Стрюкова Г.А.

Методы математической статистики в психолого-педагогических исследованиях

Учебно-методическое пособие

УлГПУ

Научная библиотека

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический
университет имени И. Н. Ульянова»

Кафедра психологии

Г. А. Стрюкова

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Учебно-методическое пособие

Ульяновск
2017

УДК 15.073
ББК 88
С 87

Печатается по решению редакционно-издательского совета ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»

Рецензенты:

Коноплёва И.В. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин ФГБОУ ВО «УИГА им. Главного маршала авиации Б.П. Бугаева»;

Гурылева Л.В. – кандидат психологических наук, доцент кафедры психологии ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»

С 87 Стрюкова Г.А.

Методы математической статистики в психолого-педагогических исследованиях: Учебно-методическое пособие. Ульяновск: ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2017. 91 с.

6+

ISBN 978-5-86045-923-6

В учебном пособии рассматриваются основные методы статистической обработки эмпирических и экспериментальных данных, включая непараметрические и параметрические критерии оценки различий, согласия распределений, корреляционный анализ. Приведены необходимые теоретические сведения и формулы для решения типовых задач, наиболее часто встречающихся в экспериментальных психологических исследованиях. В качестве приложения к учебному пособию приведены справочные таблицы для определения критических значений основных статистических критериев, задания для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для методического обеспечения дисциплин «Методы прикладной статистики в психолого-педагогических исследованиях», «Математические методы в психолого-педагогических исследованиях», «Математические и статистические методы обработки и анализа научных данных психолого-педагогического исследования», «Методология и методы психолого-педагогического исследования» психолого-педагогического направления уровня бакалавриата и магистратуры. Пособие также может быть использовано студентами других специальностей педагогического вуза в качестве справочника при написании выпускных квалификационных и курсовых работ.

УДК 15.073
ББК 88

ISBN 978-5-86045-923-6
9 785860 459236

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Перед человеком, вставшим на путь психологического или педагогического исследования, рано или поздно возникает проблема обоснования его результатов. Любое исследование подразумевает применение валидных методик, назначение которых – выявлять проявление (количественное или качественное) какого-либо признака у испытуемых, то есть что-либо измерять или устанавливать наличие (отсутствие). Таким образом, молодой учёный оказывается обладателем целого ряда (нескольких рядов) численных значений и имеет возможность стать также и математиком.

Простейшие математические процедуры, известные из курса элементарной (школьной) математики, как то: подсчёт общего числа испытуемых в какой-либо группе, вычисление процентного содержания, то есть так называемая *описательная статистика*, безусловно, необходимы, но далеко не достаточны для научного исследования. Даже если были получены очень хорошие результаты, например: до эксперимента в группе у 35% испытуемых проявлялся какой-либо признак (высокий уровень тревожности и т.д.), а после эксперимента – всего лишь у 5%. Предъявление результатов эксперимента на данном уровне (уровне описательной статистики) не может служить доказательством эффективности экспериментального воздействия.

Наряду с описательной статистикой должны быть использованы статистические методы более высокого уровня – подсчёт различных критериев или коэффициентов. Каждый из них предназначен для «своей» области. Для одного и того же случая могут оказаться применимыми не один, а целый ряд методов. Какие это методы и как их использовать, каковы области их применения – на эти вопросы даны ответы в данном пособии.

Пособие содержит описание лишь некоторых статистических методов, на наш взгляд, наиболее адекватных научному исследованию на начальных этапах – на уровне курсовой работы по психологии или выпускной квалификационной работы по психологии и педагогике. В ходе описания каждого метода математической статистики сохраняется логика изложения: приводится описание и назначение метода, условия и алгоритм его применения. В завершении рассматривается пример с подробным решением, доказательством психологической гипотезы данным методом математической статистики. В пособие включён раздел «Задания для самостоятельного решения», предназначенный для использования на практических и семинарских занятиях по дисциплинам, связанным с использованием математических методов в психолого-педагогических исследованиях.

Материал пособия отобран из основных признанных и современных учебников и учебных пособий по дисциплине. В наибольшей степени это относится к учебнику «Математическая статистика для психологов» О. Ю. Ермолаева и работе «Методы математической обработки в психологии» Е. В. Сидоренко. Это очень разные книги: и написаны различным языком, и ориентированы на очень разные сферы. На наш взгляд, если вы хотите расширить свои знания по математическим методам (рассмотреть не один, а несколько примеров, познакомиться с другими методами на уровне нашего пособия) – используйте учебник О. Ю. Ермолаева. Если же ваша задача – пойти «вглубь»: узнать о смысле метода, представить его графическую интерпретацию, познакомиться с другими обозначениями величин – вам необходим учебник Е. В. Сидоренко. Последний содержит, кроме этого, и интересные, нестандартные психологические задачи, взятые «из жизни».

Обе указанные работы содержат справочные таблицы так называемых критических значений, без которых невозможно обойтись при работе с математическими методами в психологических и педагогических исследованиях. Часть данного справочного материала, необходимого для работы с отобранными нами в качестве основных методами, приводится и в нашем пособии в разделе «Таблицы критических значений».

Знакомство с методами математической статистики предваряют три первых темы данного пособия, в которых определяется понятийный аппарат дисциплины, отрабатываются основные навыки, необходимые для использования методов.

Для желающих освоить более быстрый способ получения результата в начале пособия представлен ***Классификатор методов математической статистики***. С его помощью можно подобрать необходимый для вашей научной работы метод и осваивать целенаправленно работу с ним, используя только необходимые темы данного пособия. Ссылки на страницы с подробным описанием каждого метода приведены в **Содержании**.

Пособие в целом может быть рекомендовано в качестве методического сопровождения соответствующих дисциплин бакалавриата и магистратуры психолого-педагогического направления. В конце пособия представлены темы для рефератов по данным дисциплинам и список рекомендуемой литературы.

КЛАССИФИКАТОР МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Задачи	Условия	Методы
1. Выявление различий в уровне исследуемого признака	Две несвязные выборки испытуемых	• Q- критерий Розенбаума • U -критерий Манна-Уитни • φ -критерий (угловое преобразование Фишера)
2. Оценка сдвига значений исследуемого признака	Два замера на одной и той же выборке испытуемых	• G -критерий знаков • T -критерий Вилкоксона • φ -критерий (угловое преобразование Фишера) • t-критерий Стьюдента
3. Выявление различий в распределении признака	Сопоставление двух эмпирических распределений	• χ^2 критерий Пирсона • φ -критерий (угловое преобразование Фишера)
4. Выявление степени согласованности изменений	Выявление взаимосвязи между признаками	• ρ коэффициент ранговой корреляции Спирмена • r коэффициент линейной корреляции Пирсона

ТЕМА №1. Понятие измерения в психологии. Измерительные шкалы

1.1. Понятие измерения.

Измерение – это процедура, с помощью которой измеряемый объект сравнивается с некоторым эталоном, в результате чего получается численное выражение в определённом масштабе или шкале.

Единица измерения – условный эталон для осуществления тех или иных измерительных процедур.

В естественных науках и технике существуют стандартные единицы измерения (градус, метр, ампер и т.д.). Психологические переменные (за единичными исключениями) не имеют собственных измерительных единиц. В психологии измерение осуществляется с помощью кодирования.

Кодирование – это такая операция, с помощью которой экспериментальным данным придаётся форма числового сообщения (кода).

Научно-исследовательскую работу психолога, проводящего эксперимент, можно представить по следующей схеме:

ИССЛЕДОВАТЕЛЬ (психолог)

↓

предмет исследования (психические свойства, процессы, функции, …)

↓

испытуемый (группа испытуемых)

↓

эксперимент (измерение)

↓

данные эксперимента (числовые коды)

↓

статистическая обработка данных эксперимента

↓

результат статистической обработки (числовые коды)

↓

выводы (печатный текст: отчёт, диплом, статья и т.д.)

↓

ПОЛУЧАТЕЛЬ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ (руководитель курсовой, дипломной или кандидатской работы, заказчик, читатель статьи и т.д.)

1.2. Измерительные шкалы.

Значение психологического признака определяется с помощью специальных измерительных шкал. Согласно С. Стивенсу (1951), существует 4 типа измерительных шкал (способов измерения):

1) номинативная, номинальная или шкала наименований;
2) порядковая, ординарная или ранговая шкала;
3) интервальная или шкала равных интервалов;
4) шкала равных отношений, или шкала отношений.

Все находящиеся в одной строке наименования являются синонимами и используются на равных основаниях. Применение процедуры измерения возможно только 4-мя перечисленными способами. Причём каждая шкала имеет собственную, отличную от других, форму кода, систему фиксации статистического материала, соответствующие статистические методы обработки.

Измерения, осуществляемые с помощью первых двух шкал, считаются качественными, а осуществляемые с помощью двух последних шкал, количественными.

Самое главное, о чём должен помнить психолог при выборе способа измерения, это то, что он должен соответствовать поставленной задаче.

1.3. Номинативная шкала (номинальная, шкала наименований).

Особенность шкалы – при измерении осуществляется классификация или распределение объектов (например, особенностей личности) на непересекающиеся классы, группы; не подразумевается каких-либо количественных операций или сравнения (нельзя сказать, что какой-то признак больше или лучше).

Примеры: разбиение людей по четырём типам темперамента (сангвиник, холерик, флегматик, меланхолик); нумерация игроков спортивной команды; выбор варианта ответа на вопрос закрытой анкеты (а, б, в, г, д) и т.д.

Частный случай номинативной шкалы (самый простой): *дихотомическая шкала.* Измеряемые признаки кодируются двумя символами: цифрами (0 или 1), буквами (А или Б), любыми двумя отличающимися друг от друга символами («репка» и «вишенка»). В этой шкале все объекты разбиваются на 2 непересекающихся множества по признаку: проявился ли данный признак или нет (Да или Нет).

Примеры: мальчик или девочка; ребёнок из полной или из неполной семьи; экстраверт или интроверт и т.д.

Во всех этих случаях можно только подсчитать количество индивидов, обладающих тем или иным признаком, т.е. можно подсчитать частоту встречаемости признака. Единица измерения – количество наблюдений (испытуемых, свойств, реакций и т.п.). Общее число наблюдений принимается за 100%, и тогда становится возможным вычисление процентного соотношения (например, мальчиков и девочек в классе).

Количество групп разбиения может быть больше, чем 2. В этом случае также можно подсчитать процентный состав. Кроме того, можно найти группу с наибольшей частотой измеренного признака. Эта группа носит название *моды.*

К результатам измерений, полученным в номинативной шкале, возможно применение лишь небольшого числа статистических методов:

1) критерий Макнамары;
2) критерий хи-квадрат (χ^2);
3) угловое преобразование Фишера «φ»;
4) коэффициент корреляции «φ».

1.4. Порядковая (ранговая, ординарная) шкала.

Особенность шкалы – вся совокупность измеренных признаков расчленяется на такие множества, которые связаны между собой отношением сравнения («больше – меньше», «выше – ниже», «сильнее – слабее» и т.д.).

Примеры: школьные оценки от 1 до 5; судейские оценки во время конкурсов и соревнований; значимость ценностей для индивида и т.д.

В порядковой (ранговой) шкале должно быть не меньше 3-х классов, чтобы можно было расставить измеренные признаки по порядку. От классов просто перейти к цифрам, если считать, что низший класс получает ранг (код или цифру) 1, средний – 2, высший – 3 (или наоборот). Числа в ранговых шкалах обозначают лишь порядок следования признаков, а операции с числами в этой шкале – это операции с рангами.

В ранговой шкале применяется множество разнообразных статистических методов. Наиболее часто применяются:

1) коэффициенты корреляции Спирмена и Кэндалла;
2) разнообразные критерии различия.

1.5. Шкала интервалов (интервальная шкала).

Особенность шкалы – каждое из возможных значений измеренных величин отстоит от ближайшего на равном расстоянии; нет естественной точки отсчёта (нуль условен и не указывает на отсутствие измеряемого свойства).

Главное понятие шкалы – *интервал* (доля или часть измеряемого свойства между двумя соседними позициями на шкале). Размер интервала –

величина фиксированная и постоянная на всех участках шкалы. Для измерения посредством данной шкалы устанавливают специальные единицы измерения; в психологии это *стены* и *стенайны*.

В интервальной шкале может считаться проведённым исследование по строго стандартизированной тестовой методике.

Пример: стандартизированные тесты интеллекта, где условная единица измерения IQ эквивалентна как при низких, так и при высоких значениях интеллекта.

К экспериментальным данным, полученным в данной шкале, применимо достаточно большое число статистических методов.

1.6. Шкала отношений (шкала равных отношений).

Особенность шкалы – наличие твёрдо фиксированного нуля, который означает полное отсутствие какого-либо свойства или признака.

Шкала отношений близка к интервальной шкале. Она наиболее информативная, допускает любые математические операции и использование разнообразных статистических методов. В этой шкале производятся точные и сверхточные измерения в физике, химии, математике, микробиологии и т.д., а также в близких к психологии науках: психофизика, психофизиология, психогенетика.

1.7. Правила ранжирования.

