_i собственное изолированное значение. Существует по крайней мере одна собственная функция $\varphi_i(x, y, z)$, которая ему соответствует. Совокупность собственных функций образует ортогональную систему в том смысле, что если φ_i и φ_j суть две собственные функции, соответствующие двум различным собственным значениям α_i и α_j, мы будем иметь:

$$\int_D \varphi_i^* \varphi_j \, d\tau = 0. \tag{14}$$

В самом деле, так как α_i действительные, мы имеем:

$$A(\varphi_j) = \alpha_j \varphi_j, \quad A^*(\varphi_i^*) = \alpha_i \varphi_i^*, \tag{15}$$

а следовательно,

$$\int_D \varphi_j A^*(\varphi_i^*) d\tau - \int_D \varphi_i^* A(\varphi_j) d\tau = (\alpha_i - \alpha_j) \int_D \varphi_i^* \varphi_j \, d\tau. \tag{16}$$

Поскольку левая часть вследствие эрмитовости A равна нулю и $\alpha_i - \alpha_j$, согласно предположению, отлично от нуля, то уравнение (14) доказано.

Доказательство непригодно для двух линейно независимых собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению. Когда встречается такой случай, говорят, что налицо имеется вырождение и что собственное значение кратно. Пусть α_i – собственное кратное значение, которому соответствует p собственных линейно независимых функций $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{ip}$. Так как оператор A линейный, всякая линейная комбинация функций $\varphi_{i1} \ldots \varphi_{ip}$ является решением уравнения $A\varphi = \alpha_i \varphi$. Тогда мы можем заменить p собственных линейно независимых функций $\varphi_{i1} \ldots \varphi_{ip}$ на p линейно независимых комбинаций этих функций, и нетрудно видеть, что эти линейные комбинации можно выбрать таким образом, чтобы они были ортогональны между собой. Иначе говоря, когда собственное значение кратно, система собственных линейно независимых функций определена только с точностью до линейного преобразования, и этой частичной неопределенностью можно воспользоваться, чтобы получить систему собственных независимых функций, которые будут ортогональны. Таким образом, всегда можно считать, что совокупность собственных функций эрмитова оператора ортогональна.

Собственные функции эрмитова оператора определены только с точностью до постоянного комплексного множителя (даже без вырождения). Чтобы фиксировать модуль этого комплексного множителя, обычно «нормируют» функции φ_i, т. е. полагают

$$\int_D \varphi_i^* \varphi_i \, d\tau = \int_D |\varphi_i|^2 d\tau = 1. \tag{17}$$

Это уравнение имеет смысл, так как $|\varphi_i|^2$ суммируемо. Когда собственные функции нормированы, они содержат еще произвольный множитель вида $e^{i\alpha}$.

Вводя символ δ_{ij}, равный единице, если $i = j$, и нулю, если $i \neq j$, можно формулы (14) и (17) свести к одной:

$$\int_D \varphi_i^* \varphi_j \, d\tau = \delta_{ij}. \tag{18}$$

Все предыдущие формулы применимы к дискретному спектру. Если оператор A имеет сплошной спектр, каждому собственному значению α этого спектра соответствует одна собственная функция, которую мы запишем как $\varphi(\alpha, x, y, z)$, ибо параметр α, непрерывно изменяющийся в сплошном спектре, более естественно представить как независимую переменную, чем как индекс. Собственные функции $\varphi(\alpha, x, y, z)$ ортогональны собственным функциям дискретного спектра, если он имеется. Но, чтобы избежать определенных трудностей сходимости, при изучении сплошных спектров удобнее вместо самих собственных функций $\varphi(\alpha, x, y, z)$ рассматривать выражения $\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} \varphi^*(\alpha, x, y, z)\,d\alpha$, называемые «собственными дифференциалами», которые соответствуют интервалам $(\alpha, \alpha + \Delta\alpha)$, выбранным как угодно малыми в области непрерывного изменения α. Употребление собственных дифференциалов приводит к замене формулы (18) формулой

$$\frac{1}{\Delta\alpha}\int_D d\tau \left[\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} \varphi^*(\alpha, x, y, z)\,d\alpha\right]\left[\int_{\alpha'}^{\alpha'+\Delta\alpha} \varphi(\alpha, x, y, z)\,d\alpha\right] = \delta_{\alpha\alpha'}. \tag{19}$$

Прежде чем закончить этот параграф, мы должны еще отметить одно очень важное свойство собственных функций линейного эрмитова оператора A: они образуют «полную систему». Это значит, что при весьма общих условиях функция от переменных, затрагиваемых оператором A (переменных из области D), всегда может быть разложена в ряд по собственным функциям этого оператора. Если, например, $f(x, y, z)$ есть функция от трех переменных $x, y, z,$ то в общем случае ее можно разложить в ряд по собственным функциям эрмитова оператора A в виде

$$f(x, y, z) = \sum_i d_i \varphi_i(x,y,z) + \int d(\alpha)\varphi(\alpha, x, y, z)\,d\alpha, \tag{20}$$

причем сумма $\sum$ распространяется на дискретный спектр, а интеграл берется по сплошному спектру.

Вводя собственные дифференциалы, соответствующие различным интервалам $\Delta\alpha$ сплошного спектра, мы можем заменить (20) на формулу

$$f(x, y, z) = \sum_i d_i \varphi_i(x, y, z) + \sum_{\Delta\alpha} d(\alpha)\left[\frac{1}{\Delta\alpha}\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} \varphi(\alpha, x, y, z)\,d\alpha\right]\Delta\alpha. \tag{21}$$

Пользуясь формулами (18) и (19), легко находим:

$$d_i = \int_D \varphi_i^* f(x, y, z)\, d\tau;$$

$$d(\alpha) = \int_D \left[\frac{1}{\Delta\alpha}\int_\alpha^{\alpha+\Delta\alpha} \varphi^*(\alpha, x, y, z)\, d\alpha\right] f(x, y, z)\, d\tau. \qquad (22)$$

Величины d_i и $d(\alpha)$ называются «коэффициентами Фурье» разложения функции $f(x, y, z)$ по собственным функциям оператора A. Ряд и интеграл Фурье возникают в этом типе разложения как простые частные случаи.

5. Общие принципы волновой механики

В параграфе 1 настоящей главы мы уже говорили, что целью новой механики является вычисление возможных значений величин, приписываемых частице, и соответствующих им вероятностей. Затем мы выяснили, как связывать с частицей функцию $\Psi(x, y, z, t)$, решение уравнения (5), – волновую функцию, которую мы всегда предполагаем «нормированной», т.е. удовлетворяющей условию[3]:

$$\int \Psi\Psi^* d\tau = 1. \qquad (23)$$

Далее, мы с каждой величиной, приписываемой частице, связываем соответствующий линейный эрмитов оператор, который позволяет определить совокупность действительных чисел, его собственных значений, а также полную систему нормированных ортогональных функций, его собственных функций.

Теперь мы можем сформулировать два следующих основных принципа новой механики.

Первый принцип: Возможные в момент t значения величины, приписываемой частице, т.е. возможные результаты точного измерения, произведенного в момент t, этой величины, суть собственные значения в момент t линейного эрмитова оператора A, соответствующего этой величине.

Второй принцип: Если частица в качестве волновой функции имеет определенное решение $\Psi(x, y, z, t)$ своего волнового уравнения, то вероятность того, что точное измерение величины, соответствующей полному оператору A, даст в момент t определенное собственное значение, равна квадрату модуля коэффициента при соответствующей собственной функции в разложении волновой функции Ψ по собственным нормированным и ортогональным функциям оператора A.

[3] Далее мы докажем, что если условие (23) удовлетворено в определенный момент, то оно удовлетворено и во всякий другой момент.

В явной форме это означает, что если функция Ψ разлагается по собственным функциям A в виде [аналогично (21)]:

$$\Psi = \sum_i c_i \varphi_i + \sum_{\Delta\alpha} c(\alpha) \left[\frac{1}{\Delta\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} \varphi(\alpha) d\alpha \right] \Delta\alpha, \tag{24}$$

то $|c_i|^2$ дает вероятность собственного значения α_i, а $|c(\alpha)|^2 \Delta\alpha$ дает вероятность значения, находящегося в интервале $(\alpha, \alpha + \Delta\alpha)$. Поскольку функция Ψ нормирована, то сумма вероятностей всех возможных исходов равна единице, как это нетрудно проверить. Естественно, что вероятности, определяемые вторым принципом, вообще являются функциями времени t, т. е. момента измерения.

Если оператор A допускает кратные собственные значения, формулировка второго принципа должна быть дополнена. Пусть α_i – кратное собственное значение, которому соответствуют p нормированных и ортогональных линейно независимых собственных функций $\varphi_{i1} ... \varphi_{ip}$. Вероятность найти при измерении значение α_i для рассматриваемой величины есть

$$|c_{i1}|^2 + |c_{i2}|^2 + ... + |c_{ip}|^2,$$

т. е. сумма квадратов модулей коэффициентов при $\varphi_{i1} ... \varphi_{ip}$ в разложении Ψ по собственным функциям A. Эта вероятность является независимой от способа, каким выбирают p собственных функций $\varphi_{i1} ... \varphi_{ip}$, как это и должно быть.

Когда оператор A неполный, формулировка второго принципа должна быть изменена. Действительно, тогда собственные функции A не содержат всех трех переменных x, y, z и в разложении (24) c_i и $c(\alpha)$, очевидно, являются функциями переменных, не содержащихся в φ_i и $\varphi(\alpha)$. Тогда вероятность собственного значения α_i не может быть равна $|c_i|^2$, т. е. величине, которая зависела бы еще от каких-то переменных. Следовательно, чтобы получить вероятности, необходимо *проинтегрировать* указанные выше выражения по всей области изменения переменных, которые не затрагиваются оператором A. Например, если A зависит только от y и z, то c_i будут зависеть от x и вероятность значения α_i будет не $|c_i|^2$, а $\int_{-\infty}^{\infty} |c_i|^2 dx$. Нетрудно убедиться, что это уточнение вполне согласуется с идеей, что полная вероятность всех возможных исходов должна быть равна единице.

Далее мы приведем несколько примеров применения этих общих принципов. Очень простой пример связан с оператором Гамильтона, который, как мы знаем, является полным оператором. В случае оператора Гамильтона уравнение (12), если взять E вместо α, запишется в виде

$$H(\varphi) = E\varphi. \tag{25}$$

Итак, имеются собственные значения E_i и собственные функции φ_i. Эти собственные значения и собственные функции зависят от времени, если от него зависит H, т. е. если система не консервативна. Точное измерение энергии может дать в результате только одно из значений E_i, относящихся к моменту t измерения, и вероятность получения значения $E_k(t)$ равна квадрату модуля коэффициента при функции φ_k в разложении волновой функции Ψ частицы по собственным функциям энергии в момент t. Это положение в других наших работах называется «принципом спектрального разложения».

Попробуем теперь применить наши принципы к координате x частицы. Уравнение (12) принимает вид

$$x \cdot \varphi = \alpha\varphi. \tag{26}$$

Это уравнение при всяком действительном значении α имеет в качестве решения функцию $\delta(x-\alpha)$, или функцию Дирака, обладающую следующими свойствами.

1. Она является четной функцией аргумента $(x-\alpha)$.

2. Интеграл $\int f(x)\delta(x-\alpha)dx$ равен нулю, если интервал интегрирования не содержит значение $x=\alpha$, и равен $f(\alpha)$ для всякой области интегрирования, содержащей это значение. Следовательно, уравнение (26) приводит к сплошному спектру, содержащему все действительные значения α от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким образом, согласно первому принципу, измерение координаты может *a priori* дать (как это и должно быть) любое из значений от $-\infty$ до $+\infty$. Далее, собственные дифференциалы $\dfrac{1}{\Delta\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha}\delta(x-\alpha)d\alpha$ для сплошного спектра, как это легко видеть, образуют полную нормированную и ортогональную систему. Так как по определению функции δ мы имеем

$$\Psi(x, y, z, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi(\alpha, y, z, t)\delta(x-\alpha)d\alpha, \tag{27}$$

то вероятность того, что измерение координаты x дает значение, находящееся в интервале $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, по второму принципу представляется в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\left|\Psi(\alpha, y, z, t)\right|^2 d\alpha. \tag{28}$$

Легко прийти к следующему выводу: вероятность того, что одновременное измерение трех координат даст значения, лежащие в интервалах $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, $(\beta, \beta + d\beta)$, $(\gamma, \gamma + d\gamma)$, $\left|\Psi(\alpha, \beta, \gamma, t)\right|^2 d\alpha d\beta d\gamma$, а это приводит к заключению, что измерение позволяет локализовать частицу в элементе объема $dxdydz$ с центром в точке с координатами x, y, z с вероятностью $\left|\Psi(x, y, z, t)\right|^2 dx\,dy\,dz$. Это положение в других наших работах называется принципом интерференции.

6. Одновременно измеримые и одновременно не измеримые величины

Из общих принципов, изложенных в предыдущих параграфах, вытекает очень важное следствие: две механические величины могут быть одновременно точно измерены только в том случае, если соответствующие операторы A и B перестановочны, т. е. если $AB = BA$.

Действительно, если φ_i и χ_i обозначают соответственно собственные функции A и B, а α_i и β_i – их собственные значения, то для того, чтобы можно было одновременно точно измерить обе рассматриваемые величины, нужно, чтобы мы могли одновременно приписать первой величине определенное значение α_i, а второй – определенное значение β_i. Следовательно, согласно второму принципу, должно быть возможным записать волновую функцию Ψ частицы в форме

$$\Psi = c_i\varphi_i = d_i\chi_i, \tag{29}$$

где c_i может зависеть от переменных, которые не входят в φ_i, если A – неполный оператор, а d_i точно так же может зависеть от переменных, которые не входят в χ_i, если оператор B – неполный. Из предыдущего уравнения выводим:

$$AB(\Psi) = AB(d_i\chi_i) = A(d_i\beta_i\chi_i) = \beta_i A(c_i\varphi_i) = \beta_i\alpha_i\Psi, \tag{30}$$

$$BA(\Psi) = BA(c_i\varphi_i) = B(c_i\alpha_i\varphi_i) = \alpha_i B(d_i\chi_i) = \alpha_i\beta_i\Psi. \tag{31}$$

Тогда мы должны иметь

$$AB(\Psi) = BA(\Psi) \tag{32}$$

для всех значений Ψ вида (29), что влечет за собой $AB = BA$.

Наиболее простой и важный пример величин, одновременно не измеримых, представляют координата и соответствующая составляющая импульса. Действительно, мы имеем:

$$xp_x - p_x x = -\frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot x - x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{h}{2\pi i}. \tag{33}$$

Иначе говоря, оператор $xp_x - p_x x$ эквивалентен умножению на $-h/(2\pi i)$. Значит, x и p_x не коммутативны и, следовательно, координата и соответствующая составляющая импульса не могут быть точно измерены одновременно. Координата и соответствующий импульс Лагранжа, таким образом, известны в данный момент только с некоторыми неопределенностями Δx и Δp_x, которые не могут быть одновременно равными нулю. Можно доказать, что всегда имеет место неравенство

$$\Delta x\cdot\Delta p_x \geq h, \tag{34}$$

по крайней мере, по порядку величины. Неравенство (34) и два аналогичных неравенства для y и z составляют «соотношения неопределенностей» Гейзенберга, на которые мы неоднократно указывали в других своих работах[4].

[4] Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire. Paris: Hermann, 1930. La théorie de la quantification dans la nouvelle Mécanique. Paris: Hermann, 1932. В обеих работах имеется подробное изложение принципов, кратко изложенных в настоящей и последующей главах.

ГЛАВА VI. Краткое изложение принципов волновой механики *(продолжение)*

1. Некоторые сведения об алгебраических матрицах

«Матрицей» называется таблица чисел, содержащая конечное или бесконечное число строк и столбцов. Если таблица имеет конечные размеры, мы предполагаем, что она квадратная. Можно было бы предположить для большей общности, что она прямоугольная, но это привело бы к ненужному здесь усложнению. Положение каждого числа в таблице (элемента матрицы) может быть задано с помощью двух индексов, обозначающих соответственно строку и столбец, к которым оно принадлежит. Итак, обозначим a_{ik} элемент матрицы, расположенный в таблице на пересечении i-й строки и k-го столбца; тогда матрица в целом будет обозначаться A или $|a_{ik}|$. Элементы a_{ii} с одинаковыми индексами расположены по диагонали таблицы и называются «диагональными элементами». Будем говорить, что две матрицы A и B равны и запишем $A = B$, если равны их элементы с теми же индексами ($a_{ik} = b_{ik}$).

В алгебре с матрицами приходится иметь дело, когда изучаются линейные преобразования. В самом деле, если переменные x_i' представляют собой линейные комбинации других переменных x_i, мы будем иметь формулы преобразования типа

$$x_i' = \sum_j a_{ij} x_j. \tag{1}$$

Эти формулы можно представить в сжатом виде, написав векторное соотношение:

$$X' = AX \tag{2}$$

и условившись, что вектор AX имеет в качестве составляющей с индексом i величину $\left(AX\right)_i = \sum\limits_j a_{ij} x_j$.

Формула (1) дает возможность определить сумму и произведение двух матриц, имеющих одинаковое число строк и столбцов, при следующих соглашениях:

1) сумма двух матриц A и B есть матрица $A + B$, элемент которой с индексами ik есть $a_{ik} + b_{ik}$;

2) произведение матрицы B на матрицу A есть матрица AB, ik-й элемент которой есть $\left(AB\right)_{ik} = \sum\limits_l a_{il} b_{lk}$.

Из определения 2 следует, что, вообще говоря, произведение матриц BA не равно произведению матриц AB. Говорят, что в таком случае две матрицы не коммутативны. Если $AB = -BA$, матрицы антикоммутативны.

Элементы матрицы могут быть действительными или комплексными. Рассмотрим общий случай матриц с комплексными элементами. Следовательно, формулы преобразования (1) выражают, что мы переходим от некоторых комплексных переменных x_i к другим комплексным переменным x_i'. Теперь мы определим несколько специальных особенно важных типов комплексных матриц.

Мы будем говорить, что матрица *эрмитова*, если элементы, симметричные по отношению к диагонали, являются комплексно сопряженными ($a_{ik} = a^*_{ki}$). Диагональные элементы эрмитовой матрицы действительные. Если все элементы эрмитовой матрицы действительные, то матрица симметрична по отношению к своей диагонали. Мы говорим, что матрица антиэрмитова, если имеем $a_{ik} = -a^*_{ki}$. Диагональные элементы антиэмритовой матрицы чисто мнимые. Произведение двух эрмитовых матриц эрмитово только в том случае, если они коммутируют. Если они антикоммутируют, произведение антиэрмитово.

«Матрицей, сопряженной с матрицей A», называют и обозначают A^+ матрицу, полученную из A, если в ней переставить члены, симметричные по отношению к диагонали, и взять их комплексное сопряжение; тогда имеем $a^+_{ik} = a^*_{ki}$. Из этого определения следует, что эрмитова матрица равна своей сопряженной: если A эрмитова, то имеем $A = A^+$. Нетрудно доказать формулу $(AB)^+ = B^+A^+$, и очевидно, что $(A^+)^+ = A$.

Матрица называется «диагональной» в том случае, когда только диагональные элементы не равны нулю. Очень важна эрмитова диагональная матрица, называемая единичной матрицей, которую обозначают как 1: это матрица, ik-й элемент которой равен δ_{ik}.

Если дана матрица A и существует другая матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$, то матрица A^{-1} называется матрицей, «обратной к A». Эта обратная матрица, если она существует, всегда единственна. В том случае, когда A имеет конечное число строк и столбцов, всегда существует обратная матрица, если детерминант, образованный с помощью таблицы a_{ik}, не равен нулю. В том случае, когда A имеет бесконечное число строк и столбцов, может не существовать обратная матрица A^{-1} и в каждом отдельном случае нужно проверять ее существование. Легко проверить формулу: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Когда A является матрицей с действительными элементами такой, что

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \tag{3}$$

говорят, что матрица A ортогональна: она определяет ортогональное преобразование, которое оставляет инвариантной величину $\sum_i x_i^2$. Это хорошо известно. Для матриц с комплексными элементами это определение можно обобщить: если A представляет собой комплексную матрицу и если мы имеем:

$$\sum_i a_{ij} a^*_{ik} = \delta_{jk}, \tag{4}$$

то A определяет комплексное ортогональное преобразование или, как еще говорят, она является «унитарной». Для комплексного ортогонального преобразования величина $\sum_i x_i^* x_i$ остается инвариантной. Условие (4) может быть записано в виде

$$\sum_i a_{ki}^+ a_{ij} = \delta_{kj}, \quad \text{или} \quad A^+ A = 1; \quad A^+ = A^{-1}. \tag{5}$$

Таким образом, чтобы матрица была унитарной, ее сопряженная матрица должна совпадать с ее обратной матрицей.

Пусть A есть некоторая матрица и S – унитарная матрица, имеющая то же число строк и столбцов; тогда говорят, что матрица $B = S^{-1}AS$ получена из A путем «канонического преобразования». Если A эрмитова, то эрмитова и B. В самом деле, так как по предположению $S^+ = S^{-1}$ и $A^+ = A$, мы имеем:

$$B^+ = (S^{-1}AS)^+ = S^+ A^+ (S^{-1})^+ = S^{-1}AS = B. \tag{6}$$

Отсюда вытекает важная теорема: «Каноническое преобразование превращает эрмитову матрицу в другую эрмитову матрицу»[1].

2. Матрицы волновой механики

Допустим, что нам известна полная система нормированных и ортогональных функций: $\varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$; мы назовем их базисными функциями. Такую систему дает нам, например, совокупность собственных функций эрмитова оператора.

Если дана эта базисная система, то каждому линейному оператору мы можем поставить в соответствие матрицу. Пусть, в самом деле, A – некоторый линейный оператор; применение этого оператора к одной из базисных функций дает нам функцию, которая может быть разложена по полной системе $\varphi_1 \ldots \varphi_n \ldots$ Следовательно, мы имеем соотношение вида

$$A(\varphi_i) = \sum_j a_{ji} \varphi_j, \tag{7}$$

откуда в силу свойств φ_i

$$a_{ji} = \int_D \varphi_j^* A(\varphi_i) d\tau, \tag{8}$$

где D является областью изменения переменных, от которых зависят φ_i.

По определению величины a_{ji} формулы (8) суть элементы матрицы, порожденной оператором A, в базисной системе φ_i. Эту матрицу мы также обозначим буквой A. Если нам нужно уточнить систему базисных функций, мы можем матрицу обозначать A^{φ}.

[1] Это положение непременно предполагает, что матрица S канонического преобразования является унитарной.

Полученные таким образом матрицы могут быть названы «матрицами волновой механики». Теперь мы докажем, что они в точности удовлетворяют правилам сложения и умножения алгебраических матриц. Для этого рассмотрим два линейных оператора A и B. Мы получим

$$A(\varphi_i) = \sum_j a_{ji}\varphi_j, \quad B(\varphi_i) = \sum_j b_{ji}\varphi_j, \tag{9}$$

откуда

$$(A+B)(\varphi_i) = \sum_j (a_{ji} + b_{ji})\varphi_j. \tag{10}$$

Следовательно, ji-й элемент матрицы $A + B$ есть $a_{ji} + b_{ji}$; это и есть правило сложения алгебраических матриц. Кроме того, мы имеем:

$$AB(\varphi_i) = \sum_j b_{ji} A(\varphi_j) = \sum_j b_{ji} \sum_k a_{kj}\varphi_k = \sum_k \left(\sum_j a_{kj} b_{ji}\right)\varphi_k. \tag{11}$$

Таким образом, ki-й элемент матрицы AB есть $\sum_j a_{kj} b_{ji}$, а это и есть правило умножения алгебраических матриц.

Условием того, чтобы матрица A волновой механики была эрмитовой, является:

$$a_{ji} = \int_D \varphi_j^* A(\varphi_i) d\tau = a_{ij}^* = \int_D \varphi_i A^*(\varphi_j^*) d\tau. \tag{12}$$

Но мы знаем, что если это условие выполнено для всех функций φ_i, то оператор A, по определению, является эрмитовым, и наоборот. Следовательно, необходимое и достаточное условие того, чтобы матрица волновой механики была эрмитовой, состоит в том, чтобы эрмитовым был оператор, от которого она происходит. Таким образом, эрмитовость является внутренним свойством, присущим оператору, в том смысле, что эрмитов оператор порождает во всякой базисной системе функций эрмитову матрицу.

Поскольку все операторы, которые мы рассматриваем в волновой механике, эрмитовы, то эрмитовы также и матрицы, которые им соответствуют.

3. Средние значения в волновой механике

Представим себе частицу и допустим, что нам известна связываемая с ней волновая функция Ψ. Пусть, с другой стороны, имеем одну из механических величин, приписываемых частице, которой в новой механике соответствует оператор A. Упоминая об этой величине, мы сокращенно будем говорить «величина A».

Общие принципы, изложенные в предыдущей главе, позволяют нам предсказывать возможные значения величины A и соответствующие им вероятности. Принимая во внимание, что вообще существует несколько возможных значений с вероятностями, не равными нулю, нельзя говорить определенно о значении величины A в каждый данный момент, а можно говорить лишь о ее среднем значении, причем это среднее значение определяется обычным способом, как сумма произведений каждого возможного значения на соответствующую вероятность. Если α_i и φ_i обозначают собственные значения и собственные функции оператора A и если волновая функция Ψ допускает разложение:

$$\Psi = \sum_i c_i \varphi_i, \tag{13}$$

то, согласно общим принципам, среднее значение $\overline{A}$ есть

$$\overline{A} = \sum_i \alpha_i |c_i|^2. \tag{14}$$

Это можно написать в форме, принятой в волновой механике:

$$\overline{A} = \int_D \Psi^* A(\Psi) d\tau. \tag{15}$$

Эквивалентность (14) и (15) следует из формулы

$$\int_D \Psi^* A(\Psi) d\tau = \int_D \sum_i c_i^* \varphi_i^* \cdot A\Big(\sum_k c_k \varphi_k\Big) d\tau = \sum_{ik} c_i^* c_k \alpha_k \int_D \varphi_i^* \varphi_k \, d\tau \tag{16}$$

и из того, что функции φ_i нормированы и ортогональны. Среднее значение $\overline{A}$, определенное формулами (14) и (15), очевидно, есть действительная величина.

Рассуждения, путем которых мы пришли к выводу основной формулы (15), строго справедливы только для полных операторов A без сплошного спектра и без кратных собственных значений. Однако не представляет никакого труда распространить ее на неполные и вырожденные операторы и на сплошные спектры: формула (15) относится к общему случаю.

Форма представления (15) для среднего значения $\overline{A}$ позволяет нам сказать, что $\Psi^* A(\Psi)$ является «плотностью среднего значения» для величины A. Но структура этой «плотности» несколько отличается от тех плотностей, которые рассматриваются в классических теориях. Действительно, элемент интегрирования $\Psi^* A(\Psi) d\tau$ (вообще являющийся комплексным) ни в коем случае нельзя считать определенным значением величины A, локализованной в элементе объема $d\tau$, и только интеграл (15), всегда действительный, имеет физический смысл. Это очень важное обстоятельство, которое нужно всегда иметь в виду.

Формула (15) дает статистическую интерпретацию матриц волновой механики или, по крайней мере, их диагональных элементов. Мы это покажем, рассматривая опять невырожденные полные операторы без сплошного спектра, ибо общие рассуждения приводят только к усложнениям, не меняя результата. Допустим, что разложение волновой функции Ψ по собственным функциям φ_i оператора A сводится к одному слагаемому; тогда имеем

$$\Psi = c_i \varphi_i, \tag{17}$$

причем $|c_i| = 1$, поскольку функция Ψ предполагается всегда нормированной. В этом случае мы уверены, что измерение величины A даст значение α_i. Пусть теперь мы имеем другую величину B, приписываемую частице и соответствующую оператору B. Применяя формулу (15), мы получаем среднее значение величины B в виде

$$\overline{B} = \int_D \Psi^* B(\Psi) d\tau = \int_D \varphi_i^* B(\varphi_i) d\tau. \tag{18}$$

Второй интеграл $\overline{B}$ (18) является диагональным элементом с матричными индексами ii оператора B в системе функций φ_i. Отсюда следует теорема: «Диагональный элемент с индексами ii матрицы, порожденной оператором B, в системе собственных функций оператора A равен среднему значению величины B, *когда известно, что величина A имеет значение* α_i».

4. Среднее значение координаты. Теорема Эренфеста

Рассмотрим одну из координат частицы, например координату x. Ее среднее значение по формуле (15) и согласно принципу интерференции есть

$$\overline{x} = \int_D x\Psi^*\Psi d\tau. \tag{19}$$

Итак, это имеет вид координаты x некоторой «фиктивной жидкости», плотность которой в любой точке дается формулой

$$\rho = \Psi\Psi^*. \tag{20}$$

Эту фиктивную жидкость мы назовем «вероятностной». Количество этой жидкости, содержащееся в элементе объема $d\tau$, есть $\Psi\Psi^* d\tau$([2]), и полное ее количество остается постоянным во времени и равным единице, если функция Ψ нормирована. Так как распределение вероятностной жидкости изменяется с течением времени, мы припишем ей в каждой точке и в каждый момент времени скорость, которую определим формулой

$$\vec{u} = -\frac{1}{\Psi\Psi^*}\frac{h}{4\pi i m}\left[\Psi \operatorname{grad}\Psi^* - \Psi^* \operatorname{grad}\Psi\right]. \tag{21}$$

Нетрудно показать, что в этих условиях полная вероятность сохраняется с течением времени, и это лишний раз подтверждает следующее положение, справедливость которого мы уже ранее приняли на веру: «Если функция Ψ нормирована в данный момент, она остается нормированной всегда».

[2] По принципу интерференции это количество, следовательно, равно «вероятности присутствия» частицы в элементе $d\tau$.

Вот его доказательство. Из волнового уравнения, которому подчиняется функция Ψ [уравнение (5) предыдущей главы], и сопряженного уравнения легко получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Psi^*\right) = -\frac{h}{4\pi i m}\left[\Psi^*\Delta\Psi - \Psi\Delta\Psi^*\right] = \frac{h}{4\pi i m}\sum_{x,y,z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right], \quad (22)$$

или с учетом определений (20) и (21):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\vec{u}\right) = 0. \quad (23)$$

Но уравнение (23) есть гидродинамическое уравнение непрерывности, выражающее сохранение вероятности, плотность распределения и скорость переноса которой определяются формулами (20) и (21).

Теперь отметим одно обстоятельство. По нашему определению средних величин, если $f\ (x,\ y,\ z,\ t)$ является определенной скалярной или векторной функцией, мы должны назвать средним значением этой функции в момент t величину

$$\overline{f}(t) = \int_D \Psi^*\cdot f(x,y,z,t)\cdot\Psi d\tau. \quad (24)$$

Учитывая это, мы можем сформулировать очень важную теорему Эренфеста.

Теорема. «Точка с координатами $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ движется с течением времени так, как материальная точка массы m, подчиняющаяся законам классической механики и испытывающая действие силы, равной в каждый момент среднему значению $\overline{f}(t)$ действительной силы».

Сначала, согласно (19), применяя (22) и интегрируя по частям, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{x}}{dt} &= \int_D x\frac{\partial\left(\Psi\Psi^*\right)}{\partial t}d\tau = \frac{h}{4\pi i m}\int_D x\sum_{x,y,z}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right]d\tau = \\ &= -\frac{h}{4\pi i m}\int_D\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)d\tau = \int_D u_x\Psi^*\Psi d\tau = \overline{u}_x.\end{aligned} \quad (25)$$

Затем находим:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} &= -\frac{h}{4\pi i m}\int_D\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + \Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x\partial t} - \Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial t}\right]d\tau = \\ &= -\frac{h}{2\pi i m}\int_D\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)d\tau,\end{aligned} \quad (26)$$

что в силу волнового уравнения дает

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m^2}\int_D\left[\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\left(\Delta\Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2}\mathrm{U}\Psi\right) + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(\Delta\Psi^* - \frac{8\pi^2 m}{h^2}\mathrm{U}\Psi^*\right)\right]d\tau. \quad (27)$$

Далее, теорема Грина дает (после интегрирования по частям)

$$\int_D \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Delta\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\Delta\Psi^*\right)d\tau = \int_D \left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Delta\Psi + \Psi^*\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\Psi)\right]d\tau = 0, \tag{28}$$

так что (27) дает нам:

$$m\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \int_D \mathrm{U}\frac{\partial}{\partial x}(\Psi\Psi^*)d\tau = \int_D \left(-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)\Psi\Psi^* d\tau = -\overline{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}} = \overline{f}_x. \tag{29}$$

Это и есть выражение теоремы Эренфеста для $\overline{x}$. Точно таким же образом находим и соответствующие формулы для $\overline{y}$ и $\overline{z}$.

Заканчивая этот параграф, мы дадим, кроме того, определение средних плотностей электрического заряда и электрического тока, соответствующих частице с зарядом ε, функция Ψ которой известна. Заряд ε, будучи физической величиной, принимающей лишь одно значение, равен своему среднему значению, и мы можем написать:

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon = \int_D \varepsilon\Psi\Psi^* d\tau. \tag{30}$$

Следовательно, мы можем рассматривать величину

$$\delta = \varepsilon\Psi\Psi^* \tag{31}$$

как среднюю плотность электрического заряда, связанного с частицей. С другой стороны, с классической точки зрения частица с зарядом ε при движении со скоростью $\vec{v}$ эквивалентна току силой $\vec{i} = \varepsilon\vec{v}$. Здесь нам надо заменить v_x на $\frac{1}{m}p_x$ (и т. д.), и тогда три составляющие i_x, i_y, i_z рассматриваемого тока будут соответствовать операторам

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\varepsilon}{m}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\varepsilon}{m}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\varepsilon}{m}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Например, среднее значение i_x равно в соответствии с (15)

$$\overline{i}_x = \frac{h\varepsilon}{2\pi i m}\int_D \Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x}d\tau = -\frac{h\varepsilon}{4\pi i m}\int_D \left(\Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)d\tau, \tag{32}$$

и аналогичные же выражения будем иметь для $\overline{i}_y$ и $\overline{i}_z$. Из этих выражений вытекает, что вектор

$$\vec{j} = -\frac{h\varepsilon}{4\pi i m}\left[\Psi \operatorname{grad}\Psi^* - \Psi^* \operatorname{grad}\Psi\right] \tag{33}$$

может рассматриваться как средняя плотность электрического тока, приписываемого частице. Сравнивая формулы (30) и (33) с формулами (20) и (21), мы видим, что плотности δ и $\vec{j}$ суть плотности заряда и тока, которые, по классической теории, существовали бы, если бы заряд ε частицы был распределен в вероятностной жидкости пропорционально ее плотности $\Psi\Psi^*$.

5. Первые интегралы в волновой механике

В классической механике «первым интегралом» называется механическая величина, выражающаяся с помощью координат, импульсов и иногда времени и остающаяся постоянной во время движения в силу уравнений движения.

Как же определится первый интеграл в новой механике? Вот ответ, который следует дать на этот вопрос: если механическая величина соответствует оператору A, эта величина есть первый интеграл в данной задаче (т. е. для данной формы гамильтоновой функции H), если имеем

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{2\pi i}{h}\left(AH - HA\right) = 0, \tag{34}$$

где $\partial A/\partial t$ представляет собой оператор, который получается формальным дифференцированием выражения A по переменной t. Если A не зависит от t, то $\partial A/\partial t$ есть нуль, и условие (34) выражает просто, что A коммутирует с H. Отсюда видно, что, если H не зависит от времени, условие (34) имеет следующее значение: диагональные матричные элементы оператора A в системе собственных функций оператора H постоянны.

Если внешнее поле постоянно, то H не зависит от времени; очевидно, что энергия является первым интегралом: получаем классическую теорему. Если x-составляющая силового поля есть нуль, то H не зависит от x и коммутирует с p_x. Поэтому x-составляющая импульса есть первый интеграл, как и в классической механике, и т. д.

Наиболее интересный для нас случай – это угловой момент. Когда поле обладает цилиндрической симметрией относительно оси oz, то H не зависит от азимутального угла φ. Выбирая прямоугольные координаты и допуская, что вращению в положительном направлении в плоскости xy отвечает положительный угловой момент, получаем, что оператор, соответствующий угловому моменту вращения вокруг oz, есть

$$M_z = xp_y - yp_x = -\frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{35}$$

Выбирая сферические координаты с полярной осью oz, находим:

$$M_z = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{36}$$

Следовательно, M_z не зависит от t, коммутирует с H и является первым интегралом. Если поле обладает сферической симметрией относительно начала координат, то каждый из угловых моментов M_x, M_y, M_z будет первым интегралом.

Мы можем упростить форму условия (34), введя оператор

$$L = H + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{37}$$

Если f – произвольная функция, то имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\cdot A(f)=\frac{\partial A}{\partial t}(f)+A\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right),$$

т. е. оператор $\frac{\partial A}{\partial t}$ эквивалентен оператору $\frac{\partial}{\partial t}\cdot A-A\cdot\frac{\partial}{\partial t}$. Тогда условие (34) можно записать так:

$$\begin{aligned}0&=\left(AH-HA\right)-\frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\cdot A-A\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)=\\&=A\left(H+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right)-\left(H+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right)A,\end{aligned}\tag{38}$$

или просто

$$AL-LA=0\,.\tag{39}$$

Итак, условие того, что величина A является первым интегралом, состоит в том, чтобы оператор A коммутировал с L.

ГЛАВА VII. Релятивистская форма волновой механики с одной волновой функцией

1. Напоминание некоторых формул из релятивистской механики

Введение в механику принципа относительности еще задолго до возникновения новой волновой механики привело Эйнштейна к изменению классических уравнений ньютоновской динамики. Впрочем, это изменение свелось к простому изменению некоторых формул. Релятивистская механика Эйнштейна сохранила все классические представления о материальной точке, скорости, траектории, механическом детерминизме и т.п. В сравнении с новой волновой механикой динамика Эйнштейна представляется, таким образом, лишь как внешняя модификация классической теории, имеющая целью согласовать ее с принципом относительности. В параграфе 2 главы V мы исходили из формул ньютоновской механики для вывода уравнений волновой механики. Таким образом, мы получили волновую механику, которая, естественно, еще не является релятивистской. Чтобы получить релятивистскую волновую механику, кажется вполне естественным действовать так же, как и в параграфе 2 главы V, но исходя из формул теории Эйнштейна. Для этого начнем с напоминания некоторых из этих формул.

В релятивистской механике каждая частица характеризуется инвариантной величиной m_0, ее собственной массой. Так как одним из основных принципов теории относительности является положение о пропорциональности массы и энергии, частица массы m_0 будет обладать даже в состоянии покоя некоторой внутренней энергией или «собственной энергией», выражаемой как

$$W_0 = m_0c^2, \tag{1}$$

где c – скорость света в вакууме. Если частица движется со скоростью $v = \beta c$, ее энергия есть

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2}$$

Пропорциональность между массой и энергией имеет место, если считать, что в результате движения масса возрастает и становится равной $\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

«Кинетической энергией» частицы, движущейся со скоростью βc, можно назвать величину

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \tag{3}$$

которая характеризует возрастание энергии в результате движения.

Предыдущие формулы справедливы при отсутствии внешнего поля. Если частица подвержена действию силового поля с потенциальной энергией $U(x, y, z, t)$, то вместо (2) необходимо написать

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + U(x, y, z, t). \tag{4}$$

Если β мало по сравнению с единицей $(v \ll c)$, то в первом приближении получим

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + U(x, y, z, t), \tag{5}$$

и, полагая

$$E = W - m_0 c^2, \tag{6}$$

мы возвращаемся к классической формуле. Следовательно, E – это энергия в понимании классической механики, которая отличается от энергии W релятивистской механики на постоянную собственную энергию m_0c^2.

Импульс частицы массы m_0, движущейся со скоростью $v = \beta c$, по теории Эйнштейна равен

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{v}. \tag{7}$$

В результате он оказывается равным произведению скорости на массу движения $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Три составляющие импульса и величина $\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\left(= \frac{W}{c}\right.$ в отсутствие поля) образуют четыре компоненты пространственно-временного вектора (4-вектора импульса).

Предыдущие формулы должны быть изменены в очень важном случае, когда частица с электрическим зарядом ε движется в электромагнитном поле. Известно, что электрическое поле $\vec{h}$ и магнитное поле $\vec{H}$ могут быть определены с помощью скалярного потенциала $V(x, y, z, t)$ и вектор-потенциала $\vec{A}(x, y, z, t)$ с помощью соотношений

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}; \quad \vec{h} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{8}$$

Сила, которая действует в данном поле на частицу с зарядом ε, обладающую скоростью $\vec{v}$, дается формулой Лоренца:

$$\vec{f} = \varepsilon\left(\vec{h} + \frac{1}{c}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right]\right). \tag{9}$$

Тогда энергия частицы есть

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \varepsilon V(x, y, z, t), \tag{10}$$

а ее импульс

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \varepsilon \frac{\vec{A}}{c}(x, y, z, t). \tag{11}$$

Новое здесь в том, что импульс, точно так же, как и энергия, содержит кроме члена, зависящего от скорости, еще и член, зависящий от поля: в общем случае импульс $\vec{p}$ не направлен по скорости. Составляющие $\vec{p}$ и величина W/c все так же суть компоненты пространственно-временного вектора.

Уравнения (10) и (11) дают нам соотношение

$$\frac{1}{c^2}(W - \varepsilon V)^2 - \sum_{x,y,z}\left(p_x - \frac{\varepsilon A_x}{c}\right)^2 - m_0^2 c^2 = 0, \tag{12}$$

которое будет играть существенную роль при отыскании релятивистского волнового уравнения в волновой механике.

Если мы разрешим (12) относительно W, то получим

$$W = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \sum_{x,y,z}\left(p_x - \frac{\varepsilon A_x}{c}\right)^2} + \varepsilon V. \tag{13}$$

Правая часть этого уравнения может быть обозначена через $H(x, y, z, p_y, p_y, p_z, t)$ и представляет собой релятивистскую гамильтонову функцию. Она не является рациональной функцией.

2. Релятивистская волновая механика

Чтобы получить волновое уравнение релятивистской волновой механики, кажется вполне естественным действовать, как в параграфе 2 главы V, но исходя не из формул классической механики, а из формул релятивистской механики. К несчастью, здесь сразу же возникает затруднение: так как гамильтонова функция, определяемая правой частью (13), иррациональна, то выражение, получаемое при замене в ней p_x на $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$ (и т. д.), само иррационально относительно $\partial/\partial x$ (и т. д.) и не является вполне определенным оператором. Следовательно, нельзя буквально применить метод параграфа 2 главы V, т. е. считать уравнение

$$H(\Psi) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

волновым уравнением.

Однако имеется обходной путь, чтобы избежать этой трудности: нужно воспользоваться вместо (13) уравнением (12). Для этого заметим, что уже в нерелятивистском методе главы V при переходе от классического уравнения $H = E$ к волновому уравнению $H(\Psi) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ в итоге энергия E заменяется оператором $-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}$. Таким образом, вполне естественно и здесь заменить W тем же оператором; это тем более логично, что с релятивистской точки зрения энергия и импульс образуют пространственно-временной вектор, и если заменять каждое p_i на $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_i}$, то W должно быть заменено на $-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}$ [1].

Совершая эти подстановки в левой части (12), мы получаем

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon V\right)^2 - \sum_{x,y,z}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c}A_x\right)^2 - m_0^2c^2, \tag{14}$$

т. е. рациональный оператор.

Применяя оператор (14) к функции Ψ и приравнивая к нулю, мы найдем:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon V\right)^2\Psi - \sum_{x,y,z}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c}A_x\right)^2\Psi = m_0^2c^2\Psi, \tag{15}$$

и это уравнение может рассматриваться как естественное релятивистское обобщение волнового уравнения в волновой механике в ее первоначальной форме.

Если мы раскроем уравнение (15), принимая во внимание условие Лоренца для потенциалов:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A} = 0, \tag{16}$$

то получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \Delta\Psi + \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon V}{c^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{4\pi i}{h}\sum_{x,y,z}\frac{\varepsilon A_x}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial x} +\\ + \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2c^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2}\left(V^2 - \vec{A}^2\right)\right]\Psi = 0\,.\end{aligned} \tag{17}$$

По соображениям, которые мы изложим позднее, Дирак считает это уравнение недостаточным. К тому же мы сразу видим, что оно значительно отличается от нерелятивистского уравнения в одном отношении: это дифференциальное уравнение второго порядка по времени вместо дифференциального уравнения первого порядка.

---

[1] Различие в знаках объясняется тем, что $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, $\partial/\partial t$ суть ковариантные составляющие, в то время как p_x, p_y, p_z, W суть контравариантные составляющие пространственно-временного вектора импульса.

В важном случае, когда электромагнитное поле равно нулю ($V = \vec{A} = 0$), уравнение (17) записывается в виде

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2}{h^2}m_0^2c^2\Psi \tag{18}$$

и допускает как частное решение плоскую монохроматическую волну:

$$\Psi = Ce^{-\frac{2\pi i}{h}[Wt - p_x x - p_y y - p_z z]}, \tag{19}$$

ибо по (12) мы имеем $\frac{W^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2c^2$. Волна (19) характеризуется частотой $\nu = W/h$ и длиной волны $\lambda = h/p$; она соответствует прямолинейному равномерному движению частицы, энергия и импульс которой точно определены, в то время как ее положение совершенно неопределенно. Если сравнить формулу (19) с формулой (7) главы V, мы увидим, что единственное существенное различие, обусловленное теорией относительности, состоит в замене полной энергии W энергией $E = W - m_0c^2$ классической механики.

3. Плотность и поток вероятности, соответствующие уравнению (17)

Применение общих принципов, изложенных в главах V и VI, к волновому уравнению (17) вызывает большие трудности. В частности, не имеет ясного смысла требовать, чтобы волновая функция Ψ была нормированной, ибо исходя из уравнения (17) нельзя более доказать, что если Ψ нормирована в данный момент, она и в дальнейшем всегда останется нормированной. Эта трудность, как это мы увидим в главе X, обусловливается главным образом следующим обстоятельством. Так как уравнение (17) имеет второй порядок по времени, то его решение не определяется только знанием начальной формы функции Ψ.

Тем не менее, опираясь на уравнение (17), еще возможно рассмотрение вероятностной жидкости, и полная «вероятность» сохраняется во времени в силу именно волнового уравнения, но плотность этой жидкости выражается как функция не только от Ψ, но и от $\partial\Psi/\partial t$. Действительно, рассмотрим величины:

$$\rho = \frac{h}{4\pi i m_0 c^2}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) - \frac{\varepsilon}{m_0c^2}V\Psi\Psi^*, \tag{20}$$

$$\rho\vec{u} = -\frac{h}{4\pi i m_0}\left(\Psi\operatorname{grad}\Psi^* - \Psi^*\operatorname{grad}\Psi\right) - \frac{\varepsilon}{m_0c}\vec{A}\Psi\Psi^*, \tag{20'}$$

которые определяют распределение и плотность потока фиктивной вероятностной жидкости, ибо ρ и $\rho\vec{u}$ являются действительными.

Напишем теперь уравнение, сопряженное с (17):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial t^2} - \Delta\Psi^* - \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c^2}V\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} - \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c}\sum_{x,y,z}A_x\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} + \\ + \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2c^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2}\left(V^2 - \vec{A}^2\right)\right]\Psi^* = 0. \tag{17*}$$

Умножим (17) на Ψ^* и вычтем (17*), умноженное на Ψ. С одной стороны, мы находим выражение

$$\frac{1}{c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial t^2}\right) + \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c^2}V\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right),$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) + \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c^2}V\Psi\Psi^*\right] - \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\Psi\Psi^*;$$

с другой стороны, мы имеем выражение

$$-\Psi^*\Delta\Psi + \Psi\Delta\Psi^* + \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c}\sum_{x,y,z}\left(A_x\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} + A_x\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right),$$

которое можем переписать так:

$$\sum_{x,y,z}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c}A_x\Psi\Psi^*\right] - \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c}\Psi\Psi^*\frac{\partial A_x}{\partial x}\right\}.$$

В итоге мы получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) + \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c^2}V\Psi\Psi^*\right] + \\ + \operatorname{div}\left[\Psi\operatorname{grad}\Psi^* - \Psi^*\operatorname{grad}\Psi - \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c}\vec{A}\Psi\Psi^*\right] - \\ - \frac{4\pi i}{h}\frac{\varepsilon}{c}\Psi\Psi^*\left(\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right) = 0. \tag{21}$$

Последний член в этом уравнении в силу условия Лоренца (16) равен нулю. Умножим (21) на $\dfrac{h}{4\pi i m_0}$ и учтем (20) и (20'). Получается:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\vec{u}\right) = 0, \tag{22}$$

т. е. уравнение, которое выражает закон сохранения вероятности[2] в терминах фиктивной жидкости.

[2] Казалось бы, что ρ и $\rho\vec{u}$ можно определить, взяв правые части (20) и (20′), умноженные на какую-нибудь действительную постоянную, но определения (20) и (20′) необходимы, если желательно получить в ньютоновском приближении выражение $\rho = \Psi\Psi^*$, как в этом легко убедиться.

Распределению и плотности потока вероятностной жидкости, ассоциируемой с частицей, наделенной электрическим зарядом ε, мы можем поставить в соответствие электрическую плотность $\rho\varepsilon$ и плотность тока $\rho\varepsilon\vec{u}$, как это мы делали в конце предыдущей главы в нерелятивистском случае.

Мы представим себе трудности, которые возникают при согласовании общих принципов, принятых в главе V, с релятивистской формой (17) волнового уравнения, если поступим таким же образом, как при обосновании принципа интерференции в параграфе 5 той же главы V. Из соображений, изложенных там, вытекало, что вероятность того, что измерение, сделанное в момент t, позволило локализовать частицу в элементе объема $d\tau$, есть $\Psi\Psi^* d\tau$. Этот результат был получен без применения какой-либо гипотезы об уравнении, которому подчиняется волновая функция Ψ, и, следовательно, что-то подобное должно быть справедливым и здесь. Однако плотность ρ вероятностной жидкости, заданная соотношением (20), структура которой обусловлена необходимостью выполнения условия сохранения, не приводится к $\Psi\Psi^*$. Таким образом, имеется противоречие между общими принципами, изложенными в главе V, и релятивистской формой (17) волнового уравнения. Именно стремление избежать этого противоречия и привело Дирака к построению волновой релятивистской механики частицы на других основаниях, никак не связанных с уравнением (17).

ГЛАВА VIII. Успехи и неудачи волновой механики с одной волновой функцией

1. Вычисление квантованной энергии. Пример водородного атома

На основании общих принципов в волновой (нерелятивистской) механике энергия стационарных состояний для квантовых систем определяется путем вычислений собственных значений соответствующего оператора Гамильтона. Этот новый метод квантования, введенный знаменитыми трудами Шредингера[1], привел в некоторых случаях к подтверждению результатов старой квантовой теории, а в других случаях он исправил старые результаты, добившись лучшего согласия с опытом (линейный осциллятор).

Здесь мы напомним лишь результаты квантования водородного атома и вместе со Шредингером воспользуемся нерелятивистской теорией.

Рассмотрим электрон с массой m и зарядом $-e$ в поле, созданном неподвижным ядром заряда $+e$.

Напишем уравнение:

$$H(a) = Ea, \tag{1}$$

выбрав в качестве H оператор $\frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right] - \frac{e^2}{r}$.

Мы получаем

$$\Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E + \frac{e^2}{r}\right]a = 0. \tag{2}$$

Выбираем полярные координаты r, θ, φ с центром в ядре и полагаем

$$a(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi). \tag{3}$$

Принимая во внимание форму оператора Лапласа в полярных координатах, имеем:

$$\begin{aligned} &Y\frac{d^2R}{dr^2} + 2\frac{Y}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \\ &+ \frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E + \frac{e^2}{r}\right]RY = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

или иначе:

$$\begin{aligned} &r^2\left[\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\right] = \\ &= -\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

---

[1] См.: *Shrődinger E.* Abhandlungen zur Wellenmechanik. Leipzig: J.A. Barth.

Обе части уравнения (5), одна из которых зависит только от радиальной переменной, а другая только от полярных углов, должны быть равны одной и той же постоянной λ, и тогда мы имеем:

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \lambda Y = 0. \tag{6}$$

Можно доказать, что уравнение (6) имеет конечные и равномерно непрерывные на сфере единичного радиуса решения, только если:

$$\lambda = l(l+1), \quad \text{где } l = 0, 1, 2\ldots \tag{7}$$

Значения (7) параметра λ суть собственные значения уравнения (6). Собственному значению, определенному целым значением l, соответствуют $(2l+1)$ собственных функций (ненормированных):

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \mathrm{e}^{im\varphi}P_l^m(\cos\theta) = \mathrm{e}^{im\varphi}\sin^m\theta\frac{d^{l+m}}{(d\cos\theta)^{l+m}}(1-\cos^2\theta)^l. \tag{8}$$

Функции Y_l^m – это сферические функции Лапласа. Они образуют полную систему для переменных φ и θ, что и оправдывает подстановку (3).

Установив это, мы, кроме того, из (5) выводим, что R должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + R\left(A + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}\right) = 0 \tag{9}$$

при

$$A = \frac{8\pi^2 mE}{h^2}; \quad B = \frac{8\pi^2 m}{h^2}e^2; \quad C = l(l+1). \tag{10}$$

Шредингер показал, что все положительные значения E являются собственными значениями (9) и, следовательно, образуют сплошной спектр. Но эти собственные положительные значения энергии, как и в классической механике, соответствуют свободным движениям электрона вне атома и здесь нас не интересуют.

