ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С. Д. Кулик

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
(элементы теории проверки вероятных гипотез)

Рекомендовано УМО “Ядерные физика и технологии”
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва 2007

УДК 519.81(075)
ББК 22.18я7
К 90

Кулик С.Д. Теория принятия решений (элементы теории проверки вероятных гипотез): учебное пособие. – М.:МИФИ, 2007. –152 с.

Очень кратко с позиций теории принятия решений изложены основы системного анализа и основные понятия исследования операций. Задача принятия решений рассматривается как задача проверки гипотез. Выделены следующие четыре группы гипотез: *вероятные, статистические, детерминированные, квантовые.* На многочисленных примерах подробно и очень тщательно рассмотрено решение задачи проверки вероятных гипотез.

Пособие в основном ориентировано на студентов МИФИ кафедры “Управляющие интеллектуальные системы”, изучающих не только теорию принятия решений, но и теорию вероятностей.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент канд. техн. наук, доц. О.А. Мишулина

ISBN 978-5-7262-0843-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Главная цель настоящего пособия — ознакомить читателя с основными понятиями *исследования операций* (ИО), *системного анализа* (СА) и приобрести навык в решении задач проверки вероятных гипотез.

При работе над пособием автор учитывал тот факт, что при изучении дисциплины "Теория принятия решений (ТПР)" читатель уже знаком с теорией *множеств*, теорией *вероятностей* (ТВ) и *математической статистической* (МС), а также владеет методами *математического моделирования и математического анализа.* Поэтому сведения по этим дисциплинам приведены достаточно кратко и, как правило, неполно.

Часть приведенных в пособии примеров связана с *автоматизированными фактографическими информационно-поисковыми системами* (АФИПС), являющимися одной из разновидностей *автоматизированных систем обработки информации и управлени*я (АСОИУ).

В процессе разработки аналогичной дисциплины и при написании лекционных материалов были широко использованы подходящие источники многих авторов (приведенные в конце каждой главы) и результаты многочисленных дискуссий с доктором технических наук, профессором Ю.Г. Древсом. Всем им автор искренне благодарен за оказанную помощь.

Сейчас, к сожалению, достаточно часто нарушаются права авторов, поэтому каждый раз, где это необходимо даны, ссылки на источник заимствования. Не всегда это заимствование было дословным. Иногда текст подвергался изменению, переработке и дополнению без прямого указания по тексту об этом. Если при этом, невзначай, оказались затронуты чьи-то интересы, то автор заранее просит его извинить.

Особую благодарность автор выражает рецензенту пособия кандидату технических наук, доценту О.А. Мишулиной, чьи замечания и пожелания позволили значительно улучшить подачу материала и выявить опечатки и неточности. Как иногда бывает с творческими людьми, автор не всегда согласен с мнением рецензента, а поэтому все последующие замеченные недостатки автор просит относить на свой счет.

Общение со студентами полезно и поучительно. Автор очень благодарен многочисленным студентам МИФИ, с которыми ему приходилось общаться, обсуждая трудные для понимания, но интересные фрагменты этой удивительной теории принятия решений.

ВВЕДЕНИЕ

Эффективное функционирование современного общества практически немыслимо без широкого применения *информационных систем* (ИС) и, в частности, *автоматизированных систем обработки информации и управления* (АСОИУ). Помимо общей задачи создания единого информационного пространства, такие *технические системы* (ТС) позволяют решать многие специальные задачи в различных областях знаний: медицине, военном деле, криминалистике и др.

Однако созданные и проектируемые ИС и, в частности АСОИУ во многих случаях не удовлетворяют растущим требованиям пользователей. К основным факторам, которые влияют на эффективность применения информационных систем, и которые до настоящего времени еще не удалось в достаточной степени учесть при создании ИС, следует отнести:

- сложный характер взаимодействия *человека-оператора* (ЧОП) и технических устройств ИС (например, *поискового робота* в составе *автоматизированной фактографической информационно-поисковой системы* (АФИПС));
- противоречие между необходимостью увеличивать объем информации, хранимой в ИС, и требованием сокращать время ее обработки (например, поиска);
- сложный и противоречивый характер связи между требованиями к точности обслуживания информационных запросов, увеличением объема хранимой информации и сокращением времени ее обработки (например, поиска).

Кроме этих общих проблем, при решении специальных задач в таких областях, как, например, медицина, военное дело или криминалистика, важное значение приобретает разработка критериев эффективности ИС (АСОИУ) и выработка на их основе алгоритмов принятия решений. Создание этих алгоритмов связано с фундаментальными исследованиями в теории принятия решений, а также и в теории распознавания образов и в теории нейронных сетей. О важности этих исследований свидетельствуют многочисленные публикации различных ученых, так или иначе сталкивающиеся на практике с проблемой повышения эффективности ИС. Поскольку модель будущей системы позволяет еще до реального ее построения оценить будущие характеристики самой системы, то значительная часть усилий исследователей была сосредоточена на построении различных моделей ИС и их компонентов.

Эффективность будущей ИС (АСОИУ) во многом определяется не только удачно выбранным критерием (или критериями) эффективности, но и наличием у разработчика модели системы, позволяющей адекватно оценивать ее эффективность. Но этого еще не достаточно для решения практических задач.

Для того чтобы действительно построить эффективную систему, разработчик (например, *лицо, принимающее решение* (ЛПР)) должен уметь принимать (или выбирать) правильное решение (т.е. эффективное решение с точки зрения принятого критерия эффективности для данной ИС).

На практике возможные варианты решения могут быть сформулированы в виде некоторых гипотез, а сам непосредственно выбор правильного решения может быть сведен к проверке этих гипотез. В результате такой проверки часть гипотез может быть отклонена. Из оставшихся гипотез ЛПР должен выбрать одну и принять окончательное решение.

Изучение дисциплины ТПР не возможно без введения определений. Многие используемые далее определения связаны с прикладными задачами, поэтому они могут не содержать некоторых деталей, важных с точки зрения формальной теории.

> Важно отметить, что для любого заданного определения или термина (из рассматриваемых далее) <u>практически всегда</u> можно подобрать *контрпример*, т.е. найти такое **нечто**, что, с одной стороны, это **нечто** удовлетворяет определению, а с другой — это **нечто** не удовлетворяет определению.

Опыт создания ИС показал, что современный специалист в области информационных систем (и в частности АСОИУ) неизбежно столкнется с проблемой принятия решения. Ему следует быть готовым к этому. А для того чтобы принимать правильные решения, он должен знать, как это можно сделать.

Тому, как следует на практике проверять некоторые *вероятные* гипотезы, и посвящено данное пособие.

«Сто раз прочти, сто раз напиши, и
смысл сам войдет в тебя»
(*китайская пословица)* [**45**]

Вероятные гипотезы

Глава 1

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Содержание

I). *Терминология системного подхода, системного анализа, исследования операций. Основные принципы системного подхода. Основные понятия исследования операций: операция, критерии эффективности операции, решение, оптимальное решение, задачи и математические модели операций, принятие решений на основе математических моделей.*

II). *Человек-оператор, лицо, принимающее решение. Этапы процесса принятия решений и их характеристика. ГОСТ и роль технического задания (ТЗ) в принятии решений при создании систем. Гипотезы: вероятные, статистические, детерминированные, квантовые. Примеры постановок задач проверки гипотез.*

1.1. Общие положения

На практике *принимать решения* (ПР) приходится при решении различных практических задач в разных областях, например:

- для АСУ *физическим экспериментом* (ФЭ), когда необходимо исследователю выполнить поиск записей, содержащих похожий по форме сигнал в массиве экспериментальных данных;
- для систем поддержки принятия решений при формировании медицинских заключений врачом (постановка диагноза больному);
- в центрах научно-технической информации для поиска и извлечения фактов из массива документов;
- в патентном деле для поиска аналогов и формирования заключений экспертом при производстве экспертиз по заявкам на выдачу охранных документов на изобретения, полезные модели и т.п. объекты интеллектуальной собственности;
- в криминалистике для раскрытия преступлений или объединения уголовных дел.

В АФИПС криминалистического назначения человек-оператор выполняет, как правило, самые ответственные и сложные операции, которые невозможно заменить автоматом. Опыт эксплуатации реальных АФИПС показал, что обычно человек-оператор является именно самым узким звеном в сложной цепи операций, связанных с обработкой запросов и направленных на получение правильного ответа. Последнее слово (т.е. окончательное решение) о результатах фактографического поиска остается за человеком — *лицом, принимающим решение* (ЛПР).

Все, что связано с человеком-оператором, практически в полной мере справедливо и для других АФИПС. Действительно, по результатам *фактографического поиска* (ФП), например, для АФИПС по объектам интеллектуальной собственности, таким, как изобретения, именно эксперт (ЛПР) принимает окончательное решение о новизне предлагаемого изобретения, для медицинских АФИПС именно врач принимает решение и ставит окончательный диагноз больному, для АФИПС в составе АСУ ФЭ именно ученый (экспериментатор, исследователь) принимает окончательное решение об исследуемом физическом явлении.

Несмотря на то, что человек наделен способностью думать и принимать нестандартные решения на практике, не только одному ему приходится принимать различные решения.

Так в АФИПС медицинского назначения поисковый робот, реализующий алгоритм ФП в соответствии со специальной стратегией ФП, значительно сокращает исходную область поиска, и при этом поисковый робот вынужден сравнивать обнаруженные записи с записью, содержащей запрос и принимать решение об их соответствии (или несоответствии) условиям поиска.

В военном деле уже давно, например, торпеда способна принимать хотя и специфические, но все же решения. Некоторые торпеды даже снабжены блоками с элементами искусственного интеллекта.

***Пример* 1.А**

В 1944 г. в Выборгском заливе была (см. [**35**, с. 186]) потоплена фашистская немецкая подводная лодка U-250. Враг проявлял странный интерес к этой затонувшей U-250 (то самолеты бомбили ее на дне, то торпедные катера сбрасывали на нее глубинные бомбы). Позже выяснилось, что в ее торпедных аппаратах находятся новейшие самонаводящиеся акустические торпеды (которые были разработаны в 1942 г. [**55**, с. 99]) с неконтактными взрывателями.

Современные торпеды *атомных подводных лодок* (АПЛ) оснащены (см. [**35**, с.248]) подсистемами искусственного интеллекта.

***Пример* 1.Б**

Современные технические системы, например АПЛ, очень сложны, а последствия (табл.1.1) от принятых решений, могут быть трагичны.

Таблица 1.1. **Гибель АПЛ** (см. и. ср. [**46**, с. 175-219, 424-429, 483, 578])

№ п/п	Подводная лодка	Дата гибели	Командир, страна	Число погибших	Примечание
1	К-19	04.06 1961	*Н. Затеев* СССР	8	Авария атомной энергоустановки
2	Трешер	10.04 1963	*Д. Гарвей* США	129	Превышение предельной глубины
3	Скорпион	21.05 1968	*Ф. Слеттерн* США	99	—
4	К-8	11.04 1970	*В. Бессонов* СССР	52	Разгерметизация прочного корпуса
5	К-219	06.10 1986	*И. Британов* СССР	4	Взрыв ракеты в шахте
6	К-278 (Комсомолец)	07.04 1989	*Е. Ванин* СССР	42	Пожар и поступление воды
7	К-141 (Курск)	12.08 2000	*Г. Лячин* Россия	118	Взрыв боезапаса

Определение 1.0
Правильное решение [**29**, с. 16] — количественно обоснованный выбор наилучшего образа действий, ведущих к достижению поставленной *цели* в данных условиях обстановки.

Добиться принятия правильного и своевременного решения как человеком, так и автоматом на практике не так просто. В целом можно выделить два направления, в которых приходится принимать решения.

Первое — принятие решения человеком-оператором.

Второе — принятие решения устройством (блоком, автоматом) в соответствии с некоторым алгоритмом.

Можно полагать, что **теория принятия решений** (ТПР) — совокупность различных методов ориентированных на поиск лучшего решения среди возможных альтернатив, позволяющих избежать сплошного перебора вариантов.

Так, существуют различные методы проверки *статистических* гипотез, имеется теоретическая и практическая основа выбора *вероятных* гипотез, и есть различные методы решения оптимизационных задач, позволяющие проверять некоторые *детерминированные* гипотезы.

В последнее время появилось новое целое научное направление (см. [**40-43**, **58**, **59**] и др.) на стыке физики и математики – это квантовая теория вероятностей, квантовая теория проверки гипотез, квантовые вычисления и квантовая информация.

В этих условиях изучение методов решения даже узкого класса задач (как задачи проверки гипотез) из области теории принятия решений представляется сегодня крайне актуальным.

Анализ развития научно-технических достижений позволяет выделить следующие предпосылки становления научного направления ПР как цельной самостоятельной научной теории:

1) ускорение научно-технического прогресса;
2) бурное развитие вычислительной техники;
3) значительное совершенствование программного обеспечения;
4) появление новых математических методов;
5) усложнение технических систем, а также резкое возрастание цены за последствия ошибочно принятых решений.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**44**, с. 9]. Специалисты полагают, что любая система *принятия решений* преобразует *входы* в *выходы*, при этом с другой стороны любую систему можно рассматривать как систему *принятия решений*, сделав соответствующие предположения о целесообразности ее поведения.

В специальной научной литературе используется достаточно общий термин — “*теория систем*”, а также другие термины — “*исследование операций*” и “*системный анализ*”.

Определение 1.1
Теория систем [**37**, с. 29] — предметом теории систем применительно к большим организационным системам является круг проблем, связанных с анализом целенаправленной деятельности коллективов людей, функционирования техники, которой управляют люди, и техники с силами природы.

Определение 1.2
Системный анализ (СА) [**37**, с. 1] — дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы требует анализа сложной информации, характеризующей реальную ситуацию.

Определение 1.3
Исследование операций (ИО) [**36**, с. 169] — научное направление, связанное с разработкой методов анализа целенаправленных действий (операций) и объективной (в частности, количественной) сравнительной оценкой решений (организационного управления).

Иногда полагают (в очень узком смысле), что *теория принятия решений* связана в основном с решением именно проблем выбора по многим критериям. Как и некоторые другие специалисты, например [**37**, с. 1], в данной работе не придерживаются такого подхода. Большей частью используется терминология принятая, например, как в работах [**2**, **36**] и др.

В основе рассматриваемой теории принятия решений лежат основные понятия исследования операций.

1.2. Основные понятия исследования операций

> «Потребности практики вызвали к жизни специальные научные методы, которые удобно объединить под названием «исследования операций». Под этим термином мы будем понимать *применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.*»
>
> *Е.С. Вентцель* [**2**, с. 9]

Термин “*исследование операций*”, возник (см. [**29**, с. 18]) в вооруженных силах США и Англии во время Второй мировой войны применительно к операциям военного характера. Так, в Англии (см. [**4**, с. 149]) на одной радиолокационной станции была создана группа специалистов (*разных специальностей*, что и определило *комплексный* или, как говорят, *системный подход*) для решения технических задач (сравнение эффективности путей решения задач, поиск оптимального решения) с помощью математики.

В СССР (см. [**29**, с. 18]) основы ИО были заложены еще до Второй мировой войны профессором *Л.Г. Гончаровым*.

ОТМЕТИМ. Специалисты полагают (см. [**39**, с. 8]), что предшественницей теории ИО была *теория эффективности*, на основе которой выработались методические принципы анализа, заложившие фундамент теории *исследования операций*.

Определение 1.4

Цель (см. и ср. [**4**, с. 441] — желаемое состояние выходов системы (конечное состояние) в результате управляемого процесса ее развития (математическим выражением (*моделью*) оценки соответствия или не соответствия состояния системы этой *цели* является *целевая функция* (**ЦФ**) или *критерий* качества (оптимальности) системы).

ОТМЕТИМ [**4**, с. 441]. Цель возникает тогда, когда есть *проблема* (т.е. расхождение желаемого и действительного; цель зависит не только от *желания* (субъективная сторона), но и от реальных *возможностей*).

ОТМЕТИМ [**36**, с. 59]. Специалистами под *целью* понимается идеальное представление желаемого (требуемого) результата, достижимого в пределах некоторого интервала времени.

<u>*Определение 1.5*</u>
Операция [**2**, с. 15] — всякое управляемое (т.е. от нас зависит, каким способом выбрать некоторые *параметры*) мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то *цели*.
ОТМЕТИМ [**38**, с. 181]. Специалисты требуют, чтобы в рамках ТПР операция имела характер повторяемости.

<u>*Определение 1.6*</u>
Оперирующая сторона (**ОпСт**) [**4**, с. 268] — *лицо* или *совокупность лиц* (субъект управления), стремящихся в *операции* к поставленной *цели* (функция ОпСт состоит в выборе некоторых управлений из их заданного множества с учетом имеющейся в ее распоряжении информации об условиях задачи; ряд авторов, рассматривающих задачу ИО как *игру* с "природой", используют термин *игрок* (в том же смысле)).
ОТМЕТИМ [**38**, с. 182]. Иногда выделяют *руководителя операции,* который принимает окончательное решение, и выделяют в ОпСт *исследователя операции*, который не принимает окончательного решения, а только помогает ОпСт, предоставляя ей количественные основания для принятия решения.

<u>*Определение 1.7*</u>
Альтернатива [**4**, с. 26] — возможный вариант *решения* задачи (под *альтернативой* понимают как само решение, так и *результат* (*исход*) его реализации).

<u>*Определение 1.8*</u>
Стратегия [**36**, с. 176] — любое правило, предписывающее определенные действия в каждой ситуации процесса ПР.
ОТМЕТИМ [**36**, с. 176]. Формально **стратегия** — функция от имеющейся в данный момент информации, принимающая значения на множестве *альтернатив*, доступных в данный момент.

Определение 1.9
Решение [**2**, с. 15] — всякий определенный выбор зависящих от нас параметров.
ОТМЕТИМ [**2**, с.15]. На практике различают удачные, неудачные, разумные, неразумные, а также **оптимальные решения**.
ОТМЕТИМ [**2**, с.16]. Само принятие решения не рассматривается в ИО, так как это компетенция ЛПР.

Определение 1.10
Элементы решения [**2**, с. 16] — параметры, совокупность которых образует решение.

Определение 1.11
Оптимальные решения [**2**, с. 15] — решения, которые по тем или другим признакам предпочтительнее перед другими решениями.

Определение 1.12
Цель исследования операций [**2**, с. 15] — предварительное количественное обоснование *оптимальных решений*.
ОТМЕТИМ. Мы будем различать также *рациональные* и *нерациональные* решения.

1.2.1. Показатель (критерий) эффективности операции

Для того чтобы сравнивать между собой по эффективности разные решения, нужно иметь (см. и ср. [**2**, с. 17]) какой-то количественный *критерий* или, так называемый, *показатель эффективности* (часто называемый *целевой функцией*). На практике, как полагают специалисты [**2**, с. 18], неправильный выбор показателя эффективности очень опасен.

Определение 1.13
Критерий эффективности (**КЭ**) [**36**, с. 170] — правило или способ принятия решения с учетом эффективности системы.

Определение 1.14(**а**)
Эффективность [**36**, с. 59] — это наиболее общее, определяющее свойство любой целенаправленной деятельности, которое с познавательной (гносеологической) точки зрения раскрывается через категорию *цели* и объективно выражается степенью достижения цели с учетом затрат ресурсов и времени.

ОТМЕТИМ [**36**, с. 59]. Понятие эффективности есть фундаментальное понятие теории эффективности.

Определение 1.14(**б**)
Эффективность операции (**ЭО**) [**36**, с. 21, 60, 179] — степень соответствия реального (фактического или ожидаемого) результата операции требуемому (желаемому) или, иными словами, степень достижения цели операции.

ОТМЕТИМ. Под ЭО понимается (см. [**33**, с. 12]) степень ее приспособленности к выполнению стоящей перед ней задачи (чем лучше организована операция, тем она эффективнее).
ОТМЕТИМ [**36**, с.21]. Специалисты полагают, что понятие эффективности относят, как правило, к операции. Однако *техническая система* (ТС) в самой операции выступает как активное средство достижения цели, и тогда *эффективность операции* отождествляется с *эффективностью* ТС.

Определение 1.14(**в**)
Техническая эффективность [**36**, с. 177] — степень приспособленности системы к выполнению задачи, обусловленная техническими *параметрами* и надежностью ее элементов.

Определение 1.14(**г**)
Параметр системы [**36**, с. 181] — показатель, количественно определяющийся свойствами элементов той физической системы, в которой происходит моделирующий процесс.

ОТМЕТИМ. Специалисты полагают, что на практике при исследовании *эффективности* исследователи, как правило, сталкиваются со следующими двумя проблемами [**36**, с. 21]:
- проблема оценки эффективности;
- проблема выбора рационального способа действий (выбора стратегий).

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**36**, с.64]. Исследование эффективности операции выполняется всегда с точки зрения интересов основного субъекта операции, которого называют ЛПР.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**36**, с.21]. Оценки эффективности предполагает формулировку *цели операции* (т.е. требуемого результата), а также выбор и обоснование *показателя эффективности*, вычисления значения выбранного показателя.

Определение 1.14(**д**)

Показатель эффективности (**ПЭ**) (см. и ср. [**36**, с. 21, 40]) — показатель, количественно выражающий (измеряющий) степень соответствия реального результата операции требуемому (**ПЭ** — это мера удовлетворения потребности).

ОТМЕТИМ [**36**, с. 39]. Специалисты полагают, что *показатель эффективности* должен отражать имеющуюся информацию об объективной полезности принимаемых решений, оценивать целесообразность наших действий с позиций более высокого уровня рассмотрения исследуемой системы.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**36**, с. 62]. Формирование *показателя эффективности* — это важный этап исследования **ЭО**. Этот этап является сложной и многошаговой итеративной процедурой. Причем сама эта процедура не может быть полностью формализована.

Определение 1.14(**е**)

Показатель [**36**, с. 173] — количественная характеристика какого-либо свойства системы или целенаправленного процесса, являющаяся результатом измерения или расчета.

Далее будем полагать, что эффективность ТС оценивается с помощью одного единственного ПЭ или с помощью нескольких ПЭ, причем с ПЭ связано правило или способ принятия решения с учетом эффективности системы. Это правило и будем называть критерием эффективности. Обычно на практике, имея ПЭ, можно сформулировать и сам КЭ. Саму ТС можно оценивать по набору показателей, некоторые из которых являются варьируемыми параметрами или заданными параметрами.

Кратко рассмотрим проблему выбора ПЭ. Оценивать эффективность можно как отдельной операции, так и всей ТС. На практике реальная техническая система может быть представлена только одной операцией или совокупностью из целого ряда операций, которые выполняются в ТС.

Для того чтобы можно было судить об *эффективности* ТС (ЭТС) и сравнивать различные варианты, необходимо ввести совокупность показателей эффективности и сформулировать критерии (или критерий) ЭТС. Обычно для каждого класса ТС применяют свои ПЭ, с учетом специфики и *целевого назначения* (ЦН) ТС.

Опираясь на работы [**2**, **7**, **8**, **11**, **12**, **13**, **14** и др.], сформулируем требования к ПЭ ТС, который **должен**:

1) быть достаточно простым [**11**, **13**], понятным [**13**, с. 185] и обозримым;

2) иметь ясный и однозначный физический смысл [**7**, с.106];

3) быть чувствительным к варьируемым параметрам [**11**], значение которых необходимо определить для повышения ЭТС;

4) соответствовать реальному процессу работы системы;

5) допускать его оценку по экспериментальным данным [**7**, с.106] и с помощью моделирования (по возможности, статистические оценки должны быть *состоятельными* [**12**, с. 186; **14**, с. 452], *несмещенными* [**14**, с. 452] и *эффективными* [**12**, с. 187-189; **14**, с. 453]).

Практика показала следующее. Для того чтобы ПЭ удовлетворяли перечисленным выше требованиям, необходимо:

1) разработать ПЭ так, чтобы они непосредственно отражали специфику системы и соответствовали ее ЦН;

2) выделить в составе ПЭ варьируемые параметры и выполнить с их помощью исследования ЭТС;

3) проверить адекватность модели ТС, которая используется для оценки ТС по выбранным ПЭ;

4) создать <u>средства</u> ускоренной оценки (при заданной точности) ПЭ, требующих чрезмерных затрат для их вычисления.

Известно, что подходящие, удачно выбранные ПЭ позволяют оценить качество системы с точки зрения ее эффективности и сравнить ее варианты по каждому из них. Наличие единого показателя, являющегося сверткой таких ПЭ, значительно облегчает разработчику выбор лучшего варианта системы, обеспечивающего большую эффективность. При этом состав набора таких ПЭ непосредственно вытекает (следует) из особенностей (специфики) систем и требований к ней (оперативность, способность правильно отвечать на запросы, небольшие затраты и т.п.).

Использовать один единый и всеобъемлющий показатель эффективности, учитывающий хотя бы основное многообразие требований пользователей и разработчиков систем, как показал опыт разработки реальных *автоматизированных фактографических информационно-поисковых систем* (АФИПС), **не всегда** удается.

***Пример* 1.В**

Анализ особенностей (специфики) функционирования такого класса систем, как АФИПС, а также их целевого назначения показал, что для оценки эффективности фактографического поиска в АФИПС необходимо использовать следующие ПЭ:

$\boldsymbol{P_0}$ — вероятность правильного ответа на запрос (отношение числа правильных ответов АФИПС на запрос пользователя к их общему числу);

$\boldsymbol{T_0}$ — среднее время ответа на запрос (усредненное время по всему множеству ответов АФИПС на запросы пользователя, включая как правильные, так и неправильные ответы);

$\boldsymbol{L_0}$ — средняя длина *рекомендательного списка* (РС), выдаваемого человеку-оператору на запрос (усредненная длина РС по всему множеству ответов АФИПС на запросы пользователя, включая как правильные, так и неправильные ответы);

$\boldsymbol{N_0}$ — число записей в фактографической базе данных;

$\boldsymbol{K_0}$ — затраты на реализацию АФИПС (единовременные затраты на разработку, изготовление и внедрение системы);

$\boldsymbol{C_0}$ — средние эксплуатационные затраты на обработку одного запроса пользователя АФИПС;

$\boldsymbol{A_0}$ — среднее число запросов в год, обрабатываемых в АФИПС.

На практике обычно стремятся T_0, L_0, C_0, K_0 уменьшить, а P_0, A_0, N_0 — увеличить.

ОТМЕТИМ. Критерии эффективности технической системы и ПЭ либо задаются в *техническом задании* (ТЗ), либо КЭ и ПЭ должны быть приняты на начальной стадии разработки системы.

Известно [**2**, с. 20], что для применения количественных методов требуется какая-то модель. Чем удачнее будет модель, тем успешнее будет проведено исследование и полезнее вытекающие из него рекомендации (а значит, более удачными будут принятые решения). Общих способов разработки математических моделей не существует. Специалисты полагают, что разработка математической модели — это искусство, а опыт их построения приобретается постепенно.

ОТМЕТИМ [**2**, с. 22]. Создание (или выбор готовой) математической модели — наиболее ответственная (важная часть) исследования, требующая глубокого знания не столько математического аппарата, сколько самого существа моделируемого явления.

<u>Основные виды моделирования</u>

Модели могут быть разными. Общепризнанной (см. работу [**4**, с.228]) единой классификации моделей в настоящее время не существует.

Моделирование (см. работу [**4**, с. 227-228]) основывается на принципе *аналогии* и позволяет в случае *адекватности* модели исследуемому объекту изучать его. В одних случаях модель может только *качественно* описать поведение объекта, а в других и *количественно*.

На базе одних и тех же экспериментальных данных можно построить <u>достаточно много</u> различных моделей. Однако используются на практике **не все**. При создании модели следует учитывать следующее:

- модель (см. [**2**, с. 21]) должна быть достаточно проста и адекватна действительности;
- она должна быть гибкой и применимой к различным задачам;
- она должна допускать различные вычисления;
- с ней должно быть легко работать, а результаты должны быть наглядны;
- затраты на создание модели и выполнения операций на ней должны быть умеренны.

Аналитические модели (см. работу [**5**]). Создаются на базе формул (представляя величины в виде некоторого выражения) и аналитических выражений (где не более чем счетная совокупность арифметических операций и переходов к пределу).

Имитационные модели (см. работу [**4**, с.135] и др.). На практике эти модели иногда создаются на базе программ для ЭВМ. Эксперимент над моделью состоит в наблюдении за результатами работы программы, которая имитирует работу реальной системы. Имитация подразумевает испытание модели в предположении, что поведение ее адекватно реальной системе.

<u>*Определение 1.15*</u>

Адекватность модели (см. работу [**4**, с. 20] и др.) — соответствие модели моделируемому объекту или процессу.

Важно понимать следующее.

- **Полного** соответствия (см. работу [**4**, с. 20] и др.) быть не может: иначе это не модель, а сам объект или процесс.
- **Адекватность** (см. работу [**4**, с. 20]) понимается не вообще, а только по тем свойствам модели, которые являются существенными для исследователя (заказчика модели) и *системного анализа*.
- **Наличие** адекватного поведения модели позволяет предсказывать поведение реальной системы.
- **На практике** *адекватность* проверяют экспериментальным путем, используя заранее выбранный <u>критерий</u>.
- **Один** из возможных путей — проведение *статистических испытаний* технических систем по оценке показателя качества ее работы, например, вероятности $\boldsymbol{P}$ того, что ТС правильно ответит на запрос *человека-оператора* (ЧОП). Для $\boldsymbol{P}$ определяется *доверительный интервал* (точность) при <u>заданной</u> *доверительной вероятности* (надежности) и проверяется, накрывает ли этот интервал оценку $\boldsymbol{P}$, полученную на модели. Если накрывает, то экспериментальные данные не противоречат тем, что получены на модели, и полагают, что адекватность подтверждается экспериментом.

ОТМЕТИМ [**4**; **60**, с.84, 326 и др.]. *Валидация* и *верификация* —это термины, связанные с понятием *адекватности модели*.

1.2.3. Задачи исследования операций (прямые и обратные задачи ИО, детерминированные задачи, оптимизация)

Специалистами [**2**, с. 25] принято, что задачи ИО можно разделить на *прямые* и *обратные*. **Прямые задачи** позволяют для данного решения получить значение показателя эффективности. Для этого разрабатывается или берется уже готовая математическая модель, позволяющая получить значение показателя эффективности, через заданные условия и *элементы решения*. **Обратные задачи** позволяют выбрать решение так, чтобы показатель эффективности обратился в максимум (или минимум). Для решения обратной задачи надо решить прямую задачу.

ОТМЕТИМ. В процессе создания различных технических систем (например, криминалистических, радиолокационных, медицинских и др.систем) решаются задачи двух видов [**3**, с. 5]: *анализа* и *синтеза*. Задача анализа (**прямая**) — заданы характеристики системы и процесса, действующего на входе, и требуется определить характеристики процесса на выходе системы. Задача синтеза (**обратная**) — заданы характеристики процесса, действующего на входе системы, и требуемая характеристика процесса на выходе системы, и требуется найти такую систему, которая преобразовывала бы процесс с заданной характеристикой в процесс с требуемой характеристикой.

ОТМЕТИМ [**3**, с. 5-6]. Задача **оптимального синтеза** в статистической формулировке — это есть определение (нахождение) наилучшего (в некотором смысле) образа действий, позволяющего по наблюдаемой (имеющейся) реализации входного воздействия *принять решение* о характеристиках этого воздействия, как случайного процесса.

Кратко рассмотрим постановку задачи оптимизации решения (обратной задачи в общей форме) [**2**, с. 26-29]. Пусть имеется некоторая операция $\boldsymbol{Q}$, на успех которой можно влиять путем выбора решения $\boldsymbol{d}$ ($\boldsymbol{d}$ — группа параметров). Пусть эффективность операции $\boldsymbol{Q}$ характеризуется *одним* показателем $\boldsymbol{W} \to \max$. Пусть имеем дело с **детерминированным** случаем — все условия операции полностью известны заранее, т.е. не содержат *неопределенности*. В этом случае все факторы, от которых зависит успех операции, можно разделить на две группы:

1) заданные, заранее известные факторы ***U*** (т.е. условия выполнения операции и ограничения, налагаемые на решение (что и определяет область возможных решений ***D***));
2) зависящие от нас *элементы решения,* образующие в своей совокупности решение ***d***. Показатель ***W*** зависит от ***U*** и ***d***: ***W***=***W***(***U***, ***d***). Будем полагать, что вид зависимости ***W***(***U***, ***d***) известен (т.е. решена прямая задача). В общем случае ***U*** и ***d*** — это не числа, а совокупности чисел (т.е. векторы), функции и т.п. В ***U*** могут иметься ограничения, налагаемые на решение в виде неравенств или равенств. Тогда обратная задача формулируется следующим образом [**2**, с. 27]:

   *При заданном комплексе условий **U** найти такое решение **d**=**d***, которое обращает показатель эффективности **W** в максимум (минимум).*

   В случае максимума можно записать: $W^* = \max\limits_{d \in D} \left\{ W\left(\boldsymbol{U}, d\right) \right\}$. В такой формулировке это (см. [**2**, с. 28]) типичная задача нахождения максимума функции или функционала.

Хорошо известно, что классический математический анализ, аналитическая геометрия, линейная алгебра и некоторые другие дисциплины математики являются фундаментальной основой современной теории оптимизации. Широкое использование дифференциального исчисления в классической теории оптимизации позволяет исследователю определять точки экстремумов целевых функций (для критериев эффективности информационных систем). Теория и практика решения реальных оптимизационных задач [**2**, **9**, **10**, **15**-**18**] предлагает сегодня исследователю широкий спектр методов и средств для поиска экстремумов целевых функций (для критериев эффективности ТС).

Принято, что раздел математики *математическое программирование* содержит:

- *линейное программирование;*
- *нелинейное программирование;*
- *динамическое программирование;*
- *геометрическое программирование;*
- *целочисленное программирование;*
- *стохастическое программирование*;
- *выпуклое программирование;*
- *и т.п.*

Каждый из приведенных выше разделов посвящен методу решения определенного класса оптимизационных задач, который определяется **видом целевой** функции и **видом ограничений**, используемых в условиях задачи.

В достаточно общем виде (для случая поиска максимума) задача *математического программирования* может быть записана как $f(\vec{x}) \to \max;\ \vec{x} \in M$, где $f(\vec{x})$ — целевая функция; $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$; M — область допустимых значений для переменных $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

На практике обычно область *M* задается (определяется) конечной системой условий — неравенств вида $\varphi_i(\vec{x}) \leq 0, \quad i \in \mathrm{N}$, где $\varphi_i(\vec{x})$ — заданные функции (*ограничения*). Все или часть *ограничений* может быть задана равенствами или строгими неравенствами. В зависимости от вида целевой функции $f(\vec{x})$ и функций $\varphi_i(\vec{x})$, задающих область *M*, применяется соответствующий инструмент (метод) из раздела *математического программирования* для нахождения экстремума. Так, например, если $f(\vec{x})$ <u>нелинейная</u>, то используют *нелинейное программирование;* если целевая функция $f(\vec{x})$ и функции $\varphi_i(\vec{x})$ <u>линейны</u>, то — *линейное программирование;* если дополнительно накладывается условие на переменные, что они должны быть <u>целыми</u>, то используют *целочисленное программирование* и т.д. Более точные условия применения методов *математического программирования* приведены в соответствующих работах [**15, 16, 17** и др.].

Анализ оптимизационных задач, связанных с повышением *эффективности* ТС (ЭТС), показал следующее:

1) в общем случае целевая функция нелинейная;

2) ограничения могут быть представлены как неравенствами, так и равенствами; функции в них могут быть нелинейными;

3) часть функций и их переменных, используемых в задачах, могут быть дискретными и заданы в виде таблицы;

4) некоторые переменные (варьируемые параметры) могут принимать целочисленные положительные значения;

5) пути решения оптимизационных задач известными методами не всегда очевидны, и приходится искать *рациональные решения*.

Далее для ТС под *задачей поиска рационального решения* понимается такая задача, которая может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} f_1\left(\vec{x}\right) \ge f_{1\,\text{здн}}, \\ \quad\vdots \\ f_i\left(\vec{x}\right) \ge f_{i\,\text{здн}}; \end{cases} \qquad (\mathbf{1})$$

$$\begin{cases} f_{i+1}\left(\vec{x}\right) = f_{i+1\,\text{здн}}, \\ \quad\vdots \\ f_m\left(\vec{x}\right) = f_{m\,\text{здн}}; \end{cases} \qquad (\mathbf{2})$$

$$\vec{x} \in M\,, \qquad (\mathbf{3})$$

где $f_i\left(\vec{x}\right)$ — i-й ПЭ ТС; $f_{i\,\text{здн}}$ — предельное значение для i-го ПЭ (i=1÷m); M — область допустимых значений для $\vec{x}$, где $\vec{x} = \left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\right)$; переменные $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ являются варьируемыми параметрами, определяющими ЭТС (n — число варьируемых параметров).

Таким образом, задача поиска *рационального решения* состоит в том, чтобы решить систему неравенств (**1**) при заданных ограничениях (**2**) с учетом (**3**) для ПЭ ТС.

<u>Определение 1.16</u>
Далее под *рациональным решением* понимается любое решение $\vec{x}_0 \in M$, удовлетворяющее системе неравенств (**1**) при заданных ограничениях (**2**) с учетом (**3**).

Для того чтобы успешно решить поставленную задачу поиска *рационального решения* разработчику, необходимо знать, как зависят ПЭ $f_i(\vec{x})$ от варьируемых параметров $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, и поэтому необходимо провести исследования ПЭ от этих параметров.