Особенности ранжирования числовых характеристик:

1) Наименьшему числовому значению приписывается ранг 1.
2) Наибольшему числовому значению приписывается ранг, равный количеству ранжируемых величин.
3) В случае если несколько исходных значений оказываются равными, то им приписывается ранг, равный средней величине тех рангов, которые эти величины получили бы, если они стояли по порядку друг за другом и не были бы равны.
4) Общая сумма реальных рангов должна совпадать с расчётной, определяемой по формуле:

$$\text{Сумма рангов} = \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{2}}$$

5) Не рекомендуется ранжировать более чем 20 величин (признаков, качеств, свойств и т.п.), поскольку в этом случае ранжирование оказывается малоустойчивым.
6) При необходимости ранжирования достаточно большого количества объектов их следует объединить по какому-либо признаку в

достаточно однородные классы (группы), а затем уже ранжировать полученные классы (группы).

<u>**Пример 1.1.**</u> У 11-ти испытуемых получены показатели невербального интеллекта, которые представлены в таблице. Проранжируйте эти показатели. Сделайте проверку правильности ранжирования.
<u>Решение:</u> Необходимо заполнить третий столбец таблицы. Числа в скобках – вспомогательные записи в случае равных значений. В нашем случае – это значение 117. Оно встречается дважды (восьмым и девятым по порядку). Следовательно, ранг этого значения равен среднему арифметическому чисел 8 и 9, т.е. 8,5.

№ испытуемых п/п	**Показатели интеллекта**	**Ранги**
1	113	**6**
2	107	**4**
3	123	**11**
4	122	**10**
5	117	(8) **8,5**
6	117	(9) **8,5**
7	105	**3**
8	108	**5**
9	114	**7**
10	102	**1**
11	104	**2**

<u>Проверка:</u>
1) Сумма рангов: 6+4+11+10+8,5+8,5+3+5+7+1+2=66
2) По формуле: $\frac{N(N+1)}{2} = \frac{11\cdot12}{2} = 11\cdot6 = 66$
3) Сравниваем результаты: 66 = 66, следовательно, ранжирование проведено верно.

Вопросы для обсуждения

1. Что называется измерением, единицей измерения? Чем отличается измерение в психологии от измерения в естественных науках и технике?
2. Что такое кодирование? На каких этапах научного исследования психолог работает с числовыми кодами?
3. Какие типы измерительных шкал существуют? Каковы принципиальные различия между типами шкал?
4. Каковы особенности, примеры и частные случаи номинативной шкалы? Каковы другие названия данной шкалы? Какие статистические методы применимы к данной шкале?
5. Ранговая шкала: её особенности, примеры. Другие названия ранговой шкалы. Статистические методы, применимые в ранговой шкале.
6. Что такое ранжирование? Каковы правила ранжирования?
7. Как осуществить проверку правильности ранжирования?
8. Каковы рекомендации по ранжированию большого количества величин?
9. Шкала интервалов: особенности, примеры. Интервал и его размер. Применимость статистических методов к шкале интервалов.
10. Шкала отношений и её отличие от шкалы интервалов. Применимость шкалы отношений в психологии.
11. Вы измеряете согласие девятиклассников на продолжение обучения в профильном классе школы. Школьник может дать ответ «Да» или «Нет». В какой шкале осуществляется данное измерение?
12. Проводится измерение веса и роста младших школьников. В какой шкале осуществляется измерение?
13. Вы определяете быстроту реакции военных лётчиков. Для этого фиксируется время ответа испытуемого на световой сигнал. В какой шкале проводится данное измерение?
14. Какие измерения вы можете провести в своей группе, чтобы они были проведены:
а) в шкале наименований;
б) в ординарной шкале;
в) в интервальной шкале;
г) в шкале равных отношений?
15. Какие психологические методики позволяют осуществлять измерение в шкале интервалов?

ТЕМА №2. Выборка. Формы учёта результатов измерений

2.1. Выборка и её репрезентативность.

Генеральная совокупность – всеобъемлющая группа объектов какой-либо природы.

Примеры: женщины; первоклассники; спортсмены; люди, побывавшие в космосе и т.д.

Теоретически считается, что объём генеральной совокупности не ограничен. Практически – всегда ограничен и может быть различным.

Полное (сплошное) исследование – психологическое исследование, в ходе которого подвергаются изучению все представители генеральной совокупности.

Позволяет получить исчерпывающую информацию, но чаще всего нереально. Обычно проводится частичное (выборочное) исследование.

Частичное (выборочное) исследование – психологическое исследование, в ходе которого подвергаются изучению только некоторые представители генеральной совокупности (выборка).

Выборка – любая подгруппа элементов (испытуемых, респондентов), выделенная из генеральной совокупности для проведения исследования.

Респондент – испытуемый, отдельный индивид из выборки, с которым работает психолог.

Объём выборки - число респондентов в выборке. Обозначается буквой **n** (или **N**). Различают малую выборку (до 30 респондентов), среднюю (от 30 до 100), большую (свыше 100 респондентов).

Репрезентативная (представительная) выборка – такая выборка, в которой все основные признаки генеральной совокупности представлены приблизительно в той же пропорции и с той же частотой, с которой данный признак выступает в данной генеральной совокупности. (Это меньшая по размеру, но точная модель генеральной совокупности).

Виды соотношений выборок

1) *Независимые (несвязные) выборки*. Если процедура эксперимента и полученные результаты одной выборки не оказывают влияния на особенности протекания процедуры и результаты другой выборки.
2) *Зависимые (связные) выборки*. Если процедура эксперимента и полученные результаты одной выборки оказывают влияние на другую выборку. Одна и та же выборка, на которой дважды проводилось психологическое обследование (пусть даже разных психологических качеств, особенностей), является зависимой (связной).

2.2. Формы учёта результатов измерений.

Первичный экспериментальный материал нуждается в обработке. Она начинается с упорядочения и систематизации собранных данных, *группировки*. Она может осуществляться в виде *статистических таблиц* или *статистических рядов.*

1) Статистические таблицы. Бывают простыми и сложными.

а) Простые таблицы. Применяются при альтернативной группировке, когда одна группа противопоставляется другой. Рекомендуется использовать при измерении в номинативной или ранговой шкале.

Пример 2.1. Результаты обследования мануальной асимметрии у 110 учащихся 3-6-х классов могут быть представлены в виде простой таблицы:

Классы	**Праворукие**	**Леворукие**	**Сумма**
3	23	2	**25**
4	20	4	**24**
5	22	9	**31**
6	22	8	**30**
Сумма	**87**	**23**	**110**

Измерение проведено в дихотомической шкале. Противопоставляются группы праворуких и леворуких учащихся по их количеству в каждой параллели. Наличие строки и столбца «Сумма» позволяет наглядно представить общее число детей: по признаку мануальной асимметрии (87 праворуких и 23 леворуких); в параллели; общее число респондентов (объём выборки - 110). На основании данной таблицы можно сделать определённые выводы, в частности, что среди учеников обследуемых классов больше праворуких, нежели леворуких.

б) Сложные таблицы – *многопольные*. Используются при выяснении причинно-следственных отношений между варьирующими признаками.

Пример 2.2. Представлены данные, иллюстрирующие положительную зависимость между уровнем готовности к школьному обучению и уровнем адаптации первоклассников к школе.

Таблица является девятипольной ($3 \cdot 3$), так как рассматривается два параметра (готовность к школьному обучению и адаптация к школе) трёх уровней (высокий, средний и низкий). В результате таблица содержит три строки и три столбца. Кроме этого добавляются результирующие строка и столбец «Всего».

Уровень готовности к школьному обучению	**Уровень адаптации к школе**			**Всего**
	Высокий	Средний	Низкий	
Высокий	10	2	1	**13**
Средний	7	23	4	**34**
Низкий	-	2	5	**7**
Всего	**17**	**27**	**10**	**54**

Таблица позволяет выявить тенденцию, заключающуюся в том, что первоклассники, подготовленные к школьному обучению, как правило, лучше адаптируются к школе.

Таким образом, правильно составленные таблицы – большое подспорье в экспериментальной работе. Кроме таблиц (простых и сложных) группировка экспериментальных данных может осуществляться в виде статистических рядов.

2) Статистические ряды. Чаще всего используются вариационные ранжированные статистические ряды. Это двойной ряд чисел, в котором первая строка – значения признака (варианты, $\mathbf{x_i}$), расположенные в порядке возрастания, а вторая строка – частоты вариант (сколько раз каждая варианта встречается в выборке, $\mathbf{f_i}$). Сумма частот должна быть равна объёму выборки: $\mathbf{\Sigma f_i = n}$.

Статистический ряд может содержать третью строку – относительные частоты вариант $\mathbf{n_i}$, которые определяются как отношение частоты к объёму выборки: $\mathbf{n_i = \frac{fi}{n}}$. Сумма относительных частот должна равняться 1. Относительные частоты могут быть представлены в процентах: $\mathbf{n_i = \frac{fi}{n}\ 100\%}$.

<u>**Пример 2.3.**</u> Психолог провёл тестирование интеллекта по тесту Векслера у 25 школьников, и сырые баллы по второму субтесту оказались следующими: 6; 9; 5; 7; 10; 8; 9; 10; 8; 11; 9; 12; 9; 8; 10; 11; 9; 10; 8; 10; 7; 9; 10; 9; 11. Записать данные в виде статистического ряда.

Решение: n = 25. Статистический ряд имеет вид:

Варианта x_i	5	6	7	8	9	10	11	12	**Σ**
Частота варианты f_i	1	1	2	4	7	6	3	1	**25**
Относительная частота варианты n_i (или %)	0,04 (4%)	0,04 (4%)	0,08 (8%)	0,16 (16%)	0,28 (28%)	0,24 (24%)	0,12 (12%)	0,04 (4%)	**1 (100 %)**

Вопросы для обсуждения

1. Дайте определение генеральной совокупности и приведите примеры генеральных совокупностей. Каков объём генеральной совокупности?
2. В чём заключается полное психологическое исследование? В каких случаях оно возможно? В чём преимущество и недостатки такого исследования?
3. Выборка и её объём. Репрезентативность выборки. Респондент. Выборочное исследование.
4. В чём различие между понятиями «независимые выборки» и «несвязные выборки»? Между «независимые выборки» и «зависимые выборки»?
5. В вашей группе проведены два исследования: на выявление мотивов учения и определение типа темперамента. Со сколькими выборками пришлось в данном случае работать исследователю?
6. Что называется группировкой экспериментального материала? Каковы возможные виды группировки?
7. Каковы отличия простых статистических таблиц от сложных? Как проверить правильность составления данных таблиц?
8. Что называется статистическим рядом?
9. Что называется вариантой, её частотой и относительной частотой?
10. Как представить относительную частоту в процентах? Как проверить правильность составления статистического ряда?
11. Многопольные таблицы. Приведите пример четырёхпольной, восьмипольной таблиц. Может ли таблица быть семипольной?

ТЕМА №3. Числовые характеристики распределений. Нормальное распределение

3.1. Мода и медиана. Среднее арифметическое.

Для экспериментальных данных, полученных по выборке, можно вычислить ряд числовых мер. Это мода, медиана, среднее арифметическое, разброс выборки, дисперсия, стандартное отклонение.

Мода – такое числовое значение, которое встречается в выборке наиболее часто. Обозначается иногда как X (или **Mo**).

Пример 3.1. Определить моду в ряду значений: (2, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10).
Решение: модой является число 9, т.к. 9 встречается чаще других значений. X=9.

Правила нахождения моды

1) Если все значения в выборке встречаются одинаковое число раз, говорят, что выборочный ряд не имеет моды.

2) Когда 2 соседних (смежных) значения имеют одинаковую частоту и их частота больше частот любых других значений, мода вычисляется как среднее арифметическое этих значений.

Пример 3.2. Имеется ряд значений: (1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 6). Частоты смежных значений 2 и 5 совпадают и равны 3. Эта частота больше, чем частота других значений 1 и 6. Следовательно, модой этого ряда будет величина $X = \frac{2+5}{2}$ = 3,5.

3) Если два несмежных (не соседних) значения в выборке имеют равные значения, которые больше частот любого другого значения, то выделяют две моды. В этом случае выборку называют бимодальной. Могут существовать и мультимодальные ряды.

Медиана – это значение, которое делит упорядоченное множество данных пополам. Обозначается как X (или **Md**).

Пример 3.3. Найти медиану выборки: 9, 3, 5, 8, 4, 11, 13.
Решение: Сначала упорядочим выборку по величинам входящих в неё значений: (3, 4, 5, 8, 9, 11, 13). В выборке 7 элементов, следовательно, четвёртый по порядку элемент (8) будет средним (до него – 3 элемента и после него 3 элемента). Таким образом, медианой будет четвёртый элемент: X=8.

<u>Пример 3.4.</u> Найти медиану выборки: 20, 9, 13, 1, 4, 11.
<u>Решение</u>: Упорядочим выборку: (1, 4, 9, 11, 13, 20). Поскольку имеется чётное число элементов, то существует две «середины» - 9 и 11. В этом случае медиана определяется как среднее арифметическое этих значений:

$$X = \frac{9+11}{2} = 10.$$

Среднее арифметическое ряда из n числовых значений X_1, X_2, … X_n обозначается $\bar{X}$ (икс с чертой) и вычисляется как:

$$\bar{X} = \frac{X1 + X2 + ... + Xn}{n} = \frac{1}{n}(\Sigma X_i)$$

В том случае, если отдельные значения выборки повторяются, среднюю арифметическую вычисляют по формуле:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(\Sigma\, x_i f_i),$$ где f_i – частоты повторяющихся значений.

$\bar{X}$ в таком случае называют *взвешенной средней*.