Чтобы найти отрицательные собственные значения, введем действительную переменную

$$\rho = 2\sqrt{-A}\cdot r = \frac{4\pi}{h}\sqrt{-2mE}\cdot r. \tag{11}$$

Из уравнения (9) видно, что при очень большом r функция R имеет асимптотическое поведение $\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2}}$, причем другое решение $\mathrm{e}^{+\frac{\rho}{2}}$ должно быть отброшено, ибо оно расходится на бесконечности. Итак, положим:

$$R = \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2}}v(\rho). \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (9), легко найдем:

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2}+\left(\frac{2}{\rho}-1\right)\frac{dv}{d\rho}+\left[\left(\frac{B}{2\sqrt{-A}}-1\right)\frac{1}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]v=0. \qquad (13)$$

Это линейное дифференциальное уравнение допускает на конечном расстоянии единственную особую точку $\rho=0$. Тогда теория линейных уравнений позволяет легко установить, что уравнение (13) имеет только одно регулярное решение в окрестности точки $\rho=0$, конечное в этой точке, и что это решение имеет вид

$$v(\rho)=\sum_{\nu}a_{\nu}\rho^{l+\nu}. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), находим рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}&\left[(\nu+l+1)(\nu+1)+2(\nu+l+1)-l(l+1)\right]a_{\nu+1}=\\&=\left[\nu+l+1-\frac{B}{2\sqrt{-A}}\right]a_{\nu}.\end{aligned} \qquad (15)$$

Функция $R(\rho)$ будет равна нулю на бесконечности, если все $a_{\nu}=0$, начиная с некоторого определенного a_p. По формуле (15) для этого необходимо, чтобы

$$\frac{B}{2\sqrt{-A}}=p+l+1=n, \quad (n-\text{целое}\geq 1). \qquad (16)$$

Отсюда, согласно (10),

$$E_n=-\frac{2\pi^2 me^4}{n^2h^2}. \qquad (17)$$

Следовательно, волновая нерелятивистская механика дает формулу Бора.

Заметим, что здесь имеется сильное вырождение, ибо каждому собственному значению E_n, т. е. данному значению n, согласно (16), соответствуют n возможных значений l, именно 0, 1, …, n–1, и каждому значению l соответствуют $2l$+1 сферических функций Y_l^m. Следовательно, одному собственному значению E_n соответствуют собственные функции $a = RY$, число которых равно

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)=2\frac{n(n-1)}{2}+n=n^2.$$

Таким образом, все собственные значения кратны, исключая то, которое соответствует $n = 1$.

Квантовое число l соответствует числу k – 1 старой квантовой теории. Оно может принимать значения 0, 1, …, n – 1, в то время как число k старой теории принимало значения 1, 2, …, n. Число m зависит от выбора полярной оси, целиком произвольного в отсутствие внешнего поля. Легко доказать, что угловые моменты M_x, M_y, M_z суть первые интегралы, как это и должно быть в силу сферической симметрии кулоновского поля.

Заметим, наконец, что, повторяя вычисления для атома с центральным зарядом $+Ne$, ионизированного $(N-1)$-кратно, находим:

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4 N^2}{n^2 h^2}, \tag{18}$$

откуда можно вывести, как и в старой квантовой теории, приближенное подтверждение закона Мозли.

2. Тонкая структура и релятивистская волновая механика

Вычисляя возможные значения энергии для водородного атома, мы подтвердили простой результат Бора. Вполне естественно теперь задаться вопросом, а сможем ли мы, пользуясь релятивистской формой волновой механики, развитой в предыдущей главе, найти тонкую структуру Зоммерфельда. Но здесь тотчас же возникает затруднение, так как мы не можем определить собственные значения оператора Гамильтона, ибо мы видели, что в теории предыдущей главы этот оператор недостаточно определен. Тем не менее есть естественный (хотя и плохо согласующийся с общими принципами) способ устранить это затруднение. Действительно, отыскание собственных значений энергии приводит к отысканию собственных частот волнового уравнения. Тогда возьмем релятивистское волновое уравнение (17) из предыдущей главы и предположим, что Ψ – монохроматическая волна, зависимость которой от времени определяется только множителем $e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}$. Тогда, замечая, что в водородном атоме $\vec{A} = 0$, находим:

$$\Delta\Psi + \frac{4\pi^2}{h^2 c^2}\left[(W - \varepsilon V)^2 - m_0^2 c^4\right]\Psi = 0. \tag{19}$$

В случае водородного атома $\varepsilon = -e$ и $V = e/r$, $W = m_0 c^2 + E$; следовательно, выражение в квадратных скобках в (19) примет вид

$$\begin{aligned} &\left(m_0 c^2 + E + \frac{e^2}{r}\right)^2 - m_0^2 c^4 = \\ &= E^2 + 2m_0 c^2 E + \frac{2e^2}{r}\left(m_0 c^2 + E\right) + \frac{e^4}{r^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

и так как, по предположению, $\Psi = a(r, \theta, \varphi)e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}$, мы имеем:

$$\Delta a + \frac{4\pi^2}{h^2 c^2}\left[E^2 + 2m_0 c^2 E + \frac{2e^2}{r}\left(m_0 c^2 + E\right) + \frac{e^4}{r^2}\right]a = 0. \tag{21}$$

Подставляя сюда опять произведение (3), нетрудно видеть, что функция $Y(\theta, \varphi)$ должна быть сферической функцией Лапласа и что $R(r)$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[A + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}\right]R = 0, \tag{22}$$

с обозначениями

$$A = \frac{8\pi^2 m_0}{h^2}E\left(1 + \frac{E}{2m_0 c^2}\right); B = \frac{8\pi^2 m_0}{h^2}e^2\left(1 + \frac{E}{m_0 c^2}\right); C = -\,l(l+1) + \frac{4\pi^2 e^4}{h^2 c^2}. \tag{23}$$

Выражение C можно также написать в виде

$$C = -\,l(l+1) + \alpha^2, \tag{23'}$$

где $\alpha = 2\pi e^2/(hc)$ есть постоянная тонкой структуры Зоммерфельда.

Из уравнения (22) мы выводим, что R имеет асимптотическую форму $\mathrm{e}^{-\rho/2}$, где $\rho = 2\sqrt{-A}\cdot r$ и, полагая

$$R(\rho) = \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2}}v(\rho), \tag{24}$$

получаем после подстановки в (22):

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)\frac{dv}{d\rho} + \left[\left(\frac{B}{2\sqrt{-A}} - 1\right)\frac{1}{\rho} + \frac{C}{\rho^2}\right]v = 0. \tag{25}$$

Это линейное дифференциальное уравнение, имеющее единственную особенность на конечном расстоянии – точку $\rho = 0$. По общей теории линейных уравнений, существуют по крайней мере два решения (25), которые регулярны в окрестности $\rho = 0$ и имеют форму

$$v(\rho) = \rho^\gamma \sum_\nu a_\nu \rho^\nu, \quad (a_0 \neq 0). \tag{26}$$

Показатель γ (необязательно целый) определяется характеристическим уравнением

$$\gamma(\gamma - 1) + 2\gamma + C = \gamma(\gamma + 1) + \alpha^2 - l(l+1) = 0, \tag{27}$$

которое можно написать еще так:

$$\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2. \tag{28}$$

Таким образом, мы имеем два значения γ:

$$\gamma = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}. \tag{29}$$

Мы отбрасываем решение, отвечающее знаку «–», замечая, что соответствующая функция $v(\rho)$ будет иметь полюс при $\rho = 0$. Следовательно, мы оставляем формулу (29) со знаком «+». Нужно заметить, что даже со знаком «+» она приводит к небольшим затруднениям, если $l = 0$, так как в этом случае получается очень малое отрицательное значение γ и функция $v(\rho)$ при $\rho = 0$ бесконечна (правда, бесконечность очень малого порядка). Мы условимся не обращать внимания на это затруднение (с которым мы снова встретимся в теории Дирака), потому что функция $v(\rho)$, хотя и бесконечна при $\rho = 0$, однако является квадратично интегрируемой.

Если мы подставим ряд (26) в (25), то получим рекуррентное соотношение:

$$\left[(\nu+\gamma+1)(\nu+\gamma)+2(\nu+\gamma+1)+C\right]a_{\nu+1}=\left[\nu+\gamma+1-\frac{B}{2\sqrt{-A}}\right]a_{\nu}. \quad (30)$$

Функция R будет равна нулю на бесконечности, если все коэффициенты a_ν, следующие за каким-то определенным a_p, равны нулю. Это случится, если

$$p+\gamma+1=\frac{B}{2\sqrt{-A}}. \quad (31)$$

Подставляя в (31) значения A, B и γ, находим:

$$\frac{\alpha\left[1+E/(m_0c^2)\right]}{\sqrt{-\left[2E/(m_0c^2)\right]\left[1+E/(2m_0c^2)\right]}}=\left(p+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}, \quad (32)$$

откуда

$$\frac{\alpha^2}{\left[(p+1/2)+\sqrt{(l+1/2)^2-\alpha^2}\right]^2}=\frac{\left[-2E/(m_0c^2)\right]\left[1+E/(2m_0c^2)\right]}{\left[1+E/(m_0c^2)\right]^2}. \quad (33)$$

Прибавляя по единице к обеим частям равенства и рассматривая обратные величины, нетрудно получить:

$$1+\frac{E}{m_0c^2}=\left[1+\frac{\alpha^2}{\left[(p+1/2)+\sqrt{(l+1/2)^2-\alpha^2}\right]}\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

Эта формула аналогична прежней формуле Зоммерфельда (формула (38) главы I), в которой целые числа n_1 и n_2 соответственно заменены на $(p+1/2)$ и $(l+1/2)$.

Если мы определим главное квантовое число n при помощи соотношения

$$n = \left(p + 1/2\right) + \left(l + 1/2\right) = p + l + 1 \tag{35}$$

и если разложим (34) по степеням α^2, пренебрегая членами порядка выше второго, то получим приближенную формулу

$$E_{nl} = -\frac{Rh}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4}\right)\right], \tag{36}$$

где R – постоянная Ридберга. Формулу (36) следует сравнить с формулой (41) главы I.

Проделав те же самые вычисления для атома с номером N, ионизированного $(N-1)$-кратно, вместо (36) найдем

$$E_{nl} = -\frac{RhN^2}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2 N^2}{n^2}\left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4}\right)\right], \tag{37}$$

т.е. формулу, аналогичную формуле (44) главы I.

В случае рентгеновских лучей, ограничиваясь грубым рассмотрением внутренних электронов в качестве электростатического экрана, получаем

$$E_{nl} = -\frac{Rh\left(N - z_{nl}\right)^2}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2\left(N - z_{nl}\right)^2}{n^2}\left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4}\right)\right]. \tag{38}$$

Эту формулу, определяющую тонкую структуру рентгеновских спектральных термов, нужно сравнить с прежней формулой (9) главы III.

К сожалению, согласованности прежних формул Зоммерфельда с опытными данными здесь не получается. Возьмем, например, дублеты серии Бальмера. Линия из серии Бальмера, в примитивной схеме Бора, возникает во время перехода атома H из первоначального состояния с энергией E_i в конечное состояние, характеризующееся значением $n = 2$. По Зоммерфельду, квантовому числу $n = 2$ соответствуют два возможных значения азимутального квантового числа: $k = 1$ и $k = 2$. Отсюда вытекает тонкая структура каждой линии, которая в действительности является дублетом с расщеплением дублета по частоте, которое согласно формуле (40) главы I равно

$$\delta\nu = \frac{1}{h}\left(E_{22} - E_{21}\right) = \frac{R\alpha^2}{2^4}\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) = \frac{R\alpha^2}{16}; \quad \text{т.е.}\ \frac{\delta\nu}{c} = 0{,}36\ \text{см}^{-1}. \tag{39}$$

Это число, хотя и несколько большое, достаточно хорошо согласуется с опытными данными. Применяя нашу новую формулу (36), мы должны двум соответствующим уровням дублетов Бальмера приписать квантовые числа $n = 2$, $l = 0$ и $n = 2$, $l = 1$, и мы находим:

$$\delta\nu = \frac{R\alpha^2}{2^4}\left(\frac{2}{1/2} - \frac{2}{3/2}\right) = \frac{R\alpha^2}{16}\cdot\frac{8}{3}. \tag{40}$$

Следовательно, мы находим 8/3 от прежнего числа, которое уже само было слишком большим!

Точно так же и для рентгеновских лучей применение формулы (38) дало бы слишком большое число для расщепления дублетов Зоммерфельда.

Кроме того, здесь все еще остается неразрешенным уже упоминавшееся затруднение: подтверждено, по крайней мере для рентгеновских лучей, что уровни, определяющие тонкую структуру Зоммерфельда, имеют то же квантовое число k (т. е. то же число $l = k - 1$) и различаются квантовым числом j, которое предыдущая теория не рассматривает совершенно.

Таким образом, релятивистская волновая механика, изложенная в предыдущей главе, оказывается неудовлетворительной, так как, не устраняя прежних трудностей, она, напротив, вводит новые.

3. Волновая механика с одной волновой функцией и эффект Зеемана

Теперь мы покажем, что примитивная волновая механика (с одной волновой функцией) не может дать объяснение аномального эффекта Зеемана.

Рассмотрим атом, помещенный в однородное магнитное поле $\vec{H}$. Примем направление поля за ось z: тогда мы можем написать вектор-потенциал поля $\vec{H}$ в форме

$$A_x = -\frac{Hy}{2}; \quad A_y = -\frac{Hx}{2}; \quad A_z = 0, \tag{41}$$

так как соотношение $\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$ дает $H_x = H_y = 0$ и $H_z = H$.

В таком случае релятивистское волновое уравнение (17) предыдущей главы примет вид ($\varepsilon = -e$):

$$\begin{aligned} &\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h}\frac{eV}{c^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \sum_{x,y,z}\frac{4\pi i}{h}\frac{e}{c}A_x\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \\ &= \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}\left(V^2 - \vec{A}^2\right)\right]\Psi. \end{aligned} \tag{42}$$

Мы докажем далее следующую теорему, которая является не чем иным, как перенесением в волновую механику классической теоремы Лармора, изложенной в параграфе 2 главы IV.

Теорема. «Если поле H достаточно слабо и если пренебрегать релятивистскими поправками, то волновое уравнение атома, записанное в системе координат, которая вращается вокруг направления поля H с угловой скоростью

$$\omega_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\frac{eH}{m_0 c}, \tag{43}$$

имеет такой же вид, как если бы система координат не вращалась и поле H не существовало».

Согласно нашим предположениям, мы считаем H малым и пренебрегаем H^2. Точно так же мы предполагаем $\eta = \dfrac{E}{m_0 c^2}$ малым (ньютоновское приближение) и пренебрегаем η^2. Наконец, мы пренебрегаем произведением ηH.

Мы выбираем прямоугольную систему координат $oxyz$ с осью oz в качестве цилиндрической оси. Определим цилиндрические координаты z, ρ, φ при помощи обычных формул:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{44}$$

Тогда, учитывая (41), имеем:

$$\frac{4\pi i}{h}\frac{e}{c}\sum_{x,y,z} A_x \frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}H\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial x} - x\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) = \frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}H\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \tag{45}$$

и уравнение (42), пренебрегая A^2, напишем в цилиндрических координатах в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h}\frac{eV}{c^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \\ + \frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}H\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = \frac{4\pi^2}{h^2}\left(m_0^2c^2 - \frac{e^2V^2}{c^2}\right)\Psi.\end{gathered} \tag{46}$$

Возьмем теперь систему цилиндрических координат z', ρ', φ', которая вращается вокруг oz с угловой скоростью (43). Мы имеем:

$$z' = z, \quad \rho' = \rho, \quad \varphi' = \varphi - \omega_{\text{L}}t, \quad t' = t, \tag{47}$$

следовательно (пренебрегая ω_{L}^2 порядка H^2):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}; \quad \frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial\rho'}; \quad \frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi'}; \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \omega_{\text{L}}\frac{\partial}{\partial\varphi'}; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\omega_{\text{L}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi'\partial t'}.\end{gathered} \tag{47'}$$

Тогда уравнение (46) в штрихованных переменных примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho'^2} + \frac{1}{\rho'}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \frac{1}{\rho'^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2} + \frac{4\pi i}{h}\frac{eV}{c^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t'} + \\ + \frac{2\omega_{\text{L}}}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi'\partial t'} - \frac{4\pi i}{h}\frac{eV}{c^2}\omega_{\text{L}}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi'} + \frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}H\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi'} = \frac{4\pi^2}{h^2}\left(m_0^2c^2 - \frac{e^2V^2}{c^2}\right)\Psi.\end{gathered} \tag{48}$$

Итак, принимая во внимание (43) и пренебрегая $\omega_{\text{L}}\eta$, имеем:

$$\frac{2\omega_{\text{L}}}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi'\partial t'} = -\frac{2\omega_{\text{L}}}{c^2}\frac{\partial}{\partial\varphi'}\left[\frac{2\pi i}{h}m_0c^2(1+\eta)\Psi\right] = -\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}H\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi'}. \tag{49}$$

Член $\frac{2\omega_L}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi'\partial t'}$ в принятом приближении компенсирует последнее выражение в левой части (48). Поскольку в ньтоновском приближении энергия взаимодействия должна рассматриваться как очень малая по сравнению с внутренней энергией m_0c^2, то член $\frac{4\pi i}{h}\frac{eV}{c^2}\omega_L\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi'}$ пренебрежимо мал по сравнению с выражением $\frac{4\pi i}{h}\frac{eV}{c^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t'}$.

В конце концов уравнение (48) приводится к виду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\Psi}{\partial z'^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho'^2}+\frac{1}{\rho'}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'}+\frac{1}{\rho'^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}+\\&+\frac{4\pi i}{h}\frac{eV}{c^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t'}=\frac{4\pi^2}{h^2}\left(m_0^2c^2-\frac{e^2V^2}{c^2}\right)\Psi.\end{aligned}\tag{50}$$

Это уравнение точно такое же, как если бы штрихованная система не вращалась и поле H не существовало. Следовательно, теорема Лармора доказана.

Теперь сразу же объясняется нормальный эффект Зеемана. Действительно, в отсутствие внешнего магнитного поля стационарное состояние, характеризуемое двумя квантовыми числами n и l и энергией E_{nl}^H, в неподвижной системе z, ρ, φ определяется волновой функцией вида

$$\Psi(z,\rho,\varphi,t)=F(\rho,z)e^{im\varphi}e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(m_0c^2+E_{nl}^o\right)t},\tag{51}$$

причем m – целое положительное или отрицательное число. В силу доказанной выше теоремы функция Ψ в присутствии поля H будет иметь ту же форму в системе z', ρ', φ'. Следовательно, будем иметь:

$$\Psi(z',\rho',\varphi',t')=F(\rho',z')e^{im\varphi'}e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(m_0c^2+E_{nl}^o\right)t'}.\tag{52}$$

В силу (47) волновая функция следующим образом выразится в неподвижной системе:

$$\Psi(z,\rho,\varphi,t)=F(\rho,z)e^{im(\varphi-\omega_L t)}e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(m_0c^2+E_{nl}^o\right)t}=F(\rho,z)e^{im\varphi}e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(m_0c^2+E_{nl}^o+\frac{mh}{2\pi}\omega_L\right)t}.\tag{53}$$

Тогда энергия E_{nl}^H атома в неподвижной системе в присутствии поля H есть

$$E_{nl}^H=E_{nl}^o+m\cdot\frac{h\omega_L}{2\pi}=E_{nl}^o+m\cdot\frac{ehH}{4\pi m_0c}.\tag{54}$$

Таким образом, спектральные термы изменяются путем добавления величины, кратной $\frac{eH}{4\pi m_0c}$, а линия с частотой

$$\nu=\frac{1}{h}\left(E_{n'l'}^o-E_{nl}^o\right)$$

в присутствии поля имеет частоту

$$\nu+(m'-m)\frac{eH}{4\pi m_0c}.$$

Достаточно лишь принять правило отбора $\delta m = 0, \pm 1$, которое мы докажем чуть дальше, чтобы получить нормальный эффект Зеемана, но в этой теории нет и следа аномалий и множителя Ланде. Следовательно, волновая механика с одной волновой функцией дает не больше, чем классическая теория или старая квантовая теория.

4. «Правила отбора» в волновой механике

В классической электродинамике показывается, что при ускоренном движении электрических зарядов наблюдается электромагнитное излучение. Если $\rho(x, y, z, t)$ есть плотность зарядов, то интенсивность излучения определяется в первом приближении дипольным электрическим моментом, т. е. вектором $\vec{m}$ с декартовыми компонентами вида:

$$m_x = \iiint \rho x dx dy dz; \quad m_y = \iiint \rho y dx dy dz; \quad m_z = \iiint \rho z dx dy dz. \quad (55)$$

Если предположить, что величины (55) разложены в ряд Фурье вида

$$m_x = \text{const} + \sum_i m_x^i \cos(2\pi\nu_i t + \varepsilon_i), \quad (56)$$

то мощность излучения частоты ν_i, электрическая поляризация которого параллельна оси x, равна

$$\frac{16\pi^4}{3c^3}\nu_i^4 \left(m_x^i\right)^2.$$

Таким образом, знание дипольного электрического момента системы зарядов позволяет предсказать частоту, поляризацию и интенсивность испускаемого излучения.

По классическим представлениям, излучение происходит непрерывно и излучаемая энергия непрерывно заимствуется у электрических зарядов, движение которых в результате затухает. В квантовой теории положение вещей совершенно иное: излучение испускается в виде кванта $h\nu$ во время перехода из одного квантового состояния в другое. Чтобы оценить интенсивность излучения, испускаемого совокупностью атомов, нужно рассуждать статистически, т. е. так: если N_n есть число атомов в состоянии с энергией E_n, то существует определенная вероятность $P_{nm}dt$ того, что один из этих атомов переходит в состояние с энергией E_m за время dt и излучаемая за секунду энергия будет (предполагая число N_n достаточно большим, чтобы пренебречь его убылью):

$$N_n P_{nm}\left(E_n - E_m\right) = N_n P_{nm} h\nu_{nm}. \quad (57)$$

Задача заключается в том, чтобы вычислить P_{nm}. Для этого Бор исходил из очень плодотворной идеи, сформулировав принцип соответствия. Он принял, что для очень близких стационарных состояний, которые соответствуют большим значениям квантовых чисел, должны быть асимптотически верны классические законы, и таким образом ему удалось сформулировать некоторые правила для предсказания интенсивностей и поляризаций. Создание новой волновой механики позволило уточнить правила Бора.

Чтобы объяснить, как удалось прийти к новым правилам предсказания интенсивностей и поляризаций, мы начнем с соображений, высказанных впервые Шредингером. Возьмем атомную систему, содержащую один электрон с волновой функцией

$$\Psi = \sum_n c_n a_n(x, y, z) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h} E_n t}. \tag{58}$$

Мы видели, что с волновой функцией можно связать среднее распределение электричества, определяемое плотностью $\delta = -e\Psi\Psi^*$. Соответствующий дипольный электрический момент есть

$$m_x = -e \iiint x\Psi\Psi^* d\tau = \mathrm{const} + \sum_{nm} (-e) c_n c_m^* \iiint x a_n a_m^* d\tau \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(E_n - E_m)t} \text{ и т. д.} \tag{59}$$

Следовательно, интеграл, который фигурирует в последнем члене (59), есть матричный элемент с индексами *mn* оператора *x* в системе функций a_i. Если мы обозначим его через X_{mn}, то можем записать (59) в виде

$$m_x = \mathrm{const} + 2 \sum_{n,m}^{n \neq m} (-e) \cdot |c_n| \cdot |c_m| \cdot |X_{nm}| \cdot \cos 2\pi \left[\frac{E_n - E_m}{h} t + \varphi_m - \varphi_n \right]. \tag{60}$$

Частоты, которые появляются в разложении (60), в точности совпадают с частотами $\nu_{mn} = (E_m - E_n)/h$ Бора. В таком случае вполне естественно предположить, что совокупность атомов, находящихся в состоянии, определяемом волновой функцией (58), излучает линию частоты ν_{mn} с интенсивностью, пропорциональной $\nu_{mn}^4 |X_{mn}|^2$.

Но, как мы видели, тот факт, что излучение испускается квантами, связанными с переходами между стационарными состояниями, обязывает нас отмежеваться от классического представления о распределении электрических зарядов с плотностью $-e\Psi\Psi^*$, которое излучало бы непрерывно и сразу все частоты Бора. Мы вынуждены, согласно самому смыслу новой механики, принять чисто статистическую формулировку. Вот утверждение, которое мы должны принять, чтобы избежать всяких противоречий: «Пусть имеется совокупность одинаковых атомов, для которых известны собственные функции a_n оператора Гамильтона и, следовательно, матричные элементы

$$X_{mn} = \int a_m^* x a_n d\tau.$$

Предположим, что в этой совокупности имеется N_n атомов в состоянии с энергией E_n. Тогда количество энергии, испускаемое совокупностью атомов в секунду в форме излучения с частотой $\nu_{nm} = \dfrac{E_n - E_m}{h}$, с электрической поляризацией, параллельной оси x, равно

$$N_n \frac{64\pi^4}{3c^3} \nu_{nm}^4 e^2 |X_{mn}|^2».$$

Сравнивая последнее выражение с (57), видим, что вероятность $\left[P_{nm}\right]_x$ переходов, порождающих рассматриваемое излучение, дается формулой

$$\left[P_{nm}\right]_x = \frac{64\pi^4}{3c^3} \frac{\nu_{nm}^3 e^2}{h} |X_{mn}|^2. \tag{61}$$

Таким образом, это есть вероятность перехода за единицу времени для атома из состояния E_n в состояние E_m с испусканием излучения, поляризованного параллельно оси x. В том случае, когда для состояний E_n и E_m все три вероятности $\left[P_{nm}\right]_x$, $\left[P_{nm}\right]_y$ и $\left[P_{nm}\right]_z$ одновременно равны нулю, испускания излучения с частотой ν_{nm} фактически не происходит. Доказывается, что это справедливо для всех переходов, которые одновременно не удовлетворяют соотношениям

$$\delta l = \pm 1, \quad \delta m = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}. \tag{62}$$

Таким образом, волновая механика позволяет обосновать правила отбора для квантовых чисел l и m. Вполне понятно, что она не может обосновать третье правило отбора $\delta j = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$, которое мы уже встречали, поскольку она не вводит число j. Мы увидим, что теория Дирака позволяет вывести все три правила отбора.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ЭЛЕКТРОНА ДИРАКА. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ

ГЛАВА IX. Теория Паули

1. Вращение электрона и поляризация света

Мы уже видели, что волновая механика в ее первоначальной форме не разрешила ни одной из встретившихся трудностей, которые и привели к гипотезе о существовании у электрона собственного магнетизма. Таким образом, стало очевидным, что волновая механика оставалась незавершенной, поскольку она не содержала необходимого элемента, соответствующего этому собственному магнетизму. Но идея о магнитном вращающемся электроне не может формулироваться в новой теории так же легко, как в прежних. Оставаясь в рамках классических представлений, Уленбек и Гаудсмит рассматривали электрон как небольшую вращающуюся отрицательно заряженную сферу (шар) с угловым моментом, равным $\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$, и магнитным моментом, ориентированным вдоль той же самой оси[1] и равным магнетону Бора $\frac{eh}{4\pi m_0 c}$. Но в волновой механике оказывается невозможным пользоваться столь конкретными представлениями и всегда приходится обращаться к языку теории вероятностей.

Чтобы представить себе, каким образом должна ставиться проблема, полезно поразмышлять о том, какой новый способ необходимо применить при описании поляризации кванта света. Рассмотрим пучок линейно поляризованного света, который распространяется в направлении oz.

Пусть ox и oy обозначают две оси, перпендикулярные oz. Световой вектор, нормальный к oz, имеет вид

$$\vec{a}_0 \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{z}{c} + \varphi\right)$$

и амплитуды его составляющих по осям ox и oy описываются формулами

$$a_x = a_0 \cos\theta, \quad a_y = a_0 \sin\theta, \tag{1}$$

где θ – угол наклона этого вектора по отношению к ox. Интенсивность светового пучка есть a_0^2. Если на линии пучка поместить николь (призму Николя), пропускающий только свет, поляризованный вдоль оси ox, то световой вектор

[1] В силу отрицательности заряда электрона знаки проекций углового и магнитного моментов на какую-либо ось должны быть разными. – *Прим. пер.*

за николем может быть представлен как $a_x \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{z}{c} + \varphi\right)$, а интенсивность света – как $a_0^2 \cos^2\theta$. Если затем мы повернем николь на 90°, то световой вектор для прошедшего света будет параллелен *oy* и равен

$$a_y \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{z}{c} + \varphi\right),$$

а его интенсивность есть $a_0^2 \sin^2\theta$. Как же следует все это объяснять, если принять существование фотонов? Если мы припишем поляризацию каждому фотону отдельно, то причинное описание этого явления становится невозможным. Действительно, так как в некотором смысле мы вынуждены приписать падающему фотону поляризацию, определяемую световым вектором первоначальной волны, мы не видим, каким образом можно найти причину того, что некоторые фотоны не проходят сквозь николь, в то время как другие его проходят, приобретая поляризацию, направленную, например, по *ox*. Принимая точку зрения новой механики, следует считать, что первоначальному фотону нельзя приписать определенную поляризацию, а нужно только определить, используя связанную с ним световую волну, вероятность того, что фотон по прохождении николя приобретает поляризацию, параллельную *ox*: указанная вероятность есть $\cos^2\theta$. Можно сказать, что фотон перед прохождением николя имеет вероятность $\cos^2\theta$ оказаться поляризованным параллельно *ox* и вероятность $\sin^2\theta$ оказаться поляризованным параллельно *oy*.

Вернемся теперь к спину электрона. Гипотеза о вращающемся магнитном электроне состоит в том, что электрону приписываются две направленные величины, параллельные друг другу: собственный магнитный момент и собственный угловой момент. В то время как для фотона поляризация определяется направлением, не имеющим знака, вектор спина для электрона имеет направление и знак. По крайней мере, в той же степени, в какой мы не можем приписать фотону определенную поляризацию, в теории магнитного электрона, соответствующей общим принципам новой механики, мы не должны приписывать отдельному электрону определенный спин. Единственная вещь, о которой мы можем говорить, это вероятность того, что опыт, позволяющий определить направление спина электрона, дает тот или иной результат. Опираясь именно на эту главную идею, Паули и предпринял первую попытку создать теорию магнитного электрона в рамках волновой механики. Мы должны несколько остановиться на этой попытке, поскольку она привела Дирака к созданию его более полной теории.

2. Теория Паули

Паули[2] сделал первую попытку четко поставить задачу о магнитном электроне в рамках общих представлений новой механики. В декартовой системе координат любой опыт, позволяющий приписать некоторое значение состав-

[2] Zts. f. Phys. 1927. **43.** P. 601.

ляющей собственного углового момента электрона вдоль oz, даст в результате, согласно гипотезе Уленбека и Гаудсмита, или $+\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$, или $-\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$. Тогда вполне естественно предположить, что мы должны приписать электрону не одну функцию Ψ, а две функции: $\Psi_1(x,y,z,t)$ и $\Psi_2(x,y,z,t)$, таким образом, что $|\Psi_1|^2 dx\,dy\,dz$ определяет вероятность того, что в момент t координаты электрона будут заключаться в интервале $dx\,dy\,dz$ и что z-составляющая его углового момента будет $+\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$, тогда как $|\Psi_2|^2 dx\,dy\,dz$ определяет вероятность того, что в момент t координаты будут заключаться в интервале $dx\,dy\,dz$, причем z-составляющая углового момента будет $-\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$. Таким образом, Паули высказал идею о том, что для учета магнетизма электрона нужно увеличить число функций Ψ. Естественно, что условие нормировки здесь запишется иначе:

$$\iiint\left[|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2\right]dx\,dy\,dz = 1. \qquad (2)$$

Паули стал искать волновые уравнения, определяющие две функции Ψ. Для этого он по-прежнему исходил из гамильтоновой функции, но учитывал магнитный момент электрона.

Если мы обозначим через s_x, s_y, s_z составляющие единичного вектора $\vec{s}$ в направлении спина электрона, то магнитный момент запишется так: $-\frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot\vec{s}$.

Тогда гамильтонова функция в постоянном поле будет иметь вид $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, s_x, s_y, s_z)$ и величины s_x, s_y, s_z, как легко видеть, будут входить в нее линейно. Теперь применим метод, который позволяет в волновой механике получить волновое уравнение. Он заключается в том, чтобы заменить p_x, p_y, p_z на операторы $\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}$ (и т. д.) и написать:

$$H\left(x,y,z,\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z},s_x,s_y,s_z\right)\Psi = E\Psi \qquad (3)$$

для монохроматических волн частоты E/h. Но нам нужны два уравнения для определения двух функций Ψ. Руководствуясь общими соображениями, которые я обхожу молчанием, Паули предложил заменить составляющие s_x, s_y и s_z соответственно тремя эрмитовыми матрицами из двух строк и двух столбцов:

$$s_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad s_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ +i & 0\end{bmatrix},\quad s_3=\begin{bmatrix}+1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Удобно принять следующее определение: если A есть матрица из двух строк и двух столбцов, то операция $A\Psi$ определяется соотношением

$$A\Psi_i = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}\Psi_k, \quad (i,\ k = 1,\ 2), \tag{5}$$

которое служит естественным обобщением формул, уже встречавшихся в определении матриц. В частности, применение соотношения (5) к матрицам s_1, s_2, s_3 приводит к выражениям

$$s_1\Psi_1 = \Psi_2;\quad s_1\Psi_2 = \Psi_1;\quad s_2\Psi_1 = -i\Psi_2;\quad s_2\Psi_2 = i\Psi_1;\quad s_3\Psi_1 = \Psi_1;\quad s_3\Psi_2 = -\Psi_2. \tag{6}$$

Таким образом, Паули заменяет уравнение (3) двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} &H\left(x, y, z, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}, s_1, s_2, s_3\right)\Psi_1 = E\Psi_1, \\ &H\left(x, y, z, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}, s_1, s_2, s_3\right)\Psi_2 = E\Psi_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Это и есть система из двух уравнений, которым должны удовлетворять функции Ψ_1 и Ψ_2.

Но в изложенной выше теории особую роль играет ось oz, потому что волновые функции Ψ_1 и Ψ_2 определяют вероятности двух возможных значений для составляющей спина, *параллельной* oz. Если мы хотим получить вероятности того, чтобы составляющая углового момента, параллельная какой-нибудь другой оси OZ, оказалась равной $+\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$ или $-\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$, нужно выбрать другую систему декартовых координат $OXYZ$, в которой OZ будет третьей осью, и определить в этой системе две волновые функции $\Phi_1(X, Y, Z)$ и $\Phi_2(X, Y, Z)$, квадраты модулей которых дадут искомые вероятности и, естественно, поскольку система осей $OXYZ$ физически ничем не отличается от системы $oxyz$, функции Φ должны будут подчиняться следующим уравнениям, которые сразу получаются из (7):

$$\begin{aligned} &H\left(X, Y, Z, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial X}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Y}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Z}, S_1, S_2, S_3\right)\Phi_1 = E\Phi_1, \\ &H\left(X, Y, Z, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial X}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Y}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Z}, S_1, S_2, S_3\right)\Phi_2 = E\Phi_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Положение осей $OXYZ$ по отношению к осям $oxyz$ может быть определено следующим образом. Заменим x, y, z, X, Y, Z на x_1, x_2, x_3, X_1, X_2, X_3 и запишем формулы преобразования в виде

$$X_i = \sum_j o_{ij} x_j, \tag{9}$$

причем o_{ij} – элементы действительной и ортогональной матрицы $\left(\sum_i o_{ij} o_{ik} = \delta_{jk}\right)$.

В итоге матрица O определяет переход от первой системы координат ко второй. Если эта матрица известна, то как можно выразить функцию Φ с помощью функции Ψ? Такой вопрос поставил себе Паули и дал на него ответ. Если мы будем исходить из уравнений (7) и если выразим x, y, z как функции от X, Y, Z посредством формул, обратных (9), то получим, как мы это докажем несколько позднее для частного случая, уравнения

$$\begin{aligned} H\left(X,Y,Z,\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial X},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Y},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Z},S_1,S_2,S_3\right)\Psi_1(X,Y,Z) = E\Psi_1(X,Y,Z),\\ H\left(X,Y,Z,\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial X},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Y},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Z},S_1,S_2,S_3\right)\Psi_2(X,Y,Z) = E\Psi_2(X,Y,Z). \end{aligned} \tag{10}$$

Оператор H в уравнениях (10) определяется следующим образом: пишут классическую функцию Гамильтона

$$H\,(X, Y, Z, p_X, p_Y, p_Z, s_X, s_Y, s_Z)$$

в системе XYZ, т. е. функцию, в которую входят составляющие s_X, s_Y и s_Z единичного вектора, направленного вдоль собственного магнитного момента электрона; затем в этом выражении заменяют, с одной стороны, p_X, p_Y, p_Z на $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial X}$ (и т. д.), а с другой – величины s_X, s_Y, s_Z на эрмитовы матрицы S_1, S_2 и S_3, определяемые соотношениями

$$S_i = \sum_j o_{ij} s_j, \tag{11}$$

где использованы s_i, определенные в (4). В полученный таким путем оператор H матрицы S_i всегда входят линейно. Наконец, в формулах (10) функции $\Psi_1(X,Y,Z)$ и $\Psi_2(X,Y,Z)$ получаются из $\Psi_1(x,y,z)$ и $\Psi_2(x\,y,z)$ путем замены x, y, z на их выражения через X, Y, Z.

Паули далее показал, и мы позднее встретим аналогичное доказательство в теории Дирака[3], что всегда существует унитарная матрица Λ с двумя строками и двумя столбцами такая, что

$$S_i = \Lambda^{-1} s_i \Lambda, \quad (\Lambda^{-1} = \Lambda^{+}), \quad i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Иначе говоря, существует каноническое преобразование, обеспечивающее переход каждой из матриц s_i в соответствующую матрицу S_i. Матрице Λ соответствует операция, определяемая формулой (5). Применяя эту операцию к обеим частям уравнений (10), получаем

$$\begin{aligned} \Lambda H\left(X,Y,Z,\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial X},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Y},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Z},S_1,S_2,S_3\right)\Psi_1 = E\Lambda\Psi_1,\\ \Lambda H\left(X,Y,Z,\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial X},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Y},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Z},S_1,S_2,S_3\right)\Psi_2 = E\Lambda\Psi_2, \end{aligned} \tag{13}$$

[3] См. гл. XI, параграф 2.

причем Ψ_i выражены через XYZ. Поскольку S_i входят в H линейно, ΛH содержит линейно выражения ΛS_i, равные в силу (12) $s_i\Lambda$; поскольку, кроме того, Λ коммутирует с X, $\partial/\partial X$ (и т.д.), мы имеем:

$$\Lambda H(...)\Psi_1 = H\left(X,Y,Z,\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial X},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Y},\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial Z},s_1,s_2,s_3\right)\Lambda\Psi_1 = E\Lambda\Psi_1, \quad (14)$$

и аналогичное уравнение для Ψ_2. Сравнивая с (8), мы видим, что

$$\Phi_1(X,Y,Z) = \Lambda\Psi_1(X,Y,Z); \quad \Phi_2(X,Y,Z) = \Lambda\Psi_2(X,Y,Z). \quad (15)$$

Формулы (15) показывают, как волновые функции Φ выводятся из волновых функций Ψ, ибо в каждом отдельном случае при известной матрице O можно найти матрицу Λ. В следующем параграфе мы поясним это конкретным примером.

Вполне понятно, что в случае унитарной матрицы Λ сумма $|\Phi_1|^2+|\Phi_2|^2$ равна $|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2$, а это выражает тот факт, что полная вероятность обоих возможных знаков для проекции углового момента на некоторое направление всегда есть единица.

3. Пример применения предыдущей теории

Чтобы иллюстрировать теорию предыдущего параграфа, полезно рассмотреть очень простой пример, разобранный самим Паули: пример покоящегося электрона в магнитном поле $\vec{H}$. Выберем систему координат $oxyz$ таким образом, чтобы положительное направление oz совпадало с направлением $\vec{H}$. Тогда мы имеем $H_x = H_y = 0$, $H_z = H$. Используя обозначение для магнетона Бора $\mu_0 = \mu_B = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c}$, гамильтонову функцию[4] запишем в виде $\mu_0 s_z H$, а систему уравнений (7) в виде

$$\mu_0 s_3 H\Psi_1 = E\Psi_1, \quad \mu_0 s_3 H\Psi_2 = E\Psi_2, \quad (16)$$

или в силу (6):

$$\mu_0 H\Psi_1 = E\Psi_1, \quad -\mu_0 H\Psi_2 = E\Psi_2. \quad (17)$$

Эта система имеет решение только для $E = \pm\mu_0 H$. Поскольку $|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2 = 1$, мы имеем:

$$\text{для } E = \mu_0 H\text{:} \quad \Psi_1 = e^{i\gamma}, \quad \Psi_2 = 0;$$

$$\text{для } E = -\mu_0 H\text{:} \quad \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = e^{i\delta}.$$

[4] В этом параграфе буква H уже обозначает не оператор Гамильтона, а величину напряженности магнитного поля.

Таким образом, для $E = -\mu_0 H$ магнитная ось электрона определенно указывает в положительном по z направлении, а для $E = \mu_0 H$ определенно указывает в отрицательном по z направлении. Это результаты, которых и следовало ожидать.

Возьмем теперь вторую систему координат $OXYZ$ такую, чтобы ось OZ образовывала с полем $\vec{H}$ угол θ. Тогда классическая гамильтонова функция есть

$$\mu_0\left(\vec{s}\cdot\vec{H}\right) = \mu_0\left(s_X H_X + s_Y H_Y + s_Z H_Z\right),$$

и волновые функции Φ_1 и Φ_2 суть решения, согласно (8), уравнений

$$\begin{aligned} \mu_0\left[H_X s_1 + H_Y s_2 + H_Z s_3\right]\Phi_1 = E\Phi_1\,, \\ \mu_0\left[H_X s_1 + H_Y s_2 + H_Z s_3\right]\Phi_2 = E\Phi_2\,, \end{aligned} \tag{18}$$

что в явной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_0\left[\left(H_X - iH_Y\right)\Phi_2 + H_Z\Phi_1\right] = E\Phi_1\,, \\ \mu_0\left[\left(H_X + iH_Y\right)\Phi_1 - H_Z\Phi_2\right] = E\Phi_2\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Для того чтобы эти два уравнения, однородные по Φ_i, были совместны, нужно, чтобы

$$\begin{vmatrix} \mu_0 H_Z - E, & \mu_0\left(H_X - iH_Y\right) \\ \mu_0\left(H_X + iH_Y\right), & -\mu_0 H_Z - E \end{vmatrix} = 0, \tag{20}$$

т. е.

$$E = \pm\mu_0\sqrt{H_X^2 + H_Y^2 + H_Z^2} = \pm\mu_0 H\,. \tag{21}$$

Следовательно, здесь нужно различать два случая.

Первый случай: $E = \mu_0 H$.

Тогда мы имеем:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{H - H_Z}{H_X - iH_Y} = \frac{H - H_Z}{H_X^2 + H_Y^2}\left(H_X + iH_Y\right) = \frac{H - H_Z}{H_P^2}\cdot H_P\cdot e^{i\alpha}, \tag{22}$$

где полагается, что $\alpha = \operatorname{arctg}\left(H_Y/H_X\right)$ и H_P обозначает составляющую $\vec{H}$, нормальную к OZ. Следовательно, мы имеем также:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{H(1-\cos\theta)}{H\sin\theta}e^{i\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\alpha}. \tag{23}$$

Поскольку $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 = 1$, мы должны иметь:

$$|\Phi_1|^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} = \cos^2\frac{\theta}{2};\quad |\Phi_2|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{24}$$

Так как аргументы у Φ_i произвольны, мы можем положить:

$$\Phi_1 = \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\frac{\alpha-\pi/2}{2}}; \quad \Phi_2 = i\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha-\pi/2}{2}}. \tag{25}$$

Второй случай: $E = -\mu_0 H$.

Тогда мы имеем:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = -\frac{H+H_Z}{H_X - iH_Y} = -\frac{H+H_Z}{H_P}\cdot e^{i\alpha} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\cdot e^{i\alpha} = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\alpha}, \tag{26}$$

а затем:

$$|\Phi_1|^2 = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}} = \sin^2\frac{\theta}{2}; \quad |\Phi_2|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{27}$$

что позволяет положить

$$\Phi_1 = i\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\frac{\alpha-\pi/2}{2}}; \quad \Phi_2 = \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha-\pi/2}{2}}. \tag{28}$$

Полученные таким образом при рассмотрении примера результаты означают следующее: если первый опыт нам показал, что магнитный момент электрона направлен по полю с энергией, равной $-\mu_0 H$, то вероятность того, что во втором опыте магнитный момент окажется направленным по OZ, есть $\cos^2(\theta/2)$.

В разобранном здесь простом примере нетрудно найти унитарные матрицы Λ Паули. Сравним функции Ψ в (17) (взяв здесь для упрощения нули для произвольных аргументов γ и δ) с функциями Φ в (25) и (28). Мы видим, что унитарная матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\frac{\alpha-\pi/2}{2}}, & i\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\frac{\alpha-\pi/2}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha-\pi/2}{2}}, & \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{\alpha-\pi/2}{2}} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Элементы Λ_{ij}, которые представляют собой частные случаи параметров Кэли – Клейна, удовлетворяют соотношению

$$\Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{12}\Lambda_{21} = 1. \tag{30}$$

Мы легко находим:

$$\Lambda^{+} = \begin{bmatrix} \Lambda_{22}, & -\Lambda_{12} \\ -\Lambda_{21}, & \Lambda_{11} \end{bmatrix}, \tag{31}$$

откуда выводим:

$$\Lambda\Lambda^{+} = \begin{bmatrix} \Lambda_{22}\Lambda_{11} - \Lambda_{12}\Lambda_{21}, & -\Lambda_{11}\Lambda_{12} + \Lambda_{12}\Lambda_{11} \\ \Lambda_{21}\Lambda_{22} - \Lambda_{22}\Lambda_{21}, & \Lambda_{22}\Lambda_{11} - \Lambda_{12}\Lambda_{21} \end{bmatrix} = 1. \tag{32}$$

Следовательно, матрица Λ – унитарная. Форма Λ, кроме того, могла быть предсказана на основании рассуждений Паули.

4. Недостаточность теории Паули

Мы дали только схему теории Паули; в действительности эта теория совершенно недостаточна. Прежде всего, она не согласуется с теорией относительности: она рассматривает только преобразования пространственных координат и не рассматривает преобразований пространственно-временных координат в релятивистском смысле. Кроме того, она не приводит к правильному предсказанию водородного спектра.

По этим причинам мы ее в дальнейшем рассматривать не будем, но мы должны заметить, что в теории Паули были предложены следующие существенные идеи.

1. Магнетизм электрона соответствует существованию нескольких функций Ψ.

2. Волновые функции Ψ должны позволить определить вероятность возможных ориентаций спина в некотором направлении.

3. Меняя оси декартовых координат, можно сохранить волновые уравнения той же самой формы, но тогда волновые функции преобразуются известным образом, определяемым матрицей Λ.

Дарвин[5] предпринял другую попытку ввести магнетизм электрона в волновую механику способом, согласованным с принципом относительности: он пытался определить четыре функции Ψ, которые были бы составляющими пространственно-временного вектора. Попытка его не удалась, и он вскоре сам присоединился к теории Дирака, где точно так же фигурируют четыре функции Ψ, но они не являются составляющими пространственно-временного вектора.

[5] Proc. Roy. Soc. A. 1927. **116.** P. 227.

ГЛАВА X. Теория Дирака

1. Обзор прежних результатов

Для того чтобы отразить в уравнениях волновой механики идею о собственном магнетизме и вращении электрона, Дирак исходил из более общих соображений, чем Паули. Он принял, что уравнения волновой механики должны быть согласованы с принципами специальной теории относительности, но он возражал против того способа, каким это делалось ранее. Чтобы понять его возражения, напомним сначала вкратце, как мы писали уравнения волновой механики с одной функцией Ψ.

Общее волновое уравнение для частицы в нерелятивистской волновой механике имеет вид

$$H\left(x, y, z, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}, t\right)\Psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{1}$$

где H – оператор Гамильтона. В случае частицы массы m, движущейся в поле, характеризуемом потенциалом $U(x, y, z, t)$, мы имеем:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{2}$$

Если частица имеет заряд ε и движется в электростатическом поле с электрическим потенциалом $V(x, y, z, t)$, мы имеем $U = \varepsilon V$ и (2) примет вид

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\Psi + \varepsilon V(x, y, z, t)\Psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{3}$$

В частности, если заряженная частица есть электрон, нужно положить в (3) $\varepsilon = -e$.

Мы уже видели, что в этой нерелятивистской теории всегда положительная величина $\Psi\Psi^*$ представляла плотность вероятности присутствия частицы и что определенная таким образом полная вероятность (равная единице) сохранялась с течением времени. Величина $\varepsilon\Psi\Psi^*$ (для электрона $-e\Psi\Psi^*$) есть средняя плотность электрического заряда, которая используется для расчета испускаемого излучения.

Когда мы хотели построить волновую механику, согласованную с принципами специальной теории относительности, то путем вполне естественных рассуждений мы сразу же получили новое волновое уравнение вместо (1). Мы видели, что это новое уравнение для частицы с массой m и зарядом ε, движущейся в электромагнитном поле, определяемом скалярным потенциалом $V(x, y, z, t)$ и вектор-потенциалом $\vec{A}(x, y, z, t)$, записывается в виде

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon V\right)^2\Psi - \sum_{xyz}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c}A_x\right)^2\Psi = m_0^2 c^2\Psi. \tag{4}$$

Для электрона уравнение (4) принимает вид

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}-eV\right)^2\Psi-\sum_{xyz}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{e}{c}A_x\right)^2\Psi=m_0^2c^2\Psi. \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} P_1&=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{e}{c}A_x; \quad P_2=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{e}{c}A_y;\\ P_3&=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{e}{c}A_z; \quad P_4=\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{e}{c}V. \end{aligned} \tag{6}$$

Они позволяют нам заменить уравнение (5) на следующее:

$$\left(P_4^2-\sum_1^3 P_i^2-m_0^2c^2\right)\Psi=0. \tag{7}$$

Релятивистские волновые уравнения (4) – (7), как мы это видели, не позволяют нам более брать в качестве плотности вероятности локализации частицы величину $\Psi\Psi^*$, так как интеграл от этой величины по всему пространству не является обязательно постоянным во времени. Мы должны принять за плотность вероятности присутствия частицы более сложное выражение, которое в случае электрона ($\varepsilon=-e$) принимает вид

$$\rho=-\frac{ih}{4\pi m_0c^2}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}-\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)+\frac{e}{m_0c^2}V\Psi\Psi^*. \tag{8}$$

Это выражение сводится к $\Psi\Psi^*$, когда работает ньютоновское приближение. Средняя плотность электрического заряда здесь есть $\rho\varepsilon=-\rho e$ с выражением (8) в качестве ρ.

2. Критические замечания Дирака в отношении уравнений (4) – (8)

Дирак подверг основательной критике попытку построения релятивистской волновой механики, которую мы только что изложили. Он, в частности, возражал против выражения (8) для плотности вероятности. Поскольку это выражение обусловливается самой формой волнового уравнения (7), то возражение Дирака направлено и против самого этого уравнения.

Резюмируем аргументы Дирака. Первое возражение, которое можно высказать в отношении выражения (8) для ρ, это то, что оно необязательно положительно, тогда как отрицательное значение ρ не может, очевидно, иметь никакого смысла. Второе возражение, уже высказанное в конце главы VII, заключается в следующем: какова бы ни была форма принятого волнового уравнения, общие принципы новой механики требуют, чтобы вероятность обнаружения, для координат частицы, значений, заключающихся в интервалах $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$, $(z, z+dz)$ была $\Psi\Psi^*(dx\,dy\,dz)$, а это требование не согласуется с формулой (8).

При наличии этих трудностей Дирак высказывает убеждение в том, что плотность вероятности локализации частицы должна непременно иметь всегда положительную форму $\Psi\Psi^*$ или, если вместе с Паули принять существование нескольких волновых функций Ψ_i, точно так же всегда положительную форму $\sum_i \Psi_i \Psi_i^*$. Но, принимая этот постулат, Дирак приходит к наиболее важному заключению: волновое уравнение или уравнения истинной релятивистской волновой механики должны быть первого порядка по производным относительно всех четырех переменных *x, y, z, t*. Изложим теперь его рассуждение.

Нерелятивистское уравнение (1) имеет первый порядок по временной производной, и соответствующее выражение для плотности вероятности есть $\Psi\Psi^*$. Если мы зададимся первоначальной формой $\Psi(x, y, z, 0)$ волновой функции, то она полностью определится волновым уравнением, и тогда можно сказать, что если мы зададимся первоначальной плотностью $\Psi\Psi^*$, то последующая ее эволюция определена, поэтому понятно, что сохранение полной вероятности (и электрического заряда) будет тогда необходимым следствием самого волнового уравнения, как мы это уже доказали. В случае релятивистского уравнения (4) это уже не так. В самом деле, так как это уравнение имеет второй порядок относительно производных по t, то для того, чтобы была определена волновая функция, нужно задаться величинами Ψ и $\partial\Psi/\partial t$ в первоначальный момент.

Тогда придется для плотности вероятности принять выражение (8), если мы хотим, чтобы из волнового уравнения следовало сохранение вероятности. Однако примем теперь вместе с Дираком постулат, что плотность вероятности обязательно имеет форму $\Psi\Psi^*$ или $\sum_i \Psi_i \Psi_i^*$. Мы увидим, что тогда уравнение (или волновые уравнения) должно быть первого порядка относительно производных по t и следовательно, уравнение (4) не может быть точным.