В зависимости от исходных данных в ТЗ на ТС, от вида ПЭ и наложенных на них ограничений у исследователя для решения оптимизационной задачи, связанной с повышением эффективности, имеются следующие альтернативы:

1) у него есть возможность свести оптимизационную задачу к той, для которой уже разработан метод ее решения;

2) у него нет такой возможности и нет ресурса для разработки нового метода оптимизации.

Совершенно очевидно, что первый случай, как правило, проще второго.

ОТМЕТИМ. Исходные данные для решения *задачи поиска рационального решения* обычно задаются в *техническом задании* (ТЗ) на систему. В ТЗ также указывают и $f_{i\,\text{здн}}$ — предельное значение для *i*-го ПЭ.

ОТМЕТИМ [**4**, с. 26]. На практике постановка задачи ИО может считаться *законченной* лишь тогда, когда составлен (определен) список *альтернатив* и *способ* (критерий) выбора наилучшей из них для достижения поставленной *цели*.

ОТМЕТИМ [**30**]. Для **операций** наблюдается определенная *цикличность*. В каждом **цикле** можно отметить **пять** этапов:

1. Формулировка цели (постановка задачи).
2. Составление модели. Модель выражает эффективность исследуемой системы как функцию множества переменных, из которых, по крайней мере, одно поддается управлению. Ограничения, наложенные на переменные, могут быть выражены в дополнительной системе *равенств* или *неравенств*.
3. Исполнение решения – проведение операции и получение оптимального результата (определение алгоритма поиска оптимального решения, программирование, поиск решения на ЭВМ).
4. Оценка результата и проверка модели, построение процедуры подстройки решения. Решение может быть оценено путем сопоставления результатов, полученных ранее, или путем практических испытаний. Подстройка решения еще необходима из-за изменившихся внешних условий.
5. Рекомендации на будущее (реализация решения).

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**30**]. При принятии решения и его оценке необходимо *учитывать* различные *факторы* – это ресурсы:

1) рабочая сила, время, сырье, оборудование, средства производства, транспортные средства, средства связи, вооружения и т.д.;

2) природные и технические характеристики и законы;

3) идеологические, морально-политические и психологические.

Факторы 1 и 2 подвергаются количественному анализу с целью оптимизации планов и решений, а факторы 3 количественно оценить иногда трудно, так что учитывать их – это искусство.

Кроме основных понятий исследования операций важную роль также играют основные понятия системного анализа.

1.3. Основные понятия системного анализа

1.3.1. Системный анализ и системный подход

Исторически сложилось так (см. [**39**, с. 10]), что в рамках ИО появилась на свет такая дисциплина как *системный анализ*, которая стала новым разделом теории исследования операций.

В рамках *системных представлений* для анализа сложных объектов и процессов рассматривают (см. [**38**, с. 26]) *системные направления*, содержащие *системный подход*, *системные исследования, системный анализ* (системологию, системотехнику и т.п.). Специалисты полагают, что (см. [**38**, с. 27]) за исключением системотехники все другие термины часто используются как синонимы.

Определение 1.17(**а**)
Системный анализ [**32**, с. 180] — подход, включающий ряд *аналитических приемов,* взятых из математики, техники, исследования операций и науки об управлении.

Определение 1.17(**б**)
Системный анализ — это [**4**, с. 373]:
- Научна дисциплина, разрабатывающая общие принципы исследования сложных объектов с учетом их системного характера.
- Методология исследования объектов посредством представления их в качестве *систем* и *анализа* этих систем.

ОТМЕТИМ [**4**, с. 373]. Системный анализ любого объекта состоит из следующих трех главных этапов:

1. Постановка задачи — определение объекта исследования, постановка целей, задание критериев для изучения объекта и управления им.
2. Выделение системы, подлежащей изучению, и ее структуризация.
3. Составление *математической* модели изучаемой системы: параметризация, установление зависимостей между введенными параметрами, упрощение описания системы путем выделения подсистем и определения их иерархии, окончательная фиксация целей и критериев. Эту модель называют *абстрактной системой*.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**30**]. Принято считать, что термин СА относится к анализу решений в очень сложных задачах, которые определены довольно неточно. Об ИО же говорят в случае анализа решений для более ограниченного класса ситуаций, когда структура задачи и цели в ней довольно хорошо определены.

ОТМЕТИМ [**30**]. Некоторые научные школы считают, что термины СА и ИО эквивалентны.

ОТМЕТИМ. Специалисты полагают (см. [**39**, с. 10]), что термин *системный анализ* — лингвистическая ошибка.

ОТМЕТИМ. В англоязычной литературе принято (см. [**39**, с.10-11]), что:

- исследователь операции — это *analyst*;
- специалист, занимающийся анализом сложных систем — это *system analyst*, а совокупность приемов исследования — *system analysis*.

ОТМЕТИМ. В русскоязычной литературе (см. [**39**, с. 11]) *анализ систем* и *системный анализ* — это разные термины (последний шире первого термина).

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**4**, с. 373]. В рамках СА любой объект рассматривается не как единое, неразделимое целое, а как система взаимосвязанных составных элементов, их свойств, качеств.

Определение 1.18
Элемент [**31**] — некоторый объект (материальный, энергетический, информационный), который обладает рядом важных для нас свойств, но внутреннее строение (содержание) которого безотносительно к цели рассмотрения.

Определение 1.19
Связь [**31**] — важный для целей рассмотрения обмен между *элементами* энергией, веществом, информацией.

<u>*Определение 1.20*</u>
Система [**31**] — совокупность элементов, которая обладает следующими признаками:

- связями, которые позволяют посредством переходов по ним от элемента к элементу соединить два любых элемента совокупности;
- свойством, отличным от свойств отдельных элементов совокупности.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**31**]. На практике любой объект с некоторой точки зрения может быть рассмотрен как *система*. ЛПР важно понять, насколько целесообразна именно такая точка зрения.

<u>*Определение 1.21*</u>
Большая система [**31**] — система, которая включает значительное число однотипных элементов и однотипных связей.
ОТМЕТИМ [**38**, с. 19]. Четкой границы между простыми и большими системами нет.

<u>*Определение 1.22*</u>
Сложная система [**31**] — система, которая состоит из элементов разных типов и обладает разнородными связями между ними. В качестве примера можно привести ЭВМ.

<u>*Определение 1.23*</u>
Структура системы [**31**] — расчленение системы на группы элементов с указанием связей между ними, неизменное на все время рассмотрения и дающее представление о системе в целом. Указанное расчленение может иметь материальную, функциональную, алгоритмическую или другую основу.

Пример **1.Г** [**31**] материальной структуры — структурная схема сборного моста, которая состоит из отдельных, собираемых на месте секций и указывает только эти секции и порядок их соединения.

Пример **1.Д** [**31**] функциональной структуры — деление двигателя внутреннего сгорания на системы питания, смазки, охлаждения, передачи крутящего момента.

***Пример* 1.Е** [**31**] алгоритмической структуры — алгоритм программного средства, указывающего последовательность действий, или инструкция, которая определяет действия при отыскании неисправности технического устройства.

<u>*Определение 1.24*</u>
Декомпозиция [**31**] — деление системы на части, удобное для каких-либо операций с этой системой.

***Пример* 1.Ж** [**31**] возможных *декомпозиций*: разделение объекта на отдельно проектируемые части, зоны обслуживания; рассмотрение физического явления или математическое описание отдельно для данной части системы.

<u>*Определение 1.25*</u>
Иерархия [**31**] — структура с наличием подчиненности, т.е. неравноправных связей между элементами, когда воздействия в одном из направлений оказывают гораздо большее влияние на элемент, чем в другом.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**31**]. Есть разные виды иерархических структур. Для практики *древовидная* структура является одной из важных иерархических структур.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**31**]. Древовидная структура наиболее проста для анализа и реализации. Кроме того, в ней всегда удобно выделять иерархические уровни – группы элементов, находящиеся на одинаковом удалении от верхнего элемента.

ОТМЕТИМ [**38**, с. 27-28]. Термин “системный анализ” применяется неоднозначно. Он впервые появился в связи с задачами военного характера в 1948 г. в исследованиях RAND Corporation.

С *системным анализом* очень тесно связано другое понятие — ***системный подход.***

Лучше всего (см. [**32**, с. 180]) *системный подход* работает в приложении к хорошо *развитым* и *надежным* научным проектам, где он позволяет решать задачи <u>более эффективно</u>, чем на *интуитивном* уровне.

Одна из особенностей системного подхода [**32**, с. 180] — представление множества *операций* некоторой *моделью,* в которой выделены *подзадачи,* их взаимосвязь с целью интеграции отдельных решений *подзадач* в <u>единое</u> *общесистемное решение*.

<u>*Определение 1.26*</u>
Системный подход (**СП**) — это (по аналогии с [**4**, с. 374]): комплексное изучение наблюдаемых явлений как единого целого с позиции системного анализа.

ОТМЕТИМ [**38**, с.7, 27]. Применяя термин СП, подчеркивают необходимость исследования объекта с разных сторон и комплексно. В основе СП лежит специальная теория – общая (абстрактная) теория систем.

ОТМЕТИМ [**4**, с. 374]. Существует двоякое понимание СП. Так, с одной стороны СП — это рассмотрение, анализ существующих систем, а с другой стороны СП — это создание или, как часто говорят, конструирование, синтез систем для достижения каких-то целей (*анализ* и *синтез* тесно связаны между собой).

ОТМЕТИМ [**2**, с. 51]. В рамках СП нельзя вырывать из цепи одно звено и рассматривать его, забывая об остальных. На практике СП в ИО сводится пока к тому, что каждое звено, работа которого оптимизируется, полезно рассмотреть как часть другой, более обширной системы, и выяснить, как влияет работа данного звена на работу системы.

ОТМЕТИМ [**30**]. Задача ИО чрезвычайно сложна, поскольку происходит периодическое расширение первоначального представления о предложенной задаче, что и составляет суть СП.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**7**, с.124]. Методологией анализа и построения технических систем, учитывающей их специфику, является СП, а соответствующий раздел науки — это *системотехника*.

<u>Основные принципы СП</u> [**7**, с.124-128] (на примере проектирования системы):

- **Проектирование должно быть комплексным** (т.е. максимально полный анализ связей, например, существующих как в объекте управления, так и в управляющей системе; всесторонняя оценка исходных предпосылок и исследование взаимодействия отдельных элементов, например, управляемой системы; максимально полный учет всех факторов, влияющих на качество системы, при анализе ее эффективности).

ОТМЕТИМ [**7**, с. 124-125]. Обычно невозможно улучшить систему по одному показателю эффективности, не ухудшив при этом значения другого показателя.

- **Процесс проектирования должен иметь иерархическую структуру** (т.е. анализ начинается с рассмотрения ВЫХОДА системы, которая представляется пока как единое целое; затем система разделяется на небольшое число достаточно крупных подсистем; исследуется вклад каждой из подсистем в формирование ВЫХОДА).
- **Основной метод проектирования — метод декомпозиции** (т.е. разбиение целого на составные части с целью исследования этих частей независимо уже друг от друга).
- **Проектирование системы — итерационный процесс** (т.е. сначала применяют приближенные методы и оценки, опуская второстепенные детали, чтобы уяснить главные явления и определить основные характеристики, что придает проектированию циклический характер, приводит к многократному анализу процесса функционирования проектируемой системы).
- **При проектировании следует предусмотреть свойство открытости системы** (т.е. не стоит стремиться сделать систему абсолютно и навсегда совершенной; надо предусмотреть возможность развития системы и ее модернизации в будущем).

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Ключевые требования на техническую систему задаются в *техническом задании* (ТЗ). Также в ТЗ обычно указывается, какую систему следует считать более эффективной и почему.

Автоматизированные системы (АС), в частности, АСОИУ или АФИПС, необходимо проектировать и разрабатывать, опираясь на комплекс стандартов и руководящих документов (см. [**19**, **20**, **21**] и др.) на АС. Основным и главным из этих документов является *техническое задание* на АС [**20**]. Особое внимание в этих документах обращается на работу человека в системе. Отметим кратко следующие моменты. С одной стороны, подготовка персонала является одним из этапов создания автоматизированной системы [**19**]. С другой стороны, эффективное функционирование АС требует специальной подготовки пользователей и обслуживающего персонала [**21**]. Требования к численности и квалификации персонала системы, режиму его работы, порядку подготовки и контроля знаний и навыков, а также требования, задающие необходимое качество взаимодействия человека с машиной, требования к оснащению системы устройствами для обучения персонала должны быть указаны в ТЗ [**20**].

ОТМЕТИМ [**20**]. Действующий ГОСТ 34.602-89 требует, чтобы число и состав операторов, их квалификация были заданы в ТЗ.

***Пример* 1.3.** В ТЗ на АФИПС, как правило, заказчиком указываются: максимальные ограничения на среднее время индексирования объекта оператором и, соответственно, ограничения на усредненные эксплуатационные затраты индексирования одного объекта, а также максимальная длина *рекомендательного списка* ($L_{\max}$), при которой отсутствуют ошибки в работе лица, принимающего решение.

ОТМЕТИМ. Исходные данные для решения задачи поиска рационального решения или для решения оптимизационной задачи обычно берутся из ТЗ на систему. Без таких данных эти задачи, как правило, не решить. Поэтому так очень важна роль ТЗ при создании именно эффективных систем.

В основе рассматриваемой технологии принятия решений существенная роль отводится лицу, принимающему решение.

1.4. Лицо, принимающее решение

«Человек знает, что хорошо, а
делает то, что плохо»
Сократ [**29**, с. 46]

Когда говорят о *человеке-операторе* (ЧОП), то понимают (см. работу [**25**, с. 19-20]) "*подготовленного к управлению данным типом сложной системы специалиста, имеющего возраст в допустимых пределах, здорового, отвечающего по своим индивидуальным качествам требованиям рассматриваемой деятельности, официально допущенного к ней*".

Определение 1.27
Далее под *человеком-оператором* (или иногда просто *оператором*) будем понимать *человека*, который был допущен к выполнению технологических операций при взаимодействии с некоторой системой (он может находиться как внутри системы, так и снаружи ее).
ОТМЕТИМ. Человек-оператор, как правило, выполняет функции *лица, принимающего решение*.

Известно (см. [**24**, с. 220]), что в ряде задач бывает полезно использовать понятие *надежности человека-оператора*, как отдельного элемента человекомашинной системы. В этом случае под безошибочной работой человека-оператора в течение определенного времени понимается вероятность его безотказной работы [**24**, с.220]. Отметим, что *надежность* оператора характеризуется показателями *безошибочности*, *готовности*, *восстанавливаемости* и *своевременности* [**28**, с. 39].

Далее будем придерживаться следующих определений (см. работу [**25**, с. 21-24]) *ошибки* и *отказа*, связанных с человеком-оператором.

Определение 1.28
Ошибка человека-оператора [**25**, с. 23-24] — такое его действие или бездействие, которое привело к отклонению управляемых параметров технической части системы за допустимые пределы или запрещено правилами.

Определение 1.29

Отказ человека-оператора [**25**, с. 24] — переход его в такое состояние, при котором становится невозможным его дальнейшее нормальное функционирование (нормальная жизнедеятельность). Отказ может проявляться и в действиях, которые привели к такому отклонению управляемых параметров за установленные пределы, отчего управляемая система перестала выполнять возложенные на нее функции.

ОТМЕТИМ [**25**, с.57]. *Надежность* человека-оператора определяется его способностью в течение заданного интервала времени в предусмотренных условиях сохранять нормальное состояние жизнедеятельности и выдерживать технические параметры управляемой системы в установленных пределах, а также выполнять все возложенные на него функции по поддержанию заданного режима работы управляемой техники.

***Пример* 1.И** (см. худ. фильм "*Дознание пилота Пиркса*" (1979 г., СССР — Польша, жанр — фантастика): *Калдер* — человекоподобный робот (член экипажа космического корабля) создал во время полета такую аварийную ситуацию, когда **любой приказ** командира корабля *Пиркса* неминуемо вел бы к гибели именно людей (люди не знали, кто из членов экипажа именно робот). В ответственный момент командир корабля *молчит* (т.е. произошел *отказ* человека-оператора), командир не отдает никаких указаний (распоряжений). В итоге, робот принял молчание за хитрость, а беспомощность командира — за прозорливость и совершил ошибку, что и спасло людей от гибели. По сюжету фильма трибунал признал пилота *Пиркса* не виновным.

Известно [**25**, с.21], что понятие *ошибки* в деятельности человека-оператора всегда соотносится с другим очень важным и существенным понятием, таким как *погрешность.*

***Пример* 1.К.** Применительно к АФИПС ошибкой ЧОП (например, индексатора) может являться неправильное определение им градации признака, например, в результате неточного измерения (с большей *погрешностью*) некоторого показателя. Отказ индексатора может возникнуть в случае поступления сложного объекта, который не может быть им заиндексирован. Ошибка лица, принимающего решение, может возникнуть в случае, например, пропуска им тождественного запросу объекта из РС, что и приводит в результате к неправильному ответу АФИПС на запрос. Отказ лица, принимающего решение, может возникнуть в случае, когда оно не может обработать РС определенной длины за имеющийся ресурс времени.

Известно [**24**, с. 37], для того чтобы *человек* реагировал на сигнал, он должен его воспринять. В некоторых случаях [**27**, с. 123] показано, что плотность распределения ошибки восприятия практически подчиняется нормальному закону распределения. Известно [**25**, с. 187], что ошибки восприятия могут порождаться плохими эргономическими характеристиками, например, индикаторов. Ошибки можно уменьшить за счет эргономического проектирования [**26**, с. 8].

В основе оценки чувствительности человека-оператора лежит понятие о пороге ощущения [**24**, с. 37]. Полагают [**24**, с. 39], что на значения порогов чувствительности достаточно сильно влияет физическое и психологическое состояние человека-оператора, в частности, степень его утомления. Из работ [**24**, с. 10; **25**, с. 129] следует, что утомление тесно связано с работоспособностью. Так, в работе [**24**, с. 10] под утомлением понимается временное уменьшение работоспособности, вызванное интенсивной или длительной работой. Выделяют **три** стадии утомления [**24**, с. 10]: *усталость*, *перегрузка*, *истощение*. Утомление влияет на безошибочность работы человека-оператора. Рассмотрение влияния состояния утомления на безошибочность работы человека-оператора, как считают авторы [**25**, с. 131], нуждается в исследовании с целью выявления более четких критериев установления той границы утомления, при достижении которой человек-оператор не имеет права работать.

В общем известно [**27**, с. 62-63; **28**, с. 43-46], как протекает деятельность человека-оператора при увеличении коэффициента загрузки [**28**, с. 43-46] или при повышении темпа [**27**, с.62-63] предъявления ему информации, на основе которой он должен производить определенные действия. Так, в случае, когда темп предъявления ему информации соответствует его пропускной способности, процент его ошибочных действий практически остается неизменным и достаточно небольшим. В случае повышения темпа предъявления информации, ответственный за порученное дело человек-оператор за счет увеличения психофизиологической нагрузки сохраняет свое прежнее качество работы. При последующем увеличении темпа человек-оператор продолжает выполнять работу с небольшим ухудшением ее качества. Если еще дальше увеличивать темп, то в итоге наступит ситуация, когда человек-оператор отказывается выполнять какие-либо действия (наступает стрессовая ситуация срыва деятельности) [**27**, с. 62-63]. Инженерно-психологические характеристики человека-оператора рассмотрены во многих работах, например, в [**24**, с. 34-37; **27**, с. 36-76; **28**], и в настоящее время достаточно хорошо изучены и известны. Различные классификации ошибок оператора рассматривались многими исследователями, например, в работах [**23**, с. 26; **25**, с. 24-30; **26**; **28**, с. 39-41].

Деятельность ЧОП регламентирована определенными инструкциями, методическими указаниями, руководствами и другими подобными документами. При пользовании этими документами ЧОП может допускать ошибки. Анализ факторов, приводящих к увеличению ошибок ЧОП, показал, что несовершенная эксплуатационная документация также порождает ошибки ЧОП [**22**, с.368-369].

Практика показала, что важно уметь выделять роль человека в процессе принятия решения. Так человек может выполнять роль, например, пользователя, консультанта или эксперта некоторой информационной системы.

Далее будем рассматривать человека, выполняющего только одну единственную роль в виде лица, принимающего решение.

Определение 1.30

Лицо, принимающее решение (**ЛПР**) — это конкретно тот *человек-оператор* (или группа *операторов*), который фактически принимает окончательное решение.

На практике, в процессе проектирования, когда требуется оценить эффективность будущей автоматизированной системы, полезно иметь в наличии модель *человека-оператора*. Эта модель является, как правило, необходимым средством для оценки эффективной его работы.

1.4.1. Эффективность человека-оператора

Эффективность человека-оператора в автоматизированной системе кратко рассмотрим (см. [**47- 54**] и др.) на примере пользователя *информационной системы* (ИС) и лица, принимающего решение в АФИПС.

Работа ЧОП при обработке предварительных результатов *фактографического поиска* (ФП), например, в виде *рекомендательного списка* в ИС или АФИПС, является, как правило, трудоемкой, напряженной и не без ошибочной. Она очень сильно влияет на конечный результат поиска, являющегося окончательным ответом АФИПС на запрос.

Действительно, если ответ на запрос содержится в конце РС (например, в списке, выданном ИС Яндекс (Yandex) в сети Internet), и при этом РС слишком длинный (например, более 500 указателей на HTML документы), то ЧОП (например, пользователь системы Яндекс) обычно прекращает его обработку, не доходя до его конца и не получив соответственно ответ на свой запрос.

Работа ЧОП на выходе АФИПС является завершением поисковых операций, где подводится итог ФП. Основная задача ЧОП — это обработать РС и сформировать ответ на запрос (т.е. ЧОП выполняет роль ЛПР). Если РС слишком длинный (содержит много похожих объектов на *объект-запрос*), то ЧОП будет тратить много времени и сил на его обработку и при этом сильно уставать.

Мы рассматриваем такие ИС и АФИПС, где работа ЧОП на выходе системы достаточно регламентирована и обычно имеются ограничения в виде директивных сроков ($\boldsymbol{T_{pc}}$) на общее время обработки РС не зависимо от его длины. В связи с этим у оператора при увеличении длины РС остается в среднем меньше времени на обработку одного документа (объекта) из РС.

Естественно, что чем больше длина РС, тем работа ЧОП в этом случае становится более интенсивной и напряженной, так как времени на просмотр всего РС у него ограниченно. В итоге ЧОП при больших длинах РС начинает допускать и больше ошибок, приводящих к пропуску цели (например, в АФИПС, невыдачи *тождественного запросу объекта* в ответ на *объект-запрос*, поступивший в качестве запроса).

При дальнейшем увеличении длины РС, как правило, наблюдаются практически одни ошибки в работе ЧОП, и в итоге — полный отказ в обработке РС со слишком большой длиной.

Для оценки эффективности ЛПР специалистами были проведены исследования с использованием действующей АФИПС.

Оператору предъявлялся очередной объект из архива АФИПС и *объект-запрос*. Решение об их тождестве ЧОП принимал путем нажатия одной из двух клавиш. Одна клавиша соответствовала его решению о тождестве объектов, а другая — об его отсутствии. При этом имелась возможность автоматически фиксировать случай отказа, когда ЧОП не успевал принять решение за выделенное время, а также фиксировать те объекты, которые не были обработаны оператором.

В первой серии экспериментов каждый из Nφ объектов предъявлялся оператору через равные промежутки времени τ.

Во второй серии экспериментов фиксировалось общее время T_{pc}, выделенное оператору на просмотр Nφ объектов (обработку РС длиной Nφ). Автоматически фиксировались и проверялись все ответы оператора. Вероятность правильной работы ЧОП оценивалась в экспериментах следующим образом:

$$P_{оп}=1-N_{ош}/N\varphi,$$

где

$N_{ош}$ — общее число ошибок, допущенных оператором, включая и его отказы (к отказам относятся также и те случаи, когда объект вообще не был обработан оператором);

Nφ — общее число объектов, просмотренных оператором.

Результаты экспериментальных исследований работы ЧОП на выходе АФИПС при обработке РС представлены на рис. 1.1. На нем показана зависимость вероятности $P_{оп}$ от L (длины РС). Для **семи** фиксированных значений L длины РС получены экспериментальные значения оценки вероятности $P_{оп}$ по частоте для ЧОП, и затем была выполнена кусочно-линейная аппроксимация отсутствующих значений для наихудшего случая так, как показано на рис.1.1 (зависимость $P_{оп}$ от L при заданном T_{pc}=1000 усл. ед.; для оператора **№1** между 2-мя сериями был интервал в 100 дней).

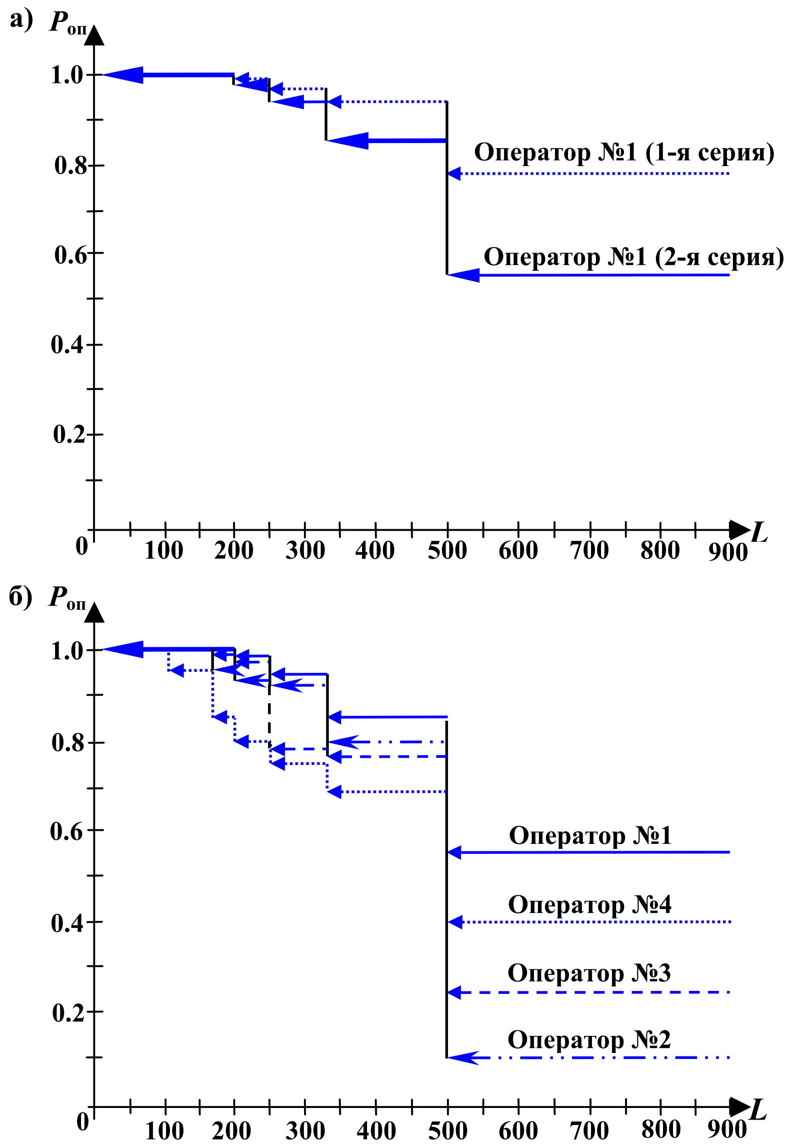
а)
$P_{оп}$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
L
Оператор №1 (1-я серия)
Оператор №1 (2-я серия)
б)
$P_{оп}$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
L
Оператор №1
Оператор №4
Оператор №3
Оператор №2

Рис. 1.1

Эта аппроксимация означает следующее. Если имеются (известны) два ближайших экспериментально измеренных значения вероятности $\boldsymbol{P}_{\text{оп}}$, то все остальные промежуточные значения между двумя другими принимаются одинаковыми и равными одному из этих двух измеренных, который является наихудшим (т.е. наименьшим) среди этих двух. Это позволяет обоснованно выбирать максимально возможную длину РС, при которой обеспечивается заданный в ТЗ режим работы ЧОП.

<u>В первой серии экспериментов</u> Nφ=1000, а время τ принимало дискретные значения

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 усл. ед.,

где **усл. ед.** для времени выбираются разработчиком исходя из прикладного характера АФИПС и самих объектов, для которых необходимо провести исследования. Результаты исследований показали, что вероятность правильной работы ЧОП убывает при увеличении длины РС и фиксированном времени, выделенном на обработку одного объекта.

<u>Во второй серии экспериментов</u> $\boldsymbol{T}_{pc}$=1000 усл.ед., а число объектов Nφ принимало дискретные значения от 1 до 1000 объектов. Режим работы ЧОП был следующий. Ему сразу предъявлялся весь РС целиком длиной Nφ и ограничивалось общее время $\boldsymbol{T}_{pc}$, отведенное ему на обработку РС, например, $\boldsymbol{T}_{pc}$=1000 усл.ед. По истечении времени $\boldsymbol{T}_{pc}$ объекты, по которым оператор не успел принять решения (отказы), фиксировались как ошибки, анализировались все его ответы и подсчитывалось общее число всех его ошибок.

Результаты второй серии экспериментов (см. рис. 1.1) в целом подтвердили результаты первой серии экспериментов. Вероятность правильной работы ЧОП также убывает при увеличении длины РС и фиксированном времени $\boldsymbol{T}_{pc}$, выделенном на всю его обработку.

ОТМЕТИМ (см. [**47-54**] и др.). Результаты других, выборочных экспериментов (аналогичных проведенным во второй серии) с реальными операторами и с реальным архивом объектов АФИПС также подтвердили полученные ранее результаты.

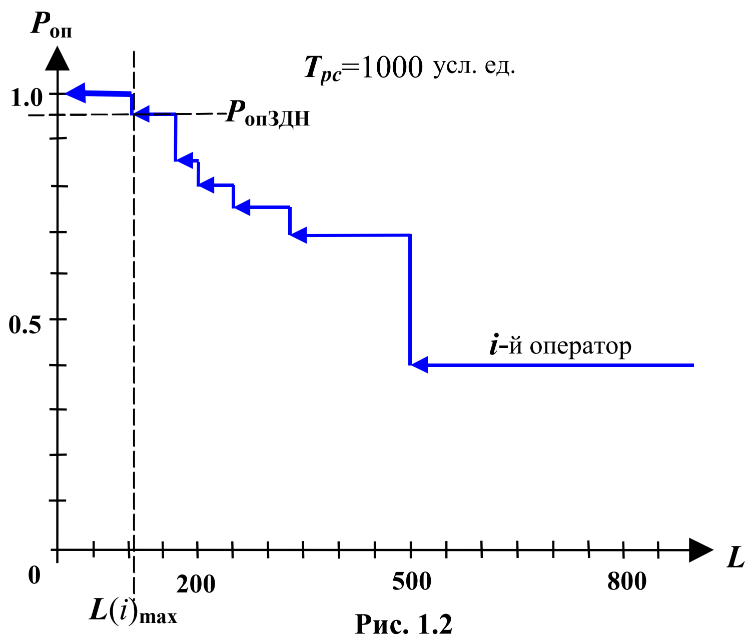

Рис. 1.2

Учет характеристик реальных ЧОП (и режимов их работы) проводится с помощью зависимостей аналогичных той, что представлена на рис. 1.2, следующим образом. Для заданного времени $T_{рс}$ и заданной вероятности $P_{оп}$ по графику (рис. 1.2) определяют $L(i)_{max}$ — максимально допустимую длину РС для i-го ЧОП и L_{max} — максимально допустимую длину РС с учетом всех ЧОП:

$$L_{max}=\min\{\, L(i)_{max} \}.$$

С помощью моделирования АФИПС определяют L_0 — среднюю длину РС, выдаваемого для ЧОП. Если $L_0 >> L(i)_{max}$, то i-й ЧОП в среднем работает порциями по $L(i)_{max}$ объектов. После каждой порции ЧОП отдыхает, восстанавливая свою работоспособность. Если $L_0 << L(i)_{max}$, то i-й ЧОП в среднем обрабатывает несколько РС, пока их общая суммарная длина не превысит допустимую для него величину $L(i)_{max}$, и затем уже ЧОП отдыхает, восстанавливая свою работоспособность. Если $L_0=L(i)_{max}$, то i-й ЧОП в среднем отдыхает после обработки очередного РС.

На практике решение может быть принято как *автоматом* (например, управляющим блоком торпеды или крылатой ракеты), так и *человеком* (например, лицом, принимающим решение).

В жизни нам (т.е. людям) приходится очень часто принимать решения. Многие полагают, что могут принимать решения и при этом полагать, что они достаточно обоснованны. Однако жизнь показывает, что некоторые решения оказываются неудачными, и нам хотелось бы их изменить, но время уже безвозвратно ушло и изменить почти ничего нельзя. Практика разработки технических систем и накопленный опыт принятия решений при их создании убедительно показывают, что принятию решений не только можно, но и нужно учиться. Есть целый раздел науки, который так и называется "*Теория принятия решений*". В этом разделе сконцентрированы знания многих других разделов, таких как *исследование операций*, *системный анализ, искусственный интеллект, теория игр, теория распознавания образов*, *теория вероятностей*, *математическая статистика* и ряд других.

В процессе принятия решения можно выделить [**1**, с. 6-7] следующие основные его элементы:

- **задание (формулирование) цели**. Если нет цели, то и нет проблемы в принятии решения;
- **измерение** близости к цели (т.е. измерение того, насколько мы близки к цели);
- **где и как добыть информацию**, необходимую для решения;
- **выработка** оптимального (или рационального) решения;
- **реализация** выбранного решения на практике.

В древней Индии считалось [**1**, с. 7], что есть три источника получения сведений: ОПЫТ, СЛОВО МУДРЕЦА, ОЗАРЕНИЕ. Много воды утекло с тех пор, но эти источники не изменились. В современной трактовке исходные данные получают из эксперимента, а СЛОВО МУДРЕЦА — это, например, экспертный опрос. Исследователя, который размышляет (работает) над проблемой, рано или поздно посещает ОЗАРЕНИЕ, и ему становится ясно, как следует поступать в той или иной ситуации. Известно [**1**, с. 7], что ОПЫТ приводит к пересмотру цели, совершенствованию методов обработки данных, оттачиванию техники выработки решений и, в конечном итоге, претворению их на практике.

Можно выделить (см. работу [**1**, с. 21]) три основных этапа в процессе принятия решений (рис. 1.3). **I этап**: ПОДГОТОВКА решения, **II этап**: ВЫБОР решения, **III этап**: ВЫВОД (заключительные выводы). Иными словами, процесс принятия решения можно разделить на три стадии [**1**, с. 185]: подготовка к решению; собственно решение; заключительная стадия.

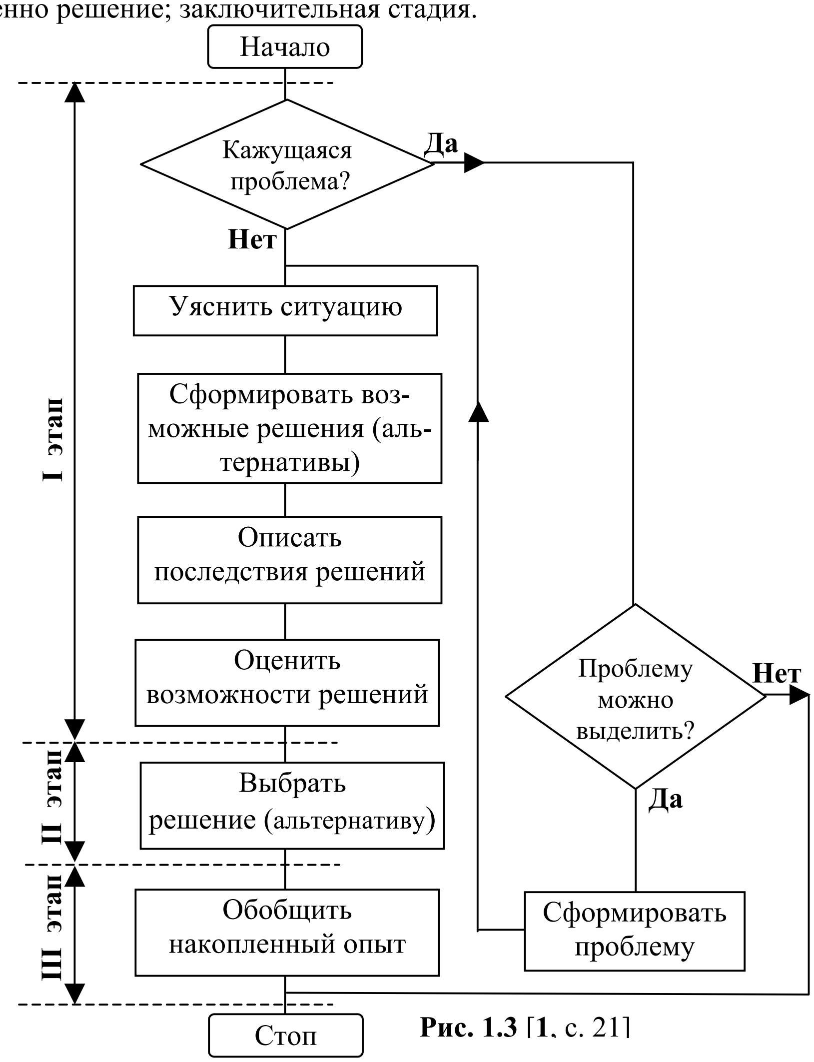

Рис. 1.3 [**1**, с. 21]

Семь основных ошибок при принятии решений [**1**, с.192]:

1. Необдуманные решения (отодвигать решение до тех пор, пока для подготовки уже не останется времени).