Средние величины характеризуют выборку одним (средним) числом. Их преимущество состоит в способности уравновешивать все индивидуальные отклонения, в результате чего проявляется то наиболее устойчивое и типичное, что характеризует качественное своеобразие варьирующего объекта, отличает данную выборку от другой. Однако, среднее как статистический показатель не лишено недостатков. Поэтому в статистике, кроме средней величины, используются и другие характеристики «типичных значений» - мода и медиана.

3.2. Разброс выборки, дисперсия, стандартное отклонение.

Кроме величин, характеризующих типичные значения выборки (мода, медиана, средние значения), существуют числовые характеристики выборочного ряда, позволяющие определить степень варьирования (изменения) измеряемого признака. Это *разброс выборки*, *дисперсия* и *стандартное отклонение*.

Разброс (размах) выборки – это разность между максимальной и минимальной величинами данного конкретного вариационного ряда:

$$\mathbf{R = X_{max} - X_{min}}$$

Чем сильнее варьирует измеряемый признак, тем больше величина R, и наоборот.

Однако бывает, что у двух выборочных рядов и средние, и размах совпадают, а характер варьирования рядов различен. Данный факт подтверждается такими числовыми характеристиками как дисперсия и стандартное отклонение.

Дисперсия – среднее арифметическое квадратов отклонений значений переменной от её среднего значения.

$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\ (\boldsymbol{X} - \mathrm{X})^{\mathbf{2}}$, где n – объём выборки, $X -$ среднее значение.

Дисперсия обозначается символами D (по генеральной совокупности) или S_x^2 (по выборке).

Стандартное отклонение – величина, равная квадратному корню из дисперсии: $\boldsymbol{\sigma} = \ \overline{\boldsymbol{D}}$.

Стандартное отклонение по выборке обозначается $\mathbf{S_x}$. Другое название стандартного отклонения: среднее квадратическое отклонение.

3.3. Число степеней свободы.

Число степеней свободы (ν) – это число свободно варьирующих единиц в составе выборки. Оно равно числу классов вариационного ряда минус число условий, при которых он был сформирован. К числу таких условий относятся объём выборки (n), средние и дисперсии.

Число степеней свободы у выборочного ряда определяется:

ν = n – 1, где n – общее число элементов ряда (выборки).

При наличии не одного, а нескольких ограничений свободы вариации, число степеней свободы определяется по формуле:

ν = n – k, где k – число ограничений свободы вариации.

Для таблицы экспериментальных данных число степеней свободы определяется следующим образом:

ν = (c – 1) (n – 1), где c – число столбцов, а n – число строк таблицы (число испытуемых).

Для ряда статистических методов подсчёт числа степеней свободы оказывается необходимым и рассчитывается по-своему.

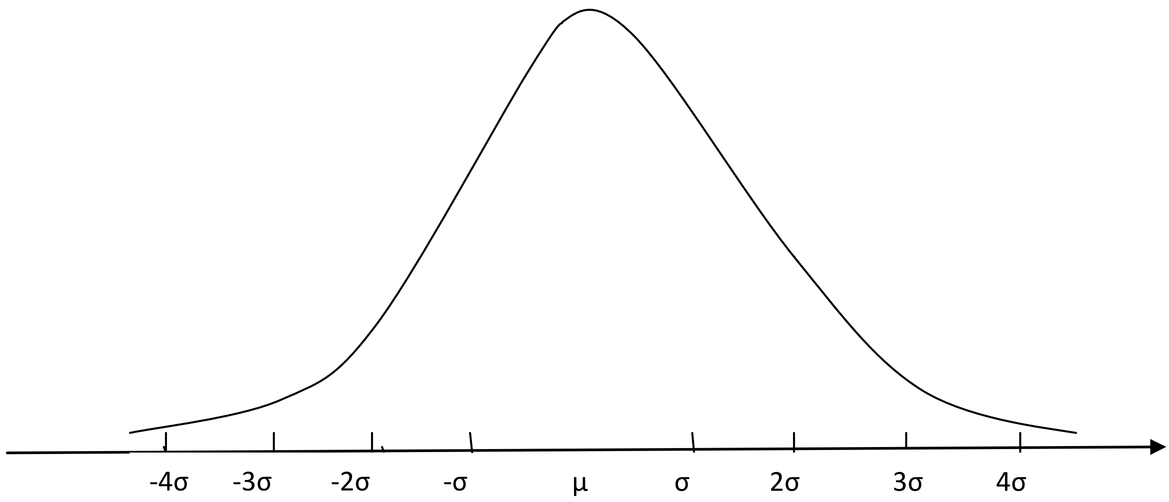
3.4. Понятие нормального распределения.

В статистике под *рядом распределения* понимают распределение частот по вариантам. *Распределением* признака называется закономерность встречаемости разных его значений.

Особое место в статистике занимает *нормальное распределение.* График нормального распределения представляет собой колоколообразную кривую. Форма и положение графика определяется только двумя параметрами: средней (μ) и стандартным отклонением (σ).

Для нормального распределения характерно совпадение величин средней арифметической, моды и медианы. Равенство этих показателей указывает на нормальность данного распределения.

Ещё одна особенность нормального распределения: чем больше величина признака отклоняется от среднего значения, тем меньше будет частота встречаемости (вероятность) этого признака в распределении. «Нормальным» распределение названо потому, что оно наиболее часто встречалось в естественнонаучных исследованиях и казалось «нормой» распределения случайных величин.



В психологии нормальное распределение используется при разработке и применении тестов интеллекта и способностей. Для показателей интеллекта IQ нормальное распределение имеет $\mu = 100$, а $\sigma = 16$ для большинства возрастных групп.

Однако, для других психологических категорий (личностная и мотивационная сфера) применение нормального распределения оказывается дискуссионным.

При нормальном распределении экспериментальных данных применяются особые методы статистической обработки.

Кроме нормального существуют и другие распределения. При обработке экспериментальных данных целесообразно проводить оценку характера распределения. Это поможет решить вопрос о возможности применения того или иного статистического метода.

Вопросы для обсуждения

1. Мода и правила её нахождения. Какая выборка называется мономодальной, бимодальной, полимодальной?

2. Что можно назвать модой признака «оценка за экзамен в последнюю сессию» в вашей группе?
3. Медиана и правила её нахождения.
4. Среднее арифметическое, взвешенная средняя. Преимущества и недостатки средних значений при характеристике выборки.
5. Разброс выборки. Связь между размахом выборки и силой варьирования признака.
6. Дисперсия и стандартное отклонение. Их смысл и правила вычисления.
7. Число степеней свободы и правила его вычисления.
8. Распределение признака. Ряд распределения.
9. Нормальное распределение, его особенности. Распространённость нормального распределения в психологии.

ТЕМА №4. Общие принципы проверки статистических гипотез

4.1. Проверка статистических гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы.

Обобщение закономерностей, полученных на выборке, распространение их на всю генеральную совокупность проводится с помощью математической статистики.

Полученные в результате эксперимента (на какой-либо выборке) данные служат основанием для формулировки некоего предположения о свойствах генеральной совокупности. Подобное предположение получило название *статистической гипотезы.*

Статистическая гипотеза – это научная гипотеза, допускающая статистическую проверку.

Математическая статистика – это научная дисциплина, задачей которой является научно обоснованная проверка статистических гипотез.

При проверке статистических гипотез используются 2 понятия: *нулевая гипотеза* (H_0) и *альтернативная гипотеза* (H_1).

H_0 – это гипотеза о сходстве (свидетельствует об отсутствии различий).

H_1 – это гипотеза о различии (свидетельствует о наличии различий).

Если экспериментальные данные противоречат гипотезе H_0, говорят, что она отклоняется. Если не противоречат, говорят, что гипотеза H_0 не отклоняется (принимается).

<u>Пример 4.1.</u> Психолог провёл выборочное тестирование показателей интеллекта у группы подростков из полных и неполных семей. В результате обработки экспериментальных данных установлено, что у подростков из неполных семей показатели интеллекта в среднем ниже, чем у их ровесников из полных семей. На основе полученных результатов психолог может сделать вывод (принять *статистическое решение)* о том, что неполная семья ведёт к снижению интеллекта у подростков. Сформулировать статистические гипотезы H_0 и H_1.

Решение: H_0: уровень интеллекта подростков не зависит от типа семьи (между группами подростков из разных типов семей нет различия по признаку уровня интеллектуального развития). H_1: уровень интеллекта подростков зависит от типа семьи (между группами подростков из разных семей существует различие по уровню интеллектуального развития).

Статистическое решение всегда вероятностно и неизбежно связано с риском принять ложное решение. При этом возможны ошибки двух родов:

Результат проверки гипотезы H_0	**Возможные состояния проверяемой гипотезы**	
	Верна гипотеза H_0	**Верна гипотеза H_1**
Гипотеза H_0 отклоняется	Ошибка 1 рода	Правильное решение
Гипотеза H_0 не отклоняется	Правильное решение	Ошибка 2 рода

В большинстве случаев единственный путь минимизации ошибок заключается в увеличении объёма выборки.

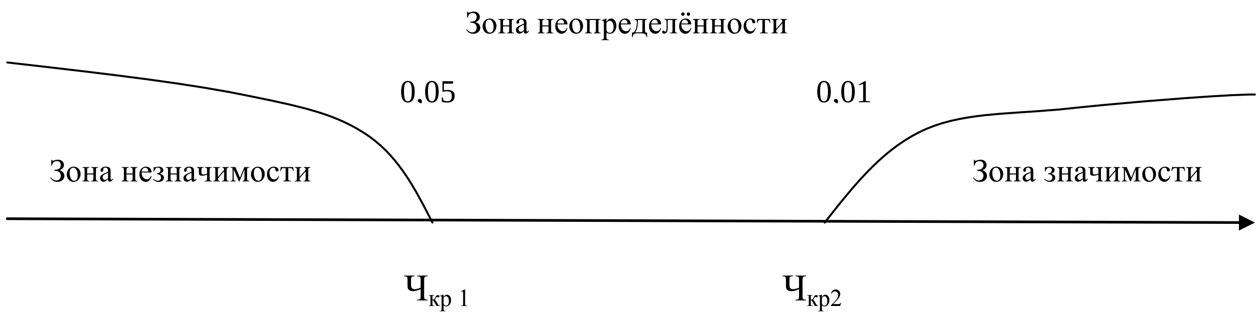
4.2. Понятие уровня статистической значимости.

Уровень значимости – вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы. (Это вероятность ошибки первого рода при принятии решения).

Для обозначения этой вероятности употребляют либо латинскую букву **Р**, либо греческую букву **α**. В прикладных науках, использующих статистику, считается, что низшим уровнем статистической значимости является уровень $P = 0{,}05$, достаточным – уровень $P = 0{,}01$ и высшим – уровень $P = 0{,}001$.

$P = 0{,}05$ означает, что допускается 5 ошибок в выборке из 100 элементов (1 ошибка из 20 элементов). Считается, что больше ошибиться мы не можем, не имеем права.

Для каждого статистического метода существуют соответствующие таблицы (их можно найти в приложениях к любому учебнику по статистике), по которым определяются так называемые критические значения $Ч_{кр1}$ (для $P \le 0{,}05$) и $Ч_{кр2}$ (для $P \le 0{,}01$). Эти числа можно расположить на *оси значимости* (обычной числовой прямой). Эти 2 числа разбивают ось значимости на 3 участка, зоны: зона незначимости (левая зона), зона неопределённости (средняя зона), зона значимости (правая зона).



На основании полученных экспериментальных данных психолог подсчитывает по выбранному методу эмпирическое значение (эмпирическую статистику): $Ч_{эмп}$. Полученное число $Ч_{эмп}$ должно обязательно попасть в одну из трёх зон на оси значимости. В зависимости от того, что это за зона, делают соответствующий вывод.

1) Пусть $Ч_{эмп}$ попало в зону незначимости. В этом случае принимается гипотеза H_0 об отсутствии различий.

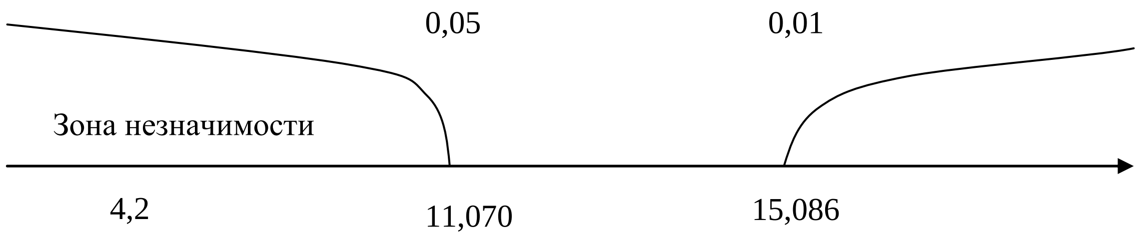
2) Пусть $Ч_{эмп}$ попало в зону значимости. В этом случае принимается гипотеза H_1 о наличии различий, а гипотеза H_0 отклоняется.

3) Пусть $Ч_{эмп}$ попало в зону неопределённости. В этом случае возникает дилемма: какую из гипотез отклонить. Обычно её разрешают следующим образом: принимают на 5%-ом уровне гипотезу H_1, а гипотезу H_0 отклоняют.