Действительно, если волновое уравнение имеет второй порядок относительно производных по t, его решение определено только в том случае, если задаться первоначальными значениями Ψ и $\partial\Psi/\partial t$.

Предположим, что мы задались только начальной Ψ, а не $\partial\Psi/\partial t$. По гипотезе Дирака первоначальная плотность будет, таким образом, известна, так как она зависит только от Ψ, а последующее изменение этой плотности не будет определено, поскольку не будет определена эволюция функции Ψ. Задаваясь произвольной первоначальной формой $\partial\Psi/\partial t$, можно, исходя из известной первоначальной формы плотности, получить какое угодно последующее изменение для этой плотности, и тогда не будет автоматического сохранения полной вероятности. Таким образом, Дирак пришел к выводу, что волновое уравнение должно быть первого порядка относительно производных по t и, так как в силу принципа относительности координаты пространства и времени должны играть симметричную роль, оно должно быть первого порядка относительно производных по всем четырем переменным *x, y, z, t*. То же самое рассуждение и то же самое заключение справедливы и в том случае, если имеется несколько функций Ψ и несколько волновых уравнений.

Следовательно, Дираку пришлось отыскивать одно или несколько уравнений первого порядка в отношении производных по переменным *x, y, z, t*, чтобы заменить уравнение (4). Посмотрим, как это удалось ему сделать.

3. Уравнение Дирака при отсутствии поля

Чтобы получить новое уравнение, Дирак начал со случая свободного движения электрона при отсутствии электромагнитного поля.

Тогда мы имеем $V = \vec{A} = 0$ и операторы P_i [формулы (6)] принимают вид

$$p_1 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}; \quad p_2 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}; \quad p_3 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}; \quad p_4 = \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{9}$$

В этом простом случае можно с уверенностью принять, что функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2}{h^2}m_0^2c^2\Psi, \text{ или } \left(p_4^2 - \sum_{i=1}^{3}p_i^2 - m_0^2c^2\right)\Psi = 0, \tag{10}$$

ибо в этом случае из основных соображений, из которых исходит волновая механика, получается, что плоская монохроматическая волна частоты $\frac{W}{h} = \frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}$ и длины $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 v}$ должна быть решением волнового уравнения, и без труда можно доказать, что то же самое справедливо в отношении уравнения (10).

Однако уравнение (10) имеет второй порядок, а нам нужны уравнения первого порядка. Чтобы их получить, Дирак предполагает, что существует несколько волновых функций $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N$ и каждая из них удовлетворяет уравнению

$$\left(p_4^2 - \sum_{i=1}^{3}p_i^2 - m_0^2c^2\right)\Psi_k = 0, \quad (k = 1, ..., N), \tag{11}$$

но эти уравнения второго порядка должны быть *следствиями* истинных волновых уравнений, которые имеют первый порядок.

Эти искомые волновые уравнения первого порядка Дирак записывает в символической форме:

$$\left(p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m_0 c\right)\Psi = 0. \tag{12}$$

Символическое уравнение (12) означает, что для каждой Ψ_k мы имеем:

$$\left(p_4 + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \alpha_4 m_0 c\right)\Psi_k = 0. \tag{13}$$

Здесь α_i суть матрицы с N строками и N столбцами, и операция $\alpha_i\Psi_k$, как это уже делалось при изучении теории Паули, определяется по формуле

$$\alpha_i\Psi_k = \sum_{l=1}^{N}\alpha_{i,kl}\Psi_l, \tag{14}$$

где $\alpha_{i,kl}$ означает элемент с индексами kl матрицы α_i.

Однако уравнения (13) должны иметь следствием уравнения (11), а это накладывает определенные условия на матрицы α_i. Действительно, применив к уравнению (13) оператор $p_4 - \sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i - \alpha_4 m_0 c$, находим:

$$\left[p_4^2 - \left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \alpha_4 m_0 c\right)^2\right]\Psi = 0, \tag{15}$$

и уравнение (15) совпадает с (11) только в том случае, если мы положим:

$$\alpha_i^2 = 1, \quad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0, \quad j \neq i. \tag{16}$$

Следовательно, мы должны наложить на матрицы α_i условия (16). Кроме того, они должны быть также эрмитовыми, как и все матрицы, которые встречаются в новой механике.

Дирак хотел ограничится как можно меньшим числом N волновых функций. Для $N < 4$ нельзя найти четыре эрмитовы матрицы, удовлетворяющие условиям (16). Напротив, для $N = 4$ их можно найти, и будет удобно выбрать следующие матрицы α_i:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Они, очевидно, эрмитовы и, кроме того, их квадраты равны единичной матрице, и они антикоммутируют между собой, как этого требуют условия (16).

Короче говоря, вместе с Дираком мы примем существование четырех функций Ψ_i, которые удовлетворяют четырем уравнениям первого порядка (13). Явно эти четыре уравнения при выборе матриц α_i (17) имеют вид

$$\begin{aligned} &(p_4 + m_0 c)\Psi_1 + (p_1 - ip_2)\Psi_4 + p_3\Psi_3 = 0, \\ &(p_4 + m_0 c)\Psi_2 + (p_1 + ip_2)\Psi_3 - p_3\Psi_4 = 0, \\ &(p_4 - m_0 c)\Psi_3 + (p_1 - ip_2)\Psi_2 + p_3\Psi_1 = 0, \\ &(p_4 - m_0 c)\Psi_4 + (p_1 + ip_2)\Psi_1 - p_3\Psi_2 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Исходя из системы (18), можно подробно видеть, как из нее получается в качестве следствия система второго порядка (11) (с $N = 4$).

Для примера применим к первому уравнению (18) оператор $p_4 - m_0$ c и к четвертому уравнению (18) оператор $p_1 - ip_2$, который коммутирует с предыдущим. Тогда мы получим:

$$\begin{aligned} &\left(p_4^2 - m_0^2 c^2\right)\Psi_1 + \left(p_4 - m_0 c\right)\left(p_1 - ip_2\right)\Psi_4 + \left(p_4 - m_0 c\right)p_3\Psi_3 = 0, \\ &\left(p_1 - ip_2\right)\left(p_4 - m_0 c\right)\Psi_4 + \left(p_1^2 + p_2^2\right)\Psi_1 - \left(p_1 - ip_2\right)p_3\Psi_2 = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

откуда путем исключения Ψ_4 находим:

$$\left(p_4^2 - m_0^2 c^2\right)\Psi_1 - \left(p_1^2 + p_2^2\right)\Psi_1 + \left(p_1 - ip_2\right)p_3\Psi_2 + \left(p_4 - m_0 c\right)p_3\Psi_3 = 0. \tag{20}$$

Однако применяя оператор p_3 к третьему уравнению (18), мы находим:

$$p_3\left(p_4 - m_0 c\right)\Psi_3 = -p_3\left(p_1 - ip_2\right)\Psi_2 - p_3^2\Psi_1, \tag{21}$$

и, так как p_i коммутируют между собой, мы получаем, подставляя (21) в (20), уравнение

$$\left(p_4^2 - \sum_{i=1}^{3} p_i^2 - m_0^2 c^2\right)\Psi_1 = 0, \tag{22}$$

и точно таким же образом мы найдем уравнения второго порядка для трех остальных Ψ. Таким образом, мы подтвердили заранее известный результат, так как матрицы (17) удовлетворяют условиям (16).

Уравнения (18) Дирака имеют очень асимметричный вид: ось z и соответствующий оператор p_3, очевидно, играют в них особую роль.

Следовательно, функции Ψ_i – решения этих уравнений – тесно связаны с выбором осей координат, как в теории Паули. Они должны использоваться при вычислении вероятностей, для которых ось z играет особую роль. Если мы возьмем другие оси, мы сможем написать волновые уравнения, вновь имеющие форму (18), но они будут иметь своим решением другие функции Ψ_i, связанные с предыдущими преобразованиями, аналогичными встречавшимся в теории Паули. Мы займемся этим вопросом в следующей главе.

Интересно сделать несколько замечаний по поводу перехода от прежнего уравнения (10) к уравнению (18). Этот переход несколько аналогичен переходу от уравнения световых волн к уравнениям Максвелла. Действительно, уравнение распространения световых волн (в пустоте) имеет вид

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{23}$$

Это уравнение второго порядка, в котором u обозначает величину, характеризующую световое возмущение. В электромагнитной теории u может быть какой-нибудь из шести составляющих двух полей (электрического и магнитного) световой волны. Таким образом, для шести величин h_x, h_y, h_z, H_x, H_y и H_z мы имеем шесть уравнений типа (23).

Переход от этих волновых уравнений к уравнениям Максвелла заключается именно в замене уравнений второго порядка системой уравнений первого порядка, связывающих шесть величин h_x, ..., H_z таким образом, что шесть уравнений второго порядка типа (23) будут их следствием. Именно этим путем следовал Дирак для перехода от уравнений второго порядка (15) к уравнениям первого порядка (18).

Если бы волна волновой механики была физической реальностью в классическом смысле, следовало бы ожидать, что четыре функции Ψ_i образуют четыре составляющие пространственно-временного вектора. Однако мы теперь знаем, что волна в волновой механике не представляет собой физической реальности в классическом смысле: это некоторое комплексное выражение, служащее только промежуточным звеном для вычислений и позволяющее образовать определенные реальные в физическом смысле выражения, наподобие плотности вероятности $\Psi\Psi^*$. В теории Дирака, таким образом, четыре функции Ψ_i совершенно не обязаны иметь характер составляющих вектора, и мы увидим, что они действительно таковыми не являются. Но существуют определенные действительные комбинации, которые имеют физический смысл (вероятности) и являются векторами. Мы вскоре с ними ознакомимся.

4. Уравнения Дирака в электромагнитном поле

Уравнения (18) подходят только к случаю отсутствия внешнего поля. Какие же следует брать волновые уравнения, если электрон движется в поле, определяемом скалярным потенциалом V и вектор-потенциалом $\vec{A}$? Дирак разрешил этот вопрос, утверждая, что достаточно в символическом уравнении (12) заменить операторы p_i формул (9) на операторы P_i формул (6).

Если принять этот постулат Дирака, то волновые уравнения в электромагнитном поле символически запишутся так:

$$\left(P_4 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 m_0 c\right)\Psi = 0, \tag{24}$$

или явно:

$$\begin{aligned}
&\left(P_4 + m_0 c\right)\Psi_1 + \left(P_1 - iP_2\right)\Psi_4 + P_3\Psi_3 = 0,\\
&\left(P_4 + m_0 c\right)\Psi_2 + \left(P_1 + iP_2\right)\Psi_3 - P_3\Psi_4 = 0,\\
&\left(P_4 - m_0 c\right)\Psi_3 + \left(P_1 - iP_2\right)\Psi_2 + P_3\Psi_1 = 0,\\
&\left(P_4 - m_0 c\right)\Psi_4 + \left(P_1 + iP_2\right)\Psi_1 - P_3\Psi_2 = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Что особенно замечательно, так это то, что эти уравнения, полученные путем общих рассуждений, совершенно не связанных с трудностями, упомянутыми в первой части этой работы, содержат в себе свойства магнитного вращающегося электрона! Для того чтобы убедиться в этом, мы попытаемся получить, исходя из уравнения (25), уравнения второго порядка, которые обобщают уравнения (15) в случае присутствия электромагнитного поля.

Для этого к символическому уравнению (24) мы применим оператор $P_4 - \left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i P_i + \alpha_4 m_0 c\right)$. Мы получим:

$$\left(P_4 - \sum_{i=1}^{3}\alpha_i P_i - \alpha_4 m_0 c\right)\left(P_4 + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i P_i + \alpha_4 m_0 c\right)\Psi = 0. \tag{26}$$

Если мы раскроем действия указанных операторов, принимая во внимание соотношения (16), то найдем:

$$\left[P_4^2 + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\left(P_4 P_i - P_i P_4\right) - \sum_{i=1}^{3} P_i^2 - \sum_{i\neq j}\left(\alpha_i\alpha_j P_i P_j + \alpha_j\alpha_i P_j P_i\right) - m_0^2 c^2\right]\Psi = 0. \tag{27}$$

Вспомним теперь, что электромагнитные поля связаны с потенциалами при помощи соотношений

$$\vec{h} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{28}$$

Принимая во внимание определения (6) и условия (16), после небольшого вычисления получаем:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\left(P_4 P_i - P_i P_4\right) = -\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{e}{c}\left(\alpha_1 h_x + \alpha_2 h_y + \alpha_3 h_z\right),\\ &\sum_{i\neq j}\left(\alpha_i\alpha_j P_i P_j + \alpha_j\alpha_i P_j P_i\right) = \frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{e}{c}\left(\alpha_2\alpha_3 H_x + \alpha_3\alpha_1 H_y + \alpha_1\alpha_2 H_z\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Таким образом, уравнение (27) принимает вид

$$\begin{aligned} &\left[P_4^2 - \sum_{i=1}^{3} P_i^2 - m_0^2 c^2 - \frac{e}{c}\cdot\frac{h}{2\pi i}\left(\alpha_1 h_x + \alpha_2 h_y + \alpha_3 h_z\right) - \right.\\ &\left. -\frac{e}{c}\cdot\frac{h}{2\pi i}\left(\alpha_2\alpha_3 H_x + \alpha_3\alpha_1 H_y + \alpha_1\alpha_2 H_z\right)\right]\Psi = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Если бы существовали только первые три члена в скобках, то мы вернулись бы к уравнению (5), которое, таким образом, выполнялось бы для каждой функции Ψ_i. Новый элемент, который вносится теорией Дирака, это появление дополнительных выражений в (30). Чтобы раскрыть их смысл, рассмотрим нерелятивистское уравнение (2), которое мы можем записать в виде

$$\left(2m_0 c\cdot p_4 + \sum_{i=1}^{3} p_i^2 + 2m_0 U\right)\Psi = 0. \tag{31}$$

Сравнивая (31) с (30), замечаем, что можем считать рассматриваемые дополнительные выражения членами потенциальной энергии, но с условием, что разделим их на $2m_0$. Только в механике Дирака роль, которую в прежних теориях играла величина m_0, играет $\alpha_4 m_0$, как мы это увидим позднее[1]. Итак,

[1] См. главу XV, параграф 4.

мы условимся определять оба члена потенциальной энергии, умножая *слева* оба дополнительных выражения (30) на $-\frac{1}{2m_0\alpha_4} = -\frac{\alpha_4}{2m_0}$. Учитывая соотношения коммутации между α_i, мы должны будем положить:

$$
\begin{aligned}
U_e &= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i\left(\alpha_1\alpha_4 h_x + \alpha_2\alpha_4 h_y + \alpha_3\alpha_4 h_z\right),\\
U_m &= -\frac{eh}{4\pi m_0 c} i\left(\alpha_2\alpha_3\alpha_4 H_x + \alpha_3\alpha_1\alpha_4 H_y + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 H_z\right).
\end{aligned} \tag{32}
$$

Далее, нам нужно помнить, что тело с дипольным электрическим моментом $\vec{\mathfrak{B}}$, помещенное в электрическое поле $\vec{h}$, обладает потенциальной энергией $-\left(\vec{\mathfrak{B}}\cdot\vec{h}\right)$, в то время как тело с магнитным моментом $\vec{\mathfrak{M}}$, помещенное в магнитное поле $\vec{H}$, обладает потенциальной энергией $-\left(\vec{\mathfrak{M}}\cdot\vec{H}\right)$. Таким образом, мы приходим к тому, что следует приписать электрону магнитный момент с составляющими

$$
\mathfrak{M}_x = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i\alpha_2\alpha_3\alpha_4; \quad \mathfrak{M}_y = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i\alpha_3\alpha_1\alpha_4; \quad \mathfrak{M}_z = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i\alpha_1\alpha_2\alpha_4 \tag{33}
$$

и дипольный электрический момент с составляющими

$$
\mathfrak{B}_x = -\frac{eh}{4\pi m_0 c} i\alpha_1\alpha_4; \quad \mathfrak{B}_y = -\frac{eh}{4\pi m_0 c} i\alpha_2\alpha_4; \quad \mathfrak{B}_z = -\frac{eh}{4\pi m_0 c} i\alpha_3\alpha_4. \tag{34}
$$

Более точно можно сказать, что величины (33) и (34) суть операторы, соответствующие составляющим обоих моментов. Так как $\frac{eh}{4\pi m_0 c}$ есть магнетон Бора, мы видим, что уравнения Дирака автоматически приписывают электрону собственный магнитный момент, равный магнетону Бора. Итак, мы видим, как появляется магнетизм электрона, и вскоре мы будем иметь случай уточнить это первое указание. Формулы (34) к тому же показывают нам, что электрон Дирака обладает также дипольным электрическим моментом, смысл которого мы увидим несколько позднее.

Составляющие обоих моментов, определяемые формулами (33) и (34), суть операторы, поскольку они выражаются с помощью α_i. Это нисколько не должно нас удивлять, так как мы уже привыкли видеть, что в новой механике физические величины уступают место операторам. Кроме того, легко доказать, что операторы (33) и (34) эрмитовы; действительно, так как α_i эрмитовы и антикоммутируют между собой, то такие произведения, например, как $\alpha_1\alpha_2$ или $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$, антиэрмитовы, а следовательно, их произведение на i эрмитово. Таким образом, операторы (33) и (34) обладают свойством, необходимым для представления физических величин.

Так устраняется трудность, которая существовала в первоначальном представлении теории Дирака, который писал формулы (33) и (34) без множителя α_4 и, таким образом, получал неэрмитовы составляющие электрического дипольного момента.

ГЛАВА XI. Релятивистская инвариантность уравнений Дирака

1. Инвариантность уравнений Дирака относительно преобразований Лоренца

В уравнениях Дирака особую роль играет ось *oz*, и знание волновых функций, точно так же, как и в теории Паули, поможет дать ответ на вопросы о вероятностях, связанных с осью *oz*. Если мы хотим поставить те же вопросы в отношении оси *oz'*, отличной от оси *oz,* мы должны будем написать уравнения Дирака в координатной системе, в которой *oz'* будет третьей осью. Мы должны быть в состоянии написать уравнения Дирака *в одной и той же форме* для всех возможных декартовых систем координат, причем четыре волновые функции преобразуются определенным образом, когда мы переходим от одной системы к другой.

Уравнения Дирака не только, как и уравнения Паули, обладают этой инвариантностью в отношении преобразований пространственных координат, но они точно так же инвариантны и относительно преобразований Лоренца и, следовательно, удовлетворяют принципу относительности.

Известно, что преобразование Лоренца наиболее общего типа всегда может быть разложено на три последовательных преобразования. Исходя из первоначальной системы *xyzt* пространственно-временных координат, последовательно совершаются:

1) вращение вокруг оси *oz*, определяемое формулами типа

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha; \quad y = y'\cos\alpha - x'\sin\alpha; \quad z = z'; \quad t = t'; \tag{1}$$

2) вращение вокруг оси *oy*, перпендикулярной *oz*, определяемое формулами

$$z = z'\cos\theta - x'\sin\theta; \quad x = x'\cos\theta + z'\sin\theta; \quad y = y'; \quad t = t'; \tag{2}$$

3) *простое* преобразование Лоренца, т. е. переход от системы *oxyzt* к системе *o'x'y'z't'*, равномерно движущейся относительно первой, причем оси z и z′ скользят одна по другой, а остальные оси остаются соответственно параллельными. Тогда имеем хорошо известные формулы преобразования:

$$x = x'; \quad y = y'; \quad z = \frac{z' + \beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t = \frac{t' + (\beta/c)z'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3}$$

где βc – скорость второй системы относительно первой. Если мы положим

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \operatorname{ch}\gamma; \quad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\gamma - 1} = \operatorname{sh} y, \tag{4}$$

формулы (3) примут вид

$$x = x'; \quad y = y'; \quad z = z'\operatorname{ch}\gamma + ct'\operatorname{sh}\gamma; \quad ct = ct'\operatorname{ch}\gamma + z'\operatorname{sh}\gamma. \tag{5}$$

Комбинируя три типа преобразований 1, 2 и 3, можно получить преобразование Лоренца наиболее общего типа.

Инвариантность уравнений Дирака относительно общего преобразования Лоренца будет доказана, если удастся разрешить следующую задачу: зная, что в системе галилеевых координат *xyzt* уравнения Дирака

$$\left(P_4 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 m_0 c\right)\Psi = 0 \tag{6}$$

имеют в качестве решений функции $\Psi_1(xyzt)$, $\Psi_2(xyzt)$, $\Psi_3(xyzt)$, $\Psi_4(xyzt)$, показать, что в другой галилеевой системе координат *x'y'z't'* уравнения Дирака

$$\left(P_4' + \alpha_1 P_1' + \alpha_2 P_2' + \alpha_3 P_3' + \alpha_4 m_0 c\right)\Psi' = 0, \tag{7}$$

где мы имеем:

$$P_1' = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{e}{c}A_{x'}', \ldots, \quad P_4' = \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{e}{c}V', \tag{8}$$

допускают в качестве решений функции $\Psi_1'(x'y'z't')$, $\Psi_2'(x'y'z't')$, $\Psi_3'(x'y'z't')$ и $\Psi_4'(x'y'z't')$, которые выражаются линейно как функции от $\Psi_1, \ldots, \Psi_4$ с помощью формул, содержащих параметры, определяющие переход от системы *oxyzt* к системе *o'x'y'z't'*.

Поставленную так задачу достаточно решить отдельно для каждого из трех преобразований 1, 2 и 3, указанных выше, так как всякое преобразование Лоренца можно разложить на преобразования этих трех типов.

1. Вращение вокруг *oz*.

Будем исходить из уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(P_4 + m_0 c\right)\Psi_1 + \left(P_1 - iP_2\right)\Psi_4 + P_3\Psi_3 = 0,\\
&\left(P_4 + m_0 c\right)\Psi_2 + \left(P_1 + iP_2\right)\Psi_3 - P_3\Psi_4 = 0,\\
&\left(P_4 - m_0 c\right)\Psi_3 + \left(P_1 - iP_2\right)\Psi_2 + P_3\Psi_1 = 0,\\
&\left(P_4 - m_0 c\right)\Psi_4 + \left(P_1 + iP_2\right)\Psi_1 - P_3\Psi_2 = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Так как преобразование переменных выражается формулами (1), мы имеем:

$$P_1 = P_1'\cos\alpha + P_2'\sin\alpha; \quad P_2 = P_2'\cos\alpha - P_1'\sin\alpha; \quad P_3 = P_3'; \quad P_4 = P_4', \tag{1'}$$

и, подставляя в (9), мы легко находим:

$$\begin{aligned}
&\left(P_4' + m_0 c\right)\Psi_1 + \left(P_1'\mathrm{e}^{i\alpha} - iP_2'\mathrm{e}^{i\alpha}\right)\Psi_4 + P_3'\Psi_3 = 0,\\
&\left(P_4' + m_0 c\right)\Psi_2 + \left(P_1'\mathrm{e}^{-i\alpha} + iP_2'\mathrm{e}^{-i\alpha}\right)\Psi_3 - P_3'\Psi_4 = 0,\\
&\left(P_4' - m_0 c\right)\Psi_3 + \left(P_1'\mathrm{e}^{i\alpha} - iP_2'\mathrm{e}^{i\alpha}\right)\Psi_2 + P_3'\Psi_1 = 0,\\
&\left(P_4' - m_0 c\right)\Psi_4 + \left(P_1'\mathrm{e}^{-i\alpha} + iP_2'\mathrm{e}^{-i\alpha}\right)\Psi_1 - P_3'\Psi_2 = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

В этих уравнениях предполагается, что Ψ_i выражаются как функции от штрихованных переменных при помощи соотношений преобразования (1). Умножив первое и третье уравнения (10) на $e^{-i\frac{\alpha}{2}}$, второе и четвертое на $e^{i\frac{\alpha}{2}}$, мы получаем:

$$\begin{aligned}
&\left(P_4' + m_0 c\right)\Psi_1 e^{-i\frac{\alpha}{2}} + \left(P_1' - iP_2'\right)\Psi_4 e^{i\frac{\alpha}{2}} + P_3'\Psi_3 e^{-i\frac{\alpha}{2}} = 0,\\
&\left(P_4' + m_0 c\right)\Psi_2 e^{i\frac{\alpha}{2}} + \left(P_1' + iP_2'\right)\Psi_3 e^{-i\frac{\alpha}{2}} - P_3'\Psi_4 e^{i\frac{\alpha}{2}} = 0,\\
&\left(P_4' - m_0 c\right)\Psi_3 e^{-i\frac{\alpha}{2}} + \left(P_1' - iP_2'\right)\Psi_2 e^{i\frac{\alpha}{2}} + P_3'\Psi_1 e^{-i\frac{\alpha}{2}} = 0,\\
&\left(P_4' - m_0 c\right)\Psi_4 e^{i\frac{\alpha}{2}} + \left(P_1' + iP_2'\right)\Psi_1 e^{-i\frac{\alpha}{2}} - P_3'\Psi_2 e^{i\frac{\alpha}{2}} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) показывает, что функции Ψ_i' связаны с функциями Ψ_i простыми формулами:

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(x'y'z't') &= \Psi_1(x'y'z't')e^{-i\frac{\alpha}{2}},\\
\Psi_2'(x'y'z't') &= \Psi_2(x'y'z't')e^{i\frac{\alpha}{2}},\\
\Psi_3'(x'y'z't') &= \Psi_3(x'y'z't')e^{-i\frac{\alpha}{2}},\\
\Psi_4'(x'y'z't') &= \Psi_4(x'y'z't')e^{i\frac{\alpha}{2}},
\end{aligned} \tag{12}$$

и требуемое доказательство для данного случая найдено.

2. Вращение вокруг oy.

Преобразование координат дано в (2), а преобразование волновых функций Дирака дается формулами

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(x'y'z't') &= \Psi_1(x'y'z't')\cos(\theta/2) + \Psi_2(x'y'z't')\sin(\theta/2),\\
\Psi_2'(x'y'z't') &= \Psi_2(x'y'z't')\cos(\theta/2) - \Psi_1(x'y'z't')\sin(\theta/2),\\
\Psi_3'(x'y'z't') &= \Psi_3(x'y'z't')\cos(\theta/2) + \Psi_4(x'y'z't')\sin(\theta/2),\\
\Psi_4'(x'y'z't') &= \Psi_4(x'y'z't')\cos(\theta/2) - \Psi_3(x'y'z't')\sin(\theta/2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Это доказывается путем рассуждений, аналогичных рассуждениям для случая 1.

3. Простое преобразование Лоренца.

Поскольку преобразование координат выражается формулами (5), преобразование функций Дирака дается так:

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(x'y'z't') &= \Psi_1(x'y'z't')\mathrm{ch}(\gamma/2) + \Psi_3(x'y'z't')\mathrm{sh}(\gamma/2),\\
\Psi_2'(x'y'z't') &= \Psi_2(x'y'z't')\mathrm{ch}(\gamma/2) - \Psi_4(x'y'z't')\mathrm{sh}(\gamma/2),\\
\Psi_3'(x'y'z't') &= \Psi_3(x'y'z't')\mathrm{ch}(\gamma/2) + \Psi_1(x'y'z't')\mathrm{sh}(\gamma/2),\\
\Psi_4'(x'y'z't') &= \Psi_4(x'y'z't')\mathrm{ch}(\gamma/2) - \Psi_2(x'y'z't')\mathrm{sh}(\gamma/2).
\end{aligned} \tag{14}$$

Это доказывается тем же самым способом. Таким образом, доказана инвариантность уравнений Дирака относительно наиболее общего преобразования Лоренца.

Из формул (12), (13) и (14) видно, что Ψ_i преобразуются не так, как координаты. Следовательно, они, как это мы уже говорили, не имеют характера составляющих пространственно-временного вектора. Но мы скоро научимся составлять при помощи Ψ_i определенные выражения, которые будут обладать векторными или тензорными свойствами и будут иметь физический смысл.

2. Более общее доказательство релятивистской инвариантности

Мы приведем более общее доказательство инвариантности уравнений Дирака. Это доказательство, данное фон Нейманом, является обобщением доказательства, которое использовал Паули, чтобы показать инвариантность своих уравнений по отношению к преобразованию прямоугольных координат в пространстве.

Возьмем уравнение Дирака в его символической форме:

$$\left(P_4 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_i + \alpha_4 m_0 c\right)\Psi = 0 \tag{15}$$

и применим к нему сначала оператор α_4. Мы получаем ($\alpha_4^2 = 1$):

$$\left(\alpha_4 P_4 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_4 \alpha_i P_i + m_0 c\right)\Psi = 0. \tag{16}$$

Теперь мы возьмем вместо переменных x, y, z, t пространственно-временные переменные Минковского:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict \tag{17}$$

и определим соответствующие операторы:

$$\pi_1 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{eA_1}{c} = P_1; \quad \pi_2 = P_2; \quad \pi_3 = P_3; \quad \pi_4 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_4} - \frac{e}{c} iV = -\frac{P_4}{i}. \tag{18}$$

Тогда уравнение (16) примет вид

$$\left(\alpha_4 \pi_4 + \sum_{i=1}^{3} i\alpha_4 \alpha_i \pi_i + i m_0 c\right)\Psi = 0. \tag{19}$$

Теперь положим (фон Нейман):

$$\gamma_1 = i\alpha_4\alpha_1, \quad \gamma_2 = i\alpha_4\alpha_2, \quad \gamma_3 = i\alpha_4\alpha_3, \quad \gamma_4 = \alpha_4. \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что справедливы соотношения

$$\gamma_i^2 = 1, \quad \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0, \quad i \neq j, \tag{21}$$

которые можно резюмировать, написав

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij} \cdot 1, \tag{22}$$

где 1 – единичная матрица. Можно доказать также, что γ_i эрмитовы.

С учетом этих обозначений уравнение (19) принимает очень удобную компактную форму:

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\gamma_i\pi_i + im_0c\right)\Psi = 0. \tag{23}$$

Теперь предположим, что мы осуществляем преобразование галилеевых координат, общее преобразование Лоренца. Из теории относительности хорошо известно, что общее преобразование Лоренца эквивалентно вращению пространственно-временных осей в мире Минковского. Следовательно, новые переменные x_i' после преобразования будут связаны с прежними переменными x_i при помощи формул

$$x_i = \sum_j o_{ij}x_j', \tag{24}$$

где o – матрица, содержащая 4 строки и 4 столбца[1] и удовлетворяющая соотношению ортогональности:

$$\sum_i o_{ik}o_{ij} = \delta_{kj}. \tag{25}$$

Таким образом, очевидно, что π_i преобразуются, как x_i, т. е. что

$$\pi_i = \sum_j o_{ij}\pi_j'. \tag{26}$$

Следовательно, после преобразования координат уравнение (23) примет вид

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\gamma_i\sum_{j=1}^{4}o_{ij}\pi_j' + im_0c\right)\Psi = 0, \tag{27}$$

где функции Ψ должны быть выражены при помощи новых переменных x_i'. Если мы положим

$$\gamma_j' = \sum_{i=1}^{4}o_{ij}\gamma_i, \tag{28}$$

мы сможем заменить (27) на

$$\left(\sum_{j=1}^{4}\gamma_j'\pi_j' + im_0c\right)\Psi = 0. \tag{29}$$

Уравнение (28) выражает матрицы γ_j' как функции от матриц γ_i. Если желательно уточнить его смысл, нужно написать:

$$\gamma_{j,mn}' = \sum_{i=1}^{4}o_{ij}\gamma_{i,mn}, \tag{30}$$

где $\gamma_{i,mn}$, например, обозначает элемент с индексами m, n матрицы γ_i.

[1] Матрица o не действительная; те из ее элементов, номера которых содержат индекс 4 один раз, – чисто мнимые.

Так как мы имеем

$$\gamma'^{*}_{j,nm} = \sum_{i=1}^{4} o^{*}_{ij}\gamma^{*}_{i,nm} = \sum_{i=1}^{4} o^{*}_{ij}\gamma_{i,mn} \neq \gamma'_{j,mn}\ , \tag{31}$$

в силу эрмитовости γ_i мы видим, что вообще γ_i' не эрмитовы, так как ни одна из величин o_{ij} не действительная.

Легко проверить, что γ_i' удовлетворяют условиям (22). Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned}\gamma_i'\gamma_j' + \gamma_j'\gamma_i' &= \sum_k o_{ki}\gamma_k \cdot \sum_l o_{lj}\gamma_l + \sum_l o_{lj}\gamma_l \cdot \sum_k o_{ki}\gamma_k = \sum_k\sum_l o_{ki}\, o_{lj}\left(\gamma_k\gamma_l + \gamma_l\gamma_k\right) = \\ &= \sum_k\sum_l o_{ki}\, o_{lj}\cdot 2\delta_{kl} = 2\sum_k o_{ki}\, o_{kj} = 2\delta_{lj}.\end{aligned} \tag{32}$$

Существенным пунктом рассуждения является то, что найдется матрица Λ, содержащая 4 строки и 4 столбца, такая, что

$$\gamma_i' = \Lambda^{-1}\gamma_i\Lambda \quad \left(i = 1, 2, 3, 4\right). \tag{33}$$

Если уравнение (33) справедливо, то, поскольку γ_i удовлетворяют соотношениям (22), γ_i' удовлетворяют аналогичным соотношениям:

$$\gamma_i'\gamma_j' + \gamma_j'\gamma_i' = 2\delta_{ij}. \tag{34}$$

Так как мы можем уравнение (33) написать в виде

$$\Lambda\gamma_i' = \gamma_i\Lambda \quad \left(i = 1, 2, 3, 4\right), \tag{35}$$

то для того чтобы доказать *существование* матрицы Λ, следовало бы показать, что найдутся 16 величин Λ_{kl}, удовлетворяющих 64 уравнениям:

$$\sum_{l=1}^{4} \Lambda_{kl}\gamma'_{i,lm} = \sum_{l=1}^{4} \gamma_{i,kl}\Lambda_{lm}, \tag{36}$$

где индексы k, m, i могут принимать значения 1, 2, 3, 4. Существование матрицы Λ *a priori* совершенно не очевидно. Однако мы примем предварительно существование данной матрицы, чтобы доказать эту гипотезу впоследствии.

Прежде чем идти вперед, заметим, что матрица Λ в общем случае не может быть унитарной. Действительно, если бы она была унитарной, мы имели бы:

$$\Lambda^{+} = \Lambda^{-1}; \quad \Lambda = \left(\Lambda^{-1}\right)^{+}, \tag{37}$$

и так как из уравнения (33), беря сопряженное уравнение, получаем

$$\gamma_i'^{+} = \left(\Lambda^{-1}\gamma_i\Lambda\right)^{+} = \Lambda^{+}\gamma_i^{+}\left(\Lambda^{-1}\right)^{+}, \tag{38}$$

мы имели бы в силу (37) и эрмитовости γ_i:

$$\gamma_i'^{+} = \Lambda^{-1}\gamma_i\Lambda = \gamma_i'. \tag{39}$$

В результате выходит, что γ_i' была бы эрмитовой, а этого, вообще говоря, как мы видели, может и не быть.

Теперь возьмем опять уравнение (29), вводя в него соотношение (33). Получаем:

$$\left(\sum_{j=1}^{4} \Lambda^{-1}\gamma_j \Lambda \pi_j' + im_0 c\right)\Psi = 0. \tag{40}$$

Умножим слева на Λ и заметим, что матрица Λ, соответствующая действию, производимому над индексом Дирака, коммутирует с π_j'. Мы получаем:

$$\left(\sum_{j=1}^{4} \gamma_j \pi_j' + im_0 c\right)\Lambda\Psi = 0. \tag{41}$$

Формула (41) выражает следующую теорему.

Теорема: Когда мы производим преобразование Лоренца, можно для уравнений Дирака сохранить ту же форму, но новые волновые функции Ψ_i' связаны с прежними Ψ_i при помощи линейного преобразования:

$$\Psi_i'(x', y', z', t') = \Lambda\Psi_i(x', y', z', t') = \sum_{k=1}^{4} \Lambda_{ik}\Psi_k(x', y', z', t'). \tag{42}$$

Это в точности результат, установленный в параграфе 1.

Теперь мы можем доказать гипотезу о существовании матрицы Λ. Действительно, в параграфе 1 мы научились находить линейное преобразование, которому подвергается каждая функция Ψ_i для каждого из трех видов изменения координат, на которые можно разложить всякое общее преобразование Лоренца. Следовательно, мы знаем, по крайней мере в принципе, как находить линейное преобразование Ψ_i, которое соответствует произвольному преобразованию Лоренца, т. е. умеем определять элементы такой матрицы Λ, что

$$\Psi_i'(x', y', z', t') = \Lambda\Psi_i(x', y', z', t'). \tag{43}$$

Эта матрица Λ по (42) должна быть точно такой же, как в (33), и, поскольку мы умеем ее вычислять, мы уверены, что она существует.

Обращаясь к формулам (12), (13) и (14), можно непосредственно записать явный вид матриц Λ, которые соответствуют простым случаям 1, 2, 3 предыдущего параграфа. Рассмотрим, например, случай 3: простое преобразование Лоренца. Формулы (14) показывают нам, что матрица Λ имеет следующую форму:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\frac{\gamma}{2} & 0 & \mathrm{sh}\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\frac{\gamma}{2} & 0 & -\mathrm{sh}\frac{\gamma}{2} \\ \mathrm{sh}\frac{\gamma}{2} & 0 & \mathrm{ch}\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & -\mathrm{sh}\frac{\gamma}{2} & 0 & \mathrm{ch}\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Легко убедиться, что эта матрица не унитарная $\left(\Lambda^{+} \neq \Lambda^{-1}\right)$. Выходит, что $\sum_{i=1}^{4} \Psi_i^* \Psi_i$ не равно $\sum_{i=1}^{4} \Psi_i'^* \Psi_i'$. Следовательно, плотность вероятности изменяет свои значения при простом преобразовании Лоренца. Действительно, мы увидим, что эта плотность не является инвариантной и представляет собой временную составляющую пространственно-временного вектора.

3. Электромагнитная инвариантность уравнений Дирака

Наряду с релятивистской инвариантностью уравнения Дирака обнаруживают другой вид инвариантности, которую я назову электромагнитной инвариантностью (т. е. калибровочной инвариантностью *Eichinvarianz* у немецких авторов). Объясним, в чем она заключается.

Так как электрическое поле $\vec{h}$ и магнитное поле $\vec{H}$ определяются как функции от потенциалов формулами

$$\vec{h} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \tag{45}$$

то очевидно, что если мы заменим V и $\vec{A}$ на

$$V' = V - \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Phi, \tag{46}$$

где Φ – какая-нибудь функция от x, y, z, t, поля нисколько не изменятся, так как мы имеем:

$$\operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad -\operatorname{grad} V' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{47}$$

Поскольку именно поля выражают динамические действия и поскольку они не чувствительны к преобразованию потенциалов формы (46), мы должны ожидать, что уравнения Дирака также инвариантны по отношению к этим преобразованиям. Это и есть электромагнитная инвариантность.

Напишем символическое уравнение Дирака:

$$\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{eV}{c}\right) + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{e}{c}A_j\right) + \alpha_4 m_0 c\right]\Psi = 0 \tag{48}$$

и затем предположим, что мы подвергаем потенциалы преобразованию (46). Заменяя V и A_j на функции от V' и A_j', мы получаем вместо (48)

$$\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{eV'}{c} - \frac{e}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{e}{c}A_j' - \frac{e}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) + \alpha_4 m_0 c\right]\Psi = 0. \tag{49}$$

Легко показать, что если мы положим $\Psi' = \Psi e^{-\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\Phi}$, мы снова найдем уравнение, имеющее ту же форму, что и (48), т. е.

$$\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{eV'}{c}\right) + \sum_{j=1}^{3}\alpha_j\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{e}{c}A_j'\right) + \alpha_4 m_0 c\right]\Psi' = 0. \tag{50}$$

Следовательно, переход от потенциалов V и $\vec{A}$ к потенциалам V' и $\vec{A}'$ не изменяет форму уравнения Дирака, но каждая из Ψ_k умножается на $e^{-\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\Phi}$.

Однако мы знаем, что не сами Ψ_k, а определенные их комбинации имеют физический смысл. Можно показать, что все комбинации этого рода, с которыми мы вскоре ознакомимся, не изменяются, когда мы заменяем в них Ψ_k на $\Psi_k e^{-\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}\Phi}$, что сразу же видно, например, для плотности вероятности $\sum_{k=1}^{4}\Psi_k^*\Psi_k$. Эта нечувствительность величин, имеющих физический смысл, по отношению к преобразованиям (46) составляет электромагнитную инвариантность уравнений Дирака.

ГЛАВА XII. Плотности заряда и тока в теории Дирака. Плоские волны

1. Выражения для плотности и плотности тока вероятности

Мы должны найти способ перенесения идей волновой механики с одной функцией Ψ в теорию Дирака. В частности, мы должны найти плотность ρ вероятности присутствия электрона и определить плотность тока $\rho\vec{u}$ этой вероятности. Выражения $-e\rho$ и $-e\rho\vec{u}$ дадут здесь также среднюю плотность электрического заряда и среднюю плотность электрического тока, при помощи которых будут вычисляться средние мощности излучения, испускаемого совокупностями электронов.

Чтобы найти форму ρ и $\rho\vec{u}$, мы всегда должны руководствоваться идеей о том, что полная вероятность присутствия должна оставаться постоянной (равной единице) и что поэтому уравнение непрерывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0$ должно быть следствием волновых уравнений.

Напишем четыре уравнения Дирака и четыре сопряженных уравнения:

$$\begin{aligned}
&(P_4 + m_0 c)\Psi_1 + (P_1 - iP_2)\Psi_4 + P_3\Psi_3 = 0,\\
&(P_4 + m_0 c)\Psi_2 + (P_1 + iP_2)\Psi_3 - P_3\Psi_4 = 0,\\
&(P_4 - m_0 c)\Psi_3 + (P_1 - iP_2)\Psi_2 + P_3\Psi_1 = 0,\\
&(P_4 - m_0 c)\Psi_4 + (P_1 + iP_2)\Psi_1 - P_3\Psi_2 = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&(P_4^* + m_0 c)\Psi_1^* + (P_1^* + iP_2^*)\Psi_4^* + P_3^*\Psi_3^* = 0,\\
&(P_4^* + m_0 c)\Psi_2^* + (P_1^* - iP_2^*)\Psi_3^* - P_3^*\Psi_4^* = 0,\\
&(P_4^* - m_0 c)\Psi_3^* + (P_1^* + iP_2^*)\Psi_2^* + P_3^*\Psi_1^* = 0,\\
&(P_4^* - m_0 c)\Psi_4^* + (P_1^* - iP_2^*)\Psi_1^* - P_3^*\Psi_2^* = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Умножим уравнения (1) соответственно на $\Psi_1^*,\ \Psi_2^*,\ \Psi_3^*,\ \Psi_4^*$ и уравнения (2) соответственно на $\Psi_1,\ \Psi_2,\ \Psi_3,\ \Psi_4$. Возьмем далее сумму уравнений (1) и вычтем из нее сумму уравнений (2). Члены с m_0c уничтожаются. Мы находим выражения вида

$$-\Psi_i^* P_4 \Psi_i + \Psi_i P_4^* \Psi_i^* = \Psi_i^*\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c}V\right)\Psi - \Psi_i\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c}V\right)\Psi^* =$$
$$= -\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_i^*\Psi_i),$$

а также члены вида

$$\Psi_1^* P_1 \Psi_4 - \Psi_4 P_1^* \Psi_1^* = \Psi_1^*\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)\Psi_4 - \Psi_4\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x\right)\Psi_1^* =$$
$$= \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_1^*\Psi_4).$$

Наконец, после умножения на $\frac{2\pi ic}{h}$ мы находим:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi_1^*\Psi_1+\Psi_2^*\Psi_2+\Psi_3^*\Psi_3+\Psi_4^*\Psi_4\right)+\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left[c\left(\Psi_1^*\Psi_4+\Psi_2^*\Psi_3+\Psi_3^*\Psi_2+\Psi_4^*\Psi_1\right)\right]+\\&+\frac{\partial}{\partial y}\left[-c\left(i\Psi_1^*\Psi_4-i\Psi_2^*\Psi_3+i\Psi_3^*\Psi_2-i\Psi_4^*\Psi_1\right)\right]+\\&+\frac{\partial}{\partial z}\left[c\left(\Psi_1^*\Psi_3-\Psi_2^*\Psi_4+\Psi_3^*\Psi_1-\Psi_4^*\Psi_2\right)\right]=0.\end{aligned}\tag{3}$$

Уравнение (3) эквивалентно уравнению непрерывности, если мы положим:

$$\begin{aligned}&\rho=\Psi_1^*\Psi_1+\Psi_2^*\Psi_2+\Psi_3^*\Psi_3+\Psi_4^*\Psi_4,\\&\rho u_x=c\left(\Psi_1^*\Psi_4+\Psi_2^*\Psi_3+\Psi_3^*\Psi_2+\Psi_4^*\Psi_1\right),\\&\rho u_y=-c\left(i\Psi_1^*\Psi_4-i\Psi_2^*\Psi_3+i\Psi_3^*\Psi_2-i\Psi_4^*\Psi_1\right),\\&\rho u_z=c\left(\Psi_1^*\Psi_3-\Psi_2^*\Psi_4+\Psi_3^*\Psi_1-\Psi_4^*\Psi_2\right).\end{aligned}\tag{4}$$

Без труда можно проверить, что выражения (4) являются действительными, ибо они равны своим сопряженным. Следовательно, их можно считать определяющими плотность вероятности и составляющие соответствующей плотности тока.

Выражение для ρ имеет в точности вид, постулированный Дираком. Оно показывает, что мы должны нормировать Ψ_i, написав:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}\left(\Psi_1^*\Psi_1+\Psi_2^*\Psi_2+\Psi_3^*\Psi_3+\Psi_4^*\Psi_4\right)d\tau=1,\tag{5}$$

и что если эта нормировка справедлива в какой-нибудь момент времени, она остается верной всегда.

Формулам (4) можно придать компактную и изящную форму, пользуясь тремя матрицами α_1, α_2, α_3 и единичной матрицей (включающими 4 строки и 4 столбца). Напишем эти матрицы явно:

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix};\ \alpha_2=\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix};\ \alpha_3=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix};\ 1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\tag{6}$$

и сравним их с формулами (4). Сразу же видно, что их можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\rho=\sum_{i=1}^{4}\Psi_i^*\cdot 1\Psi_i;\quad \rho u_x=c\sum_{i=1}^{4}\Psi_i^*\cdot\alpha_1\Psi_i;\\&\rho u_y=c\sum_{i=1}^{4}\Psi_i^*\cdot\alpha_2\Psi_i;\quad \rho u_z=c\sum_{i=1}^{4}\Psi_i^*\cdot\alpha_3\Psi_i.\end{aligned}\tag{7}$$

Вполне естественно, что средняя электрическая плотность δ и составляющие средней плотности тока j_x, j_y и j_z получаются после умножения ρ, ρu_x (и т. д.) на $-e$. Мы имеем:

$$\delta = -e\rho; \quad j_x = -e\rho u_x; \quad j_y = -e\rho u_y; \quad j_z = -e\rho u_z. \tag{8}$$

2. Векторный характер плотности и плотности тока

Величины (4), которые имеют физический смысл, представляют собой составляющие пространственно-временного вектора, причем ρ является временной составляющей. Чтобы это доказать, достаточно, например, проверить, что для каждого из трех преобразований, указанных в параграфе 1 предыдущей главы, величины (4) преобразуются, как координаты, откуда следует, что то же самое справедливо и для наиболее общих преобразований Лоренца.

Укажем ход проверки для преобразования типа 1: вращения вокруг oz. Между прежними и новыми переменными имеем такие соотношения:

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \quad y = y'\cos\alpha - x'\sin\alpha, \quad z = z', \quad t = t', \tag{9}$$

откуда также следует:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha, \quad z = z', \quad t = t'. \tag{10}$$

Мы уже видели, что тогда функции Ψ_i преобразуются следующим образом:

$$\Psi_1' = \Psi_1 e^{-i\frac{\alpha}{2}}; \quad \Psi_2' = \Psi_2 e^{+i\frac{\alpha}{2}}; \quad \Psi_3' = \Psi_3 e^{-i\frac{\alpha}{2}}; \quad \Psi_4' = \Psi_4 e^{+i\frac{\alpha}{2}}. \tag{11}$$

В таком случае, очевидно, имеем:

$$\rho' = \sum_{i=1}^{4} \Psi_i'^* \Psi_i' = \sum_{i=1}^{4} \Psi_i^* \Psi_i = \rho. \tag{12}$$

Плотность ρ остается инвариантной при этом преобразовании, как и переменная t. Точно так же нетрудно видеть, что $\rho' u_z' = \rho u_z$; z-составляющая плотности тока остается инвариантной, как и переменная z. Для x-составляющей имеем:

$$\begin{aligned}
\rho' u_x' &= c\left(\Psi_1'^*\Psi_4' + \Psi_2'^*\Psi_3' + \Psi_3'^*\Psi_2' + \Psi_4'^*\Psi_1'\right) = \\
&= c\left(\Psi_1^*\Psi_4 e^{i\alpha} + \Psi_2^*\Psi_3 e^{-i\alpha} + \Psi_3^*\Psi_2 e^{i\alpha} + \Psi_4^*\Psi_1 e^{-i\alpha}\right) = \\
&= c\left(\Psi_1^*\Psi_4 + \Psi_2^*\Psi_3 + \Psi_3^*\Psi_2 + \Psi_4^*\Psi_1\right)\cos\alpha + \\
&+ c\left(i\Psi_1^*\Psi_4 - i\Psi_2^*\Psi_3 + i\Psi_3^*\Psi_2 - i\Psi_4^*\Psi_1\right)\sin\alpha = \\
&= \rho u_x \cos\alpha - \rho u_y \sin\alpha.
\end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, составляющая ρu_x преобразуется, как переменная x, и мы можем точно таким же образом проверить, что ρu_y преобразуется, как y.

Точно так же нам следует поступить при изучении преобразований плотности и плотности тока в случаях 2 и 3 (вращение вокруг oy и простое преобразование Лоренца), и мы пришли бы к заключению, что четыре величины (4) представляют собой составляющие пространственно-временного вектора.

Мы знаем, что, если пространственно-временной вектор $\vec{a}$ имеет в качестве пространственных составляющих a_1, a_2, a_3 и временной составляющей a_4, то величина $c^2 a_4^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$, которой определяется его длина в пространстве-времени, является инвариантом, не зависящим от выбора галилеевой системы координат. Если мы вычислим длину 4-вектора плотности тока, то после нетрудного, но достаточно длинного вычисления находим:

$$c^2\rho^2 - (\rho u_x)^2 - (\rho u_y)^2 - (\rho u_z)^2 = c^2\left[\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right], \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_2^*\Psi_2 - \Psi_3^*\Psi_3 - \Psi_4^*\Psi_4 = \sum_{i=1}^{4}\Psi_i^*\cdot\alpha_4\Psi_i,\\ \Omega_2 &= -i\Psi_1^*\Psi_3 - i\Psi_2^*\Psi_4 + i\Psi_3^*\Psi_1 + i\Psi_4^*\Psi_3 = \sum_{i=1}^{4}\Psi_i^*\cdot\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\Psi_i.\end{aligned} \tag{15}$$

Величины Ω_1 и Ω_2 суть инварианты такого же типа, как и длина (14) 4-вектора плотности тока в пространстве-времени. Матрица $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, употребляемая в компактном выражении Ω_2, легко находится исходя из α_i; она эрмитова и выражается так:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{16}$$

3. Плоская волна при отсутствии внешних полей

Очень полезно рассмотреть случай отсутствия внешних полей $\left(V = \vec{A} = 0\right)$. В этом случае уравнения Дирака принимают вид

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + m_0 c\right)\Psi_1 + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_4 + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi_3}{\partial z} = 0,\\
&\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + m_0 c\right)\Psi_2 + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_3 - \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi_4}{\partial z} = 0,\\
&\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - m_0 c\right)\Psi_3 + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_2 + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi_1}{\partial z} = 0,\\
&\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - m_0 c\right)\Psi_4 + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_1 - \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi_2}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Посмотрим, допускают ли уравнения (17) в качестве решения плоскую монохроматическую волну, определяемую как

$$\Psi_i = a_i \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)}. \tag{18}$$

Подставляя в (17), находим:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{W}{c} + m_0 c\right)a_1 + \left(p_x - ip_y\right)a_4 + p_z a_3 = 0,\\
&\left(-\frac{W}{c} + m_0 c\right)a_2 + \left(p_x + ip_y\right)a_3 - p_z a_3 = 0,\\
&\left(-\frac{W}{c} - m_0 c\right)a_3 + \left(p_x - ip_y\right)a_2 + p_z a_1 = 0,\\
&\left(-\frac{W}{c} - m_0 c\right)a_4 + \left(p_x + ip_y\right)a_1 - p_z a_2 = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Эти линейные и однородные уравнения могут быть удовлетворены одновременно при не равных нулю a_i только в том случае, если детерминант

$$\begin{vmatrix}
-\frac{W}{c} + m_0 c & 0 & p_z & p_x - ip_y \\
0 & -\frac{W}{c} + m_0 c & p_x + ip_y & -p_z \\
p_z & p_x - ip_y & -\frac{W}{c} - m_0 c & 0 \\
p_x + ip_y & -p_z & 0 & -\frac{W}{c} - m_0 c
\end{vmatrix} \tag{20}$$

равен нулю. Несколько длинное вычисление этого детерминанта показывает, что он равен

$$\left(\frac{W^2}{c^2} - m_0^2 c^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2\right)^2.$$

Он равен нулю, если W, p_x, p_y, p_z связаны хорошо известным соотношением релятивистской механики:

$$\frac{W^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2 c^2. \tag{21}$$

Предположим, что это соотношение выполнено[1]. Тогда не только детерминант (20) равен нулю, но и все его миноры третьего порядка точно так же равны нулю. Следовательно, мы можем выбрать произвольными любые две из четырех амплитуд *a*. Возьмем, например, произвольные значения *A* и *B* соответственно для a_1 и a_2.