2. Слепые решения (закрывать глаза на возможные последствия решения или вовсе не думать о них).

3. Эгоцентричные решения (в качестве критерия ориентироваться только на самого себя и собственную выгоду и не беспокоиться о других последствиях).

4. "**Гениальные**" **решения** (решать только по вдохновению (по интуиции)).

5. Эмоциональные решения (решать на основе симпатий, настроений или расположения духа, отбрасывая всякие рациональные соображения).

6. Самодовольные решения (считать себя непогрешимым и "высокомерно" отказываться от советов других лиц).

7. Глупые, упрямые решения (не желать учиться на ранее принятых решениях, совершать одни и те же ошибки).

Что делать, если ошиблись при принятии решений [**1**, с.192]?

На практике тот, кто действительно принимает решение, рано или поздно сталкивается с тем, что допущена ошибка, и принятое решение не оправдалось. Например, могут появиться ошибочные решения (которые нельзя поставить в вину лицу, принимающему решение) в следующих возможных случаях:

- в используемой информации есть "решающие" пробелы, которые невосполнимы, если вместо точных данных приходится оперировать только грубыми оценками;
- в условиях, в которых принимается решение, неожиданно появляются новые обстоятельства;
- исходная ситуация неблагоприятна и не допускает улучшения.

На практике, если ошибочное решение все-таки имело место, то обычно имеются две возможности [**1**, с.192]:

1. Быстро пересмотреть решение (т.е. *отменить* его и найти другое (лучшее) решение; если это невозможно, то исполнить решение и перейти к реализации *второй* возможности; в этом случае должен быть какой-то резерв времени на пересмотр).

2. Оттянуть как можно дольше нежелательные последствия (т.е., встретить **последствия**, подготовившись тщательно к ним, проведя необходимые мероприятия).

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**1**, с. 194]. В случае принятия ошибочного решения <u>важно</u> *уметь честно признать свое решение ошибочным* (иногда перед самим собой, и возможно, наперекор другим). Тогда еще есть шанс, что всё можно поправить. Если же ошибочное решение — плод человеческого упрямства, малодушия, трусости или других подобных причин, тогда всё "беспросветно" плохо, особенно когда человек пытается переложить последствия своего ошибочного решения на других.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**1**, с.14-15]. Необходимо различать *иллюзию* и *действительность*. Так ЛПР, прежде всего, должен убедиться, а действительно ли перед ним стоит та или иная проблема. Многие проблемы на практике являются только кажущимися. Известен случай, когда *М. Планк* начал свой знаменитый доклад в 1946 г. "Кажущиеся проблемы науки" вопросом: "На какой стороне в зале (где он выступал) находятся окна — справа или слева?" Понятно, что на этот и ему подобные вопросы можно корректно ответить тогда, когда одновременно указывается собственное местоположение. В этом случае вопрос имеет смысл и допускает решение. В более сложных (не столь очевидных) случаях возникают *кажущиеся проблемы,* для которых не хватает определенных предпосылок.

<u>На практике можно выделить четыре разновидности *кажущихся проблем*</u>:
1. Не хватает определенных предпосылок. (Какое соединение лучше — пайка или сварка? Что лучше — самолет или вертолет? Какой отпуск лучше — на море или в горах? Ответ на последний вопрос зависит от состояния здоровья адресата, что ему противопоказано. В таких или подобных постановках эти вопросы не могут

быть разумно разрешены. В них не достает подробностей, которые позволили бы из них получить альтернативы.)

2. Личные взгляды, вкусы, пристрастия и т.п. (закрывать глаза на возможные последствия решения или вовсе не думать о них). Какая группа лучше — “*Любэ*” или “*Алиса*”? Что вкуснее — дыня или земляника? Это все не разрешимые вопросы. Их разумнее ставить (задавать) в ином ключе, например: “Нравиться ли Вам…?”, “Что Вы больше предпочитаете…?”

3. Неправомерные альтернативы (на самом деле, никаких альтернативных решений (вариантов) нет, а есть жесткая обусловленность теми или иными обстоятельствами. Например, некто один едет на велосипеде (без инструментов для ремонта колеса велосипеда) по безлюдной местности и у его велосипеда внезапно лопнула шина. Что ему делать? Варианты: **1** — ремонтировать; **2** — остановить машину; **3** — тащить велосипед до ближайшего населенного пункта. Из трех теоретических вариантов решения проблемы у него практически есть только одна — тащить велосипед до ближайшего населенного пункта).

4. "**Логические ловушки**". (Капитан судна приказал парикмахеру (мужчине) побрить всех мужчин на судне, которые не бреются сами. Вопрос о том, должен ли парикмахер побриться сам, для него не разрешим.)

ОТМЕТИМ [**1**, с. 30-33]. В случае принятия важных решений требуется некий минимальный интервал времени, который зависит от ЛПР и от сущности решаемой задачи. Если этот интервал очень мал, то *глубоко*, *всесторонне* обдумать проблему практически невозможно. Если это интервал очень большой (слишком длительные сроки принятия решения), то это также плохо. Откладывания в долгий ящик и бесконечно откладываемые (затягиваемые) решения могут привести к тому, что принятое поздно решение с большей вероятностью приведёт к плачевным последствиям, чем решения, принятые заблаговременно. Следует различать следующие (см. работу [**1**, с. 32]) пять случаев **A**, **B**, **C**, **D**, **E** на рис.1.4.

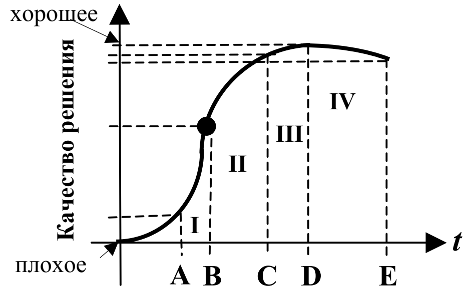

Рис. 1.4 [**1**, с. 32]

<u>Случай</u> **1**. Времени (зона **I** и точка **A**) для принятия решения очень мало. ЛПР вынужден считаться с тем, что возможны ошибочные решения (качество решения очень плохое). Надо попытаться как-то выиграть время на обдумывание. Даже небольшой дополнительный резерв времени может значительно улучшить решение (точка **B**).

<u>Случай</u> **2**. Времени (точки **B** и **C**) больше, чем в случае **1** (точка **A**), но все-таки мало для важных проблем. Кривая в зоне **II** начинает подниматься медленнее, чем в зоне **I** (есть точка перегиба).

<u>Случай</u> **3**. Качество (зона **III**) решения слабо увеличивается со временем ***t***. Дополнительные затраты времени нужны очень большие, и их используют для важных решений.

<u>Случай</u> **4**. Максимальное (точка **D**) качество решения (стоит делать в исключительных случаях).

<u>Случай</u> **5**. Из-за постоянных (зона **IV**) задержек решение до того затянулось, что вся проблема не может быть разрешена без отрицательных последствий. Так поступать не целесообразно.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**1**, с.36]. Некоторые люди боятся ошибочного решения. Закрывать глаза на последствия нельзя. Это не поможет, так как риск не становится меньше. Опасности ошибочного решения можно противопоставить только более тщательную его подготовку.

ОТМЕТИМ [**1**, с. 37-38]. В случае анализа исходной ситуации при принятии **особо важных** решений ЛПР необходимо заранее подготовить специальную форму, представленную в табл. 1.2 (см. работу [**1**, с.38]). В этом случае вероятность того, что какой-то аспект будет упущен, существенно снижается.

Таблица 1.2. **Форма для анализа исходной ситуации**

№	Вопрос на который следует получить ответ	
1	**КТО** должен принимать решение?	
	Должностное лицо: Имя: Должность: Область деятельности: Особые черты:	*Коллектив*: Название: Должности сотрудников: Деятельность: Особенности:
	Контрольный вопрос: Уверены ли Вы в компетентности этих лиц?	
2	**ГДЕ** должно приниматься решение?	
	Место: Описание: Положение: Условия:	*Служебная инстанция*: Описание: Адрес: Круг обязанностей:
	Контрольный вопрос: Гарантировано ли соответствие решаемому вопросу?	
3	**КОГДА** должно принимать решение?	
	Дата: *Не раньше*: *Не позже*: *Продолжительность*: *Частота*: *Состояние*: *Контрольный вопрос*: Достаточно ли времени?	
4	**КАК** следует поступать при реализации решения?	
	Необходимая информация: *Источники информация*: *Необходимые действия*: *Контрольный вопрос*: Целесообразен ли способ действия?	
5	**ЧТО** составляет суть решения?	
	Назначение или цель: *Числовые данные*: *Обоснование*: *Возможности оптимизации*: *Польза*: *Контрольный вопрос*: Полностью ли описан полезный эффект?	

ОТМЕТИМ [**1**, с. 74-77]. Задача подготовки решения состоит в оценке возможных альтернатив (вариантов) с точки зрения их последствий. Следующие десять вопросов помогут в подготовке решения (см. работу [**1**, с.76]):

1. Что и **КТО** выиграет при некотором варианте решения?

2. Что и **КТО** потеряет при некотором варианте решения?

3. КАКИЕ новые задачи встанут после принятия и реализации решения?

4. КАКИЕ обязанности появятся после принятия и реализации решения?

5. КАКАЯ новая ситуация возникнет после принятия и реализации решения?

6. КАКИХ побочных действий (положительных и отрицательных) следует ожидать после принятия и реализации решения?

7. ПРИНЕСЕТ ли это решение пользу обществу (другим людям)?

8. ПРИНЕСЕТ ли это решение вред обществу (другим людям)?

9. ВОЗНИКНУТ ли в результате принятого решения новые проблемы?

10. ПОТРЕБУЮТСЯ ли в результате принятого решения новые решения?

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**1**, с. 185-188]. Необходимо извлекать уроки из опыта принятых решений. После того как пришли к какому-то решению, необходимо собрать и сохранить на будущее накопленный багаж новых знаний. **ВАЖНО** [**1**, с. 185]: "*свой образ действия, свое поведение постоянно подвергать оценке*".

<u>Перечислим некоторые рекомендации для ЛПР</u> (см. [**1**, с. 186-187]):

- ♦ необходимо сохранять все документы, на основании которых принималось *важное* решение (для того чтобы к ним можно было вернуться);
- ♦ необходимо поставить перед собой вопросы следующего содержания [**1**, с. 186-187]:
  1. Правильно ли оценена исходная ситуация?
  2. Совпадает ли новая подлежащая решению задача с той, которая уже встречалась ранее? Есть ли различия и какие?
  3. В полной мере ли я сумел охватить возможные варианты принятия решения, или упустил из рассмотрения некоторые возможности, или же, напротив, рассмотрел излишние?
  4. Правильно ли я рассчитал или оценил последствия решения?
  5. Правильные ли критерии решения я использовал?
  6. Правильный ли метод я избрал, или какой-нибудь иной способ может оказаться более подходящим?
  7. Располагал ли я достаточной и надежной информацией?
  8. Существует ли какая-нибудь новая информация или новые источники информации?

ОТМЕТИМ [**1**, с. 187]. На представленные выше вопросы и им подобные следует получить ответы, не дожидаясь следующего очередного решения.

ОТМЕТИМ [**29**, с. 126]. Практика выработала следующие три эвристических правила, которые могут быть вам полезны:

1. **В ситуации**, для которой известен только один вариант решения, никогда не принимай его и не отклоняй. Даже если этот вариант кажется хорошим, отложи решение и попробуй найти другие варианты. Лишь сравнение нескольких вариантов позволит выбрать лучший.

2. **Положительное** решение принимай лишь в случае полной уверенности в его правильности. Если сомневаешься — решай отрицательно.

3. **Никогда** не используй своей власти до тех пор, пока не использованы все другие средства, но в последнем случае применяй ее максимально.

На рис. 1.5 (по аналогии с многокритериальными задачами см. [**6**, с. 4]) представлены этапы *подготовки* и *принятия* решений, отражающие рациональную логическую последовательность этапов.

ОТМЕТИМ. Известно, что при создании технической системы, например, *информационно-вычислительного комплекса* (ИВК) (см. [**7**, с. 136-137]), разработчик выполняет этап структурного синтеза и этап параметрического синтеза.

ОТМЕТИМ. Выполняя параметрический синтез в процессе создания ТС, разработчик может сделать вывод о необходимости пересмотра ранее принятых им решений и даже о пересмотре требований ТЗ на систему, например, АФИПС. Это возможно, так как процесс проектирования носит итерационный характер [**7**, с. 137].

ОТМЕТИМ. Основную задачу структурного синтеза разработчик решает путем сравнения вариантов [**7**, с. 136] с целью исключения из дальнейшего рассмотрения вариантов структур ТС, например, АФИПС, заведомо не удовлетворяющих требованиям ТЗ, и принятия, по возможности, одного варианта ТС.

На этапе структурного синтеза, например, АФИПС, сравнение и анализ вариантов ТС выполняют так. Фиксируется ограниченное множество вариантов ТС, которое необходимо рассмотреть. Затем каждый вариант рассматривается в отдельности на предмет возможности (или невозможности) удовлетворения требованиям ТЗ. В результате этого может оказаться, что некоторые варианты отпадут как заведомо не удовлетворяющие ТЗ. Затем оставшиеся варианты сравнивают и, по возможности, выбирают тот единственный (например, экспертным путем), для которого затем необходимо решить задачу *параметрического синтеза*. Если в итоге окажется **несколько** равноценных вариантов, то либо экспертным путем выбирают **один** из них для дальнейшего синтеза, либо **все** варианты следует рассматривать еще раз более подробно с учетом этапа *параметрического синтеза*. В этом случае следует выбрать из них тот, что удовлетворяет требованиям ТЗ.

ОТМЕТИМ. На рис. 1.5 характер **итерационного процесса** принятия решения показан одинарными и двойными стрелками (там, где стрелки не показаны, принято, что подразумевается направление вниз).

Рис. 1.5

ОТМЕТИМ. В процессе принятия решений ЛПР должен обращать внимание (во всяком случае, учитывать) на юридический аспект, связанный с принимаемыми им решениями.

ОТМЕТИМ. Эксперт-криминалист лично отвечает за результаты и выводы проведенной им экспертизы и скрепляет свое заключение подписью. В судебном делопроизводстве такие правильно оформленные результаты имеют юридическую силу.

ОТМЕТИМ. Принять правильно решение (и с разумными затратами) может только тот разработчик ТС (т.е. ЛПР), который хорошо знает *предметную область* исследования, имеет необходимые теоретические знания и практические навыки.

ОТМЕТИМ. Все необходимые требования на техническую систему задаются в *техническом задании*. Для ЛПР хорошо и грамотно составленное ТЗ является "*палочкой – выручалочкой*", позволяющей обойти острые углы и трудные (спорные) моменты.

В самом общем виде процесс принятия решений можно представить следующими **7**-ю этапами:

1) ***постановка задачи*** (эта постановка задачи должна быть, по возможности, конкретная и формализованная);

2) ***составление технического задания на систему*** (составление ТЗ на систему; в ТЗ по возможности следует включить критерии, по которым оценивается ТС, и все исходные данные для принятия решения; уточнение поставленной задачи);

3) ***содержательное описание операции*** (если в ТЗ операция не описана, то следует получить ее *содержательное описание*, т.е. понять и конкретно описать, что имеется в виду под операцией);

4) ***формализация операции***: *алгоритмическая и программная реализация математической модели* (если в ТЗ не задан критерий (или критерии) эффективности операции (ТС), то надо принять их; надо выбрать подходящую (или разработать но-

вую) модель для формализованного представления операции; разработать необходимые алгоритмы и, при необходимости, разработать их программную (иногда и аппаратную) реализацию);

5) ***проверка адекватности модели*** (если в ТЗ не указана адекватность модели, то ее следует проверить; если в ТЗ не задан критерий адекватности модели, то выбор этого критерия; если в ТЗ не заданы исходные данные, то подготовка этих исходных данных (например, контрольной выборки) для проверки адекватности; выполнение проверки адекватности; если модель не адекватна, то устранение причин неадекватности (возможен возврат к каким-то предыдущим этапам));

6) ***проведение исследований*** (выполнение моделирования; изучение поведения показателей эффективности; решение оптимизационной задачи или получение рационального решения);

7) ***принятие решений на основе результатов исследований*** (ЛПР принимает окончательное решение).

ОТМЕТИМ. То, как надо составлять ТЗ на техническую систему, прописано в нормативных документах, например, в [**20**].

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**29**, с. 16]. Правильное решение, особенно если он связано с риском, порой далеко

- <u>не очевидно</u>,
- <u>не тривиально</u>,
- и получение его требует <u>значительных</u> усилий.

В основе рассматриваемой технологии принятия решений ЛПР лежит задача проверки гипотез.

1.5. Постановка задачи принятия решений как задача проверки гипотез

«Кто ищет — вынужден блуждать»
Гёте «*Фауст*» [**58**, с. 7]

Из практики решения конкретных задач известно, что одно и то же решение может быть найдено разными способами путем применения различных методов и теорий и сведения исходной постановки задачи к другой постановке, решение которой позволяет достигнуть конечной цели. Это в полной мере относится и к задачам принятия решений, которые приходится решать, имея дело с техническими системами.

Достаточно часто специалистам приходится выяснять, в каком состоянии находится данный объект, например, техническая система. Обычно о состоянии технической системы, например, АСОИУ, высказываются некоторые предположения в виде *гипотез*. Простейшими гипотезами могут быть следующие суждения:

$\boldsymbol{H_1}$={*АСОИУ исправна*}, $\boldsymbol{H_3}$={*отказ процессора*},

$\boldsymbol{H_2}$={*отказ ОЗУ*}, $\boldsymbol{H_4}$={*эффективность АСОИУ максимальна*}.

Задача специалиста выяснить, какую из имеющихся гипотез следует ему принять.

ОТМЕТИМ. Для удобства на практике *гипотезы* иногда обозначают некоторой буквой, например, $\boldsymbol{H}$, а если их несколько, то иногда используют несколько разных букв или индекс, например, $\boldsymbol{H_k}$.

<u>*Определение 1.31*</u>

Гипотеза (Г) — это некоторое суждение (высказывание, предположение) о некотором объекте (например, о технической системе или о ее свойстве), справедливость (истинность) которого требуется установить (проверить), а саму гипотезу – принять или отвергнуть.

ОТМЕТИМ. На практике иногда справедливость *гипотезы* устанавливают с некоторой вероятностью (или находят наиболее вероятную гипотезу среди всех имеющихся).

ОТМЕТИМ. На практике иногда можно точно установить справедливость некоторой *гипотезы*. Так, например, иногда в детерминированном случае можно точно установить истинность высказанной гипотезы.

Далее будем выделять следующие четыре группы гипотез:

1) *вероятные*;
2) *статистические*;
3) *детерминированные*;
4) *квантовые*.

Имеются следующие предпосылки к такому разделению гипотез:

1) многие детерминированные, статистические и вероятные модели уже хорошо исследованы, и на их основе разработаны различные методы решения определенного класса задач (в том числе и задач проверки гипотез), которые уже стали некоторым своеобразным стандартом;

2) практика показала, что при решении реальных задач порой удается свести исходную задачу к задаче в новой постановке о проверке некоторой гипотезы, которую в силу различных обстоятельств удобно (и разумно) полагать либо вероятной, либо статистической, либо детерминированной, либо (см. [**58**]) квантовой;

3) получены новейшие практические и теоретические достижения в области квантовой механики, квантовой теории вероятностей и квантовой теории проверки гипотез;

4) получены новейшие практические и теоретические достижения в области построения квантового вычислительного устройства;

5) обычно на практике применение стандартных методов позволяет получить решение с меньшими затратами, если, конечно, удалось свести исходную задачу к задаче в такой постановке, для которой уже известен специалисту метод ее решения.

Такой подход решения задач имеет как преимущества, так и недостатки.

Преимущества от сведения задач принятия решений к задачам проверки гипотез заключаются в следующем:

- наличие известного метода решения задачи, и поэтому не требуется разрабатывать новый метод;
- как правило, уменьшается время принятия решения, и сокращаются общие затраты на выработку решения;
- имеется потенциальная возможность выработки более эффективного решения.

Недостатки, которые связаны с решением задач проверки гипотез, состоят в следующем:

- может отсутствовать подходящий метод решения задачи проверки гипотез;
- иногда требуется затратить определенные усилия на то, чтобы свести исходную задачу к задаче проверки гипотез;
- из-за сложности исходной задачи ее не всегда можно решить именно как задачу проверки гипотез, например, невозможно свести исходную постановку задачи к постановке задачи проверки гипотез.

Далее будем придерживаться следующих более общих определений для каждой из введенных четырех групп гипотез.

Определение 1.32
Вероятная гипотеза (ВГ) — это гипотеза, явно или косвенно опирающаяся на вероятностную модель.

Определение 1.33
Статистическая гипотеза (СГ) — это гипотеза, явно или косвенно опирающаяся на некоторую статистическую модель.

Определение 1.34
Детерминированная гипотеза (ДГ) — это гипотеза, явно или косвенно опирающаяся на некоторую детерминированную модель.

Определение 1.35
Квантовая гипотеза (КГ) — это гипотеза, явно или косвенно опирающаяся на некоторую модель квантовой теории вероятностей [**43**, с.226] в рамках квантовой теории проверки гипотез [**43**, с. 97, 98, 384, 668; **58**].

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Более четкое, ясное и точное определение понятия *гипотезы* дается в соответствующем теоретическом разделе, связанном с методом проверки, выбора или подтверждения гипотезы.

Кратко рассмотрим некоторые несколько упрощенные примеры постановок задач проверки различных гипотез.

Пример **1.Л** (вероятные гипотезы)

Имеется $\boldsymbol{n}$ *попарно несовместных* и образующих *полную группу* событий, т.е. некоторых гипотез (событий) $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2,..., \boldsymbol{H}_n$.

Известны все априорные вероятности этих гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$.

Известны также все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, где $\boldsymbol{A}$ — некоторое событие, которое по условию задачи наступило, причем вероятность его появления есть $P(\boldsymbol{A})>0$, и наступает это событие $\boldsymbol{A}$ только при появлении одного из событий (гипотез) $\boldsymbol{H}_i$, где $\boldsymbol{i}=1, 2, 3,..., \boldsymbol{n}$.

Необходимо определить среди гипотез $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2,..., \boldsymbol{H}_n$ наиболее вероятную гипотезу $\boldsymbol{H}_k$ после наступления события $\boldsymbol{A}$, т.е. найти максимальную условную вероятность $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$.

ОТМЕТИМ. На практике выбор (поиск) наиболее вероятной гипотезы $\boldsymbol{H}_k$ может быть выполнен с применением *формулы Бейеса* [**14**].

Пример **1. М** (вероятные гипотезы)

Радиоперехват сигнала с подводной лодки показал, что произошло событие $\boldsymbol{A}$={*торпедирован корабль*}, но неизвестно какой. Выясняется тип корабля, подвергнувшийся торпедной атаке подводной лодкой противника. Выдвинуты (*попарно несовместные* и образующие *полную группу* событий) четыре гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1$={*линкор*}, $\boldsymbol{H}_3$={*эсминец*},

$\boldsymbol{H}_2$={*крейсер*}, $\boldsymbol{H}_4$={*транспорт*}.

Согласно данным разведки, для данного района и времени боевых действий $P(\boldsymbol{H}_1)=\mathbf{0.1}$; $P(\boldsymbol{H}_2)=\mathbf{0.2}$; $P(\boldsymbol{H}_3)=\mathbf{0.3}$; $P(\boldsymbol{H}_4)=\mathbf{0.4}$.

Согласно военной статистике, условные вероятности события $\boldsymbol{A}$ при гипотезах $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3, \boldsymbol{H}_4$ равны: $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=1/4$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=7/12$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)=7/10$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_4)=5/5$.

Найти апостериорные вероятности гипотез. Какова вероятность того, что торпедирован именно линкор (т.е. чему равна вероятность $P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})$)? Какая гипотеза наиболее вероятна после известия о событии $\boldsymbol{A}$?

ОТМЕТИМ. На практике подобные задачи на определение условной вероятности $P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})$ или на выбор (поиск) наиболее вероятной гипотезы $\boldsymbol{H}_k$ может быть выполнен (как и в предыдущем примере) с помощью *формулы Бейеса* (см. [**14**] и др.).

***Пример* 1.Н** (см. и ср. [**56**, с. 100]) (статистические гипотезы)

Бармен ночного клуба был замечен в недоливе посетителям бара дорогих спиртных напитков. В емкости должно находиться **50** г напитка. Были проверены **100** емкостей у случайных посетителей бара (заказавших по 50 г напитка *Olmeca Gold Tequila*) и было обнаружено, что в среднем в емкости посетителя находится **49.8** г напитка.

Предполагая, что *стандартное отклонение* (**с.к.о.**) для емкости в 50 г есть **0.5** г, определить, является ли выявленное отклонение значимым, т.е. противоречит ли полученный результат гипотезе при уровне значимости α=**0.05**, что в среднем бармен разливает 50 г напитка.

Можно ли при уровне значимости α=**0.05** принять гипотезу $\boldsymbol{H_0}$ о наличии недолива напитка посетителям бара?

ОТМЕТИМ. На практике проверка статистической гипотезы $\boldsymbol{H_0}$ выполняется одним из известных методов (см. [**3**, **57**] и др.) проверки статистических гипотез.

***Пример* 1.О** (см. и ср. [**17**, с.38]) (детерминированные гипотезы)

Ищется наименьшее значение функции $\boldsymbol{f(x,y)}$ в области ее определения ($\boldsymbol{x}$>0, $\boldsymbol{y}$>0):

$$\boldsymbol{f(x,y)}= y^3\sqrt[4]{x^3}+\frac{1}{y\sqrt{x}}+\frac{1}{2y^2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3y^3\sqrt[4]{x}}\,.$$

Высказана следующая гипотеза:

$$\boldsymbol{H_0}=\{\textit{минимум } \boldsymbol{f(x,y)} \textit{ есть } 17/5\}.$$

Требуется проверить гипотезу $\boldsymbol{H_0}$, т.е. установить, имеет ли место эта гипотеза или нет (или иначе – справедлива гипотеза $\boldsymbol{H_0}$ или нет).

ОТМЕТИМ. На практике проверка детерминированной гипотезы $\boldsymbol{H_0}$ выполняется путем поиска минимума функции, применяя например, метод *геометрического* программирования (см. [**17**] и др.) и сравнения найденного истинного минимума с тем, что указан в гипотезе $\boldsymbol{H_0}$.

Вопросы и задания для самопроверки и контроля

Вопросы

1. Какие *три этапа* системного анализа Вы знаете?
2. Какие *основные принципы* системного подхода Вы знаете (поясните на примере проектирования технической системы)?
3. Как Вы понимаете, что такое *система, сложная система* и *большая система* (поясните на примерах)?
4. Как Вы понимаете, что такое *структура системы* (поясните на примере)?
5. Как Вы понимаете, что такое *иерархия* и *декомпозиция системы* (поясните на примере)?
6. Как Вы понимаете, что такое *решение*, *оптимальное решение*, *рациональное решение* и *правильное решение* (поясните на примерах)?
7. Что такое *математические модели операций?* Зачем они нужны (поясните на примерах)?
8. Как Вы понимаете, что такое *операция*, *эффективность операции*, *критерий эффективности* и *показатель эффективности* (поясните на примерах)?
9. Какие *требования* предъявляются к *показателю эффективности* технических систем (поясните на примерах)?
10. Как происходит *принятие решений на основе математических моделей* (поясните на примерах)?
11. Как Вы понимаете, что такое *прямые* и *обратные* задачи исследования операций (поясните на примерах)?
12. Когда постановка задачи *исследования операций* может считаться *законченной* (поясните на примере)?
13. Как Вы понимаете, что такое *адекватность модели* (поясните на примерах)?
14. Как Вы понимаете *человека-оператора* (поясните на примерах)?
15. Как Вы понимаете *человека-оператора* как *лицо, принимающее решение* (поясните на примере)?
16. Что понимается под *ошибкой*, *отказом* и *надежностью* человека-оператора?
17. Какие *этапы процесса принятия решений* Вы знаете (охарактеризуйте их)?
18. Какова *роль технического задания* (ТЗ) в принятии решений для создания автоматизированных систем?
19. Как Вы понимаете, что такое *гипотеза* (поясните на примерах)?
20. Как Вы понимаете, что такое *детерминированные*, *статистические* и *вероятные* гипотезы (поясните на примерах)?
21. Какие *преимущества* и *недостатки* от сведения задач принятия решений к задачам проверки гипотез Вы знаете (поясните на примере)?

Задания

a) Придумайте (сформулируйте) *вероятную* гипотезу.
b) Придумайте (сформулируйте) *статистическую* гипотезу.
c) Придумайте (сформулируйте) *детерминированную* гипотезу.
d) Приведите пример не*правильного решения* (поясните Ваш выбор).

Используемая литература (источники)

1. Науман З. Принять решение — но как?–М.:Мир, 1987.–199с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология.–М.: Высшая школа, 2001.–208с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники.–М.: Советское радио.–Кн.2.- 1968. -504с.
4. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь.–М.:Наука, 1987.–510с.
5. Каазик Ю.Я. Математический словарь.–Таллин:Валгус, 1985.–296с.
6. Елтаренко Е.А. Оценка и выбор решений по многим критериям: учебное пособие.–М.: МИФИ, 1995.–112с.
7. Хетагуров Я.А., Древс Ю.Г. Проектирование информационно-вычислительных комплексов.–М.:Высшая школа, 1987.–280с.
8. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах.—М.:Советское радио, 1971.–400с.
9. Шастова Г.А., Коёкин А.И. Выбор и оптимизация структуры информационных систем.–М.:Энергия, 1972.–256с.
10. Никитин П.И. Автоматизированные системы обработки и поиска документальной информации.–М.:Статистика, 1977.–136с.
11. Петрусь А.В. Эффективность документальных ИПС с позиции теории статистических решений //НТИ.–Сер.2.–1987.–№4.–С.6-14.
12. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Краткий курс математической статистики для технических приложений.–М.: Физматгиз, 1959.–436с.
13. Абчук В.А., Суздаль В.Г. Поиск объектов.–М.:Советское радио, 1977.–336с.
14. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.–М.:Наука, 1988.–480с.
15. Таха Х. Введение в исследование операций: в 2-х кн.–М.: Мир, 1985.–(Кн.1.–479с.; Кн.2.–496с.).
16. Кофман А., Анри-Лабордер А. Целочисленное программирование. Сер.:Методы и модели исслед. операций.–М.: Мир, 1977.–Т.3.–432с.
17. Бекишев Г.А., Кратко М.И. Элементарное введение в геометрическое программирование.–М.: Наука, 1980.–144с.
18. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач.–М.:Наука, 1980.–519с.
19. ГОСТ 34.601-90. Информационная технология. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Автоматизированные системы. Стадии создания.–Периздат. июнь 1997.–Введен с 01.01.1992.–М.: ИПК Изд-во стандартов, 1997.–9с.
20. ГОСТ 34.602-89. Государственный стандарт Союза ССР. Информационная технология. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Техническое задание на создание автоматизированной системы.–Периздат. июнь 1991.–М.:Изд-во стандартов, 1991.–15с.
21. РД 50-680-88. Руководящий документ по стандартизации. Методические указания. Автоматизированные системы. Основные положения.–Периздат. июнь 1991.–Взамен ГОСТ 24.103-84, ГОСТ 23.501.101-87; Введен с 01.01.1990.–М.: Изд-во.стандартов, 1991.–7с.

22. Человеческий фактор. В 6-ти томах. Т.1: Эргономика – комплексная научно-техническая дисциплина /Ж. Кристенсен, Д. Мейстер, П. Фоули и др.–М.: Мир, 1991.–599с.

23. Губинский А.И., Лаушкин Г.Д., Падерно П.И. Характеристика человека-оператора как звена систем управления.–Л.: ЛЭТИ, 1982.–46с.

24. Дружинин Г.В. Учет свойств человека в моделях технологий.–М.:МАИК "Наука/Интерпериодика", 2000.–327с.

25. Котик М.А., Емельянов А.М. Природа ошибок человека-оператора (на примерах управления трансп. средств.).–М.: Транспорт, 1993.–252с.

26. Хаяси Е. Классификация ошибок, совершаемых человеком /ВЦП.–№Я-2552 (шифр хранения №06921001998). Перевод с японского (пер. Василенко Н.А.).–М.–11с.–Из журнала Дэнси цусин гаккай си.– 1983.–Vol.66.–№12.–P.1256-1258.

27. Гасов В.М., Соломонов Л.А. Организация взаимодействия человека с техническими средствами АСУ. В 7 кн. Кн.1. Инженерно-психологическое проектирование взаимодействия человека с техническими средствами: Практ. пособие.–М.:Высшая школа, 1990.–127с.

28. Кондратьев С.В., Зайцев К.С. Инженерно-психологическая оценка систем «человек-машина».–М.:МИФИ, 1986.–80с.

29. Абчук В.А. Теория риска в морской практике.–Л.:Судостроение, 1983.–152с.

30. Короткова Т.И. Цикл Internet учебников по методам и моделям принятия решений. Модели и методы принятия решений [электронный ресурс].—Режим доступа: http://www.dep805.ru/education/mmpr/index.htm.—Загл. с экрана.

31. Методологические основы теории принятия решений [электронный ресурс]. – Реж. дост.: http://www.karelia.ru/psu/Faculties/Forest/courses/decision/chap1_a.htm.

32. Солтон Дж. Динамические библиотечно-информационные системы.– М.:Мир, 1979.– 557с.

33. Вентцель Е.С. Исследование операций.–М.: Советское радио, 1972.–552с.

34. Анохин А.Н., Острейковский В.А. Вопросы эргономики в ядерной энергетике.–М.: Энергоатомиздат, 2001.–344с.

35. В океанских глубинах. Подводный флот.–М.: Голос-Пресс, 2003.–384с.

36. Надежность и эффективность в технике: Справочник. В 10 т. Том 1.–М.: Машиностроение, 1986.–224с.

37. Черноруцкмй И.Г. Методы принятия решений.–СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

38. Острейковский В.А. Теория систем.–М.:Высшая школа, 1997.–240с.

39. Современное состояние теории исследования операций /Под ред. Н.Н. Моисеева.–М.:Наука, 1979.–464с.

40. Яковлев В.П., Кондрашин М.П. Элементы квантовой информатики.–М.: МИФИ, 2004.–80с.

41. Кулик С.Д. Схемотехнические решения для реализации квантового компьютера //Научная сессия МИФИ-2006. Сборник научных трудов в 16 т. Т.12:Информатика и процессы управления. Компьютерные системы и технологии.–М.: МИФИ, 2006.–Т.12.–С.52-53.

42. "Квантовый компьютер и квантовые вычисления".–Т2.-Ижевск: Ред. журн. Регулярная и хаотическая динамика, 1999.–287с.

43. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия.–М.:Большая Российская Энциклопедия, 1999.–910с.

44. Первов В.В. Элементы общей теории систем: Текст лекций.–М.: МИФИ, 1983.–60с.
45. Japanese Platinum. Образовательная коллекция [электронный ресурс] /1C, ММТ, ДО.– Электр. дан., прог. 2003.–1 CD-ROM диск.–Загл. с этикетки диска.–(Мультимедийные курсы иностранных языков. Программа комплексного обучения японскому языку.)
46. Мормуль Н.Г. Катастрофы под водой. Спб.: Элтеко, 2001.-660с.
47. Кулик С.Д., Скрипник Л.А., Челышев М.М. Учет характеристик оператора при работе АФИПС //Вопросы проектирования и эксплуатации управляющих вычислительных систем. Сб. науч. трудов.–М.:Энергоатомиздат, 1989.–С.40-45.
48. Кулик С.Д. Учет человека-оператора в контуре АФИПС //Безопасность информационных технологий.–2003.–№2.–С.30-39.
49. Кулик С.Д. Исследование эффективности фактографического поиска в информационных системах /Изд. "Радиотехника".–М., 2004.–251с.–Деп. в ВИНИТИ 29.07.2004, №1326-В2004; Библ. указат. №9(391), 2004.
50. Кулик С.Д. Программы для работы с ценными бумагами и учет человеческого фактора в АФИПС – основа защиты от мошенничества //Безопасность информационных технологий.–2002. –№3.–С.65-71.
51. Кулик С.Д. Биометрические системы идентификации личности для АФИПС //Нейрокомпьютеры: разработка и применение.–М.: Радиотехника, 2003.–№12.–С.52-65.
52. Кулик С.Д. Эффективность фактографических систем //Научная сессия МИФИ-2004. XI Всероссийская научная конференция "Проблемы информационной безопасности в системе высшей школы". Сб. науч. тр.–М.: МИФИ, 2004.–С.49-50.
53. Кулик С.Д. Учет человеческого фактора в АФИПС //Научная сессия МИФИ-2004. Сборник научных трудов в 15 т. Т.12:Информатика и процессы управления. Компьютерные системы и технологии.–М.: МИФИ, 2004.–Т.12.–С.126-127.
54. Кулик С.Д. Фактографические системы и человек //Научная сессия МИФИ-2003. X Всерос. науч.-практич. конференция "Проблемы информационной безопасности в системе высшей школы". Сб. науч. тр.–М.: МИФИ, 2003.– С.112-114.
55. Денниц К. Десять лет и двадцать дней. Воспоминания главнокомандующего военно-морскими силами Германии. 1935-1945гг.–М.: ЗАО Центрполиграф, 2004.–496с.
56. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов.–М.:Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005.-254с.
57. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.–М.:Высш. школа, 1979.–400с.
58. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания.–М.: Мир, 1979.–344с.
59. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация.–М.: Мир, 2006.–824с.
60. Воройский Ф.С. Информатика. Новый систематизированный толковый словарь-справочник (введение в современные информационные и телекоммуникационные технологии в терминах и фактах).–М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.–760с.