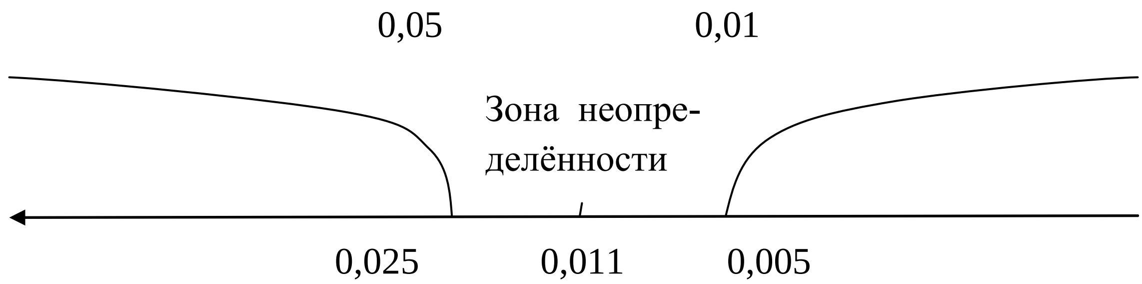
Направление оси значимости зависит от того, какое из критических значений больше. Если $Ч_{кр1} > Ч_{кр2}$, то ось направлена влево. В противном случае она имеет правое направление.

Пример 4.2. Критические значения критерия хи-квадрат (χ^2) равны: $\chi^2_{кр}$ =**11,070** (для $P \le 0{,}05$) и $\chi^2_{кр}$ =**15,086** (для $P \le 0{,}01$). Эмпирическое значение $\chi^2_{эмп}$ = **4,2**. Построить ось значимости и сделать вывод.

Решение: Ось значимости имеет направление вправо. Эмпирическое значение $\chi^2_{эмп} = 4{,}2$ попадает в зону незначимости. Следовательно, гипотеза о различии H_1 отклоняется и принимается гипотеза о сходстве H_0.



<u>Пример 4.3.</u> Для критерия Макнамары $M_{кр}$=**0,025** (для P≤0,05) и $M_{кр}$=**0,005** (для P≤0,01). $M_{эмп}$= **0,011**. Построить ось значимости и сделать вывод.
<u>Решение:</u> Ось значимости имеет направление влево. Эмпирическое значение $M_{эмп}$= 0,011 попадает в зону неопределённости. Следовательно, гипотеза о различии H_1 принимается на 5% уровне значимости. На этом же уровне отклоняется гипотеза о сходстве H_0.



В дальнейшем направление оси значимости специально не будет оговариваться, но будет учитываться при её построении.

4.3. Этапы принятия статистического решения.

Принятие статистического решения разбивается на этапы или шаги.

1. Формулировка нулевой и альтернативной гипотез.

2. Определение объёма выборки N.

3. Выбор соответствующего уровня значимости или вероятности отклонения нулевой гипотезы. (Это может быть величина меньшая или равная 0,05. В зависимости от важности исследования можно выбрать уровень значимости в 0,01 или даже в 0,001).

4. Выбор статистического метода, который зависит от типа решаемой психологической задачи.

5. Вычисление соответствующего эмпирического значения по экспериментальным данным, согласно выбранному статистическому методу.

6. Нахождение по таблице для выбранного статистического метода критических значений, соответствующих уровню значимости для P = 0,05 и для P = 0,01.

7. Построение оси значимости и нанесение на неё табличных критических значений и эмпирического значения $Ч_{эмп}$.

8. Формулировка принятия решения (выбор соответствующей гипотезы H_0 или H_1).

В данном пособии предлагаются следующие методы математической статистики: критерии различий, критерии согласия распределений и многофункциональный критерий, коэффициенты корреляции. Ими не исчерпывается всё многообразие статистических методов, применимых для психологических исследований. Но данные методы являются основными и вполне достаточными для проведения исследований на уровне курсовой или выпускной квалификационной работ. При желании можно дополнительно познакомиться с другими методами, используя указанную в данном пособии литературу.

Вопросы для обсуждения

1. Что называется статистической гипотезой, математической статистикой?
2. Что называется нулевой гипотезой и альтернативной гипотезой? Каковы их обозначения и смысл?
3. В каких случаях гипотеза отклоняется или не отклоняется? Каковы возможные ошибки в этих случаях?
4. Что называется уровнем значимости? Как обозначается уровень значимости, каковы возможные его значения? Каков смысл этих значений?
5. Какой из уровней значимости выше: 0,05 или 0,01?
6. Что такое «ось значимости»? Как определяется её направление? Какие зоны выделяют на оси значимости?
7. Как определить критические значения для какого-либо статистического метода? Сколько их существует?
8. О чём свидетельствует попадание эмпирического значения в зону значимости?
9. О чём свидетельствует попадание эмпирического значения в зону незначимости?
10. О чём свидетельствует попадание эмпирического значения в зону неопределённости?
11. Каковы этапы принятия статистического решения?
12. Как находится эмпирическое значение какой-либо статистической величины?
13. Вы измеряете уровень тревожности в двух первых классах. Какие гипотезы вы можете сформулировать?

14. Вы проверяете уровень тревожности и уровень креативности у сотрудников фирмы. Какие гипотезы вы можете сформулировать?
15. Вы определяете отношение уровня интеллекта школьника к среднему уровню интеллекта всего класса. Какие гипотезы вы формулируете?
16. Какие эмпирические исследования соответствуют следующим гипотезам:
H_0: Уровень подготовленности к школе у выпускников детского сада не выше, чем у детей, не посещавших детские дошкольные учреждения?
H_1: Уровень подготовленности к школе у выпускников детского сада выше, чем у детей, не посещавших детские дошкольные учреждения?
17. Назовите ошибки, допущенные при формулировке следующих гипотез:
H_0: Уровень интеллекта у мальчиков младшего школьного возраста выше, чем у девочек того же возраста.
H_1: Уровень интеллекта у мальчиков младшего школьного возраста ниже, чем у девочек того же возраста.
Сформулируйте гипотезы правильно.

ТЕМА №5. Статистические критерии различий. Непараметрические критерии для связных выборок

5.1. Понятие о критериях различий. Параметрические и непараметрические критерии.

Критерии различий – большой набор статистических способов. Эти критерии позволяют оценить степень статистической достоверности различий между разнообразными показателями, измеренными согласно плану проведения психологического исследования.

Существует достаточно большое количество критериев различий. Каждый из них имеет свою специфику, отличаясь друг от друга по различным основаниям:

1) Тип измерительной шкалы.
2) Максимальный объём выборки, количество выборок.
3) Качество выборок: связные (зависимые) или несвязные (независимые).
4) Мощность критерия. Это способность критерия выявлять различия или отклонять нулевую гипотезу, если она неверна. Есть менее мощные критерии и более мощные (выявляют различия, которые не смогли установить менее мощные). Как правило, менее мощные более просты в употреблении.

5) Параметрические и непараметрические критерии. *Параметрический* – если он основан на конкретном типе распределения генеральной совокупности (как правило, нормальном) или использует параметры этой совокупности (средние, дисперсии и т.д.). *Непараметрический* – не базируется на предположении о типе распределения генеральной совокупности. Непараметрические критерии более универсальны.

Рекомендации к выбору критерия различий

* Определить связность (несвязность) выборки.
* Определить однородность (неоднородность) выборки.
* Оценить объём выборки, выбрать критерий по данному признаку.
* Начать работу с наименее трудоёмкого критерия.
* Если использованный критерий не выявил различий, применить более мощный, но одновременно более трудоёмкий критерий.
* Если в распоряжении психолога имеется несколько критериев, то следует выбирать тот, который наиболее полно использует информацию, содержащуюся в экспериментальных данных.
* При малом объёме выборки следует увеличивать величину уровня значимости (не менее 1%), т.к. небольшая выборка и низкий уровень значимости приводят к увеличению вероятности принятия ошибочных решений.

5.2. Непараметрические критерии для связных выборок.

1. ***Критерий знаков G.*** Предназначен для установления того, как изменяются значения признака при повторном измерении связной выборки: в сторону увеличения или уменьшения.

2. ***Парный критерий Т – Вилкоксона***. Этот критерий является более мощным, чем критерий знаков G. Применяется для оценки различий экспериментальных данных, полученных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых. Позволяет выявить не только направленность изменений, но и их выраженность (насколько сдвиг показателей в каком-то одном направлении является более интенсивным, чем в другом).

3. ***Критерий Фридмана***. Этот критерий можно рассматривать как распространение критерия Т – Вилкоксона на три и большее количество измерений связной выборки испытуемых. Позволяет установить уровень

статистической достоверности различий сразу в нескольких измерениях (от 3 до 100), но не даёт возможности выявить направление изменений.

4. ***Критерий Пейджа (L критерий тенденций Пейджа).*** Можно рассматривать как эквивалент критерия Фридмана для сопоставления показателей, измеренных в 3 и более условиях на одной и той же выборке испытуемых. Однако этот критерий не только позволяет выявить различия, но и указывает на направление в изменении величин признака. Применение этого достаточно мощного критерия ограничено объёмом выборки – число испытуемых не может быть больше 12 и числом измерений признака – оно не может быть больше 6.

5. ***Критерий Макнамары***. Предназначен для работы с данными, полученными в самой простой из номинальных – дихотомической шкале.

В данном пособии рассматриваются алгоритмы применения критерия знаков G и парного критерия Т – Вилкоксона. Критические значения данных критериев определяются по соответствующим справочным таблицам, приведённым в разделе «Таблицы критических значений».

5.3. Критерий знаков G.

Назначение и описание критерия

Критерий знаков G предназначен для установления общего направления сдвига исследуемого признака. Он позволяет установить, в какую сторону в выборке в целом изменяются значения признака при переходе от первого измерения ко второму: изменяются ли показатели в сторону улучшения, повышения или усиления или, наоборот, в сторону ухудшения, понижения или ослабления.

При подсчёте данного критерия используется понятие «сдвиг». *Сдвиг* – это величина разности между значениями признака одного и того же участника «после» и «до» какого-либо воздействия (но не наоборот!). Сдвиг может быть положительным, отрицательным или нулевым.

Смысл критерия состоит в анализе соотношения положительных и отрицательных сдвигов. При этом вводятся два обозначения:

- сумма сдвигов, получившаяся наибольшей (*типичный сдвиг) - n,* $G_{кр}$. Находится по **Таблице 1**;

- сумма сдвигов, получившаяся наименьшей (*нетипичный сдвиг)* - $G_{эмп}$.

Гипотезы при использовании критерия знаков G формулируются следующим образом:

H_0: Преобладание типичного направления сдвига является случайным.

H_1: Преобладание типичного направления сдвига не является случайным.

Условия применения критерия знаков G

1) Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов и отношений.

2) Выборка должна быть однородной и связной.

3) Число элементов в сравниваемых выборках должно быть равным.

4) G критерий знаков может применяться при величине типичного сдвига от 5 до 300.

5) При равенстве типичных и нетипичных сдвигов критерий знаков неприменим, следует использовать другие критерии.

Алгоритм подсчёта критерия знаков G

1) Подсчитать количество нулевых сдвигов и исключить их из рассмотрения. (В результате n уменьшится на количество нулевых сдвигов).

2) Определить преобладающее направление сдвигов. Считать сдвиги в преобладающем направлении «типичными».

3) Определить количество «нетипичных» сдвигов. Считать это число эмпирическим значением $G_{эмп}$.

4) По **Таблице 1** определить критические значения G для данного n.

5) Построив ось значимости, определить зону попадания $G_{эмп}$.

6) Сделать выводы о достоверности сдвига в типичную сторону. (Подтвердить какую-либо из статистических гипотез).

Пример 5.1. Психолог проводит групповой тренинг. Его задача – выяснить, будет ли эффективен данный конкретный вариант тренинга для снижения уровня тревожности участников?

Решение: Для решения этой задачи психолог с помощью теста Тейлора дважды выявляет уровень тревожности у 14 участников до и после проведения тренинга. Результаты измерения приведены в таблице. На основании результатов подсчитывается критерий знаков G.

№ испытуемых п/п	**Уровень тревожности «до» тренинга**	**Уровень тревожности «после» тренинга**	**Сдвиг**
1	30	34	+
2	39	39	0
3	35	26	-
4	34	33	-

5	40	34	-
6	35	40	+
7	22	25	+
8	22	23	+
9	32	33	+
10	23	24	+
11	16	15	-
12	34	27	-
13	33	35	+
14	34	37	+

Формулировка гипотез:

H_0: Сдвиг в сторону увеличения тревожности после тренинга является случайным.

H_1: Сдвиг в сторону увеличения тревожности после тренинга является не случайным.

Подсчёт критерия знаков G:

1) Общее число (сумма) нулевых сдвигов = 1.

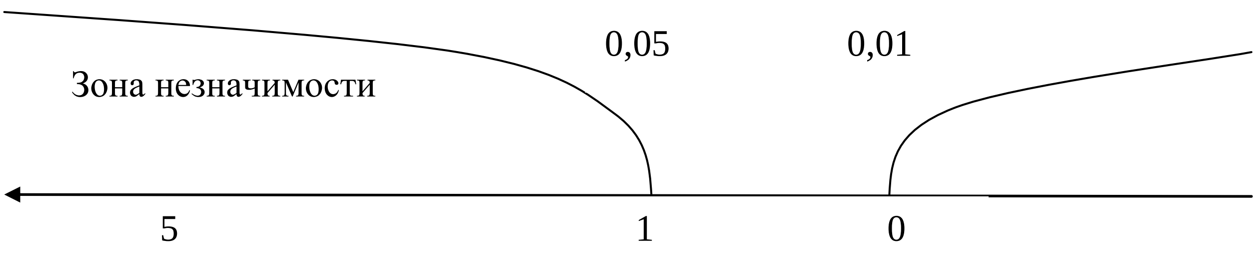
2) Общее число (сумма) положительных сдвигов = 8 (типичные сдвиги). n =8

3) Общее число (сумма) отрицательных сдвигов = 5 (нетипичные сдвиги). $G_{эмп}$ = **5**.