[1] Мы принимаем в данном случае, что *W* положительно, т. е. что в силу (21) мы имеем $W/c = +\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$. Далее (глава XX) мы зададимся вопросом, что может означать отрицательное решение $W/c = -\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$.

Тогда уравнения (19) определяют a_3 и a_4 и мы находим:

$$a_3 = \frac{p_z A + (p_x - ip_y)B}{W/c + m_0 c}, \quad a_4 = \frac{(p_x + ip_y)A - p_z B}{W/c + m_0 c}. \tag{22}$$

Следовательно, мы видим, что плоская волна (18) полностью определена, если мы знаем амплитуды A и B.

Можно сделать интересное замечание в отношении формул (22). В новой механике, как и в прежней релятивистской механике, мы можем сказать, что ньтоновское приближение справедливо, когда энергия W незначительно превышает энергию в состоянии покоя m_0c^2 (скорости малы по сравнению со скоростью света).

Из (21) вытекает что, если ньютоновское приближение справедливо, то каждая из величин p_x, p_y, p_z очень мала по сравнению с m_0c. Вновь обратимся к формулам (22): когда ньютоновское приближение верно, знаменатели в (22) с большой точностью равны $2m_0c$, и мы видим, что a_3 и a_4 очень малы по сравнению с A и B. Отсюда вытекает, что в ньютоновском приближении функциями Ψ_3 и Ψ_4 можно пренебречь по сравнению с Ψ_1 и Ψ_2. Следовательно, в этом случае мы приходим к задаче с двумя Ψ_i, как и в нерелятивистской теории Паули. Особенно простым случаем, в котором ньютоновское приближение применимо точно, является случай электрона в состоянии покоя; тогда функции Ψ_i имеют вид

$$\Psi_3 = \Psi_4 = 0; \quad \Psi_1 = A\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t}; \quad \Psi_2 = B\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t}. \tag{23}$$

Следовательно, в галилеевой системе координат, связанной с электроном, волны Ψ_3 и Ψ_4 строго равны нулю.

4. Плотность и плотность тока в плоской волне

Мы видели, что в отсутствие поля уравнения Дирака имеют решение:

$$\begin{aligned}
\Psi_3 &= \frac{p_z A + (p_x - ip_y)B}{W/c + m_0 c}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)},\\
\Psi_4 &= \frac{(p_x + ip_y)A - p_z B}{W/c + m_0 c}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)},\\
\Psi_1 &= A\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)},\\
\Psi_2 &= B\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)},
\end{aligned} \tag{24}$$

причем постоянные W, p_x, p_y, p_z связаны соотношением (21). Постоянные A и B произвольны, пока не наложено условие нормировки.

Вычислим плотность ρ плоской волны (24):

$$\rho = \sum_{i=1}^{4} \Psi_i^* \Psi_i = AA^* + BB^* + \left(AA^* + BB^*\right) \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\left(W/c + m_0 c\right)^2} = \\ = \left(AA^* + BB^*\right)\left(1 + \frac{W^2/c^2 - m_0 c^2}{\left(W/c + m_0 c\right)^2}\right) = \left(AA^* + BB^*\right)\frac{2W/c}{W/c + m_0 c}. \tag{25}$$

Точно таким же образом вычислим ρu_x на основании определений (4):

$$\rho u_x = c\left(\Psi_1^* \Psi_4 + \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_3^* \Psi_2 + \Psi_4^* \Psi_1\right) = \left(AA^* + BB^*\right)\frac{2p_x c}{W/c + m_0 c}, \tag{26}$$

что можно переписать, принимая во внимание (25), в виде

$$\rho u_x = \rho \frac{p_x}{W} c^2. \tag{27}$$

Следовательно, составляющая u_x скорости потока вероятности локализации электрона есть

$$u_x = \frac{p_x c^2}{W}. \tag{28}$$

Далее, составляющая v_x скорости электрона в классической теории такова, что

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{W}{c^2} v_x, \tag{29}$$

откуда в результате сравнения с (28) получается:

$$u_x = v_x. \tag{30}$$

Рассматривая составляющие y и z, мы получили бы формулы, аналогичные (26), (27) и (28), и пришли бы к выводу, что

$$u_y = v_y; \quad u_z = v_z. \tag{31}$$

Короче говоря, скорость $\vec{u}$ потока вероятности в плоской волне всюду равна скорости $\vec{v}$, которую прежняя корпускулярная теория приписывала электрону, ассоциируемому с этой плоской волной.

Вполне естественно, что в теории Дирака, как и в волновой механике с одной функцией Ψ, плоская волна соответствует случаю, когда точно известно динамическое состояние частицы (p_x, p_y, p_z, а следовательно и W, известны), но положение совершенно неизвестно.

Выражения для плотности заряда и плотности электрического тока здесь имеют вид

$$\delta = - e\rho; \quad j_x = - e\rho v_x; \quad j_y = - e\rho v_y; \quad j_z = - e\rho v_z, \tag{32}$$

при этом ρ определяется формулой (25).

ГЛАВА XIII. Собственный магнетизм электрона

1. «Пакет вероятности» в волновой механике

Первоначальная идея Уленбека и Гаудсмита заключалась в том, чтобы представлять электрон как маленькую электрически заряженную сферу, вращающуюся вокруг одного из своих диаметров и, следовательно, обладающую (по крайней мере, в своей собственной системе отсчета) магнитным моментом, направленным по этому диаметру. Это представление не может быть сохранено буквально в новой механике в силу невозможности приписать электрону определенное положение и структуру. Тем не менее мы увидим, что с помощью введения фиктивной «жидкости вероятности» в теории Дирака можно получить некоторого рода средний образ электрона, приближающийся к образу Уленбека и Гаудсмита. Для этого нам нужно сначала напомнить некоторые положения волновой механики с одной функцией Ψ.

Когда мы исследуем движение электрона, происходящее в большом масштабе, например отклонение электрона магнитным полем, то, чтобы было возможно описать это движение классическим способом, достаточно приписать электрону локализацию, которая была бы совместима с соотношениями неопределенности. Из соответствующих формул нетрудно видеть, что в обычных условиях опыта длина волны, связанной с электроном, значительно меньше, чем наименьшая длина, какую мы можем измерить непосредственно. Из этого следует, что можно построить небольшую группу волн, образованную путем наложения плоских монохроматических волн с очень близкими частотами, размеры которой в нашем масштабе ничтожны. Следовательно, точное наблюдение электрона может позволить нам, не нарушая соотношений неопределенности, приписать электрону и скорость, и положение, практически точно определенные *в нашем масштабе*. Фиктивная «жидкость вероятности», плотность которой по определению равна интенсивности $\Psi\Psi^*$, в этом случае образует некоторого рода каплю, т.е. небольшой пакет волн, внутри которого сила со стороны приложенного поля может считаться постоянной. Тогда, поскольку пакет довольно точно совмещается со своим центром тяжести, из теоремы Эренфеста вытекает, что этот пакет движется как материальная точка, подчиняясь законам классической механики. Поскольку частица может обнаружиться только внутри пакета и размеры пакета практически ничтожны, все происходит так, как будто бы сама частица подчиняется классическим законам. Так в макроскопической области совершается переход от прежней к новой механике.

Но здесь нужно заметить, что пакет вероятности не представляет внутреннюю структуру электрона, как это можно было бы думать на первый взгляд. Электрическая плотность $-e\rho$ внутри пакета не совпадает с действительной плотностью электрического заряда, которая существовала бы внутри электрона, предполагаемого протяженным. В современных теориях электрон предполагается точечным, а плотность $-e\rho$, как мы это уже объяснили, представляет собой среднюю плотность электрического заряда. Следовательно, пакет вероятности является лишь некоторого рода *средним образом* возможных локализаций электрона. Именно этот средний образ ближе всего к классическому представлению об электроне. Точно так же не должны ли мы, изучая пакет вероятности в теории Дирака, ожидать появления собственного магнетизма электрона в форме, аналогичной первоначальной идее Уленбека и Гаудсмита? Вскоре мы увидим, что это так и есть. Напомним теперь, как можно получить простую модель пакета вероятности в волновой механике с одной функцией Ψ (Дарвин). Мы предположим, что в первоначальный момент $t = 0$ волна Ψ имеет вид

$$\Psi(x,y,z,0) = a\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}m_0(v_x x+v_y y+v_z z)} \qquad (1)$$

и ее амплитуда, обладающая сферической симметрией относительно начала координат, есть функция Гаусса от радиус-вектора[1]. Амплитуда становится ничтожно малой, как только расстояние от начала становится небольшим кратным σ: можно сказать, что в первоначальный момент пакет имеет размеры порядка σ. Второй экспоненциальный множитель в (1) представляет собой фазовый множитель плоской волны в момент $t = 0$. Чтобы волна Ψ была эквивалентна группе волн, величина σ, которая определяет ее размеры, должна быть малой по сравнению с длиной волны $h/(m_0 v)$. Несмотря на ничтожную малость этой последней, тем не менее в нашем масштабе можно считать величину σ пренебрежимо малой.

Дарвин изучал распространение пакета формы (1). Он показал[2], что в течение достаточно короткого интервала времени пакет в целом перемещается со скоростью $\vec{v}$ таким образом, что в момент t мы имеем:

$$\Psi(x,y,z,t) = a\mathrm{e}^{-\frac{(x-v_x t)^2+(y-v_y t)^2+(z-v_z t)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}\left[Wt-m_0(v_x x+v_y y+v_z z)\right]}. \qquad (2)$$

Это находится в полном согласии с теоремой Эренфеста, но пакет всегда имеет тенденцию с течением времени расплываться все быстрее.

Не останавливаясь на этом последнем пункте, мы можем сказать, что сферический пакет Дарвина дает нам некоторого рода образ макроскопического движения электрона. Интересно вычислить плотность и плотность тока вероятности, которые ему соответствуют. Для этого мы должны воспользоваться формулами волновой механики с одной функцией Ψ:

$$\rho = \Psi\Psi^*, \quad \rho\vec{u} = -\frac{h}{4\pi i m_0}\left[\Psi \operatorname{grad}\Psi^* - \Psi^* \operatorname{grad}\Psi\right]. \qquad (3)$$

---

[1] Чтобы Ψ была нормированной, необходимо иметь $|a| = \pi^{-\frac{3}{4}}\sigma^{-\frac{3}{2}}$.

[2] Развернутые вычисления можно найти в книге автора: *L. de Broglie.* Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire. Paris: Hermann, 1930. Ch XIII.

Мы легко находим в первоначальный момент:

$$\rho = a\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}}, \quad \rho\vec{u} = \Psi\Psi^*\vec{v} = \rho\vec{v}, \tag{4}$$

откуда

$$\vec{u} = \vec{v}.$$

Следовательно, движение вероятности (или среднего распределения электрического заряда) представляет собой перенос со скоростью $\vec{v}$, и с этой точки зрения пакет Дарвина дает средний макроскопический образ классического электрона. Внося пакет Дарвина в теорию Дирака, мы увидим, как появится магнитный вращающийся электрон Уленбека и Гаудсмита.

2. Сферический пакет вероятности в теории Дирака

Теперь мы перейдем к волновой механике Дирака с четырьмя функциями Ψ. Мы видели, что мы можем произвольно задаться первоначальными амплитудами Ψ_1 и Ψ_2 и что тогда Ψ_3 и Ψ_4 получаются из волновых уравнений. Поэтому зададимся здесь первоначальными Ψ_1 и Ψ_2 в форме, подсказываемой (1):

$$\Psi_1(x,y,z,0) = A\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}m_0(v_x x+v_y y+v_z z)}, \tag{5}$$

$$\Psi_2(x,y,z,0) = B\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}m_0(v_x x+v_y y+v_z z)}. \tag{6}$$

Предположим, что справедливо ньютоновское приближение. В предыдущей главе мы видели, как это осуществить. Именно: мы можем заменить $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi_3}{\partial t}$ и $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi_4}{\partial t}$ на $-m_0c^2$, и два последних уравнения Дирака дают:

$$\begin{aligned}\Psi_3 &= \frac{1}{2m_0c}\frac{h}{2\pi i}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_2 + \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right],\\ \Psi_4 &= \frac{1}{2m_0c}\frac{h}{2\pi i}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_1 - \frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right].\end{aligned} \tag{7}$$

Мы положим

$$P = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}m_0(v_x x+v_y y+v_z z)}. \tag{8}$$

Подставляя в (7) значения производных Ψ_1 и Ψ_2, мы находим:

$$\begin{aligned}\Psi_3(x,y,z,0) &= \frac{1}{2m_0c}\left[A\left(m_0v_z - \frac{h}{2\pi i}\frac{z}{\sigma^2}\right) + B\left(m_0(v_x - iv_y) - \frac{h}{2\pi i}\frac{x-iy}{\sigma^2}\right)\right]P,\\ \Psi_4(x,y,z,0) &= \frac{1}{2m_0c}\left[A\left(m_0(v_x + iv_y) - \frac{h}{2\pi i}\frac{x+iy}{\sigma^2}\right) - B\left(m_0v_z - \frac{h}{2\pi i}\frac{z}{\sigma^2}\right)\right]P.\end{aligned} \tag{9}$$

Эти формулы дают Ψ_3 и Ψ_4 в момент $t = 0$ для малого значения v/c.

Функциями Ψ_3 и Ψ_4 можно почти пренебречь по сравнению с Ψ_1 и Ψ_2, как это можно было бы предвидеть.

Если мы составим выражение для плотности $\rho = \sum_{i=1}^{4} \Psi_i^* \Psi_i$, то двумя последними членами суммы можно пренебречь по сравнению с двумя первыми и достаточно будет написать:

$$\rho = \left(AA^* + BB^*\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}}. \tag{10}$$

Вполне естественно мы должны иметь (в силу нормировки):

$$\left(AA^* + BB^*\right) \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}} dxdydz = 1. \tag{11}$$

Умножая (10) на $-e$, мы получаем среднюю плотность электрического заряда δ.

Теперь нужно вычислить составляющие $\rho\vec{u}$. Здесь нельзя пренебречь ни одним членом, ибо в этих выражениях все четыре слагаемых представляют собой произведения малой волновой функции на большую. Например, мы имеем:

$$\rho u_x = c\left(\Psi_1^* \Psi_4 + \Psi_2^* \Psi_3 + \Psi_3^* \Psi_2 + \Psi_4^* \Psi_1\right), \tag{12}$$

что в силу (7) и (9) дает:

$$\begin{aligned}
\rho u_x = &\left[AA^*\left(v_x - \frac{h}{2m_0\pi}\frac{y}{\sigma^2}\right) + BB^*\left(v_x + \frac{h}{2m_0\pi}\frac{y}{\sigma^2}\right) - \right.\\
&\left. - \frac{h}{2\pi i m_0}\frac{z}{\sigma^2}\left(AB^* - BA^*\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}} = \rho v_x + \frac{h}{2\pi m_0}\left[\left(BB^* - AA^*\right)\frac{y}{\sigma^2} + \right.\\
&\left. + \frac{z}{\sigma^2}\left(iAB^* - iBA^*\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}},
\end{aligned}$$

$$\rho u_x = \rho v_x + \frac{h}{4\pi m_0}\left[\left(AA^* - BB^*\right)\frac{\partial}{\partial y} - \left(iAB^* - iBA^*\right)\frac{\partial}{\partial z}\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}}. \tag{13}$$

Точно так же мы находим:

$$\left.\begin{aligned}
\rho u_y &= c\left(-i\Psi_1^*\Psi_4 + i\Psi_2^*\Psi_3 - i\Psi_3^*\Psi_2 + i\Psi_4^*\Psi_1\right) = \\
&= \rho v_y + \frac{h}{4\pi m_0}\left[\left(AB^* + BA^*\right)\frac{\partial}{\partial z} - \left(AA^* - BB^*\right)\frac{\partial}{\partial x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}},\\
\rho u_z &= c\left(\Psi_1^*\Psi_3 - \Psi_2^*\Psi_4 + \Psi_3^*\Psi_1 - \Psi_4^*\Psi_2\right) = \\
&= \rho v_z - \frac{h}{4\pi m_0}\left[\left(iA^*B - iAB^*\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(AB^* + A^*B\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{13$'$}$$

Чтобы получить составляющие плотности среднего электрического тока, достаточно умножить ρu_x, ρu_y, ρu_z на $-e$, или, более точно, чтобы получить выражение в электромагнитных единицах, на $-e/c$. Тогда мы находим:

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{e}{c}\rho v_x - \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left[\left(AA^* - BB^*\right)\frac{\partial}{\partial y} - \left(iAB^* - iA^*B\right)\frac{\partial}{\partial z}\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}}, \\ j_y &= -\frac{e}{c}\rho v_y - \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left[\left(A^*B + AB^*\right)\frac{\partial}{\partial z} + \left(BB^* - A^*A\right)\frac{\partial}{\partial x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}}, \quad (14) \\ j_z &= -\frac{e}{c}\rho v_z - \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left[\left(iAB^* - iA^*B\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(A^*B + AB^*\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Теперь нужно объяснить эти формулы.

3. Доказательство одной из формул электродинамики

Чтобы объяснить формулы (14), нам нужна будет одна из формул электродинамики, доказательство которой мы и дадим в настоящем параграфе.

Известно, что магнитное действие постоянного тока плотности $\vec{j}$ определяется вектор-потенциалом:

$$\vec{A} = \iiint \frac{\vec{j}\,d\tau}{r}, \quad (d\tau \text{ – элемент объема}), \tag{15}$$

причем напряженность магнитного поля выводится из $\vec{A}$ по формуле

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{16}$$

Если электрический ток создается пучком движущихся электронов и если δ обозначает среднюю плотность заряда в этом пучке электронов, то нужно положить $\vec{j} = \delta\vec{v}$, причем $\vec{v}$ есть средняя скорость электронов в пучке. Но если электроны обладают собственными магнитными моментами, то выражение $\vec{j}$ необходимо дополнить, принимая во внимание намагниченность $\vec{I}$, распределенную в пучке. Мы хотим выяснить, каким образом $\vec{j}$ зависит от $\vec{I}$.

Пусть мы имеем маленький магнит, образованный двумя магнитными массами $+\mu$ и $-\mu$, находящимися на расстоянии l одна от другой (рис. 6). Если α, β, γ суть направляющие косинусы оси маленького магнита, то магнитный момент $\vec{m}$ магнита имеет составляющие:

$$m_x = \alpha\mu l = \alpha m, \quad m_y = \beta m, \quad m_z = \gamma m. \tag{17}$$

Магнитный потенциал χ, создаваемый магнитом в точке M, находящейся на расстоянии r от его центра, записывается в виде[3]:

[3] В формулах (18) и (20) производные берутся по координатам источника. – *Прим. пер.*

$$\chi = \frac{\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} = \mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\alpha l + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\beta l + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\gamma l\right) = \left(\vec{m}\cdot \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right), \tag{18}$$

и напряженность поля в точке M имеет компоненты:

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{\partial\chi}{\partial x} = m_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + m_y\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y} + m_z\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z},\\ H_y &= -\frac{\partial\chi}{\partial y} = m_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial x} + m_y\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2} + m_z\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z},\\ H_z &= -\frac{\partial\chi}{\partial z} = m_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\partial x} + m_y\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\partial y} + m_z\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

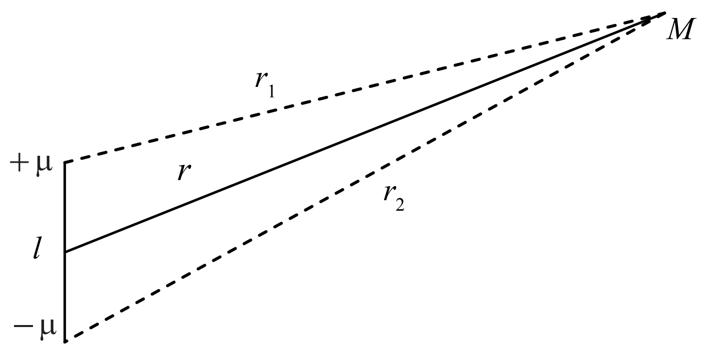

Рис. 6

Мы покажем, что вектор-потенциал $\vec{A}$, ротором которого должно являться поле $\vec{H}$, определяемое (19), выражается формулой

$$\vec{A} = \left[\vec{m}\times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right], \tag{20}$$

причем квадратные скобки обозначают векторное произведение. Действительно, для H_x мы имеем:

$$\begin{aligned} H_x = (\operatorname{rot}A)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(m_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - m_y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) + \\ +\frac{\partial}{\partial z}\left(m_z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - m_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) = m_y\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial x} + m_z\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\partial x} - m_x\left[\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right], \end{aligned} \tag{21}$$

откуда, в силу хорошо известного соотношения $\Delta\frac{1}{r} = 0$, мы выводим для H_x первое выражение (19). Точно таким же образом мы найдем выражения (19) для H_y и H_z. Следовательно, вектор-потенциал (20) соответствует магнитному полю (19).

Предположим теперь, что мы имеем дело не с одним маленьким магнитом с моментом $\vec{m}$, а с протяженным намагниченным телом, намагниченность $\vec{I}$ которого мы знаем в любой точке. Мы должны заменить в последних формулах $\vec{m}$ на $\vec{I}d\tau$ и проинтегрировать, что дает

$$\vec{A} = \iiint \left[\vec{I} \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right] d\tau. \tag{22}$$

Предположим, что вектор $\vec{I}$ на границах намагниченного тела равен нулю. Тогда интегрирование по частям позволяет нам написать

$$A_x = \iiint \left(I_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - I_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) d\tau = \iiint_V \frac{1}{r}\left(\frac{\partial I_z}{\partial y} - \frac{\partial I_y}{\partial z} \right) d\tau = \iiint_V \frac{\left(\operatorname{rot}\vec{I}\right)_x}{r} d\tau \tag{23}$$

(где V – объем намагниченного тела) и мы имеем аналогичные формулы для A_y и A_z. Тогда мы получаем векторное соотношение:

$$\vec{A} = \iiint_V \frac{\operatorname{rot}\vec{I}}{r} d\tau. \tag{24}$$

Если, наконец, мы имеем дело с телом, одновременно наэлектризованным и намагниченным, движущимся равномерно со скоростью $\vec{v}$, то векторпотенциал, созданный этим телом, в силу (15) и (24) будет иметь вид

$$\vec{A} = \iiint_V \frac{\delta\vec{v} + \operatorname{rot}\vec{I}}{r} d\tau. \tag{25}$$

Следовательно, он равен вектор-потенциалу, который был бы создан током с плотностью

$$\vec{j} = \delta\vec{v} + \operatorname{rot}\vec{I}\,. \tag{26}$$

Формула (26) послужит нам для объяснения формул (14).

4. Интерпретация формул (14)

Вернемся к формулам (14) и определим вектор $\vec{I}$, задаваясь следующими значениями для его составляющих:

$$\begin{aligned}
I_x &= -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(A^*B + AB^*\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}},\\
I_y &= -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(iAB^* - iA^*B\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}},\\
I_z &= \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(BB^* - AA^*\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Вектор $\vec{I}$ – действительный (ибо $I_x = I_x^*$ и т. д.) и равный нулю на границах пакета вероятности, т. е. в данном случае на бесконечности. При помощи этого вектора $\vec{I}$ мы можем написать формулы (14) в векторной форме:

$$\vec{j} = -\frac{e}{c}\rho\vec{v} + \operatorname{rot}\vec{I}. \tag{28}$$

Эта формула (28) представляет громадный интерес, так как, сравнивая ее с формулой (26), мы видим, что пакет вероятности, среднее макроскопическое представление электрона, может отождествляться не с простым шаром заряда $-e$, находящимся в движении со скоростью $\vec{v}$, а с шаром, одновременно наэлектризованным и намагниченным, с намагниченностью, равной $\vec{I}$ в каждой из его точек.

Полный магнитный момент пакета есть вектор $\vec{\mathfrak{M}}$, который мы получаем, интегрируя вектор $\vec{I}$. Принимая во внимание (27) и условие нормировки (11), мы находим для составляющих $\vec{\mathfrak{M}}$ ([4]):

$$\begin{gathered}
\mathfrak{M}_x = \iiint I_x d\tau = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(A^*B + AB^*\right)\iiint \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}} d\tau = \\
= -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\frac{A^*B + AB^*}{AA^* + BB^*}, \\
\mathfrak{M}_y = \iiint I_y d\tau = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\frac{i\left(AB^* - A^*B\right)}{AA^* + BB^*}, \\
\mathfrak{M}_z = \iiint I_z d\tau = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\frac{BB^* - AA^*}{AA^* + BB^*}.
\end{gathered} \tag{29}$$

Таким образом, длина вектора $\vec{\mathfrak{M}}$ равна

$$\begin{gathered}
\left|\mathfrak{M}\right| = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2} = \\
= \frac{eh}{4\pi m_0 c}\sqrt{\frac{\left(A^*B + AB^*\right)^2 - \left(A^*B - AB^*\right)^2 + \left(BB^* - AA^*\right)^2}{\left(AA^* + BB^*\right)^2}} = \frac{eh}{4\pi m_0 c}.
\end{gathered} \tag{30}$$

Таким образом, пакет имеет магнитный момент, равный магнетону Бора.

Возьмем теперь формулу (13) и попробуем ее написать в виде $\rho u_x = \rho v_x + \rho v_x'$. Нам приходится положить:

$$\begin{gathered}
v_x' = -\frac{h}{2\pi m_0 \rho}\left[\left(BB^* - AA^*\right)\frac{y}{\sigma^2} - \left(iAB^* - iA^*B\right)\frac{z}{\sigma^2}\right]\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma^2}} = \\
= -\frac{h}{2\pi m_0 \sigma^2}\left[\frac{BB^* - AA^*}{AA^* + BB^*}y - \frac{iAB^* - iA^*B}{AA^* + BB^*}z\right],
\end{gathered} \tag{31}$$

принимая во внимание (10).

[4] В действительности $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ суть только средние значения, как мы точно покажем в следующей главе. Следовательно, вместо $\mathfrak{M}_x$ мы должны были бы писать $\overline{\mathfrak{M}}_x$ и т. д.

Точно так же мы положим:

$$
\begin{aligned}
v_y{}' &= \frac{h}{2\pi m_0 \sigma^2}\left[\frac{-\left(AB^* + A^*B\right)^*}{AA^* + BB^*}z - \frac{BB^* - AA^*}{AA^* + BB^*}x\right],\\
v_z{}' &= -\frac{h}{2\pi m_0 \sigma^2}\left[\frac{iAB^* - iA^*B}{AA^* + BB^*}x + \frac{AB^* + A^*B}{AA^* + BB^*}y\right].
\end{aligned} \tag{31$'$}
$$

Если ввести обозначения:

$$
\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{h}{2\pi m_0 \sigma^2}\frac{AB^* + A^*B}{AA^* + BB^*},\\
\omega_y &= \frac{h}{2\pi m_0 \sigma^2}\frac{iAB^* - iA^*B}{AA^* + BB^*},\\
\omega_z &= -\frac{h}{2\pi m_0 \sigma^2}\frac{BB^* - AA^*}{AA^* + BB^*},
\end{aligned} \tag{32}
$$

то формулы (31) и (31$'$) принимают вид

$$
v_x{}' = \omega_y z - \omega_z y; \quad v_y{}' = \omega_z x - \omega_x z; \quad v_z{}' = \omega_x y - \omega_y x. \tag{33}
$$

Так как по самому способу, каким мы ввели $\vec{v}\,'$, получается $\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}\,'$, мы видим, что скорость потока вероятности есть сумма скорости $\vec{v}$ перемещения пакета в целом и *внутренней* скорости $\vec{v}\,'$, обязанной его глобальному вращению с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}$ с составляющими ω_x, ω_y, ω_z. Эта угловая скорость представляется вектором $\vec{\omega}$, проходящим через центр пакета, параллельным $\vec{\mathfrak{M}}$ (ибо мы имеем $\omega_x : \omega_y : \omega_z = \mathfrak{M}_x : \mathfrak{M}_y : \mathfrak{M}_z$) и имеющим длину

$$
|\omega| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{h}{2\pi m_0 \sigma^2}. \tag{34}
$$

Это внутреннее вращение капли средней[5] заряженной жидкости объясняет происхождение магнитного момента $\mathfrak{M}$: вращение тем быстрее, чем меньше капля. Это легко объясняется, поскольку магнитный момент $\vec{\mathfrak{M}}$ должен всегда быть равным магнетону Бора. Таким образом, пакет вероятности в теории Дирака дает своего рода средний макроскопический образ магнитного вращающегося электрона.

[5] То есть вероятностной. – *Прим. пер.*

ГЛАВА XIV. Тензор «плотности электрического и магнитного моментов»

1. Магнитный момент электрона Дирака в ньютоновском приближении

В предыдущей главе, изучая сферический пакет вероятности, построенный при помощи волновых функций (6) и (9), мы пришли к вектору $\vec{I}$, определяемому формулами (27), вектору, который представляет собой намагниченность пакета, т. е. плотность магнитного момента. Если мы примем во внимание формулы (6), мы можем написать формулы (27), выражающие составляющие $\vec{I}$, в виде

$$
\begin{aligned}
I_x &= \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(-\Psi_1^*\Psi_2 - \Psi_1\Psi_2^*\right),\\
I_y &= \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(i\Psi_2\Psi_1^* - i\Psi_1\Psi_2^*\right),\\
I_z &= \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(\Psi_2^*\Psi_2 - \Psi_1\Psi_1^*\right).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В этой новой форме выражения для составляющих вектора $\vec{I}$ справедливы для каждой волновой функции Дирака в ньютоновском приближении (т. е. когда Ψ_3 и Ψ_4 ничтожно малы по сравнению с Ψ_1 и Ψ_2), а не только для сферического пакета вероятности, рассмотренного в предыдущей главе.

Тогда составляющие среднего магнитного момента электрона Дирака получаются после интегрирования выражений (1) по всему пространству. Следовательно, мы имеем

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{M}}_x &= \iiint I_x d\tau = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\iiint\left(-\Psi_1^*\Psi_2 - \Psi_2^*\Psi_1\right)d\tau,\\
\overline{\mathfrak{M}}_y &= \iiint I_y d\tau = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\iiint\left(-i\Psi_2^*\Psi_1 + i\Psi_2\Psi_1^*\right)d\tau,\\
\overline{\mathfrak{M}}_z &= \iiint I_z d\tau = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\iiint\left(\Psi_2^*\Psi_2 - \Psi_1^*\Psi_1\right)d\tau.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Не нужно забывать, что все эти формулы имеют только статистическое значение. Если мы рассматриваем очень большое число электронов, находящихся в одном и том же состоянии, определяемом теми же самыми функциями Ψ_1 и Ψ_2, и если мы для каждого из этих электронов измеряем, например, составляющую вдоль оси x собственного магнитного момента, мы получим различные результаты в разных случаях, но среднее значение полученных результатов в совокупности будет $\overline{\mathfrak{M}}_x$ формулы (2). В этом и состоит применение общих идей новой механики; в частности, вспомним, что в силу замечания в параграфе 3 главы VI выражения (1) являются не настоящими физическими плотностями в прежнем смысле, а величинами, которые необходимо интегрировать, чтобы получить средние значения (2).

Мы должны несколько остановиться на третьей формуле (2). Мы знаем, что если измерять проекцию собственного магнитного момента электрона на ось z, мы должны обязательно найти магнетон Бора со знаками «±». Уравнения Дирака особенную роль предоставляют оси z именно потому, что вероятности этих двух результатов должны выразиться просто при помощи Ψ_i. Тогда, если мы посмотрим на формулы (2), мы увидим, что вероятность найти для $\mathfrak{M}_z$ значение $+\dfrac{eh}{4\pi m_0 c}$ есть $\iiint \Psi_2^* \Psi_2 \, d\tau$, в то время как вероятность найти $-\dfrac{eh}{4\pi m_0 c}$ есть $\iiint \Psi_1^* \Psi_1 \, d\tau$. Это находится в прекрасном согласии с идеями Паули, к которым сводится теория Дирака, как только мы принимаем, как в данном случае, справедливость ньютоновского приближения. Среднее значение (2) $\mathfrak{M}_z$ как раз и представляет средний результат измерения $\mathfrak{M}_z$ для большого числа электронов в состоянии, определяемом волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2.

Выражения составляющих $\vec{I}$, т. е. выражения (1), инвариантны по отношению ко всякому преобразованию пространственных координат. Это значит, что если мы переходим от одной системы прямоугольных координат xyz к другой системе прямоугольных координат $x'y'z'$, то составляющие $\vec{I}$ в новой системе выражаются при помощи новых волновых функций Ψ_i' точно так же, как прежние составляющие $\vec{I}$ выражались согласно (1) при помощи Ψ_i. Мы не приводим здесь доказательство ввиду его простоты.

Но эта инвариантность не имеет больше места для преобразования Лоренца. Здесь проявляются свойства ньютоновского приближения в выражениях (1). Для того, чтобы получить релятивистскую инвариантность, нужно принять во внимание функции Ψ_3 и Ψ_4 и рассматривать три составляющие намагниченности $\vec{I}$ как часть совокупности шести составляющих антисимметричного тензора второго порядка, как это мы увидим дальше.

2. Средний магнитный момент в плоской волне в ньютоновском приближении

Рассмотрим плоскую волну, определенную в ньютоновском приближении при помощи двух волновых функций:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A e^{-\frac{2\pi i}{h}[Wt - m_0 v_x x - m_0 v_y y - m_0 v_z z]}, \\ \Psi_2 &= B e^{-\frac{2\pi i}{h}[Wt - m_0 v_x x - m_0 v_y y - m_0 v_z z]}. \end{aligned} \tag{3}$$

Каковы же составляющие среднего магнитного момента? Их легко найти при помощи формул (2), принимая во внимание условие нормировки[1]:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{M}}_x &= \frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot\frac{-A^*B-AB^*}{AA^*+BB^*},\\ \overline{\mathfrak{M}}_y &= \frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot\frac{iAB^*-iA^*B}{AA^*+BB^*},\\ \overline{\mathfrak{M}}_z &= \frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot\frac{BB^*-AA^*}{AA^*+BB^*}.\end{aligned} \tag{4}$$

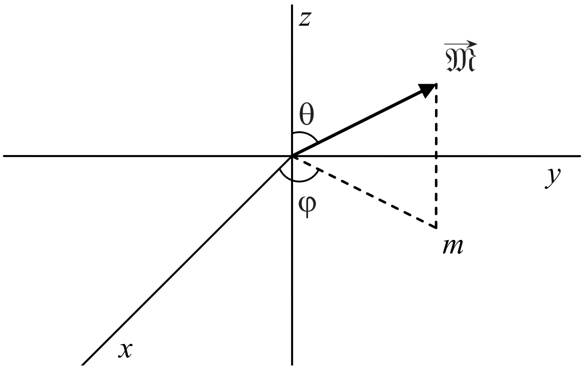

Рис. 7

Формулы (4) совпадают с формулами (29) предыдущей главы. Мы могли бы этого ожидать, ибо упомянутые формулы (29) справедливы, каково бы ни было значение σ в формулах (6), и если устремить σ к бесконечности, то сферический пакет предыдущей главы будет стремиться к плоской волне (3).

Зададим направление вектора $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ в системе сферических координат θ и φ.

Тогда мы имеем (см. рис. 7):

$$\begin{aligned}&\overline{\mathfrak{M}}_x:\overline{\mathfrak{M}}_y:\overline{\mathfrak{M}}_z = \left(-A^*B-AB^*\right):\left(iAB^*-iA^*B\right):\left(BB^*-AA^*\right) =\\ &= \sin\theta\cos\varphi:\sin\theta\sin\varphi:\cos\theta,\end{aligned} \tag{5}$$

откуда легко вывести:

[1] При написании условия нормировки может возникнуть затруднение, так как область интегрирования бесконечна и, строго говоря, здесь следовало бы ввести собственные дифференциалы. Но практически можно избегнуть этой трудности, полагая с самого начала область конечной, с объемом V. Тогда условие нормировки здесь примет вид

$$\iiint\left(\left|\Psi_1\right|^2+\left|\Psi_2\right|^2\right)\tau = \left(AA^*+BB^*\right)V = 1,$$

и из (2) мы выводим, например:

$$\overline{\mathfrak{M}}_x = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot\left(-A^*B-B^*A\right)V = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot\frac{-A^*B-B^*A}{AA^*+BB^*}.$$

Так как этот результат справедлив, как бы ни был велик объем V, формулы (4) оказываются доказанными.

$$\left(-\frac{B}{A}-\frac{B^*}{A^*}\right):i\left(-\frac{B}{A}+\frac{B^*}{A^*}\right):\left(\frac{B}{A}\cdot\frac{B^*}{A^*}-1\right)= \\ =2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi:2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi:\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}-1\right). \tag{6}$$

Мы удовлетворим уравнениям (6), полагая

$$-\frac{B}{A}=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}, \tag{7}$$

и комплексное соотношение (7), эквивалентное двум действительным соотношениям, показывает, как ориентация $\vec{\mathfrak{M}}$ связана со значением отношения B/A.

Эту связь можно выразить следующим образом (Дарвин, Иордан). Рассмотрим шар с единичным радиусом; ориентация вектора $\vec{\mathfrak{M}}$ определяется координатами θ и φ точки M, в которой этот вектор пересекает шар. Спроектируем эту точку M стереографически на плоскость экватора так, чтобы центр проекции находился на северном полюсе (рис. 8).

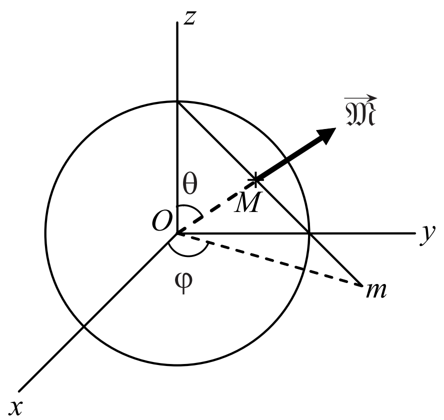

Рис. 8

Точка проекции m имеет координаты

$$x=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \quad y=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi. \tag{8}$$

Если рассматривать плоскость xy как плоскость одной комплексной переменной, то аффикс точки m есть $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}$ и согласно (7) он равен $-B/A$. Отсюда получаем следующий результат: отношение $-B/A$ связано с направлением магнитного момента тем же самым соотношением, которое связывает аффикс точки в плоскости комплексной переменной с направлением, соответствующим ему в шаре при стереографическом проектировании.

3. Тензор «плотности магнитного и электрического моментов»

Мы уже видели, что выражения (1) обладают инвариантностью по отношению к преобразованиям пространственных координат, но вовсе не обладают ею для преобразований Лоренца. Тем не менее можно отыскать шесть квадратичных комбинаций четырех функций Ψ_i, которые преобразуются при изменении галилеевых координат, как составляющие антисимметричного тензора второго порядка. Вот их выражения, которые все являются действительными:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{yz} = I_x = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(\Psi_1^*\Psi_2 + \Psi_2^*\Psi_1 - \Psi_3^*\Psi_4 - \Psi_4^*\Psi_3\right) = \\
&= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_2\alpha_3\alpha_4\Psi_k, \\
&\mu_{zx} = I_y = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(i\Psi_1^*\Psi_2 - i\Psi_2^*\Psi_1 - i\Psi_3^*\Psi_4 + i\Psi_4^*\Psi_3\right) = \\
&= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_3\alpha_1\alpha_4\Psi_k, \\
&\mu_{xy} = I_z = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(\Psi_1^*\Psi_1 - \Psi_2^*\Psi_2 - \Psi_3^*\Psi_3 + \Psi_4^*\Psi_4\right) = \\
&= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_4\Psi_k, \\
&\mu_{xt} = J_x = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(i\Psi_1^*\Psi_4 + i\Psi_2^*\Psi_3 - i\Psi_3^*\Psi_2 - \Psi_4^*\Psi_1\right) = \\
&= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_1\alpha_4\Psi_k, \\
&\mu_{yt} = J_y = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(-\Psi_1^*\Psi_4 + \Psi_2^*\Psi_3 + \Psi_3^*\Psi_2 - \Psi_4^*\Psi_1\right) = \\
&= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_2\alpha_4\Psi_k, \\
&\mu_{zt} = J_z = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(i\Psi_1^*\Psi_3 - i\Psi_2^*\Psi_4 - \Psi_3^*\Psi_1 + i\Psi_4^*\Psi_2\right) = \\
&= \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_3\alpha_1\Psi_k.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

При помощи шести величин (9) с учетом соотношения антисимметрии $\mu_{zy} = -\mu_{yz}$ (и т. д.) можно составить антисимметричную таблицу, содержащую 4 строки и 4 столбца:

$$
\begin{bmatrix}
0 & \mu_{xy} & \mu_{xz} & \mu_{xt} \\
\mu_{yx} & 0 & \mu_{yz} & \mu_{yt} \\
\mu_{zx} & \mu_{zy} & 0 & \mu_{zt} \\
\mu_{tx} & \mu_{ty} & \mu_{tz} & 0
\end{bmatrix}.
\tag{10}
$$

Нетрудно проверить, что таблица (10) определяет антисимметричный тензор второго ранга. Для этого достаточно проверить, для каждого ли из трех простых преобразований, на которые можно разложить общее преобразование Лоренца, μ_{ij} преобразуются согласно схеме:

$$\mu'_{ij} = \sum_{kl} \mu_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} . \tag{11}$$

Мы опускаем эту длинную неинтересную проверку.

Если мы можем пренебречь волновыми функциями Ψ_3 и Ψ_4, что имеет место, когда справедливо ньютоновское приближение, величины μ_{yz}, μ_{zx} и μ_{xy} соответственно сводятся к I_x, I_y и I_z формулы (1). Таким образом, вполне естественно думать, что эти три составляющие тензора μ суть три составляющие средней намагниченности $\vec{I}$ в точной релятивистской форме.

Но что представляют собой три составляющие μ_{xt}, μ_{yt} и μ_{zt}? В теории относительности, чтобы определить антисимметричный тензор второго ранга, нужно объединить магнитное и электрическое поля. В своей статье о магнитном электроне, предшествующей теории Дирака, Френкель показал необходимость дополнения магнитного момента электрона его дипольным электрическим моментом[2]. Вот как рассуждал Френкель. В прежней теории магнитного электрона он рассматривается как частица, обладающая собственным магнитным моментом; в системе отсчета, в которой электрон движется, вокруг него должно создаваться электрическое поле, обусловленное влиянием его магнитного момента, ибо точно так же, как движущийся электрический заряд эквивалентен току и создает вокруг себя магнитное поле, движущийся магнитный полюс создает вокруг себя электрическое поле. Следовательно, движущийся магнитный электрон должен обладать электрическим моментом, и, чтобы удовлетворить требованиям принципа относительности, три составляющие электрического момента должны быть объединены с тремя составляющими магнитного момента, чтобы образовать антисимметричный тензор второго ранга. Таким образом, мы приходим к рассмотрению μ_{xt}, μ_{yt}, μ_{zt} как трех составляющих плотности дипольного электрического момента.

Из шести величин (9) можно образовать два инварианта, т. е. существует две комбинации из μ_{ij}, значения которых одинаковы во всякой системе отсчета. Эти две комбинации следующие:

$$\begin{aligned} I^2 - J^2 &= I_x^2 + I_y^2 + I_z^2 - J_x^2 - J_y^2 - J_z^2; \\ \left(\vec{I} \cdot \vec{J}\right) &= I_x J_x + I_y J_y + I_z J_z. \end{aligned} \tag{12}$$

Действительно, введем уже встречавшиеся в параграфе 3 главы XII два инварианта:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_2^*\Psi_2 - \Psi_3^*\Psi_3 - \Psi_4^*\Psi_4 = \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_4 \Psi_k, \\ \Omega_2 &= -i\Psi_1^*\Psi_3 - i\Psi_2^*\Psi_4 + i\Psi_3^*\Psi_1 + i\Psi_4^*\Psi_2 = \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \Psi_k. \end{aligned} \tag{13}$$

[2] Zts. f. Phys. **37**, 4–5. P. 243.

Нетрудно проверить соотношения:

$$I^2 - J^2 = \left(\frac{eh}{4\pi m_0 c}\right)^2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2); \quad (\vec{I}\cdot\vec{J}) = \left(\frac{eh}{4\pi m_0 c}\right)^2 \Omega_1\Omega_2, \tag{14}$$

которые показывают инвариантность обеих величин. Впрочем, с тензорной точки зрения эта инвариантность очевидна, ибо, с одной стороны, $I^2 - J^2$ является «длиной» пространственно-временного тензора, а с другой стороны, скалярное произведение

$$(\vec{I}\cdot\vec{J}) = \mu_{yz}\mu_{zt} + \mu_{zx}\mu_{yt} + \mu_{xy}\mu_{zt},$$

которое, очевидно, является инвариантом по отношению к преобразованиям пространственных координат, при простом преобразовании Лоренца тоже не изменяется, как это легко проверить. Отсюда следует его инвариантность относительно общего преобразования Лоренца.

Как и раньше, мы можем заметить, что выражения (9) не являются физическими плотностями в прежнем смысле слова: это только величины, которые нужно проинтегрировать по пространству, чтобы получить средние значения составляющих магнитного и электрического моментов электрона. Эти два *средних* момента, которые мы будем обозначать $\vec{\mathfrak{M}}$ и $\vec{\mathfrak{P}}$, даются формулами

$$\vec{\mathfrak{M}} = \iiint \vec{I}\,d\tau; \quad \vec{\mathfrak{P}} = \iiint \vec{J}\,d\tau, \tag{15}$$

причем векторы $\vec{I}$ и $\vec{J}$ определяются их составляющими (9). Вполне естественно, что значения составляющих $\overline{\mathfrak{M}}_x$ (и т. д.) следует интерпретировать статистически. Итак, формула:

$$\overline{\mathfrak{M}}_z = \iiint I_z\,d\tau = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\iiint (\Psi_1^*\Psi_1 - \Psi_2^*\Psi_2 - \Psi_3^*\Psi_3 + \Psi_4^*\Psi_4)\,d\tau \tag{16}$$

означает, что измерение $\mathfrak{M}_z$ может дать значение $+\frac{eh}{4\pi m_0 c}$ с вероятностью $\iiint (\Psi_2^*\Psi_2 + \Psi_3^*\Psi_3)$ и $-\frac{eh}{4\pi m_0 c}$ с вероятностью $\iiint (\Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_4^*\Psi_4)$.

В силу условия нормировки Ψ_k сумма обеих вероятностей равна единице.

Рассматривая чисто корпускулярный образ электрона в рамках прежней (классической) теории, Френкель[3] показал, что магнитный момент $\vec{\mathfrak{M}}$ электрона в системе отсчета, где его скорость есть $\vec{v}$, должен быть связан с его дипольным электрическим моментом $\vec{\mathfrak{P}}$ в той же системе соотношением

$$\vec{\mathfrak{P}} = \left[\vec{\mathfrak{M}} \times \frac{\vec{v}}{c}\right]. \tag{17}$$

Мы убедимся на примере, что соотношение Френкеля остается точным и в теории Дирака.

[3] Ibid.

4. Простой пример: плоская монохроматическая волна

Воспользуемся формулами параграфа 3 главы XII, взяв для простоты направление распространения плоской волны за ось z. Тогда $p_x = p_y = 0$ и четыре функции Ψ_i имеют вид

$$\begin{aligned}&\Psi_1 = A\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)}; \quad \Psi_2 = B\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)};\\ &\Psi_3 = \frac{p_z A}{W/c + m_0 c}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)}; \quad \Psi_4 = -\frac{p_z B}{W/c + m_0 c}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)}.\end{aligned} \tag{18}$$

При такой форме Ψ_i из формулы (9) легко получаем:

$$\begin{aligned}&I_x = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(A^* B + AB^*\right)\left(1 + \frac{p_z^2}{\left(W/c + m_0 c\right)^2}\right);\\ &J_x = -\frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot\frac{2ip}{W/c + m_0 c}\left(AB^* - A^* B\right);\\ &I_y = -i\frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(AB^* - BA^*\right)\left(1 + \frac{p_z^2}{\left(W/c + m_0 c\right)^2}\right);\\ &J_y = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot\frac{2p_z}{W/c + m_0 c}\left(A^* B + AB^*\right);\\ &I_z = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(BB^* - AA^*\right)\left(1 - \frac{p_z^2}{\left(W/c + m_0 c\right)^2}\right);\\ &J_z = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Без всякого труда мы убеждаемся, что

$$\left(\vec{I}\cdot\vec{J}\right) = 0. \tag{20}$$

К тому же это является следствием второй формулы (14), ибо инвариант Ω_2 в данном конкретном случае[4] есть нуль.

Исследование формул (19) дает соотношения:

$$\begin{aligned}&J_x = I_y\frac{2p_z\left(W/c + m_0 c\right)}{\left(W/c + m_0 c\right)^2 + p_z^2} = I_y\frac{v_z}{c};\\ &J_y = -I_x\frac{2p_z\left(W/c + m_0 c\right)}{\left(W/c + m_0 c\right)^2 + p_z^2} = -I_x\frac{v_z}{c};\\ &J_z = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

[4] Действительно, этот инвариант можно, очевидно, вычислить в какой угодно галилеевой системе, например в системе, где скорость электрона равна нулю; в такой системе $\Psi_3 = \Psi_4 = 0$, и (13) дает $\Omega_2 = 0$.

Интегрируя соотношения (21) по всему пространству для получения составляющих $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ и $\overrightarrow{\mathfrak{B}}$, мы видим, что соотношение (17) Френкеля выполнено (ибо $v_x = v_y = 0$).

Когда справедливо ньютоновское приближение, отношение $\dfrac{p_z}{W/c + m_0 c}$ почти точно равно $\dfrac{m_0 v_z}{2m_0 c} = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_z}{c}$ и его квадрат ничтожно мал по сравнению с единицей. Тогда для I_x, I_y и I_z мы находим значения, которые получаем, исходя из формул (27) предыдущей главы, если в них σ устремить к бесконечности. Этот результат можно было ожидать.

На основании общих формул (19) и (20) можно сделать следующие замечания: вектор $\vec{J}$ нормален к плоскости, определяемой векторами $\vec{I}$ и $\vec{p}$; если скорость стремится к скорости света, т. е. если p_z стремится к отношению W/c (которое в таком случае во много раз больше $m_0 c$), то тройка векторов $\vec{p}$, $\vec{I}$ и $\vec{J}$ становится ортогональной, в то время как длины $\vec{I}$ и $\vec{J}$ стремятся стать равными.

ГЛАВА XV. Матрицы и первые интегралы в теории Дирака. Собственный угловой момент электрона

1. Собственные значения и функции уравнений Дирака

Собственные значения и функции уравнений Дирака легко определяются по аналогии с теорией с одной функцией Ψ.

Когда внешнее поле независимо от времени, существуют монохроматические решения уравнений Дирака, т. е. решения, где четыре Ψ_k зависят от времени только благодаря одному и тому же экспоненциальному множителю $e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}$. Тогда четыре Ψ_k удовлетворяют уравнениям

$$\left[-\left(\frac{W}{c}+\frac{eV}{c}\right)+\alpha_1 P_1+\alpha_2 P_2+\alpha_3 P_3+\alpha_4 m_0 c\right]\Psi_k = 0; \quad (k=1, 2, 3, 4). \quad (1)$$

Значения постоянной W, для которых существует по меньшей мере одна совокупность функций Ψ_k, конечных, однозначных, равномерно непрерывных и равных нулю на бесконечности, суть «собственные значения» уравнения (1). Следовательно, одному собственному значению W_n соответствует по крайней мере одна совокупность[1] собственных функций $\Psi_{1,n}$, $\Psi_{2,n}$, $\Psi_{3,n}$ и $\Psi_{4,n}$. Мы приписываем по два индекса каждой из Ψ_k, причем первый индекс задается самой теорией Дирака, а второй характеризует соответствующее собственное значение.

Следовательно, четыре функции $\Psi_{k,n}$, соответствующие собственному значению W_n, по определению удовлетворяют уравнениям

$$\left[-\left(\frac{W_n}{c}+\frac{eV}{c}\right)+\sum_{i=1}^{3}\alpha_i P_i+\alpha_4 m_0 c\right]\Psi_{k,n} = 0; \quad (k=1, 2, 3, 4). \quad (2)$$

Ввиду того что четыре функции $\Psi_{k,n}$ можно умножить на одну и ту же произвольную постоянную и они при этом не перестанут удовлетворять уравнениям (2), мы видим, что каждое собственное решение определено только с точностью до постоянного комплексного множителя. Модуль этой постоянной определяется при помощи условия нормировки, которое, как мы уже знаем, нужно написать в виде

$$\int\sum_{k=1}^{4}\Psi^*_{k,n}\Psi_{k,n}\,d\tau = 1. \quad (3)$$

---

[1] Совокупность четырех собственных функций $\Psi_{k,n}$ может быть названа «собственным решением» уравнения (1).