Рекомендуемые источники для самостоятельной работы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций.–М.: Советское радио, 1972.–552с.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология.–М.: Высшая школа, 2001.–208с.

3. Таха Х. Введение в исследование операций: в 2-х кн.–М.: Мир, 1985.–(Кн.1.–479с.; Кн.2.–496с.).

4. Хетагуров Я.А., Древс Ю.Г. Проектирование информационно-вычислительных комплексов.–М.:Высшая школа, 1987.–280с.

5. ГОСТ 34.601-90. Информационная технология. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Автоматизированные системы. Стадии создания.–Периздат. июнь 1997.–Введен с 01.01.1992. –М.: ИПК Изд-во стандартов, 1997.–9с.

6. ГОСТ 34.602-89. Государственный стандарт Союза ССР. Информационная технология. Комплекс стандартов на автоматизированные системы. Техническое задание на создание автоматизированной системы.–Периздат. июнь 1991.–М.: Изд-во стандартов, 1991.–15с.

7. РД 50-680-88. Руководящий документ по стандартизации. Методические указания. Автоматизированные системы. Основные положения.– Периздат. июнь 1991.– Взамен ГОСТ 24.103-84, ГОСТ 23.501.101-87; Введен с 01.01.1990.–М.: Изд-во стандартов, 1991.–7с.

8. Яковлев В.П., Кондрашин М.П. Элементы квантовой информатики.–М.: МИФИ, 2004.–80с.

9. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания.–М.: Мир, 1979.–344с.

10. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация.–М.: Мир, 2006.–824с.

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЫБОРА ВЕРОЯТНЫХ ГИПОТЕЗ

Содержание

I). *Основы теории вероятностей (ТВ). Принцип практической уверенности. Принцип статистической устойчивости относительных частот. Несовместность и независимость событий. Теорема сложения и умножения вероятностей.*

II). *Класс задач ТВ для выбора гипотез. Формула полной вероятности. Доказательство формулы полной вероятности. Формула Бейеса. Применение формулы Бейеса и полной вероятности. Многошаговые задачи.*

2.1. Основные понятия теории вероятностей (ТВ)

В теории вероятностей исторически сложилось так (см. [**14**, с. 18, с.90]), что в ней применяется своя терминология, которая стала уже общепринятой. В принципе, термины из этой теории можно заменить на их аналогичные понятия (общематематические термины), используемые из других разделов математики (табл. 2.1). Полагают, что если это сделать, то язык теории вероятностей стал бы менее понятен в приложениях. Аналогичное справедливо и для *математической статистики* (табл. 2.2). Согласно работе [**7**, с. 7-8] *А.Н. Колмогорова* можно сделать следующие сопоставления терминов (терминологические замечания), представленные в табл. 2.3.

Таблица 2.1. **Первая группа терминов** [**14**, с. 19]

Общематематический термин	Термин теории вероятностей
Множество событий	Пространство событий
Элемент	Элементарное событие
Подмножество	Событие
Длина, площадь, объем подмножества	Вероятность события
Числовая функция	Случайная величина

Таблица 2.2. **Вторая группа терминов** [**14**, с. 90]

Общематематический термин	Термин теории вероятностей	Термин математической статистики
Множество	Пространство элементарных событий $\boldsymbol{\Omega}$	Генеральная совокупность (**ГС**)
Подмножество	Событие	Выборка
Значение числовой функции	Значение случайной величины	Наблюдение

Таблица 2.3. **Третья группа терминов** [**7**, с. 7-8]

Термин теории множеств	Термин теории вероятностей
$\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не пересекаются, т.е. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}=\varnothing$	События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ несовместны
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \ldots \cap \boldsymbol{N}=\varnothing$	События $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{N}$ несовместны
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \ldots \cap \boldsymbol{N}=\boldsymbol{X}$	Событие $\boldsymbol{X}$ заключается в одновременной реализации всех событий $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{N}$
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \ldots \cup \boldsymbol{N}=\boldsymbol{X}$	Событие $\boldsymbol{X}$ заключается в наступлении, по крайней мере, одного из событий реализации всех событий $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{N}$
Дополнительное множество $\bar{\boldsymbol{A}}$	Противоположное событие $\bar{\boldsymbol{A}}$, состоящее в ненаступлении события $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A}=\varnothing$	$\boldsymbol{A}$ невозможно
$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\Omega}$	$\boldsymbol{A}$ должно необходимо наступить
Система $\Re$ множеств $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ образует разложение множества $\boldsymbol{\Omega}$, если $\boldsymbol{A}_1 \cup \ldots \cup \boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{\Omega}$ (где $\boldsymbol{A}_i$ попарно не пересекаются)	*Испытание* $\Re$ заключается в том, что устанавливают, какое из событий $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ происходит; $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ называются при этом возможными исходами испытания $\Re$
$\boldsymbol{B}$ является подмножеством $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$	Из осуществления события $\boldsymbol{B}$ с необходимостью следует осуществление $\boldsymbol{A}$

ОТМЕТИМ [**1**, с. 38, 40, 41; **15**, с. 11; **16**, с. 17-18]. Из теории множеств следует, что

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}$ (объединение, сложение);

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{AAA}$ (пересечение, умножение);

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \cup \varnothing$; $\varnothing=\boldsymbol{A} \cap \varnothing$; $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cdot \bar{\boldsymbol{A}}$;

$\varnothing$ – это пустое множество, не содержащее ни одного элемента;

$\varnothing$ есть подмножество всякого множества $\boldsymbol{D}$, т.е. $\varnothing \subset \boldsymbol{D}$;

хотя $\varnothing \subset \boldsymbol{D}$, тем не менее, возможно, что $\varnothing \notin \boldsymbol{D}$;

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ (переместительное свойство для сложения);

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ (переместительное свойство для умножения);

$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B} +\boldsymbol{C})$ (сочетательное свойство для сложения);

$(\boldsymbol{A} \cdot\boldsymbol{B}) \cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot (\boldsymbol{B} \cdot\boldsymbol{C})$ (сочетательное свойство для умножения);

$\boldsymbol{A}\cdot (\boldsymbol{B} +\boldsymbol{C}) =\boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{C}$ (распределительное свойство);

если $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$, *то* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$;

если $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, *то* $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

Определение 2.0

Разностью событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называют [**17**, с. 8] событие $\boldsymbol{C}$, состоящее в том, что событие $\boldsymbol{A}$ происходит, а $\boldsymbol{B}$ не происходит: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$.

Определение 2.1

Под опытом (экспериментом, испытанием) понимается [**1**, с.15; **17**, с.6] некоторая воспроизводимая совокупность (комплекс) условий, в которых наблюдается то или другое явление, фиксируется тот или иной результат. Если при повторении опыта (комплекса условий) варьируется его результат (событие может произойти или не произойти), то говорят об *опыте со случайным исходом*.

ОТМЕТИМ [**1**, с. 15; **17**, с. 3]:

1). Опыт может протекать независимо от человека (например, ЛПР). Человек выступает в роли наблюдателя или фиксатора происходящего, и от него зависит только решение, что наблюдать и какие параметры фиксировать.

2). Каждое осуществление ***комплекса условий*** называют реализацией. Этот ***комплекс условий*** не определяет всех необходимых требований, при которых осуществляется событие. Включены в него лишь основные требования, а второстепенные НЕ учитываются или НЕ могут быть учтены в силу различных причин и меняются от опыта к опыту.

__*Определение 2.2*__

Случайным событием (**СС**) [**1**, с.15] (или просто событием) называют <u>всякий факт</u>, который <u>в опыте</u> со *случайным исходом* может произойти или не произойти, и обозначают прописными (большими) буквами латинского алфавита, например, $\boldsymbol{A}$.

ОТМЕТИМ [**4**, с. 16-17]. **Фундаментальные условия,** при которых определяются ***случайные события,* это:**

- ♦ опыт можно повторять много раз;
- ♦ исход опыта НЕпредсказуем;
- ♦ относительная частота **случайного** события <u>у с т о й ч и в а</u> (при увеличении числа опытов она устойчиво колеблется около определенного значения – это определение не очень точно).

__*Определение 2.3*__

Чтобы (см. и ср. [**1**, с. 16-18]) сравнить между собой СС (в результате опыта) по степени возможности, **надо** связать с каждым из них какое-то ***число***, которое тем больше, чем **более возможно** событие. Это число $\boldsymbol{P}$ и будем называть **вероятностью** события $\boldsymbol{A}$ и обозначать как $P(\boldsymbol{A})$.

ОТМЕТИМ: Согласно аксиомам ТВ и следствиям из них:

$$P(\boldsymbol{\Omega})\equiv 1,\ \ P(\varnothing)\equiv 0, \text{ а также } P(\varnothing)\le P(\boldsymbol{A})\le P(\boldsymbol{\Omega}).$$

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Есть ДВА подхода [**17**, с.6] к вычислению вероятности СС, основанные на априорной (классической на базе симметрии опыта и равновозможности) и эмпирической (статистической на базе многократного повторения опыта) вероятности.

__*Определение 2.4*__

Достоверное событие (**Ω**) [**1**, с. 17, 42; **4**, с. 17] **—** это событие (например, $\boldsymbol{B}$ и часто обозначаемое как **Ω**), которое обязательно произойдет, причем вероятность его наступления равна ЕДИНИЦЕ, т.е. $P(\boldsymbol{B})\equiv 1$ или $P(\boldsymbol{\Omega})\equiv 1$.

ОТМЕТИМ. Если $P(A)=\mathbf{1}$, то <u>это еще не означает</u>, что событие $\boldsymbol{A}$ является *достоверным* событием:

например, если $\boldsymbol{A}$ – событие, состоящее в попадании в точку из интервала (0;4), то $P(\boldsymbol{A})=0$, но $P(\bar{\boldsymbol{A}})=1$, так как $P(\boldsymbol{A})+P(\bar{\boldsymbol{A}})\equiv 1$ и $\bar{\boldsymbol{A}}$ есть **НЕдостоверное** событие, хотя $P(\bar{\boldsymbol{A}})=1$ [**1**, с. 91].

<u>Определение 2.5</u>

НЕвозможное событие ($\varnothing$) [**1**, с. 17, 42; **4**, с. 17] — это событие (например, ***A***), которое никогда НЕ произойдет, причем вероятность его наступления равна НУЛЮ, т.е. $P(\boldsymbol{A})\equiv 0$ или $P(\varnothing)\equiv 0$.

ОТМЕТИМ. Если $P(\boldsymbol{A})=0$, то <u>это еще не означает</u>, что событие ***A*** является **НЕвозможным** событием [**1**, с. 91]; если $P(\boldsymbol{A})=0$, то событие может произойти, но вероятность этого есть НОЛЬ [**4**, с. 17] (так, если ***A*** – это событие есть попадание в точку из интервала (0,1)); из $P(\boldsymbol{A})=0$ следует только то, что при неограниченном повторении опытов (т.е. увеличения объема выборки) событие ***A*** будет появляться сколь угодно редко [**1**, с. 91-92].

<u>Определение 2.6</u>

Практически достоверное (возможное) событие [**1**, с. 18-19] — это событие ***A***, для которого его вероятность наступления близка к единице: $P(\boldsymbol{A})\approx 1$.

<u>Определение 2.7</u>

Практически НЕвозможное событие [**1**, с.18-19] — это событие ***A***, для которого его вероятность наступления близка к нулю: $P(\boldsymbol{A})\approx 0$.

ОТМЕТИМ [**1**, с. 19-20]. Самый <u>тонкий</u> и <u>трудный</u> вопрос: насколько должна быть мала вероятность события, чтобы его можно было считать **практически** НЕвозможным? Ответ на этот вопрос выходит за рамки математической теории. На практике следует подходить к решению этого вопроса отдельно в каждом конкретном случае.

***Пример* 2.А** (см. [**6**, с. 35]). Если взрыватель отказывает при выстреле с вероятностью 0.01, то при некоторых обстоятельствах еще можно мириться с этим и считать отказ взрывателя *практически невозможным событием.* А если парашют отказывает при прыжке человека с той же вероятностью 0.01, то очевидно, что нельзя считать этот отказ *практически невозможным событием.*

<u>Определение 2.8</u><u>(**а**)</u>

Противоположными событиями называют два несовместных события, образующих полную группу [**6**, с. 42].

ОТМЕТИМ. Если какое-то событие ***A*** *практически НЕвозможное*, то противоположное ему событие $\bar{\boldsymbol{A}}$ есть *практически достовер-*

ное, и наоборот [**1**, с. 18]. Справедливо $P(\boldsymbol{A})+P(\bar{\boldsymbol{A}})\ \boldsymbol{\equiv 1}$ и $\boldsymbol{A}+\bar{\boldsymbol{A}}$ есть *полная группа событий* (ПГС). Определение ПГС будет дано далее.

<u>*Определение 2.8*(**б**)</u>

Противоположным событию $\boldsymbol{A}$ называют событие $\bar{\boldsymbol{A}}$, состоящее в НЕпоявлении события $\boldsymbol{A}$ [**1**, с. 18, 43].

<u>*Определение 2.9*</u>

Равновозможные события [**1**, с. 23] — несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если по условиям симметрии есть основания полагать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое.
ОТМЕТИМ. Два события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равновозможные, если $P(\boldsymbol{A})=P(\boldsymbol{B})$.

<u>*Определение 2.10*</u>

Случаями (или шансами) называют события, обладающие тремя свойствами: они образуют *полную группу*, *равновозможны* и *несовместны* [**6**, с. 26].

<u>*Определение 2.11*</u>

Случай (или шанс) называется *благоприятным* (или *благоприятствующим*) некоторому событию, если появление этого случая влечет за собой появление данного события [**6**, с. 26].

<u>*Определение 2.12*</u>

Схема случаев (или иначе — схема урн) [**6**, с. 26] – если какой-либо опыт по своей структуре обладает *симметрией* возможных исходов, то случаи представляют собой *исчерпывающую* систему *равновозможных* и *исключающих* друг друга исходов опыта. О таком опыте говорят, что он сводится к ***схеме случаев*** (или иначе — к *схеме урн*).
ОТМЕТИМ [**6**, с. 27]. Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события $\boldsymbol{A}$ в данном опыте можно оценить по относительной доле *благоприятных* случаев. Вероятность события $\boldsymbol{A}$ вычисляется как отношение числа *благоприятных* случаев ($\boldsymbol{m}$) к общему числу случаев ($\boldsymbol{N}$), т.е. имеет место классическая формула для вычисления вероятности:

$$P(\boldsymbol{A})=\frac{m}{N}.$$

<u>*Определение 2.13*(**а**)</u>

Случайная величина (**СВ**) [**7**, с. 26-28] — однозначную действительную функцию **ξ=ξ(ω)**, определенную на основном множестве **Ω**, называют *случайной величиной*, если при каждом выборе действительного числа ***x*** множество {**ξ<*x***} всех тех **ω**, для которых справедливо неравенство **ξ(ω)<*x***, принадлежит к системе множеств ***Ř*** (***Ř*** **–** это *алгебра множеств*).

<u>*Определение 2.13*(**б**)</u>

Сходимость по вероятности [**6**, с. 31] — говорят, что случайная величина X_n *сходится по вероятности* к величине ***a***, если при сколь угодно малом ***ε*** вероятность неравенства $|X_n - a| < \varepsilon$ с увеличением ***n*** неограниченно приближается к единице:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big[\big|X_n - a\big| < \varepsilon\Big] = 1.$$

ОТМЕТИМ [**6**, с. 31]. Применяя этот термин, можно сказать, что при увеличении числа опытов частота события не *стремится* к вероятности события, а *сходится к ней по вероятности.*

<u>*Определение 2.14*(**а**)</u>

Полная группа событий (**ПГС**) [**1**, с. 43,45] — события A_1, A_2,…, A_n образуют *полную группу событий***,** если событие, образованное путем всех их объединения, образует *достоверное событие* **Ω**: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{A_i\}$**,** а ***P*(Ω)≡1**, т.е. (см. [**1**, с. 22-23]) в результате опыта неизбежно должно появиться ***хотя бы одно из них,*** т.е. *одно* или *больше* событий (ср. с определением из [**15**, с. 13; **9**, с. 400]).

ОТМЕТИМ. В разных учебниках дается разное определение ПГС (например, требуется НЕ ***хотя бы одно из них*** [**1**, с. 22-23; **6**, с. 25], а ***одно и только одно событие*** [**4**, с. 11]). Если (см. [**1**, с. 23]) события образуют *полную группу событий*, то опыт НЕ может кончиться помимо них! Если (см. [**1**, с. 23]) к *полной группе событий* добавить еще <u>какие-то события</u>, <u>любые исходы опыта</u>, то от этого свойство *полноты группы событий* не утрачивается!

ВАЖНО ПОМНИТЬ (см. [**1**, с. 22-23]). Специалисты обращают внимание на то, что в ПГС могут быть *совместные* события, <u>не исключающие</u> друг друга.

Определение 2.14(**б**)

Полная группа попарно несовместных событий (**ПГПНС**) [**17**, с. 9; **27**, с. 66] — если события $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$,…, $\boldsymbol{H_n}$, образующие ПГС, попарно несовместны, т.е. $\boldsymbol{H_i} \cap \boldsymbol{H_j} = \varnothing$ при любых $\boldsymbol{i \neq j}$, то говорят, что они образуют *полную группу попарно несовместных событий*.

***Пример* 2.Б**. В АСОИУ, содержащей только 4 блока памяти (2 блока ОЗУ и 2 блока жестких дисков), случайно отказали 2 каких-то блока памяти из 4. Здесь ПГС (два события):

ПГС $=\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$;

где

$\boldsymbol{A}$=\{*блоки однотипные*\};

$\boldsymbol{B}$=\{*блоки разнотипные*\}.

Добавим к ПГС еще одно событие: $\boldsymbol{C}$=\{*два блока ОЗУ*\}. Группа из трех событий: $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ является ПГС, так как обязательно наступит одно из них, либо $\boldsymbol{A}$, либо $\boldsymbol{B}$, а в случае, когда наступит событие $\boldsymbol{C}$, одновременно с ним наступит и событие $\boldsymbol{A}$.

***Пример* 2.В** (см. и ср. [**15**, с. 19]). Показать, что события $A, B-A$ и $\overline{A+B}$ образуют полную группу событий и попарно несовместны.

Решение

1). Проверим попарную несовместимость, т.е. надо показать, что:

$$A\cdot(B-A)=\varnothing;\quad A\cdot\left(\overline{A+B}\right)=\varnothing;\quad (B-A)\cdot\left(\overline{A+B}\right)=\varnothing\cdot$$

Действительно очевидно, что $A\cdot(B-A)=\varnothing$. Далее с одной стороны, если $\omega\in A$, то $\omega\in(A+B)$ и $\omega\notin\left(\overline{A+B}\right)$, а значит $A\cdot\left(\overline{A+B}\right)=\varnothing$. С другой стороны, если $\omega\in(B-A)$, то $\omega\in(A+B)$ и $\omega\notin\left(\overline{A+B}\right)$, а значит $(B-A)\cdot\left(\overline{A+B}\right)=\varnothing\cdot$

2). Проверим, что эти три события образуют ПГС:

Действительно, так как $\boldsymbol{\Omega}=(A+B)+\overline{A+B}$ и $A+B=A+(B-A)$, то

$\boldsymbol{\Omega}=A+(B-A)+\left(\overline{A+B}\right)$, а значит, эти события образуют ПГС.

ОТМЕТИМ. Событие ω — это элементарное событие [**15**, с. 9].

__**Пространство Ω элементарных событий**__ (см. [**1**; **2**; **7**; **9**; **33**] и др.)

В теории вероятностей используют понятие пространства **Ω** *элементарных событий*.

Для этого все возможное множество исходов некоторого **опыта** представляют в виде *элементарных событий*, так, чтобы все они были ***НЕсовместными*** событиями и при этом составляли *полную группу событий* (т.е. $P(\mathbf{\Omega})\equiv 1$).

<u>*Определение 2.15*</u>

Элементарное событие (**ЭС**) [**9**, с. 816] — исходное понятие. В определении вероятностного пространства непустое множество **Ω** называется *пространством элементарных событий*, а его любая точка $\omega \in \mathbf{\Omega}$ называется *элементарным событием*.

ОТМЕТИМ (см. [**9**, с. 816])**.** При неформальном подходе множество **Ω** описывает множество всех исходов некоторого случайного эксперимента и ω соответствует элементарному исходу (эксперимент заканчивается **одним** и **только одним** элементарным исходом; эти исходы **неразложимы** и **взаимно исключают** друг друга).

ОТМЕТИМ (см. [**15**, с. 8-9])**.** При неформальном подходе исход испытания называется событием. Все те события, что могут произойти в результате выполнения <u>комплекса условий</u>, составляют *достоверное событие* **Ω**. Те из событий, что **нельзя разложить** на составляющие их события, называются *элементарными событиями*.

ОТМЕТИМ (см. [**15**, с. 8-9])**.** Любое событие ***B*** из *пространства элементарных событий* **Ω можно составить** из *элементарных событий*.

ОТМЕТИМ (см. [**33**, с. 19])**.** Каждый **неразложимый** исход (идеализированного) опыта представляется <u>одним и только</u> одним ЭС. Совокупность всех ЭС называют *пространством* ЭС, а сами ЭС называют **точками** этого пространства. Все события, связанные с данным опытом, могут быть описаны с помощью ЭС.

ОТМЕТИМ. Использование показателя $P(\mathbf{\Omega})$ для оценки эффективности технической системы (например, АФИПС) бессмысленно, так как **всегда** $P(\mathbf{\Omega})\equiv 1$**.** Поэтому (на практике) множество $\mathbf{\Omega}$ разбивают иногда на два (или несколько) НЕпересекающихся множества элементарных событий E_1 и E_2, т.е. $E_1 \cap E_2 \equiv \varnothing$ и $E_1 \cup E_2 \equiv \mathbf{\Omega}$. Тогда, можно принять, что:

$P(E_1)$ — это вероятность правильного ответа АФИПС;

$P(E_2)$ — это вероятность НЕправильного ответа АФИПС.

Например, подпространству (множеству событий) E_1 соответствуют события правильного ответа АФИПС на запрос, подпространству (множеству событий) E_2 соответствуют события НЕправильного ответа АФИПС на запрос.

ОТМЕТИМ. $P(E_1)+P(E_2)\equiv 1$. Способ объединения событий в E_1 и E_2 зависит от <u>конкретной практической задачи</u> и <u>цели</u>, для достижения которой строится АФИПС. Так, в одном случае одно событие может быть отнесено в E_1 а, в другом случае — в E_2.

***Пример* 2.Г.** Если в АФИПС нет требуемой информации, то в одном случае НЕвыдача ее в ответ на запрос может быть правильным ответом (ее там нет и, естественно, ее нет и в ответе АФИПС), а в другом случае это может быть НЕправильный ответ (то, что в системе нет нужной информации — плохо, так как она должна быть там, раз ее запрашивают).

ОТМЕТИМ. Иногда вводят E_3 — третье множество событий: E_1, E_2 и E_3, т.е. $E_1 \cap E_2 \equiv \varnothing$, $E_1 \cap E_3 \equiv \varnothing$, $E_2 \cap E_3 \equiv \varnothing$ и $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \equiv \mathbf{\Omega}$. События из E_3 соответствуют случаям *отказа от принятия решения* АФИПС (в теории распознавания образов это аналог зоны **НПВ –** *Не Представляется Возможным* принять решение), когда АФИПС НЕ может по какой-то причине выдать пользователю ответ на его запрос. Например, АФИПС иногда выгоднее не отвечать, чем давать сомнительный ответ.

***Пример* 2.**Д (см. и ср. [**16**, с. 106-107])

Рассмотрим эксперимент $\boldsymbol{X}$ с бросанием монеты, при котором происходит только выпадение *герба* или *решетки*. Пусть

$\boldsymbol{H}$ – выпадение *герба*;

$\boldsymbol{T}$ – выпадение *решетки*;

тогда

$$\Omega_{\boldsymbol{X}} = \{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}\}.$$

Рассмотрим эксперимент $\boldsymbol{Y}$ с бросанием монеты, при котором происходит только выпадение *герба*, *решетки*, или монета может встать на *ребро*. Пусть

$\boldsymbol{H}$ – выпадение *герба*;

$\boldsymbol{T}$ – выпадение *решетки*;

$\boldsymbol{R}$ – монета встала на *ребро*;

тогда

$$\Omega_{\boldsymbol{Y}} = \{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}\}.$$

Рассмотрим эксперимент $\boldsymbol{Z}$ с бросанием монеты, при котором происходит только выпадение *герба*, *решетки*, монета может встать на *ребро* или зависнуть в *воздухе*. Пусть

$\boldsymbol{H}$ – выпадение *герба*;

$\boldsymbol{T}$ – выпадение *решетки*;

$\boldsymbol{R}$ – монета встала на *ребро*;

$\boldsymbol{V}$ – монета зависла в *воздухе*;

тогда

$$\Omega_{\boldsymbol{Z}} = \{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{V}\}.$$

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Специалисты обращают внимание на то (см. [**16**, с. 106-107]), что пространство исходов (т.е. ЭС) эксперимента не всегда *очевидно* и *однозначно*. Может существовать целый набор таких пространств. На практике окончательный выбор пространства исходов (т.е. ЭС) эксперимента зависит от человека (т.е. экспериментатора).

ОТМЕТИМ (см. [**16**, с. 107]). Необходимо следить за тем, чтобы все практически осуществимые исходы (т.е. ЭС) эксперимента были включены в пространство исходов (ЭС) исследуемой модели.

ВАЖНО ПОМНИТЬ (см. [**16**, с. 107]). Выводы и прогнозы, полученные по модели, для которой ошибочно сформулировано пространство исходов, могут оказаться на практике ложными.

Пусть (см. работу [**5**, с. 17]) в результате осуществления однородных условий произведены ***m*** серий опытов (в каждой серии опытов было $\boldsymbol{N_i}$ однородных испытаний, в которых наблюдалось случайное событие ***A*** (т.е. фиксировалось, произошло или нет это событие ***A***). Среди $\boldsymbol{N_i}$ испытаний событие ***A*** происходило $\boldsymbol{N_i(A)}$ раз, а $\boldsymbol{N_i(\bar{A})=\{N_i–N_i(A)\}}$ раз это событие не происходило. При больших значениях $\boldsymbol{N_i}$ *относительные частоты* $\boldsymbol{N_i(A)/N_i}$ обладают *статистической устойчивостью* в том смысле, что имеют место следующие приближенные равенства:

$$\frac{N_1(\boldsymbol{A})}{N_1} \approx \frac{N_2(\boldsymbol{A})}{N_2} \approx \frac{N_3(\boldsymbol{A})}{N_3} \approx \cdots \approx \frac{N_m(\boldsymbol{A})}{N_m} \approx \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}),$$

где $\boldsymbol{P(A)}$ мы называем *вероятностью события* ***A***, причем на ПРАКТИКЕ эта вероятность события ***A*** может быть очень МАЛА (близка к **0**), и поэтому его можно считать *практически невозможным*. Тогда могут быть сформулированы ДВА основных принципа (см. работу *А.Н. Колмогорова* [**5**, с. 4] и работы [**1**, с. 19; **5**, с. 18]), лежащих в основе теории принятия статистических решений.

Принцип практической уверенности (см. работы [**1**, с.19; **5**, с.18; **10**, с. 224; **7**, с. 5-7])

В основе применяемых на ПРАКТИКЕ **всех** *выводов* и *рекомендаций* (получаемых с помощью теории вероятностей) лежит так называемый следующий *принцип практической уверенности* [**1**, с. 19]:

> *Если вероятность события **A** в данном опыте весьма мала, то (при однократном выполнении опыта) можно вести себя так, как будто событие **A** вообще невозможно, т.е. не рассчитывать на его появление.*

Принцип статистической устойчивости относительных частот

Многовековая практика убедительно показала, что для *массовых случайных событий* может быть сформулирован следующий *принцип статистической устойчивости относительных частот* [**5**, с. 18]:

> *В длинных сериях однородных испытаний относительные частоты случайного события **A** колеблются около некоторого числа P(**A**), которое мы называем вероятностью события **A**.*

Пусть события ***A*** и ***H*** принадлежат пространству *элементарных событий* **Ω**, причем *P*(***H***)>0.

<u>*Определение 2.16*</u>
Уловная вероятность события [**6**, с. 46] — вероятность события ***A***, вычисленная при условии, что имело место другое событие ***H***, называется *условной вероятностью события* ***A*** и обозначается *P*(***A*|*H***).

ОТМЕТИМ (см. [**12**, с. 443]). Иногда используют другой символ в обозначении *условной вероятности события* ***A*** — *P*(***A/H***). Далее мы будем использовать только обозначение — *P*(***A*|*H***).

ОТМЕТИМ (см. [**14**, с. 53-54]). *P*(***A*|*H***) называется *условной вероятностью события* ***A*** при условии ***H*** (при гипотезе ***H***) и вычисляется по следующей формуле:

$$P(A\,|\,H)=\frac{P(A\cap H)}{P(H)}.$$

ОТМЕТИМ [**16**, с. 124]. Если *P*(***H***)=0, то *условная вероятность события* ***A*** при условии ***H*** не определена.

<u>*Определение 2.17*</u>
***Несовместные* события** [**6**, с. 26] — несколько событий называются *несовместными* в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

<u>*Определение 2.18*</u>
Зависимые события [**6**, с. 46] — событие ***A*** называется *зависимым от события* ***B***, если вероятность события ***A*** меняется в зависимости от того, произошло событие ***B*** или нет, т.е. (см. [**1**, с. 53]) *P*(***A*|*B***)≠*P*(***A***).

<u>*Определение 2.19*(**а**)</u>
Независимые события (см. и ср. [**6**, с. 45; **16**, с. 124]) — событие ***A*** называется *стохастически* НЕ*зависимым от события* ***B*** (или просто *независимым*), если вероятность события ***A*** НЕ зависит от того, произошло событие ***B*** или нет, т.е. (см. [**1**, с.53]) *P*(***A*|*B***)=*P*(***A***).
ОТМЕТИМ [**16**, с. 124]. Можно показать, если ***A*** независимо от ***B*,** то и ***B*** независимо от ***A***.

Определение 2.19 (**б**)

Независимые события [**6**, с. 48] — два события называются НЕ*зависимыми*, если появление одного из них НЕ изменяет вероятности появления другого; несколько событий называются НЕ*зависимыми*, если любое из них НЕ зависит от любой совокупности остальных.

ОТМЕТИМ (см. [**1**, с. 55-56]). Если имеется несколько событий $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$,..., $\boldsymbol{H}_n$, то их попарная независимость (т.е. независимость любых двух событий $\boldsymbol{H}_i$ и $\boldsymbol{H}_j$ с разными индексами) еще не означает их *независимости в совокупности.*

ВАЖНО ПОМНИТЬ (см. [**1**, с. 56]). На практике в основе *независимости* событий лежит их *физическая независимость*, сводящаяся к тому, что множества случайных факторов, приводящих к тому или другому исходу опыта, не пересекаются (или почти не пересекаются).

Рассмотрим некоторые важные случаи (см. [**14**, с. 54-57]):

1) если (см. рис. 2.1) $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{H}=\varnothing$, то $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H})=0$ (т.е. *несовместные* события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{H}$); если произошло событие $\boldsymbol{A}$, то событие $\boldsymbol{H}$ произойти не может;
2) если (см. рис. 2.2) $\boldsymbol{H}\subset\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}$ и $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H})=1$ (т.е. событие $\boldsymbol{A}$ является *следствием* события $\boldsymbol{H}$); если произошло событие $\boldsymbol{H}$, то заведомо произошло и событие $\boldsymbol{A}$;
3) если (см. рис. 2.3) $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{H}\neq\varnothing$ и $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{H}\neq\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{H}\neq\boldsymbol{A}$), то $0<P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H})<1$;
4) если события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{H}$ *независимы*, то $P(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{H})=P(\boldsymbol{A})P(\boldsymbol{H})$ и $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H})=P(\boldsymbol{A})$.

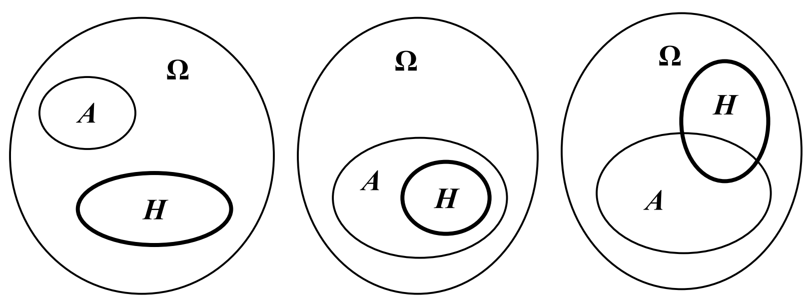

Рис. 2.1 **Рис. 2.2** **Рис. 2.3**

***Пример* 2.E** (см. и ср. [**16**, с. 124-126])

Рассмотрим множество студентов в некоторой аудитории, причем известно следующее (рис. 2.4 [**16**, с. 124-126]):

- общее число студентов в аудитории ***s***=20 (множество ***S***);
- число курящих студентов ***w***=8 (подмножество ***E***);
- число студентов в очках ***f***=12 (подмножество ***F***);
- число курящих студентов в очках ***u***=6 (подмножество ***U***).

На рис. 2.4 студенты условно изображены токами. Множество ***S*** показано сплошной рамкой. Подмножества ***E*** и ***F*** обведены каждый в свою пунктирную рамку. Подмножество ***U*** в рамку не обведено и состоит из 6 элементов (студентов), одновременно входящих как в ***E***, так и в ***F*,** т.е. ***U***=***E***∩***F***.

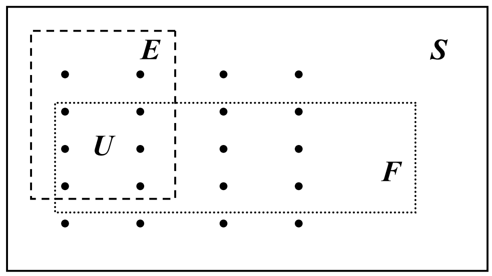

Рис. 2.4

Условная вероятность. Эксперимент №1

Случайно выбираем одного из студентов, и этот студент выходит из аудитории. Предположим, что мы не знаем, курит ли этот студент и носит ли он очки. Пусть: ***Ẽ*** - событие, что этот студент курит; ***Ž*** - событие, что этот студент носит очки; ***Ü***- событие, что этот студент курит и носит очки. Вопрос: *какова вероятность того, что этот студент курящий и носит очки*?

Решение

Будем полагать, что $\mathbf{\Omega}_{\boldsymbol{S}}$ — это множество всех *элементарных событий* эксперимента №1 и *P*($\mathbf{\Omega}_{\boldsymbol{S}}$)=1. Тогда (см. рис. 2.4)

P(***Ẽ***)=***w***/***s***=8/20; *P*(***Ž***)=***f***/***s***=12/20; *P*(***Ü***)=***u***/***s***=6/20.

Эти вероятности приписываются соответствующим событиям еще до эксперимента (или опыта). Искомая вероятность есть

P(***Ü***)=6/20.

Условная вероятность. Эксперимент №2

Случайно выбираем одного из студентов, и этот студент выходит из аудитории. Теперь предположим, что когда студент выходил, мы заметили на нем очки. ***Ü**** — событие, что этот студент курит при условии, что мы заметили на нем очки. Вопрос тот же: *какова вероятность того, что этот студент курящий и носит очки*?

Решение

Будем полагать, что $\boldsymbol{\Omega_F}$ — это множество всех *элементарных событий* эксперимента №2 и $P(\boldsymbol{\Omega_F})=1$. Таким образом, для нового уже измененного эксперимента №2 по сравнению с экспериментом №1 множество $\boldsymbol{\Omega_F}$ принято в качестве нового множества всех *элементарных событий.*

Поскольку мы заметили (т.е. получили информацию), когда студент выходил, что он был в очках, то наверняка можно утверждать, что этот студент из множества ***F*** (пока мы не знаем, курящий он или нет). Очевидно (см. [**16**, с. 125]), что такая дополнительная информация изменит условия опыта, и приписываемые событиям вероятности должны быть пересмотрены.

Поскольку известно, что выходящий студент был в очках, а во множестве ***F*** есть только 6 таких курящих студентов, то понятно, что вероятность того, что студент курит, есть

$$P(\ddot{\boldsymbol{U}}^*)=\boldsymbol{u}/\boldsymbol{f}=6/12,$$

причем это и будет условной вероятностью события $\tilde{\boldsymbol{E}}|\check{\boldsymbol{Z}}$ (сравните $P(\ddot{\boldsymbol{U}})$ и $P(\ddot{\boldsymbol{U}}^*)$ — у них разный знаменатель, т.е. разные множества всех *элементарных событий*). В итоге $P(\tilde{\boldsymbol{E}}|\check{\boldsymbol{Z}})=6/12$.