4) Нужный участок **Таблицы 1**:

n	**P**	
	0,05	**0,01**
8	1	0

5) Ось значимости:



6) $G_{эмп}$ = 5 попало в зону незначимости. Это означает, что полученный в эксперименте общий положительный сдвиг в сторону увеличения уровня тревожности испытуемых после проведения тренинга статистически

недостоверен. Иначе говоря, данный способ воздействия не привёл к существенным изменениям в уровне тревожности испытуемых.

Полученный результат может быть переформулирован также в терминах нулевой и альтернативной гипотез: поскольку преобладание типичного положительного направления сдвига в данном эксперименте является случайным, то должна быть принята гипотеза H_0 об отсутствии различий, или о наличии сходства.

Т.о. согласно критерию знаков, применённый психологом способ тренинга неудовлетворителен, поскольку не даёт статистически достоверных изменений в состоянии участников тренинга.

5.4. Парный критерий Т – Вилкоксона.

Назначение и описание критерия

Критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых. Он позволяет установить не только направленность изменений, но и их выраженность. С его помощью можно определить, является ли сдвиг показателей в каком-то одном направлении более интенсивным, чем в другом.

Этот критерий применим в тех случаях, когда признаки измерены по крайней мере по шкале порядка, и сдвиги между вторым и первым замерами тоже могут быть упорядочены. Для этого они должны варьировать в достаточно широком диапазоне.

Суть метода состоит в том, что сопоставляется выраженность сдвигов в том или ином направлениях по абсолютной величине. Для этого сначала ранжируются все абсолютные величины сдвигов, а потом суммируются ранги. Если сдвиги в положительную и в отрицательную сторону происходят случайно, то суммы рангов абсолютных значений их будут примерно равны. Если же интенсивность сдвига в одном из направлений перевешивает, то сумма рангов абсолютных величин сдвигов в противоположную сторону будет значительно ниже, чем это могло бы быть при случайных изменениях.

Гипотезы при использовании парного критерия Т – Вилкоксона формулируются следующим образом:

H_0: Интенсивность сдвигов в типичном направлении не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.

H_1: Интенсивность сдвигов в типичном направлении превышает интенсивность сдвигов в нетипичном направлении.

Условия применения парного критерия Т – Вилкоксона

1) Измерение может быть проведено во всех шкалах, кроме номинальной.

2) Выборка должна быть связной.

3) Число элементов в сравниваемых выборках должно быть равным.

4) Критерий может применяться при численности выборки от 5 до 50.

Алгоритм подсчёта критерия Т-Вилкоксона

1) Составить список испытуемых в любом порядке, например, алфавитном.

2) Вычислить разность между индивидуальными значениями во втором и первом замерах («после» - «до»). Определить, что будет считаться «типичным» сдвигом и сформулировать соответствующие гипотезы.

3) Перевести разности в абсолютные величины и записать их отдельным столбцом.

4) Проранжировать абсолютные величины разностей, начисляя меньшему значению меньший ранг. Проверить совпадение полученной суммы рангов с расчётной.

5) Отметить какими-либо значками ранги, соответствующие сдвигам в «нетипичном» направлении. Подсчитать сумму этих рангов по формуле:

$$\mathbf{T_{эмп}} = \quad \boldsymbol{R_r} \ ,$$

где $R_г$ - ранговые значения с более редким знаком.

6) Определить критические значения Т для данного n по **Таблице 2**.

7) Построить ось значимости, определить зону попадания $T_{эмп}$.

8) Сделать выводы.

Пример 5.2. Психолог проводит с младшими школьниками коррекционную работу по формированию навыков внимания, используя для оценки результатов корректурную пробу. Задача состоит в том, чтобы определить, будет ли уменьшаться количество ошибок внимания у младших школьников после специальных коррекционных упражнений?

Решение: Для решения задачи психолог у 19 детей определяет количество ошибок при выполнении корректурной пробы до и после коррекционных упражнений. В таблице приведены соответствующие экспериментальные данные и дополнительные столбцы, необходимые для работы по парному критерию Т – Вилкоксона.

№ испытуемых п/п	До	После	Сдвиг (значение разности с учётом знака)	Абсолютные величины разностей	Ранги абсолютных величин разностей	Символ нетипичного сдвига
1	24	22	-2	2	10,5	
2	12	12	0	0	2	
3	42	41	-1	1	6,5	
4	30	31	+1	1	6,5	*
5	40	32	-8	8	15	
6	55	44	-11	11	16	
7	50	50	0	0	2	
8	52	32	-20	20	18	
9	50	32	-18	18	17	
10	22	21	-1	1	6,5	
11	33	34	+1	1	6,5	*
12	78	56	-22	22	19	
13	79	78	-1	1	6,5	
14	25	23	-2	2	10,5	
15	28	22	-6	6	13,5	
16	16	12	-4	4	12	
17	17	16	-1	1	6,5	
18	12	18	+6	6	13,5	*
19	25	25	0	0	2	
Сумма	**-**	**-**	**-**	**-**	**190**	**$T_{эмп}$=26,5**

Формулировка гипотез:

H_0: Интенсивность сдвигов в типичном направлении не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.

H_1: Интенсивность сдвигов в типичном направлении превышает интенсивность сдвигов в нетипичном направлении.

Гипотезы могут быть также сформулированы следующим образом:

H_0: сдвиг в сторону уменьшения количества ошибок после коррекционной работы является случайным.

H_1: сдвиг в сторону уменьшения количества ошибок после коррекционной работы не является случайным.

Подсчёт критерия Т – Вилкоксона:

1) Заполняется таблица экспериментальных данных (1, 2, 3 столбцы).

2) В четвёртый столбец таблицы вносят величины сдвигов с учётом знака. Их вычисляют путём вычитания из чисел третьего столбца соответствующих чисел второго столбца.

3) В пятом столбце каждому значению сдвига ставят его соответствующую абсолютную величину.

4) В шестом столбце ранжируют абсолютные величины сдвигов, представленных в пятом столбце. Подсчитывают сумму рангов (в нашем примере она = 190). Подсчитывают сумму рангов по формуле: N(N+1)\2 = 19·20/2 = 190. Убеждаемся в правильности ранжирования (190=190, ранжирование проведено правильно).

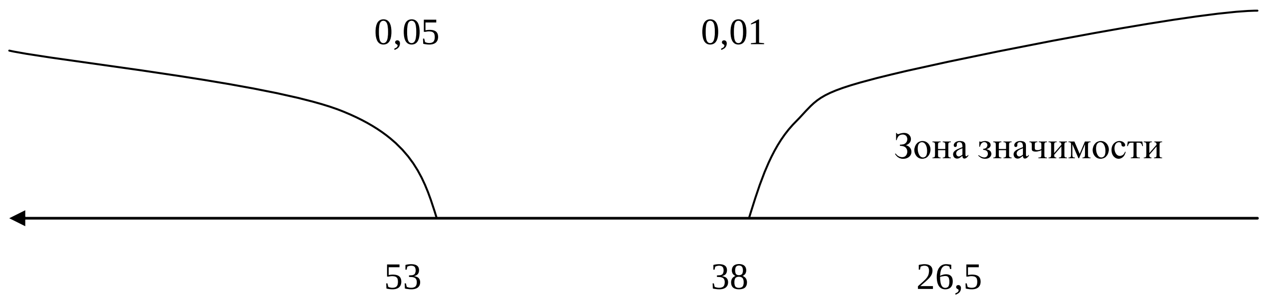
5) Символом (*) отмечают все имеющиеся в таблице нетипичные сдвиги. В нашем случае – это три положительных сдвига. Суммируют ранги нетипичных сдвигов. Это и будет искомая величина $T_{эмп}$.

$T_{эмп}$= 6,5+13,5+6,5 = **26,5**

6) По **Таблице 2** определяют критические значения $T_{кр}$ для n=19. Нужная строка таблицы:

n	**P**	
	0,05	**0,01**
19	53	37

7) Строим ось значимости. Полученная величина $T_{эмп}$ = **26,5** попадает в зону значимости.



8) Можно утверждать, следовательно, что зафиксированные в эксперименте изменения неслучайны и значимы на 1% уровне. Таким образом, применение коррекционных упражнений способствует повышению точности выполнения корректурной пробы.

Поскольку преобладание типичного отрицательного направления сдвига в данном конкретном эксперименте не является случайным, то должна быть принята гипотеза H_1 о наличии различий, а гипотеза H_0 отклонена.

Вопросы для обсуждения

1. Каково назначение критериев различий? Какова их специфика и основания для классификации?
2. Что такое «мощность критерия различий»? Как мощность критерия связана с его сложностью?
3. Чем отличаются параметрические и непараметрические критерии различий? Какие критерии более универсальны?
4. Каковы рекомендации к выбору критерия различий?
5. Назовите основные непараметрические критерии для связных выборок. Каковы области их применения и назначение?
6. Каково назначение критерия знаков G? В чём состоит смысл данного критерия? Какова формулировка статистических гипотез?
7. Каковы условия применения критерия знаков G?
8. Каков алгоритм подсчёта критерия знаков G?
9. Каково назначение парного критерия T - Вилкоксона? В чём состоит смысл данного критерия? Какова формулировка статистических гипотез?
10. Каковы условия применения парного критерия T - Вилкоксона?
11. Каков алгоритм подсчёта парного критерия T - Вилкоксона?
12. Что называется «сдвигом» при измерении какого-либо признака? Какой сдвиг называется типичным, какой нетипичным?
13. Проведите сопоставительный анализ критерия знаков G и парного критерия T – Вилкоксона.

ТЕМА №6. Непараметрические критерии для несвязных выборок

6.1. Критерии для несвязных выборок.

Несвязные или независимые выборки образуются, когда в эксперименте для сравнения берутся данные двух или более выборок, причём эти выборки могут браться из одной или разных генеральных совокупностей. Таким образом, для несвязных выборок характерно, что в них *обязательно входят разные испытуемые.*

Для оценки достоверности различий между несвязными выборками используют ряд непараметрических критериев:

1. ***Критерий U Вилкоксона – Манна – Уитни. (U-критерий Манна – Уитни).*** Применяется для оценки различий выраженности признака в двух независимых выборках. При этом выборки могут различаться по числу входящих в них испытуемых. Особенно удобен, когда число испытуемых невелико (в обеих выборках не превышает 20), хотя таблицы критических значений рассчитаны до 60 испытуемых.

2. ***Критерий Q Розенбаума («критерий хвостов»).*** Проще и менее мощный, чем U-критерий. Основан на сравнении двух упорядоченных, но не обязательно равных по численности рядов наблюдений.

3. ***Н-критерий Крускала-Уоллиса***. Применяется для оценки различий выраженности признака между тремя, четырмя и более выборками (в них может быть различное число испытуемых). Позволяет выявить изменение признака, но не указывает направление этого изменения.

4. ***S-критерий тенденций Джонкира***. Выявляет тенденции изменения признака при сопоставлении от 3-х до 6 выборок. Количество элементов в каждой выборке должно быть одинаковым.

В данном пособии рассматриваются алгоритмы U-критерия Манна – Уитни и критерия Q Розенбаума («критерий хвостов»). Критические значения данных критериев определяются по соответствующим справочным таблицам, приведённым в разделе «Таблицы критических значений».

6.2. U-критерий Манна – Уитни.

Назначение и описание критерия

Критерий предназначен для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного. Он позволяет выявлять различия между малыми выборками и является более мощным, чем критерий Розенбаума.

Этот метод определяет, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между двумя рядами. Первым рядом (выборкой, группой) называют тот ряд значений, в котором значения, по предварительной оценке, выше, а вторым рядом – тот, где они предположительно ниже.

Чем меньше область перекрещивающихся значений, тем более вероятно, что различия достоверны. Эмпирическое значение критерия U отражает то, насколько велика зона совпадения между рядами. Поэтому чем меньше $U_{эмп}$, тем более вероятно, что различия достоверны.

Формулировка статистических гипотез:

H_0: Уровень признака в группе 2 не ниже уровня признака в группе 1.

H_1: Уровень признака в группе 2 ниже уровня признака в группе 1.

Условия применения U-критерия Манна – Уитни

1) Измерение должно быть проведено в шкале интервалов и отношений.

2) Выборки должны быть несвязными.

3) Нижняя граница применимости критерия $n_1 \geq 3$ и $n_2 \geq 3$ или $n_1=2$ и $n_2 \geq 5$.

4) Верхняя граница применимости критерия: n_1 и $n_2 \leq 60$.

(В данном пособии таблица критических значений рассчитана на n_1 и $n_2 \leq 40$).

Алгоритм подсчёта U-критерия Манна – Уитни

1) Расположить исходные данные в виде таблицы в 4 столбца и n_1+n_2 строк. В первом столбце расположить по возрастающей данные первой группы. Во втором – второй группы. И первый, и второй столбцы имеют пропуски чисел, обозначенные символом «-».