Мы теперь покажем, во-первых, что все собственные значения W_n – действительные, во-вторых, что если собственные функции $\Psi_{k,n}$ и $\Psi_{k,m}$ соответствуют различным собственным значениям W_n и W_m, то справедливо условие ортогональности:

$$\int \sum_{k=1}^{4} \Psi^*_{k,m} \Psi_{k,n} d\tau = 0. \tag{4}$$

Действительно, если функции $\Psi_{k,n}$ удовлетворяют уравнениям (2), то сопряженные функции $\Psi^*_{k,m}$ удовлетворяют уравнениям

$$\left[-\left(\frac{W^*_m}{c} + \frac{eV}{c} \right) + \sum_{i=1}^{3} \alpha^*_i P^*_i + \alpha^*_4 m_0 c \right] \Psi^*_{k,n} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{5}$$

Умножим (2) на $\Psi^*_{k,m}$ и (5) на $\Psi_{k,n}$; просуммируем по индексу k и вычтем второе из первого. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4} \Bigg[& \frac{-W_n + W^*_m}{c} \Psi^*_{k,m} \Psi_{k,n} + \Psi^*_{k,m} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_i \cdot \Psi_{k,n} - \Psi_{k,n} \sum_{i=1}^{3} \alpha^*_i P^*_i \cdot \Psi^*_{k,m} + \\ & + m_0 c \left(\Psi^*_{k,m} \alpha_4 \Psi_{k,n} - \Psi_{k,n} \alpha^*_4 \Psi^*_{k,m} \right) \Bigg] = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Далее мы покажем, что если F есть линейный оператор, действующий на координаты (а не на индекс k Дирака), то имеем:

$$\sum_{k=1}^{4} \Psi^*_{k,m} \cdot F \alpha_i \Psi_{k,n} = \sum_{k=1}^{4} F \Psi_{k,n} \cdot \alpha^*_i \Psi^*_{k,m}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Действительно, учитывая эрмитовость α_i, находим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4} \Psi^*_{k,m} \cdot F \alpha_i \Psi_{k,n} &= \sum_{k=1}^{4} \Psi^*_{k,m} \cdot F \sum_{j=1}^{4} (\alpha_i)_{k,j} \Psi_{j,n} = \\ &= \sum_{j,k=1}^{4} \Psi^*_{k,m} (\alpha_i)_{k,j} F \Psi_{j,n} = \sum_{j,k=1}^{4} \Psi^*_{k,m} (\alpha^*_i)_{j,k} F \Psi_{j,n} = \\ &= \sum_{j=1}^{4} F \Psi_{j,n} \cdot \sum_{k=1}^{4} (\alpha^*_i)_{j,k} \Psi^*_{k,m} = \sum_{j=1}^{4} F \Psi_{j,n} \cdot \alpha^*_i \Psi^*_{j,m}, \end{aligned} \tag{8}$$

что и требовалось доказать.

Приравнивая, в частности, F к единице, сначала выводим из (7):

$$\sum_{k=1}^{4} \Psi^*_{k,m} \cdot \alpha_i \Psi_{k,n} = \sum_{k=1}^{4} \Psi_{k,n} \cdot \alpha^*_i \Psi^*_{k,m}. \tag{9}$$

Таким образом, из (9) вытекает, что в (6) члены с eA_x, eA_y, eA_z и m_0c исчезают. Следовательно, уравнение (6) сводится к следующему:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}\Bigg[&\frac{W_n - W_m^*}{c}\Psi_{k,m}^*\Psi_{k,n} - \\ &-\frac{h}{2\pi i}\Psi_{k,m}^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3\right)\Psi_{k,n} - \\ &-\frac{h}{2\pi i}\Psi_{k,n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha_1^* + \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2^* + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3^*\right)\Psi_{k,m}^*\Bigg] = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Далее, согласно (7), имеем:

$$\sum_{k=1}^{4}\Psi_{k,m}^*\frac{\partial}{\partial x}\alpha_1\Psi_{k,n} = \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\Psi_{k,n}}{\partial x}\cdot\alpha_1^*\Psi_{k,m}^* \qquad \text{и т. д.,} \tag{11}$$

и формула (10) принимает вид

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}\Bigg[&\frac{W_n - W_m^*}{c}\Psi_{k,m}^*\Psi_{k,n} - \frac{h}{2\pi i}\bigg\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi_{k,n}\cdot\alpha_1^*\Psi_{k,m}^*\right) + \\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Psi_{k,n}\cdot\alpha_2^*\Psi_{k,m}^*\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Psi_{k,n}\cdot\alpha_3^*\Psi_{k,m}^*\right)\bigg\}\Bigg] = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

При интегрировании по всему пространству член в фигурных скобках дает нуль, так как Ψ_k равны нулю на бесконечности, и остается

$$\frac{W_n - W_m^*}{c}\int\sum_{k=1}^{4}\Psi_{k,m}^*\Psi_{k,n}\,d\tau = 0. \tag{13}$$

Если мы сначала возьмем $n = m$, то из (13) выводим, что $W_n^* = W_n$ для каждого значения n, и это значит, что все W_n действительные. Если затем мы положим $n \neq m$, помня, что по предположению $W_n \neq W_m$, то из (13) выводим формулу ортогональности (4). Таким образом, теорема доказана.

Соотношение ортогональности, вообще говоря, не имеет места для двух собственных решений, соответствующих одному и тому же собственному значению (случай вырождения). Но тогда собственные решения, которые соответствуют одному и тому же собственному значению, определены только с точностью до линейного преобразования, и мы всегда можем выбрать эти собственные решения так, чтобы они были ортогональны.

В случае сплошных спектров собственных значений справедливы те же замечания, что и в волновой механике с одной функцией Ψ. Вообще говоря, параллелизм обеих теорий здесь полный. Тем не менее нужно отметить одно различие: в формулах, в которых проводится интегрирование по пространству, как, например, в условиях нормировки и ортогональности (3) и (4), в теории Дирака необходимо производить суммирование по индексу k. Наличие этого обобщенного суммирования станет вполне естественным, если придерживаться другой точки зрения, согласно которой индекс k считается некоторого рода дополнительной дискретной переменной (см. главу XVI).

2. Матрицы и первые интегралы в теории Дирака

В волновой механике с одной функцией Ψ каждому линейному и эрмитову оператору A соответствует матрица, элементы которой определяются по формуле

$$A_{mn} = \int_D \Psi_m^* A(\Psi_n) d\tau, \tag{14}$$

где $d\tau$ – элемент объема области D, в которой определены функции Ψ_n. Тогда говорят, что оператор A является первым интегралом для рассматриваемой проблемы, если все A_{mn} независимы от времени, и мы видели, что, полагая

$$L = H + \frac{h}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial t},$$

получаем необходимое и достаточное условие того, чтобы A был первым интегралом, в виде

$$LA - AL = 0. \tag{15}$$

Как же мы перенесем эти определения в теорию Дирака?

Чтобы определить матричные элементы, мы примем во внимание замечание в конце предыдущего параграфа, т. е. будем объединять с интегрированием, фигурирующим в прежнем определении (14), суммирование по индексу функций Ψ_k Дирака. Следовательно, матричные элементы, соответствующие линейному и эрмитову оператору[2] A, будут определяться из соотношения

$$A_{mn} = \int_D \sum_{k=1}^{4} \Psi_{k,m}^* A(\Psi_{k,n}) d\tau. \tag{16}$$

Мы всегда будем говорить, что A есть первый интеграл, если все A_{mn} независимы от времени. Чтобы отыскать условие, которое выражает, что A есть первый интеграл, мы напишем символическое уравнение Дирака в сжатой форме:

$$L(\Psi) = 0, \tag{17}$$

где

$$L = P_4 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_i + \alpha_4 m_0 c, \tag{18}$$

[2] Естественно, что в теории Дирака оператор может действовать как на индекс k, так и на координаты.

и мы заметим, что, полагая

$$H = -eV + \sum_{i=1}^{3} c\alpha_i P_i + \alpha_4 m_0 c^2, \tag{19}$$

мы можем написать

$$L = \frac{1}{c}\left(H + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right); \quad -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(\Psi). \tag{20}$$

Оператор H, определенный в (19), есть оператор Гамильтона в теории Дирака. Оператор H эрмитов, т. е. он удовлетворяет условию

$$\int_D \sum_{k=1}^{4} \Psi^*_{k,m} H(\Psi_{k,n}) d\tau = \int_D \sum_{k=1}^{4} \Psi_{k,n} H^*\left(\Psi^*_{k,m}\right) d\tau \tag{21}$$

для всех значений m и n. Уравнение (21) – очевидное обобщение условия эрмитовости механики с одной Ψ. Оно просто выражает, что по определению (16) мы имеем $H_{mn} = H^*_{nm}$. Формула (21) легко доказывается, если принять во внимание эрмитовость α_i и свойство $\Psi_{k,n}$ исчезать на границах D([3]).

Чтобы выразить, что A есть первый интеграл, напишем

$$\frac{dA_{mn}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{4}\left[\Psi^*_{k,m} A\left(\frac{\partial \Psi_{k,n}}{\partial t}\right) + \Psi^*_{k,m}\frac{\partial A}{\partial t}(\Psi_{k,n}) + \frac{\partial \Psi^*_{k,m}}{\partial t} A(\Psi_{k,n})\right] d\tau = 0. \tag{22}$$

---

[3] Чтобы доказать это, в (21) заменяют оператор H его выражением (19) и проверяют, является ли действительным соотношение (21) для каждого члена. Для членов, содержащих V, доказательство – прямое. Для членов, содержащих A_x, A_y и A_z, мы имеем, например:

$$\sum_{k=1}^{4} eA_x \Psi^*_{j,m} \sum_{j=1}^{4} \left(\alpha^*_1\right)_{kj} \Psi_{k,n} = \sum_{j=1}^{4} eA_x \Psi^*_{j,m} \sum_{k=1}^{4} \left(\alpha_1\right)_{j,k} \Psi_{k,n} = \sum_{j=1}^{4} \Psi^*_{j,m} eA_x \alpha_1 \Psi_{j,n}$$

в силу эрмитовости α_i, и соотношение (21), таким образом, доказано для этих членов. Остаются такие члены, как

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\alpha^*_i \Psi^*_{k,m} \cdot \Psi_{k,n}.$$

Прежде всего мы имеем опять в силу эрмитовости α_i:

$$\frac{h}{2\pi i}\sum_{k,j=1} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\alpha^*_1\right)_{k,j} \Psi^*_{j,m}\right]\Psi_{k,n} = \frac{h}{2\pi i}\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \Psi^*_{j,m}}{\partial x} \sum_{k=1}^{4} \left(\alpha_1\right)_{j,k} \Psi_{k,n}.$$

Затем, после интегрирования по частям, так как $\Psi_{k,n}$ равны нулю на границах D, находим:

$$\frac{h}{2\pi i}\int_D \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \Psi^*_{j,m}}{\partial x} \sum_{k=1}^{4} \left(\alpha_1\right)_{j,k} \Psi_{k,n} d\tau =$$

$$= -\frac{h}{2\pi i}\int_D \sum_{j=1}^{4} \Psi^*_{j,m} \sum_{k=1}^{4} \left(\alpha_1\right)_{j,k} \frac{\partial \Psi_{k,n}}{\partial x} = \int_D \sum_{k=1}^{4} \Psi^*_{k,m}\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha_1 \Psi_{k,n},$$

что и требовалось доказать.

Затем, так как мы имеем $L\left(\Psi_{k,n}\right) = 0$ и $L^*\left(\Psi^*_{k,m}\right) = 0$, заменим производные $\frac{\partial\Psi_{k,n}}{\partial t}$ и $\frac{\partial\Psi^*_{k,m}}{\partial t}$ соответственно на $-\frac{2\pi i}{h}H\left(\Psi_{k,n}\right)$ и $\frac{2\pi i}{h}H^*\left(\Psi^*_{k,m}\right)$, а это нам даст:

$$\frac{dA_{mn}}{dt} = \int\limits_D \sum_{k=1}^{4}\left[-\frac{2\pi i}{h}\Psi^*_{k,m}AH\left(\Psi_{k,n}\right) + \Psi^*_{k,m}\frac{\partial A}{\partial t}\left(\Psi_{k,n}\right) + \frac{2\pi i}{h}H^*\left(\Psi^*_{k,m}\right)A\left(\Psi_{k,n}\right)\right]d\tau. \quad (23)$$

Это выражение может быть преобразовано при помощи формулы

$$\int\limits_D \sum_{k=1}^{4} H^*\left(\Psi^*_{k,m}\right)A\left(\Psi_{k,n}\right)d\tau = \int\limits_D \sum_{k=1}^{4}\Psi^*_{k,m}HA\left(\Psi_{k,n}\right)d\tau, \quad (24)$$

которая доказывается так же, как и (21). Подставив (24) в (23), находим

$$\frac{dA_{mn}}{dt} = \int\limits_D \sum_{k=1}^{4}\Psi^*_{k,m}\left[\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{2\pi i}{h}\left(AH - HA\right)\right]\Psi_{k,n}d\tau. \quad (25)$$

На основании (22) мы делаем вывод, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы A был первым интегралом, является следующее:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{2\pi i}{h}\left(AH - HA\right) = 0, \quad (26)$$

ибо $\Psi_{k,n}$ образуют полную систему.

Условие (26) мы можем написать еще иначе, заметив, что для какой-нибудь функции f имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}A(f) = \frac{\partial A}{\partial t}(f) + A\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right), \quad (27)$$

откуда символически:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\cdot A - A\cdot\frac{\partial}{\partial t}. \quad (28)$$

Следовательно, заменяя оператор $\frac{\partial A}{\partial t}$ в (26) на его значение (28), мы имеем:

$$LA - AL \equiv 0 \quad (29)$$

в силу (20).

Условия (26) и (29) имеют ту же форму, что и аналогичные условия волновой механики с одной Ψ, но с другим определением операторов L и H.

Мы заметим, что, используя определение H из (19), уравнение (1) можно написать в виде

$$H\left(\Psi_k\right) = W\Psi_k. \quad (30)$$

Итак, собственные значения W_n, определенные в параграфе 1, суть собственные значения оператора Гамильтона, т. е. собственные значения энергии.

3. Примеры первых интегралов. Собственный угловой момент электрона

Сначала мы выясним, в каком случае оператор Гамильтона, соответствующий энергии, является первым интегралом. Для этого нужно, чтобы

$$LH - HL = \frac{1}{c}\left(H + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right)H - H\frac{1}{c}\left(H + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv 0, \tag{31}$$

или проще:

$$\frac{\partial}{\partial t}H - H\cdot\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0. \tag{32}$$

Следовательно, необходимое и достаточное условие того, чтобы энергия была первым интегралом, состоит в следующем: внешнее поле (определяемое здесь четырьмя функциями V, A_x, A_y, A_z) должно быть независимым от времени. Это теорема сохранения энергии в механике Дирака.

Точно так же нетрудно видеть, что если вектор-потенциал равен нулю, а скалярный потенциал не зависит от одной из координат, скажем x, то составляющая импульса $\left(p_x = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть первый интеграл. Это теорема сохранения импульса.

Гораздо интереснее рассмотреть теорему сохранения углового момента в теории Дирака. Действительно, мы видели, что в волновой механике с одной функцией Ψ угловой момент относительно оси z, соответствующий оператору

$$M_z = xp_y - yp_x = -\frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{33}$$

есть первый интеграл, если силовое поле обладает цилиндрической симметрией относительно оси z. Мы увидим, что этот результат в механике с четырьмя функциями Ψ уже не имеет места, и выясним, чем он должен быть заменен.

Сначала проверим, что в поле, описываемом скалярным потенциалом с цилиндрической симметрией $V(\rho, z)$, где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

M_z не является первым интегралом в механике Дирака. Для этого мы должны показать, что M_z не коммутирует с L. Прежде всего очевидно, что оператор M_z коммутирует с $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}$, $\alpha_3\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$ и $\alpha_4 m_0 c$; он коммутирует также с членом $\frac{e}{c}V$, ибо мы имеем (в операторном виде):

$$V\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)V \equiv x\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{34}$$

что равно нулю, так как по предположению V зависит от z и от $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Но зато M_z не коммутирует с членами $-\alpha_1\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}$ и $-\alpha_2\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}$, ибо мы имеем:

$$\begin{aligned}&\left(-\alpha_1\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}-\alpha_2\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)-\\&-\frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\alpha_1\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}-\alpha_2\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)=\\&=\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial y}\right).\end{aligned}\tag{35}$$

Итак, окончательно имеем:

$$LM_z-M_zL=\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial y}\right),\tag{36}$$

и поэтому M_z не является первым интегралом.

В таком случае рассмотрим оператор

$$N_z=M_z+\alpha_1\alpha_2\frac{h}{4\pi i}.\tag{37}$$

Этот оператор эрмитов, ибо произведение двух эрмитовых матриц α_1 и α_2, которые эрмитовы и антикоммутируют, антиэрмитово, а частное от деления на i эрмитово. Мы покажем, что в данном случае N_z есть первый интеграл. Для этого возьмем разность

$$L\alpha_1\alpha_2\frac{h}{4\pi i}-\alpha_1\alpha_2\frac{h}{4\pi i}L.$$

Члены с $\frac{\partial}{\partial t}$, V и $\alpha_4 m_0 c$, очевидно, коммутируют с $\alpha_1\alpha_2$; то же относится и к члену $\alpha_3\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$ в силу свойств α_i. Следовательно, остается

$$\begin{aligned}&L\alpha_1\alpha_2\frac{h}{4\pi i}-\alpha_1\alpha_2\frac{h}{4\pi i}L=\\&=-\frac{h^2}{8\pi^2}\left[\alpha_1\alpha_1\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\alpha_1\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_1\alpha_2\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}-\alpha_1\alpha_2\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}\right].\end{aligned}\tag{38}$$

Так как $\alpha_1\alpha_1=\alpha_2\alpha_2=1$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_2=-\alpha_1$ и $\alpha_1\alpha_2\alpha_1=-\alpha_2$, мы находим:

$$L\alpha_1\alpha_2\frac{h}{4\pi i}-\alpha_1\alpha_2\frac{h}{4\pi i}L=-\frac{h^2}{4\pi^2}\left(\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial y}\right)=-LM_z+M_zL.\tag{39}$$

Отсюда мы выводим соотношение

$$LN_z-N_zL\equiv 0\tag{40}$$

и видим, что N_z есть первый интеграл.

Мы можем применить рассуждение, аналогичное предыдущему, для составляющих с индексами x и y, заменяя оси. Тогда мы видим, что в теории Дирака полный угловой момент электрона есть вектор с составляющими

$$N_x = M_x + S_x\,; \quad N_y = M_y + S_y\,; \quad N_z = M_z + S_z\,, \tag{41}$$

причем операторы, соответствующие M_x (и т. д.), суть следующие:

$$\begin{gathered} M_x = -\frac{h}{2\pi i}\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right); \quad M_y = -\frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right); \quad M_z = -\frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right); \\ S_x = \alpha_2\alpha_3\frac{h}{4\pi i}; \quad S_y = \alpha_3\alpha_1\frac{h}{4\pi i}; \quad S_z = \alpha_1\alpha_2\frac{h}{4\pi i}. \end{gathered} \tag{42}$$

M_x, M_y, M_z суть составляющие «орбитального» углового момента электрона, и вполне естественно считать S_x, S_y, S_z составляющими собственного углового момента электрона, т. е. «спина».

4. Явное определение N_z. Знак собственной массы для волн Ψ_k

Очень интересно явно найти оператор N_z, соответствующий выделенной оси z, и посмотреть, какие получаются результаты при его последовательном применении к четырем Ψ_k.

Исходя из известных нам значений α_1 и α_2, нетрудно вычислить при помощи правила умножения матриц произведение $\alpha_1\alpha_2$, и мы находим:

$$-\alpha_1\alpha_2 = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Отсюда мы легко выводим:

$$\begin{aligned} N_z(\Psi_1) &= M_z(\Psi_1) + \frac{h}{4\pi}\Psi_1, \\ N_z(\Psi_2) &= M_z(\Psi_2) - \frac{h}{4\pi}\Psi_2, \\ N_z(\Psi_3) &= M_z(\Psi_3) + \frac{h}{4\pi}\Psi_3, \\ N_z(\Psi_4) &= M_z(\Psi_4) - \frac{h}{4\pi}\Psi_4. \end{aligned} \tag{44}$$

Итак, из формул (44) мы видим, что для волн с нечетным индексом собственный угловой момент есть $+\frac{h}{4\pi}$, а для волн с четным индексом $-\frac{h}{4\pi}$.

Выпишем среднее значение N_z. Мы имеем:

$$\begin{aligned}\overline{N}_z &= \iiint \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* N_z(\Psi_k) d\tau = \\ &= \overline{M}_z + \frac{h}{4\pi} \iiint \left[\Psi_1^*\Psi_1 - \Psi_2^*\Psi_2 + \Psi_3^*\Psi_3 - \Psi_4^*\Psi_4\right] d\tau.\end{aligned} \tag{45}$$

Эту формулу нужно пояснить так: собственный угловой момент электрона вдоль оси z может принимать только два значения, $+\frac{h}{4\pi}$ и $-\frac{h}{4\pi}$, причем вероятность первой возможности есть

$$\iiint (\Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_3^*\Psi_3) d\tau,$$

а второй –

$$\iiint (\Psi_2^*\Psi_2 + \Psi_4^*\Psi_4) d\tau.$$

Теперь сравним формулу (45) с формулой (16) главы XIV, которая дает средний магнитный момент электрона вдоль oz:

$$\overline{\mathfrak{M}}_z = -\frac{eh}{4\pi m_0 c} \iiint (\Psi_1^*\Psi_1 - \Psi_2^*\Psi_2 - \Psi_3^*\Psi_3 + \Psi_4^*\Psi_4) d\tau. \tag{46}$$

Мы видим, что можно привести в соответствие:

волне Ψ_1 магнитный момент $-\frac{eh}{4\pi m_0 c}$,

угловой момент $+\frac{h}{4\pi}$,

волне Ψ_2 магнитный момент $+\frac{eh}{4\pi m_0 c}$,

угловой момент $-\frac{h}{4\pi}$.

Мы уже видели, что для этих двух волн, которые являются преобладающими в ньютоновском приближении, отношение указанных двух моментов равно $-\frac{e}{m_0 c}$, как и следовало ожидать в силу удвоенного значения магнитного момента для вращающегося электрона[4].

Однако для волн Ψ_3 и Ψ_4 мы получаем неожиданный результат. Действительно, согласно (45) и (46), нужно привести в соответствие:

[4] Отношение $-\frac{e}{m_0 c}$ действительно является двойным нормальным отношением, данным формулой (7) главы IV.

волне Ψ_3 магнитный момент $+\dfrac{eh}{4\pi m_0 c}$,

угловой момент $+\dfrac{h}{4\pi}$,

волне Ψ_4 магнитный момент $-\dfrac{eh}{4\pi m_0 c}$,

угловой момент $-\dfrac{h}{4\pi}$,

откуда отношение двух моментов равно $+\dfrac{e}{m_0 c}$, т. е. значению, которое отличается своим знаком от ожидавшегося значения.

Откуда происходит эта аномалия? Чтобы это понять, заметим сначала, что все происходит так, как если бы по отношению к волнам Ψ_3 и Ψ_4 собственная масса электрона была $-m_0$ вместо m_0. Это хорошо видно из тех же уравнений Дирака:

$$\left(P_4 + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i P_i + \alpha_4 m_0 c\right)\Psi_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4), \tag{47}$$

если учесть явную форму матрицы α_4:

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

Член с m_0 имеет различный знак в двух первых уравнениях (47) в сравнении с двумя последними.

Это можно выразить словами так: в теории Дирака собственная масса m_0 прежней механики заменена оператором $\alpha_4 m_0$. Так как

$$\begin{gathered} \alpha_4 m_0 \Psi_1 = m_0 \Psi_1; \quad \alpha_4 m_0 \Psi_2 = m_0 \Psi_2; \\ \alpha_4 m_0 \Psi_3 = -\, m_0 \Psi_3; \quad \alpha_4 m_0 \Psi_4 = -\, m_0 \Psi_4, \end{gathered} \tag{49}$$

то очевидно, что волнам Ψ_1 и Ψ_2 соответствует масса m_0, в то время как волнам Ψ_3 и Ψ_4 соответствует масса $-m_0$. Если теперь читатель вспомнит рассуждения, которые предшествовали формуле (32) в главе X, он лучше прояснит для себя суть того, что здесь сказано.

ГЛАВА XVI. Систематическое резюме полученных результатов

1. Индекс функций Ψ_k, рассматриваемый как переменная

До сих пор, излагая теорию Дирака, мы говорили, что она предполагает существование четырех волновых функций Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 от четырех переменных x, y, z, t. Мы можем перейти на другую точку зрения и сказать, что существует *одна* функция Ψ, зависящая от четырех непрерывных переменных x, y, z, t, которые могут принимать все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$, и от пятой переменной ζ, переменной «спина», которая может принимать только четыре значения: 1, 2, 3, 4. Это позволяет считать индекс k функции Ψ_k дискретной переменной с четырьмя возможными значениями.

Операторы α_i действуют на дискретную переменную ζ, в то время как такие операторы, как, например p_x, действуют на непрерывные переменные. Допустимо рассматривать операторы, которые действуют сразу на четыре переменные[1] x, y, z, ζ, таков дираковский оператор Гамильтона H, определяемый формулой (19) предыдущей главы.

Теперь мы напишем уравнение Дирака в виде

$$\left(P_4 + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i P_i + \alpha_4 m_0 c\right)\Psi(x, y, z, t, \zeta) = 0. \tag{1}$$

До сих пор мы рассматривали это уравнение как символическое уравнение, содержащее четыре различных уравнения. Теперь мы можем считать его единственным уравнением эволюции во времени в пространстве четырех переменных x, y, z, ζ.

Интегрирования, которые в волновой механике «без спина» выполнялись в пространстве трех переменных $x, y, z,$ здесь должны производиться в пространстве x, y, z, ζ. Это объясняет нам основную причину следующего, уже указанного прежде факта: все формулы волновой механики, в которых фигурирует интегрирование по пространству, в теории Дирака должны быть дополнены суммированием от 1 до 4 по индексу k.

В действительности это суммирование $\sum_{k=1}^{4}$ соответствует своего рода интегрированию по дискретной переменной ζ, и нам часто будет удобно символически представлять его при помощи интеграла $\int \ldots d\zeta$.

[1] Хотя теория Дирака в некотором смысле является релятивистской, время играет в ней роль, отличную от роли четырех переменных x, y, z, ζ; мы вернемся к этому несколько позже.

Так, например, условие нормировки волновой механики без спина:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,y,z,t)\cdot\Psi(x,y,z,t)dxdydz = 1 \tag{2}$$

в теории Дирака представляется так:

$$\begin{gathered}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \Psi_k \, dxdydz = \\ = \iiiint \Psi^*(x,y,z,t,\zeta)\cdot\Psi(x,y,z,t,\zeta)dxdydzd\zeta = 1.\end{gathered} \tag{3}$$

Точно так же новая точка зрения позволяет легко видеть, как нужно в теории Дирака писать разложение в ряд по собственным функциям. Пусть мы имеем, например, функцию $f(x,y,z,t,\zeta)$ от пяти переменных x, y, z, t, ζ. Она эквивалентна четырем функциям f_1, f_2, f_3, f_4 от четырех непрерывных переменных x, y, z, t. Предположим, что нам известна система собственных функций оператора Гамильтона; мы уже условились обозначать собственную функцию этой системы как совокупность четырех функций $\Psi_{1,m}$, $\Psi_{2,m}$, $\Psi_{3,m}$, $\Psi_{4,m}$, где второй индекс m характеризует соответствующее собственное значение. С нашей новой точки зрения, мы должны представить совокупность четырех функций $\Psi_{k,m}$ при помощи единственной функции $\Psi_m(x,y,z,t,\zeta)$.

Тогда разложение функции $f(x,y,z,t,\zeta)$ по полной системе функций $\Psi_m(x,y,z,t,\zeta)$ вполне естественно изобразится так:

$$f(x,y,z,t,\zeta) = \sum_m c_m \Psi_m(x,y,z,t,\zeta), \tag{4}$$

что эквивалентно четырем соотношениям:

$$f_k(x,y,z,t) = \sum_m c_m \Psi_{k,m}(x,y,z,t), \quad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{5}$$

Итак, мы видим, что каждая из четырех составляющих f_k разлагается по собственным функциям $\Psi_{k,m}$ *с тем же индексом* k и коэффициенты разложения одни и те же для всех четырех составляющих. Это положение, которое может не показаться очевидным, если k рассматривать как индекс, становится, напротив, совершенно естественным, если мы рассуждаем так, как мы это делали, заменяя индекс k дискретной переменной ζ.

2. Формулировка общих принципов в теории Дирака

Введение дискретной переменной ζ позволяет тотчас же установить, каким образом общие принципы волновой механики переносятся в теорию Дирака.

Сначала мы примем, что каждой наблюдаемой физической величине, приписываемой электрону, соответствует оператор A, который в общем случае может действовать на четыре переменные x, y, z, ζ. Этот оператор всегда должен быть эрмитовым в пространстве x, y, z, ζ, т. е. мы должны иметь

$$\begin{gathered}\iiiint f^*(x,y,z,t,\zeta)Ag(x,y,z,t,\zeta)dxdydzd\zeta = \\ = \iiiint g(x,y,z,t,\zeta)A^*f^*(x,y,z,t,\zeta)dxdydzd\zeta.\end{gathered} \tag{6}$$

Собственные значения оператора A определяются как значения постоянной a, для которых уравнение

$$A\varphi(x,y,z,t,\zeta) \equiv a\varphi(x,y,z,t,\zeta) \tag{7}$$

имеет по крайней мере одно, везде конечное равномерно непрерывное решение по xyz для каждого из четырех значений ζ. Эти собственные значения, являющиеся, вообще говоря, функциями времени, действительные, а две собственные функции φ_m и φ_n, соответствующие двум различным собственным значениям a_m и a_n, ортогональны в пространстве x, y, z, ζ, т. е.

$$\iiiint \varphi_m^*(x,y,z,t,\zeta)\varphi_n(x,y,z,t,\zeta)dxdydzd\zeta = 0\ . \tag{8}$$

Эти результаты доказываются тем же самым способом, который мы употребляли в параграфе 4 главы V, каждый раз дополняя интегрирования по x, y, z суммированием по ζ. Кроме того, мы всегда будем предполагать, что собственные функции φ_n нормированы согласно условию

$$\iiiint \varphi_m^*(x,y,z,t,\zeta)\varphi_n(x,y,z,t,\zeta)dxdydzd\zeta = \ 1. \tag{9}$$

После этого нетрудно сформулировать в теории Дирака основные принципы новой механики.

Первый из этих принципов сохранится без всяких изменений, утверждая, что измерение величины A, произведенное в момент t, обязательно дает в результате одно из собственных значений оператора A в этот момент t.

Чтобы сформулировать второй принцип, мы сначала предположим, что оператор A является «полным» оператором, т. е. затрагивающим все четыре переменные x, y, z, ζ; кроме того, мы предполагаем его также невырожденным, т. е. не имеющим кратных собственных значений. Пусть тогда $\Psi(x,y,z,t,\zeta)$ будет волновой функцией электрона. Эта волновая функция может разлагаться по собственным функциям оператора A в форме

$$\Psi(x,y,z,t,\zeta) = \sum_m c_m\varphi_m(x,y,z,\zeta), \tag{10}$$

причем c_m – комплексные постоянные, в общем случае являющиеся функциями времени. Тогда второй принцип утверждает, что $|c_m(t)|^2$ есть вероятность того, что измерение величины A даст собственное значение a_m, соответствующее φ_m.

Если A обладает кратными собственными значениями, то одному и тому же a_m соответствует несколько φ_m. Тогда вероятность значения a_m для величины A равна сумме квадратов модулей коэффициентов, соответствующих этим φ_m в разложении Ψ.

Если оператор A неполный, т. е. действует только на некоторые из переменных x, y, z, ζ, то соответствующие φ_m зависят только от этих переменных, а коэффициенты c_m в разложении Ψ по φ_m зависят от переменных, которые не фигурируют в A. В этом случае для того, чтобы получить вероятность собственного значения a_m, нужно проинтегрировать величину $|c_m|^2$ по всей области изменения тех переменных x, y, z, ζ, от которых зависит c_m. Например, если A есть такой оператор, как одна из матриц α_i, действующих только на переменную ζ, то эти собственные функции имеют вид $\varphi_m(\zeta)$ и мы имеем:

$$\Psi(x,y,z,t,\zeta) = \sum_m c_m(x,y,z,t)\varphi_m(\zeta). \tag{11}$$

Тогда вероятность того, что величина A будет иметь значение a_m, дается формулой

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |c_m(x,y,z,t)|^2 dxdydz.$$

Применение этого результата мы увидим в следующем параграфе.

Приняв эти принципы, мы видим, что среднее значение величины A, как мы это уже приняли, равно:

$$\overline{A} = \iiiint \Psi^* A(\Psi) dxdydzd\zeta = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* A(\Psi_k) d\tau \ , \tag{12}$$

так как если в этом выражении заменить Ψ и Ψ^* на их разложения по собственным функциям A, мы легко увидим, что оно в точности равно сумме произведений каждого собственного значения на его вероятность. Следовательно, величина $\sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* A(\Psi_k)$ может быть названа «плотностью среднего значения» для величины A, но, как мы указывали в параграфе 3 главы VI, эта плотность не может считаться имеющей тот же физический смысл, что и плотности в классической теории. Однако мы вскоре увидим, что плотности такого рода, соответствующие операторам α_i и эрмитовым операторам, образованным произведениями α_i, действительные и имеют тензорную природу, что позволяет приравнивать их к некоторым величинам классической физики.

Напомним, наконец, что матричный элемент с индексами ij, соответствующий оператору A, в механике Дирака должен быть определен по формуле

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \iiiint \Psi_i^*(x,y,z,t,\zeta) A\big(\Psi_j(x,y,z,t,\zeta)\big) dxdydzd\zeta = \\ &= \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{4} \Psi_{k,i}^* A\left(\Psi_{k,j}\right) d\tau \end{aligned} \tag{13}$$

и равен коэффициенту при $\Psi_i(x,y,z,t,\zeta)$ в разложении функции $A(\Psi_j)$ по собственным функциям оператора Гамильтона.

В предыдущем изложении мы молчаливо предполагали, что спектр оператора A чисто дискретный. То, что мы говорили в главах V и VI о сплошных спектрах, позволит читателю без труда увидеть, как изменяются написанные выше формулы, если существуют собственные значения, образующие непрерывную последовательность.

3. Пример: собственные значения и собственные функции оператора $\mathfrak{M}_z = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c} i\alpha_1\alpha_2\alpha_4$

Как пример оператора A, действующего только на переменную спина, мы возьмем оператор $\mathfrak{M}_z = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c} i\alpha_1\alpha_2\alpha_4$, который мы поставили в соответствие z-составляющей собственного магнитного момента электрона (см. конец главы X).

Для краткости мы положим:

$$\mu_\text{B} = \frac{eh}{4\pi m_0 c} = \text{магнетон Бора}. \tag{14}$$

Уравнение, которое определяет собственные значения и собственные функции оператора $\mathfrak{M}_z$, записывается, согласно (7), в виде

$$\mu_\text{B} \sum_{k=1}^{4} i\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_4\right)_{jk} \varphi_k = a\varphi_j, \quad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{15}$$

Учитывая значение матричных элементов $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$, мы находим для четырех значений переменной ζ:

$$\mu_\text{B}\varphi(1) = -a\varphi(1);\ \mu_\text{B}\varphi(2) = +a\varphi(2);\ \mu_\text{B}\varphi(3) = +a\varphi(3);\ \mu_\text{B}\varphi(4) = -a\varphi(4). \tag{16}$$

Эти уравнения имеют не равное тождественно нулю решение $\varphi(\zeta)$ только в том случае, если $a = \pm\mu_\text{B}$. Следовательно, оператор $\mathfrak{M}_z$, как этого мы и должны ожидать, имеет собственные значения $\pm\mu_\text{B}$.

Для собственного значения $a = \mu_B$ существуют две *независимые* собственные функции, которые мы назовем

$$\varphi_+^{(1)}(\zeta) \quad \text{и} \quad \varphi_+^{(2)}(\zeta).$$

Эти собственные функции определяются их значениями для четырех возможных значений переменной ζ, а именно:

$$\begin{aligned} &\varphi_+^{(1)}(1) = 0, \quad \varphi_+^{(1)}(2) = 1, \quad \varphi_+^{(1)}(3) = 0, \quad \varphi_+^{(1)}(4) = 0, \\ &\varphi_+^{(2)}(1) = 0, \quad \varphi_+^{(2)}(2) = 0, \quad \varphi_+^{(2)}(3) = 1, \quad \varphi_+^{(2)}(4) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Эти функции нормированы и ортогональны, ибо мы имеем

$$\int |\varphi_+^{(1)}|^2 d\zeta = 1, \quad \int |\varphi_+^{(2)}|^2 d\zeta = 1, \quad \int \varphi_+^{(1)*} \varphi_+^{(2)} d\zeta = 0. \tag{18}$$

Следовательно, собственное значение μ_B двукратно вырождено.

Точно так же и собственное значение $a = -\mu_B$ двойное, так как ему соответствуют две собственные независимые функции, нормированные и ортогональные, $\varphi_-^{(1)}(\zeta)$ и $\varphi_-^{(2)}(\zeta)$, определяемые соотношениями:

$$\begin{aligned} &\varphi_-^{(1)}(1) = 1, \quad \varphi_-^{(1)}(2) = 0, \quad \varphi_-^{(1)}(3) = 0, \quad \varphi_-^{(1)}(4) = 0, \\ &\varphi_-^{(2)}(1) = 0, \quad \varphi_-^{(2)}(2) = 0, \quad \varphi_-^{(2)}(3) = 0, \quad \varphi_-^{(2)}(4) = 1. \end{aligned} \tag{19}$$

Легко проверить, что две функции φ_- ортогональны двум функциям φ_+.

Пусть $\Psi(x, y, z, t, \zeta)$ – волновая функция электрона. В силу первого общего принципа возможные значения z-составляющей его собственного магнитного момента суть собственные значения оператора $\mathfrak{M}_z$, а именно $\pm\mu_B$, т. е. ± 1 магнетон Бора. Чтобы найти вероятности, соответствующие этим двум возможностям, мы должны написать разложение:

$$\begin{aligned} \Psi(x,y,z,t,\zeta) = {} & c_+^{(1)}(x,y,z,t)\varphi_+^{(1)}(\zeta) + c_+^{(2)}(x,y,z,t)\varphi_+^{(2)}(\zeta) + \\ & + c_-^{(1)}(x,y,z,t)\varphi_-^{(1)}(\zeta) + c_-^{(2)}(x,y,z,t)\varphi_-^{(2)}(\zeta). \end{aligned} \tag{20}$$

По второму общему принципу вероятность значения $+\mu_B$ имеет вид

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[|c_+^{(1)}|^2 + |c_+^{(2)}|^2 \right] d\tau,$$

а вероятность значения $-\mu_B$ точно так же есть

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[|c_-^{(1)}|^2 + |c_-^{(2)}|^2 \right] d\tau.$$

Подставляя последовательно в формулу (20) значения переменной ζ, равные 1, 2, 3, 4, мы легко находим:

$$\begin{aligned} &c_+^{(1)} = \Psi_2(x,y,z,t); \quad c_+^{(2)} = \Psi_3(x,y,z,t); \\ &c_-^{(1)} = \Psi_1(x,y,z,t); \quad c_-^{(2)} = \Psi_4(x,y,z,t). \end{aligned} \tag{21}$$

Следовательно, вероятность значения $+\mu_B$ имеет вид

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[|\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2 \right] d\tau,$$

а вероятность значения $-\mu_B$ точно так же есть

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[|\Psi_1|^2 + |\Psi_4|^2 \right] d\tau.$$

Именно к этому значению мы пришли раньше.

Простой пример, который мы рассмотрели, показывает, как можно получить собственные значения и собственные функции операторов, которые действуют только на ζ. Эти соображения, в частности, применимы к операторам, о которых пойдет речь в начале следующего параграфа, т. е. к операторам, имеющим двойные собственные значения ± 1.

4. Шестнадцать основных операторов теории Дирака. Соответствующие величины и плотности

При помощи операторов α_i и единичной матрицы (включающей 4 строки и 4 столбца) можно составить следующую таблицу, содержащую 16 эрмитовых операторов, действующих только на переменную ζ:

$$\begin{array}{cccccc} & & \alpha_4 & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & \\ i\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & i\alpha_3\alpha_1\alpha_4 & i\alpha_1\alpha_2\alpha_4 & i\alpha_1\alpha_4 & i\alpha_2\alpha_4 & i\alpha_3\alpha_4 \\ & i\alpha_2\alpha_3 & i\alpha_3\alpha_1 & i\alpha_1\alpha_2 & i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 & \\ & & \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & & & \end{array} \tag{22}$$

В этой таблице на i умножаются произведения α_i в тех случаях, когда они антиэрмитовы, с тем чтобы получить эрмитовы операторы. Вполне естественно, что можно было бы, переставляя α_i, получить еще и другие операторы, такие, как например $i\alpha_4\alpha_1$, но каждый из этих новых операторов был бы равен или равен с противоположным знаком одному из тех, которые фигурируют в таблице.

Умножая некоторые операторы таблицы (22) на подходящий множитель, мы находим операторы, которые соответствуют уже изученным величинам. Например, по формулам (7) и (8) главы XII, операторы второй строки, из которых три первых помножены на $-ec$, а последний на $-e$, соответствуют составляющим плотности среднего электрического тока и средней электрической плотности.

Операторы третьей строки, помноженные на магнетон Бора $\frac{eh}{4\pi m_0 c}$, согласно уравнениям (9) главы XIV, соответствуют компонентам магнитного момента и дипольного электрического момента электрона. Наконец, три первых оператора четвертой строки, помноженные на $-\frac{h}{4\pi}$, соответствуют, согласно формулам (42) главы XV, трем составляющим S_x, S_y и S_z собственного углового момента. Согласно изложенному в конце предыдущей главы, мы точно так же предчувствуем, что оператор α_4, помноженный на $\pm m_0$, мог бы соответствовать собственной массе.

При помощи 16 операторов таблицы (22) мы можем составить 16 средних плотностей, которые имеют тензорный характер и все действительные, и запишем их в виде таблицы (23).

Величины Ω_1 и Ω_2 инвариантны по отношению к преобразованию Лоренца. Мы их уже знаем. Рассматриваемые как плотности средних значений, они являются инвариантными плотностями. Физическое значение Ω_2, если оно существует, еще не известно. Значение же величины Ω_1 будет обсуждено далее.

Четыре величины (*б*) образуют четырехмерный пространственно-временной вектор[2]. Мы уже знаем, что они соответствуют четырем составляющим «пространственно-временного вектора плотности электрического тока», хорошо известного в теории относительности. Интегрируя составляющую i_4 по всему пространству, мы получаем инвариантную величину, которая является, с точностью до множителя $-c$, полным электрическим зарядом $-e$ электрона.

Шесть величин (*в*) суть шесть различных составляющих антисимметричного тензора второго порядка. Мы их хорошо знаем: это плотности магнитного момента и дипольного электрического момента, рассмотренные в параграфе 3 главы XIV.

Четыре величины (*г*) преобразуются, как составляющие пространственно-временного вектора. Три первые σ_x, σ_y, σ_z, как мы это уже знаем, суть плотности среднего значения собственного углового момента $\vec{S}$ (спина). Временная составляющая σ_4 дополняет пространственно-временной вектор: ее физическая интерпретация не представляется достаточно ясной.

[2] В таблице (23) составляющие с индексом 4 относятся к четвертой пространственно-временной переменной $x_4 = ct$. Следовательно, мы имеем $i_4 = c\rho$.

$$
\left.\begin{array}{ll}
\Omega_1 = \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_4 \Psi_k , & (a) \\[2ex]
\left.\begin{array}{ll}
i_1 = ec\sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_1 \Psi_k ; & i_2 = ec\sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_2 \Psi_k , \\
i_3 = ec\sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_3 \Psi_k ; & i_4 = ec\sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, 1 \, \Psi_k ,
\end{array}\right\} & (б) \\[4ex]
\left.\begin{array}{ll}
\mu_{32} = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \Psi_k , & \\
 & \mu_{14} = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_1 \alpha_4 \Psi_k , \\
\mu_{13} = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 \Psi_k , & \\
 & \mu_{24} = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_2 \alpha_4 \Psi_k , \\
\mu_{21} = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \Psi_k , & \\
 & \mu_{34} = \dfrac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_3 \alpha_4 \Psi_k ,
\end{array}\right\} & (в) \\[4ex]
\left.\begin{array}{ll}
\sigma_1 = \dfrac{-h}{4\pi} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_2 \alpha_3 \, \Psi_k ; & \sigma_2 = \dfrac{-h}{4\pi} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_3 \alpha_1 \, \Psi_k , \\
\sigma_3 = \dfrac{-h}{4\pi} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_1 \alpha_2 \, \Psi_k ; & \sigma_4 = \dfrac{-h}{4\pi} i \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \Psi_k .
\end{array}\right\} & (г) \\[4ex]
\Omega_2 = \sum\limits_{k=1}^{4} \Psi_k^* \, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \Psi_k . & (д)
\end{array}\right\} (23)
$$

5. Замечания о векторе $\vec{\sigma}$

Пространственно-временной вектор $\vec{\sigma}$, согласно предыдущему, может быть назван «вектором спина». Длина $|\sigma|$ такого пространственно-временного вектора дается по определению формулой

$$|\sigma|^2 = \sigma_4^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2. \tag{24}$$

Если произвести выкладки, то в результате получим

$$|\sigma|^2 = -\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right)\frac{h^2}{16\pi^2}. \tag{25}$$

Следовательно, спин есть вектор «пространственного» типа, как принято говорить в теории относительности. Это существенно отличает его от вектора плотности тока, который, согласно формуле (14) главы XII, принадлежит к «временному» типу.

Обратимся теперь к плоской монохроматической волне с волновыми функциями

$$\begin{aligned}
\Psi_3 &= \frac{p_z A}{W/c + m_0 c} e^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)};\\
\Psi_4 &= -\frac{p_z B}{W/c + m_0 c} e^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)};\\
\Psi_1 &= A e^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)};\\
\Psi_2 &= B e^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)},
\end{aligned} \tag{26}$$

где $W = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_z^2}$.

Произведя явное вычисление составляющих $\vec{\sigma}$ в этом частном случае, находим:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{h}{4\pi}\left(A^* B + AB^*\right)\left(1 - \frac{p_z^2}{(W/c + m_0 c)^2}\right);\\
\sigma_2 &= -\frac{h}{4\pi} i\left(A^* B - B^* A\right)\left(1 - \frac{p_z^2}{(W/c + m_0 c)^2}\right);\\
\sigma_3 &= \frac{h}{4\pi}\left(AA^* - BB^*\right)\left(1 + \frac{p_z^2}{(W/c + m_0 c)^2}\right);\\
\sigma_4 &= \frac{h}{4\pi}\cdot 2\left(AA^* - BB^*\right)\frac{p_z}{W/c + m_0 c}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Поскольку составляющие четырехмерного «пространственно-временного вектора плотности электрического тока» для плоской волны имеют вид

$$i_1 = -j_x = 0, \quad i_2 = -j_y = 0,$$

$$i_3 = -j_z = e\rho\frac{c^2 p_z}{W}, \quad i_4 = -c\delta = e\rho c,$$

как это вытекает из формул параграфа 4 главы XII, мы легко находим:

$$\left(\vec{i}\cdot\vec{\sigma}\right) = i_4\sigma_4 - i_1\sigma_1 - i_2\sigma_2 - i_3\sigma_3 = 0. \tag{28}$$

Таким образом, скалярное произведение пространственно-временных векторов $\vec{i}$ и $\vec{\sigma}$ равно здесь нулю. Следовательно, для плоской монохроматической волны два четырехмерных пространственно-временных вектора «тока» и «спина» ортогональны в пространстве-времени (это, конечно, не значит, что соответствующие пространственные векторы перпендикулярны).

Таким образом, мы можем записать (28) в виде

$$c\sigma_4 = \sigma_3 \frac{p_z c^2}{W} = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2 + \sigma_3 v_3. \tag{28'}$$

Следовательно, в данном случае составляющую $c\sigma_4$ можно интерпретировать как скалярное произведение *в пространстве* векторов «плотности собственного углового момента» и «скорости».

Для скорости, близкой к c, отношение $\dfrac{p_z}{W/c + m_0 c}$ близко к единице и, согласно (27), составляющие σ_x и σ_y почти равны нулю. Сравнивая этот результат с изложенным в конце предыдущей главы, мы видим, что в механике Дирака частица со скоростью, близкой к c, сопоставляемая с монохроматической плоской волной, характеризуется тремя взаимно перпендикулярными пространственными векторами $\vec{I}$, $\vec{J}$ и $\vec{\sigma}$, причем последний направлен по нормали к фронту волны[3].

Мы закончим эти замечания о спине, приведя общее соотношение между составляющими этого вектора и инвариантом Ω_2.

Это соотношение, данное Уленбеком и Лапортом, в наших обозначениях будет иметь вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\sigma_4}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_3}{\partial z} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial\sigma_i}{\partial x_i} = -\, m_0 c\Omega_2. \tag{29}$$

В случае плоской волны оно тождественно удовлетворяется, так как все его члены по отдельности равны нулю. Соотношение (29) нетрудно доказать, исходя из уравнения Дирака и его сопряженного. Его истинный физический смысл остается неизвестным.

---

[3] Можно было бы удивиться, заметив, что собственный угловой момент $\vec{S}$ электрона Дирака никогда не совпадает по направлению с магнитным моментом $\vec{\mathfrak{M}}$, и считать, что это противоречит соотношению

$$\frac{\mathfrak{M}}{S} = -\frac{e}{m_0 c}, \tag{$*$}$$

выражающему двойной магнетизм электрона. Но нужно заметить, что соотношение ($*$) справедливо только для систем отсчета, в которых электрон покоится, ибо $\vec{\mathfrak{M}}$ и $\vec{S}$ преобразуются по-разному при преобразовании Лоренца. В самом деле, для магнитного момента *плотности* составляющих преобразуются, как компоненты 23, 31 и 12 тензора. Для углового момента, наоборот, сами его составляющие преобразуются таким способом.

6. Замечания об инварианте Ω_1 и операторе $m_0\alpha_4$

Мы уже видели, что физической величине «собственная масса» в теории Дирака в известном смысле соответствует оператор $m_0\alpha_4$. Если мы примем это соответствие, то плотность среднего значения, которое мы из него выводим, есть

$$m_0 \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \alpha_4 \Psi_k = m_0 \Omega_1. \tag{30}$$

Эта величина инвариантна. Если мы ее проинтегрируем по пространству, то получим среднее значение

$$\overline{m}_0 = m_0 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \alpha_4 \Psi d\tau = m_0 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1 d\tau, \tag{31}$$

или, подставляя значение Ω_1:

$$\overline{m}_0 = -m_0 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_4^* \Psi_4 - \Psi_1^* \Psi_1 - \Psi_2^* \Psi_2 \right) d\tau. \tag{32}$$

Эта формула подтверждает идею о том, что волны с индексами 3 и 4 соответствуют собственной массе $-m_0$, а волны с индексами 1 и 2 – собственной массе m_0.

Среднее значение (31) не является инвариантом. Если мы хотим из него вывести инвариантное выражение, то мы должны еще проинтегрировать по четвертой пространственно-временной переменной $x_4 = ct$. В итоге получаем

$$\int^{t} \overline{m}_0 c dt = m_0 c \int^{t} dt \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1 dx dy dz. \tag{33}$$

Чтобы постараться хотя бы немного прояснить физическое значение этих формул, опять рассмотрим случай плоской монохроматической волны (26) и вычислим то значение, которое имеет в этом случае $\overline{m}_0$. С помощью (30) мы легко находим

$$\begin{aligned} m_0 \Omega_1 &= m_0 \left(AA^* + BB^* \right) \left(1 - \frac{p_z^2}{\left(W/c + m_0 c \right)^2} \right) = \\ &= m_0 \left(AA^* + BB^* \right) \frac{2 m_0 c^2}{W + m_0 c^2}. \end{aligned} \tag{34}$$

Чтобы получить $\overline{m}_0$, нужно проинтегрировать это выражение, что, принимая во внимание нормировку Ψ (4), дает:

$$\overline{m}_0 = m_0 \cdot \frac{2m_0 c^2}{W + m_0 c^2} \cdot \frac{1}{1 + p_z^2 / \left(W/c + m_0 c\right)^2}, \tag{35}$$

или иначе:

$$\overline{m}_0 = m_0 \cdot \frac{m_0 c^2}{W} = m_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \tag{36}$$

При этом βc есть скорость, которая, согласно релятивистской динамике, соответствует энергии W.

Следовательно, инвариантный интеграл (33) представляет собой не что иное (с точностью до постоянной), как *интеграл действия*

$$\int^t m_0 c \sqrt{1 - \beta^2}\, dt \tag{37}$$

для материальной точки в релятивистской динамике. Таким образом, справедлива теорема: «Для электрона Дирака, сопоставляемого с плоской монохроматической волной, интеграл по времени от среднего значения собственной массы совпадает с интегралом действия эйнштейновской динамики».

Величины и плотности, связанные с электроном

Физические величины	**Операторы**	**Плотности среднего значения**	**Релятивистская характеристика плотности**
1	2	3	4
Собственная масса?	$m_0\alpha_4$	$m_0 \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \alpha_4 \Psi_k = m_0 \Omega_1$	Инвариант
Электрический заряд	$-e \cdot 1$	$\delta = -\rho e = -e \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot 1 \Psi_k$	Пространственно-временной вектор
Электрический ток	$-ec\alpha_1$	$j_x = -\rho e u_x = -ec \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_1 \Psi_k$	
	$-ec\alpha_2$	$j_y = -\rho e u_y = -ec \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_2 \Psi_k$	
	$-ec\alpha_3$	$j_z = -\rho e u_z = -ec \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_3 \Psi_k$	

[4] См. примечание на стр. 455.