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Новая информация заставляет исследователя (см. [**16**, с. 125-126]) изменить пространство исходов модели (т.е. множество всех *элементарных событий*), при этом надо также (см. [**16**, с. 126]) пересмотреть и вероятности, приписываемые событиям.

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Специалисты полагают [**16**, с. 125], что вероятность, приписываемая событию, изменяется тем больше, чем больше информации получено из *случайного* эксперимента.

ОТМЕТИМ. Специалисты полагают [**25**, с. 26] (см. рис. 2.5), что условие, состоящее в том, что событие ***H*** произошло, равносильно изменению условий опыта, когда из всех *элементарных событий* $\boldsymbol{\Omega}$ остаются только те, которые благоприятны событию ***A***, при этом все остальные отбрасываются. Поэтому вместо пространства *эле-*

ментарных событий $\boldsymbol{\Omega}$ уже рассматривается новое пространство *элементарных событий* $\boldsymbol{\Omega_H}$, соответствующее событию $\boldsymbol{H}$. Область (на рис. 2.5 она заштрихована), соответствующая $A \cap \boldsymbol{H}$, есть благоприятная событию $\boldsymbol{A}$ при наличии события $\boldsymbol{H}$.

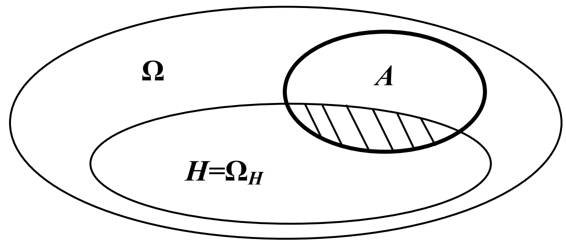

Рис. 2.5

Стохастическая независимость. Эксперимент №3

Случайно выбираем одного из студентов. Рассматриваем следующие два события:

$\tilde{\boldsymbol{E}}$={*студент курит*}, $\check{\boldsymbol{Z}}$={*студент носит очки*}.

Вопрос: *являются ли независимыми события* $\tilde{\boldsymbol{E}}$ *и* $\check{\boldsymbol{Z}}$?

Решение

С одной стороны, можно полагать, что ношение очков и курение никак не связаны друг с другом. С другой стороны, не исключено, что выкуривание большого числа сигарет может повлиять на остроту зрения у тех, кто курит. Специалисты полагают [**16**, с. 126], чтобы полностью ответить на поставленный вопрос, нужно провести полное статистическое обследование, которое включало бы проверку зрения у большого числа людей, и исследование некурящих, непостоянно и постоянно курящих людей.

Ранее мы нашли $P(\tilde{\boldsymbol{E}})$=8/20 и $P(\tilde{\boldsymbol{E}}|\check{\boldsymbol{Z}})$=6/12. Тогда из *определения 2.8* следует, что так как $P(\tilde{\boldsymbol{E}}|\check{\boldsymbol{Z}}) \neq P(\tilde{\boldsymbol{E}})$, то события $\tilde{\boldsymbol{E}}$ и $\check{\boldsymbol{Z}}$ *зависимы*.

ВАЖНО ПОМНИТЬ (см. [**16**, с. 126]). Следует остерегаться обобщения вывода из последнего решения на предположение относительно уже всех студентов. Вывод о зависимости событий $\tilde{\boldsymbol{E}}$ и $\check{\boldsymbol{Z}}$ имеет место только в рамках эксперимента №3.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий [**3**, с. 18] Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = P(\boldsymbol{A}) + P(\boldsymbol{B}) \ \blacksquare$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+...+\boldsymbol{H}_n)=P(\boldsymbol{H}_1)+ P(\boldsymbol{H}_2)+\ldots+ P(\boldsymbol{H}_n) \ \blacksquare$$

Теорема умножения вероятностей событий [**3**, с. 19; **6**, с. 46-47] Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = P(\boldsymbol{A}) \cdot P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$$

или

$$P(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = P(\boldsymbol{B}) \cdot P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) \ \blacksquare$$

Следствие 1. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 \cdot ... \cdot \boldsymbol{H}_n)=P(\boldsymbol{H}_1) \cdot P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{H}_1) \cdot P(\boldsymbol{H}_3|\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot P(\boldsymbol{H}_n) \cdot P(\boldsymbol{H}_3|\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2 \ldots \boldsymbol{H}_{n-1}) \ \blacksquare$$

Следствие 2. Для независимых в совокупности событий теорема упрощается и принимает вид:

$$P(\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 \cdot ... \cdot \boldsymbol{H}_n)=P(\boldsymbol{H}_1) \cdot P(\boldsymbol{H}_2) \cdot P(\boldsymbol{H}_3) \cdot \ldots \cdot P(\boldsymbol{H}_n) \ \blacksquare$$

ОТМЕТИМ. Условная вероятность $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$ есть (см. [**16**, с. 125]) вероятность некоторого события, которое далее (для удобства изложения) будем обозначать просто как событие $\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}$. Запись $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}$, например, будет означать (см. и ср.[**3**, с. 36]) "*при гипотезе **H** событие **A***". Так, если $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}$ достоверно (или иначе — *при гипотезе **H** событие **A*** достоверно), то соответствующая условная вероятность равна единице, т.е. $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H})=1$. Такие события, как $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}$**,** будем также представлять как комбинацию других событий, например, $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}=E_2 \cap (E_3 \cup E_1)$ и т.п.

ТОНКИЕ МОМЕНТЫ (вопросы для самоконтроля)

1. Необходимым условием **случайности** события является его редкость?

   (НЕТ, это не всегда так!)

2. Если в **1000** опытах событие ***A*** произошло **7** раз, то можно ли утверждать, что ***A*** — это **случайное** событие?

   (НЕТ, нельзя! Редкость — это еще НЕ **случайность**.) [**4**, с. 102].

3. Если в **1000** опытах событие ***A*** произошло НЕпредсказуемо **7** раз, то можно ли утверждать, что ***A*** — это **случайное** событие?

   (Скорее всего, ДА.)

4. **НЕсовместные** события – это **НЕзависимые** события?

   (НЕТ, это не так! Может быть зависимость у двух НЕсовместных событий ***A*** и ***B***, образующих **ПГС**, $P(\boldsymbol{A})+P(\boldsymbol{B})=1$. Увеличение $P(\boldsymbol{A})$ приводит к уменьшению $P(\boldsymbol{B})$ и наоборот.) [**4**, с. 102].

5. **НЕсовместные** события всегда **противоположны**?

   (НЕТ, это не всегда так! Например, два события ***A*** и $\bar{\boldsymbol{A}}$, составляющие ПГС, являются **НЕсовместными**, так как НЕ могут одновременно произойти в одном опыте, но одновременно с этим являются и **противоположными**. Другой пример, события ***A***, $\bar{\boldsymbol{A}}$ и $\bar{\boldsymbol{O}}$, ***O*** (составляющие ПГС) являются **НЕсовместными**. Однако события ***A*** и ***O*** НЕ **противоположные** (у них есть **противоположные** другие события $\bar{\boldsymbol{A}}$ и $\bar{\boldsymbol{O}}$.) [**4**, с. 102].

6. **Противоположные** события всегда **НЕсовместны**?

   (ДА, это так!) [**4**, с. 103].

7. Существуют ли три **противоположных** друг другу события?

   (НЕТ!) [**4**, с. 103].

8. Справедливо ли $P(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \geq P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$?

   (ДА, это так!) [**4**, с. 16-17].

9. $P(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A})=2 \cdot P(\boldsymbol{A})$

(НЕТ, это не так! Должно выполняться условие **НЕсовместных** событий, а событие ***A*** **совместно** само с собой.) [**4**, с. 102].

10. $P(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A})=P(\boldsymbol{A})$

(ДА, это так! Так как из теории множеств следует, что $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A}$.) [**4**, с. 103].

11. $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{A}$?

(ДА, это так!) [**4**, с. 103].

12. Если $P(\boldsymbol{A})=0$, то $\boldsymbol{A}=\varnothing$ (**НЕвозможное** событие)?

(НЕТ, это не всегда так!) [**7**, с. 7].

13. Если $P(\boldsymbol{A})=1$, то $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\Omega}$ (**Достоверное** событие)?

(НЕТ, это не всегда так!) [**4**, с. 103].

14. Все события в ПГС всегда **НЕсовместны**?

(НЕТ, но иногда все же ДА, если в определении ПГС указано ***только одно из них***.) [**4**, с. 102].

15. В справочнике железных дорог России даны названия всех станций. Делается случайный выбор одной из них. Она окажется либо *мужского*, либо *женского*, либо *среднего* рода. Является ли перечисленная группа {*мужской род*, *женский род*, *средний род*} ПГС?

(НЕТ, не является, так как есть еще слова, род которых определить нельзя, например, **Кимры**, **Бирюли** и т.п.) [**4**, с. 105, 107].

НЕ ПРОСТЫЕ ВОПРОСЫ (без ответов)

- В ПГС всегда есть **противоположные** события?
- В ПГС всегда четное число событий?
- В ПГС для любого **его** события ***A*** всегда найдется **противоположное** ему событие $\bar{\boldsymbol{A}}$?

Рассмотренные основы теории вероятностей позволяют выделить класс задач ТВ для выбора гипотез.

2.2. Класс задач ТВ для выбора вероятных гипотез

Теория вероятностей позволяет сформулировать класс задач, связанный с выбором вероятных гипотез.

Этот класс задач обладает следующими характерными чертами (или особенностями):

- имеется конкретная проблема о некотором объекте, например, технического характера (исправна ли данная АСОИУ и т.п.);
- в этой проблеме можно выделить и сформулировать конечный набор из $\boldsymbol{n}$ гипотез (случайных событий) $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$,..., $\boldsymbol{H_n}$ об этом объекте;
- в этой проблеме можно выделить и сформулировать некоторое случайное событие $\boldsymbol{A}$ об этом объекте, причем вероятность его появления $P(\boldsymbol{A})>0$;
- известны или могут быть получены значения вероятностей $P(\boldsymbol{A})$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, $P(\boldsymbol{H_i})$, $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$;
- процесс расчета может быть многошаговым.

Для таких задач есть смысл пытаться применять формулу Бейеса и формулу полной вероятности.

Вообще принимать решение о выборе вероятной гипотезы можно не только с использованием формул Бейеса и полной вероятности. Главное, надо как-то определить вероятности гипотез и сравнить их между собой, затем выбрать наиболее вероятную гипотезу, которая и будет искомой.

ОТМЕТИМ (см. задачу №3.35 из [**25**, с. 69]). Не обязательно всегда пытаться применять формулу Бейеса. Существуют задачи, которые можно успешно решить, и не применяя эту формулу.

ВАЖНО ПОМНИТЬ. На практике не следует слепо применять полученные навыки в решении учебных задач. Жизнь намного богаче и разнообразнее, чем учебные примеры. Опыт убедительно показывает, что одно и то же решение может быть получено разными путями с применением совершенно различных средств и подходов. И тем ценнее для науки и будущей практики решение, когда оно неожиданно, красиво, оригинально и не стандартно.

Перейдем к рассмотрению применения двух типовых формул.

2.3. Применение формулы полной вероятности и формулы Бейеса

Теорема (о полной вероятности) [**1**, с. 69; **6**, с. 54; **7**, с. 9-10]

Пусть требуется найти вероятность некоторого события $\boldsymbol{A}$, которое может произойти (появиться) только вместе с одним из событий $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$ (называемых далее *гипотезами*), образующих полную группу попарно несовместных событий.

Известны

- все априорные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i)$ наступления гипотез $\boldsymbol{H}_i$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$ и $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$;
- все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$ наступления события $\boldsymbol{A}$ при условии, что наступило событие $\boldsymbol{H}_i$ (т.е. верна гипотеза $\boldsymbol{H}_i$), где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$.

Тогда вероятность события $P(\boldsymbol{A})$ находят по *формуле полной вероятности* (ФПВ):

$$P(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) \right\} \blacksquare$$

ОТМЕТИМ [**1**, с. 69]. В условиях теоремы принято, что предполагается провести опыт, об условиях которого можно сделать исключающих друг друга гипотезы $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \boldsymbol{\Omega}; \quad H_i \cdot H_j = \varnothing, \quad \text{где } i \neq j,$$

при этом каждая из гипотез осуществляется случайным образом.

ОТМЕТИМ [**6**, с. 55]. Гипотезы, для которых член $P(\boldsymbol{H}_i) \cdot P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$ есть ноль, иногда не вводят при решении задач.

ОТМЕТИМ [**1**, с. 69-70]. Формула полной вероятности применяется специалистами тогда, когда опыт со случайным исходом как бы распадается на следующие два этапа:

на 1-м *разыгрываются* условия опыта;

на 2-м *разыгрывается* его результат.

ОТМЕТИМ. В условиях теоремы некоторый *объект* и *опыт* присутствуют не явно. Согласно [**9**, с. 472] формула *полной вероятности* верна при $\boldsymbol{n}=\infty$. Во избежание недоразумений далее будем полагать, что число гипотез $\boldsymbol{n}$ конечно.

Доказательство теоремы (о полной вероятности) [**17**, с. 18-19]

Пусть событие $\boldsymbol{A}$ (см. рис. 2.6) может произойти с одной из полной группы попарно несовместных гипотез $\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2}, \ldots, \boldsymbol{H_n}$, причем: $\boldsymbol{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A \cap H_i \right)$. Тогда на рис. 2.6 ($\boldsymbol{n}$=4) под событием $\boldsymbol{A}$ понимается попадание в круг точки, случайно брошенной в прямоугольник. События $\boldsymbol{H_i}$, $\boldsymbol{i}$=1, 2, 4 есть события, состоящие в попадание точки в секторы. События $\boldsymbol{A \cap H_i}$, $\boldsymbol{i}$=1, 2, 4 — события, состоящие в попадание точки в малые секторы (эти секторы заштрихованы на рис. 2.6).

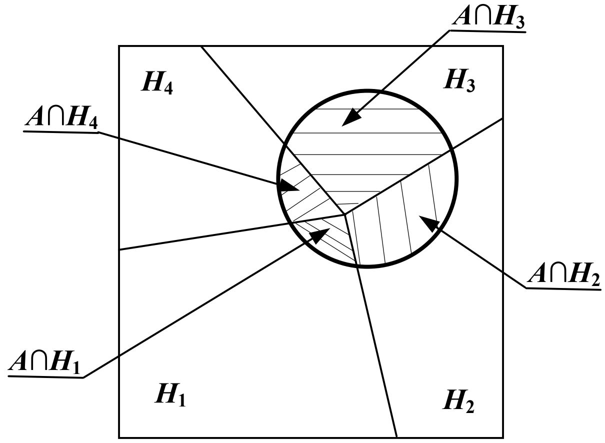

Рис. 2.6

Поскольку события $\boldsymbol{A \cap H_i}$ несовместны (это следует (см. также [**6**, с. 54]) из несовместности событий $\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2}, \ldots, \boldsymbol{H_n}$), то можно воспользоваться теоремой сложения вероятностей и получить промежуточное следующее выражение:

$$P(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A \cap H_i \right).$$

Затем применим к событию $\boldsymbol{AH_i}$ теорему умножения вероятностей, получим другое окончательное выражение:

$$P(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ P\left(H_i \right) \cdot P\left(A \mid H_i \right) \right\}.$$

И тем самым теорема доказана ■

Теорема гипотез (формулы Бейеса) [**6**, с.56-58; **7**, с.10; **9**, с.37]

Пусть некоторое событие $\boldsymbol{A}$ (для которого вероятность появления $P(\boldsymbol{A})>0$) наступает только при появлении одного из попарно несовместных событий $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$,..., $\boldsymbol{H_n}$ (гипотез), образующих полную группу событий ($\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$; $H_i \cdot H_j = \varnothing$, где $i \neq j$).

Известны заранее до испытания (опыта или эксперимента)

- все априорные вероятности $P(\boldsymbol{H_i})$ наступления событий $\boldsymbol{H_i}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$;
- все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$ наступления события $\boldsymbol{A}$ при условии, что наступило событие $\boldsymbol{H_i}$ (т.е. верна гипотеза $\boldsymbol{H_i}$), где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$.

Известно также, что в результате некоторого испытания $\boldsymbol{A}$ произошло, причем (см. [**6**, с.54; **29**, с.12]): $\boldsymbol{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (A \cap H_i)$.

Тогда все вероятности гипотез (событий) могут быть пересмотрены (переоценены или переопределены) с помощью следующей *формулы Бейеса*:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)},$$

где вероятность события $P(\boldsymbol{A})$ находят по формуле *полной вероятности*: $P(\boldsymbol{A}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)\}$ ■

ОТМЕТИМ. Согласно [**9**, с. 37] эта теорема доказана *Т. Бейесом* (*T. Bayes*) и опубликована в 1763 г. Однако согласно [**26**, с. 37] *Т. Бейес* (1702 — 1761 гг.) ее не доказывал, и из уважения к его заслугам она носит его имя (подробнее см. [**28**, с. 39-41]).

ОТМЕТИМ. В условиях теоремы некоторый *объект* и *опыт* присутствуют не явно.

ОТМЕТИМ. Во избежание недоразумений далее будем полагать, что число гипотез $\boldsymbol{n}$ конечно.

ВАЖНО ПОМНИТЬ. На практике, прежде чем применять эти две теоремы, следует убедиться – события случайны, гипотезы несовместны и образуют полную группу событий.

Для этих двух формул нужны следующие исходные данные:

$\boldsymbol{n}$ — общее число гипотез (событий) $\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2},..., \boldsymbol{H_n}$ (рассматриваем конечное число гипотез);

$\boldsymbol{H_i}$ — сами гипотезы (их формулировки) относительно объекта, причем именно те, что *попарно несовместны* и образуют *полную группу* событий, $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$;

$\boldsymbol{A}$ — центральное (основное или главное) событие, которое по условию задачи наступило (его формулировка), причем вероятность его появления есть $P(\boldsymbol{A})>0$), и наступает это событие только при появлении одного из событий (гипотез) $\boldsymbol{H_i}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$;

объект — тот объект, относительно которого высказываются $\boldsymbol{n}$ гипотез $\boldsymbol{H_i}$;

опыт — опыт (эксперимент или испытание) со случайным исходом над объектом, в результате которого наступает главное событие $\boldsymbol{A}$ (т.е. среди всех событий эксперимента выделяют одно главное и обозначают символом $\boldsymbol{A}$);

$P(\boldsymbol{H_i})$ — априорные вероятности наступления событий $\boldsymbol{H_i}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$ и $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})\ldots+P(\boldsymbol{H_n})=1$;

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$ — условные вероятности наступления события $\boldsymbol{A}$ при условии, что верна гипотеза $\boldsymbol{H_i}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$;

$P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ — условные вероятности наступления события $\boldsymbol{H_i}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$ при условии, что наступило событие $\boldsymbol{A}$.

Важно подчеркнуть следующее:

- обычно требуется найти именно вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ или $P(\boldsymbol{A})$;
- событие $\boldsymbol{A}$ отражает результат опыта, т.е. если событие $\boldsymbol{A}$ произошло, то достоверным стало одно из событий $\boldsymbol{H_1A}$ или $\boldsymbol{H_2A}$ или $\boldsymbol{H_3A}$ или ... $\boldsymbol{H_nA}$, так как (см. [**29**, с. 12]): $\boldsymbol{A}=\bigcup_{i=1}^{n}\left(A\cap H_i\right)$;
- под опытом понимается [**1**, с. 15; **17**, с. 6] некоторая воспроизводимая совокупность (комплекс) условий, в которых наблюдается то или другое явление, фиксируется тот или иной результат; если при повторении опыта варьируется его результат (т.е. событие может произойти или не произойти), то говорят об опыте со случайным исходом;
- объект – устройство, прибор, система “стрелок — мишень”, абстрактный объект и т.п.

Проблема получения исходных данных для решения задачи

Формула Бейеса позволяет вычислять $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$. Однако откуда берутся значения исходных данных, например,

$P(\boldsymbol{H_i})$ — априорные вероятности наступления событий $\boldsymbol{H_i}$;

$P(\boldsymbol{A})$ — вероятность центрального события;

или

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$ — условные вероятности наступления события $\boldsymbol{A}$ при условии, что наступило событие $\boldsymbol{H_i}$

— это не предмет теории вероятностей. Эта теория только позволяет вычислять вероятности по другим исходным данным, например, по вероятностям элементарных событий, при этом (см. [**1**, с. 46]) откуда берутся сами эти вероятности элементарных событий, в этой теории не рассматривается.

На практике обычно поступают следующим образом:

- либо все исходные вероятности известны и их берут из условий задачи;
- либо неизвестные исходные вероятности вычисляют с помощью теории вероятностей по косвенным исходным данным из условий задачи;
- либо неизвестные исходные вероятности становятся известными в результате их определения по экспериментальным статистическим данным.

Формула Бейеса и ФПВ не дает ответ об $\boldsymbol{n}$ – числе гипотез $\boldsymbol{H_i}$. Это число должно быть известно исследователю, применяющему эту формулу. Практика решения задач с применением формулы Бейеса и ФПВ показала, что обычно число гипотез известно из условия задачи. Однако имеются случаи, когда число гипотез неизвестно (не задано) в условиях задачи, и исследователю надо принять решение об их числе.

На практике решение обычно принимается следующим образом:

- либо $\boldsymbol{n}$ известно и его берут из условий задачи;
- либо $\boldsymbol{n}$ неизвестно, но его можно определить по косвенным исходным данным из условий задачи;
- либо $\boldsymbol{n}$ неизвестно, но его можно задать (ввести самостоятельно) с учетом условий задачи.

На практике, применяя формулу Бейеса или ФПВ, удобно придерживаться следующей последовательности действий, которая может меняться в зависимости от конкретных условий задачи:

1). При необходимости вводят исключающие друг друга гипотезы (т.е. делают предположения) $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$,..., $\boldsymbol{H}_n$ и формулируют, в чем собственно состоит само событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*формулировка 1-й гипотезы*},
$\boldsymbol{H}_2$={*формулировка 2-й гипотезы*},
$\vdots$
$\boldsymbol{H}_n$={*формулировка n-й гипотезы*},
$\boldsymbol{A}$={*формулировка события* $\boldsymbol{A}$},

а также, если неизвестны, то находят все вероятности $P(\boldsymbol{H}_i)$.
Вводят, если требуется, необходимые обозначения.
Формулируют на языке вероятностей то, что требуется найти.

2). Если требуется, то выполняют проверку (если это прямо не следует из условия задачи), что гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$,..., $\boldsymbol{H}_n$ являются попарно <u>несовместными</u>, т.е. $H_i \cdot H_j = \varnothing$, где $i \neq j$, и образуют <u>полную группу</u> событий, т.е. $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$; $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

3). При необходимости находят условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$ и вероятность события $\boldsymbol{A}$: $P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P(H_i)\cdot P(A \mid H_i)\right\}$, которая должна быть больше нуля, а иначе формула Бейеса не применима.

4). Так как имеем $P(\boldsymbol{A})\neq 0$, то $P(H_i \mid A) = \dfrac{P(H_i)\cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}$.

5). Анализируя полученные результаты, например, $P(\boldsymbol{H}_k|\boldsymbol{A})$ или $P(\boldsymbol{A})$, стараются получить ответ на поставленный в задаче вопрос.

ОТМЕТИМ [**25**, с. 56]. В том случае, если после опыта, давшего событие $\boldsymbol{A}$, проводится еще один опыт, который может дать событие $\boldsymbol{B}$, то вероятность этого последнего события вычисляют по ФПВ, в которую подставлены не прежние вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$, а новые $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$: $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P(H_i \mid A)\cdot P(B \mid H_i A)\right\}$.

Пример 2.1

Известно, что некоторое событие $\boldsymbol{A}$ наступает только при появлении одного из $\boldsymbol{n}=2$ несовместных событий (гипотез) $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, образующих полную группу событий, причем $P(\boldsymbol{A})\neq 0$.

Известны вероятности $P(\boldsymbol{H_i})$ наступления гипотез $\boldsymbol{H_i}$, где $\boldsymbol{i}=1, 2$.

Известны вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$ наступления события $\boldsymbol{A}$ при условии, что наступило событие $\boldsymbol{H_i}$, где $\boldsymbol{i}=1, 2$.

Известно также, что в результате некоторого испытания (опыта или эксперимента) событие $\boldsymbol{A}$ произошло, т.е. достоверным стало одно из событий $\boldsymbol{H_1A}$ или $\boldsymbol{H_2A}$.

Требуется найти вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ наступления события $\boldsymbol{H_i}$, где $\boldsymbol{i}=1, 2$ при условии, что наступило событие $\boldsymbol{A}$.

Требуется выяснить, какая гипотеза из $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$ наиболее вероятна после наступления события $\boldsymbol{A}$?

Решение

1). Вводить гипотезы $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, формулировать событие $\boldsymbol{A}$ и находить все вероятности $P(\boldsymbol{H_1})$ и $P(\boldsymbol{H_2})$ не требуется, так как это все прямо следует из условия задачи. Пусть $\boldsymbol{k}$ — искомая гипотеза $\boldsymbol{H_k}$. Требуется найти $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{k}$, где $P(\boldsymbol{H_k}|\boldsymbol{A})=\max\limits_{\boldsymbol{i}=1,2}\{P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})\}$.

2). Проверять, что гипотезы $\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2}$ являются несовместными и образуют полную группу событий не требуется, так как это прямо следует из условия задачи.

3). Нет необходимости находить условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})$, так как они все известны по условию задачи. Найдем вероятность события $\boldsymbol{A}$:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2).$$

4). Так как по условию задачи $P(\boldsymbol{A})\neq 0$, то из формулы Бейеса сразу следует:

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{P(A)};\quad P(H_2\,|\,A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)}{P(A)}.$$

5). Далее находим $P(\boldsymbol{H_k}|\boldsymbol{A})=\max\limits_{\boldsymbol{i}=1,2}\{P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})\}$ среди всех вероятностей $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{i}=1, 2$. Та $\boldsymbol{k}$–я гипотеза $\boldsymbol{H_k}$, для которой $P(\boldsymbol{H_k}|\boldsymbol{A})$, есть максимум среди всех вероятностей $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{i}=1, 2$ и есть искомая гипотеза, которая наиболее вероятна после наступления события $\boldsymbol{A}$. И тем самым задача решена■

Пример 2.2 (см. [**1**, с. 77])

Имеется 3 урны; в первой 3 белых шара и 1 черный; во второй – 2 белых шара и 3 черных; в третьей – 3 белых шара. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее 1 шар. Этот шар оказался белым. Требуется найти послеопытные (апостериорные) вероятности того, что шар вынут из 1-й, 2-й, 3-й урны.

Решение

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=3) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*выбрана первая урна*},

$\boldsymbol{H_2}$={*выбрана вторая урна*},

$\boldsymbol{H_3}$={*выбрана третья урна*},

$\boldsymbol{A}$={*из выбранной урны вынут белый шар*}.

Так как урна выбирается наугад, то априорные вероятности гипотез равны: $P(\boldsymbol{H_1}) = P(\boldsymbol{H_2}) = P(\boldsymbol{H_3}) = 1/3$ **.**

Требуется найти $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3.

2). Проверим, что гипотезы $\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2}, \boldsymbol{H_3}$ являются попарно <u>несовместными</u> и образуют <u>полную группу</u> событий: это не требуется, так как это прямо следует из условия задачи (всего только 3 урны и выбрана может быть только одна из них).

3). Найдем условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3})$:

в 1-й урне всего 4 шара, из них только 3 белых: $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1}) = \frac{3}{4}$ **;**

во 2-й урне всего 5 шаров, из них только 2 белых: $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2}) = \frac{2}{5}$ **;**

в 3-й урне всего 3 шара, из них все 3 белых: $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3}) = \mathbf{1}$**;**

и вероятность события $\boldsymbol{A}$: $P(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{43}{60}$.

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$, то $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A}) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{43}{60}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{60}{43}=\frac{15}{43}$;

$$P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A}) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{43}{60}}=\frac{2}{15}\cdot\frac{60}{43}=\frac{8}{43};\quad P(\boldsymbol{H_3}|\boldsymbol{A}) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{43}{60}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{60}{43}=\frac{20}{43}.$$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.3 (см. и ср. [**1**, с. 80-81; **25**, с. 67, 71])

Испытывается прибор, состоящий из двух узлов: 1 и 2. Надежности (вероятности безотказной работы за время τ) узлов 1 и 2 известны и равны $\boldsymbol{p_1}$=0.8; $\boldsymbol{p_2}$=0.9 (узлы отказывают независимо друг от друга). По истечении времени τ выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятности гипотез:

$\boldsymbol{H_1}$={*неисправен только 1-й узел*},

$\boldsymbol{H_2}$={*неисправен только 2-й узел*},

$\boldsymbol{H_3}$={*неисправны оба узла*}.

Решение

1). Введем еще одну гипотезу $\boldsymbol{H_4}$ ($\boldsymbol{n}$=4) и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$.

До опыта были возможны не эти три, а четыре гипотезы, включая $\boldsymbol{H_4}$={*исправны оба узла*}. Далее опыт показал, что имеет место только одна из гипотез $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$, причем наблюденное сложное событие $\boldsymbol{A}$ есть сумма этих событий (гипотез): $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}+\boldsymbol{H_3}$ или

$\boldsymbol{A}$={*прибор неисправен*}.

Вычислим все ($\boldsymbol{n}$=4) априорные вероятности гипотез:

$P(\boldsymbol{H_1}) = (1-\boldsymbol{p_1})\,\boldsymbol{p_2}=0.2\cdot0.9=0.18;$

$P(\boldsymbol{H_2}) = \boldsymbol{p_1}(1-\boldsymbol{p_2}) =0.8\cdot0.1=0.08;$

$P(\boldsymbol{H_3}) = (1-\boldsymbol{p_1})\,(1-\boldsymbol{p_2})= 0.2\cdot0.1=0.02;$

$P(\boldsymbol{H_4}) = \boldsymbol{p_1}\,\boldsymbol{p_2}= 0.8\cdot0.9=0.72;$

причем $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})+P(\boldsymbol{H_3})+P(\boldsymbol{H_4})=0.18+0.08+0.02+0.72=1.$

Требуется найти $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3, 4.

2). Проверим, что гипотезы $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$ и $\boldsymbol{H_4}$ являются попарно <u>несовместными</u> и образуют <u>полную группу</u> событий: это не требуется, так как это прямо следует из того, что всего только 4 гипотезы, и выбрана может быть только одна из них.

3). Найдем условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3})$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_4})$:

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3})=1$, так как $\boldsymbol{H_i}\subset\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3;

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_4})=0$, так как $\boldsymbol{H_4}\not\subset\boldsymbol{A}$

и вероятность события $\boldsymbol{A}$: $P(\boldsymbol{A})=0.18\cdot\mathbf{1}+0.08\cdot\mathbf{1}+0.02\cdot\mathbf{1}+0.72\cdot\mathbf{0}=0.28$.

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq0$, то $P(\boldsymbol{H_4}|\boldsymbol{A})=\dfrac{0}{0.28}=0$;

$P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})=\dfrac{0.18}{0.28}\approx0.643;$ $P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A})=\dfrac{0.08}{0.28}\approx0.286;$ $P(\boldsymbol{H_3}|\boldsymbol{A})=\dfrac{0.02}{0.28}\approx0.071$.

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.4 (см. и ср. [**25**, с. 71])

До опыта о его условиях можно было сделать $\boldsymbol{n}$ несовместных гипотез $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$,..., $\boldsymbol{H}_n$, образующих полную группу событий с априорными вероятностями: $P(\boldsymbol{H}_i)$ — наступления событий $\boldsymbol{H}_i$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,... $\boldsymbol{n}$. В результате опыта стало известно, что имела место какая-то одна гипотеза из группы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$,..., $\boldsymbol{H}_k$, а остальные гипотезы невозможны: $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+...+\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{\Omega}$; $\boldsymbol{H}_{k+1}+\boldsymbol{H}_{k+2}+...+\boldsymbol{H}_n=\varnothing$. Найти апостериорные вероятности гипотез.

Решение

1). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$,..., $\boldsymbol{H}_n$ все уже введены и известны. Осталось только сформулировать событие $\boldsymbol{A}$, которое по условию задачи можно определить следующим выражением:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+...+\boldsymbol{H}_k \text{ или } \boldsymbol{A}=\bigcup_{i=1}^{k} H_i \text{ или}$$

$\boldsymbol{A}$={имеет место какая-то одна гипотеза из группы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$,..., $\boldsymbol{H}_k$}.
Вычислять априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ не надо, так как все они известны из условия задачи, причем $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1.$

Требуется найти $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$.

2). Проверим, что гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$,..., $\boldsymbol{H}_n$ являются попарно <u>несовместными</u> и образуют <u>полную группу</u> событий: это не требуется, так как это прямо следует из условия задачи (всего только $\boldsymbol{n}$ гипотез и выбрана может быть только одна из них).

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$:
$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=...=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_j)=...=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_k)=1$, так как $\boldsymbol{H}_j\subset\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{j}$=1, 2,.., k;
$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_{k+1})=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_{k+2})=\ldots=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_m)=\ldots=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_n)=0$, так как $\boldsymbol{H}_m\not\subset\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{m}=(1+k), (2+k),.., n$; и вероятность события $\boldsymbol{A}$:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}\left\{P(H_i)\cdot P(A|H_i)\right\}=\sum_{i=1}^{k}\left\{P(H_i)\cdot P(A|H_i)\right\}=\sum_{i=1}^{k}P(H_i).$$

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$, то апостериорные вероятности гипотез есть

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(H_i)}{P(A)} \text{ для } \boldsymbol{i}=1, 2,.., k;$$

$$P(H_m\,|\,A)=0 \text{ для } \boldsymbol{m}=(1+k), (2+k),.., n.$$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.5 (см. и ср. [**3**, с. 36])

2 из 3-х независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали 1-й и 2-й элементы, если вероятность отказа 1-го, 2-го и 3-го элементов соответственно равны 0.2; 0.4 и 0.3 .

Решение

1). Введем все гипотезы ($\boldsymbol{n}$=8) и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*отказали 1-й и 2-й элементы, 3-й исправен*},

$\boldsymbol{H_2}$={*отказали 1-й и 3-й элементы, 2-й исправен*},

$\boldsymbol{H_3}$={*отказали 2-й и 3-й элементы, 1-й исправен*},

$\boldsymbol{H_4}$={*отказал 1-й элемент, 2-й и 3-й исправны*},

$\boldsymbol{H_5}$={*отказал 2-й элемент, 1-й и 3-й исправны*},

$\boldsymbol{H_6}$={*отказал 3-й элемент,1-й и 2-й исправны*},

$\boldsymbol{H_7}$={*отказали и 1-й, и 2-й, и 3-й элементы*},

$\boldsymbol{H_8}$={*ни один элемент не отказал, т.е. 1-й, 2-й, 3-й исправны*},

$\boldsymbol{A}$={*отказали какие-то два элемента*}.

Обозначим $\boldsymbol{p_1}$=0.2; $\boldsymbol{p_2}$=0.4; $\boldsymbol{p_3}$=0.3 и вычислим все $P(\boldsymbol{H_i})$:

$$P(\boldsymbol{H_1}) = \boldsymbol{p_1}\,\boldsymbol{p_2}(1-\boldsymbol{p_3})=0.2\cdot 0.4\cdot 0.7=0.056;$$
$$P(\boldsymbol{H_2}) = \boldsymbol{p_1}\,\boldsymbol{p_3}(1-\boldsymbol{p_2})= 0.2\cdot 0.3\cdot 0.6=0.036;$$
$$P(\boldsymbol{H_3}) = \boldsymbol{p_2}\,\boldsymbol{p_3}\,(1-\boldsymbol{p_1}) = 0.4\cdot 0.3\cdot 0.8=0.096;$$
$$P(\boldsymbol{H_4}) = \boldsymbol{p_1}(1-\boldsymbol{p_2})(1-\boldsymbol{p_3})= 0.2\cdot 0.6\cdot 0.7=0.084;$$
$$P(\boldsymbol{H_5}) = \boldsymbol{p_2}(1-\boldsymbol{p_1})(1-\boldsymbol{p_3})= 0.4\cdot 0.8\cdot 0.7=0.224;$$
$$P(\boldsymbol{H_6}) = \boldsymbol{p_3}(1-\boldsymbol{p_1})(1-\boldsymbol{p_2})= 0.3\cdot 0.8\cdot 0.6=0.144;$$
$$P(\boldsymbol{H_7}) = \boldsymbol{p_1}\boldsymbol{p_2}\boldsymbol{p_3}= 0.2\cdot 0.4\cdot 0.3=0.024;$$
$$P(\boldsymbol{H_8}) = (1-\boldsymbol{p_1})(1-\boldsymbol{p_2})(1-\boldsymbol{p_3})= 0.8\cdot 0.6\cdot 0.7=0.336;$$

причем $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})+P(\boldsymbol{H_3})+P(\boldsymbol{H_4})+P(\boldsymbol{H_5})+P(\boldsymbol{H_6})+P(\boldsymbol{H_7})+P(\boldsymbol{H_8})=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1},\boldsymbol{H_2},...,\boldsymbol{H_8}$ попарно <u>несовместны</u> и образуют <u>полную группу</u> событий, так как это прямо следует из того, что всего только 8 гипотез и выбрана может быть только одна из них.