2) В третьем и четвёртом столбцах расставляются ранги так, как будто бы оба столбца образуют собой один упорядоченный ряд чисел. По каждому столбцу в отдельности подсчитывается сумма рангов.

3) Проводится проверка правильности ранжирования:

а) подсчитывается общая сумма рангов;

б) рассчитывается сумма рангов по формуле: $N(N+1)\backslash 2$, где $N=n_1+n_2$.

Расчётные суммы должны совпасть.

4) Находится большая по величине сумма рангов и обозначается как R_{max}.

5) Вычисляется по формуле

$$\mathbf{U_{эмп}= (n_1 \cdot n_2) + n_x(n_x+1)\backslash 2 - R_{max}},$$

где n_1 – объём первой выборки,

n_2 - объём второй выборки,

R_{max} – наибольшая по величине сумма рангов,

n_x – количество испытуемых в выборке с большей суммой рангов.

6) По **Таблице 3** находятся критические значения, соответствующие величинам n_1 и n_2.

7) Строится ось значимости, наносятся критические и эмпирическое значения критерия. Определяется зона попадания $U_{эмп}$.

8) Делается вывод.

Пример 6.1. Две неравные по численности группы испытуемых (8 и 9 испытуемых) решали техническую задачу. Показателем служило время решения. Испытуемые меньшей по численности группы получали дополнительную мотивацию в виде денежного вознаграждения. Психолога интересует вопрос – влияет ли вознаграждение на успешность решения задачи?

Результаты времени решения в секундах:

- в группе с дополнительной мотивацией: 41, 38, 44, 6, 25, 25, 30, 41.
- в группе без дополнительной мотивации: 46, 8, 50, 45, 32, 41, 41, 30, 55.

Решение: Для ответа на вопрос задачи применим критерий U Вилкоксона – Манна – Уитни.

Формулировка гипотез:

H_0: Время решения задачи в группе с дополнительной мотивацией не ниже, чем в группе без дополнительной мотивации.

H_1: Время решения задачи в группе с дополнительной мотивацией ниже, чем в группе без дополнительной мотивации.

Алгоритм подсчёта критерия U:

1) Расположим исходные данные в виде таблицы в 4 столбца и 19 строк (8+9+1+1). В первом столбце расположены по возрастающей данные первой группы. Во втором – второй группы. Пропуски чисел обозначим символом -.

Группа с доп. мотивацией X (n_1=8)	**Группа без доп. мотивации Y (n_2=9)**	**Ранги X R(x)**	**Ранги Y R(y)**
6	-	1	-
-	8	-	2
25	-	(3) 3,5	-
25	-	(4) 3,5	-
30	-	(5) 5,5	-
-	30	-	(6) 5,5
-	32	-	7
38	-	8	-
41	-	(9) 10,5	-
-	41	-	(10) 10,5
-	41	-	(11) 10,5
41	-	(12) 10,5	-
44	-	13	-
-	45	-	14
-	46	-	15
-	50	-	16
-	55	-	17
Суммы рангов		**55,5**	**97,5**

2) В 3-м и 4-м столбцах расставляем ранги. По каждому столбцу в отдельности подсчитывается сумма рангов (55,5 и 97,5).

3) Проверка правильности ранжирования:

а) подсчитывается общая сумма рангов: 55,5+97,5=153.

б) рассчитывается сумма рангов по формуле:

$N(N+1)\backslash\ 2=17\cdot18\backslash\ 2=153$, $N=n_1+n_2$.

Расчётные суммы совпали, следовательно, ранжирование проведено верно.

4) Находится большая по величине сумма рангов и обозначается как R_{max}. В нашем случае она равна 97,5.

5) Вычисляется по формуле $U_{эмп}= (n_1\cdot n_2) + n_x(n_x+1)\backslash 2 - R_{max}$,

где n_1 – объём первой выборки,

n_2 - объём второй выборки,

R_{max} – наибольшая по величине сумма рангов,

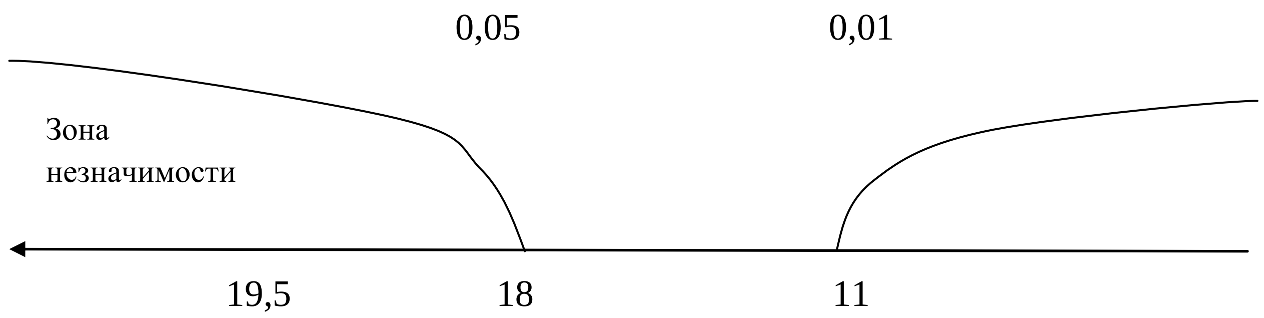
n_x – количество испытуемых в выборке с большей суммой рангов.

В нашем случае $U_{эмп}= (8\cdot9) + (9\cdot10)/2 – 97,5 =$ **19,5**

6) По **Таблице 3** приложения для $n_1=8$ и $n_2=9$ находим критические значения:

$U_{кр}$ = **18** (для $P\leq0,05$) и $U_{кр}$ = **11** (для $P\leq0,01$)

7) Строим ось значимости, наносим критические и эмпирическое значения критерия. В нашем случае $U_{эмп}$ = 19,5 попало в зону незначимости.



8) Делаем вывод. Принимается гипотеза H_0 о сходстве, а гипотеза H_1 о наличии различий отклоняется. Психолог может утверждать, что дополнительная мотивация не приводит к статистически значимому увеличению эффективности решения технической задачи.

6.3. Критерий Q Розенбаума («критерий хвостов»).

Назначение и описание критерия

Критерий используется для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного. В каждой из выборок должно быть не менее 11 испытуемых. Это очень простой непараметрический критерий, который позволяет быстро оценить различия между двумя выборками. Однако если критерий Q не выявляет достоверных различий, это ещё не значит, что их действительно нет.

Критерий применяется в тех случаях, когда данные представлены по крайней мере в порядковой шкале. Признак должен варьировать в каком-то диапазоне значений, иначе сопоставления с помощью Q – критерия просто невозможны. Метод Розенбаума требует, следовательно, достаточно тонко измеренных признаков.

Условия применения Q-критерия Розенбаума

1) Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов и отношений.

2) Выборки должны быть независимыми.

3) В каждой из выборок должно быть не меньше 11 испытуемых.

4) Приведённая в данном пособии таблица ограничивает верхний предел выборки 26 испытуемыми. При числе наблюдений n_1 и $n_2 \geq 26$ можно пользоваться следующими величинами $Q_{кр} = 8$ (для $P \leq 0{,}05$) и $Q_{кр} = 10$ (для $P \leq 0{,}01$).

5) Принципиальным условием, дающим возможность применять критерий, является наличие «хвостов». В ином случае критерий оказывается неприменимым.

Алгоритм подсчёта Q-критерия Розенбаума рассмотрим при решении следующей задачи.

Пример 6.2. Используя тест Векслера, психолог определил показатели интеллекта у двух групп учащихся из городской и сельской школы. Его интересует вопрос – будут ли обнаружены статистически значимые различия в показателях интеллекта, если в городской выборке 11 детей, а в сельской 12? Полученные показатели:

- в городской выборке: 96, 104, 120, 120, 126, 134, 130, 120, 120, 104, 100;
- в сельской выборке: 120, 110, 102, 96, 84, 82, 76, 82, 88, 100, 104, 118.

Решение: Решить задачу с помощью критерия Q Розенбаума («критерия хвостов»).

Формулировка гипотез:

H_0: Уровень интеллекта в выборке городских детей не выше, чем в выборке сельских детей.

H_1: Уровень интеллекта в выборке городских детей выше, чем в выборке сельских детей.

<u>Алгоритм подсчёта критерия Q:</u>

1) Расположим числа в порядке возрастания слева направо и одно измерение под другим (верхний ряд – городская школа, нижний – сельская)

T |96,100,104,104,120,120,120,120| 126, 130,134

76, 82, 82, 84, 88, |96, 100, 102, 104. 110, 118, 120| S

T – левый «хвост», S – правый «хвост»

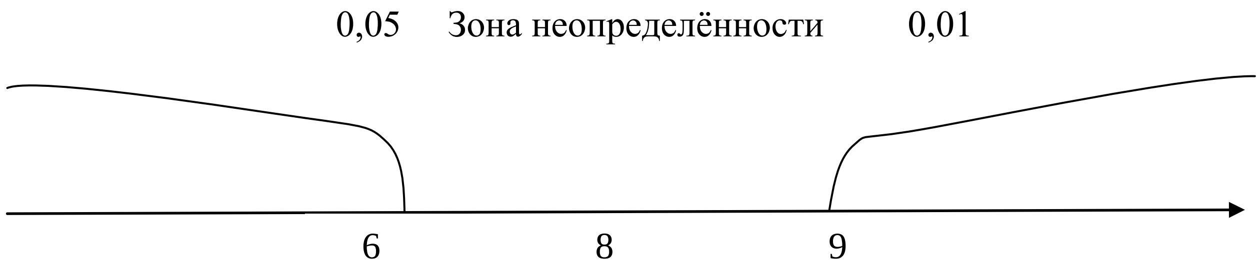
В этом случае S = 3, T = 5,

2) Подсчитываем $Q_{эмп} = S + T = 3 + 5 = 8$.

3) Критические значения критерия находим по **Таблице 4** для $n_1 = 11$ и $n_2 = 12$:

$$Q_{кр1} = \mathbf{6}\ (P \leq 0{,}05) \text{ и } Q_{кр2} = \mathbf{9}\ (P \leq 0{,}01).$$

4) Строим ось значимости. $Q_{эмп} = 8$ попало в зону неопределённости.



5) Вывод. На 5% уровне принимается гипотеза H_1 о наличии различий. Можно считать достоверным (на 5% уровне), что уровень интеллекта в выборке учащихся городских школ выше, чем в выборке учащихся сельских школ.

Вопросы для обсуждения

1. Назовите основные непараметрические критерии для несвязных выборок. Каковы области их применения?
2. Каково назначение U-критерия Манна – Уитни? Каков смысл данного критерия? Какова формулировка статистических гипотез?
3. Каковы условия применения U-критерия Манна – Уитни?
4. Каков алгоритм подсчёта U-критерия Манна – Уитни?
5. Каково назначение критерия Q Розенбаума? Каков смысл данного критерия? Какова формулировка статистических гипотез?
6. Каковы условия применения критерия Q Розенбаума?
7. Каков алгоритм подсчёта критерия Q Розенбаума?
8. Провести сопоставительный анализ критерия Q Розенбаума и U-критерия Манна – Уитни.

ТЕМА №7. Критерии согласия распределений

7.1. Понятие о критериях согласия.

Критерии согласия распределений – статистические методы, имеющие наиболее широкий спектр решаемых задач по сравнению с критериями различий. Они являются наиболее мощными и, соответственно, более сложными при расчетах.

Задачи, решаемые с помощью критериев согласия

1) Расчёт согласия эмпирического и предполагаемого теоретического.

H_0 – отсутствие различий между теоретическим и эмпирическим распределениями.

2) Расчёт однородности двух независимых экспериментальных выборок. H_0 – отсутствие различий между двумя эмпирическими (экспериментальными) распределениями.

В этом случае критерий согласия выступает в роли критерия различий, как параметрического, так и непараметрического.

3) Сравнение показателей внутри одной выборки по двум или более показателям. H_0 – сравниваемые признаки не влияют друг на друга.

В этом случае критерий согласия выступает в роли коэффициента корреляции.

Критерии согласия распределений

1. ***Критерий хи-квадрат (χ^2)***. Измерение может быть проведено в любой шкале. Выборки должны быть случайными и независимыми. Желательно, чтобы объём выборки был не менее 20 (повышается точность критерия). Таблица критических значений критерия хи-квадрат рассчитана для числа степеней свободы ν, которое каждый раз вычисляется по определённым правилам.

2. ***Критерий Колмогорова-Смирнова***. Измерение может быть проведено в шкале интервалов и отношений. Выборки – случайные и независимые. Желательно, чтобы суммарный объём двух выборок был не менее 50. Эмпирические данные должны допускать возможность упорядочения по возрастанию или убыванию какого-либо признака (отражать какое-то его однонаправленное изменение).

3. ***Многофункциональный критерий Фишера – φ (Угловое преобразование Фишера).*** Измерение – в любой шкале. Характеристики

выборок – любые. Нижние границы двух выборок должны содержать не меньше 5 элементов (наблюдений) в каждой.

7.2. Критерий хи-квадрат.

Назначение и описание критерия

Критерий построен так, что при полном совпадении распределений величина $\chi^2_{\text{эмп}}$ = 0, и чем больше расхождение между сопоставляемыми распределениями, тем больше величина эмпирического значения хи-квадрат.