Окончание таблицы

Физические величины		Операторы	Плотности среднего значения	Релятивистская характеристика плотности
1		2	3	4
Магнитный момент	$\mathfrak{M}_x$	$\frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot i\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$I_x = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_2\alpha_3\alpha_4\Psi_k$	Антисимметричный тензор второго ранга (первая часть)
	$\mathfrak{M}_y$	$\frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot i\alpha_3\alpha_1\alpha_4$	$I_y = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_3\alpha_1\alpha_4\Psi_k$	
	$\mathfrak{M}_z$	$\frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot i\alpha_1\alpha_2\alpha_4$	$I_z = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_4\Psi_k$	
Дипольный электрический момент	$\mathfrak{P}_x$	$\frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot i\alpha_1\alpha_4$	$J_x = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_1\alpha_4\Psi_k$	Антисимметричный тензор второго ранга (вторая часть)
	$\mathfrak{P}_y$	$\frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot i\alpha_2\alpha_4$	$J_y = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_2\alpha_4\Psi_k$	
	$\mathfrak{P}_z$	$\frac{eh}{4\pi m_0 c}\cdot i\alpha_3\alpha_4$	$J_z = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_3\alpha_1\Psi_k$	
Собственный угловой момент (спин)	S_x	$-\frac{h}{4\pi}\cdot i\alpha_2\alpha_3$	$\sigma_x = -\frac{h}{4\pi} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_2\alpha_3\Psi_k$	Полностью антисимметричный тензор третьего ранга = пространственно-временной вектор
	S_y	$-\frac{h}{4\pi}\cdot i\alpha_3\alpha_1$	$\sigma_y = -\frac{h}{4\pi} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_3\alpha_1\Psi_k$	
	S_z	$-\frac{h}{4\pi}\cdot i\alpha_1\alpha_2$	$\sigma_z = -\frac{h}{4\pi} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_1\alpha_2\Psi_k$	
?	S_4	$-\frac{h}{4\pi}\cdot i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\sigma_4 = -\frac{h}{4\pi} i \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_3\Psi_k$	
?	?	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	$\Omega_2 = \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\Psi_k$	Полностью антисимметричный тензор четвертого ранга = инвариант

16 основных эрмитовых операторов теории Дирака

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad i\alpha_3\alpha_1\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}; \quad i\alpha_1\alpha_2\alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$i\alpha_1\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i\alpha_2\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i\alpha_3\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i\alpha_2\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad i\alpha_3\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix}; \quad i\alpha_1\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ДИРАКА. КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И РАЗЛИЧНЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ

ГЛАВА XVII. Объяснение тонкой структуры при помощи теории Дирака

1. Волновое уравнение для движения электрона в центральном поле[1]

Мы предполагаем показать в этой главе, что теория Дирака дает прекрасное объяснение тонкой структуры оптических спектров и спектров рентгеновских лучей, не приводя к затруднениям, с которыми встретилась прежняя теория тонкой структуры Зоммерфельда.

Рассмотрим электрон, движущийся в статическом центральном поле с потенциалом $V(r)$. Уравнения Дирака для этого электрона будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&а) \quad \frac{2\pi i}{h}\left[\frac{W+eV}{c}-m_0 c\right]\Psi_1-\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_4-\frac{\partial}{\partial z}\Psi_3=0,\\
&б) \quad \frac{2\pi i}{h}\left[\frac{W+eV}{c}-m_0 c\right]\Psi_2-\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_3+\frac{\partial}{\partial z}\Psi_4=0,\\
&в) \quad \frac{2\pi i}{h}\left[\frac{W+eV}{c}+m_0 c\right]\Psi_3-\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_2-\frac{\partial}{\partial z}\Psi_1=0,\\
&г) \quad \frac{2\pi i}{h}\left[\frac{W+eV}{c}+m_0 c\right]\Psi_4-\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_1+\frac{\partial}{\partial z}\Psi_2=0.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Вполне естественно попытаться выразить каждую из Ψ_k в виде произведения сферической функции Лапласа на функцию радиуса.

Напомним, что сферические функции Лапласа имеют следующую форму:

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=Ce^{i\varphi m}P_l^m(\cos\theta)=Ce^{i\varphi m}\sin^m\theta\frac{d^{l+m}}{(d\cos\theta)^{l+m}}(1-\cos^2\theta)^l. \qquad (2)$$

---

[1] Мы придерживаемся здесь метода, использованного Ч.Г. Дарвином (*Darwin C.G.* Proc. Roy. Soc. A. 1928. **118.** P. 554).

Так как постоянная C произвольна, выберем ее, по Дарвину, так, чтобы

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = (l-m)!\,\mathrm{e}^{im\varphi}\frac{d^{l+m}}{(d\cos\theta)^{l+m}}\left[\frac{(1-\cos^2\theta)^l}{2^l\cdot l!}\right]\cdot\sin^m\theta \tag{3}$$

при $l = 0, 1, 2...$ и $m = -l, -(l-1)... +l$. К тому же заметим, что функция (3) не нормирована на поверхности шара единичного радиуса.

Пользуясь формулами преобразования прямоугольных координат в полярные, можно доказать следующие соотношения, в которых $f(r)$ означает некоторую функцию радиуса:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)fY_l^m = \frac{1}{2l+1}\left\{\left[\frac{df}{dr}-\frac{l}{r}f\right]Y_{l+1}^{m+1}-(l-m)(l-m-1)\left(\frac{df}{dr}+\frac{l+1}{r}f\right)Y_{l-1}^{m+1}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}fY_l^m = \frac{1}{2l+1}\left\{\left[\frac{df}{dr}-\frac{l}{r}f\right]Y_{l+1}^{m}+(l+m)(l-m)\left(\frac{df}{dr}+\frac{l+1}{r}f\right)Y_{l-1}^{m}\right\}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)fY_l^m = \frac{1}{2l+1}\left\{-\left[\frac{df}{dr}-\frac{l}{r}f\right]Y_{l+1}^{m-1}+(l+m)(l+m-1)\left(\frac{df}{dr}+\frac{l+1}{r}f\right)Y_{l-1}^{m-1}\right\}.$$

При помощи формул (4) мы сможем выразить производные, которые фигурируют в (1), так как мы полагаем, что каждая Ψ_k является произведением функции от r на функцию Лапласа. Сделаем допущение, что функция Ψ_1 пропорциональна функции Y_l^m при данном значении l и m.

Рассматривая теперь уравнение (a) из (1), мы видим, что члены с Y_l^m, возникающие от $-\dfrac{\partial\Psi_3}{\partial z}$ и от $-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_4$, должны сократиться с соответствующими членами в Ψ_1 и что остальные члены также должны взаимно уничтожиться. В результате получается, что Ψ_3 и Ψ_4 должны зависеть от одной и той же функции радиуса и быть соответственно пропорциональными либо Y_{l+1}^m и Y_{l+1}^{m+1}, либо Y_{l-1}^m и Y_{l-1}^{m+1}.

Точно так же уравнение ($в$) из (1) показывает, что Ψ_1 и Ψ_2 должны зависеть от одной и той же функции радиуса и что функция Ψ_2 должна быть пропорциональна Y_l^{m+1}.

В конце концов мы приходим к рассмотрению решения, которое можно записать в виде[2]

$$\begin{aligned}&\Psi_3 = ia_3F_+(r)Y_{l+1}^m(\theta,\varphi);\quad \Psi_4 = ia_4F_+(r)Y_{l+1}^{m+1}(\theta,\varphi);\\ &\Psi_1 = a_1G_+(r)Y_l^m(\theta,\varphi);\quad \Psi_2 = a_2G_+(r)Y_l^{m+1}(\theta,\varphi).\end{aligned} \tag{I}$$

[2] Мы вводим множитель i в Ψ_3 и Ψ_4 для того, чтобы a_3 и a_4 были действительными. См. формулы (9).

Введем формы (I) в уравнения (в) и (г) из (1). Мы получаем:

$$\begin{aligned}
&-\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W+eV}{c}+m_0c\right]a_3F_+Y_{l+1}^m+\frac{a_2}{2l+1}\times\\
&\times\left\{\left(\frac{dG_+}{dr}-\frac{l}{r}G_+\right)Y_{l+1}^m-(l+m)(l+m+1)\left(\frac{dG_+}{dr}+\frac{l+1}{r}G_+\right)Y_{l-1}^m\right\}-\\
&-\frac{a_1}{2l+1}\left\{\left(\frac{dG_+}{dr}-\frac{l}{r}G_+\right)Y_{l+1}^m+(l+m)(l-m)\left(\frac{dG_+}{dr}+\frac{l+1}{r}G_+\right)Y_{l-1}^m\right\}=0,\\
&-\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W+eV}{c}+m_0c\right]a_4F_+Y_{l+1}^{m+1}+\frac{a_1}{2l+1}\times\\
&\times\left\{-\left(\frac{dG_+}{dr}-\frac{l}{r}G_+\right)Y_{l+1}^{m+1}+(l-m)(l-m-1)\left(\frac{dG_+}{dr}+\frac{l+1}{r}G_+\right)Y_{l-1}^{m+1}\right\}+\\
&+\frac{a_2}{2l+1}\left\{\left(\frac{dG_+}{dr}-\frac{l}{r}G_+\right)Y_{l+1}^{m+1}+(l+m+1)(l-m-1)\left(\frac{dG_+}{dr}+\frac{l+1}{r}G_+\right)Y_{l-1}^{m+1}\right\}=0.
\end{aligned}\tag{5}$$

Для того, чтобы исчезли члены с Y_{l-1}^m в первом уравнении (5) и члены с Y_{l-1}^{m+1} во втором, достаточно положить:

$$-\frac{a_1}{a_2}=\frac{l+m+1}{l-m}.\tag{6}$$

С другой стороны, подставим формы (I) в уравнения (*а*) и (*б*) из (1). Получится следующее:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\pi i}{h}\left[\frac{W+eV}{c}-m_0c\right]a_1G_+Y_l^m+\frac{ia_4}{2l+3}\times\\
&\times\left\{\left(\frac{dF_+}{dr}-\frac{l+1}{r}F_+\right)Y_{l+2}^m-(l+m+2)(l+m+1)\left(\frac{dF_+}{dr}+\frac{l+2}{r}F_+\right)Y_l^m\right\}-\\
&-\frac{ia_3}{2l+3}\left\{\left(\frac{dF_+}{dr}-\frac{l+1}{r}F_+\right)Y_{l+2}^m+(l+m+1)(l-m+1)\left(\frac{dF_+}{dr}+\frac{l+2}{r}F_+\right)Y_l^m\right\}=0,\\
&\frac{2\pi i}{h}\left[\frac{W+eV}{c}-m_0c\right]a_2G_+Y_l^{m+1}-\frac{ia_3}{2l+3}\times\\
&\times\left\{\left(\frac{dF_+}{dr}-\frac{l+1}{r}F_+\right)Y_{l+2}^{m+1}+(l-m+1)(l-m)\left(\frac{dF_+}{dr}+\frac{l+2}{r}F_+\right)Y_l^{m+1}\right\}+\\
&+\frac{ia_4}{2l+3}\left\{\left(\frac{dF_+}{dr}-\frac{l+1}{r}F_+\right)Y_{l+2}^{m+1}+(l-m)(l+m+2)\left(\frac{dF_+}{dr}+\frac{l+2}{r}F_+\right)Y_l^{m+1}\right\}=0.
\end{aligned}\tag{7}$$

Чтобы исчезли члены с Y_{l+2}^m из первого уравнения (7) и члены с Y_{l+2}^{m+1} из второго, нужно положить:

$$a_3=a_4.\tag{8}$$

Отношение a_1/a_3 произвольно, ибо мы можем включить его в F_+/G_+. Следовательно, мы можем удовлетворить условиям (6) и (8), полагая:

$$a_3 = 1; \quad a_4 = 1; \quad a_1 = l + m + 1; \quad a_2 = -l + m, \tag{9}$$

так, что $a_1 - a_2 = 2l + 1$.

В этих условиях оба уравнения (5) приводятся к одному уравнению:

$$\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W + eV}{c} + m_0 c\right]F_+ + \frac{dG_+}{dr} - \frac{l}{r}G_+ = 0. \tag{10}$$

Уравнения (7) точно так же приводятся к одному уравнению:

$$-\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W + eV}{c} - m_0 c\right]G_+ + \frac{dF_+}{dr} + \frac{l+2}{r}F_+ = 0. \tag{11}$$

Решение (I) характеризуется тем, что нижние индексы сферической функции Y суть l и l+1. Среднее этих двух значений есть $l + 1/2$, которое мы обозначим j. Таким образом, решение (I) характеризуется квантовыми числами l, $j = l + 1/2$ и m.

Мы нашли первое решение, в котором функция Ψ_3 пропорциональна Y_{l+1}^m, но мы уже видели, что может существовать и другое, в котором Ψ_3 пропорциональна Y_{l-1}^m, а Ψ_4 пропорциональна Y_{l-1}^{m+1}.

Таким образом, нам предстоит еще исследовать решение (II) вида

$$\begin{aligned} &\Psi_3 = ia_3' F_-(r) Y_{l-1}^m(\theta,\varphi); \quad \Psi_4 = ia_4' F_-(r) Y_{l-1}^{m+1}(\theta,\varphi); \\ &\Psi_1 = a_1' G_-(r) Y_l^m(\theta,\varphi); \quad \Psi_2 = a_2' G_-(r) Y_l^{m+1}(\theta,\varphi). \end{aligned} \tag{II}$$

Подставляя формы (II) в уравнения (1) и рассуждая, как выше, мы приходим к условиям

$$\frac{a_4'}{a_3'} = -\frac{l - m - 1}{l + m}; \quad a_1' = a_2', \tag{12}$$

аналогичным (6) и (8). Мы удовлетворим этим условиям, положив

$$a_3' = l + m, \quad a_4' = -l + m + 1, \quad a_1' = 1, \quad a_2' = 1. \tag{13}$$

В таком случае мы находим для F_- и G_- уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W + eV}{c} + m_0 c\right]F_- + \frac{dG_-}{dr} + \frac{l+1}{r}G_- = 0, \\ &-\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W + eV}{c} - m_0 c\right]G_- + \frac{dF_-}{dr} - \frac{l-1}{r}F_- = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

аналогичные уравнениям (10) и (11).

Волновые функции (II) представляют собой решение, соответствующее квантовым числам l, $j = l - 1/2$ и m.

На будущее заметим, что для $l = 0$ (термы s) решение (II) не существует, так как нет функций Y_{-1}^{m} с отрицательным нижним индексом.

Мы вскоре увидим, что определение функций F и G вводит квантовое число n, главное квантовое число, вследствие чего всякое полное решение характеризуется четырьмя квантовыми числами: $n,\ l,\ j = l \pm 1/2,\ m.$

Итак, мы подытожим полученные в этом параграфе результаты в следующей таблице:

Решение (I) $\qquad n,\ l,\ j = l + 1/2,\ m$

$$\Psi_3 = iF_+ Y_{l+1}^{m}; \quad \Psi_4 = iF_+ Y_{l+1}^{m+1};$$

$$\Psi_1 = (l + m + 1)G_+ Y_l^{m}; \quad \Psi_2 = (-l + m)G_+ Y_l^{m-1},$$

$$\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W + eV}{c} + m_0 c\right]F_+ + \frac{dG_+}{dr} - \frac{l}{r}G_+ = 0,$$

$$-\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W + eV}{c} - m_0 c\right]G_+ + \frac{dF_+}{dr} + \frac{l+2}{r}F_+ = 0.$$

Решение (II) $\qquad n,\ l,\ j = l - 1/2,\ m$

$$\Psi_3 = i(l + m)F_- Y_{l-1}^{m}; \quad \Psi_4 = i(-l + m + 1)F_- Y_{l-1}^{m+1};$$

$$\Psi_1 = G_- Y_l^{m}; \quad \Psi_2 = G_- Y_l^{m+1},$$

$$\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W + eV}{c} + m_0 c\right]F_- + \frac{dG_-}{dr} + \frac{l+1}{r}G_- = 0,$$

$$-\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W + eV}{c} - m_0 c\right]G_- + \frac{dF_-}{dr} - \frac{l-1}{r}F_- = 0.$$

Из этой таблицы видно, что уравнения для функций F_- и G_- выводятся из уравнений для функций F_+ и G_+ путем замены l на $-(l + 1)$.

2. Количество решений, соответствующее данным значениям n и l; угловой момент электрона в стационарных состояниях

Интересно задаться вопросом, сколько может быть стационарных состояний, соответствующих данным значениям квантовых чисел n и l. *A priori* очевидно, что их существует столько, сколько значений допускает m при определенных n и l.

Рассмотрим сначала решения типа (I) и подсчитаем возможные значения m, заметив, что верхний индекс функции Y не должен превышать по абсолютной величине нижний индекс. Нет никаких возражений против того, чтобы мы взяли $m = 0, 1, \ldots, l - 1$; могло бы показаться невозможным брать $m = l$, ибо тогда функция Ψ_2 содержала бы несуществующую функцию Y_l^{l+1}, но коэффициент a_2 при значении $m = l$ равен нулю, а вследствие этого мы можем брать это значение m. Значения же m, большие l, напротив, неприемлемы.

С другой стороны, мы можем без затруднений брать отрицательные значения $-1, -2, ..., -l$. Можно ли брать значения $-l-1$? Да, ибо тогда a_1 есть нуль. Но значения m меньше, чем $-l-1$, неприемлемы. Окончательно, для решений типа (I) таких, что $j = l + 1/2$, мы имеем $2l + 2$ возможных значений m, т. е. $l + 1$ отрицательных значений, значение нуль и l положительных значений. Следовательно, в данном случае имеется $2l + 2 = 2j + 1$ *a priori* различных стационарных состояний.

Возьмем решения типа (II), для которых m может безусловно принимать значения $0, 1, \ldots, l-2$ и может точно так же принять значение $l-1$, что приведет к появлению в Ψ_4 несуществующей функции Y_{l-1}^{l}, но одновременно при этом обращается в нуль a_4'. Число m точно так же может принимать отрицательные значения $-1, -2, ..., -(l-1)$ и, кроме того, может принять значение $-l$, что приводит в появлению в Ψ_3 несуществующей функции Y_{l-1}^{-l}, но одновременно при этом обращается в нуль a_3'. Значения m, большие $l-1$ или меньшие $-l$, неприемлемы. Таким образом, мы имеем $2l$ возможных значений m, т. е. $l-1$ положительных значений, нулевое значение и l отрицательных значений.

Так как для решений типа (II) мы имеем $j = l - 1/2$, здесь имеется $2l = 2j + 1$ *a priori* различных стационарных состояний.

В итоге для решений (II), как и для решений (I), имеется $2j + 1$ различных состояний. Дальше мы увидим, каким образом этот результат позволяет подтвердить правило Стонера относительно распределения электронов в атоме.

Теперь мы попытаемся охарактеризовать типы решений (I) и (II) при помощи соответствующих угловых моментов. Для этого мы будем исходить из ранее полученного результата, согласно которому операторный первый интеграл, который в теории Дирака соответствует угловому моменту относительно oz, записывается не в виде

$$M_z = -\frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

а в виде

$$N_z = M_z + S_z = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{h}{4\pi i}\alpha_1\alpha_2.$$

Если же заметить, что $\dfrac{\partial Y_l^m}{\partial \varphi} = imY_l^m$, то нетрудно увидеть, что как для решения типа (II), так и для решения типа (I) имеем формулы

$$N_z(\Psi_k) = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi_k}{\partial \varphi} + \frac{h}{4\pi i}\alpha_1\alpha_2\Psi_k = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}\Psi_k \tag{15}$$

при $k = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, мы видим, что для решения, соответствующего квантовому числу m, каков бы ни был тип – (I) или (II), полный угловой момент N_z равен $\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{h}{2\pi}$. Теперь посмотрим, каковы крайние значения, которые может принимать этот момент при данном значении l. Для решения типа (I) число m может изменяться от $-l-1$ до $+l$, а следовательно, угловой момент N_z может изменяться от $-\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}$ до $+\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}$. Таким образом, тип решения (I) соответствует угловому моменту N_z, максимальное абсолютное значение которого есть $\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}$. Для решения типа (II) число m может изменяться, при данном l, от $-l$ до $l-1$. Следовательно, угловой момент N_z может изменяться от $-\left(l-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}$ до $+\left(l-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}$, и, таким образом, решение типа (II) соответствует максимальному абсолютному значению N_z, равному $\left(l-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}$.

Применяя прежнюю терминологию, нужно сказать, что $l\frac{h}{2\pi}$ является «орбитальным» угловым моментом электрона. Тогда мы замечаем, что решения типа (I) можно охарактеризовать, говоря, что они соответствуют случаям, когда спин и орбитальный угловой момент параллельны и одинаково направлены. Напротив, решения типа (II) соответствуют случаям, когда спин и орбитальный угловой момент параллельны и противоположно направлены.

3. Расчет уровней энергии для атома водорода

Рассчитаем уровни энергии для водородного атома. В этом случае в уравнениях параграфа 1 нужно положить $V = e/r$. Мы последовательно рассмотрим случай решений типа (I), а затем решений типа (II).

а) *Решения типа (I).*

Для решений типа (I) мы имеем два уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W}{c}+\frac{e^2}{cr}+m_0c\right]F_+ + \frac{dG_+}{dr} - \frac{l}{r}G_+ = 0,\\ -\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W}{c}+\frac{e^2}{cr}-m_0c\right]G_+ + \frac{dF_+}{dr} + \frac{l+2}{r}F_+ = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Положим

$$A^2 = \frac{2\pi}{h}\left(\frac{W}{c}+m_0c\right), \quad B^2 = \frac{2\pi}{h}\left(m_0c-\frac{W}{c}\right) \tag{17}$$

и введем постоянную тонкой структуры $\alpha = 2\pi e^2/(ch)$. Мы хотим найти уровни дискретного спектра. Эти уровни, как мы знаем, соответствуют энергии $E = W - m_0c^2$, которая отрицательна. Таким образом, величина B^2 положительная, и B – число действительное. В этих обозначениях уравнения (16) принимают вид

$$\begin{gathered}\left(A^2+\frac{\alpha}{r}\right)F_+ + \frac{dG_+}{dr} - \frac{l}{r}G_+ = 0,\\ \left(B^2-\frac{\alpha}{r}\right)G_+ + \frac{dF_+}{dr} - \frac{(l+2)}{r}F_+ = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Асимптотически при очень большом r имеем:

$$A^2 F_+ + \frac{dG_+}{dr} = 0; \quad B^2 G_+ + \frac{dF_+}{dr} = 0, \tag{19}$$

откуда выводим:

$$\frac{d^2 G_+}{dr^2} = A^2 B^2 G_+; \quad \frac{d^2 F_+}{dr^2} = A^2 B^2 F_+, \tag{20}$$

и после интегрирования найдем:

$$G_+ = \mathrm{e}^{\pm ABr}; \quad F_+ = \mathrm{e}^{\pm ABr}. \tag{21}$$

Для того чтобы F_+ и G_+ были равны нулю на бесконечности, мы должны выбрать в решениях (21) знак «–», откуда:

$$G_{+(\text{асимпт.})} = \text{const} \cdot \mathrm{e}^{-ABr}, \quad F_{+(\text{асимпт.})} = \text{const} \cdot \mathrm{e}^{-ABr}. \tag{22}$$

Эти асимптотические формы побуждают нас попытаться подставить в (18) следующие разложения:

$$\begin{aligned} F_+ &= \mathrm{e}^{-ABr}\left[a_0 r^{\gamma} + a_1 r^{\gamma+1} + \ldots + a_s r^{\gamma+s} + \ldots\right], \\ G_+ &= \mathrm{e}^{-ABr}\left[b_0 r^{\gamma} + b_1 r^{\gamma+1} + \ldots + b_s r^{\gamma+s} + \ldots\right], \end{aligned} \tag{23}$$

в которых показатель γ в принципе должен предполагаться положительным, чтобы F_+ и G_+ оставались конечными при $r = 0$. Подставляя (23) в (18) и приравнивая к нулю коэффициенты при $r^{\gamma-1}$, получаем

$$\alpha a_0 + \gamma b_0 - l b_0 = 0; \quad -\alpha b_0 + \gamma a_0 + (l+2) a_0 = 0. \tag{24}$$

Уравнения (24) совместны только в том случае, если их детерминант равен нулю, а это дает нам условие

$$\alpha^2 + (\gamma - l)(\gamma + l + 2) = 0. \tag{25}$$

Разрешая (25) относительно γ, находим:

$$\gamma = -1 + \sqrt{1 - \left[\alpha^2 - l(l+2)\right]} = -1 + \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2}. \tag{26}$$

Мы сохраним только знак «+» перед радикалом, так как знак «–» дал бы отрицательное значение, неприемлемое для γ. Если мы в выражении (26) положим $l = 0$, то найдем для γ очень малое отрицательное значение. Здесь могло бы показаться, что это значение нужно отбросить, так как оно соответствует функциям F_+ и G_+ (а следовательно, волновым функциям Ψ_k), которые становятся бесконечными при $r = 0$. Однако результаты, к которым мы придем несколько позднее, ясно показывают, что следует сохранить это решение при $l = 0$.

Эту аномалию можно объяснить, заметив, что волновые функции Ψ_k при $r \to 0$ расходятся столь медленно (вследствие малости величины α^2), что интегралы $\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_k|^2 d\tau$ продолжают сходиться. Таким образом, условие того, чтобы волновые функции всегда оставались конечными, здесь оказывается слишком ограничительным: существенное условие состоит в том, чтобы их квадраты были суммируемы. Впрочем, мы видели, что та же самая трудность существовала и в релятивистской теории с одной волновой функцией (см. главу VIII, параграф 2). Таким образом, мы примем в качестве возможных значений γ значения (26) при $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Приняв это, вернемся к подстановке (23) в (18) и приравняем к нулю коэффициент при $r^{\gamma+s}$. Тогда мы находим:

$$\begin{aligned} &A\left(Aa_s - Bb_s\right) + \alpha a_{s+1} + \left(\gamma + s - l + 1\right)b_{s+1} = 0, \\ &-B\left(Aa_s - Bb_s\right) - \alpha b_{s+1} + \left(\gamma + s + l + 3\right)a_{s+1} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Умножим первое уравнение (27) на B, второе на A и сложим. Тогда мы получим:

$$a_{s+1}\left[B\alpha + A\left(\gamma + s + l + 3\right)\right] + b_{s+1}\left[B\left(\gamma + s - l + 1\right) - A\alpha\right] = 0, \tag{28}$$

что позволяет положить:

$$\begin{aligned} a_{s+1} &= c_{s+1}\left[B\left(\gamma + s - l + 1\right) - A\alpha\right], \\ b_{s+1} &= -\,c_{s+1}\left[B\alpha + \left(\gamma + s + l + 3\right)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

где c_{s+1} – некоторая постоянная. Подставляя соотношения (29) и те, которые получаются из них при замене $s + 1$ на s, в уравнения (27), мы находим для c_s рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} &Ac_s\left[-\alpha\left(A^2 - B^2\right) + 2AB\left(\gamma + s + 1\right)\right] = \\ &= c_{s+1}\left[A\alpha^2 + A\left(\gamma + s + l + 3\right)\left(\gamma + s - l + 1\right)\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Для того чтобы функции F_+ и G_+ обязательно были равны нулю на бесконечности, достаточно, согласно (23), чтобы ряды $a_0 r + \ldots$ и $b_0 r + \ldots$ обрывались. Для этого нужно, чтобы для некоторого значения s, например $s = p$, c_{s+1} было равно, а c_s – не равно нулю. Таким образом, нужно, чтобы для $s = p$ коэффициент при c_s в (30) был равен нулю, а это нам дает:

$$\gamma + p + 1 = \alpha\frac{A^2 - B^2}{2AB}, \tag{31}$$

или, согласно (26):

$$\sqrt{\left(l + 1\right)^2 - \alpha^2} + p = \alpha\frac{A^2 - B^2}{2AB}. \tag{32}$$

Но если мы вернемся к определениям (17), мы увидим, что

$$\frac{A^2 - B^2}{2AB} = \frac{W}{\sqrt{m_0^2c^4 - W^2}} = \frac{E + m_0c^2}{\sqrt{-2m_0c^2E - E^2}} = \frac{1 + E/m_0c^2}{\sqrt{-\dfrac{2E}{m_0c^2}\left(1 + \dfrac{E}{2m_0c^2}\right)}}, \tag{33}$$

где величина $E = W - m_0c^2$ в данном случае отрицательна.

Таким образом, уравнение (32) можно записать, возведя его в квадрат:

$$\left[\sqrt{(l+1)^2-\alpha^2}+p\right]^2=\alpha^2\frac{\left[1+E/\left(m_0c^2\right)\right]^2}{\left[-2E/\left(m_0c^2\right)\right]\left[1+E/\left(2m_0c^2\right)\right]},\tag{34}$$

или иначе:

$$\frac{\left[-2E/\left(m_0c^2\right)\right]\left[1+E/\left(2m_0c^2\right)\right]}{\left[1+E/\left(m_0c^2\right)\right]^2}=\frac{\alpha^2}{\left[p+\sqrt{(l+1)^2-\alpha^2}\right]^2}.\tag{35}$$

Если к обеим частям (35) мы прибавим по единице, то найдем:

$$\frac{1}{\left[1+\left(E/m_0c^2\right)\right]^2}=1+\frac{\alpha^2}{\left(p+\sqrt{(l+1)^2-\alpha^2}\right)^2},\tag{36}$$

откуда получается конечная формула:

$$1+\frac{E}{m_0c^2}=\left[1+\frac{\alpha^2}{\left(p+\sqrt{(l+1)^2-\alpha^2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.\tag{37}$$

Так как для решений типа (I), которыми мы в данный момент занимаемся, мы имеем $j=l+1/2$, формулу (37) можно также написать в виде

$$1+\frac{E}{m_0c^2}=\left[1+\frac{\alpha^2}{\left(p+\sqrt{(j+1/2)^2-\alpha^2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.\tag{38}$$

Формула (38) аналогична формуле Зоммерфельда[3], причем целое число $j+1/2=l+1$ играет роль квантового азимутального числа, а p – квантового радиального числа.

Как мы видим, уровни энергии для решений типа (I) целиком определяются четырьмя квантовыми числами: l, $j=l+1/2$, m и p. Вместо целого числа p, которое может принимать значения 0, 1, …, можно точно так же брать число $n=p+l+1$, которое может принимать значения 1, 2, … Число n есть «главное квантовое число», а совокупность чисел n, l, j, m определяет рассматриваемое решение.

Если мы разложим правую часть (38) до второго порядка по α^2, то получим приближенную формулу

$$E=-\frac{Rh}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{4}\right)\right],\tag{39}$$

вполне сравнимую с приближенной формулой Зоммерфельда[4], но с $j+1/2$ вместо числа k.

[3] См. формулу (38) в главе I.
[4] См. формулу (41) в главе I.

Напомним, что релятивистская волновая механика с одной функцией Ψ привела нас к выражению, не согласующемуся с экспериментальными данными и имеющему ту же форму, что и (38), но с l вместо j([5]).

б) *Решения типа* (II).

Мы могли бы возобновить необходимые вычисления, исходя в данном случае из уравнений, которым удовлетворяют функции F_- и G_-. Однако в этом нет необходимости, ибо мы уже отметили, что эти уравнения получаются при замене в уравнениях (16) l на $-(l+1)$. Итак, очевидно, что, принимая для F_- и G_- разложения вида (23), для определения γ мы получим уравнение, которое выводится из (26) путем упомянутой замены l на $-(l+1)$, т. е.:

$$\gamma = -1 + \sqrt{l^2 - \alpha^2}. \tag{40}$$

Здесь, очевидно, нужно исключить случай $l = 0$, который дал бы мнимое значение. Кроме того, мы уже выяснили, что для $l = 0$ нет решений типа (II). Если $l = 1$, то формула (40) дает нам очень малое отрицательное значение γ: здесь вновь мы примем это значение l, заметив, что если соответствующие волновые функции расходятся достаточно слабо в начале координат, они, тем не менее, квадратично суммируемы. Короче говоря, мы примем для l возможные значения: 1, 2…

Продолжая вычисления, мы, очевидно, придем к формуле, которая выводится из (37) путем подстановки $-(l+1)$ вместо l, т. е.:

$$1 + \frac{E}{m_0 c^2} = \left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(p + \sqrt{l^2 - \alpha^2}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

Однако для решений типа (II) имеем: $j = l - 1/2$, и поэтому мы возвращаемся к формуле (38).

Вместо того чтобы характеризовать решение типа (II) при помощи четырех квантовых чисел $l, j = l - 1/2, p, m$, мы можем точно так же характеризовать его четырьмя числами n, l, j, m при $n = p + l$.

Резюмируя, отметим, что во всех случаях энергия уровня, характеризуемого квантовыми числами n, l, j, m, задается (во втором порядке по α^2) формулой (39)[6].

Итак, для водорода мы подтверждаем формулу тонкой структуры Зоммерфельда, но с той существенной разницей, что азимутальное число k старой квантовой теории здесь заменяется целым числом $j + 1/2$. Следовательно, дублеты Зоммерфельда должны обнаруживаться между теми уровнями, числа j которых различаются на единицу. Уровни, которые различаются только квантовым азимутальным числом (k или l), совпадают. Это находится в полном согласии с реальной тонкой структурой линий, например серии Бальмера H_α. Это можно видеть, обратившись к параграфу 5 главы III, а особенно к рис. 4.

---

[5] См. формулы (34) и (36) в главе VIII.

[6] Отметим наличие вырождения: число m не входит в выражение для квантованной энергии.

Кроме того, для водородоподобного атома (атома с атомным числом N, ионизированного ($N-1$)-кратно) мы можем строго применить всю предыдущую теорию. Тогда мы легко найдем вместо (39):

$$E=-\frac{RhN^2}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2N^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{4}\right)\right]. \tag{42}$$

Эта формула хорошо описывает тонкую структуру спектра He^+.

4. Применение полученных результатов к рентгеновским спектрам

Формулы, которые дает теория Дирака, позволяют нам объяснить структуру спектров рентгеновских лучей и, в частности, существование и величину расхождения правильных дублетов, не встречая трудностей прежней теории Зоммерфельда. В главе III, к которой отсылается читатель, мы изложили главные экспериментальные факты, которые должна объяснить теория.

Мы видели, что для расчета уровней энергии в сложных атомах можно учесть, достаточно грубо, взаимодействие электронов, введя «число экранирования», т.е. заменяя в формулах, справедливых для водородоподобных атомов, атомное число N на эффективное число $N-z$. Вполне естественно, что число экранирования z изменяется при переходе от одного электрона к другому, и в основном оно оказывается тем большим, чем более удален электрон. Руководствуясь прежним образом атома Бора, мы можем принять, что число экранирования для внутриатомного электрона зависит только от квантовых чисел n и l, относящихся к этому электрону. Пользуясь формулой (42), мы, таким образом, запишем, что в сложном атоме электрон с квантовыми числами n, l, j, m имеет энергию, задаваемую приближенной формулой

$$E(n,l,j,m)=-\frac{Rh(N-z_{nl})^2}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2(N-z_{nl})^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{4}\right)\right]. \tag{43}$$

Эта формула отличается от прежней формулы Зоммерфельда [см. формулу (9) главы III] подстановкой $j+1/2$ вместо k. Но этой простой подстановки достаточно, чтобы формула (43) позволила объяснить правильные дублеты, не вызывая возражений, которые возникают при применении прежней формулы Зоммерфельда. В самом деле, очевидно, что при помощи формулы (43) правильные дублеты предсказываются не между уровнями с азимутальными квантовыми числами (k или l), различающимися на единицу, а между уровнями с одним и тем же азимутальным квантовым числом и числами j, отличающимся на единицу. Это, как мы видели, как раз и требуется экспериментальными данными.

Рассмотрим, например, уровни L_{II} и L_{III}, разность частот которых соответствует дублетам Зоммерфельда. Мы знаем, что:

для L_{II} $\quad n = 2; \quad l = 1; \quad j = 1/2,$

для L_{III} $\quad n = 2; \quad l = 1; \quad j = 3/2.$

Таким образом, из (43) для разности частот соответствующих дублетов находим:

$$\nu_{L_{\mathrm{II}}} - \nu_{L_{\mathrm{III}}} = -\alpha^2 \frac{R(N - z_{21})^4}{2^4}\left[\frac{2}{1/2 + 1/2} - \frac{2}{3/2 + 1/2}\right] = -\frac{R\alpha^2}{16}(N - z_{21})^4, \tag{44}$$

и мы видели, что, полагая $z = 3{,}5$, получаем полное согласие с экспериментальными данными. Здесь дублет предсказывается на своем настоящем месте между двумя уровнями с одним значением l и значениями j, различающимися на единицу.

Мы уже указывали, что в спектрах рентгеновских лучей существуют также неправильные дублеты. Эти дублеты порождаются разностью частот, которая существует между двумя соседними уровнями с одним и тем же квантовым числом j, но с числами l, отличающимися на единицу. Ее существование мы можем точно так же объяснить при помощи формулы (43). Действительно, если бы число экранирования z не зависело от l, то уровни с одинаковыми j и различными l (такие, например, как L_{I} и L_{II}) совпадали бы, и это как раз наблюдается для водорода, ибо в этом случае, вполне понятно, z всегда равно нулю. Однако в силу изменения z с l мы видим, что эти уровни в сложных атомах не должны совпадать, и можно даже предвидеть закон изменения разности частот. Действительно, если пренебречь членами высшего порядка по α^2, то будем иметь:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{E(n,l,j)}{h}} &= \sqrt{\frac{R}{n^2}}(n - z_{n,l}); \\ \sqrt{\frac{E(n,l+1,j)}{h}} &= \sqrt{\frac{R}{n^2}}(n - z_{n,l+1}), \end{aligned} \tag{45}$$

откуда

$$\sqrt{\frac{E(n,l,j)}{h}} - \sqrt{\frac{E(n,l+1,j)}{h}} = \sqrt{\frac{R}{n^2}}(z_{n,l+1} - z_{n,l}). \tag{46}$$

Левая часть (46) есть $\delta\sqrt{\nu}$ для двух уровней, а правая часть не зависит от N. Итак, мы видим, что спектральные термы двух уровней в ряде элементов таковы, что $\delta\sqrt{\nu}$ не зависит от N. Это и есть закон неправильных дублетов, изложенный в конце параграфа 2 главы III. Эти неправильные дублеты располагаются между спектральными термами, обозначающимися одной и той же буквой с индексами, отличающимися на единицу, причем *первый – нечетный,* в то время как правильные дублеты Зоммерфельда порождаются спектральными термами, обозначающимися той же самой буквой с индексами, отличающимися на единицу, причем *первый – четный*. Таким образом, разность $\nu_{L_{\mathrm{I}}} - \nu_{L_{\mathrm{II}}}$ порождает неправильные дублеты, а разность $\left(\nu_{L_{\mathrm{II}}} - \nu_{L_{\mathrm{III}}}\right)$ – правильные дублеты.

Таким образом, теория Дирака полностью исправила теорию тонкой структуры Зоммерфельда, показав, что ее первоначальный успех не был случайным, а в последнем анализе – что существование правильных дублетов, вследствие учета спина электрона, связано с теорией относительности.

5. Число электронов на уровнях: правило Стонера

Теория Дирака не только позволила восстановить формулы тонкой структуры, улучшив их, но также дала объяснение правила Стонера, касающегося распределения электронов по уровням атома, и доказательство правил отбора для квантовых чисел l, m и j.

Займемся сначала первым вопросом и вспомним, что правило Стонера гласит:

«На уровне энергии, соответствующем квантовым числам n, l, j, не может быть больше $2j + 1$ электронов».

Мы попытаемся доказать это положение.

Выше (параграф 2) мы уже видели, что как для решений типа (I), так и для решений типа (II) существует $2j + 1$ уровней, соответствующих совокупности квантовых чисел (n, l, j). Иначе говоря, так как каждый уровень вполне определяется четырьмя квантовыми числами n, l, j, m, существует $2j + 1$ возможных значений m, а следовательно, $2j + 1$ возможных уровней для данных значений трех чисел n, l, $j = l \pm 1/2$. Напомнив это, заметим, что для дальнейшего продвижения нам нужно обратиться к новому принципу, который играет основную роль в современной физике, – принципу исключения Паули.

Мы сформулируем здесь принцип исключения Паули следующим образом: «Не может быть двух внутриатомных электронов, стационарное состояние которых характеризовалось бы теми же самыми четырьмя квантовыми числами n, l, j, m».

Как мы уже видели, в атоме при отсутствии внешнего поля энергия стационарного состояния не зависит от числа m. Таким образом, каждый уровень энергии вполне характеризуется тремя квантовыми числами n, l, j, как это показали опытные данные, имевшиеся еще до создания теории (см. первую часть). Таким образом, если принять принцип Паули, то число электронов, принадлежащих тому же самому уровню (n, l, j), равно числу стационарных решений, характеризуемых четырьмя квантовыми числами n, l, j, m, из которых три первых имеют значения, определяющие рассматриваемый уровень. Мы знаем, что это число решений есть $2j + 1$. Таким образом, мы доказали правило Стонера, экспериментальное подтверждение которого не вызывает сомнений.

6. Правила отбора в теории Дирака

В параграфе 4 главы VIII мы уже объяснили, как принцип соответствия в волновой механике приводит к предсказанию правил отбора. В теории Дирака этот вывод получается тем же самым способом, но с учетом того, что выражение $\Psi\Psi^*$ волновой механики с одной волновой функцией здесь заменяется на

$$\sum_{k=1}^{4}\Psi_k^*\Psi_k.$$

Таким образом, мы должны рассматривать в качестве матричных элементов матрицы X, которые используются для вычисления вероятности переходов из одного состояния в другое, сопровождающихся излучением, следующие величины:

$$X_{nm}=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}x\left(\Psi_{1,n}^*\Psi_{1,m}+\Psi_{2,n}^*\Psi_{2,m}+\Psi_{3,n}^*\Psi_{3,m}+\Psi_{4,n}^*\Psi_{4,m}\right)d\tau, \tag{47}$$

где индексы n и m характеризуют два стационарных состояния и каждый в действительности представляет собой совокупность четырех индексов n, l, j, m. Если элементы X_{nm}, Y_{nm}, Z_{nm} равны нулю, то нет и излучения, соответствующего переходу $n\to m$. Отсюда и выводятся правила отбора.

Как пример рассмотрим переход из стационарного состояния типа (I) с квантовыми числами $n,\ l,\ j=l+1/2,\ m$ в стационарное состояние типа (II) с квантовыми числами $n,\ l-1,\ j=l-3/2,\ m$; переход, для которого мы имеем $|\delta l|=1$, $\delta m=0$ и $|\delta j|=2$. Первое из этих состояний имеет волновые функции:

$$\Psi_3=iF_+(r)Y_{l+1}^m;\quad \Psi_4=iF_+(r)Y_{l+1}^{m+1};$$
$$\Psi_1=(l+m+1)G_+(r)Y_l^m;\quad \Psi_2=(-l+m)G_+(r)Y_l^{m+1},$$

а второе:

$$\Psi_3=i(l+m)F_-(r)Y_{l-1}^m;$$
$$\Psi_4=-i(l-m-1)F_-(r)Y_{l-1}^{m+1};$$
$$\Psi_1=G_-(r)Y_l^m;\quad \Psi_2=G_-(r)Y_l^{m+1}.$$

Теперь мы запишем выражение для матричного элемента матрицы Z, соответствующего этому переходу, полагая для простоты

$$A=\int\limits_0^{+\infty}F_+(r)F_-(r)r^3\,dr;\quad B=\int\limits_0^{+\infty}G_+(r)G_-(r)r^3\,dr. \tag{48}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}Z_{nm}&=A(l+m-1)\iint\cos\theta\cdot Y_{l-2}^{m^*}Y_{l+1}^{m}d\Omega+A(-l+m+2)\iint\cos\theta\cdot Y_{l-2}^{m+1^*}Y_{l+1}^{m+1}d\Omega+\\&+B(l+m+1)\iint\cos\theta\cdot Y_{l-1}^{m^*}Y_l^m d\Omega-B(l-m)\iint\cos\theta\cdot Y_{l-1}^{m+1^*}Y_l^{m+1}d\Omega,\end{aligned} \tag{49}$$

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, причем двойные интегралы распространяются по поверхности шара единичного радиуса. Исходя из определения функций Y, можно доказать следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&\iint \cos\theta \cdot Y_{l-2}^{m^*} Y_{l+1}^{m} d\Omega = 0;\\
&\iint \cos\theta \cdot Y_{l-1}^{m^*} Y_{l}^{m} d\Omega = \frac{4\pi}{(2l+1)(2l-1)}(l+m)!(l-m)!;\\
&\iint \cos\theta \cdot Y_{l-2}^{m+1^*} Y_{l+1}^{m+1} d\Omega = 0;\\
&\iint \cos\theta \cdot Y_{l-1}^{m+1^*} Y_{l}^{m+1} d\Omega = \frac{4\pi}{(2l+1)(2l-1)}(l+m+1)!(l-m-1)!.
\end{aligned} \tag{50}$$

Подставляя (50) в (49), находим:

$$\begin{aligned}
Z_{nm} = B\frac{4\pi}{(2l+1)(2l-1)}\Big[&(l+m+1)(l+m)!(l-m)! -\\
&-(l-m)(l-m-1)!(l+m+1)!\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{51}$$

Точно таким же образом мы найдем $X_{nm} = Y_{nm} = 0$. Таким образом, рассматриваемый переход запрещен.

Мы можем произвести вновь вычисления того же рода, выбирая все комбинации решения типа (I) с решением того же типа или типа (II), затем все комбинации решения типа (II) с решением того же типа или типа (I). Результат этих вычислений оказывается следующим:

«Излучению соответствуют только такие переходы, для которых:

$$\delta l = \pm 1, \quad \delta m = \begin{cases} \pm 1 \\ 0 \end{cases}, \quad \delta j = \begin{cases} \pm 1 \\ 0 \end{cases}».$$

Эти правила отбора – в точности те же самые, какие были найдены эмпирическим путем. Правила, относящиеся к квантовым числам l и m, были предсказаны волновой механикой с одной волновой функцией, а правило, относящееся к квантовому числу j, могло быть предсказано только теорией, которая вводит это квантовое число, в данном случае теорией Дирака.

ГЛАВА XVIII. Вывод формулы Ланде

1. Общий обзор теории возмущений

В этой главе мы предполагаем показать, что теория Дирака позволяет обосновать формулу Ланде для аномального эффекта Зеемана у щелочных металлов в слабом магнитном поле. Так как для достижения этого мы вынуждены пользоваться теорией возмущений, скажем сначала несколько слов об этом методе вычислений.

Предположим, что мы определили стационарные состояния системы, например атома водорода. Таким образом, мы знаем собственные значения W_n энергии и соответствующие собственные функции $\Psi_{k,n}$, причем k всегда обозначает индекс Дирака, т. е. переменную «спина». Таким образом, символическое уравнение

$$\left[-\frac{W_n + eV}{c} + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j P_j + \alpha_4 m_0 c\right]\Psi_n = 0 \tag{1}$$

удовлетворяется в том случае, если система не возмущена.

Допустим теперь, что квантовая система подвергается слабому постоянному во времени возмущающему действию, которое может быть задано путем добавления некоторого члена $\Lambda\Psi$ к уравнению (1) (Λ есть оператор, который может содержать α_j, а следовательно, действовать на индекс k). Вследствие присутствия небольшого возмущающего члена собственные значения и собственные функции слегка изменятся и станут равными $W_n + \varepsilon_n$ и $\Psi_{k,n} + \eta_{k,n}$.

Будем считать, что ε_n и $\eta_{k,n}$ очень малы, как и возмущающий член $\Lambda\Psi$, и мы пренебрежем такими членами, как $\varepsilon_n \eta_{k,n}$ и $\Lambda\eta_{k,n}$. В возмущенном состоянии символическое уравнение представляется в виде

$$\left[-\frac{W_n + \varepsilon_n + eV}{c} + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j P_j + \alpha_4 m_0 c + \Lambda\right](\Psi_n + \eta_n) = 0. \tag{2}$$

Вычтем (1) из (2) и в рамках принятых приближений находим:

$$\left(-\frac{\varepsilon_n}{c} + \Lambda\right)\Psi_n + \left[-\frac{W_n + eV}{c} + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j P_j + \alpha_4 m_0 c\right]\eta_n = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь четыре функции $\eta_{k,n}$. Из формулы (5) главы XVI вытекает, что мы можем разложить эти функции по полной системе функций Ψ_m согласно формулам:

$$\eta_{k,n} = \sum_m c_{n,m} \Psi_{k,m}, \quad (k = 1, 2, 3, 4), \tag{4}$$

или символически:

$$\eta_n = \sum_m c_{n,m} \Psi_m. \tag{5}$$

Итак, принимая во внимание уравнение, получаемое при замене n на m в (1), имеем:

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{W_n + eV}{c} + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j P_j + \alpha_4 m_0 c\right)\eta = \\ &= \sum_m c_{n,m}\left[-\frac{W_n + eV}{c} + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j P_j + \alpha_j m_0 c\right]\Psi_m = -\sum_m c_{n,m}\frac{W_n - W_m}{c}\Psi_m,\end{aligned} \tag{6}$$

и, следовательно, согласно (3):

$$\sum_m c_{n,m}\frac{W_n - W_m}{c}\Psi_m = \left(-\frac{\varepsilon_n}{c} + \Lambda\right)\Psi_n, \tag{7}$$

или явно:

$$\sum_m c_{n,m}\frac{W_n - W_m}{c}\Psi_{k,m} = \left(-\frac{\varepsilon_n}{c} + \Lambda\right)\Psi_{k,n}. \tag{8}$$

Умножим (8) на $\Psi^*_{k,l}$, просуммируем по индексу k и проинтегрируем по пространству. Мы получаем:

$$\sum_m c_{n,m}\frac{W_n - W_m}{c}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_k \Psi^*_{k,l}\Psi_{k,m}\,d\tau = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_k \Psi^*_{k,l}\left(-\frac{\varepsilon_n}{c} + \Lambda\right)\Psi_{k,n}\,d\tau, \tag{9}$$

откуда, принимая во внимание ортогональность и нормировку собственных функций, выводим:

$$c_{n,l} = \frac{c}{W_n - W_l}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_k \Psi^*_{k,l}\left(-\frac{\varepsilon_n}{c} + \Lambda\right)\Psi_{k,n}\,d\tau. \tag{10}$$

Эта формула дает нам $c_{n,l}$ для всех значений l.

Однако формула (10) дала бы нам для $l = n$ бесконечный коэффициент $c_{n,n}$, если бы интеграл, который фигурирует в (10), для $l = n$ отличался от нуля. Так как это неприемлемо, мы видим, что должно быть:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_k \Psi^*_{k,n}\left(-\frac{\varepsilon_n}{c} + \Lambda\right)\Psi_{k,n}\,d\tau = 0. \tag{11}$$

Это условие (11), которое выражает хорошо известную теорему Фредгольма в теории интегральных уравнений, позволяет получить изменение ε_n энергии n-го стационарного состояния, обусловленное наличием возмущения. Действительно, из (11) мы выводим:

$$\frac{\varepsilon_n}{c} = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_k \Psi^*_{k,n}\Lambda\Psi_{k,n}\,d\tau, \tag{12}$$

так как $\Psi_{k,n}$ нормированы.

Нужно заметить, что формула (10) приемлема только в том случае, если она приводит к малым значениям $c_{n,l}$; без этого предположение о малости η_n, на которое мы опираемся, не было бы верным. Рассматривая этот момент, видим, что формула (12) точна только в том случае, если возможно, как это мы неявно предполагали, считать возмущение каждого собственного значения независимым от возмущений, испытываемых другими собственными значениями. Для этого внешнее возмущение должно быть достаточно слабым, чтобы смещение собственных значений, вызванное возмущением, было малым по сравнению с разностью этих собственных значений: именно это имеет место в эффекте Зеемана, когда магнитное поле слабое. Если это условие не выполнено (например, в случае эффекта Зеемана в сильном магнитном поле), то вычисления по методу теории возмущений нужно производить несколько иным путем; об этом мы здесь говорить не будем.

2. Применение формулы (12) в случае эффекта Зеемана

В главе IV мы видели, как формула Ланде позволяет представить изменение уровня энергии в атоме с дублетным спектром (щелочные металлы) под влиянием слабого магнитного поля. Если $W_0(n,l,j)$ есть энергия уровня в отсутствие магнитного поля, а $W_H(n,l,j)$ та же энергия в присутствии поля H, то имеем:

$$W_H\left(n,l,j\right) = W_0\left(n,l,j\right) + m'g\,\frac{ehH}{4\pi m_0 c}, \tag{13}$$

где

$$g = \frac{j+1/2}{l+1/2} = \frac{2j+1}{2l+1}. \tag{14}$$

Здесь m' – полуцелое число (т.е. целое плюс $1/2$), положительное или отрицательное, принимающее все полуцелые значения от $-j$ до $+j$. Мы изменили обозначения главы IV, записав m' вместо m, чтобы отличать полуцелое число m' формулы (13) от четвертого квантового числа m, характеризующего стационарное состояние атома и являющегося целым. Мы увидим, что числа m' и m связаны соотношением $m' = -(m+1/2)$. Уточним этот момент: в формуле (13) мы задаем уровень энергии тремя квантовыми числами n, l, j, и этого достаточно, поскольку значение энергии не зависит от четвертого квантового числа m; но смещение уровня при эффекте Зеемана зависит от m([1]), и явно мы можем записать (13) в виде

$$W_H\left(n,l,j,m\right) = W_0\left(n,l,j\right) - \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{2j+1}{2l+1}\frac{ehH}{4\pi m_0 c}. \tag{15}$$

[1] Можно сказать, что присутствие магнитного поля снимает вырождение, которое существовало в его отсутствие.