3). Найдем $P(\boldsymbol{A})$ и все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$:

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})=1$, так как $\boldsymbol{H_i}\subset\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})=0$, так как $\boldsymbol{H_i}\not\subset\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i}=4\div 8$;

$P(\boldsymbol{A})=0.056\cdot\mathbf{1}+0.036\cdot\mathbf{1}+0.096\cdot\mathbf{1}+\{0.812\cdot\mathbf{0}\}=0.188$.

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$, то $P(H_1\,|\,A)=\dfrac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{P(A)}=\dfrac{0.056\cdot 1}{0.188}\approx 0.298.$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.6 (см. и ср. [**3**, с. 35])

Батарея из 3-х орудий произвела залп, причем 2 снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что 1-е орудие дало попадание, если вероятность попадания в цель 1-м, 2-м и 3-м орудиями соответственно равны $\boldsymbol{p_1}$=0.4; $\boldsymbol{p_2}$=0.3; $\boldsymbol{p_3}$=0.5 .

Решение

1). Введем все гипотезы ($\boldsymbol{n}$=2) и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*первое орудие попало в цель*},

$\boldsymbol{H_2}$={*первое орудие **не** попало в цель*},

$\boldsymbol{A}$={*два орудия попали в цель*}.

Вычислим все ($\boldsymbol{n}$=2) априорные вероятности гипотез:

$$P(\boldsymbol{H_1}) = \boldsymbol{p_1}=0.4;$$

$$P(\boldsymbol{H_2}) = (1-\boldsymbol{p_1})=0.6;$$

причем $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})=0.4+0.6=1$.

Введем дополнительно следующие обозначения для событий:

E_2={*2-е орудие попало в цель*}, E_3={*3-е орудие попало в цель*}.

Требуется найти $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})$.

2). Проверим, что гипотезы $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$ являются несовместными и образуют полную группу событий:

это не требуется, так как это прямо следует из условия задачи (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы, и иметь место может быть только одна из них, так как орудие не может одновременно попасть в цель и дать промах по результатам одного выстрела, т.е. залпа).

3). Найдем $P(\boldsymbol{A})$ и все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$:

событие $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1}$={$E_2\cdot\bar{E}_3$} + {$E_3\cdot\bar{E}_2$}, а поскольку эти два события {$E_2\cdot\bar{E}_3$} и {$E_3\cdot\bar{E}_2$} несовместны, то применима *теорема сложения* вероятностей $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=\boldsymbol{p_2}(1-\boldsymbol{p_3})+\boldsymbol{p_3}(1-\boldsymbol{p_2})= 0.3\cdot0.5+0.5\cdot0.7=0.5$;

событие $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2}=E_2\cdot E_3$, а поскольку эти два события E_2 и E_3 независимы, то применима *теорема умножения* вероятностей

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})= \boldsymbol{p_2}\,\boldsymbol{p_3}= 0.3\cdot0.5=0.15$;

$P(\boldsymbol{A})= P(\boldsymbol{H_1})\cdot P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})+ P(\boldsymbol{H_2})\cdot P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})= 0.4\cdot0.5+0.6\cdot0.15=0.29$.

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq0$, то $P(H_1|A)=\dfrac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}=\dfrac{0.20}{0.29}=\dfrac{20}{29}\approx0.69$.

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.7 (см. [**6**, с. 57])

Прибор может собираться из *высококачественных деталей* (ВД) и из *деталей обычного качества* (ДОК); вообще около 40 % приборов собирается из ВД. Если прибор собран из ВД, его надежность (вероятность безотказной работы) за время $\boldsymbol{\tau}$ равна 0.95; если из ДОК – его надежность равна 0.7 . Прибор испытывался в течение времени $\boldsymbol{\tau}$ и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран высококачественных деталей.

Решение

1). Введем две ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{H_1}=\{\textit{прибор собран из ВД}\},$$

$$\boldsymbol{H_2}=\{\textit{прибор собран из ДОК}\},$$

$$\boldsymbol{A}=\{\textit{прибор безотказно работал временя } \boldsymbol{\tau}\}.$$

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ практически известны из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H_1}) = 0.4 \text{ (так как 40 \%)};$$

$$P(\boldsymbol{H_2}) = [1- P(\boldsymbol{H_1})]=0.6;$$

причем естественно, что $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})=0.4+0.6=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})$.

2). Проверим, что гипотезы $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$ являются <u>несовместными</u> и образуют <u>полную группу</u> событий: это не требуется, так как это прямо следует из условия задачи и из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них, так как видимо предполагается, что прибор не может одновременно быть собран из ВД и ДОК).

3). Найдем только $P(\boldsymbol{A})$, так как все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$ уже известны из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=0.95;$$

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=0.7;$$

$$P(\boldsymbol{A})= P(\boldsymbol{H_1})\cdot P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})+ P(\boldsymbol{H_2})\cdot P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})= 0.4\cdot 0.95+0.6\cdot 0.7=0.8 .$$

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$, то $P(H_1 \mid A)=\dfrac{P(H_1)\cdot P(A \mid H_1)}{P(A)}=\dfrac{0.4\cdot 0.95}{0.8}=0.475$.

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.8 (см. [**6**, с. 57])

2 стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для 1-го стрелка $\boldsymbol{p_1}$=0.8; для 2-го стрелка $\boldsymbol{p_1}$=0.4 . После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит 1-му стрелку (т.е. 1-й стрелок автор этой пробоины).

Решение

1). Введем гипотезы ($\boldsymbol{n}$=4) и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*оба стрелка не попали*},

$\boldsymbol{H_2}$={*оба стрелка попали*},

$\boldsymbol{H_3}$={*1-й стрелок попал, 2-й не попал*},

$\boldsymbol{H_4}$={*1-й стрелок не попал, 2-й попал*},

$\boldsymbol{A}$={*обнаружена одна пробоина*}.

Вычислим все ($\boldsymbol{n}$=4) априорные вероятности гипотез:

$P(\boldsymbol{H_1}) = (1-\boldsymbol{p_1})(1-\boldsymbol{p_2})=0.2\cdot0.6=0.12;$

$P(\boldsymbol{H_2}) = \boldsymbol{p_1}\,\boldsymbol{p_2}= 0.8\cdot0.4=0.32;$

$P(\boldsymbol{H_3}) = \boldsymbol{p_1}(1-\boldsymbol{p_2}) = 0.8\cdot0.6=0.48;$

$P(\boldsymbol{H_4}) = (1-\boldsymbol{p_1})\boldsymbol{p_2}= 0.2\cdot0.4=0.08;$

причем $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})+P(\boldsymbol{H_3})+P(\boldsymbol{H_4})=0.12+0.32+0.48+0.08=1.$

Требуется найти $P(\boldsymbol{H_3}|\boldsymbol{A})$.

2). Проверим, что гипотезы $\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2}, \boldsymbol{H_3}$ и $\boldsymbol{H_4}$ являются попарно несовместными и образуют полную группу событий: это не требуется, так как это прямо следует из условия задачи и из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=4 гипотезы и иметь место может быть только одна из них).

3). Найдем $P(\boldsymbol{A})$ и все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$:

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=0$, так как $\boldsymbol{H_i}\not\subset\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2;

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3})=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_4})=1$, так как $\boldsymbol{H_i}\subset\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{i}$=3, 4;

$$P(\boldsymbol{A})= P(\boldsymbol{H_1})\cdot0+P(\boldsymbol{H_2})\cdot0 + P(\boldsymbol{H_3})\cdot1+P(\boldsymbol{H_4})\cdot1= 0.48\cdot1+0.08\cdot1=0.56\ .$$

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq0$, то $P(H_3\,|\,A)=\dfrac{P(H_3)\cdot P(A\,|\,H_3)}{P(A)}=\dfrac{0.48\cdot1}{0.56}=\dfrac{6}{7}\approx0.857.$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.9 (см. и ср. [**25**, с. 70])

Расследуются причины авиационной катастрофы, о которых можно сделать четыре гипотезы: $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$, $\boldsymbol{H_4}$. Согласно статистике $P(\boldsymbol{H_1})=\mathbf{0.2}$; $P(\boldsymbol{H_2})=\mathbf{0.4}$; $P(\boldsymbol{H_3})=\mathbf{0.3}$; $P(\boldsymbol{H_4})=\mathbf{0.1}$. Обнаружено, что в ходе катастрофы произошло событие $\boldsymbol{A}$={*воспламенение горючего*}. Условные вероятности события $\boldsymbol{A}$ при гипотезах $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$, $\boldsymbol{H_4}$ согласно той же статистике известны: $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=\mathbf{0.9}$; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=\mathbf{0}$; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3})=\mathbf{0.2}$; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_4})=\mathbf{0.3}$. Найти апостериорные вероятности гипотез. Какая гипотеза наиболее вероятна до известия о событии $\boldsymbol{A}$ и после него?

Решение

1). Все гипотезы ($\boldsymbol{n}$=4) уже введены и сформулировано событие $\boldsymbol{A}$. Априорные вероятности гипотез уже все известны, причем

$$P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})+P(\boldsymbol{H_3})+P(\boldsymbol{H_4})=0.2+0.4+0.3+0.1=1.$$

Требуется найти $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{k}$, где $P(\boldsymbol{H_k}|\boldsymbol{A})=\max\limits_{\boldsymbol{i}=1\div 4}\{P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})\}$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$ и $\boldsymbol{H_4}$ являются попарно <u>несовместными</u> (по-видимому, это подразумевается в условиях задачи) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}+\boldsymbol{H_3}+\boldsymbol{H_4}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем только $P(\boldsymbol{A})$, так как все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3, 4 уже известны из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\mid H_i\right)\right\}=0.2\cdot 0.9+0.4\cdot\mathbf{0}+0.3\cdot 0.2+0.1\cdot 0.3=0.27\ .$$

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$, то $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})=\dfrac{0.2\cdot 0.9}{0.27}=\dfrac{0.18}{0.27}=\dfrac{2}{3}$; $P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A})=\dfrac{0.4\cdot 0}{0.27}=0$;

$$P(\boldsymbol{H_3}|\boldsymbol{A})=\frac{0.3\cdot 0.2}{0.27}=\frac{0.06}{0.27}=\frac{2}{9};\qquad P(\boldsymbol{H_4}|\boldsymbol{A})=\frac{0.1\cdot 0.3}{0.27}=\frac{0.03}{0.27}=\frac{1}{9}.$$

5). Наиболее вероятная гипотеза до известия о событии $\boldsymbol{A}$:

$$P(\boldsymbol{H_2})=\max_{\boldsymbol{i}=1\div 4}\{P(\boldsymbol{H_i})\}=\max\{0.2;\ \mathbf{0.4};\ 0.3;\ 0.1\}=0.4\ \text{(т.е. } \boldsymbol{H_2}\text{)}.$$

Наиболее вероятная гипотеза после известия о событии $\boldsymbol{A}$:

$$P(\boldsymbol{H_k}|\boldsymbol{A})=\max_{\boldsymbol{i}=1\div 4}\{P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})\},\ \boldsymbol{k}=1$$

или

$$P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})=\max\{\tfrac{2}{3};\mathbf{0};\tfrac{2}{9};\tfrac{1}{9}\}=\tfrac{2}{3}\ \text{(т.е. } \boldsymbol{k}=1\text{, гипотеза } \boldsymbol{H_1}\text{)}.$$

И тем самым задача решена■

Пример 2.10 (см. [**15**, с. 21]) **<u>неудачной формулировки задачи</u>**

Оператор *радиолокационной станции* (РЛС) фиксирует самолет противника с вероятностью 0.8 и принимает помеху за самолет с вероятностью 0.1 . Практика показала, что в 15 % случаев на экран оператора попадает помеха. Оператор принял решение о наличии в воздушном пространстве самолета противника. Определить вероятность того, что сигнал получен действительно от самолета.

Решение

1). Введем две ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*появление самолета*},

$\boldsymbol{H}_2$={*появление помехи*},

$\boldsymbol{A}$={*принято решение о наличии в воздушном пространстве самолета*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ практически известны из условия задачи:

$P(\boldsymbol{H}_2) = 0.15$ (так как 15 %);

$P(\boldsymbol{H}_1) = [1- P(\boldsymbol{H}_2)]=0.85;$

причем естественно, что $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)=0.15+0.85=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ являются <u>несовместными</u> (по-видимому, в условиях задачи подразумевается, что *помеха* и *самолет* не могут одновременно появляться) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2= \boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем только $P(\boldsymbol{A})$, так как все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2 уже известны из условия задачи:

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)= 0.8$ (оператор фиксирует самолет);

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)= 0.1$ (оператор принимает помеху за самолет);

$$P(\boldsymbol{A})= \sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\mid H_i\right)\right\} = 0.85\cdot 0.8+0.15\cdot 0.1=0.695 .$$

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$, то $P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})=\dfrac{P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)}{P(A)}=\dfrac{0.85\cdot 0.8}{0.695}=\dfrac{0.68}{0.695}\approx 0.978.$

Отметим, что $P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{A})=1- P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})\approx 1-0.978=0.022$.

Тогда наиболее вероятная гипотеза из $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ после известия о событии $\boldsymbol{A}$: есть $\boldsymbol{H}_1$, так как $P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})>P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{A})$.

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.11 (см. [**15**, с. 20])

Инвестор вложил капитал в ценные бумаги двух финансовых фирм. При этом он надеется получить доход в течение обусловленного времени от 1-й фирмы с вероятностью 0.9; от 2-й – с вероятностью 1. Однако есть возможность банкротства фирм независимо друг от друга, которая оценивается для 1-й фирмы вероятностью $\boldsymbol{p}_1$=0.1; для 2-й — $\boldsymbol{p}_2$=0.02. В случае банкротства фирмы инвестор получает только вложенный капитал. Какова вероятность того, что инвестор получит прибыль?

Решение

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=4) гипотезы, дополнительные обозначения и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$= $E_1 \cdot \bar{E}_2$={*1-я фирма банкрот, 2-я фирма не банкрот*},

$\boldsymbol{H}_2$= $\bar{E}_1 \cdot E_2$={*1-я фирма не банкрот, 2-я фирма банкрот*},

$\boldsymbol{H}_3$= $E_1 \cdot E_2$={*обе фирмы банкроты*},

$\boldsymbol{H}_4$= $\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2$={*обе фирмы не банкроты*},

E_1={*банкротство 1-й фирмы*}, E_2={*банкротство 2-й фирмы*},

$\boldsymbol{A}$={*получение инвестором прибыли*}.

Вычислим все ($\boldsymbol{n}$=4) априорные вероятности гипотез:

$$P(\boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{p}_1(1-\boldsymbol{p}_2)=0.1\cdot 0.98=0.098;$$
$$P(\boldsymbol{H}_2) =(1-\boldsymbol{p}_1)\,\boldsymbol{p}_2=0.9\cdot 0.02=0.018;$$
$$P(\boldsymbol{H}_3) = \boldsymbol{p}_1\,\boldsymbol{p}_2 = 0.1\cdot 0.02=0.002;$$
$$P(\boldsymbol{H}_4) = (1-\boldsymbol{p}_1)(1-\boldsymbol{p}_2)= 0.9\cdot 0.98=0.882;$$

причем $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)+P(\boldsymbol{H}_3)+P(\boldsymbol{H}_4)=0.098+0.018+0.002+0.882=1$.
Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ и $\boldsymbol{H}_4$ являются попарно <u>несовместными</u>, так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=4 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_3+\boldsymbol{H}_4=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$ и затем $P(\boldsymbol{A})$:

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)$= 1; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)$= 0.9; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)$= 0; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_4)$= 1;

$$P(\boldsymbol{A})= \sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\,|\,H_i\right)\right\} \text{ или}$$

$P(\boldsymbol{A})$= 0.098·1+0.018·0.9+0.02·0+ 0.882·1=0.9962 .

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.12 (см. [**15**, с. 18])

Экономист считает, что вероятность роста стоимости акции компании в следующем году составит **0.75**, если экономика страны будет на подъеме, и **0.3**, если экономика не будет успешно развиваться. По мнению экспертов, вероятность экономического подъема равна **0.6** . Оценить вероятность того, что акции компании поднимутся в следующем году.

Решение

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*экономика страны будет на подъеме*},

$\boldsymbol{H}_2$={*экономика не будет успешно развиваться*},

$\boldsymbol{A}$={*акции компании поднимутся в следующем году*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ практически известны из условия задачи:

$P(\boldsymbol{H}_1)=0.6;$

$P(\boldsymbol{H}_2)=[1- P(\boldsymbol{H}_1)]=0.4;$

причем естественно, что $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)= 0.6+0.4=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ являются <u>несовместными,</u> так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем только $P(\boldsymbol{A})$, так как все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2 уже известны из условия задачи:

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)= 0.75$ (будет рост стоимости акции компании в следующем году, если экономика страны будет на подъеме);

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)= 0.3$ (не будет роста стоимости акции компании в следующем году, если экономика страны будет на подъеме);

$$P(\boldsymbol{A})= \sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\,|\,H_i\right)\right\} = 0.6\cdot0.75+0.4\cdot0.3=0.57\ .$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.13 (см. [**6**, с. 58])

Производится наблюдение за некоторым объектом с помощью двух наблюдательных станций (НС1 и НС2). Объект может находиться в двух различных состояниях $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$, случайно переходя из одного в другое. Долговременной практикой установлено, что примерно 30 % времени объект находится в состоянии $\boldsymbol{S_1}$, а — 70 % в состоянии $\boldsymbol{S_2}$. Станция НС1 передает ошибочные сведения приблизительно в 2 % всех случаев, а станция НС2 в — 8 %. В какой-то момент времени НС1 сообщила: объект находится в состоянии $\boldsymbol{S_1}$, а НС2 — объект находится в состоянии $\boldsymbol{S_2}$. Спрашивается, какому сообщению верить?

Решение

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*объект находится в состоянии* $\boldsymbol{S_1}$},

$\boldsymbol{H_2}$={*объект находится в состоянии* $\boldsymbol{S_2}$},

$\boldsymbol{A}$={*НС1 сообщила, что объект находится в состоянии* $\boldsymbol{S_1}$, *а НС2 сообщила, что объект находится в состоянии* $\boldsymbol{S_2}$}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ практически известны из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H_1})=0.3;\ P(\boldsymbol{H_2})=0.7;\ \text{причем}\ P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})=0.3+0.7=1.$$

Будем верить той гипотезе (т.е. тому сообщению) для которой больше условная вероятность $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$.

Пусть $\boldsymbol{k}$ — номер искомой гипотезы $\boldsymbol{H_k}$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{k}$, где $P(\boldsymbol{H_k}|\boldsymbol{A})= \max\limits_{i=1,2}\{P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})\}$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ несовместны. Это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и может иметь место только одна) и образуют полную группу событий, так как $\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2} = \boldsymbol{\Omega}$.

3). Обозначим $\boldsymbol{p_1}$=0.02; $\boldsymbol{p_2}$=0.08 и вычислим все $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$ и $P(\boldsymbol{A})$:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=(1-\boldsymbol{p_1})\,\boldsymbol{p_2}= 0.98\cdot 0.08=0.0784;$$

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})= \boldsymbol{p_1}(1-\boldsymbol{p_2})= 0.02\cdot 0.92=0.0184;$$

тогда $P(\boldsymbol{A})$=0.3·0.0784+0.7·0.0184=0.0364 .

4). Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$, то $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})= \dfrac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{P(A)}=\dfrac{0.3\cdot 0.0784}{0.0364}\approx 0.646$.

Отметим, что $P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A})=1-P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})\approx 1-0.646=0.354$.

5). Наиболее вероятная гипотеза после известия о событии $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{H_1}$, т.е. $\boldsymbol{k}$=1, так как $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})>P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A})$. И тем самым задача решена■

Пример 2.14

Расследуются причины гибели *атомной подводной лодки* (АПЛ). Экспертами были выдвинуты 2 несовместные гипотезы:

$\boldsymbol{H}_1$={*подрыв на мине Второй мировой войны*};

$\boldsymbol{H}_2$={*столкновение с вражеской АПЛ*}.

Из мировой практики плавания АПЛ хорошо известно, что происходят только следующие взаимоисключающие события:

- подрыв на мине *Второй мировой* войны – с вероятностью **0.03**;
- столкновение с вражеской АПЛ – с вероятностью **0.97**.

В момент гибели АПЛ сейсмические станции зафиксировали событие $\boldsymbol{A}$={*есть взрыв (удар) на месте нахождения АПЛ*}.

Многолетние наблюдения события $\boldsymbol{A}$ показали, что оно в среднем наблюдается:

при условии справедливости гипотезы $\boldsymbol{H}_1$ в **5** % случаев;

при условии справедливости гипотезы $\boldsymbol{H}_2$ в **95** % случаев.

Какая гипотеза наиболее вероятна после получения известия о событии $\boldsymbol{A}$?

Решение

1). Все гипотезы ($\boldsymbol{n}$=2) уже введены и сформулировано событие $\boldsymbol{A}$. Априорные вероятности гипотез уже все известны из условия задачи: $P(\boldsymbol{H}_1)=0.03$; $P(\boldsymbol{H}_2)=0.97$; причем

$P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)=0.03+0.97=1.$

Требуется найти $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{k}$, где $P(\boldsymbol{H}_k|\boldsymbol{A})=\max\limits_{i=1,2}\{P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})\}$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ по условию задачи являются <u>несовместными</u>, и так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{\Omega}$, то образуют <u>полную группу</u> событий.

3). Найдем только $P(\boldsymbol{A})$, так как все вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2 уже известны из условия задачи: $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=0.05$; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=0.95$;

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)\right\}=0.03\cdot0.05+0.97\cdot0.95=0.923\ .$$

4).Так как $P(\boldsymbol{A})\neq0$, то $P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})=\dfrac{0.03\cdot0.05}{0.923}\approx0.002$; $P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{A})=\dfrac{0.95\cdot0.97}{0.923}\approx0.998$.

5). Наиболее вероятная гипотеза после известия о событии $\boldsymbol{A}$:

$P(\boldsymbol{H}_k|\boldsymbol{A})=\max\limits_{i=1,2}\{P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})\}$ или

$P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{A})=\max\{0.002;\ 0.998\}=0.998$ (т.е. $\boldsymbol{k}$=2, гипотеза $\boldsymbol{H}_2$).

И тем самым задача решена■

Пример 2.15 (см. и ср. [**25**, с. 65-66])

Цель, по которой ведется стрельба, с вероятностью $\boldsymbol{p_1}$ находится в пункте **I**, а с вероятностью $\boldsymbol{p_2}=1-\boldsymbol{p_1}$ — в пункте **II** ($\boldsymbol{p_1}>1/2$).

В нашем распоряжении имеется $\boldsymbol{N}$ снарядов, каждый из которых <u>должен</u> быть направлен в пункт **I** или в пункт **II**. Каждый снаряд поражает цель независимо от других с вероятностью $\boldsymbol{p}$.

Какое число снарядов $\boldsymbol{m}$ следует направить в пункт **I**, для того чтобы поразить цель с максимальной вероятностью?

Решение

1). Введем ($\boldsymbol{n}=2$) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*цель в пункте* **I**}, $\boldsymbol{H_2}$={*цель в пункте* **II**},

$\boldsymbol{A}$={*поражение цели при направлении* $\boldsymbol{m}$ *снарядов в пункт* **I**}.

Вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ известны из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H_1})=\boldsymbol{p_1};\ \ P(\boldsymbol{H_2})=\boldsymbol{p_2}=1-\boldsymbol{p_1};$$

причем естественно, что $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})=\boldsymbol{p_1}+(1-\boldsymbol{p_1})=1$.

Требуется найти такое $\boldsymbol{m}$, чтобы $P(\boldsymbol{A})$ была максимальна.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ являются <u>несовместными,</u> так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}=2$ гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})$, $P(\boldsymbol{A})$, а затем и $\boldsymbol{m}$:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=[1-(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{m}}];\ \ P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=[1-(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{N-m}}];$$

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\mid H_i\right)\right\}=\boldsymbol{p_1}[1-(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{m}}]+(1-\boldsymbol{p_1})[1-(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{N-m}}].$$

Рассматривая $P(\boldsymbol{A})$ как функцию непрерывного аргумента $\boldsymbol{m}$, находим $\dfrac{dP(A)}{dm}=\Pi$; $\dfrac{d^2P(A)}{dm^2}=\mathrm{M}$ и $\dfrac{dP(A)}{dm}=0$; где

$\Pi=[-\boldsymbol{p_1}(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{m}}+(1-\boldsymbol{p_1})(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{N-m}}]\cdot\ln(1-\boldsymbol{p})$;

$\mathrm{M}=-[\boldsymbol{p_1}(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{m}}+(1-\boldsymbol{p_1})(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{N-m}}]\cdot\ln^2(1-\boldsymbol{p})<0$; $\Pi=f(\boldsymbol{m}^*)=0$.

Видно: эта функция имеет единственный максимум в точке $\boldsymbol{m}^*=(\boldsymbol{N}/2)+\ln(\boldsymbol{p_1}^{-1}-1)\cdot\{2\ln(1-\boldsymbol{p})\}^{-1}$.

Заметим: $\boldsymbol{m}^*>\boldsymbol{N}/2$, так как $\boldsymbol{p_1}>1/2$.

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). Далее, анализируя $\boldsymbol{m}^*$ и выделяя только целые решения, получают окончательный ответ о числе снарядов. И тем самым задача решена■

2.4. Методические пояснения к решенным задачам с применением формулы полной вероятности и формулы Бейеса

На практике могут встречаться самые разнообразные постановки задач на применение формулы Бейеса и формулы полной вероятности. Однако их можно разделить на два случая.

Во первом случае постановка очень общая и в общем-то не задана (не известна или отсутствует). Тогда исследователю надо внимательно изучить уже имеющуюся постановку задачи и самому дать такую постановку, чтобы свести всю проблему к первому случаю. Разумеется, что это самый сложный случай, который нами не будет далее рассматриваться.

В втором случае постановка может быть уже задана (известна). Тогда исследователю надо внимательно изучить эту постановку и понять, что напрямую известно, а что косвенно для применения теоремы гипотез. Отметим, что это самый простой случай.

Так в ***примере 2.1*** все известно напрямую. Здесь то, что требуется найти, указано в условиях задачи. Ничего дополнительно обозначать не понадобилось, за исключением номера $\boldsymbol{k}$ для искомой гипотезы $\boldsymbol{H_k}$. Далее необходимо было только подставить исходные данные в формулу Бейеса и получить требуемый ответ.

В ***примере 2.2*** сначала надо ввести гипотезы и сформулировать событие $\boldsymbol{A}$, так как сами формулировки в условии задачи отсутствуют (они как бы присутствуют, но косвенно). Надо ввести все необходимые обозначения, так как их нет в условии задачи. Здесь необходимо сформулировать то, что требуется найти, опираясь на формулу Бейеса, а для этого надо понять, что послеопытные (апостериорные) вероятности — это и есть $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$. Далее надо сообразить, что поскольку урна выбирается *наугад* (специалисты обычно понимают (см. [**31**, с. 51]) термин *наугад* как *равновероятность* событий), то априорные вероятности гипотез равны между собой, а так как всего урн 3, то эта вероятность есть 1/3. Условные вероятности напрямую из условия не известны, но заданы косвенно, и их можно легко вычислить, что и было сделано.

В ***примере 2.3*** гипотезы вроде бы известны, но есть тонкий момент – гипотезы не все перечислены, и надо сообразить, какая гипотеза отсутствует (или гипотезы отсутствуют). В этом может помочь тот факт, что все гипотезы ($\boldsymbol{n}$=4) должны вместе образовывать полную группу событий, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \mathbf{\Omega}; \quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = P(\mathbf{\Omega}) = 1.$$

Надо искать оставшиеся события, что дополняют эти три гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$, так, чтобы в итоге получилось достоверное событие $\mathbf{\Omega}$.

Здесь практически все необходимые обозначения уже есть в условии задачи (добавлено обозначение числа гипотез $\boldsymbol{n}$).

Для того чтобы сформулировать событие $\boldsymbol{A}$, надо сообразить, что событие $\boldsymbol{A}$={*прибор неисправен*} есть сумма (объединение) этих событий (гипотез): $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_1 \cup \boldsymbol{H}_2 \cup \boldsymbol{H}_3$. Далее надо сообразить, что все априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ могут быть выражены с помощью (вычислены через) вероятностей $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$. Фраза "*Найти с учетом этого вероятности гипотез*" означает, что требуется найти именно $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$, а не $P(\boldsymbol{H}_i)$. Здесь наибольшую трудность представляет вычисление условных вероятностей $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$. Надо понять, что так как $\boldsymbol{H}_4 \not\subset \boldsymbol{A}$, то $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_4)=0$, и поскольку $\boldsymbol{H}_i \subset \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3, то $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)=1$.

В ***примере 2.4*** рассматривается некоторое обобщение ситуации из предыдущего ***примера 2.3***. Здесь надо сообразить, что речь идет о попарно несовместных событиях. Далее надо догадаться ввести событие $\boldsymbol{A}$ как сумму событий (гипотез) $\boldsymbol{A}=\bigcup_{i=1}^{k} H_i$. Поскольку гипотезы $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$, образуют полную группу событий, то для них выполнимо

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \mathbf{\Omega}; \quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = P(\mathbf{\Omega}) = 1.$$

Далее необходимо сформулировать то, что требуется найти, опираясь на формулу Бейеса, а для этого надо понять, что апостериорные вероятности — это и есть $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$.

Здесь практически все необходимые обозначения уже есть в условии задачи (добавлено для удобства обозначение индекса $\boldsymbol{m}$ для одной из групп гипотез).

Наибольшую трудность представляет также вычисление условных вероятностей $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2,.., k и $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_m)$, где $\boldsymbol{m}$=(1+k), (2+k),.., n. Надо понять, что так как $\boldsymbol{H}_m \not\subset \boldsymbol{A}$, то

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_m})=0$, где $\boldsymbol{m}=(1+k), (2+k),.., n$, и поскольку $\boldsymbol{H_i} \subset \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{i}=1, 2,.., k$; то $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})=1$, где $\boldsymbol{i}=1, 2,.., k$.

В ***примере 2.5*** рассматривается более сложный вариант задачи, чем задача из ***примера 2.3***. Здесь надо ввести гипотезы. Их можно вводить по-разному. Так, в приведенном решении введены все $2^3=8$ гипотез. Однако возможно их частичное объединение, например, объединить $\boldsymbol{H_4}$, $\boldsymbol{H_5}$, $\boldsymbol{H_6}$ в одну гипотезу:

$$\boldsymbol{H_4} \cup \boldsymbol{H_5} \cup \boldsymbol{H_6}=\{\textit{отказал только один элемент}\},$$

как это сделано в [**3**, с. 36], и затем рассматривать уже не 8, а 6 гипотез. Важно только понимать, что несмотря на то, сколько гипотез введено, они должны быть попарно несовместны и все вместе должны образовывать достоверное событие, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega;\ H_i \cdot H_j = \varnothing, \text{ где } i \neq j\,.$$

В отличие от ***примера 2.3*** здесь (для удобства изложения) пришлось дополнительно ввести обозначения для вероятностей отказа 1-го, 2-го и 3-го элементов. Однако и здесь наибольшую трудность представляет также вычисление условных вероятностей $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$. Событие $\boldsymbol{A}$ есть сумма трех событий (гипотез): $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}+\boldsymbol{H_3}$. При гипотезах $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$ событие $\boldsymbol{A}$ достоверно, а значит соответствующие условные вероятности равны единице. При гипотезах $\boldsymbol{H_4}$, $\boldsymbol{H_5}$, $\boldsymbol{H_6}$, $\boldsymbol{H_7}$, $\boldsymbol{H_7}$ событие $\boldsymbol{A}$ невозможно, а поэтому соответствующие условные вероятности равны нулю. Надо сообразить, что требуется найти именно условную вероятность $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})$.

В итоге по формуле Бейеса легко может быть получено, что $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})\approx 0.298$, причем $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})\neq 0$ для $\boldsymbol{i}=1, 2, 3$; а $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})=0$ для $\boldsymbol{i}=4, 5, 6, 7, 8$.

В ***примере 2.6*** задача почти похожа на задачу из ***примера 2.5***.

Значения априорных вероятностей $P(\boldsymbol{H_1})$, $P(\boldsymbol{H_2})$ практически сразу следуют из условия задачи. А вот условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})$ и $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})$ необходимо вычислить (они заданы косвенно через значения $\boldsymbol{p_2}$ и $\boldsymbol{p_3}$). Надо сообразить, что событие $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2}$ состоит в том, что *в цель попало 2 снаряда, причем 1-е орудие* ***не*** *попало в цель*, или иначе (т.е. другими словами): *2-е и 3-е орудия попали в цель*. Отсюда сразу следует, что $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2}=E_2 \cap E_3$, причем события E_2 и E_3 независимы. Эта независимость неявно предполагается по условиям задачи, так как орудия произвели залп (ср. с ***примером 2.5***, где независимость указана явно в условии задачи). Из независимости следует, что применима *теорема умножения* вероятностей.

Сложнее понять, какие события составляют сложное событие $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1$. Событие $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1$ состоит в том, что *в цель попало 2 снаряда, причем один из них послан 1-м орудием, а другой — либо 2-м орудием (при этом 3-е орудие дало промах), либо 3-м орудием (при этом 2-е орудие дало промах).* В этом событии $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1$ можно выделить два события $\{E_2 \cdot \bar{E}_3\}$ и $\{E_3 \cdot \bar{E}_2\}$, которые несовместны, поэтому-то применима *теорема сложения* вероятностей.

В ***примере 2.7*** сначала надо сообразить, что, по-видимому, в задаче предполагается следующее: прибор не может одновременно быть собран из ВД и ДОК, а тогда для введенных гипотез $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ можно определить их априорные вероятности из условия задачи, причем сразу ясно, что из фразы "*вообще около 40 % приборов собирается из ВД*" следует $P(\boldsymbol{H}_1)=0.4$; а вот априорную вероятность $P(\boldsymbol{H}_2)$ можно получить из того факта, что гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ должны образовывать полную группу событий и быть несовместны, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega;\ H_i \cdot H_j = \varnothing, \text{ где } i \neq j \text{ или } P(\boldsymbol{H}_2) = [1 - P(\boldsymbol{H}_1)] = 0.6\ .$$

Условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$ уже известны из условия задачи, и их не надо вычислять.

В ***примере 2.8*** по аналогии, как и ранее в ***примере 2.5***, надо ввести гипотезы ($\boldsymbol{n}$=4) и сформулировать событие $\boldsymbol{A}$, а затем вычислить априорные вероятности гипотез с помощью вероятностей $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$. Надо сообразить, что требуется найти именно условную вероятность $P(\boldsymbol{H}_3|\boldsymbol{A})$.

Так как при гипотезах $\boldsymbol{H}_3$ и $\boldsymbol{H}_4$ событие $\boldsymbol{A}$ достоверно, то соответствующие условные вероятности равны единице. При гипотезах $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ событие $\boldsymbol{A}$ невозможно, а поэтому соответствующие условные вероятности равны нулю. Далее остается только подставить все уже имеющееся исходные данные в формулу Бейеса и получить требуемый в задаче результат.

В ***примере 2.9*** сначала надо догадаться, что гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ и $\boldsymbol{H}_4$ являются попарно несовместными (что, по-видимому, и подразумевается в условиях задачи), а самое главное — сообразить, что они и образуют полную группу событий, так как выполнено условие

$$P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)+P(\boldsymbol{H}_3)+P(\boldsymbol{H}_4)=1.$$

Важно не перепутать следующее.

Наиболее вероятная гипотеза до известия о событии $\boldsymbol{A}$ есть та, для которой наибольшая априорная вероятность гипотез. Наиболее вероятная гипотеза после известия о событии $\boldsymbol{A}$ есть та, для которой наибольшая условная вероятность $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$ наступления события $\boldsymbol{A}$ при условии, что наступило событие $\boldsymbol{H}_i$.

В ***примере 2.10*** сначала желательно не акцентироваться на слове *противника*. Лучше полагать, что на экран РЛС, может попадать сигнал либо от *помехи*, либо просто от *самолета* (своего или противника). Надо сообразить, что гипотезы $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ являются несовместными, так как, по-видимому, в условиях задачи подразумевается, что *помеха* и *самолет* не могут одновременно попадать на экран РЛС и к тому же образуют полную группу событий, так как $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)=1$. Затем надо заметить, что вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$ известны из условия задачи, действительно:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)= 0.8;$$

так как с вероятностью 0.8 оператор фиксирует самолет противника, и

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)= 0.1;$$

так как с вероятностью 0.1 оператор принимает помеху за самолет.

Далее надо сообразить что, требуется найти именно вероятность $P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})$. В итоге по формуле Бейеса она легко была получена. В решении дополнительно еще найдена $P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{A})$ и определена наиболее вероятная гипотеза из $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ после известия о событии $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{H}_1$.

В ***примере 2.11*** сначала необходимо ввести гипотезы, дополнительные обозначения и сформулировать событие $\boldsymbol{A}$, причем гипотезы эти надо ввести так, чтобы они были попарно несовместными и образовывали бы полную группу событий. Введенные гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ и $\boldsymbol{H}_4$ являются сложными событиями, состоящими из событий E_1, E_2, $\bar{\mathrm{E}}_1$, $\bar{\mathrm{E}}_2$. Далее надо сообразить, что все априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ могут быть выражены с помощью вероятностей $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ (т.е. вычислены через $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$).