Основная расчётная формула критерия хи-квадрат выглядит так:

$$\chi^2_{\text{эмп}} = \overset{k}{\underset{i=1}{}} \frac{(f\text{э}-fm)^2}{fm},$$

где $f_э$- эмпирическая частота,

f_m – теоретическая частота,

k – количество разрядов признака.

Расчётная формула критерия хи-квадрат для сравнения двух эмпирических распределений в зависимости от вида представленных данных может иметь вид:

$$\chi^2_{\text{эмп}} = \frac{1}{NM} \overset{k}{\underset{i=1}{}} \frac{(N \cdot xi - M \cdot yi)^2}{xi + yi}$$

где N и M – соответственно числа элементов в первой и во второй выборке. Эти числа могут совпадать, а могут быть и различными.

Для расчётов в конкретных случаях используются различные модификации основной формулы, что позволяет облегчить процесс вычисления.

Для критерия хи-квадрат оценка уровней значимости определяется по **Таблице 5** по числу степеней свободы ν, которое в большинстве случаев вычисляется по формуле: ν= k-1, где k каждый раз определяется по выборочным данным и представляет собой число элементов в выборке. Если при расчёте критерия используется таблица экспериментальных данных, то величина ν рассчитывается следующим образом:

$$\nu = (k-1)\cdot(c-1),$$

где k- число строк, а c – число столбцов таблицы.

Условия применения критерия хи-квадрат

1) Объём выборки должен быть достаточно большим: n≥ 20. При n< 20 критерий χ^2 даёт весьма приближённые значения. Точность критерия повышается при больших n.

2) Измерение может быть проведено в любой шкале.

3) Выборки должны быть случайными и независимыми.

4) Теоретическая частота для каждого выборочного интервала не должна быть меньше 5.

5) Сумма наблюдений по всем интервалам должна быть равна общему количеству наблюдений.

6) Таблица критических значений критерия χ^2 рассчитана для числа степеней свободы ν, которое каждый раз рассчитывается по определённым правилам.

Решение задач

1. Сравнение двух экспериментальных распределений.

Исходные данные двух эмпирических распределений для сравнения между собой могут быть представлены разными способами. Наиболее простой из этих способов – так называемая «четырёхпольная таблица». Она используется в том случае, когда в первой выборке имеются два значения (числа) и во второй выборке также 2 значения (числа). Критерий позволяет также сравнивать между собой 3, 4 и больше число эмпирических величин.

Пример 7.1. Одинаков ли уровень подготовленности учащихся в двух школах, если в первой школе из 100 человек поступили в вуз 82 человека, а во второй школе из 87 человек поступили в вуз 44?

Решение: Условия задачи можно представить в виде четырёхпольной таблицы (Таблица 1), в которой ячейки обозначаются как А, В, С и Д.

Таблица 1.

	1 школа	**2 школа**
Число поступивших в вуз	А 82	В 44
Число не поступивших в вуз	С 18	Д 43
Сумма	**100**	**87**

Формулировка гипотез:

H_0: Уровень подготовки учащихся в двух школах не является различным.

H_1: Уровень подготовки учащихся в двух школах является различным.

Алгоритм подсчёта критерия χ^2 :

1) Имеется 4 эмпирические частоты. Необходимо для каждой из них найти соответствующие «теоретические» частоты. Они вычисляются различными способами в зависимости от типа задачи. В нашем случае: подсчитывается величина Р (доля признака, или частота признака). В нашем случае признак – то, что выпускники не поступили в вуз.

$P = \frac{18+43}{100+87} = 0{,}33$

2) Величина P позволяет рассчитать «теоретические» частоты для третьей строчки таблицы. Они показывают, сколько учащихся из 1 и 2 школ не должны были поступить в вуз:

$f_{m1} = 0{,}33 \,.\, 100 = 33$; $f_{m2} = 0{,}33 \,.\, 87 = 28{,}71$

$f_{m3} = 100 - 33 = 67$; $f_{m4} = 87 – 28{,}71 = 58{,}29$

3) Составим новую таблицу с «теоретическими» частотами (Таблица 2):

Таблица 2.

	1 школа	**2 школа**
Число учащихся, которые должны были бы поступить в вуз	А $f_{m3} = 67$	В $f_{m4} = 58{,}29$
Число учащихся, которые не должны были бы поступить в вуз	С $f_{m1} = 33$	Д $f_{m2} = 28{,}71$
Сумма	**100**	**87**

4) Подсчитывается величина критерия хи-квадрат эмпирическая подсчитывается по основной формуле. Для этого из величин, представленных в ячейках Таблицы 1, вычитаются соответствующие величины, представленные в ячейках Таблицы 2.

$$\chi^2_{эмп} = \frac{(18-33)^2}{33} + \frac{(82-67)^2}{67} + \frac{(43-28{,}71)^2}{28{,}71} + \frac{(44-58{,}29)^2}{58{,}29} = \mathbf{20{,}79}$$

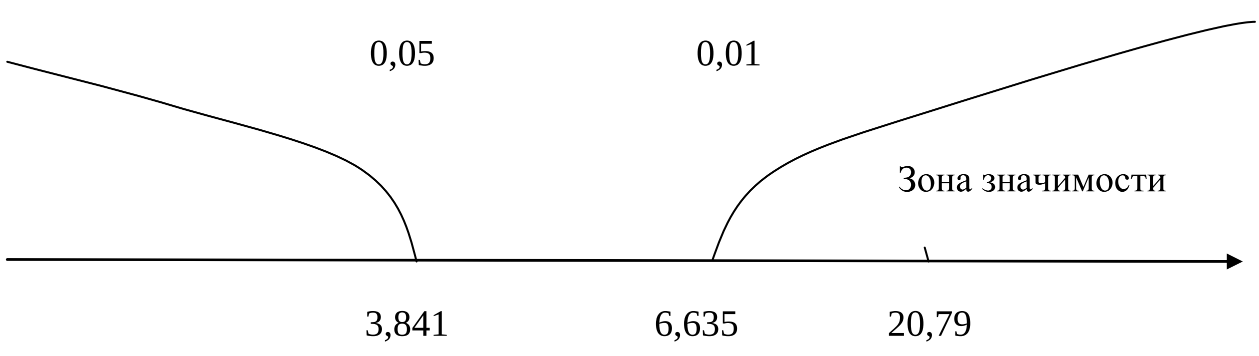
5) Подсчитаем число степеней свободы:

$\nu = (k-1)(c-1) = (2 – 1)\,(2 – 1) = \mathbf{1}$, так как в таблице 2 строки и 2 столбца.

6) По **Таблице 5** находим :

$\chi^2_{кр1} = \mathbf{3{,}841}$ (P≤ 0,05); $\chi^2_{кр\,2} = \mathbf{6{,}635}$ (P≤ 0,01).

7) Строим ось значимости. $\chi^2_{эмп}$ попадает в зону значимости.



8) Вывод. Следует принять гипотезу о наличии различий между двумя эмпирическими распределениями. Таким образом, уровень подготовки

учащихся в двух школах оказался различным. На основании эмпирических данных теперь можно утверждать, что уровень подготовленности учащихся в первой школе существенно выше, чем во второй.

2.Сравнение двух экспериментальных выборок.

Пример 7.2. В двух школах района выяснялась успешность знания алгебры учащимися десятых классов. Для этого в обеих школах были случайным образом отобраны 50 учащихся и с ними проведены контрольные работы. Проверялось предположение о том, что существенной разницы в уровне знаний учащимися алгебры в двух школах не существует.

Решение: Результаты контрольных работ представлены в таблице.

Школы	**Оценки**				**Суммы**
	2	**3**	**4**	**5**	
Школа 1	$O_{11} = 3$	$O_{12} = 19$	$O_{13} = 18$	$O_{14} = 10$	**50**
Школа 2	$O_{21} = 9$	$O_{22} = 24$	$O_{23} = 12$	$O_{24} = 5$	**50**
Суммы	$O_{11}+O_{21}=\mathbf{12}$	$O_{12}+O_{22}=\mathbf{43}$	$O_{13}+O_{23}=\mathbf{30}$	$O_{14}+O_{24}=\mathbf{15}$	**100**

Формулировка гипотез:

H_0: Существенной разницы в уровне знаний учащимися алгебры в двух школах не существует.

H_1: Существенная разница в уровне знаний учащимися алгебры в двух школах существует.

Алгоритм подсчёта критерия χ^2 :

1) Заполняется восьмипольная таблица.

2) Подсчёт эмпирического значения проводится по формуле:

$$\chi^2_{\text{эмп}} = \frac{1}{n1 \cdot n2} \quad \frac{(n1 \cdot O2i - n2 \cdot O1i)^2}{O1i + O2i}$$

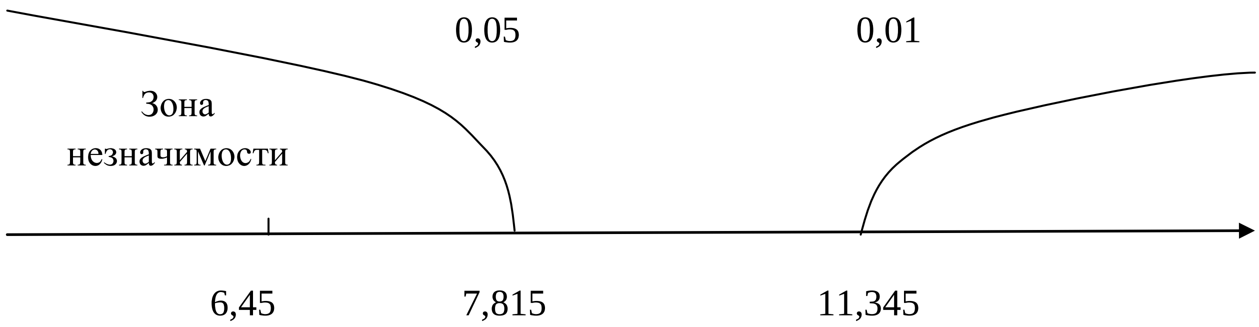
$$\chi^2_{\text{эмп}} = \frac{1}{50 \times 50} \left(\frac{(50\times9-50\times3)^2}{3+9} + \frac{(50\times24-50\times19)^2}{19+24} + \frac{(50\times12-50\times18)^2}{18+12} + \frac{(50\times5-50\times10)^2}{10+5}\right) = \mathbf{6{,}45}$$

3) Число степеней свободы: $\nu = (4-1)\cdot(2-1) = \mathbf{3}$

4) По **Таблице 5** находятся критические значения:

$\chi^2_{кр\ 1}$ = **7,815** ($P \leq 0{,}05$); $\chi^2_{кр\ 2}$ = **11,345** ($P \leq 0{,}01$).

5) Строится ось значимости. $\chi^2_{эмп}$ попадает в зону незначимости.



6) Вывод: принимается гипотеза H_0 о сходстве. Уровни знаний учащимися алгебры в двух разных школах статистически значимо не отличаются.

7.3. Критерий Фишера – φ.

Назначение и описание критерия

Критерий Фишера предназначен для сопоставления двух выборок по частоте встречаемости интересующего исследователя эффекта. Критерий оценивает достоверность различий между процентными долями двух выборок, в которых зарегистрирован интересующий нас эффект.

Суть углового преобразования Фишера состоит в переводе процентных долей в величины центрального угла, который измеряется в радианах. Большей процентной доле будет соответствовать больший угол φ, а меньшей доле – меньший угол, но соотношения здесь не линейные:

$\varphi = 2\cdot\arcsin\sqrt{P}$, где P – процентная доля, выраженная в долях единицы.

Формулировка гипотез:

H_0: Доля лиц, у которых проявляется исследуемый эффект, в выборке 1 не больше, чем в выборке 2.

H_1: Доля лиц, у которых проявляется исследуемый эффект, в выборке 1 больше, чем в выборке 2.

Условия применения критерия Фишера - φ

1) Ни одна из сопоставляемых долей не должна быть равной нулю. В противном случае результат может оказаться неоправданно завышенным.

2) Верхний предел в критерии φ отсутствует – выборки могут быть сколь угодно большими.

3) Нижний предел – 2 наблюдения в одной из выборок. Однако должны соблюдаться следующие соотношения в численности двух выборок:

а) если в одной из выборок всего 2 наблюдения, то во второй должно быть не менее 30;

б) если в одной всего 3 наблюдения, то во второй должно быть не меньше 7;

в) если в одной всего 4 наблюдения, то во второй – не менее 5;

г) при n_1, $n_2 \geq 5$ возможны любые сопоставления.

Других ограничений у критерия φ нет.

Алгоритм подсчёта критерия Фишера - φ

1) Определить те значения признака, которые будут критерием для разделения испытуемых на тех, у кого «есть эффект» и тех, у кого «нет эффекта».

2) Подсчитать количества испытуемых, у которых «есть эффект» в первой и во второй группах.

3) Определить процентные доли испытуемых, у которых «есть эффект», путём отнесения их количества к общему числу испытуемых в данной группе (выборке).

4) Проверить, не равняется ли одна из сопоставляемых процентных долей нулю. Если это так, попробовать изменить это, сдвинув точку разделения групп в ту или иную сторону. Если это невозможно, отказаться от данного критерия и использовать критерий χ^2.

5) Определить по **Таблице 6** величины углов φ для каждой из сопоставленных процентных долей.

6) Подсчитать эмпирическое значение φ по формуле:

$$\varphi_{эмп} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

где φ_1 – угол, соответствующий большей процентной доле;

φ_2 – угол, соответствующий меньшей процентной доле;

n_1 – количество наблюдений в выборке 1;

n_2 – количество наблюдений в выборке 2.