Именно к этой формуле приводит нас теория Дирака.

Рассмотрим атом, в котором находится только один электрон: это строго выполняется для водородного атома и для атома с атомным номером N, ионизированного (N–1)-кратно. Приближенно это справедливо для щелочного атома, в котором только один валентный электрон и присутствие других периферических электронов грубо можно учесть посредством эффекта экранирования.

Предположим, что этот атом помещен в однородное магнитное поле H, направленное по оси z. Тогда мы можем взять в качестве вектор-потенциала следующие функции:

$$A_x = -\frac{1}{2}yH; \quad A_y = \frac{1}{2}xH; \quad A_z = 0. \tag{16}$$

Следовательно, возмущающий член в уравнении (2) имеет вид

$$\Lambda\Psi = \frac{e}{c}\left(\alpha_1 A_x + \alpha_2 A_y + \alpha_3 A_z\right)\Psi = \frac{eH}{2c}\left(x\alpha_2 - y\alpha_1\right)\Psi. \tag{17}$$

Подставляя хорошо известные нам матрицы α_1 и α_2, находим:

$$\begin{aligned} \Lambda\Psi_1 &= i\left(-x + iy\right)\frac{eH}{2c}\Psi_4; \quad \Lambda\Psi_2 = i\left(x + iy\right)\frac{eH}{2c}\Psi_3, \\ \Lambda\Psi_3 &= i\left(-x + iy\right)\frac{eH}{2c}\Psi_2; \quad \Lambda\Psi_4 = i\left(x + iy\right)\frac{eH}{2c}\Psi_1. \end{aligned} \tag{18}$$

Тогда применение формулы (12) дает нам выражение для смещения уровня при эффекте Зеемана в слабом магнитном поле:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} = \frac{W_H\left(n,l,j,m\right) - W_0\left(n,l,j\right)}{c} &= \frac{eH}{2c}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\Big[-\Psi_1^* i\left(x - iy\right)\Psi_4 + \\ +\Psi_2^* i\left(x + iy\right)\Psi_3 - \Psi_3^* i\left(x - iy\right)\Psi_2 &+ \Psi_4^* i\left(x + iy\right)\Psi_1\Big]d\tau. \end{aligned} \tag{19}$$

Вся задача заключается теперь в вычислении интеграла, который фигурирует в (19).

3. Выполнение расчетов

При вычислениях мы должны различать два случая: когда стационарное состояние с энергией $W_0(n, l, j)$ принадлежит к типу (I) либо к типу (II).

а) *Решение типа (I).*

В этом случае мы имеем:

$$\begin{aligned} &\Psi_3 = iF_+\left(r\right)Y_{l+1}^{m}; \quad \Psi_4 = iF_+\left(r\right)Y_{l+1}^{m+1}; \\ &\Psi_1 = \left(l + m + 1\right)G_+\left(r\right)Y_l^m; \quad \Psi_2 = \left(-l + m\right)G_+\left(r\right)Y_l^{m+1}, \end{aligned} \tag{20}$$

где F_+ и G_+ суть действительные функции от r, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W_0+eV}{c}+m_0c\right]F_+ + \frac{dG_+}{dr} - \frac{l}{r}G_+ = 0,\\
&-\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W_0+eV}{c}-m_0c\right]G_+ + \frac{dF_+}{dr} + \frac{l+2}{r}F_+ = 0.
\end{aligned}\tag{21}$$

Так как в атоме ньютоновское приближение всегда справедливо с достаточной точностью, то функции Ψ_3 и Ψ_4 очень малы по сравнению с Ψ_1 и Ψ_2; следовательно, отношение F_+/G_+ очень мало. Более полное вычисление показывает, что это отношение имеет порядок постоянной тонкой структуры α. Мы будем опираться на этот факт, чтобы пренебречь квадратом $(F_+/G_+)^2$, что приводит к значительным упрощениям.

Умножая первое уравнение (21) на G_+, а второе на F_+ и складывая их, получаем

$$\frac{4\pi m_0 c}{h}F_+G_+ + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left[F_+^2 + G_+^2\right] + \frac{l+2}{r}F_+^2 - \frac{l}{r}G_+^2 = 0. \tag{22}$$

Пренебрегая членами с F_+^2, умножаем (22) на r^3dr и интегрируем от 0 до $+\infty$. Получаем:

$$\int_0^\infty F_+G_+r^3dr = -\frac{h}{4\pi m_0 c}\int_0^\infty\left[\frac{r^3}{2}\frac{dG_+^2}{dr} - lG_+^2r^2\right]dr. \tag{23}$$

Интегрируя по частям и учитывая, что G_+^2 равно нулю на бесконечности, находим:

$$\int_0^\infty F_+G_+r^3dr = \frac{h}{4\pi m_0 c}\left(l+\frac{3}{2}\right)\int_0^\infty G_+^2r^2dr. \tag{24}$$

Используя эти формулы, мы можем приступить к вычислению интеграла, который фигурирует в правой части (19). В полярных координатах имеем:

$$x+iy = r\sin\theta\cdot e^{i\varphi};\quad x-iy = r\sin\theta\cdot e^{-i\varphi};\quad d\tau = r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi. \tag{25}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\iiint_{-\infty}^{+\infty}\left[-\Psi_1^* i(x-iy)\Psi_4 + \Psi_2^* i(x+iy)\Psi_3 - \Psi_3^* i(x-iy)\Psi_2 + \Psi_4^* i(x+iy)\Psi_1\right]dr =\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[Y_{l+1}^{m^*}(l-m)Y^{m+1}e^{-i\varphi} + Y_{l+1}^{m+1^*}(l+m+1)Y_l^m e^{+i\varphi} +\\
&+(l+m+1)Y_l^{m^*}Y_{l+1}^{m+1}e^{-i\varphi} + (l-m)Y_l^{m+1^*}Y_{l+1}^m e^{+i\varphi}\Big]\times\\
&\times\sin^2\theta d\theta d\varphi\int_0^{+\infty}F_+G_+r^3dr.
\end{aligned}\tag{26}$$

Из теории функций Y известны интегралы

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l+1}^{m^*} Y_l^{m+1} \mathrm{e}^{-i\varphi} \sin^2\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{(2l+1)(2l+3)}(l+m+1)!(l-m+1)!,\\
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l+1}^{m+1^*} Y_l^{m} \mathrm{e}^{+i\varphi} \sin^2\theta d\theta d\varphi = -\frac{4\pi}{(2l+1)(2l+3)}(l-m)!(l+m+2)!,\\
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l}^{m^*} Y_{l+1}^{m+1} \mathrm{e}^{-i\varphi} \sin^2\theta d\theta d\varphi = -\frac{4\pi}{(2l+1)(2l+3)}(l-m)!(l+m+2)!,\\
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l}^{m+1^*} Y_{l+1}^{m} \mathrm{e}^{+i\varphi} \sin^2\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{(2l+1)(2l+3)}(l+m+1)!(l-m+1)!.
\end{aligned} \tag{27}$$

Итак, для интеграла (26) мы находим значение

$$\begin{aligned}
&2\frac{4\pi}{(2l+1)(2l+3)}(l-m)!(l+m+1)!\times\\
&\times\big[(l-m)(l-m+1)-(l+m+1)(l+m+2)\big]\int_0^{+\infty} F_+ G_+ r^3 dr =\\
&= \frac{4\pi}{2l+1}(l-m)!(l+m+1)!\big[(l-m)(l-m+1)-(l+m+1)(l+m+2)\big]\times\\
&\times\frac{h}{4\pi m_0 c}\int_0^{+\infty} G_+^2 r^2 dr,
\end{aligned} \tag{28}$$

причем последняя формула получается с учетом выражения (24).

Так как легко проверить следующее тождество:

$$(l-m)(l-m+1)-(l+m+1)(l+m+2) = -(2l+2)(2m+1), \tag{29}$$

то можно записать выражение (28) в виде

$$-4\pi\frac{2l+2}{2l+1}(2m+1)(l-m)!(l+m+1)!\frac{h}{4\pi m_0 c}\int_0^{+\infty} G_+^2 r^2 dr. \tag{30}$$

Чтобы идти дальше, мы должны применить условие нормировки, которое здесь дает, если пренебречь членами с F_+^2 по сравнению с членами, содержащими G_+^2:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[(l+m+1)^2 Y_l^{m^*} Y_l^m + (l-m)^2 Y_l^{m-1^*} Y_l^{m-1}\right]\sin\theta d\theta d\varphi \int_0^{+\infty} G_+^2 r^2 dr = 1. \tag{31}$$

Мы имеем, согласно определению функций Y:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|Y_l^m|^2\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{4\pi}{2l+1}(l+m)!(l-m)!,\\&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|Y_l^{m-1}|^2\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{4\pi}{2l+1}(l+m-1)!(l-m+1)!.\end{aligned}\tag{32}$$

Таким образом, условие (31) дает нам

$$\int_0^{+\infty}G_+^2r^2dr=\frac{1}{4\pi(l-m)!(l+m+1)!}.\tag{33}$$

Вводя это значение в выражение (30), мы видим в конце концов, что интеграл, который требуется вычислить в формуле (19), просто имеет значение

$$-\frac{2l+2}{2l+1}(2m+1)\frac{h}{4\pi m_0c}.\tag{34}$$

Следовательно, формула (19) дает нам для смещения уровня при эффекте Зеемана выражение

$$W_H(n,l,j,m)=W_0(n,l,j)-\frac{eH}{2}\frac{2l+2}{2l+1}(2m+1)\frac{h}{4\pi m_0c}.\tag{35}$$

Теперь положим:

$$m'=-(m+1/2);\quad g=\frac{l+1}{l+1/2}=\frac{j+1/2}{l+1/2},\tag{36}$$

вспоминая, что здесь $j = l + 1/2$. Мы можем написать:

$$W_H(n,l,j,m)=W_0(n,l,j)+m'g\,\frac{ehH}{4\pi m_0c}.\tag{37}$$

Если теперь мы предположим, что даны только три квантовых числа *n, l, j,* то будем иметь:

$$W_H(n,l,j)=W_0(n,l,j)+m'g\,\frac{ehH}{4\pi m_0c},\tag{38}$$

причем здесь m' – полуцелое число, которое может изменяться от $-(m_{\min}+1/2)$ до $-(m_{\max}+1/2)$. Однако при выяснении числа уровней, соответствующих трем квантовым числам (n, l, j), мы видели, что для решения типа (I) можно изменять m в пределах от $-l-1$ до l. Таким образом, число m' при данных (n, l, j) может изменяться от

$$-(-l-1/2)=l+1/2=j\quad\text{до}\quad-(l+1/2)=-j.$$

Короче говоря, для уровней, соответствующих решениям типа (I), мы имеем формулу (38), где m' есть полуцелое число, которое может изменяться от $-j$ до $+j$. Это и есть формула Ланде.

б) *Решение типа (II).*

Чтобы произвести вычисления в случае решения типа (II), мы исходим из волновых функций:

$$\begin{aligned}&\Psi_3 = i(l+m)F_- Y_{l-1}^{m}; \quad \Psi_4 = i(-l+m+1)F_- Y_{l-1}^{m+1};\\ &\Psi_1 = G_- Y_l^{m}; \quad \Psi_2 = G_- Y_l^{m+1},\end{aligned} \tag{39}$$

причем F_- и G_- суть действительные функции, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W+eV}{c}+m_0c\right]F_- + \frac{dG_-}{dr} + \frac{l+1}{r}G_- = 0,\\ &-\frac{2\pi}{h}\left[\frac{W+eV}{c}-m_0c\right]G_- + \frac{dF_-}{dr} - \frac{l-1}{r}F_- = 0.\end{aligned} \tag{40}$$

Путем вычислений, аналогичных приведенным выше, мы приходим к формуле

$$W_H(n,l,j,m) = W_0(n,l,j) - \frac{2l}{2l+1}(2m+1)\frac{eH}{2}\frac{h}{4\pi m_0 c}. \tag{41}$$

Так как для решений (II) мы имеем $j = l - 1/2$, здесь мы положим:

$$m' = -(m+1/2); \quad g = \frac{l}{l+1/2} = \frac{j+1/2}{l+1/2}, \tag{42}$$

и сможем записать (41) в виде

$$W_H(n,l,j,m) = W_0(n,l,j) + m'g\,\frac{ehH}{4\pi m_0 c}. \tag{43}$$

Предположим теперь, что нам даны только три квантовых числа n, l, j; тогда мы запишем

$$W_H(n,l,j) = W_0(n,l,j) + m'g\,\frac{ehH}{4\pi m_0 c}, \tag{44}$$

где m' – полуцелое число, которое изменяется в пределах от $-(m_{\min} + 1/2)$ до $-(m_{\max} + 1/2)$. Так как здесь (как мы это видели) m может изменяться от $-l$ до $l-1$, то число m' может изменяться от $-[-l+1/2] = l - 1/2$ до $-(l-1/2)$, т.е. от $-j$ до $+j$.

4. Резюме. Замечания

Таким образом, мы показали, что для всех уровней, как типа (II), так и типа (I), смещение уровня (n, l, j) под влиянием достаточно слабого однородного магнитного поля дается формулой

$$W_H(n,l,j) - W_0(n,l,j) = m'g\,\frac{ehH}{4\pi m_0 c}, \tag{45}$$

где

$$g = \frac{j+1/2}{l+1/2}, \tag{46}$$

причем m' – число, которое может принимать все полуцелые значения между $-j$ и $+j$. В этом и состоит аномальный эффект Зеемана, который в точности описывается формулой Ланде. Ввиду того что число m' принимает $2j + 1$ возможных значений, каждый уровень (n, l, j) расщепляется при эффекте Зеемана на $2j + 1$ отдельных уровней, что можно выразить так: внешнее магнитное поле снимает вырождение порядка $2j+1$, которое существовало при его отсутствии.

Использованный нами вывод в точности справедлив для водородоподобных атомов, но, как мы уже указывали, приближенно – для атомов щелочных металлов.

Мы уже говорили, что формула Ланде верна для слабых магнитных полей. Под этим понимается, что магнитные поля должны быть столь слабы, чтобы смещение уровней энергии при эффекте Зеемана было малым по сравнению с нормальным расстоянием между уровнями. Если это условие не удовлетворяется, то формула (12) уже не верна и приходится производить заново все вычисления. Можно было бы доказать[2], что в таком случае мы придем к формуле, тождественной с формулой Фойгта (см. главу IV, конец параграфа 3), а для очень сильных полей получим эффект Пашена – Бака, т. е. нормальное расщепление Зеемана.

Таким образом, теория Дирака дает вполне удовлетворительное объяснение аномальному эффекту Зеемана для щелочных металлов. Однако для атомов, в которых нельзя рассматривать один оптический электрон, теория Дирака не может строго объяснить эффект Зеемана, так как она еще не в состоянии описать случай системы взаимодействующих электронов.

[2] См.: *Darwin C.G.* Proc. Roy. Soc. A. 1928. **118.** P. 654.

ГЛАВА XIX. Собственный и орбитальный угловые моменты. Поляризация электронных волн

1. Невозможность отделить собственный магнитный момент от орбитального магнитного момента (Бор)

Путем достаточно тонких рассуждений Бор показал, что собственный магнитный момент электрона невозможно измерить, так как эффекты, обусловленные существованием этого собственного момента, невозможно отделить от эффектов, обусловленных переносным движением электрона как целого.

Приведем это рассуждение Бора. Чтобы обнаружить собственный магнетизм электрона, можно поступать двояким способом:

1. Пытаться измерить воздействие небольшого магнита, эквивалентного электрону, на магнитометр.

2. Заставить электрон пересечь неоднородное магнитное поле и попытаться обнаружить действие этого поля на небольшой магнит, эквивалентный электрону.

Рассмотрим первый метод. Взяв направление движения электрона за ось x, мы помещаем магнитометр на оси y в точке с ординатой y. Чтобы иметь возможность точно выявить результат воздействий на магнитометр, мы должны предположить, что электрон достаточно хорошо локализован, т. е. ему можно сопоставить пакет волн Ψ, размеры которого должны быть малыми по сравнению с расстоянием y от магнитометра до оси движения. Например, если Δx есть протяженность этого пакета волн вдоль оси x (неопределенность абсциссы электрона), то должно быть:

$$\Delta x \ll y \tag{1}$$

и также

$$\Delta y \ll y. \tag{1'}$$

В таком случае, проходя вблизи начала координат, электрон будет оказывать на магнитометр двоякого рода действие. Одно из этих действий вызвано магнитным полем (орбитальное поле H_0), создаваемым поступательным движением электрона. Его величина есть

$$H_0 = \frac{ev_x}{cy^2}. \tag{2}$$

Второе действие вызвано собственным магнитным моментом электрона, который создает в области, занятой магнитометром, собственное магнитное поле:

$$H_p = \frac{eh}{4\pi m_0 c} \cdot \frac{1}{y^3}. \tag{3}$$

Однако значение H_0 с абсолютной точностью не известно. Оно известно с неопределенностью

$$\Delta H_0 = \frac{e}{c}\left[\frac{\Delta v_x}{y^2} + \frac{v_x}{y^3}\Delta y\right], \tag{4}$$

поскольку обязательно существует неопределенность Δv_x в определении x-составляющей скорости электрона и неопределенность Δy в определении его ординаты y([1]). Однако, согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга, в ньютоновском приближении имеем:

$$\Delta v_x \geq \frac{h}{m_0 \Delta x}, \quad \Delta v_y \geq \frac{h}{m_0 \Delta y}, \tag{5}$$

а с другой стороны, мы должны всегда предполагать, что

$$\Delta v_y \ll v_x, \tag{6}$$

так как иначе мы не имели бы движения вдоль оси x.

Если теперь мы сравним (3) и (4), то найдем:

$$\frac{|\Delta H_0|}{H_p} = \frac{4\pi m_0}{h}\left(y\Delta v_x + v_x \Delta y\right), \tag{7}$$

откуда согласно (5), (1) и (6) вытекает:

$$\frac{|\Delta H_0|}{H_p} \geq \left(\frac{y}{\Delta x} + \frac{v_x}{\Delta v_y}\right) \gg 1. \tag{8}$$

Таким образом, неопределенность задания орбитального магнитного поля всегда значительно больше, чем величина собственного поля, а следовательно, магнитометр не даст нам возможности измерить собственный магнитный момент электрона.

Повторим такого же рода рассуждения в отношении действия неоднородного магнитного поля на электрон-магнит. Пусть электрон вновь движется вдоль оси x; вообразим магнитное поле, параллельное оси y и обладающее заметным градиентом $\frac{\partial H}{\partial y}$.

Пусть в начале координат магнитное поле имеет значение $H(0)$. Проходя возле начала, электрон подвергается действию электродинамической силы Лоренца, обусловленной орбитальным движением. Эта сила с большой точностью равна

$$f_0 = e\frac{v_x}{c} \cdot H(0). \tag{9}$$

[1] В формуле (4) в скобках должен быть знак «+», так как в наиболее неблагоприятном случае обе неопределенности могут складываться.

С другой стороны, магнит, которому эквивалентен электрон, подвергается действию силы (обусловленной собственным магнитным моментом):

$$f_p = \frac{eh}{4\pi m_0 c}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{10}$$

Но поскольку волновой пакет имеет ширину Δy и, таким образом, ордината электрона задана с этой неопределенностью, для значения f_0 мы имеем неопределенность

$$|\Delta f_0| = \frac{e}{c}\left| v_x \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_0 \Delta y + H(0)\Delta v_x \right|, \tag{11}$$

откуда, сравнивая с (10), найдем:

$$\frac{|\Delta f_0|}{f_p} = \frac{4\pi m_0}{h}\left| v_x \Delta y + \left(\frac{H}{\partial H/\partial y}\right)_0 \Delta v_x \right|. \tag{12}$$

Итак, поскольку соотношения (5) и (6) еще справедливы, мы имеем:

$$\frac{|\Delta f_0|}{f_p} \geq \left| \frac{v_x}{\Delta v_y} + \left(\frac{H}{\partial H/\partial y}\right)_0 \cdot \frac{1}{\Delta x} \right| \gg 1. \tag{13}$$

Таким образом, действие внешнего неоднородного магнитного поля на электрон-магнит совершенно маскируется неопределенностью в задании силы Лоренца, и этот метод также не дает нам возможности измерить собственный магнитный момент.

Следовательно, эти рассуждения, которые, к слову сказать, можно было бы усовершенствовать[2], убедительно доказывают невозможность непосредственного измерения собственного магнитного момента электрона.

2. Невозможность измерить собственный угловой момент

Те же рассуждения, как это, в частности, показал Дарвин, можно распространить и на собственный угловой момент.

Вообразим, например, прямоугольное отверстие со сторонами Δx и Δy, прорезанное в плоском экране (рис. 9).

Пустим на этот экран с левой стороны электрон, сопоставляемый с монохроматической плоской волной. Тогда волновой пакет электрона справа от экрана имеет поперечные размеры соответственно Δx и Δy.

[2] См.: *Дарвин Ч.Г.* Примеры применения принципа неопределенностей (*Darwin C.G.* Proc. Roy. Soc. A. 1931. **130.** P. 637) и доклад Паули на Сольвеевском конгрессе, 1930 (Paris: Gauthier-Villars).

Итак, составляющие по x и y импульса электрона после прохождения экрана обладают неопределенностями:

$$2\pi\left|\Delta p_x\right| \geq \frac{h}{\Delta x}; \quad 2\pi\left|\Delta p_y\right| \geq \frac{h}{\Delta y}. \tag{14}$$

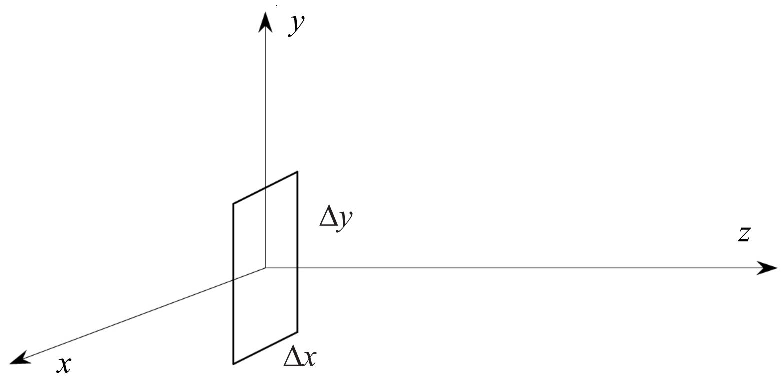

Рис. 9

Таким образом, составляющая по оси z орбитального момента электрона, т. е. углового момента, обусловленного его поступательным движением, равного:

$$M_z = xp_y - yp_x, \tag{15}$$

принимает значения, лежащие между нулем и

$$\Delta M_z = \Delta x\left|\Delta p_y\right| + \Delta y\left|\Delta p_x\right|, \tag{16}$$

откуда согласно (14):

$$2\pi\Delta M_z \geq h\left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = h \cdot \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x \Delta y}. \tag{17}$$

Так как дробь, которая фигурирует в последнем члене (17), больше единицы, то мы отсюда выводим, что тем более

$$\Delta M_z > \frac{h}{4\pi}. \tag{18}$$

Следовательно, неопределенность z-составляющей орбитального углового момента превышает значение собственного углового момента, и это делает иллюзорным измерение последней величины.

Те же самые рассуждения можно применить к составляющим по x и y собственного углового момента.

Эти соображения, по-видимому, показывают, что собственный угловой момент электрона неизмерим экспериментально в той же мере, как его собственный магнитный момент.

3. Более общая теория

Предыдущие соображения можно связать с более общей точкой зрения, как это, в частности, показал Паули[3]. Чтобы это понять, мы вкратце напомним метод приближения, известный как «метод Бриллюэна – Вентцеля».

Суть метода Бриллюэна – Вентцеля[4] в нерелятивистской волновой механике состоит в предположении, что

$$\Psi = e^{\frac{2\pi i}{h}S}, \tag{19}$$

где

$$S = S_0 + \frac{h}{2\pi i}S_1 + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 S_2 + ... + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n S_n + ..., \tag{20}$$

и в определении путем последовательных приближений членов S_0, S_1, ... , которые фигурируют в разложении S по возрастающим степеням величины $\frac{h}{2\pi i}$ с весьма малым модулем. Если в этом разложении ограничиться членами нулевого порядка, т. е. теми, которые останутся, когда считается $h = 0$, мы возвращаемся к геометрической оптике для волн Ψ и к классической механике для соответствующей частицы, ибо в данном случае можно рассматривать группу волн весьма малых размеров, описывающую один из лучей волны, и уподобить ее точечной частице прежней механики, так как волновые лучи и классические траектории совпадают. Однако если принять во внимание члены порядка 1, 2… по $\frac{h}{2\pi i}$ в разложении (20), то мы увидим, что возникают особенности, которые противопоставляют волновую оптику геометрической оптике, а новую механику – прежней.

Тот же самый метод приближения можно применить и в теории Дирака: именно это и сделал Паули. Здесь мы полагаем:

$$\Psi_k = e^{\frac{2\pi i}{h}S_k}, \quad (k = 1, 2, 3, 4), \tag{21}$$

где

$$S_k = S_{0,k} + \frac{h}{2\pi i}S_{1,k} + ... + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n S_{n,k} + ..., \tag{22}$$

и будем находить $S_{i,k}$ путем последовательных приближений. Поступая так, мы увидим, что если сохранить только члены нулевого порядка, то получаем геометрическую оптику, которая соответствует *релятивистской волновой механике без спина,* т. е. прежней механике в эйнштейновской форме. Тогда мы можем вообразить крайне малые цуги волн, описывающие лучи-траектории, которые совпадают с траекториями, предсказываемыми эйнштейновской дина-

[3] Helvetica Physica Acta. Vol. V, fasc. III. P. 179.
[4] См.: *Brillouin L.* Exposés sur la théorie des Quanta. Fasc. 1. Hermann éd.

микой электрона. Эйнштейновская механика рассматривает электрон как простую заряженную частицу и пренебрегает «спином». Таким образом, в приближении нулевого порядка механика Дирака приводит нас к релятивисткой динамике электрона «без спина». Это можно было предвидеть, поскольку собственный магнитный момент электрона и его собственный угловой момент пропорциональны h и исчезают, если пренебречь членами порядка h.

Если, продолжая последовательные приближения, принять во внимание в уравнении (22) члены порядка 1, 2… по $\frac{h}{2\pi i}$, мы увидим, что возникают члены, которые отражают существование магнетизма и собственного вращения электрона, но в то же время, как и в нерелятивистской теории, мы выходим из области применения геометрической оптики, и в результате представления о частице как точке прежней механики перестают быть верными.

Теперь мы понимаем, почему, согласно заключениям Бора, опыт, в котором электрон рассматривается как материальная точка, не может привести к обнаружению собственного магнитного момента или собственного углового момента электрона. Действительно, согласно анализу Паули, было бы противоречивым предположение о том, что прежняя механика точки справедлива и что могут обнаружиться эффекты, характерные для «спина».

4. Поляризация электронных волн

Если кажется невозможным измерить магнитный момент электрона, рассматриваемого как намагниченная частица, ничто не мешает *a priori* обнаружить экспериментальным путем поляризацию электронной волны Ψ, обусловленную существованием этого магнитного момента. Однако поляризация волн Ψ существенно отличается от классической поляризации световых волн. В то время как эта последняя для плоской волны определяется осциллирующим вектором, всегда нормальным к направлению распространения, поляризация волны Ψ Дирака определяется вектором $\vec{I}$ «плотности магнитного момента», и этот вектор в плоской волне, как мы это знаем, является постоянным и ориентированным как угодно по отношению к направлению распространения. В силу этого, в то время как свойства поляризованного светового пучка, исследованные под самыми различными углами вокруг его направления распространения, всегда обнаруживают период π, для пучка волн Ψ Дирака соответствующий период есть 2π.

Для обнаружения поляризации электронных волн можно попытаться испробовать приспособления, аналогичные аппарату Нерремберга в оптике. Возьмем неполяризованный пучок электронов, т.е. пучок, в котором векторы $\vec{I}$, относящиеся к различным электронам, ориентированы случайным образом.

Если этот пучок заставить отражаться от кристаллического тела, то по аналогии с оптикой заключаем, что отраженный пучок мог бы быть частично поляризован. Если этот отраженный пучок заставить падать на второй отражатель, то второе отражение будет происходить с большей или меньшей интенсивностью в зависимости от расположения плоскости падения. Точная теория этого явления представляется достаточно сложной и еще не вполне разработана; здесь мы на ней останавливаться не будем. В общих чертах мы приходим к предсказанию очень слабого эффекта для электронов с энергией в несколько тысяч электронвольт, при этом величина эффекта должна расти вместе с энергией. С экспериментальной точки зрения это явление не представляется уверенно наблюдаемым. Рупп опубликовал фотографии, на которых ясно видно влияние расположения плоскости падения на второе отражение, но эти результаты до сих пор другими исследователями не подтверждены, и вопрос остается открытым[5].

[5] Главные теоретические работы о поляризации электронов принадлежат Мотту (*Mott.* Proc. Roy. Soc. A. 1929. **124.** P. 425; 1932. **135.** P. 429). Подробную библиографию можно найти в работе: *Thibaud, Trillat* et v. *Hirsch.* J. de Phys. Ser. VII. 1932. **33.** P. 314.

ГЛАВА XX. Состояния с отрицательной энергией в теории Дирака

1. Плоская волна с отрицательной энергией

Теперь мы приступаем к обсуждению одной из самых больших трудностей, возникших в связи с теорией Дирака.

Ранее мы изучали вид функций Ψ_k для плоской монохроматической волны в случае отсутствия поля (см. главу XII, параграф 3). С этой целью мы записали уравнение Дирака с потенциалами, равными нулю, и искали решение в виде

$$\Psi_k = a_k \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}\left(Wt - p_x x - p_y y - p_z z\right)}. \tag{1}$$

Таким образом, мы нашли для a_k линейные и однородные уравнения:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{W}{c} + m_0 c\right)a_1 + \left(p_x - ip_y\right)a_4 + p_z a_3 = 0,\\
&\left(-\frac{W}{c} + m_0 c\right)a_2 + \left(p_x + ip_y\right)a_3 - p_z a_4 = 0,\\
&\left(-\frac{W}{c} - m_0 c\right)a_3 + \left(p_x - ip_y\right)a_2 + p_z a_1 = 0,\\
&\left(-\frac{W}{c} - m_0 c\right)a_4 + \left(p_x + ip_y\right)a_1 - p_z a_2 = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Для того чтобы решение не было нулевым, нужно, чтобы детерминант уравнений (2) был равен нулю. Это дало нам условие

$$\frac{W^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \tag{3}$$

которое представляет собой классическое релятивистское соотношение. Тогда, полагая

$$W = +\, c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \tag{4}$$

мы нашли решение:

$$\begin{aligned}
&a_3 = \frac{p_z A + \left(p_x - ip_y\right)B}{W/c + m_0 c}; \quad a_4 = \frac{\left(p_x + ip_y\right)A - p_z B}{W/c + m_0 c},\\
&a_1 = A; \quad a_2 = B,
\end{aligned} \tag{5}$$

где A и B – произвольные комплексные константы.

Однако мы могли бы точно так же удовлетворить условию (3), полагая

$$W = -\, c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}. \tag{6}$$

Тогда мы нашли бы следующее решение:

$$
\begin{gathered}
a_3 = C; \quad a_4 = D, \\
a_1 = -\frac{p_z C + (p_x - ip_y)D}{m_0 c - W/c}; \quad a_2 = -\frac{(p_x + ip_y)C - p_z D}{m_0 c - W/c},
\end{gathered} \tag{7}
$$

где C и D – две произвольные комплексные константы.

Теперь мы слегка изменим обозначения, которые до сих пор употребляли. Для данных значений p_x, p_y и p_z впредь мы будем определять W по формуле (4) со знаком «+», а чтобы учесть решение (7), мы будем рассматривать одновременно волну с энергией $-W$ и волну с энергией $+W$. При этом новом соглашении в уравнениях (7) нужно W заменить на $-W$.

Короче говоря, для данных значений p_x, p_y и p_z при величине W, определенной соотношением (4), мы будем рассматривать плоскую монохроматическую волну с положительной энергией $+W$, задаваемую формулами

$$
\Psi_k = a_k \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)}, \tag{8}
$$

где

$$
\begin{gathered}
a_3 = \frac{p_z A + (p_x - ip_y)B}{W/c + m_0 c}; \quad a_4 = \frac{(p_x + ip_y)A - p_z B}{W/c + m_0 c}, \\
a_1 = A; \quad a_2 = B,
\end{gathered} \tag{9}
$$

и плоскую монохроматическую волну с отрицательной энергией $-W$, задаваемую формулами

$$
\Psi_k = b_k \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}(Wt + p_x x + p_y y + p_z z)}, \tag{10}
$$

где

$$
\begin{gathered}
b_3 = C; \quad b_4 = D, \\
b_1 = -\frac{p_z C + (p_x - ip_y)D}{m_0 c + W/c}; \quad b_2 = -\frac{(p_x + ip_y)C - p_z D}{m_0 c + W/c},
\end{gathered} \tag{11}
$$

Проанализируем обе эти волны.

Для волны с положительной энергией, как мы уже знаем, составляющие Ψ_1 и Ψ_2, которые соответствуют в некотором роде собственной положительной массе $+m_0$, преобладают над волнами Ψ_3 и Ψ_4, которые соответствуют отрицательной собственной массе $-m_0$. Эти волны Ψ_3 и Ψ_4, равные нулю, если скорость равна нулю, существенны только для скоростей, достаточно близких к скорости света. Только в предельном случае $v = c$ мы будем иметь:

$$
|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = |\Psi_3|^2 + |\Psi_4|^2.
$$

Иначе говоря, всегда верно соотношение

$$\Omega_1 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 - |\Psi_3|^2 - |\Psi_4|^2 \geq 0, \tag{12}$$

где знак равенства относится к предельному случаю $v = c$.

Для волны с отрицательной энергией заключения совершенно противоположны. Здесь преобладают волны Ψ_3 и Ψ_4. Если электрон находится в состоянии покоя, т. е. если p_x, p_y и p_z равны нулю, то

$$\Psi_3 = C\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}m_0c^2t}; \quad \Psi_4 = D\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}m_0c^2t}; \quad \Psi_1 = \Psi_2 = 0. \tag{13}$$

С ростом скорости волны Ψ_1 и Ψ_2 приобретают некоторое значение, и только в предельном случае $v = c$ мы будем иметь равенство между $|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$ и $|\Psi_3|^2 + |\Psi_4|^2$.

Таким образом,

$$\Omega_1 \leq 0, \tag{14}$$

где знак равенства относится к предельному случаю $v = c$. Здесь в некотором роде преобладают волны, соответствующие отрицательной собственной массе.

Существование состояний с отрицательной энергией в теории Дирака представляет большую трудность для этой теории, так как электрон, который оказался бы в таком состоянии, обладал бы странными свойствами, которые никогда не наблюдались. Так, электрон, помещенный в электрическое поле $\vec{h}$, ускорялся бы в направлении, противоположном направлению силы $-e\vec{h}$; отнимая у него энергию, мы увеличивали бы его скорость; его скорость по направлению была бы противоположна импульсу[1] и т. д.

Таким образом, теория Дирака, кажется, должна была бы избавиться от состояний с отрицательной энергией, так как они представляются не соответствующими действительности. Однако по причинам, которые мы сейчас изложим, это оказалось нелегким делом.

2. Неполнота системы волн с положительной энергией

Вновь обратимся к некоторым особенностям нерелятивистской волновой механики. В нерелятивистской волновой механике волновое уравнение

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(\Psi) \tag{15}$$

имеет первый порядок по времени. Следовательно, решение этого уравнения целиком определяется, если известен его вид в начальный момент времени $\Psi(x, y, z, 0)$.

[1] В соответствии с соотношением $v = \partial W / \partial p$, выражающим равенство скорости частицы и групповой скорости связанных с ней волн (см. *L. de Broglie.* Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire. Paris: Hermann, 1930. P. 75).

Рассмотрим случай отсутствия внешнего поля. Тогда уравнение (15) принимает вид

$$\Delta\Psi = -\frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{16}$$

и допускает в качестве решения плоскую монохроматическую волну:

$$\Psi(x,y,z,t) = a\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Et - p_x x - p_y y - p_z z)}, \tag{17}$$

где (без неопределенности знака):

$$E = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right]. \tag{18}$$

Предположим, что мы задаемся первоначальной формой волновой функции:

$$\Psi(x,y,z,0) = F(x,y,z). \tag{19}$$

Примем далее, что $F(x, y, z)$ разложима в интеграл Фурье вида

$$F(x,y,z) = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(p_x, p_y, p_z)\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}(p_x x + p_y y + p_z z)}dp_x dp_y dp_z. \tag{20}$$

Коэффициенты этого разложения можно вычислить, исходя из данной функции F, по формуле

$$g(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{h^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x,y,z)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(p_x x + p_y y + p_z z)}dxdydz. \tag{21}$$

Тогда я утверждаю, что решение имеет вид

$$\Psi(x,y,z,t) = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(p_x, p_y, p_z)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}(Et - p_x x - p_y y - p_z z)}dp_x dp_y dp_z. \tag{22}$$

Это совершенно очевидно, поскольку:

1) функция Ψ есть решение уравнения (16), так как она является суммой плосковолновых монохроматических решений этого уравнения;

2) для $t = 0$ мы имеем $\Psi(x,y,z,0) = F(x,y,z)$.

Отсюда мы выводим следующую теорему: «В нерелятивистской волновой механике свободной материальной точки плоские монохроматические волны составляют «полную» систему, т. е. можно представить любое решение в виде суперпозиции таких волн».

Перейдем теперь к теории Дирака и попытаемся перенести в нее эти рассуждения. Здесь для четырех функций Ψ_k мы имеем систему из четырех уравнений первого порядка. Таким образом, эти четыре волновые функции целиком определяются, если задаться первоначальными формами $\Psi_k(x,y,z,0)$.

Опять ограничимся случаем поля, равного нулю, и при этом зададимся вопросом, возможно ли представить произвольное решение в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. Любое решение целиком определяется четырьмя функциями:

$$\Psi_k\left(x,y,z,0\right)=F_k\left(x,y,z\right),\quad (k=1,2,3,4). \tag{23}$$

Допустим, что F_k – произвольно заданные функции, разлагающиеся по теореме Фурье в интеграл вида

$$F_k\left(x,y,z\right)=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} g_k\left(p_x,p_y,p_z\right)\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}\left(p_x x+p_y y+p_z z\right)}dp_x\,dp_y\,dp_z, \tag{24}$$

причем g_k даются формулой

$$g_k\left(p_x,p_y,p_z\right)=\frac{1}{h^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} F_k\left(x,y,z\right)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}\left(p_x x+p_y y+p_z z\right)}dxdydz. \tag{25}$$

Попытаемся представить решение, которое соответствует заданным первоначальным Ψ_k, в виде суперпозиции плоских монохроматических волн, содержащей только волны с положительной энергией. Для этого мы положим

$$\Psi_k\left(x,y,z,t\right)=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} a_k\left(p_x,p_y,p_z\right)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}\left(Wt-p_x x-p_y y-p_z z\right)}dp_x\,dp_y\,dp_z, \tag{26}$$

причем W определяется соотношением (4). Эти функции (26) в самом деле определили бы решение волнового уравнения, но для того, чтобы они приняли в начальный момент значения $F_k(x, y, z)$, следовало бы иметь:

$$a_k\left(p_x,p_y,p_z\right)=g_k\left(p_x,p_y,p_z\right),\quad (k=1,2,3,4), \tag{27}$$

с известными g_k. Однако мы знаем, что из четырех функций $a_k(p_x, p_y, p_z)$ произвольно можно выбирать только две, а это показывает нам, что в общем случае нельзя удовлетворить условиям (27). Следовательно, плоские монохроматические волны с положительной энергией не образуют полной системы функций для электрона Дирака при отсутствии внешнего поля.

Напротив, рассматривая наряду с плоскими волнами с положительной энергией также и плоские волны с отрицательной энергией, мы получаем полную систему. Действительно, если мы положим

$$\begin{aligned}\Psi_k\left(x,y,z,t\right)=&\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} a_k\left(p_x,p_y,p_z\right)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{h}\left(Wt-p_x x-p_y y-p_z z\right)}dp_x\,dp_y\,dp_z+\\&+\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} b_k\left(p_x,p_y,p_z\right)\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{h}\left(Wt+p_x x+p_y y+p_z z\right)}dp_x\,dp_y\,dp_z,\end{aligned} \tag{28}$$

где W всегда определяется по (4), мы будем иметь решение волновых уравнений, так как они линейны, и для того, чтобы начальные значения Ψ_k совпали с заданными функциями $F_k(x, y, z)$, мы должны будем написать условие:

$$a_k\left(p_x, p_y, p_z\right) + b_k\left(p_x, p_y, p_z\right) = g_k\left(p_x, p_y, p_z\right), \quad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{29}$$

Таким образом, в отличие от условий (27), условия (29) совместны, так как из восьми функций a_k и b_k, которые соответствуют набору p_x, p_y, p_z, четыре произвольны.

Если мы явно запишем условия (29), то получим для каждого набора p_x, p_y, p_z соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{(p_x - ip_y)B + p_z A}{W/c + m_0 c} + C = g_3\left(p_x, p_y, p_z\right);\\
&\frac{(p_x + ip_y)A - p_z B}{W/c + m_0 c} + D = g_4\left(p_x, p_y, p_z\right);\\
&-\frac{p_z C + (p_x - ip_y)D}{W/c + m_0 c} + A = g_1\left(p_x, p_y, p_z\right);\\
&-\frac{(p_x + ip_y)C - p_z D}{W/c + m_0 c} + B = g_2\left(p_x, p_y, p_z\right).
\end{aligned} \tag{30}$$

Если изучить систему (30), принимая во внимание соотношение неопределенностей Гейзенберга, то увидим, что в наиболее благоприятных случаях волновой пакет Ψ можно представить в виде суперпозиции волн с положительной энергией, но только тогда, когда размеры волнового пакета значительно превышают h/m_0c. Напротив, если размеры волнового пакета меньше h/m_0c, то вообще невозможно представить его в виде суперпозиции плоских волн без участия волн с отрицательной энергией.

Таким образом, в общем случае в теории Дирака невозможно представить себе какой-либо волновой пакет, в котором не участвуют волны с отрицательной энергией, и эта невозможность показывает нам, насколько трудно добиться исключения этих волн.

3. Парадокс Клейна

С первого взгляда может показаться, что трудности с отрицательными энергиями существуют даже в классической теории относительности. Действительно, в классической теории относительности в случае отсутствия внешнего поля энергия определяется как функция от импульса с помощью соотношения, которое для W дает два значения:

$$W = \pm\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}. \tag{31}$$

Однако нужно заметить, что согласно (31) возможные значения W находятся в двух разделенных областях: от $+\infty$ до $+m_0c^2$ и от $-m_0c^2$ до $-\infty$. Интервал от $+m_0c^2$ до $-m_0c^2$ не соответствует ни одному из возможных значений энергии. В прежней динамике, даже релятивистской, механические величины, и в частности энергия, в принципе изменяются непрерывно. Поэтому если вначале энергия электронов заключалась в положительной области $(-m_0c^2, +\infty)$, то так будет всегда, и никакое значение энергии из отрицательной области $(-\infty, -m_0c^2,)$ не может появиться, так как обе области разделены промежутком $(-m_0c^2, +m_0c^2)$, который значения энергии не могут пересечь. Таким образом, возражения, вытекающие из существования отрицательных энергий, в динамике Эйнштейна отпадают.

Этого нельзя сказать о новой механике, ибо она в принципе допускает возможность резких переходов между состояниями, энергия которых различается на конечную величину, что не позволяет *a priori* исключить переход из области положительных энергий в область отрицательных энергий. Более того, легко себе представить простые примеры, где переходы такого рода осуществляются.

О. Клейн первый[2] привел пример перехода, который не является, собственно говоря, переходом из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией, но все же эквивалентен ему.

Клейн рассматривает плоскую поверхность S, разделяющую область I, в которой потенциал равен нулю, и область II, в которой задан постоянный отрицательный скалярный потенциал V, так, что в области II электрон имеет потенциальную энергию $U=-eV>0$. На разделяющую поверхность нормально к ней из области I падает электронная волна Дирака. Эта волна предполагается плоской монохроматической и соответствующей положительной энергии W. Необходимо найти отраженные волны и волны, проходящие разделяющую поверхность. Можно показать, что для этого нужно сначала записать условие непрерывности для каждой из четырех функций Ψ_k на разделяющей поверхности, т. е. написать четыре уравнения:

$$\Psi_{k\,\text{падающая}} + \Psi_{k\,\text{отраженная}} = \Psi_{k\,\text{проходящая}}. \qquad (32)$$

Вполне естественно, что отраженные и проходящие волны соответствуют той же энергии, что и волна падающая: процесс проходит с сохранением энергии.

Приняв это, Клейн пришел к следующим результатам, которые я приведу без доказательств. Для $0 < U < W - m_0c^2$ происходит одновременно и отражение, и прохождение, причем как проходящая, так и отраженная волны имеют нормальный вид волн с положительной энергией.

Для $W - m_0c^2 < U < W + m_0c^2$ происходит полное отражение с уходящей волной во второй области. Для $U > W + m_0c^2$ мы снова обнаруживаем волну, прошедшую разделяющую поверхность, однако, и это главный результат, данная волна относится к типу волн с отрицательной энергией; очевидно, она соот-

[2] Zts. f. Phys. 1929. **53.** P. 157.

ветствует полной энергии W, которая положительна, но может быть названа «энергией непотенциальной природы» электрона в области II, т. е. величина $W - U$ отрицательна и меньше $-m_0c^2$, в то время как в классической эйнштейновской механике эта величина всегда больше m_0c^2. Волна, прошедшая в область II, где имеется скалярный потенциал V, аналогична волне с отрицательной энергией в отсутствие потенциала и обладает теми же парадоксальными свойствами. Существование этой проходящей волны следует объяснять так: есть определенная вероятность того, что падающий электрон проникает в область II, переходя в это странное состояние.

По Клейну, эта вероятность может быть даже значительной. Представляется, что результат вычислений нельзя рассматривать как физически строгий – в этом и заключается парадокс Клейна.

Правда, случай, рассмотренный Клейном, крайне схематичен. Иные авторы рассматривали другие, менее искусственные примеры. Общий результат этих исследований представляется следующим: каждый раз, когда потенциальная энергия электрона испытывает изменение, не меньшее, чем m_0c^2, на расстоянии, не превышающем h / m_0c, есть возможность появления состояний с отрицательной энергией. Этот результат приводит к мысли, что если бы можно было исключить из рассмотрения пространственные расстояния, меньшие h / m_0c, то, возможно, и удалось бы исключить волны с отрицательной энергией. Это следует рассматривать с позиций, изложенных в конце предыдущего параграфа в связи с представлением волновых пакетов.

4. Замечания и выводы

Состояния с отрицательной энергией, кроме того, любопытным образом обнаруживают себя в теории рассеяния света электронами Дирака. Мы не будем касаться этой теории, отсылая читателя к другим трудам[3].

Здесь мы отметим только вывод: электрон Дирака не мог бы рассеивать свет, если бы он не мог находиться в состояниях с отрицательной энергией. Так как приходится принять, что электроны рассеивают свет, чтобы объяснить явления рассеяния материальными телами, это показывает точно так же, как трудно освободить теорию Дирака от того очевидного несовершенства, каким является существование состояний с отрицательной энергией. Тем не менее делались различные попытки, чтобы обойти эту трудность. Мы скажем о них только несколько слов.

Шредингер предложил очень остроумную модификацию общих уравнений Дирака, которая устранила бы состояния с отрицательной энергией[4].

Однако кроме того, что эта модификация с трудом совместима с существованием рассеяния света электронами, она носит явно искусственный характер.

[3] См. в особенности замечательную работу Э. Ферми «Квантовая теория излучения» (Rev. Mod. Phys. 1932. **4.** P. 120).

[4] См. в особенности: Annales de l'Institut H. Poincaré. T. II. P. 269.

Вместо того чтобы устранять состояния с отрицательной энергией, Дирак, наоборот, попытался обосновать их существование[5]. Для этого он предположил, что эти состояния существуют в действительности и что в любой области пространства имеется бесконечное число электронов, занимающих все эти состояния с отрицательной энергией, электронов, которые ненаблюдаемы. Некоторые из этих электронов время от времени покидают свое обычное состояние с отрицательной энергией, чтобы занять состояние с положительной энергией, и эти-то электроны наблюдаемы. «Дырка», появляющаяся в состояниях с отрицательной энергией после ухода электрона, и будет то, что мы называем протоном. Возвращение ушедшего электрона в состояние с отрицательной энергией означало бы одновременное исчезновение электрона и протона, которое должно сопровождаться испусканием излучения. К несчастью, эти соблазнительные гипотезы встречают массу возражений и не могут быть поддержаны[6].

Резюмируя, скажем, что состояния электрона с отрицательной энергией играют важную роль в самой структуре теории Дирака, однако они никак себя не проявляют реально. Представляется, что в настоящее время приходится признать, что эта трудность неразрешима[7].

---

[5] Annales de l’Institut H. Poincaré. T. I. P. 357.

[6] Теория «дырок» Дирака получает в настоящий момент дополнительную поддержку в связи с экспериментальным открытием положительного электрона.

[7] Главным возражением, выдвигавшимся против теории «дырок» Дирака, было то обстоятельство, что масса электрона и «масса дырки» непременно должны быть равными, в то время как массы электронов и протона совершенно различны. Другим возражением являлось то, что «дырка» должна иметь, как показывают расчеты, весьма незначительное время жизни ввиду большой вероятности ее взаимной «аннигиляции» с каким-нибудь электроном с положительной энергией. Однако оба эти возражения отпали после открытия частицы с массой, равной массе электрона, но с положительным зарядом («позитрон»). Это открытие дало возможность отождествить «дырки» Дирака не с протонами, а с позитронами. Последние, как показывает эксперимент, действительно имеют весьма малое время жизни. На основании теории «дырок» оказалось возможным объяснить и предсказать ряд эффектов, заключающихся в образовании электронов и позитронов в различных процессах, как, например, столкновение двух материальных частиц, ядра с фотоном и т.п. Эти процессы сводятся к тому, что под влиянием внешнего возмущения электрон, находившийся в состоянии с отрицательной энергией, переходит в состояние с положительной энергией, причем получаются обычный электрон и «дырка», т.е. позитрон.

Таким образом, наличие у уравнения Дирака решений с отрицательной энергией представляется в настоящее время благодаря теории «дырок» не недостатком, а скорее достоинством теории. Надо, однако, отметить, что теорию «дырок» (как и вообще теорию Дирака) в ее теперешнем виде трудно считать окончательной. В частности, она наталкивается на серьезные трудности, связанные с бесконечной плотностью распределения электронов с отрицательной энергией в пространстве, которые, с другой стороны, никак не обнаруживают своего присутствия. Попытки обойти эти трудности, сделанные в последнее время Дираком, Гейзенбергом и Пайерлсом, еще не привели к определенным удовлетворительным результатам. – *Примеч. ред.*1-го издания (1936).

ГЛАВА XXI. Шредингеровское «дрожание»

1. Движение вероятностного центра тяжести

В этой главе мы будем избегать явного введения оператора, соответствующего «скорости» электрона. Скорость частицы является понятием, которое, как это заметил Бор, нужно употреблять в новой механике с осторожностью. Она является определенной только в некоторых случаях, и представляется неоправданным рассматривать ее как физически наблюдаемую величину.

Напротив, всегда допустимо рассматривать среднее положение частицы или вероятностный центр тяжести и изучать его движение. Действительно, эта точка в теории Дирака определяется ее координатами:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \Psi_k \, d\tau, \\
\overline{y} &= \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} y \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \Psi_k \, d\tau, \qquad (1) \\
\overline{z} &= \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} z \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* \Psi_k \, d\tau.
\end{aligned}$$

Скорость точки с координатами $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ является вполне определенной величиной.

Пусть функции $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ задают решение уравнения Дирака, которое представляет волну, связанную с движением некоторого электрона. Мы можем, как это нам известно, разложить каждую Ψ_k в ряд по собственным функциям:

$$\Psi_k = \sum_n c_n \Psi_{k,n}, \tag{2}$$

причем c_n представляют собой комплексные постоянные. Подставляя в (1), имеем:

$$\overline{x} = \sum_{m,n} c_m^* c_n \int\limits_D \sum_{k=1}^{4} \left(\Psi_{k,m}^* x \Psi_{k,n} \right) d\tau, \tag{3}$$

где тройные интегралы формулы (1) обозначены одним знаком интеграла. Обозначая через x_{mn} элемент с индексами m, n матрицы, соответствующей оператору x, формулу (3) мы запишем в простом виде:

$$\overline{x} = \sum_{m,n} c_m^* c_n x_{mn}. \tag{4}$$

Далее, в силу формулы (25) главы XV мы имеем:

$$\frac{dx_{mn}}{dt} = -\int_D \sum_{k=1}^{4} \left[\Psi^*_{k,m} \frac{2\pi i}{h} \left(xH - Hx \right) \Psi_{k,n} \right] d\tau, \tag{5}$$

где H есть оператор Гамильтона в уравнении Дирака:

$$H = -eV + c\left(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 m_0 c \right). \tag{6}$$

Мы легко находим:

$$\frac{2\pi i}{h}\left(xH - Hx \right) = c\alpha_1 \left(x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot x \right) = -c\alpha_1, \tag{7}$$

а следовательно,

$$\frac{dx_{mn}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{4} \left[\Psi^*_{k,m} \left(c\alpha_1 \right) \Psi_{k,n} \right] d\tau. \tag{8}$$

Таким образом, из (4) мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{dt} &= \sum_{m,n} c^*_m c_n \frac{dx_{mn}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{4} \left[\sum_m c^*_m \Psi^*_{k,m} \left(c\alpha_1 \right) \sum_n c_n \Psi_{k,n} \right] d\tau = \\ &= \int_D \sum_{k=1}^{4} \Psi^*_k \left(c\alpha_1 \right) \Psi_k \, d\tau. \end{aligned} \tag{9}$$

Точно таким же образом мы найдем:

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{4} \Psi^*_k \left(c\alpha_2 \right) \Psi_k \, d\tau; \quad \frac{d\overline{z}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{4} \Psi^*_k \left(c\alpha_3 \right) \Psi_k \, d\tau. \tag{10}$$

Ранее [формулы (7) главы XII] мы нашли следующие выражения для составляющих плотности тока вероятности:

$$\rho u_x = c \sum_{k=1}^{4} \Psi^*_k \alpha_1 \Psi_k. \tag{11}$$

Следовательно, сравнивая с (9), мы имеем:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \int_D \rho u_x \, d\tau = \overline{u}_x \tag{12}$$

и точно так же:

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = \overline{u}_y; \quad \frac{d\overline{z}}{dt} = \overline{u}_z. \tag{12'}$$

Таким образом, скорость вероятностного центра тяжести равна среднему значению скорости переноса вероятности, т. е. получен результат, который можно было предвидеть *a priori*.