Затем надо заметить, что вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)$ и $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)$ уже известны из условия задачи, действительно:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=1;$$

так как с вероятностью 1 инвестор надеется получить доход в течение обусловленного времени от 2-й фирмы, и

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=0.9;$$

так как с вероятностью 0.9 инвестор надеется получить доход в течение обусловленного времени от 1-й фирмы.

Далее надо сообразить, что $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)=0$, так как событие $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3$ *невозможно*; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_4)=1$, так как событие $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_4$ *достоверно*.

Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется, так как требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

В ***примере 2.12***, как и в ***примере 2.11*** необходимо ввести гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ и сформулировать событие $\boldsymbol{A}$, причем эти гипотезы надо ввести так, чтобы они были несовместными и образовывали бы полную группу событий. Надо понять, что требуется найти именно $P(\boldsymbol{A})$.

Далее надо сообразить, что все априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ могут быть легко получены из условия задачи. Так, сразу ясно, что из фразы “*По мнению экспертов, вероятность экономического подъема равна 0.6*” сразу следует $P(\boldsymbol{H}_1)=0.6$; а вот $P(\boldsymbol{H}_2)$ можно получить из того факта, что гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ должны образовывать полную группу событий и быть несовместны, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega;\ H_i \cdot H_j = \varnothing, \text{ где } i \neq j \text{ или } P(\boldsymbol{H}_2) = [1 - P(\boldsymbol{H}_1)] = 0.4\ .$$

Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ являются попарно несовместными и образуют полную группу событий именно потому, что мы уже такими их ввели сами в решение задачи (всего только $\boldsymbol{n}=2$ гипотезы и иметь место может быть только одна из них и $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)=1$).

Затем надо заметить, что вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)$ и $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)$ уже известны из условия задачи. Действительно:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=0.75;$$

так как вероятность роста стоимости акции компании в следующем году составит **0.75** (если экономика страны будет на подъеме), и

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=0.3;$$

так как вероятность роста стоимости акции компании в следующем году составит **0.3** (если экономика не будет успешно развиваться).

Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не надо, так как требуется найти только $P(\boldsymbol{A})$.

В ***примере 2.13***, как и в ***примере 2.6*** надо вычислить условные вероятности, используя *теорему умножения* вероятностей.

Введем дополнительно два события и их отрицания:

E_1={*НС1 ошиблась*},

E_2={*НС2 ошиблась*},

$\bar{E}_1$={*НС1 не ошиблась*},

$\bar{E}_2$={*НС2 не ошиблась*},

причем

$$P(E_1)=\boldsymbol{p_1}=0.02;\ P(\bar{E}_1)=1-\boldsymbol{p_1}=0.98;$$

$$P(E_2)=\boldsymbol{p_2}=0.08;\ P(\bar{E}_1)=1-\boldsymbol{p_2}=0.92\ .$$

Событие $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1}$ есть произведение двух событий $\bar{E}_1$ и E_2, а значит

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=(1-\boldsymbol{p_1})\,\boldsymbol{p_2}=0.98\cdot 0.08=0.0784\ .$$

Событие $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2}$ есть произведение двух событий E_1 и $\bar{E}_2$, а значит

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=\boldsymbol{p_1}(1-\boldsymbol{p_2})=0.02\cdot 0.92=0.0184\ .$$

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ все известны из условия задачи. Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ несовместны. Это следует из введенных гипотез, и при этом в задаче предполагается, что объект может находиться в двух различных взаимоисключающихся состояниях $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$.

В ***примере 2.14*** решение во многом повторяет действия при решении ***примера 2.9***, но только с меньшим числом выдвинутых гипотез. Все гипотезы ($\boldsymbol{n}$=2) уже введены и сформулировано событие $\boldsymbol{A}$. Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ уже все известны из условия задачи. Также известны из условия задачи все вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2. Необходимо вычислить вероятность $P(\boldsymbol{A})$ и по формуле Бейеса найти все условные вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$, а затем найти наиболее вероятную гипотезу среди $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ после известия о событии $\boldsymbol{A}$, что и было сделано.

В ***примере 2.15*** надо суметь догадаться, что снаряды должны быть посланы не только в пункт **I**, но и в пункт **II** одновременно. То есть надо найти, какое число снарядов $\boldsymbol{m}$ следует направить в пункт **I**, и соответственно ($N-\boldsymbol{m}$) снарядов следует направить в пункт **II**, для того чтобы поразить цель с максимальной вероятностью. После этого уже можно ввести гипотезы и сформулировать событие $\boldsymbol{A}$. Вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ известны из условия задачи. Необходимо вычислить вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2 и $P(\boldsymbol{A})$. Учитывая, что $\dfrac{da^x}{dx}=\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln\left(a\right)$, находим две производные, и функцию $P(\boldsymbol{A})=F(\boldsymbol{m})$, где

$$F(\boldsymbol{m})=\boldsymbol{p_1}[1-(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{m}}]+(1-\boldsymbol{p_1})[1-(1-\boldsymbol{p})^{N-\boldsymbol{m}}],$$

исследуем на максимум (минимум). Решив уравнение $\Pi=f(\boldsymbol{m})=0$, находят точку $\boldsymbol{m}^*$. Это только предварительный ответ, поскольку было принято предположение рассматривать $F(\boldsymbol{m})$ как функцию непрерывного аргумента $\boldsymbol{m}$. Поэтому еще надо проанализировать $\boldsymbol{m}^*$ и выделить только целые решения, так как по условию задачи неявно предполагается, что снаряд неделим (например, не имеет разделяющихся боевых головок и т.п.) и представляет единое целое. Полагаем далее, что $N \geq 1$; N — конечное и натуральное и $0<\boldsymbol{p}<1$; $\boldsymbol{p}_1<1$.

В итоге, искомое решение принимается следующим образом:

- если $\boldsymbol{m}^*\leq N$ и $\boldsymbol{m}^*$ есть целое, то это $\boldsymbol{m}^*$ и есть ответом;
- если $\boldsymbol{m}^*\leq N$ и $\boldsymbol{m}^*$ есть дробное, то нужно вычислить $F(\boldsymbol{m})$ для двух ближайших к $\boldsymbol{m}^*$ целых значений $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ таких, что $\boldsymbol{m}_1<\boldsymbol{m}^*<\boldsymbol{m}_2$, и выбрать то из них, для которого $F(\boldsymbol{m})$ больше, тогда это $\boldsymbol{m}^*$ (т.е. $\boldsymbol{m}_1$ или $\boldsymbol{m}_2$) и будет ответ;
- если $\boldsymbol{m}^*>N$ (или $\boldsymbol{m}^*=N$), то нужно все имеющееся N снаряды направить в пункт **I**, причем это будет иметь место тогда,

  когда
  $$\boldsymbol{m}^*=(\boldsymbol{N}/2)+\ln(\boldsymbol{p}_1^{-1}-1)\cdot\{2\ln(1-\boldsymbol{p})\}^{-1} \geq N$$
  или
  $$\ln(\boldsymbol{p}_1^{-1}-1) \leq \{\boldsymbol{N}\ln(1-\boldsymbol{p})\}=\ln\{(1-\boldsymbol{p})^N\},$$
  т.е.
  $$\boldsymbol{p}_1 \geq \{1+(1-\boldsymbol{p})^N\}^{-1};$$
- если все же $\boldsymbol{p}_1=1$, то нужно все имеющееся N снарядов направить в пункт **I** (если все-таки $\boldsymbol{p}_1=0$, то ни одного снаряда);
- если все же $\boldsymbol{p}=1$, то можно послать только по одному снаряду в каждый пункт, при этом $P(\boldsymbol{A})=1$;
- если все же $\boldsymbol{p}=0$, то $P(\boldsymbol{A})=0$, и можно такие снаряды не посылать.

Перейдем к методическим указаниям по введению гипотез.

2.5. Методические указания по введению гипотез для задач с применением формулы полной вероятности и формулы Бейеса

Полагают [**19**, с. 52], так как заранее не известно какое событие из $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$,..., $\boldsymbol{H}_n$ наступит, то их называют гипотезами. Рассмотрим подробно несколько различных решений одних и тех же задач.

Пример 2.16 (см. задачу №94 из [**3**, с. 32])

В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне содержится 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

***Решение* №1**

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=4) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*два белых шара*},

$\boldsymbol{H}_2$={*черный шар из 1-й урны и белый шар из 2-й урны*},

$\boldsymbol{H}_3$={*белый шар из 1-й урны и черный шар из 2-й урны*},

$\boldsymbol{H}_4$={*два черных шара*},

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ практически могут быть вычислены из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H}_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{20}=\frac{32}{200}=\frac{4}{25};\quad P(\boldsymbol{H}_2)=\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{20}=\frac{8}{200}=\frac{1}{25};$$

$$P(\boldsymbol{H}_3)=\frac{8}{10}\cdot\frac{16}{20}=\frac{128}{200}=\frac{16}{25};\quad P(\boldsymbol{H}_4)=\frac{2}{10}\cdot\frac{16}{20}=\frac{32}{200}=\frac{4}{25};$$

причем $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)+P(\boldsymbol{H}_3)+P(\boldsymbol{H}_4)=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ и $\boldsymbol{H}_4$ попарно <u>несовместны</u> (всего только $\boldsymbol{n}$=4 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_3+\boldsymbol{H}_4=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, а и затем $P(\boldsymbol{A})$:

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=1$; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)=1/2$; $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_4)=0$;

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\,|\,H_i\right)\right\}=\frac{4}{25}\cdot 1+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2}+\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{25}\cdot 0=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}.$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Решение №2

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=3) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*два белых шара*},

$\boldsymbol{H_2}$={*два разных шара*},

$\boldsymbol{H_3}$={*два черных шара*},

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ практически могут быть вычислены из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H_1})=\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{20}=\frac{32}{200}=\frac{4}{25};$$

$$P(\boldsymbol{H_2})=\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{20}+\frac{8}{10}\cdot\frac{16}{20}=\frac{8}{200}+\frac{128}{200}=\frac{1}{25}+\frac{16}{25}=\frac{17}{25};$$

$$P(\boldsymbol{H_3})=\frac{2}{10}\cdot\frac{16}{20}=\frac{32}{200}=\frac{4}{25};$$

причем $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})+P(\boldsymbol{H_3})=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$ и $\boldsymbol{H_3}$ являются попарно <u>несовместными,</u> так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=3 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}+\boldsymbol{H_3}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$.

Заметим, что:

- при гипотезе $\boldsymbol{H_1}$ событие $\boldsymbol{A}$ достоверно, а поэтому соответствующая условная вероятность равна единице, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=1$;
- при гипотезе $\boldsymbol{H_2}$ событие $\boldsymbol{A}$ происходит с вероятностью 1/2 (так как по условию задачи из *двух шаров наудачу взят один шар*), а значит $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=1/2$;
- при гипотезе $\boldsymbol{H_3}$ событие $\boldsymbol{A}$ невозможно, а поэтому соответствующая условная вероятность равна нулю, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3})=0$.

Тогда можно вычислить вероятность события $\boldsymbol{A}$:

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\,|\,H_i\right)\right\}=\frac{4}{25}\cdot1+\frac{17}{25}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{25}\cdot0=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}.$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Решение №3

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*среди двух есть белый шар*},

$\boldsymbol{H_2}$={*среди двух нет белого шара*}≡{*два черных шара*},

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Вычислим априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$:

$$P(\boldsymbol{H_1})=1-\left(1-\frac{8}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{20}\right)=1-\frac{2}{10}\cdot\frac{16}{20}=1-\frac{32}{200}=\frac{21}{25};$$

$$P(\boldsymbol{H_2})=\left(1-\frac{8}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{20}\right)=\frac{2}{10}\cdot\frac{16}{20}=\frac{32}{200}=\frac{4}{25};$$

причем естественно, что $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ несовместны (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют полную группу событий, так как $\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$. Заметим, что при гипотезе $\boldsymbol{H_2}$ событие $\boldsymbol{A}$ невозможно, а поэтому соответствующая условная вероятность равна нулю: $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=0$.

Введем дополнительно следующие обозначения:

N – общее число возможных исходов;

m – число исходов благоприятных (т.е. соответствующих) событию $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1}$.

Тогда число пар шаров (белый-белый) – $C_8^1C_4^1$;

(белый-черный) – $C_8^1C_{16}^1$; (черный-белый) – $C_2^1C_4^1$.

При каждой паре шаров может быть **2** варианта в связи с событием $\boldsymbol{A}$, т.е. соответствующее число пар надо увеличить в **2** раза:

$$N=\left\{C_8^1C_4^1+C_8^1C_{16}^1+C_2^1C_4^1\right\}\cdot\mathbf{2}=168\cdot\mathbf{2}=336.$$

Найдем $m=\left\{C_8^1C_4^1+C_8^1C_4^1\right\}+\left\{C_8^1C_{16}^1+C_2^1C_4^1\right\}=32+32+136=200.$

Тогда $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=\dfrac{m}{N}=\dfrac{200}{336}=\dfrac{25}{42}$;

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)\right\}=\frac{21}{25}\cdot\frac{25}{42}+\frac{4}{25}\cdot 0=\frac{21}{42}=\frac{1}{2}.$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Решение №4

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=1) гипотезу и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*среди двух есть белый или черный шар*},

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ очевидно могут быть легко определены из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H_1})=1;$$

причем очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Анализировать <u>несовместность</u> $\boldsymbol{H_1}$ не надо, так как только одна гипотеза (всего только $\boldsymbol{n}$=1 гипотеза и иметь место может быть только одна из них, т.е. $\boldsymbol{H_1}$), и она образует <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H_1} = \boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$.

Введем дополнительно следующие обозначения:

N – общее число возможных исходов;

m – число исходов благоприятных (т.е. соответствующих) событию $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1}$.

Тогда число пар шаров

(любой-любой) – $C_{10}^1 C_{20}^1$; (белый-белый) – $C_8^1 C_4^1$;

(белый-черный) – $C_8^1 C_{16}^1$; (черный-белый) – $C_2^1 C_4^1$.

При каждой паре шаров может быть **2** варианта в связи с событием $\boldsymbol{A}$, т.е. соответствующее число пар надо увеличить в **2** раза

$$N = \left\{C_{10}^1 C_{20}^1\right\} \cdot \mathbf{2} = 200 \cdot \mathbf{2} = 400.$$

Найдем $m = \left\{C_8^1 C_4^1 + C_8^1 C_4^1\right\} + \left\{C_8^1 C_{16}^1 + C_2^1 C_4^1\right\} = 32 + 32 + 136 = 200.$

Тогда $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1}) = \frac{m}{N} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$;

$$P(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left\{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)\right\} = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Решение №5

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*шары одного цвета*},

$\boldsymbol{H_2}$={*шары разного цвета*},

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Вычислим априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$:

$$P(\boldsymbol{H_1})=\frac{2}{10}\cdot\frac{16}{20}+\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{20}=\frac{4}{25}+\frac{4}{25}=\frac{8}{25};$$

$$P(\boldsymbol{H_2})=\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{20}+\frac{8}{10}\cdot\frac{16}{20}=\frac{1}{25}+\frac{16}{25}=\frac{17}{25};$$

причем видно, что $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ несовместны (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют полную группу событий, так как $\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$.

Введем дополнительно следующие обозначения:

N – общее число возможных исходов;

m – число исходов благоприятных (т.е. соответствующих) событию $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1}$.

Тогда число пар шаров

(белый-белый) – $C_8^1C_4^1$; (черный- черный) – $C_2^1C_{16}^1$;

(белый-черный) – $C_8^1C_{16}^1$; (черный-белый) – $C_2^1C_4^1$.

При каждой паре шаров может быть **2** варианта в связи с событием $\boldsymbol{A}$, т.е. соответствующее число пар надо увеличить в **2** раза:

$$N=\left\{C_8^1C_4^1+C_2^1C_{16}^1\right\}\cdot\mathbf{2}=64\cdot\mathbf{2}=128.$$

Найдем $m=\left\{C_8^1C_4^1+C_8^1C_4^1\right\}=64$. Тогда $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=\frac{m}{N}=\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$.

Аналогично найдем $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=\dfrac{\left\{C_2^1C_4^1+C_8^1C_{16}^1\right\}\cdot\frac{1}{2}}{\left\{C_2^1C_4^1+C_8^1C_{16}^1\right\}}=\dfrac{136}{272}=\dfrac{1}{2}$.

Тогда $P(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{P(H_i)\cdot P(A|H_i)\right\}=\frac{8}{25}\cdot\frac{1}{2}+\frac{17}{25}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Решение №6

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*выбранный шар принадлежит 1-й урне*},

$\boldsymbol{H}_2$={*выбранный шар принадлежит 2-й урне*},

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Найдем априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$:

$P(\boldsymbol{H}_1)=1/2$;

$P(\boldsymbol{H}_2)=1/2$;

причем заметим, что $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ <u>несовместны</u> (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=\frac{8}{10};$$

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=\frac{4}{20};$$

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\,|\,H_i\right)\right\}=\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{20}\cdot\frac{1}{2}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}.$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Решение **№7 (некорректное)**

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*выбранный* ***белый*** *шар принадлежит 1-й урне* },

$\boldsymbol{H}_2$={*выбранный* ***белый*** *шар принадлежит 2-й урне* },

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Заметим, что выбранный белый шар может быть вынут только из *1-й урны* или из *2-й урны*.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$:

$$P(\boldsymbol{H}_1)=\beta,$$

$$P(\boldsymbol{H}_2)=\gamma,$$

где β и γ можно вычислить, причем заметим, что $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ <u>несовместны</u> (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$.

Заметим, что:

- при гипотезе $\boldsymbol{H}_1$ событие $\boldsymbol{A}$ достоверно, а поэтому соответствующая условная вероятность равна единице $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=1$;
- при гипотезе $\boldsymbol{H}_2$ событие $\boldsymbol{A}$ достоверно, а потому $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=1$;

тогда $P(\boldsymbol{A})= \sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\mid H_i\right)\right\}=\beta\cdot 1+\gamma\cdot 1=\beta+\gamma=1\neq\frac{1}{2}$.

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым эта задача НЕ решена, но решена другая задача ■

Пояснения к решению. Фактически (при формулировании гипотез $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$) были введены условные события: $\hat{\boldsymbol{H}}_1|\boldsymbol{A}$ и $\hat{\boldsymbol{H}}_2|\boldsymbol{A}$. Неявно было сделано предположение, что событие $\boldsymbol{A}$ уже имело место (т.е. произошло), а значит $P(\boldsymbol{A})=1$ (т.е. неявно было изменено само условие задачи). Дальнейший расчет только подтвердил то, что $P(\boldsymbol{A})=1$. В конечном итоге решена задача, но с другим условием. (правильные решения см. выше под **№1-6** в ***примере 2.16***).

Пример 2.17 (см. задачи №3.4; 3.5 из [**25**, с. 58])

Имеются две урны: в первой $\boldsymbol{a}$ белых шаров и $\boldsymbol{b}$ черных; во второй $\boldsymbol{c}$ белых шаров и $\boldsymbol{d}$ черных. Из первой урны во вторую перекладывают не глядя три шара (предполагается, что $\boldsymbol{a}\geq 3$, $\boldsymbol{b}\geq 3$). После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что из второй урны возьмут белый шар.

Решение **№1**

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*вынутый из 2-й урны шар принадлежит 1-й урне*},

$\boldsymbol{H}_2$={*вынутый из 2-й урны шар принадлежит 2-й урне*},

$\boldsymbol{A}$={*выбор белого шара из 2-й урны*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ практически могут быть вычислены из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H}_1)=\frac{3}{c+d+3};$$

$$P(\boldsymbol{H}_2)=\frac{c+d}{c+d+3};$$

причем естественно, что $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ являются несовместными,

так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют полную группу событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, а и затем $P(\boldsymbol{A})$.

Отметим, что вероятность выбор белого шара, принадлежащего 1-й урне, не зависит от того, откуда он вынимается (непосредственно из 1-й урны или после того, как его переместили во 2-ю урну). Тогда получаем

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=\frac{a}{a+b};$$

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=\frac{c}{c+d};$$

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A|H_i\right)\right\}=\left(\frac{3}{c+d+3}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right)+\left(\frac{c+d}{c+d+3}\right)\left(\frac{c}{c+d}\right).$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Решение №2

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=4) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*переложены 3 белых шара*},

$\boldsymbol{H_2}$={*переложены 2 белых шара и 1 черный*},

$\boldsymbol{H_3}$={*переложены 1 белый шар и 2 черных*},

$\boldsymbol{H_4}$={*переложены 3 черных шара*},

$\boldsymbol{A}$={*выбор белого шара из 2-й урны*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ практически могут быть вычислены из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H_1})=\frac{C_a^3}{C_{a+b}^3}=\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{a-1}{a-1+b}\right)\left(\frac{a-2}{a-2+b}\right);$$

$$P(\boldsymbol{H_2})=\frac{C_a^2C_b^1}{C_{a+b}^3}=3\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{a-1}{a-1+b}\right)\left(\frac{b}{a-2+b}\right);$$

$$P(\boldsymbol{H_3})=\frac{C_a^1C_b^2}{C_{a+b}^3}=3\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a-1+b}\right)\left(\frac{b-1}{a-2+b}\right);$$

$$P(\boldsymbol{H_4})=\frac{C_b^3}{C_{a+b}^3}=\left(\frac{b}{a+b}\right)\left(\frac{b-1}{a+b-1}\right)\left(\frac{b-2}{a+b-2}\right);$$

причем можно показать, что $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})+P(\boldsymbol{H_3})+P(\boldsymbol{H_4})=1$.
Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ являются несовместными, так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют полную группу событий, так как $\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}+\boldsymbol{H_3}+\boldsymbol{H_4}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=\frac{c+3}{c+d+3};\ P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=\frac{c+2}{c+d+3};\ P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3})=\frac{c+1}{c+d+3};\ P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_4})=\frac{c}{c+d+3}.$$

В числителе для $P(\boldsymbol{A})$, выполнив преобразования многочлена, раскрыв скобки, сгруппировав подобные члены, получим

$$P(\boldsymbol{A})=\frac{3a(a+b-1)(a+b-2)+c(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}{(c+d+3)(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}=$$

$$=\frac{3a}{(c+d+3)(a+b)}+\frac{c}{c+d+3}=\left(\frac{3}{c+d+3}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right)+\left(\frac{c+d}{c+d+3}\right)\left(\frac{c}{c+d}\right),$$

т.е. получили тот же результат, что и в решении **№1**.

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Кратко обсудим рассмотренные ***примеры*** **2.1-2.17** и их решения.

Во-первых, бросается в глаза, что удачно введенные гипотезы позволяют проще и яснее получить окончательное решение.

Во-вторых, само введение гипотез — это не простой формальный процесс. Здесь нужна не только внимательность, но и некоторая изобретательность и сообразительность.

Важно понимать, что эти гипотезы

- можно вводить по-разному;
- должны быть связаны с условиями задачи, и должны отражать ее содержимое;
- должны быть несовместны, т.е. исключать друг друга;
- должны быть полной группой событий, т.е. $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$;
- должны вводится на основе пространства *элементарных событий*, которое явно или неявно задано в условиях задачи.

Событие $\boldsymbol{A}$ — это (см. работу [**6**, с. 54]) событие, которое может произойти вместе с одним из событий $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$, которые мы называем гипотезами. Другими словами (см. работы [**29**, с. 12]) событие $\boldsymbol{A}$ — событие, появляющееся с одним из $\boldsymbol{n}$ взаимно несовместных событий $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$, составляющих полную группу, т.е. (см. работы [**6**, с. 54; **29**, с. 12]): $\boldsymbol{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A \cap H_i \right)$.

События $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$ несовместны и образуют полную группу

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega; \; H_i \cdot H_j = \varnothing, \text{ где } i \neq j\,.$$

Однако надо отметить (см. [**6**, с.54; **17**, с.18; **30**, с.44]), что при $i \neq j$

$$\left(A \cap H_i \right) \cap \left(A \cap H_j \right) = \varnothing,$$

т.е. события $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{H}_n$ также несовместны.

Заметим (см. [**33**, с. 122]), что объединение $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$ совпадает со всем пространством *элементарных событий*.

ОТМЕТИМ. На практике обычно проблемы с формулированием события $\boldsymbol{A}$ возникают не так часто, как с гипотезами.

ОТМЕТИМ. От того, какими будут гипотезы $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_n$ и сформулированное событие $\boldsymbol{A}$, зависит успех решения задачи, и то, насколько трудно будет получить окончательное решение.

2.6. Методические указания по решению многошаговых задач с применением формулы полной вероятности и формулы Бейеса

В том случае если после опыта, давшего событие $\boldsymbol{A}$, проводится еще один опыт, который может дать другое событие $\boldsymbol{B}$, то вероятность этого последнего события, которое мы приняли обозначать как $\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}$ (или более компактно как $\boldsymbol{V}$), вычисляют по *формуле полной вероятности*:

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\mid H_i\right)\right\},$$

в которой за $P(\boldsymbol{A})$ принято $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$, вместо $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$ подставлены $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_i})$, а также подставлены (см. [**25**, с. 56]) не прежние вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$, а новые $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$:

$$P(\boldsymbol{V})=P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\mid A\right)\cdot P\left(B\mid H_iA\right)\right\}.$$

Далее идею решения многошаговых задач рассмотрим подробно на нескольких примерах решения таких задач.

Пример 2.18 (см. и ср. [**32**, с. 71] №3.40 и [**25**, с.7 3] №3.44)

Имеются две урны: в первой $\boldsymbol{a}$ белых шаров и $\boldsymbol{b}$ черных; во второй $\boldsymbol{c}$ белых шаров и $\boldsymbol{d}$ черных. Выбирается наугад одна из урн и вынимается (предполагается, что <u>не глядя)</u> из нее один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что следующий шар, который мы вынем из той же урны, будет тоже белым.

Решение

Шаг **I**

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*выбрана 1-я урна*},

$\boldsymbol{H_2}$={*выбрана 2-я урна*},

$\boldsymbol{A}$={*появление белого шара при первом вынимании*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ практически могут быть вычислены из условия задачи:

$P(\boldsymbol{H_1})=P(\boldsymbol{H_2})=1/2$,

причем выполнимо $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})=1$.

Требуется найти на этом шаге все $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ являются <u>несовместными,</u> так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют полную группу событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=\frac{a}{a+b};\quad P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=\frac{c}{c+d};$$

тогда $P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\,|\,H_i\right)\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{c+d}=\frac{1}{2}\left[\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}\right].$

4). Вычислим условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$:

Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$ и $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})=\frac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(A)}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2;

то $$P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})=\frac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b}}{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}\right]}=\frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}};$$

$$P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{A})=\frac{P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{c+d}}{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}\right]}=\frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}}.$$

5). Таким образом, выполнен *Шаг* **I** для решения всей задачи.

Шаг **II**

1). Введем еще ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем другое событие $\boldsymbol{B}$:

пусть $\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{H}}_1$; $\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{H}}_2$; $\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}$, где

$\hat{\boldsymbol{H}}_1$={*при событии* ***A*** *выбрана 1-я урна*},

$\hat{\boldsymbol{H}}_2$={*при событии* ***A*** *выбрана 2-я урна*},

$\boldsymbol{B}$ ={*появление белого шара при втором вынимании*}≡

≡{*выбор второго белого шара*},

дополнительно обозначим

$\boldsymbol{V}$ ={*следующий шар, который вынут из той же урны, будет тоже белым*}.

Пересмотренные априорные вероятности гипотез $P(\hat{\boldsymbol{H}}_i)$ после наступления события $\boldsymbol{A}$ уже были вычислены ранее

$$P(\hat{\boldsymbol{H}}_1)=P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})=\frac{\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{c+d}};\quad P(\hat{\boldsymbol{H}}_2)=P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{A})=\frac{\dfrac{c}{c+d}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{c+d}};$$

причем легко показать, что $P(\hat{\boldsymbol{H}}_1)+P(\hat{\boldsymbol{H}}_2)=1$.

Требуется найти на этом шаге $P(\boldsymbol{V})$, причем эта именно та вероятность, которую и требуется найти по условию задачи.

2). Гипотезы $\hat{\boldsymbol{H}}_1$ и $\hat{\boldsymbol{H}}_2$ являются несовместными, так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют полную группу событий, так как $\hat{\boldsymbol{H}}_1+\hat{\boldsymbol{H}}_2=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_i)$, а затем и $P(\boldsymbol{V})$: после того как извлекли один белый шар (т.е. произошло событие $\boldsymbol{A}$), белых шаров стало на 1-го меньше (и всего шаров стало тоже меньше на 1), а значит

$$P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1)=\frac{a-1}{a+b-1};\quad P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_2)=\frac{c-1}{c+d-1}.$$

Вычислим вероятность $P(\boldsymbol{V})$:

$$P(\boldsymbol{V})=P(\hat{\boldsymbol{H}}_1)P(\boldsymbol{V}\,|\hat{\boldsymbol{H}}_1)+P(\hat{\boldsymbol{H}}_2)P(\boldsymbol{V}\,|\hat{\boldsymbol{H}}_1)$$

или

$$P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})=P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{A})P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{A})P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_2)$$

или

$$P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})=\frac{1}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{c+d}}\left[\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)}\right].$$

4). Условные вероятности $P(\hat{\boldsymbol{H}}_i\,|\,\boldsymbol{V})$ вычислять не требуется.

5). Таким образом, выполнен *Шаг* **II** для решения всей задачи.
И тем самым вся задача полностью решена■

Пояснения к решению. Предполагается, что значения $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ выбраны таким образом, чтобы можно было выполнить условие задачи и применить *формулу полной вероятности* и *формулу Бейеса*.

Пример 2.19 (см. и ср. [**25**, с. 73-74] №3.45)

Имеются 3 канала связи, сообщения по которым распределяются случайным образом (с равной вероятностью). Вероятность искажения сообщения при его передаче по 1-му каналу равна $\boldsymbol{p_1}$, по 2-му — $\boldsymbol{p_2}$, по 3-му — $\boldsymbol{p_3}$. Случайно выбран какой-то канал, и по нему передано $\boldsymbol{k}$ сообщений; ни одно из них не было искажено. Найти вероятность того, что ($\boldsymbol{k}$+1)-е сообщение, переданное по тому же каналу, не будет искажено.

Решение

Шаг **I**

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=3) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H_1}$={*сообщения передавались по 1-му каналу*},
$\boldsymbol{H_2}$={*сообщения передавались по 2-му каналу*},
$\boldsymbol{H_3}$={*сообщения передавались по 3-му каналу*},

$\boldsymbol{A}$={$\boldsymbol{k}$ *сообщений не искажено*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ практически могут быть все определены из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H_1})=P(\boldsymbol{H_2})=P(\boldsymbol{H_3})=1/3;$$

причем понятно, что $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})+P(\boldsymbol{H_3})=1$.

Требуется найти на этом шаге все $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ и $\boldsymbol{H_3}$ являются попарно <u>несовместными,</u> так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=3 гипотезы и иметь место может быть только одна из них), и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}+\boldsymbol{H_3}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=(1-\boldsymbol{p_1})^{\boldsymbol{k}};\quad P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=(1-\boldsymbol{p_2})^{\boldsymbol{k}};\quad P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3})=(1-\boldsymbol{p_3})^{\boldsymbol{k}};$$

тогда

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)\right\}=\tfrac{1}{3}(1-\boldsymbol{p_1})^{\boldsymbol{k}}+\tfrac{1}{3}(1-\boldsymbol{p_2})^{\boldsymbol{k}}+\tfrac{1}{3}(1-\boldsymbol{p_3})^{\boldsymbol{k}}.$$

4). Вычислим условные вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$:

Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$ и $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(A)}$, где $\boldsymbol{i}=1, 2, 3$;

то $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}(1-p_i)^k}{\frac{1}{3}\left[(1-p_1)^k+(1-p_2)^k+(1-p_3)^k\right]}$

или

$$P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})=\frac{(1-p_i)^k}{(1-p_1)^k+(1-p_2)^k+(1-p_3)^k}. \qquad \textbf{(2.1)}$$

5). Таким образом, выполнен *Шаг* **I** для решения всей задачи.

Шаг **II**

1). Введем еще ($\boldsymbol{n}=3$) гипотезы и сформулируем другое событие $\boldsymbol{B}$:

пусть $\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\hat{H}_1}$; $\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\hat{H}_2}$; $\boldsymbol{H_3}|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\hat{H}_3}$; $\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}$, где

$\boldsymbol{\hat{H}_1}$={*при событии* ***A*** *выбран 1-й канал*},

$\boldsymbol{\hat{H}_2}$={*при событии* ***A*** *выбран 2-й канал*},

$\boldsymbol{\hat{H}_3}$={*при событии* ***A*** *выбран 3-й канал*},

$\boldsymbol{B}$ ={ ($\boldsymbol{k}$+1)-*е сообщение не искажено*},

дополнительно обозначим

$\boldsymbol{V}$ ={ ($\boldsymbol{k}$+1)-е *сообщение, переданное по тому же каналу, не будет искажено*}.

Пересмотренные априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{\hat{H}_i})$ после наступления события $\boldsymbol{A}$ уже были вычислены ранее см. (**2.1**)

$$P(\boldsymbol{\hat{H}_i})= P(\boldsymbol{\hat{H}_i}|\boldsymbol{A})=P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A}),$$

причем также легко показать, что $P(\boldsymbol{\hat{H}_1})+P(\boldsymbol{\hat{H}_2})+P(\boldsymbol{\hat{H}_3})=1$.

Требуется найти на этом шаге $P(\boldsymbol{V})$, причем эта именно та вероятность, которую и требуется найти по условию задачи.

2). Гипотезы $\boldsymbol{\hat{H}_1}$, $\boldsymbol{\hat{H}_2}$ и $\boldsymbol{\hat{H}_3}$ являются <u>несовместными,</u> так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}=3$ гипотезы и иметь место может быть только одна из них), и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{\hat{H}_1}+\boldsymbol{\hat{H}_2}+\boldsymbol{\hat{H}_3}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{H_i})$, а затем и $P(\boldsymbol{V})$:

в задаче неявно предполагается, что искажения сообщений в канале происходят независимо от того, как были переданы другие сообщения, а значит

$$P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_1})=(1-\boldsymbol{p_1});\quad P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_2})=(1-\boldsymbol{p_2});\ P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_3})=(1-\boldsymbol{p_3}).$$

Вычислим вероятность $P(\boldsymbol{V})$:

$$P(\boldsymbol{V})=P(\boldsymbol{\hat{H}_1})P(\boldsymbol{V}\,|\boldsymbol{\hat{H}_1}) + P(\boldsymbol{\hat{H}_2})P(\boldsymbol{V}\,|\boldsymbol{\hat{H}_1}) + P(\boldsymbol{\hat{H}_3})P(\boldsymbol{V}\,|\boldsymbol{\hat{H}_3})$$

или

$$P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})=P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_1}) +P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A})P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_2}) +P(\boldsymbol{H_3}|\boldsymbol{A})P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_3}).$$

Пусть $W=\left(1-p_1\right)^k+\left(1-p_2\right)^k+\left(1-p_3\right)^k$,

тогда

$$P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) =\left(1-p_1\right)\frac{\left(1-p_1\right)^k}{W}+\left(1-p_2\right)\frac{\left(1-p_2\right)^k}{W}+\left(1-p_3\right)\frac{\left(1-p_3\right)^k}{W}=$$

$$=\frac{\left(1-p_1\right)\left(1-p_1\right)^k+\left(1-p_2\right)\left(1-p_2\right)^k+\left(1-p_3\right)\left(1-p_3\right)^k}{W}=$$

$$=\frac{\left(1-p_1\right)^{k+1}+\left(1-p_2\right)^{k+1}+\left(1-p_3\right)^{k+1}}{W}.$$

И окончательно получим следующее выражение:

$$P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) =\frac{\left(1-p_1\right)^{k+1}+\left(1-p_2\right)^{k+1}+\left(1-p_3\right)^{k+1}}{\left(1-p_1\right)^k+\left(1-p_2\right)^k+\left(1-p_3\right)^k}.$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{\hat{H}_i}\,|\,\boldsymbol{V})$ вычислять не требуется.

5). Таким образом, выполнен *Шаг* **II** для решения всей задачи.
И тем самым вся задача полностью решена■

Пример 2.20 (см. и ср. [**4**, с. 27])

В 5-ти одинаковых больших коробках упакованы ракеты для фейерверка. В 3-х из них (артикул $\boldsymbol{S}$) синий цвет фейерверка дают **84** % ракет, остальные дают оранжевый цвет. В 2-х других (артикул $\boldsymbol{Q}$) фейерверк оранжевого цвета дают **84** % ракет, остальные – синий. При транспортировке перепутались бирки с указанием артикулов на коробках.

Пиротехник взял одну коробку и высказал две гипотезы:

$$\boldsymbol{H_1}=\{\textit{выбрана коробка артикула } \boldsymbol{S}\},$$
$$\boldsymbol{H_2}=\{\textit{выбрана коробка артикула } \boldsymbol{Q}\}.$$

Пиротехник решил сделать из ракетницы несколько выстрелов, чтобы узнать, какая коробка ему досталась. Он будет считать гипотезу ($\boldsymbol{H_1}$ или $\boldsymbol{H_2}$) практически достоверной, если ее вероятность больше **0.98**. Сколько нужно сделать выстрелов? Предполагается, что каждый раз при выстреле появляется оранжевый цвет.

Решение

Шаг **I** (первый выстрел дал оранжевый цвет)

1). Введем обозначение $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0.98}$. Две ($\boldsymbol{n}=2$) гипотезы уже введены

$$\boldsymbol{H_1}=\{\textit{выбрана коробка артикула } \boldsymbol{S}\},$$
$$\boldsymbol{H_2}=\{\textit{выбрана коробка артикула } \boldsymbol{Q}\}.$$

Сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}=\{\textit{при 1-м выстреле наблюдается оранжевый цвет}\}.$$

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H_i})$ практически могут быть вычислены из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H_1})=3/5=0.6; \quad P(\boldsymbol{H_2})=2/5=0.4;$$

причем легко показать, что $P(\boldsymbol{H_1})+P(\boldsymbol{H_2})=1$.

Требуется найти на этом шаге $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{i}=1, 2$ и сравнить с $\boldsymbol{\alpha}$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ и $\boldsymbol{H_2}$ являются <u>несовместными,</u> так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}=2$ гипотезы и иметь место может быть только одна из них), и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H_1}+\boldsymbol{H_2}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_i})$ уже практически известны из условия задачи, поэтому надо найти $P(\boldsymbol{A})$:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=0.16; \quad P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=0.84;$$

тогда $P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)\right\}=0.6\cdot 0.16+0.4\cdot 0.84=0.432$.

4). Вычислим условные вероятности $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})$:

Так как $P(\boldsymbol{A})\neq 0$ и $P(\boldsymbol{H_i}|\boldsymbol{A})=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{P(A)}$, где $\boldsymbol{i}=1, 2$;

то $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})=\dfrac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}=\dfrac{0.6\cdot 0.16}{0.432}\approx 0.222$;

$P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A})=\dfrac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}=\dfrac{0.4\cdot 0.84}{0.432}\approx 0.778$;

причем $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})\approx 0.222<0.98=\boldsymbol{\alpha}$ и $P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A})\approx 0.778<0.98=\boldsymbol{\alpha}$.

5). Таким образом, выполнен *Шаг* **I** для решения всей задачи.

Шаг **II** (второй выстрел дал оранжевый цвет)

1). Введем еще ($\boldsymbol{n}=2$) гипотезы и сформулируем другое событие $\boldsymbol{B}$:
пусть $\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\hat{H}_1}$; $\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\hat{H}_2}$; $\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}$, где

$\boldsymbol{\hat{H}_1}=\{$*при событии* $\boldsymbol{A}$ *выбрана коробка артикула* $\boldsymbol{S}\}$,

$\boldsymbol{\hat{H}_2}=\{$*при событии* $\boldsymbol{A}$ *выбрана коробка артикула* $\boldsymbol{Q}\}$,

$\boldsymbol{B}=\{$*при 2-м выстреле наблюдается оранжевый цвет*$\}$.

Пересмотренные априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{\hat{H}_i})$ после наступления события $\boldsymbol{A}$ уже были вычислены ранее:

$P(\boldsymbol{\hat{H}_1})=P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})\approx 0.222$; $P(\boldsymbol{\hat{H}_2})=P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A})\approx 0.778$;

причем также легко показать, что $P(\boldsymbol{\hat{H}_1})+P(\boldsymbol{\hat{H}_2})=1$.

Требуется найти на этом шаге $P(\boldsymbol{\hat{H}_i}|\ \boldsymbol{V})$, где $\boldsymbol{i}=1, 2$, и сравнить с $\boldsymbol{\alpha}$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{\hat{H}_1}$ и $\boldsymbol{\hat{H}_2}$ являются несовместными, так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}=2$ гипотезы и иметь место может быть только одна из них), и образуют полную группу событий, так как $\boldsymbol{\hat{H}_1}+\boldsymbol{\hat{H}_2}=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{\hat{H}_i})=P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_i})$ и $P(\boldsymbol{V})$:

$P(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{\hat{H}_1})=P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_1})=0.16$; $P(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{\hat{H}_2})=P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_2})=0.84$.

Вычислим вероятность $P(\boldsymbol{V})$:

$P(\boldsymbol{V})=P(\boldsymbol{\hat{H}_1})P(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{\hat{H}_1}) + P(\boldsymbol{\hat{H}_2})P(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{\hat{H}_2})$,

или

$P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})= P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_1}) + P(\boldsymbol{H_2}|\boldsymbol{A})P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AH_2})$.

Тогда $P(\boldsymbol{V})=P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})=0.222\cdot 0.16+0.778\cdot 0.84\approx 0.689$.

4). Вычислим условные вероятности $P(\hat{\boldsymbol{H}}_i|\ \boldsymbol{V})$:

так как $P(\boldsymbol{V})\neq 0$ и $P(\hat{\boldsymbol{H}}_i|\ \boldsymbol{V})= P(\hat{\boldsymbol{H}}_i)P(\boldsymbol{V}\,|\hat{\boldsymbol{H}}_i)\ P(\boldsymbol{V})^{-1}$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2;

то $P(\hat{\boldsymbol{H}}_1|\ \boldsymbol{V})= P(\hat{\boldsymbol{H}}_1)P(\boldsymbol{V}\,|\hat{\boldsymbol{H}}_1)\ P(\boldsymbol{V})^{-1} \approx \dfrac{0.222\cdot 0.16}{0.689} \approx 0.052;$

$P(\hat{\boldsymbol{H}}_2|\ \boldsymbol{V})= P(\hat{\boldsymbol{H}}_2)P(\boldsymbol{V}\,|\hat{\boldsymbol{H}}_2)\ P(\boldsymbol{V})^{-1} \approx \dfrac{0.778\cdot 0.84}{0.689} \approx 0.948;$

причем $P(\hat{\boldsymbol{H}}_1|\ \boldsymbol{V})\approx 0.052<0.98=\boldsymbol{\alpha}$ и $P(\hat{\boldsymbol{H}}_2|\ \boldsymbol{V})\approx 0.948<0.98=\boldsymbol{\alpha}$.

5). Таким образом, выполнен *Шаг* **II** для решения всей задачи.

Шаг **III** (третий выстрел дал оранжевый цвет)

1). Введем еще ($\boldsymbol{n}$=2) гипотезы и сформулируем другое событие $\boldsymbol{C}$:
пусть $\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{AB}=\check{\boldsymbol{E}}_1$; $\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{AB}=\check{\boldsymbol{E}}_2$; $\boldsymbol{C}|\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{W}$, где

$\check{\boldsymbol{E}}_1$={*при событиях* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ *выбрана коробка артикула* $\boldsymbol{S}$},
$\check{\boldsymbol{E}}_2$={*при событиях* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ *выбрана коробка артикула* $\boldsymbol{Q}$},

$\boldsymbol{C}$ ={*при 3-м выстреле наблюдается оранжевый цвет*}.

Пересмотренные априорные вероятности гипотез $P(\check{\boldsymbol{E}}_i)$ после наступления события $\boldsymbol{V}$ уже были вычислены ранее:

$P(\check{\boldsymbol{E}}_1)=P(\hat{\boldsymbol{H}}_1|\ \boldsymbol{V})\approx 0.052$; $P(\check{\boldsymbol{E}}_2)=P(\hat{\boldsymbol{H}}_2|\ \boldsymbol{V})\approx 0.948$;

причем также легко показать, что $P(\check{\boldsymbol{E}}_1)+P(\check{\boldsymbol{E}}_2)=1$.

Требуется найти на этом шаге $P(\check{\boldsymbol{E}}_i|\boldsymbol{W})$, где $\boldsymbol{i}$=1, 2 и сравнить с $\boldsymbol{\alpha}$.

2). Гипотезы $\check{\boldsymbol{E}}_1$ и $\check{\boldsymbol{E}}_2$ являются несовместными, так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=2 гипотезы и иметь место может быть только одна из них), и образуют полную группу событий, так как $\check{\boldsymbol{E}}_1+\check{\boldsymbol{E}}_2=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{W}\,|\check{\boldsymbol{E}}_i)=P(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{ABH}_i)$ и $P(\boldsymbol{W})$:

$P(\boldsymbol{W}\,|\check{\boldsymbol{E}}_1)=P(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{ABH}_1)=0.16$; $P(\boldsymbol{W}\,|\check{\boldsymbol{E}}_2)=P(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{ABH}_2)=0.84$.

Вычислим вероятность $P(\boldsymbol{W})$:

$$P(\boldsymbol{W})=P(\check{\boldsymbol{E}}_1)P(\boldsymbol{W}\,|\check{\boldsymbol{E}}_1)+P(\check{\boldsymbol{E}}_2)P(\boldsymbol{W}\,|\check{\boldsymbol{E}}_2),$$

или

$$P(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{AB})=P(\boldsymbol{H}_1|\boldsymbol{AB})P(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{ABH}_1)+P(\boldsymbol{H}_2|\boldsymbol{AB})P(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{ABH}_2).$$

Тогда $P(\boldsymbol{W})=P(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{AB})=0.052\cdot0.16+0.948\cdot0.84\approx0.805$.

4). Вычислим условные вероятности $P(\check{\boldsymbol{E}}_i|\,\boldsymbol{W})$:

так как $P(\boldsymbol{W})\neq0$ и $P(\check{\boldsymbol{E}}_i|\,\boldsymbol{W})=P(\check{\boldsymbol{E}}_i)\,P(\boldsymbol{W}\,|\check{\boldsymbol{E}}_i)P(\boldsymbol{W})^{-1}$, где $\boldsymbol{i}=1,2$, то

$$P(\check{\boldsymbol{E}}_1|\,\boldsymbol{W})=P(\check{\boldsymbol{E}}_1)P(\boldsymbol{W}\,|\check{\boldsymbol{E}}_1)\,P(\boldsymbol{W})^{-1}\approx\frac{0.0516\cdot0.16}{0.805}\approx0.0103;$$

$$P(\check{\boldsymbol{E}}_2|\,\boldsymbol{W})=P(\check{\boldsymbol{E}}_2)P(\boldsymbol{W}\,|\check{\boldsymbol{E}}_2)P(\boldsymbol{W})^{-1}\approx\frac{0.9484\cdot0.84}{0.805}\approx0.9897;$$

причем $P(\check{\boldsymbol{E}}_2|\,\boldsymbol{W})\approx0.9897>0.98=\boldsymbol{\alpha}$ и $P(\check{\boldsymbol{E}}_1|\,\boldsymbol{W})\approx0.0103<0.98=\boldsymbol{\alpha}$, т.е. считаем гипотезу $\check{\boldsymbol{E}}_2$ практически достоверной, так как ее вероятность больше **0.98**.

5). Таким образом, выполнен *Шаг* **III** для решения всей задачи.

И тем самым вся задача полностью решена■

ОТМЕТИМ. Результаты удобно оформить в виде таблицы (табл.2.4).

Таблица 2.4. **Результаты расчета**

Шаг	Ситуация	Вероятности гипотез		Цвет
—	До 1-го выстрела	$P(\boldsymbol{H}_1)=0.6$	$P(\boldsymbol{H}_2)=0.4$	—
I	После 1-го выстрела	$P(\boldsymbol{H}_1\|\boldsymbol{A})\approx0.222$	$P(\boldsymbol{H}_2\|\boldsymbol{A})\approx0.778$	Оранже-вый
II	После 2-го выстрела	$P(\hat{\boldsymbol{H}}_1\|\,V)\approx0.052$	$P(\hat{\boldsymbol{H}}_2\|\,V)\approx0.948$	Оранже-вый
III	После 3-го выстрела	$P(\check{\boldsymbol{E}}_1\|\,\boldsymbol{W})=0.0103$	$P(\check{\boldsymbol{E}}_2\|\,\boldsymbol{W})\approx0.9897$	Оранже-вый

2.7. Примеры неправильных решений

Рассмотрим еще раз ***пример 2.16*** (см. задачу №94 из [**3**, с. 32]).

В 1-й урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во 2-й урне содержится 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Правильный ответ: 1/2.

***Решение* №А** (неправильное, хотя ответ правильный)

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=4) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*два белых шара*},

$\boldsymbol{H}_2$={*черный шар из 1-й урны и белый шар из 2-й урны*},

$\boldsymbol{H}_3$={*белый шар из 1-й урны и черный шар из 2-й урны*},

$\boldsymbol{H}_4$={*два черных шара*},

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ есть:

$$P(\boldsymbol{H}_1)=P(\boldsymbol{H}_2)=P(\boldsymbol{H}_3)=P(\boldsymbol{H}_4)=1/4;$$

причем $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)+P(\boldsymbol{H}_3)+P(\boldsymbol{H}_4)=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{H}_3$ и $\boldsymbol{H}_4$ попарно <u>несовместны</u> (всего только $\boldsymbol{n}$=4 гипотезы и иметь место может быть только одна из них) и образуют <u>полную группу</u> событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_3+\boldsymbol{H}_4=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=1;\ P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=\frac{4}{20};\ P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)=\frac{8}{10};\ P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_4)=0;$$

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\,|\,H_i\right)\right\}=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{20}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{4}\cdot 0=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}.$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Пояснения к решению. Вероятности $P(\boldsymbol{H}_i)$ не равны 1/4; вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)$ и $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)$ найдены неверно (правильное решение см. выше под **№1** в ***примере 2.16***).

***Решение* №Б** (не совсем корректное, хотя ответ правильный)

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=3) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*два белых шара*},

$\boldsymbol{H}_2$={*черный шар из 1-урны и белый шар из 2-урны*},

$\boldsymbol{H}_3$={*белый шар из 1-урны и черный шар из 2-урны*},

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ практически могут быть вычислены из условия задачи:

$$P(\boldsymbol{H}_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{20}=\frac{32}{200}=\frac{4}{25};\quad P(\boldsymbol{H}_2)=\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{20}=\frac{8}{200}=\frac{1}{25};$$

$$P(\boldsymbol{H}_3)=\frac{8}{10}\cdot\frac{16}{20}=\frac{128}{200}=\frac{16}{25}.$$

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ и $\boldsymbol{H}_3$ попарно <u>несовместны</u>.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$:

$$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=1;\quad P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)=1/2;$$

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\,|\,H_i\right)\right\}=\frac{4}{25}\cdot 1+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2}+\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}.$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Пояснения к решению. Потеряна одна гипотеза

$\boldsymbol{H}_4$={*два черных шара*},

т.е. $\boldsymbol{n}$=4, и не проверено, что все $\boldsymbol{H}_i$ образуют <u>полную группу</u> событий, т.е. $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_3+\boldsymbol{H}_4=\boldsymbol{\Omega}$; вероятность $P(\boldsymbol{H}_4)=\frac{2}{10}\cdot\frac{16}{20}=\frac{32}{200}=\frac{4}{25}$; вероятность $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_4)=0$ (правильное решение см. выше под **№1** в ***примере 2.16***).

***Решение* №В** (неправильное, хотя ответ правильный)

1). Введем ($\boldsymbol{n}$=3) гипотезы и сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{H}_1$={*два белых шара*},

$\boldsymbol{H}_2$={*два разных шара*},

$\boldsymbol{H}_3$={*два черных шара*},

$\boldsymbol{A}$={*взят белый шар*}.

Априорные вероятности гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$ есть:

$$P(\boldsymbol{H}_1)=P(\boldsymbol{H}_2)=P(\boldsymbol{H}_3)=1/3;$$

причем $P(\boldsymbol{H}_1)+P(\boldsymbol{H}_2)+P(\boldsymbol{H}_3)=1$.

Требуется найти $P(\boldsymbol{A})$.

2). Гипотезы $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ и $\boldsymbol{H}_3$ являются попарно несовместными, так как это следует из введенных нами гипотез (всего только $\boldsymbol{n}$=3 гипотезы и иметь место может быть только одна из них), и образуют полную группу событий, так как $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_3=\boldsymbol{\Omega}$.

3). Найдем все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, а затем и $P(\boldsymbol{A})$.

Заметим, что:

- при гипотезе $\boldsymbol{H}_1$ событие $\boldsymbol{A}$ достоверно, а поэтому соответствующая условная вероятность равна единице, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_1)=1$;
- при гипотезе $\boldsymbol{H}_2$ событие $\boldsymbol{A}$ происходит с вероятностью 1/2 (так как по условию задачи из *двух шаров наудачу взят один шар*), а значит $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)=1/2$;
- при гипотезе $\boldsymbol{H}_3$ событие $\boldsymbol{A}$ невозможно, а поэтому соответствующая условная вероятность равна нулю $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)=0$.

Тогда можно вычислить вероятность события $\boldsymbol{A}$:

$$P(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\left\{P\left(H_i\right)\cdot P\left(A\,|\,H_i\right)\right\}=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

4). Условные вероятности $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ вычислять не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Пояснения к решению. Вероятности $P(\boldsymbol{H}_i)$ не равны 1/3; вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_2)$ и $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_3)$ найдены верно (правильное решение см. выше под **№2** в ***примере 2.16***).

Вопросы и задания для самопроверки и контроля

Вопросы

22. Почему хотя $\varnothing \subset \boldsymbol{D}$, тем не менее, <u>возможно</u>, что $\varnothing \notin \boldsymbol{D}$ (поясните хотя бы на одном примере)?
23. Почему $\varnothing$ есть подмножество всякого множества $\boldsymbol{D}$, т.е. $\varnothing \subset \boldsymbol{D}$ (поясните хотя бы на одном примере)?
24. Как Вы понимаете, что такое *случайное событие* (СС)?
25. Какие *фундаментальные условия* определяют СС?
26. Как Вы понимаете, что такое *вероятность события* (поясните на примерах)?
27. Как Вы понимаете, что такое *эксперимент (опыт)* (поясните на примерах)?
28. Как Вы понимаете, что такое *достоверное событие* и *невозможное событие* (поясните на примерах)?
29. Как Вы понимаете, что такое *практически достоверное событие* и *практически невозможное событие* (поясните на примерах)?
30. Что такое *элементарное событие* (поясните на примерах)?
31. Что такое *равновозможные события* (поясните на примере)?
32. Что такое *несовместные и независимые события* (поясните на примерах)?
33. Как Вы понимаете, что такое *полная группа событий (*ПГС*)* (поясните на примерах)?
34. Как Вы понимаете, что такое *полная группа попарно несовместных событий* (ПГПНС), в чем ее отличие от ПГС (поясните на примерах)?
35. Как Вы понимаете *сходимость по вероятности* (поясните на примере)?
36. Что означает *принцип практической уверенности* (поясните на примерах)?
37. Что означает *принцип статистической устойчивости относительных частот* (поясните на примерах)?
38. Какую Вы знаете специальную терминологию *теории вероятностей* (покажите ее связь с общематематическими терминами)?
39. Сформулируйте *теоремы сложения и умножения вероятностей*, и при каких условиях их можно применять (поясните на примерах)?
40. Можно ли *теорему о полной вероятности использовать* при одной гипотезе $\boldsymbol{n}=1$ (приведите подробное объяснение к ответу)?
41. Какие исходные данные необходимы для применения *формулы Бейеса*?
42. Поясните применение *формулы полной вероятности* и *формулы Бейеса,* и когда их нельзя применить (поясните на примере)?
43. Как следует вводить гипотезы для задач с применением *формулы полной вероятности* и *формулы Бейеса* (поясните на примере)?
44. Как следует решать многошаговые задачи с применением *формулы Бейеса* (поясните на примере)?
45. Что представляет собой *класс задач ТВ для выбора гипотез* (поясните на примере)?
46. Может ли $\boldsymbol{n}=\infty$ в формуле *полной вероятности* (поясните свой ответ)?

Задания

e) Придумайте задачи на применение *формулы полной вероятности* и *формулы Бейеса*. Постарайтесь, чтобы эти задачи были по возможности оригинальными (необычными). Постарайтесь решить их. Сформулируйте трудности, которые встретились на пути к этому решению. Дайте их анализ.

f) Придумайте многошаговую задачу на применение *формулы полной вероятности* и *формулы Бейеса*. Постарайтесь решить ее. Дайте анализ возникшим трудностям.

g) Придумайте для задачи (с правильным решением) ее неправильное решение на применение *формулы полной вероятности* (*формулы Бейеса)*. Дайте сравнительный анализ этих решений.

h) На вход радиолокационного устройства с вероятностью $\boldsymbol{p}$ поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью $(1-\boldsymbol{p})$ – только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью $\boldsymbol{p_1}$; если только помеха, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью $\boldsymbol{p_2}$. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе имеется полезный сигнал (см. [**25**, с. 69] задача №3.33. Ответ: $\boldsymbol{pp_1}/[\boldsymbol{pp_1}+(1-\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{p_2}]$).

i) В начале года аналитик рекомендовал некоторые акции для приобретения. По результатам года определилось, что для 40 % от общего числа акций доходность оказалась выше, чем средняя по рынку, а для 60 % от общего числа акций доходность оказалась ниже, чем средняя по рынку. Условимся называть первые акции акциями с высокой доходностью, а вторые — акциями с низкой доходностью. Аналитиком были рекомендованы для приобретения 20 % из числа акций с высокой доходностью и 5 % из числа акций с низкой доходностью. Какова вероятность, что акция, рекомендованная аналитиком для приобретения, оказалась акцией с высокой доходностью (см. [**14**, с. 60] пример №1.11. Ответ: 8/11≈0.727)?

j) Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0.6; 0.5 и 0.4 (см. [**3**, с. 36] задача №107. Ответ: 10/19≈0.526).

k) Руководителем службы безопасности крупной инвестиционной компании $\boldsymbol{W}$ было поручено выяснить наиболее вероятные причины утечки конфиденциальной информации о намерениях и перспективных долгосрочных планах компании $\boldsymbol{W}$ в отношении своих партнеров и доложить затем о них совету директоров компании $\boldsymbol{W}$. Руководителем службы безопасности компании $\boldsymbol{W}$ были высказаны **5** несовместных гипотез: $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$, $\boldsymbol{H_4}$, $\boldsymbol{H_5}$ о причинах утечки конфиденциальной информации. Из опыта многолетней работы служб безопасности известны априорные вероятности всех высказанных гипотез $P(\boldsymbol{H_1})=0.05$; $P(\boldsymbol{H_2})=0.1$; $P(\boldsymbol{H_3})=0.25$; $P(\boldsymbol{H_4})=0.3$; $P(\boldsymbol{H_5})=0.3$. Сотрудники службы безопасности компании $\boldsymbol{W}$ провели собственное расследование и выяснили, что имеет место какая-то одна гипотеза из группы $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$, а остальные гипотезы $\boldsymbol{H_4}$, $\boldsymbol{H_5}$ невозможны. Какая наиболее вероятная гипотеза была доложена руководителем службы безопасности совету директоров компании $\boldsymbol{W}$ (см. и ср. [**1**, с. 71] задача №3.40. Ответ: $\boldsymbol{H_3}$)?

l) Две из четырех независимо работающих ламп прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и вторая лампы, если вероятности отказа первой, второй, третьей и четвертой ламп соответственно равны: $\boldsymbol{p_1}=0.1$; $\boldsymbol{p_2}=0.2$; $\boldsymbol{p_3}=0.3$; $\boldsymbol{p_4}=0.4$ (см. [**3**, с. 37] задача №109. Ответ: ≈0.039).

m) Военно-морские силы должны выполнить важную боевую задачу. Для этого *атомная подводная лодка* (АПЛ) срочно готовится к выходу в дальний автономный поход для выполнения боевой задачи по уничтожению новейшего противолодочного корабля противника. Специфика боевой задачи состоит в том, что уничтожать корабль противника <u>скорее всего</u> придется новейшими торпедами класса $\boldsymbol{A}$ с большой дистанции, пока противник не обнаружил АПЛ (старые торпеды класса ***Б*** позволяют поражать цели только с близкой дистанции).

С завода для загрузки боекомплекта в АПЛ поступили **5** контейнеров с торпедами класса ***А***. Однако контрразведка сообщила, что диверсантами при отгрузке торпед с завода были перепутаны маркировки торпед, и контейнеры содержат теперь два класса торпед ***А*** и ***Б***. Таким образом, контейнеры стали содержать торпеды как класса ***А***, так и класса ***Б***: в каждом каких-то **3**-х из пяти контейнеров содержится **84** % торпед класса ***А*** и **16**% торпед класса ***Б*** (назовем эти контейнеры — набор **I**), а в каждом каких-то из **2**-х оставшихся контейнеров содержится **16** % торпед класса ***А*** и **84** % торпед класса ***Б*** (назовем эти контейнеры — набор **II**). При взрыве торпеды класса ***А*** визуально наблюдается синий дым (**СД**), а при взрыве торпеды класса ***Б*** – оранжевый дым (**ОД**). В АПЛ можно загрузить только один контейнер (боекомплект). Перед выходом в поход на боевое задание командиру АПЛ разрешается провести пробные стрельбы торпедами, чтобы убедиться в их качестве и при необходимости провести смену боекомплекта. Случайно отобрали один контейнер №707 и загрузили в АПЛ. Затем было произведено 5 пусков торпед, и командиром визуально наблюдался дым: 1-й пуск – **СД**; 2-й пуск – **СД**; 3-й пуск – **ОД**; 4-й пуск – **СД**; 5-й пуск – **СД**.

В сложившейся ситуации командиру АПЛ необходимо принять решение (с вероятностью большей, чем **0.99**) можно ли этот контейнер №707 оставить загруженным в АПЛ для выполнения боевой задачи (т.е. можно ли с вероятностью большей, чем **0.99** утверждать, что этот случайный контейнер №707 взят из набора **I**, где содержится большее число торпед класса ***А***, чем торпед класса ***Б***).

Какое решение следует принять командиру АПЛ относительно контейнера №707 (см. и ср. [**4**, с. 27] задача №14. Ответ: контейнер №707 можно оставить загруженным в АПЛ для выполнения боевой задачи)?

Используемая литература (источники)

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.—М.:Наука, 1988.–480с.

2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т.—Т.1.—М.:Мир, 1984.–528с.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.—М.:Высш. школа, 1979.–400с.

4. Скворцов В.В. Теория вероятностей?— это интересно!—М.:Мир, 1993.–120с.

5. Севастьянов Б.А. Вероятностные модели.—М.:Наука, 1992.–176с.

6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.—М.:Высшая школа, 2001.–576с.

7. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей.–М.:ФАЗИС, 1998.–142с.

8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Советское радио, Кн.2.- 1968.–504с.

9. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия.—М.:Большая Российская Энциклопедия, 1999.–910с.

10. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Краткий курс математической статистики для технических приложений.–М.:Физматгиз,1959.–436с.

11. Абчук В.А., Матвейчук Ф.А., Томашевский Л.П. Справочник по исследованию операций.—М.:Воениздат, 1979.–368с.

12. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.—М.:Наука, 1986.–544с.

13. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики.—М.:Наука, 1983.–416с.

14. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов.—М.:Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005.-254с.

15. Белько И.В., Свирид Г.П. Теория вероят. и математ-ская статистика. Примеры и задачи: Учеб. пособ.—Минск.:Новое знание, 2002.-251с.

16. Тёрнер Д. Вероятность, статистика и исследование операций. Пер. с англ. Под ред. А.А. Рывкина.—М.:Статистика, 1976.-432с.—(Сер.:Библиотечка иностранных книг для экономистов и статистиков).

17. Мишулина О.А. Вероятностные основы кибернетики (часть 1).—М.:МИФИ, 1973.—100с.

18. Колкот Э. Проверка значимости. Пер. с англ.—М.:Статистика, 1978.-128с.—(Сер.: Библ-чка иностр. книг для экономистов и статистиков).

19. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.—М.:Высш. школа, 2001(2003).–400(479)с.

20. Леман Э. Проверка статистических гипотез.—М.:Наука, 1964.–499с.

21. Справочник по теории вероятностей и математической статистике.—М.:Наука, 1985.–640с.

22. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов.—М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2003.–352с.

23. Куликов Е.И. Прикладной статистический анализ: Учебник для вузов.—М.:Радио и связь, 2003.–376с.

24. Манита А.Д. Теория вероятностей и математическая статистика [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://teorver-online.narod.ru/teorver73.html
25. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теория вероятностей.—М.: Радио и связь, 1983.–416с.
26. Чубарев А.М., Холодный В.С. Невероятная вероятность.–М.:Знание, 1976.–128с.
27.Надежность и эффективность в технике: Справочник. В 10 т. Том 2.–М.: Машиностроение, 1987.–280с.
28. Гнеденко Б.В. Очерк по истории теории вероятностей.—М.:УРСС, 2001.–88с.
29. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники.–3-е изд. перераб. и доп.–М.: Радио и связь.–1989.–656с.
30. Письменный Д. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистики.—М.:Айрис-пресс, 2004.–256с.
31. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей.—М.: Высш. школа, 1986.–80с.
32. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей.—М.: Наука, 1969.–367с.–(Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов ВТУЗов. Задачи и упражнения).
33. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т.—Т.1.—М.:Мир, [1964].–[498]с.

Рекомендуемые источники для самостоятельной работы

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей.–М.:ФАЗИС, 1998.–142с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.—М.:Высш. школа, 1979.–400с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.—М.:Наука, 1988.–480с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теория вероятностей.—М.: Радио и связь, 1983.–416с.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т.—Т.1.—М.:Мир, 1984.–528с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.—М.:Высшая школа, 2001.–576с.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.—М.:Высш. школа, 2001.–400с.
8. Чубарев А.М., Холодный В.С. Невероятная вероятность.–М.:Знание, 1976.–128с.
9. Скворцов В.В. Теория вероятностей?— это интересно!—М.:Мир, 1993.–120с.
10. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей.—М.: Наука, 1969.–367с.–(Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов ВТУЗов. Задачи и упражнения).

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ

АПЛ — *атомная подводная лодка*;
АС — *автоматизированная система*;
АСУ — *автоматизированная система управления*;
АСОИУ — *автоматизированная система обработки информации и управления*;
АФИПС — *автоматизированная фактографическая информационно-поисковая система*;

ВГ — *вероятная гипотеза*;
ВД — *высококачественные детали*;

Г — *гипотеза*;
ГС — *генеральная совокупность*;
ГОСТ — *государственный стандарт*;

ДГ — *детерминированная гипотеза*;
ДОК — *детали обычного качества*;

ЗДН — *заданный*;

ИВК — *информационно-вычислительный комплекс*;
ИО — *исследование операций*;
ИС — *информационная система*;

КГ — *квантовая гипотеза*;
КЭ — *критерий эффективности*;

ЛПР — *лицо, принимающее решение*;

МС — *математическая статистика*;

НПВ — *не представляется возможным принять решение*;

ОЗУ— *оперативно-запоминающее устройство*;
ОпСт — *оперирующая сторона*;
ОП — *оператор*;
ОШ — *ошибка*;

ПГС — *полная группа событий*;
ПГПНС — *полная группа попарно несовместных событий*;
ПР — *принимать решения*;

РС — *рекомендательный список*;
РЛС — *радиолокационная станция*;

СА — *системный анализ*;
СГ — *статистическая гипотеза*;
СП — *системный подход*;
СС — *случайное событие*;
СССР — *Союз Советских Социалистических Республик*;
США — *Соединенные Штаты Америки*;

ТЗ — *техническое задание*;
ТВ — *теории вероятностей*;
ТПР — *теория принятия решений*;
ТС — *техническая система*;

усл. ед. — *условные единицы*;

ФПВ — *формула полной вероятности*;
ФП — *фактографический поиск*;
ФЭ — *физический эксперимент*;

ЦФ — *целевая функция*;
ЦН — *целевое назначение*;

ЧОП — *человек-оператор*;

ЭВМ — *электронно-вычислительная машина*;
ЭО — *эффективность операции*;
ЭС — *элементарные события*;
ЭТС — *эффективность технической системы*.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\vec{x} = \left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n \right)$ — *вектор*;

N — *множество натуральных чисел*;

{***H***, ***T***, ***R***} — *множество из трех элементов* ***H***, ***T***, ***R***;

$\in$ — *символ принадлежности*;

$\notin$ — *символ непринадлежности*;

- — *символ минус (вычитание)*;

– — *символ разности (вычитание)*;

/ — *символ деления (дробь)*;

$\dfrac{1}{2}$ — *символ деления (дробь одна вторая)*;

1/2 — *символ деления (дробь одна вторая)*;

$\cap$ — *символ пересечения*;

$\cap$ — *символ пересечения*;

· — *символ умножения или пересечения*;

AD — *отсутствие знака* ∩ *или* · (*пересечение* ***A*** *и* ***D*** *или умножение* ***A*** *на* ***D***)

≡ — *символ тождества*;

= — *символ равенства*;

$\neq$ — *символ неравенства*;

$\approx$ — *символ приближенного равенства*;

$\cup$ — *символ объединения*;

\+ — *символ сложения или объединения*;

$\Re$ — *испытание*;

$\subseteq$ — *символ подмножества*;

$\subset$ — *символ подмножества*;

$\not\subset$ — *символ НЕподмножества*;

$\bar{\boldsymbol{A}}$ — *событие, противоположное событию* ***A***;

$$\begin{cases} f_1\left(\vec{x}\right) \geq f_{1\text{здн}}, \\ \quad\vdots \\ f_i\left(\vec{x}\right) \geq f_{i\text{здн}}; \end{cases}$$ — *система неравенств*;

<< — *символ намного меньше*;

>> — *символ намного больше*;

$<$ — *символ меньше*;

$>$ — *символ больше*;

$\leq$ — *символ меньше или равно*;

$\geq$ — *символ больше или равно*;

∞ — *символ бесконечности*;

$\sum_{i=1}^{n}$ — *символ знака суммирования*;

$\bigcup_{i=1}^{n}$ — *символ знака объединения*;

$\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$ — *индекс принимает целочисленные положительные значения от* 1 *до* $\boldsymbol{n}$ *включительно (предполагается, что* $\boldsymbol{n}$ — *целое и положительное)*;

$\ln(\boldsymbol{p})$ — *натуральный логарифм*;

$\boldsymbol{\Omega}$ — *пространство элементарных событий*; *достоверное событие*;

$\varnothing$ — *пустое множество*; *невозможное событие*;

$P(\boldsymbol{A})$ — *вероятность события* $\boldsymbol{A}$;

$P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H})$ — *условная вероятность события* $\boldsymbol{A}$*, вычисленная при условии, что имело место событие* $\boldsymbol{H}$;

$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}$ — *вероятность события* $\boldsymbol{A}$ *при условии, что имело место событие* $\boldsymbol{H}$;

$\boldsymbol{A}$ — *событие* $\boldsymbol{A}$;

$\boldsymbol{H}$ — *гипотеза или событие* $\boldsymbol{H}$;

$\boldsymbol{H_i}$ — $\boldsymbol{i}$-я *гипотеза* (*событие*);

$\tilde{\boldsymbol{E}}$={*студент курит*} — *формулировка события* $\tilde{\boldsymbol{E}}$*, состоящего в том, что студент курит*;

(0,1) — *интервал*;

(0;4) — *интервал*;

0.01— *число ноль целых одна сотая*;

$\boldsymbol{m}$ — *число благоприятных случаев или некоторая переменная*;

$\boldsymbol{N}$ — *общее число* случаев *или некоторая переменная*;

$\boldsymbol{L}_{\mathbf{max}}$ — *максимально допустимая длина РС с учетом всех ЧОП*;

$\boldsymbol{P}_{\mathbf{0}}$ — *вероятность правильного ответа АФИПС на запрос*;

$\boldsymbol{T}_{\mathbf{0}}$ — *среднее время ответа АФИПС на запрос*;

$\boldsymbol{L}_{\mathbf{0}}$ — *средняя длина РС, выдаваемого для ЧОП в АФИПС*;

$\boldsymbol{N}_{\mathbf{0}}$ — *число записей в поисковом массиве АФИПС*;

$\boldsymbol{K}_{\mathbf{0}}$ — *затраты на реализацию АФИПС*;

$\boldsymbol{C_0}$ — *средние эксплуатационные затраты АФИПС на обработку одного запроса*;

$\boldsymbol{A_0}$ — *среднее число запросов в год, обрабатываемых в АФИПС*;

$\boldsymbol{T_{pc}}$ — *директивный срок на общее время обработки РС не зависимо от его длины*;

$\boldsymbol{P_{оп}}$ — *вероятность правильной работы оператора (ЧОП)*;

$\boldsymbol{P_{опЗДН}}$ — *заданная вероятность правильной работы ЧОП*;

$N_{ош}$ — *общее число ошибок, допущенных оператором, включая и его отказы (к отказам относятся также и те случаи, когда объект вообще не был обработан оператором)*;

$N\varphi$ — *общее число объектов, просмотренных оператором*;

$\boldsymbol{L}(i)_{\mathbf{max}}$ — *максимально допустимая длина РС для* $\boldsymbol{i}$*-го ЧОП в АФИПС*;

$\boldsymbol{L}$ — *длина РС в АФИПС*;

$\boldsymbol{\tau}$ — *время предъявления оператору объекта АФИПС или некоторая переменная*;

C_n^m — *число сочетаний из* $\boldsymbol{n}$ *по* $\boldsymbol{m}$;

() — *круглые скобки для записи выражений*;

{} — *фигурные скобки для записи выражений*;

[] — *квадратные скобки для записи выражений*;

■ — *символ конца решения, формулировки следствия, леммы, теоремы или их доказательства*.

Сергей Дмитриевич Кулик

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
(элементы теории проверки вероятных гипотез)

Учебное пособие

Редактор *Е.Е. Шумакова*

Подписано в печать 13.11.2007. Формат 60х84 1/16
Печ. л. 9,5. Уч.-изд.л 8,5. Тираж 200 экз.
Изд. № 4/3 Заказ № 0-639

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет),
115409, Москва, Каширское ш., 31.

Типография издательства "Тровант",
г. Троицк Московской области