Часто формулы (9) и (10) интерпретируют, говоря, что операторы $c\alpha_1$, $c\alpha_2$ и $c\alpha_3$ суть операторы, соответствующие трем составляющим скорости электрона. Так как эти операторы в качестве собственных значений имеют только $+c$ и $-c$, мы, согласно общим принципам новой механики, вынуждены говорить, что единственными возможными значениями составляющих скорости являются $+c$ и $-c$ – результат, понять который довольно трудно. Мы предпочитаем, как мы уже говорили, воздерживаться от введения операторов, соответствующих «скорости» частицы.

2. Теорема Эренфеста в теории Дирака уже неточна

В нерелятивистской волновой механике мы доказывали теорему Эренфеста, которая выражается формулами

$$m\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}=\overline{f_x};\quad m\frac{d^2\overline{y}}{dt^2}=\overline{f_y};\quad m\frac{d^2\overline{z}}{dt^2}=\overline{f_z}. \tag{13}$$

Примененная к случаю отсутствия внешнего поля, эта теорема приводит нас к следующему результату: «В отсутствие внешнего поля движение вероятностного центра тяжести прямолинейно и равномерно». Это в некотором роде есть перенос в волновую механику принципа инерции.

В теории Дирака предыдущие результаты в общем случае уже неточны. Действительно, исходим из формулы (8) и применим еще формулу (25) главы XV. Тогда получим

$$\frac{d^2x_{mn}}{dt^2}=\int\limits_D\sum_{k=1}^{4}\left[\sum_m\Psi^*_{k,m}\frac{2\pi i}{h}\left(-c\alpha_1H+Hc\alpha_1\right)\Psi_{k,n}\right]d\tau, \tag{14}$$

а следовательно, согласно (4):

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}=\sum_{m,n}c^*_m c_n\int\limits_D\sum_{k=1}^{4}\left[\Psi^*_{k,m}\frac{2\pi i}{h}\left(-c\alpha_1H+Hc\alpha_1\right)\Psi_{k,n}\right]d\tau. \tag{15}$$

Однако α_1 не коммутирует с H, поскольку эта матрица антикоммутирует с α_2, α_3 и α_4. Следовательно, в общем случае имеем

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}\neq 0,\ \text{а также:}\ \frac{d^2\overline{y}}{dt^2}\neq 0;\ \frac{d^2\overline{z}}{dt^2}\neq 0. \tag{16}$$

Движение вероятностного центра тяжести в отсутствие внешнего поля, вообще говоря, не является прямолинейным и равномерным.

Теперь мы более детально исследуем причину того, что это движение центра тяжести не может быть прямолинейным и равномерным, и мы увидим, что это связано с существованием состояний с отрицательной энергией. Таким образом, мы в иной форме представим результаты, полученные Шредингером[1].

[1] Annales de l'Institut H. Poincaré. T. II. P. 269.

3. Шредингеровское «дрожание»

Чтобы лучше понять, почему движение вероятностного центра тяжести, даже в отсутствие внешнего поля, вообще говоря, не является в механике Дирака движением прямолинейным и равномерным, мы подвергнем подробному анализу выражение

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \int\limits_D \sum_{k=1}^{4} \Psi_k^* (c\alpha_1) \Psi_k \, d\tau. \tag{17}$$

Мы знаем, что всегда можно записать:

$$\begin{aligned} \Psi_k(x,y,z,t) = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[a_k(p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{2\pi i}{h}[Wt - p_x x - p_y y - p_z z]} + \\ + b_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{h}[Wt + p_x x + p_y y + p_z z]} \Big] dp_x \, dp_y \, dp_z, \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$W = +\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}. \tag{19}$$

Восемь функций $a_k(p_x, p_y, p_z)$ и $b_k(p_x, p_y, p_z)$ могут быть найдены, исходя из произвольно взятых четырех из них, при помощи формул, нам уже известных.

Назовем теперь «пространством импульсов» пространство, в котором прямоугольными координатами служат величины p_x, p_y, p_z, и разделим это пространство на сколь угодно малые ячейки σ. Величины

$$\Delta(\sigma) = \iiint e^{\frac{2\pi i}{h}(p_x x + p_y y + p_z z)} dp_x \, dp_y \, dp_z \tag{20}$$

представляют собой (с точностью до постоянной нормировки) «собственные дифференциалы» сплошного спектра плоских монохроматических волн[2], и мы можем написать:

$$\Psi_k(x,y,z,t) = \sum_\sigma \Big[a_k(p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt} + b_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{h}Wt} \Big] \Delta(\sigma), \tag{21}$$

причем p_x, p_y, p_z представляют собой координаты центра элемента σ в пространстве импульсов, а $\sum\limits_\sigma$ означает суммирование по всем ячейкам σ в этом пространстве.

С учетом этого мы можем записать (17) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{dt} = c \sum_\sigma \sum_{\sigma'} \sum_{k=1}^{4} \Big[a_k(p_x', p_y', p_z') e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt} + b_k(p_x', p_y', p_z') e^{\frac{2\pi i}{h}Wt} \Big]^* \times \\ \times \alpha_1 \Big[a_k(p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt} + b_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{h}Wt} \Big] \cdot \int\limits_D \Delta^*(\sigma') \Delta(\sigma) d\tau, \end{aligned} \tag{22}$$

[2] См. определение собственных дифференциалов в параграфе 4 главы V.

естественно, что областью интегрирования здесь является все пространство. Так как собственные дифференциалы ортогональны и могут предполагаться нормированными, мы имеем[3]:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = c\sum_{\sigma}\sigma\sum_{k=1}^{4}\left[a_k\left(p_x, p_y, p_z\right)e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt} + b_k\left(p_x, p_y, p_z\right)e^{\frac{2\pi i}{h}Wt}\right]^{*}\cdot\alpha_1\times$$
$$\times\left[a_k\left(p_x, p_y, p_z\right)e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt} + b_k\left(p_x, p_y, p_z\right)e^{\frac{2\pi i}{h}Wt}\right], \tag{23}$$

или иначе:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = c\sum_{\sigma}\sigma\sum_{k=1}^{4}\left[a_k^{*}\alpha_1 a_k + b_k^{*}\alpha_1 b_k\right] +$$
$$+c\sum_{\sigma}\sigma\left(\sum_{k=1}^{4}a_k^{*}\alpha_1 b_k e^{\frac{4\pi i}{h}Wt} + \sum_{k=1}^{4}b_k^{*}\alpha_1 a_k e^{-\frac{4\pi i}{h}Wt}\right). \tag{24}$$

Теперь нужно преобразовать это выражение. По формулам предыдущей главы мы имеем:

$$a_3 = \frac{p_z A + \left(p_x - ip_y\right)B}{W/c + m_0 c}; \quad a_4 = \frac{\left(p_x + ip_y\right)A - p_z B}{W/c + m_0 c},$$
$$a_1 = A; \quad a_2 = B, \tag{25}$$

откуда:

$$c\sum_{k=1}^{4}a_k^{*}\alpha_1 a_k = c\left(a_1^{*}a_4 + a_2^{*}a_3 + a_3^{*}a_2 + a_4^{*}a_1\right) = 2p_x c^2\frac{AA^{*} + BB^{*}}{W + m_0 c^2}. \tag{26}$$

Однако мы имеем также:

$$\sum_{k=1}^{4}a_k^{*}a_k = \left(AA^{*} + BB^{*}\right)\left(1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\left(W/c + m_0 c\right)^2}\right) = 2W\frac{AA^{*} + BB^{*}}{W + m_0 c^2}, \tag{27}$$

откуда, сравнивая с (26), найдем:

$$c\sum_{k=1}^{4}a_k^{*}\alpha_1 a_k = \frac{p_x c^2}{W}\sum_{k=1}^{4}a_k^{*}a_k. \tag{28}$$

Пользуясь выражениями для b_k, мы точно так же найдем:

$$c\sum_{k=1}^{4}b_k^{*}\alpha_1 b_k = -\frac{p_x c^2}{W}\sum_{k=1}^{4}b_k^{*}b_k. \tag{29}$$

С другой стороны, два последних члена выражения (24) являются комплексно сопряженными друг другу (в силу эрмитовости α_1) и могут быть написаны так:

[3] Через σ мы здесь обозначаем объем ячейки σ.

$$c\sum_{\sigma}\sigma A_1\cos\left(\frac{4\pi}{h}Wt+\varphi_1\right), \tag{30}$$

где A_1 и φ_1, естественно, изменяются от ячейки к ячейке, т. е. представляют собой функции от p_x, p_y, p_z.

В конечном счете с учетом (28), (29) и (30) мы можем записать (24) в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{x}}{dt}&=\sum_{\sigma}\sigma\frac{c^2p_x}{W}\left(\sum_{k=1}^{4}a_k^*a_k-\sum_{k=1}^{4}b_k^*b_k\right)+\\&+\sum_{\sigma}\sigma cA_1\cos\left(\frac{4\pi W}{h}t+\varphi_1\right).\end{aligned} \tag{31}$$

Далее, по формулам релятивисткой динамики, величина c^2p_x/W представляет собой x-составляющую скорости, соответствующей импульсу p_x и энергии $+W$. Точно так же и $-c^2p_x/W$ можно считать x-составляющей скорости, соответствующей отрицательной энергии $-W$. Таким образом, первый член в выражении (31) для $d\overline{x}/dt$ представляет собой некоторого рода среднее значение составляющей скорости v_x, соответствующей спектральному разложению (18) волны Ψ. Поэтому полагаем:

$$\overline{v}_x=\sum_{\sigma}\sigma\frac{c^2p_x}{W}\sum_{k=1}^{4}\left(a_k^*a_k-b_k^*b_k\right). \tag{32}$$

Здесь $\overline{v}_x$, естественно, не зависит от времени. Таким образом, мы имеем:

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\overline{v}_x+\sum_{\sigma}\sigma cA_1\cos\left(\frac{4\pi W}{h}+\varphi_1\right), \tag{33}$$

откуда после интегрирования:

$$\overline{x}=\text{const}+\overline{v}_xt+\sum_{\sigma}\sigma\frac{hcA_1}{4\pi W}\sin\left(\frac{4\pi W}{h}t+\varphi_1\right). \tag{34}$$

Мы полагаем:

$$\xi=\text{const}+\overline{v}_xt. \tag{35}$$

Получаем:

$$\overline{x}=\xi+\sum_{\sigma}\sigma\frac{hcA_1}{4\pi W}\sin\left(2\pi\cdot\frac{2W}{h}t+\varphi_1\right). \tag{36}$$

Точно так же найдем:

$$\begin{aligned}\overline{y}&=\eta+\sum_{\sigma}\sigma\frac{hcA_2}{4\pi W}\sin\left(2\pi\cdot\frac{2W}{h}t+\varphi_2\right),\\\overline{z}&=\zeta+\sum_{\sigma}\sigma\frac{hcA_3}{4\pi W}\sin\left(2\pi\cdot\frac{2W}{h}t+\varphi_3\right),\end{aligned} \tag{37}$$

где использованы определения:

$$\eta = \overline{v}_y t + \mathrm{const}; \quad \overline{v}_y = \sum_\sigma \sigma \frac{p_y c^2}{W} \sum_{k=1}^{4} \left(a_k^* a_k - b_k^* b_k \right),$$
$$\zeta = \overline{v}_z t + \mathrm{const}; \quad \overline{v}_z = \sum_\sigma \sigma \frac{p_z c^2}{W} \sum_{k=1}^{4} \left(a_k^* a_k - b_k^* b_k \right). \tag{38}$$

Точка с координатами ξ, η, ζ движется прямолинейно и равномерно, а вероятностный центр тяжести совершает вокруг этой точки колебания с частотой $2W/h$. Это шредингеровское «дрожание». Впрочем, амплитуды этих колебаний очень слабы, так как они пропорциональны множителю $\frac{h}{4\pi W}$, который всегда меньше $\frac{hc}{4\pi m_0 c^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{h}{m_0 c}$, а величина $\frac{h}{m_0 c}$, часто называемая «комптоновской длиной волны», весьма мала ($2{,}4 \cdot 10^{-10}$ см).

Предыдущий анализ ясно показывает происхождение шредингеровского «дрожания». Оно возникает вследствие *биений* волн с отрицательной энергией $-W$ и волн с соответствующей положительной энергией W. Частота биений, как обычно, есть разность частот слагаемых волн, т. е. в данном случае $2W/h$.

Для волнового пакета, в спектральном разложении которого не присутствуют волны с отрицательной энергией, нет шредингеровского «дрожания», и теорема Эренфеста справедлива. Однако мы знаем, что в общем случае, чтобы построить волновой пакет, нужно привлечь волны с отрицательной энергией. Вот почему теорема Эренфеста в общем случае несправедлива в теории Дирака.

Следовательно, шредингеровское «дрожание» и неприменимость теоремы Эренфеста связаны с существованием состояний с отрицательной энергией и исчезли бы вместе с этими состояниями, если бы их можно было устранить.

ГЛАВА XXII. Несколько замечаний о теории относительности и новой механике

1. Отсутствие в новой механике симметрии между пространством и временем

Мы видели, что теория Дирака по ряду признаков согласуется с принципом относительности. Действительно, его основным уравнениям можно придать форму, инвариантную по отношению к преобразованиям Лоренца: при помощи его четырех волновых функций Ψ можно образовать величины, которые имеют тензорный характер в пространстве-времени. Тем не менее совершенно невозможно рассчитывать на то, чтобы теория Дирака в ее нынешнем состоянии целиком согласовывалась с концепциями теории относительности даже в ее частной форме. В самом деле, одной из ведущих идей теории относительности представляется то, что она всегда пространственные и временные координаты использует симметрично. Однако в теории Дирака эта симметрия переменных x, y, z, t не осуществляется в полной мере, так как в ней принимаются общие принципы новой механики, которые, по крайней мере в их настоящей форме, приписывают совершенно особую роль переменной «время». Мы должны остановиться на этом положении.

Прежде всего, новая механика каждой наблюдаемой физической величине приводит в соответствие некоторый эрмитов оператор. Так как эрмитовость оператора определяется в некоторой области *пространства,* уже одного этого достаточно, чтобы даже определение операторов, используемых в новой механике, не было релятивистским. Время может фигурировать в этих операторах только в качестве параметра, а производные $\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}$ никогда не могут в них появляться.

Определив операторы, которые соответствуют наблюдаемым величинам, новая механика принимает, что возможные значения каждой из этих величин даются собственными значениями ее оператора. Однако собственные значения и собственные функции некоторого оператора, в свою очередь, определяются в некоторой области D пространства. Переменная «время» не играет никакой роли при вычислении собственных значений и собственных функций эрмитова оператора; если она в него входит, то только в качестве параметра. Задав таким образом возможные значения наблюдаемой величины A, новая механика принимает, что соответствующие вероятности различных возможных значений этой величины даются квадратами модулей коэффициентов перед каждой собственной функцией в разложении волновой функции Ψ по этим собственным функциям.

В общем случае[1] эти вероятности зависят от параметра t и именно поэтому изменяется состояние системы.

[1] Когда A не является первым интегралом.

Короче говоря, новая механика до сих пор рассматривает время как переменную, играющую роль совершенно отличную от роли пространственных координат. Таким образом, теория Дирака, которая принимает общие принципы новой механики, не может быть в действительности «релятивистской». Это нетрудно видеть, например, при изучении средних значений величин в механике Дирака. Плотности среднего значения определяются в пространстве и, чтобы перейти от плотности к самому среднему значению, нужно проинтегрировать по пространству, а эта операция не является релятивистски инвариантной. Так можно объяснить некоторые легко обнаружимые особенности в таблице средних значений, которая приводится в конце второй части настоящей книги. К ним, например, относится асимметричное появление оператора α_4.

2. Четвертое соотношение неопределенностей

Мы затронем еще один вопрос, который связан с особой ролью, которую играет время в волновой механике.

Соотношения неопределенностей Гейзенберга имеют следующий вид[2]:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h; \quad \Delta p_y \cdot \Delta y \geq h; \quad \Delta p_z \cdot \Delta z \geq h. \tag{1}$$

С математической точки зрения они выводятся из того факта, что волновая механика ставит в соответствие (с точностью до постоянной) классическим величинам p_x, p_y, p_z производные по соответствующим сопряженным переменным x, y, z.

С физической точки зрения соотношения (1) должны пониматься так: в данный момент произведение неопределенности одной из координат частицы на неопределенность сопряженной составляющей импульса всегда имеет по меньшей мере порядок h.

Релятивистская симметрия между пространством и временем требовала бы, чтобы три соотношения (1) были дополнены четвертым соотношением

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq h, \tag{2}$$

поскольку энергия W есть временная составляющая пространственно-временного четырехмерного вектора импульса, пространственные составляющие которого суть p_x, p_y, p_z.

Однако при современном состоянии новой механики это четвертое соотношение неопределенностей совершенно не может быть истолковано таким же образом, как и три первых, ибо, с одной стороны, время t должно рассматриваться как параметр, имеющий вполне определенное значение, без всякой неопределенности, а с другой стороны, величина «энергия W» соответствует оператору Гамильтона, а не оператору $-\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial t}$, который не может рассматриваться как эрмитов в собственном смысле слова.

[2] Строго говоря, в правой части (1) должно стоять $h/4\pi$. – *Примеч. пер.*

Тем не менее равенству (2) можно придать некоторый смысл. Действительно, известно, что если мы наблюдаем прохождение волны в некоторой фиксированной точке пространства в течение некоторого конечного времени Δt, то можно утверждать, что эта волна обладает частотой ν только с неопределенностью

$$\Delta\nu \geq \frac{1}{\Delta t}. \tag{3}$$

Принимая во внимание соотношение $W = h\nu$ для волны Ψ, мы можем записать неравенство (3) в виде

$$\Delta W \geq \frac{h}{\Delta t}. \tag{4}$$

Тогда мы и обнаруживаем смысл соотношения (2). Оно означает, что опыт или наблюдение, выполненные в некоторой фиксированной точке в течение времени Δt, не в состоянии дать информацию об энергии частицы с неопределенностью, меньшей $h/\Delta t$.

Таким образом, четвертое соотношение неопределенностей имеет некоторый смысл, но весьма отличный от смысла первых трех. В этом заключается новое проявление асимметрии между пространством и временем в волновой механике.

3. Возможно ли в новой механике восстановить симметрию между пространством и временем?

Чтобы восстановить симметрию между временем и пространством в новой механике, нужно попытаться дать симметричную формулировку общих принципов. Не утверждая, что это невозможно, мы покажем, что при этом возникают большие трудности.

Первое, что нужно сделать, это определить эрмитовость операторов в пространстве-времени вместо соответствующего определения в пространстве. Пусть, например, задан оператор A, который может одновременно действовать на переменные времени и пространства (а также при случае и на переменную спина ζ). Тогда эрмитовость можно было бы определить условием

$$\begin{aligned} &\iiiint\limits_D f^*(x,y,z,t)Ag(x,y,z,t)\,dxdydzdt = \\ &= \iiiint\limits_D g(x,y,z,t)A^*f^*(x,y,z,t)\,dxdydzdt, \end{aligned} \tag{5}$$

причем D есть некоторая область пространства-времени, которая для свободного электрона совпадала бы со всем пространством-временем.

При случае в условии (5) можно было бы добавить суммирование по переменной ζ.

Тогда собственные значения и собственные функции оператора A определились бы из уравнения

$$A\left[\varphi_i\left(x,y,z,t\right)\right]=\alpha_i\varphi_i\left(x,y,z,t\right), \tag{6}$$

при этом функция φ_i предполагается конечной, равномерно непрерывной и равной нулю на границах области D пространства-времени. Волновая функция $\Psi\left(x,y,z,t\right)$ при этом допускала бы разложение вида

$$\Psi\left(x,y,z,t\right)=\sum_i c_i\varphi_i\left(x,y,z,t\right), \tag{7}$$

и тогда можно было бы обычную формулировку общих принципов изменить так: «Измерение физической величины, соответствующей оператору A, может дать только одно из значений α_i, и вероятность значения α_k равна $\left|c_k\right|^2$». Отсюда вытекало бы, что среднее значение величины A имеет вид

$$\overline{A}=\iiiint\limits_D \Psi^* A\left(\Psi\right)dxdydzdt. \tag{8}$$

К несчастью, все это построение встречает серьезное возражение. Величины α_i и c_i были бы, согласно их новым определениям, независимыми от времени и, естественно, то же было бы и с $\overline{A}$. Таким образом, мы получили бы статическую физику, вследствие чего устранялась бы всякая эволюция во времени.

Другая сторона этой же трудности заключается в следующем. Если, следуя современным принципам новой механики, мы «квантуем» некоторую систему, например атом водорода, мы мысленно изолируем эту систему от всего окружающего мира. Строго говоря, это непозволительно: так, для определения Ψ в принципе нужно бы учитывать не только силовое поле, созданное ядром, но и все силовые поля, существующие в окружающем мире. К счастью, влияние силовых полей вне атома на форму стационарных волн Ψ внутри атома совершенно ничтожно, так как эти волны очень быстро стремятся к нулю, как только мы уходим из области атома. В принципе, определение стационарных волн и собственных функций требует рассмотрения всего пространства и всего, что в нем содержится, но на практике структура материального мира определяется тем, что мы выделяем системы, достаточно независимые от остального материального мира, таким образом, чтобы можно было рассматривать их изолированно. Однако если мы захотим определить собственные функции в пространстве-времени, то дело будет обстоять иначе, так как совершенно невозможно разделить существование физического тела такого, как атом, на части, независимые одна от другой.

Возьмем, например, атом водорода. На протяжении своей истории он будет подвергаться различным воздействиям, например, как в эффектах Штарка или Зеемана. Если мы захотим определить собственные функции и собственные значения в пространстве-времени, мы найдем, что стационарные состояния этого атома будут неизменны и они будут определяться совокупностью всех воздействий, которым он подвергался на протяжении всего времени. Такое представляется совершенно неприемлемым.

В действительности, даже в теории относительности в ее теперь уже классической форме, переменные времени и пространства далеко не эквивалентны. Переменная «время» изменяется в этой теории всегда в одном и том же направлении, а мировые линии всех материальных тел представляют собой линии, имеющие положительное направление, которое всегда образует с осью ct угол, не превышающий 45°. Иначе говоря, пространство-время обладает значительной «полярностью».

Согласно релятивистским представлениям, наблюдатель A рассматривает как одновременные и соответствующие тому же самому значению его собственного времени те мировые точки, которые содержатся в определенной трехмерной области (сечении) пространства-времени. Это происходит в силу того, что данная пространственноподобная поверхность сечет все мировые линии, которые наблюдатель A может собрать (отделить) в своей пространственной области в виде почти независимых образований. Но в направлении мировых линий такое отделение невозможно. Имеется некоторого рода «волокнистая структура» пространства-времени в направлении времени. Именно эта «волокнистая структура» и беспокоит нас, и мы видим, что эта трудность имеет свои корни в самой классической теории относительности.

4. Более ограничительная форма соотношений неопределенностей (Бор, Ландау, Пайерлс)

Соотношение $\Delta W \cdot \Delta t \geq h$, если использовать релятивистскую идею о том, что никакое воздействие не может распространяться со скоростью большей c, приводит к формулировке новых соотношений неопределенностей. Эти новые соотношения не содержатся в новой механике в ее нерелятивистской форме, они добавляются к соотношениям Гейзенберга и увеличивают неопределенности, которые из них вытекают.

Не входя в подробности рассуждений, которые приводят к новым соотношениям неопределенностей, мы, однако, попытаемся показать их происхождение. Возьмем случай отсутствия внешнего поля. В релятивистской волновой механике четыре параметра W, p_x, p_y, p_z, которые входят в фазу плоской монохроматической волны, связаны соотношением эйнштейновской динамики:

$$|p|^2 = \frac{W^2}{c^2} - m_0^2 c^2, \tag{9}$$

откуда легко выводится, что $\Delta|p| \geq \dfrac{\Delta W}{c}$.

Однако мы знаем, что если попытаться определить состояние электрона опытным путем в течение времени Δt, то нам удастся установить его энергию только с неопределенностью $h/\Delta t$, т. е. разложение волны Ψ на монохроматические волны охватывает спектральный интервал:

$$\Delta\nu = \frac{\Delta W}{c} \geq \frac{1}{\Delta t}. \tag{10}$$

Таким образом, значения $|p|$, которые входят в спектральное разложение волны Ψ, принадлежат области

$$\Delta|p| \geq \frac{\Delta W}{c} \geq \frac{h}{c\Delta t}. \tag{11}$$

Отсюда мы делаем вывод, что наблюдение или опыт, осуществленные в течение промежутка времени Δt, не могут привести к определению импульса с неопределенностью меньшей $\frac{h}{c\Delta t}$. Это приводит к соотношению неопределенностей нового вида.

Неравенство (11) можно получить еще и иначе. Если наблюдатель, расположенный в некоторой точке пространства, хочет ограничить размер волнового пакета Ψ, он должен пропустить его сквозь отверстие, проделанное в экране и закрывающееся при помощи заслонки. Он будет поднимать заслонку в течение интервала времени Δt, а затем возвращать ее на место таким образом, чтобы ограничить волновой пакет, проходящий сквозь отверстие в экране в течение этого времени Δt. Но так как фронт этого волнового пакета не может двигаться со скоростью большей c, то и длина волнового цуга, прошедшего экран, не превышает $c\Delta t$. Таким образом, выбирая ось z в направлении распространения, найдем, что неопределенность координаты z частицы в прошедшей через экран волне будет следующей:

$$\Delta z \leq c\Delta t, \tag{12}$$

и, согласно соотношению Гейзенберга,

$$\Delta p_z \geq \frac{h}{\Delta z} \geq \frac{h}{c\Delta t}, \tag{13}$$

а так как здесь можно отождествить p и p_z, то мы получим неравенство (11).

С первого взгляда могло бы показаться, что соотношение (11) противоречит представлению о плоской монохроматической волне, ибо для нее мы имеем $\Delta p = 0$. Но это возражение можно устранить, заметив, что для того, чтобы быть вправе связывать с частицей плоскую монохроматическую волну Ψ, следовало бы иметь возможность утверждать, что частица может находиться в какой угодно точке пространства, а это утверждение могло бы быть проверено только в опыте бесконечной продолжительности, поскольку никакой прибор не может создать сигнал, перемещающийся со скоростью, большей c. Остается, однако, то возражение, что, строго говоря, наблюдатель никогда не может представить информацию о состоянии электрона при помощи безграничной плоской монохроматической волны.

Некоторые рассуждения убеждают в том, что для тела с собственной массой m_0 измерение длины меньшей, чем $h/(m_0 c)$, или продолжительности меньшей, чем $h/(m_0 c^2)$, является иллюзорным[3]. Это позволяет надеяться, что если из теории электрона удастся исключить рассмотрение расстояний меньших $h/(m_0 c)$ и интервалов времени меньших $h/(m_0 c^2)$, как лишенных смысла, может быть, тем самым удастся устранить трудность с отрицательными энергиями. Однако это пока еще только надежда.

[3] См.: *Schrödinger.* Annales de l'Institut H. Poincaré. Op. cit.

НОБЕЛЕВСКАЯ ЛЕКЦИЯ,

ПРОЧИТАННАЯ В СТОКГОЛЬМЕ 12 ДЕКАБРЯ 1929 Г. ЛУИ ДЕ БРОЙЛЕМ

О ВОЛНОВОЙ ПРИРОДЕ ЭЛЕКТРОНА[1]

Когда в 1920 г. я возобновил свои исследования в области теоретической физики, надолго прерванные не зависящими от моей воли обстоятельствами, я был далек от мысли, что эти исследования приведут меня несколькими годами позже к получению столь высокого и завидного вознаграждения, которое Шведская Академия наук присуждает каждый год ученым, – Нобелевской премии по физике. То, что привлекало меня тогда к теоретической физике, не было надеждой на столь высокое отличие, которое когда-либо будет короновать мои работы. То, что привлекало меня к теоретической физике, – это загадка, которая все более и более окутывала структуру материи и структуру излучений, по мере того как странное понятие кванта, введенное Планком в 1900 г. в его исследованиях излучения абсолютно черного тела, с каждым днем завоевывало физику в целом.

Чтобы сделать для вас хорошо понятным, как развивались мои исследования, я должен вначале обрисовать картину кризиса, в котором теоретическая физика находилась приблизительно двадцать лет.

Долгое время физики задавались вопросом, не состоит ли свет из малых частиц, находящихся в быстром движении. Эта идея, высказанная еще античными философами, была поддержана в XVIII в. Ньютоном. После открытия Томасом Юнгом явления интерференции и после восхитительного труда Огюстена Френеля гипотеза корпускулярной структуры света была полностью отброшена, а волновая теория единодушно принята. Таким образом, физики прошлого века совершенно отказались от идеи атомного строения света. Но атомистические теории, отвергнутые в оптике, смогли добиться большого успеха не только в химии, где они дали простое объяснение закону химических пропорций, но и в физике сплошных сред, где они позволили объяснить большое число свойств твердых, жидких и газообразных состояний вещества. В частности, они дали возможность построить восхитительную кинетическую теорию газов, которая была обобщена под названием статистической механики и позволила придать ясный смысл абстрактным концепциям термодинамики. Эксперимент также привнес решающие доказательства в пользу атомного

[1] *Louis de Broglie.* Conférence Nobel prononcée à Stockholm, le 12 Dècembre 1929.

строения электричества. Благодаря сэру Дж. Дж. Томсону появилось понятие электрической частицы, и вы знаете всю пользу, которую извлек из этого Х. А. Лоренц в своей электронной теории.

Тридцать лет назад физика была разделена на две части: с одной стороны, физику вещества, базирующуюся на концепции корпускул и атомов, которые, как предполагалось, подчиняются законам классической механики Ньютона, и с другой – физику излучений, исходящую из понятия распространения волн в некоторой сплошной гипотетической среде – световом или электромагнитном эфире. Но эти две области физики не могли оставаться враждебными друг к другу. Необходимо было их объединить, создав теорию обмена энергией между веществом и излучением, и именно здесь возникли противоречия. В результате, пытаясь примирить две области физики, пришли к неточным и даже недопустимым заключениям по поводу энергетического равновесия между веществом и излучением в термически изолированной полости. Говорилось, что вещество должно отдавать всю свою энергию излучению и вследствие этого его температура должна стремиться к абсолютному нулю! Необходимо было любой ценой исключить возможность такого абсурдного вывода. Благодаря своей гениальной интуиции Планк нашел способ его избежать. Вместо допущений классической волновой теории о том, что источник света испускает излучение непрерывным образом, необходимо было допустить, что излучение испускается равными и конечными порциями, квантами. Энергия каждого кванта имеет к тому же величину, пропорциональную частоте излучения ν и равную $h\nu$, где h – универсальная постоянная, которую с тех пор называют постоянной Планка.

Успех идей Планка привел к серьезным последствиям. Если свет испускается квантами, не должен ли он иметь, будучи однажды излученным, корпускулярную структуру? Существование квантов излучения ведет, таким образом, к корпускулярной концепции света. С другой стороны, можно доказать, как это сделали Джинс и А. Пуанкаре, что если бы движение материальных частиц в световых источниках происходило в соответствии с законами классической механики, то невозможно было бы обосновать точный закон излучения абсолютно черного тела, т. е. закон Планка. Необходимо допустить, что старая динамика, даже модифицированная теорией относительности Эйнштейна, не может учитывать движения в очень малом масштабе.

Существование корпускулярной структуры света и других излучений было подтверждено открытием фотоэлектрического эффекта. Если пучок света или X-лучей заставить падать на поверхность вещества, то из него выбиваются быстро движущиеся электроны. Кинетическая энергия этих электронов растет линейно с частотой падающего излучения и не зависит от его интенсивности. Этот факт объясняется просто, если допустить, что излучение состоит из квантов $h\nu$, способных отдавать полностью свою энергию электрону облучаемого тела. Таким образом, пришли к теории квантов света, предложенной Эйнштейном в 1905 г., которая вообще представляет собой возвращение к корпускулярной гипотезе Ньютона, дополненной соотношением пропорциональности между энергией корпускул и частотой. Несколько аргументов было приведено Эйнштейном в пользу его способа рассмотрения, а в 1922 г. открытие А.Х. Комптоном явления рассеяния *X*-лучей, которое носит его имя, подтвердило эту теорию. Однако всегда требовалось прибегать к волновой теории для объяснения явлений интерференции и дифракции, и не было видно, как можно примирить волновую теорию с существованием световых корпускул.

Работы Планка, как мы уже об этом говорили, вызвали сомнения в применимости механики в области очень малых масштабов. Рассмотрим материальную точку, которая описывает малую замкнутую или же оскулирующую траекторию. В классической динамике существует бесконечное множество движений такого рода, для которых энергия тела в зависимости от начальных условий принимает непрерывный ряд возможных значений. Планк, напротив, был вынужден прийти к допущению, что возможны или, по крайней мере, стабильны лишь некоторые привилегированные квантованные движения с энергией, принимающей только дискретный ряд значений. Эта идея вначале показалась очень странной, но необходимо было признать ее важность, так как она привела Планка к точному закону излучения абсолютно черного тела и также потому, что позже она доказала свою плодотворность во многих других областях. Наконец, именно на идее квантования атомных движений Бор построил свою знаменитую атомную теорию. Она настолько известна ученым, что я не буду даже кратко ее излагать.

Необходимость допустить для света две противостоящие теории – корпускулярную и волновую, невозможность понять, почему среди множества движений, которыми может обладать электрон согласно классическим представлениям, возможны только некоторые, – таковы были загадки, стоящие перед физиками в эпоху, когда я возобновил мои исследования в области теоретической физики.

Когда я принялся размышлять об этих трудностях, меня поразили две вещи. С одной стороны, теория световых квантов не может рассматриваться как удовлетворительная, потому что она определяет энергию световой корпускулы выражением $W = h\nu$, в котором фигурирует частота ν. Однако чисто корпускулярная теория не содержит никакого элемента, позволяющего определять частоту. И только по этой причине в случае света необходимо ввести одновременно идею корпускулы и идею периодичности.

С другой стороны, определение стабильных движений электронов в атоме заставляет вводить целые числа, но до сих пор единственными явлениями, для которых целые числа вводились в физику, были интерференция и собственные колебания. Это подсказало мне идею о том, что электроны тоже не могут быть представлены как простые частицы, но и им также необходимо приписать некоторую периодичность.

Таким образом, я пришел к следующей идее, которая руководила моими исследованиями. Необходимо как для вещества, так и для излучения, в частности для света, ввести одновременно понятие частицы и понятие волны. Другими словами, следует как в том, так и в другом случае допустить существование частиц, сопровождаемых волнами. Но, поскольку частицы и волны не могут быть независимыми, так как они составляют, по выражению Бора, две дополнительные стороны действительности, необходимо установить параллелизм между движением частицы и связанной с ней волны. Первой целью было, таким образом, достижение этого соответствия.

Для этого я начал с рассмотрения самого простого случая – случая изолированной частицы, т.е. не подверженной внешнему воздействию. Мы хотим связать с ней волну. Рассмотрим сначала систему отсчета $ox_0y_0z_0$, в которой частица оказывается неподвижной: это «собственная» система частицы в смысле теории относительности. В этой системе волна будет стационарна, так как частица неподвижна. Ее фаза будет одинакова в любой точке, и волна представлена выражением вида $\sin 2\pi\nu_0\left(t_0 - \tau_0\right)$, где t_0 – собственное время частицы, а τ_0 – постоянная.

Согласно принципу инерции, в любой галилеевой системе частица будет находиться в состоянии равномерного прямолинейного движения. Рассмотрим такую галилееву систему, и пусть $v = \beta c$ – скорость частицы в этой системе. Мы не ограничим общности, приняв за направление движения направление оси x. Время t, измеряемое наблюдателем этой новой системы, после преобразований Лоренца будет связано с собственным временем t_0 уравнением

$$t_0 = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

вследствие чего для этого наблюдателя фазовый множитель волны будет определяться выражением $\sin 2\pi\frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{\beta x}{c} - \tau_0\right)$. Для него волна имеет частоту

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и распространяется в направлении оси x с фазовой скоростью

$$V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}.$$

Исключая β из двух предыдущих формул, легко находим следующее уравнение, которое определяет показатель преломления вакуума для рассматриваемых волн:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}}.$$

Этому «закону дисперсии» соответствует некоторая «групповая скорость». Вы знаете, что групповая скорость является скоростью, с которой переносится результирующая амплитуда группы волн с очень близкими частотами. Лорд Рэлей показал, что эта скорость U определяется уравнением

$$\frac{1}{U} = \frac{\partial(n\nu)}{\partial\nu}.$$

Здесь $U = v$, т.е. групповая скорость волн в системе $xyzt$ равна скорости частицы в этой системе. Это уравнение имеет очень большое значение для развития теории.

Таким образом, частица оказывается определенной в системе $xyzt$ частотой ν и фазовой скоростью V связанной с ней волны. Для установления параллелизма, о котором мы говорили, необходимо связать эти величины с механическими величинами, такими как энергия и количество движения. Так как пропорциональность между энергией и частотой является одним из соотношений, наиболее характерных для теории квантов, и к тому же частота и энергия преобразуются одинаково при изменении галилеевой системы отсчета, естественно предположить, что

$$\text{энергия} = h \times \text{частота}, \qquad \text{или} \qquad W = h\nu,$$

где h – константа Планка. Это уравнение должно выполняться во всех галилеевых системах отсчета и в собственной системе отсчета частицы, где ее энергия сводится, согласно Эйнштейну, к внутренней энергии m_0c^2 (m_0 – собственная масса), и, таким образом, имеем:

$$h\nu_0 = m_0 c^2.$$

Это уравнение определяет частоту ν_0 как функцию собственной массы m_0, и наоборот.

Количество движения, определяемое вектором $\vec{p}$, равно $\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$, и тогда имеем

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{Wv}{c^2} = \frac{h\nu}{V} = \frac{h}{\lambda}.$$

Величина λ является расстоянием между двумя последовательными гребнями волны, это «длина волны». Таким образом,

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Это основное уравнение теории.

Все предшествующее относится к очень простому случаю, когда никакое поле не действует на частицу. Я очень кратко укажу, как можно обобщить теорию на случай частицы, перемещающейся в поле постоянной силы, производной от потенциальной функции $F(xyz)$. Тогда с помощью умозаключений, которые я обхожу молчанием, приходим к допущению, что распространение волны соответствует показателю преломления, меняющемуся от одной точки пространства к другой, согласно формуле

$$n(xyz) = \sqrt{\left[1 - \frac{F(xyz)}{h\nu}\right]^2 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}},$$

или в первом приближении, пренебрегая поправками, вносимыми теорией относительности, получаем

$$n(xyz) = \sqrt{\frac{2(E - F)}{m_0 c^2}},$$

при $E = W - m_0c^2$. Постоянная энергия W частицы еще связана с частотой ν волны соотношением

$$W = h\nu,$$

в то время как длина волны λ, меняющаяся от одной точки поля сил к другой, связана с также изменяющимся количеством движения p уравнением

$$\lambda(xyz) = \frac{h}{p(xyz)}.$$

Здесь еще раз доказывается, что групповая скорость волн равна скорости частицы. Параллелизм, таким образом, установленный между частицей и ее волной, позволяет отождествить принцип Ферма для волн с принципом наименьшего действия для частиц (при постоянных полях). Принцип Ферма утверждает, что световой луч, проходящий через две точки A и B в среде с показателем преломления $n\ (xyz)$, меняющимся от одной точки к другой, но постоянным во времени, таков, что интеграл $\int_A^B n dl$, взятый вдоль луча, имеет экстремум. С другой стороны, принцип наименьшего действия

Мопертюи утверждает следующее: траектория частицы, проходящей через две точки пространства A и B, такова, что интеграл $\int_A^B p\,dl$, взятый вдоль траектории, экстремален, естественно, если его рассматривают только при движениях, соответствующих заданным значениям энергии. Согласно установленным выше соотношениям между механическими и волновыми величинами, имеем

$$n = \frac{c}{V} = \frac{c}{\nu} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{c}{h\nu} \cdot \frac{h}{\lambda} = \frac{c}{W} p = \mathrm{const} \cdot p,$$

потому что величина W постоянна в постоянном поле. Отсюда вытекает, что принцип Ферма и принцип Мопертюи являются эквивалентами друг друга и возможные траектории частицы идентичны возможным лучам ее волны.

Эти концепции ведут к интерпретации условий стабильности, введенных теорией квантов. В самом деле, если рассмотреть замкнутую траекторию C в постоянном поле, то очень естественно допустить, что фаза связанной волны должна быть однородной функцией вдоль этой траектории. Это ведет к записи

$$\int_C \frac{dl}{\lambda} = \int_C \frac{1}{h} p\,dl = \text{целое число}.$$

Это точно условие стабильности периодических атомных движений, согласно Планку. Условия квантовой стабильности представляются, таким образом, аналогичными условиям резонанса, и появление целых чисел становится здесь таким же естественным, как и в теории колеблющихся струн или пластин.

Общие формулы, которые устанавливают параллелизм между волнами и частицами, могут применяться к световым корпускулам в предположении, что в этом случае собственная масса m_0 бесконечно мала. Действительно, если для заданного значения энергии W устремлять m_0 к нулю, то находим, что v и V обе стремятся к c, и в пределе получаем две фундаментальные формулы, на которых Эйнштейн построил свою квантовую теорию света:

$$W = h\nu, \quad p = \frac{h\nu}{c}.$$

Таковы главные идеи, которые я развивал в моих первых работах. Они ясно показывали, что было возможно установить соответствие между волнами и частицами, так же как между законами механики и законами геометрической оптики. Но в теории волн геометрическая оптика, как вы знаете, является лишь приближением. Это приближение имеет пределы применимости, в частности, когда вступают в игру явления интерференции и дифракции, оно совсем недостаточно. Это приводит нас к мысли, что прежняя механика является тоже лишь приближением по отношению к более широкой механике волнового характера. И это я выражал почти в начале своих работ, утверждая: «Необходимо создать новую механику, которая была бы по отношению к прежней тем, чем волновая оптика является по отношению к геометрической оптике». Эта новая механика уже развита, главным образом благодаря прекрасным работам Шредингера. Она исходит из уравнения распространения волн в качестве базового и строго определяет эволюцию во времени волны, связанной с частицей. Она, в частности, позволяет придать новую и более удовлетворительную формулировку условиям квантования внутриатомных движений, так как прежние условия квантования оправдываются, как мы видели, путем применения геометрической оптики к волнам, связанным с внутриатомными частицами, но это применение не является строго обоснованным.

Я не могу здесь даже кратко резюмировать развитие новой механики. Хочу только сказать, что при внимательном изучении она представляется идентичной квантовой механике, независимо развиваемой сначала Гейзенбергом, а затем Борном, Иорданом, Паули, Дираком и др. Обе механики, волновая и квантовая, являются эквивалентными с математической точки зрения.

Будем довольствоваться здесь размышлениями об общем смысле полученных результатов. Чтобы резюмировать значение волновой механики, мы можем сказать: «Каждую частицу необходимо связать с волной, и одно только изучение распространения волны может информировать нас о последовательных положениях частицы в пространстве». В обычных механических явлениях большого масштаба предсказываемые положения располагаются вдоль кривой, которая является траекторией в классическом смысле слова. Но что произойдет, если волна не распространяется по законам геометрической оптики и если, к примеру, происходят интерференция и дифракция? Тогда невозможно больше уверенно приписать частице движение, согласующееся с классической динамикой. Можно ли еще предполагать, что в каждый момент времени частица занимает в волне четко определенное положение и что волна при ее распространении увлекает частицу подобно тому, как волна на воде увлекает плавающую пробку? Это те трудные вопросы, обсуждение которых завело бы нас в слишком далекие области философии. Все, что я об этом скажу здесь, – это то, что сегодня имеется тенденция допускать, что невозможно постоянно приписывать частице точно определенное положение в волне. Должно ограничиться таким утверждением: когда проводится наблюдение, позволяющее локализовать частицу, мы всегда вынуждены приписывать ей положение внутри волны, но вероятность того, что она находится в такой-то точке M волны, пропорциональна квадрату амплитуды интенсивности волны в M.

Это можно выразить еще следующим образом. Если мы рассматриваем облако частиц, связанных с одной и той же волной, то интенсивность волны в каждой точке пропорциональна плотности облака в этой точке (т.е. числу частиц в единице объема вокруг этой точки). Данная гипотеза необходима для того, чтобы объяснить, почему в случае интерференции света в точках, где интенсивность волны максимальна, оказывается максимальной концентрация световой энергии. Действительно, если допустить, что световая энергия переносится световыми частицами, фотонами, то необходимо, чтобы плотность фотонов в волне была пропорциональна ее интенсивности.

Само по себе это правило позволяет нам понять, как волновая теория электрона могла бы быть проверена экспериментом.

Действительно, представим себе неопределенное облако электронов, движущихся с одинаковой скоростью в одном и том же направлении. Согласно фундаментальным положениям волновой механики, мы должны связать с этим облаком плоскую волну вида

$$a\sin 2\pi\left[\frac{W}{h}t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right],$$

где α, β, γ – направляющие косинусы направления распространения, а длина волны λ равна h/p. Для не очень быстрых электронов можно положить, что

$$p = m_0 v,$$

и, следовательно,

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v},$$

где m_0 – собственная масса электрона.

Вы знаете, что практически для получения электронов с одинаковой скоростью необходимо их подвергнуть воздействию одинаковой разности потенциалов P, и тогда имеем

$$\frac{1}{2}m_0 v^2 = eP.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eP}}.$$

Численно это дает

$$\lambda = \frac{12,24}{\sqrt{P}} \cdot 10^{-8} \text{ см} \quad (P \text{ в вольтах}).$$

Так как возможно использовать только электроны, ускоренные разностью потенциалов, по крайней мере, в несколько десятков вольт, вы видите, что длина волны λ, предсказываемая теорией, составляет около 10^{-8} см, т. е. порядка ангстрема. Это порядок длин волн X-лучей.

Поскольку длина волны электрона порядка длины волны X-лучей, следует ожидать, что возможно наблюдать рассеяние этих волн на кристаллах, аналогичное явлению Лауэ. Я напомню вам, в чем состоит явление Лауэ. В естественных кристаллах, например каменной соли, существуют узлы, образованные атомами вещества, формирующими кристалл, и регулярно расположенные на расстояниях порядка ангстрема. Эти узлы играют роль рассеивающих центров для волн, и если направить на кристалл волны с длиной порядка одного ангстрема, то рассеянные различными узлами волны оказываются согласованными по фазе в некоторых хорошо определенных направлениях, где полная интенсивность рассеянного излучения будет иметь максимум. Положение этих максимумов рассеяния дается математической теорией фон Лауэ и Брэгга, хорошо известной сегодня. Эта теория определяет положение максимумов как функцию от расстояний между узлами кристалла и длины волны падающего излучения. Для X-лучей эта теория была замечательно подтверждена Лауэ, Фридрихом и Книппингом, после чего дифракция X-лучей на кристаллах стала банальным экспериментом. Именно на дифракции базируется точное измерение длин волн X-лучей. Надо ли об этом напоминать в стране, где Сигбан и его сотрудники продолжают эти прекрасные работы?

Для X-лучей явление дифракции на кристаллах было бы естественным следствием идеи о том, что X-лучи являются волновыми аналогами света и отличаются лишь более короткой длиной волны. Для электронов ничего похожего нельзя было предвидеть, потому что электрон рассматривался как простая маленькая частица. Но если допустить, что электрон ассоциируется с волной и что плотность электронного облака измеряется интенсивностью связанной с ним волны, тогда для электронов можно предвидеть явление, аналогичное явлению Лауэ. Действительно, волна электрона будет интенсивно рассеиваться в направлениях, которые теория Лауэ – Брэгга позволяет вычислять, используя формулу длины волны $\lambda = \frac{h}{mv}$, соответствующую известной скорости v электронов, падающих на кристалл. Интенсивность рассеянной волны определяет, согласно нашему общему принципу, плотность облака рассеянных электронов, и мы должны ожидать. что обнаружим в направлениях максимумов множество рассеянных электронов. Если это явление реально существует, то оно должно дать решающее экспериментальное доказательство в пользу существования ассоциируемой с электроном волны, длина которой равна $\frac{h}{mv}$, и, таким образом, фундаментальная идея волновой механики будет установлена на солидной экспериментальной базе.

И вот эксперимент, являющийся строгим судьей теорий, показал, что явление рассеяния электронов на кристаллах действительно существует и что все происходит в точном количественном и качественном согласии с законами волновой механики. Дэвиссону и Джермеру, работающим в лаборатории Белла в Нью Йорке, выпала честь первыми наблюдать это явление с помощью способа, аналогичного методу Лауэ для *X*-лучей. Возобновляя те же эксперименты, но заменяя кристалл кристаллической пудрой, согласно успешному методу Дебая и Шеррера для *X*-лучей, профессор Дж. П. Томсон из Абердина, сын известного кембриджского ученого сэра Дж. Дж. Томсона, обнаружил те же самые явления. Затем Рупп в Германии, Кикучи в Японии, Понт во Франции, а также другие, изменив условия, воспроизвели эти эксперименты. На сегодня существование явления не вызывает сомнений, и небольшие трудности, возникшие при интерпретации экспериментов Дэвиссона и Джермера, кажется, нашли свое удовлетворительное разрешение.

Руппу даже удалось получить дифракцию электронов в особенно поразительной форме. Вы знаете то, что называют в оптике решетками. Это поверхности из стекла или металла, на которых механическим путем нанесены эквидистантные линии с интервалом порядка величины, сравнимой с длиной световых волн. Дифрагированные этими линиями волны интерферируют, и образуются места максимумов интенсивности света в некоторых направлениях, зависящих от расстояния между линиями, от направления падающего на решетку света и от его длины волны. В течение долгого времени не удавалось наблюдать подобные явления с решетками, изготовленными вручную, когда вместо света использовали *X*-лучи. Причина этого заключалась в том, что длина волны *X*-лучей много меньше длины волны света, и никакой инструмент не позволял проводить на поверхности линии, расстояние между которыми было бы порядка длины волны *X*-лучей. Изобретательные физики Комптон и Ж. Тибо смогли преодолеть это затруднение. Возьмем обычную оптическую решетку и посмотрим на нее почти касательно к ее поверхности. Линии решетки покажутся нам более сжатыми, чем это есть на самом деле. Для *X*-лучей при таком почти скользящем падении на решетку все будет происходить так, как если бы линии очень сжались, и явления дифракции будут возникать аналогично дифракции света. То, на что были нацелены усилия физиков, подверглось проверке. Так как длины электронных волн составляют величину порядка длины волны *X*-лучей, явления дифракции должны были бы наблюдаться и при почти касательном падении на оптическую решетку пучка электронов. Это удалось выполнить Руппу, и он смог таким образом измерить длину электронных волн, сравнивая ее прямо с расстояниями между линиями, механически нанесенными на решетку.

Таким образом, чтобы описать свойства вещества так же хорошо, как и свойства света, надо одновременно говорить о волнах и частицах. Электрон больше не может рассматриваться как простая малая частица электричества. Его необходимо ассоциировать с волной, и эта волна не является мифом. Можно измерять длину волны и предвидеть явление интерференции. Все явления могли быть, таким образом, предсказаны до их открытия. На этой идее дуализма волн и частиц, выраженного в природе в более или менее абстрактном виде, было основано недавнее развитие теоретической физики и, кажется, на этом же основании должно будет происходить и дальнейшее развитие этой науки.

Научное издание

Луи де Бройль

Избранные научные труды

Том 1

Становление квантовой физики

Работы 1921–1934 годов

Редактор *Е.Н. Пашкова*
Корректор *Л.А. Михаленкова*
Компьютерная верстка *А.М. Моисеева*
Оформление *И.В. Кравченко*

Подписано в печать 25.11.09. Формат 70x100/16
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 34,75
Тираж 400 экз. Заказ

Издательская группа «Логос»
123104, Москва, Б.Палашевский пер., д. 9, стр. 1

ПО ВОПРОСАМ ПРИОБРЕТЕНИЯ ЛИТЕРАТУРЫ ОБРАЩАТЬСЯ:

Издательская группа «Логос»
111024, Москва, ул. Авиамоторная, д. 55, корп. 31
Справки по тел.: (495) 221-50-16, 644-38-04
Электронная почта: universitas@mail.ru
Дополнительная информация на сайте www.logosbook.ru