7) Сопоставить полученное значение $\varphi_{эмп}$ с критическими значениями, которые постоянны:

$\varphi_{кр}$ = **1,64** ($P \leq 0,05$); $\varphi_{кр}$ = **2,31** ($P \leq 0,01$),

построив ось значимости.

8) Сформулировать выводы.

<u>Пример 7.3.</u> Психолог провёл эксперимент, в котором выяснилось, что из 23 учащихся математической спецшколы 15 справились с заданием, а из 28 обычной школы с тем же заданием справились 11 человек. Можно ли считать, что различия в успешности решения заданий учащимися спецшколы и обычной школы достоверны?

<u>Решение</u>: с помощью критерия Фишера φ.

<u>Формулировка гипотез:</u>

H_0: Различий в успешности решения заданий учащимися спецшколы и обычной школы нет.

H_1: Различия в успешности решения заданий учащимися спецшколы и обычной школы существуют.

<u>Алгоритм подсчёта критерия φ:</u>

1) Критерием для разделения групп является успешность в выполнении задания.

2) Показатели успешности выполнения заданий необходимо перевести в проценты:

$$\frac{15}{23} \cdot 100\% = 65{,}2\% \text{ для спецшколы;}$$

$$\frac{11}{28} \cdot 100\% = 39{,}3\% \text{ для обычной школы.}$$

3) По **Таблице 6** находим величины φ_1 и φ_2, соответствующие процентным долям в каждой группе.

Для 65,2% φ_1=**1,880**, а для 39,3% φ_2 = **1,355**.

4) Подсчитываем эмпирическое значение $\varphi_{эмп}$ по формуле:

$$\boldsymbol{\varphi_{эмп} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}}$$

где n_1 – количество наблюдений в выборке 1;

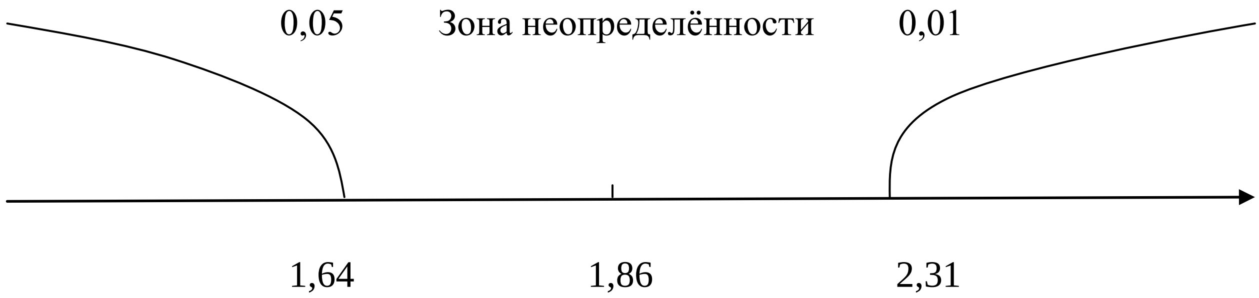
n_2 - количество наблюдений в выборке 2.

В нашем случае $\varphi_{эмп} = (1{,}880 - 1{,}355)\sqrt{\frac{23\,.\,28}{23+28}} = \mathbf{1{,}86}$

5) Критические значения имеют фиксированную величину и составляют:

$\varphi_{кр}$ = **1,64** ($P \leq 0{,}05$); $\varphi_{кр}$ = **2,31** ($P \leq 0{,}01$).

6) Строим ось значимости. $\varphi_{эмп}$ попало в зону неопределённости.



7) Вывод. На 5% уровне значимости можно говорить о различии между успешностью в решении заданий учениками сравниваемых школ, а на уровне в 1% этого утверждать нельзя. На основании сравнения процентных долей можно утверждать, что учащиеся спецшколы успешнее справились с заданием, чем учащиеся обычной школы.

Вопросы для обсуждения

1. Какие статистические методы называются критериями согласия распределений? Каковы задачи, решаемые с помощью данных методов?
2. Назовите основные критерии согласия распределений? В чём состоят их различия?
3. Каково назначение критерия хи-квадрат? В чём состоит смысл данного метода? Какова формулировка гипотез?
4. Каковы условия применения критерия хи-квадрат?
5. Какие основные типы задач решаются с помощью применения критерия хи-квадрат? Какова формулировка гипотез?
6. Каково назначение критерия Фишера - φ? В чём состоит смысл данного метода? Какова формулировка гипотез? Почему данный критерий называется угловым преобразованием Фишера?
7. Каковы условия применения критерия Фишера - φ?
8. Какие основные типы задач решаются с помощью применения критерия Фишера - φ?
9. Каков алгоритм подсчёта критерия Фишера - φ?

ТЕМА №8. Корреляционный анализ. Коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена

8.1. Понятие корреляционной связи.

Психолога нередко интересует, как связаны между собой две или несколько переменных (тревожность и академические успехи учащихся, стаж работы и размер заработной платы и т.д.).

В математике для описания связей между переменными величинами используется понятие функции: Y = F (X), которая ставит в соответствие значениям независимой переменной (аргументу) X значения зависимой переменной Y. Подобные однозначные (функциональные) связи встречаются далеко не всегда. Связи между психологическими признаками имеют не функциональный, а статистический характер, когда одному значению аргумента соответствует не единственное значение зависимой переменной, а целый спектр, распределяющийся в вариационный ряд. Такого рода зависимость между переменными величинами носит название корреляционной, или корреляции. Точнее будет говорить о корреляционной связи, а не зависимости.

Корреляционная связь – это согласованное изменение двух признаков, отражающее тот факт, что изменчивость одного признака находится в соответствии с изменчивостью другого. Существуют различные виды корреляционной связи: линейная и нелинейная; положительная и отрицательная.

Она *линейная*, если с увеличением (убыванием) одной переменной X вторая переменная Y также либо растёт, либо убывает. Корреляция будет *положительной*, если с увеличением X переменная Y в среднем также увеличивается. Корреляция *отрицательная*, если с увеличением X переменная Y в среднем имеет тенденцию к уменьшению.

Возможна ситуация, когда между переменными невозможно установить какую-либо зависимость. В этом случае говорят, что корреляция отсутствует.

Термин «корреляция» введён в науку английским естествоиспытателем Френсисом Гальтоном в 1886 г., а формулу для подсчёта коэффициента корреляции разработал его ученик Карл Пирсон.

8.2. Коэффициенты корреляции.

Переменные X и Y могут быть измерены в разных шкалах. Именно это определяет выбор соответствующего коэффициента корреляции.

Тип шкалы		**Мера связи**
Переменная X	**Переменная Y**	
Интервальная или отношений (нормальное распределение)	Интервальная или отношений (нормальное распределение)	Коэффициент Пирсона r_{xy} (линейной корреляции)
Ранговая, интервальная или отношений	Ранговая, интервальная или отношений	Коэффициент Спирмена ρ_{xy} (ранговой корреляции)
Ранговая	Ранговая	Коэффициент «τ» Кендалла
Дихотомическая	Дихотомическая	Коэффициент «φ» Пирсона
Дихотомическая	Ранговая	Рангово-бисериальный коэффициент R_{xy}
Дихотомическая	Интервальная или отношений (нормальное распределение)	Бисериальный коэффициент R_{xy}
Интервальная	Ранговая	Не разработан

Величина любого коэффициента корреляции лежит в отрезке от -1 до +1. Если получается иначе, следовательно, в расчётах произошла ошибка.

Если коэффициент корреляции по модулю близок к 1, это свидетельствует о высоком уровне связи между переменными. Если близок к 0, связь отсутствует. Если коэффициент положителен, то между переменными существует положительная корреляционная связь. Если коэффициент отрицателен, корреляционная связь отрицательна.

Используются две системы классификации корреляционных связей по их силе: общая и частная.

Общая классификация корреляционных связей

1) сильная, или тесная корреляционная связь (при $r>0,70$);

2) средняя (при $0,50<r<0,69$);

3) умеренная (при $0,30<r<0,49$);

4) слабая (при $0,20<r<0,29$);

5) очень слабая (при $r<0,19$).

Частная классификация корреляционных связей

1) высокая значимая корреляция (при r, соответствующем уровню статистической значимости $p \leq 0,01$);

2) значимая корреляция (при r, соответствующем уровню статистической значимости $p \leq 0,05$);

3) тенденция достоверной связи (при r, соответствующем уровню статистической значимости $p \leq 0,10$);

4) незначимая корреляция (при r, не достигающем уровня статистической значимости).

Существуют методы расчёта уровня статистической значимости коэффициентов корреляции. Для коэффициентов r_{xy} Пирсона и ρ_{xy} Спирмена существуют таблицы критических значений (**Таблица 7** и **Таблица 8**). Именно эти коэффициенты рассматриваются в данном пособии.

8.3. Ранговый коэффициент линейной корреляции Спирмена.

Назначение и описание метода

Метод ранговой корреляции Спирмена позволяет определить тесноту (силу) и направление корреляционной связи между двумя признаками или двумя профилями (иерархиями) признаков.

Для подсчёта ранговой корреляции необходимо располагать двумя рядами значений (X и Y), которые могут быть проранжированы. Такими рядами могут быть:

1) два признака, измеренные в одной и той же группе испытуемых;

2) две индивидуальные иерархии признаков, выявленные у двух испытуемых по одному и тому же набору признаков (например, личностные профили по 16-факторному опроснику Кеттела, иерархии ценностей по методике Рокича, последовательности предпочтений в выборе из нескольких альтернатив и т.д.);

3) две групповые иерархии признаков;

4) индивидуальная и групповая иерархии признаков.

Вначале показатели ранжируются отдельно по каждому из признаков. Как правило, меньшему значению признака начисляется меньший ранг.

Ранговый коэффициент линейной корреляции Спирмена вычисляется по формуле:

$\boldsymbol{\rho_{xy} = 1 - \dfrac{6\ \ (D^2)}{n\,(n^2 - 1)}}$, где n – количество ранжируемых признаков (показателей, испытуемых), D – разность между рангами по двум переменным для каждого испытуемого,

D^2 – сумма квадратов разностей рангов.

Формулировка статистических гипотез:

H_0: Корреляция между переменными (иерархиями) X и Y не отличается от нуля.

H_1: Корреляция между переменными (иерархиями) X и Y достоверно отличается от нуля.

Условия применения коэффициента ранговой корреляции Спирмена

1. Сравниваемые переменные должны быть получены в порядковой (ранговой) шкале, но могут быть измерены также в шкале интервалов и отношений. В последнем случае необходимо проранжировать показатели и перейти к порядковой шкале.

2. Характер распределения коррелируемых величин не имеет значения.

3. Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных X и Y должно быть одинаковым.

4. Таблицы для определения критических значений коэффициента корреляции Спирмена (**Таблица 8**) рассчитаны на n от 5 до 40. Нахождение критических значений осуществляется при k = n.

Алгоритм подсчёта коэффициента ранговой корреляции Спирмена ρ_{xy}

1) Определить, какие два признака или две иерархии признаков будут участвовать в сопоставлении как переменные X и Y.

2) Проранжировать значения переменной X, начисляя ранг 1 наименьшему значению. Занести ранги в первый столбец таблицы по порядку номеров испытуемых или признаков.

3) Проранжировать значения переменной Y в соответствии с теми же правилами. Занести ранги во второй столбец таблицы по порядку номеров испытуемых или признаков.

4) Подсчитать разности D между рангами X и Y по каждой строке таблицы и занести в третий столбец таблицы.

5) Возвести каждую разность в квадрат: D^2. Эти значения занести в четвёртый столбец таблицы. Подсчитать сумму квадратов (D^2).

6) Рассчитать коэффициент ранговой корреляции ρ_{xy} по формуле

$$\rho_{xy} = 1 - \frac{6 \quad (D^2)}{n\,(n^2 - 1)}$$

7) Определить критические значения коэффициента ранговой корреляции по **Таблице 8**.

8) Построить ось значимости. Определить зону попадания ρ_{xy}.

9) Сформулировать выводы.

Пример 8.1. 20 школьникам были розданы тесты на наглядно-образное и вербальное мышление. Измерялось среднее время решения заданий теста в секундах. Психолога интересует вопрос: существует ли взаимосвязь между временем решения этих задач?

Решение: Введём переменные: X – среднее время решения наглядно-образных, Y – среднее время решения вербальных тестов. Ответ на вопрос получим с помощью критерия ранговой корреляции Спирмена. Исходные данные представлены в виде таблицы (1, 2 и 3 столбцы).

№ испытуемых п/п	X Среднее время решения наглядно-образных заданий	Y Среднее время решения вербальных заданий	R_X	R_Y	D	D^2
1	19	17	1	6	-5	25
2	32	7	5,5	1	4,5	20,25
3	33	17	7,5	6	1,5	2,25
4	44	28	17	13,5	3,5	12,25
5	28	27	3	12	-9	81
6	35	31	9	15	-6	36
7	39	20	11,5	8	3,5	12,25
8	39	17	11,5	6	5,5	30,25
9	44	35	17	16	1	1
10	44	43	17	17,5	-0,5	0,25
11	24	10	2	2	0	0
12	37	28	10	13,5	-3,5	12,25
13	29	13	4	3	1	1
14	40	43	13	17,5	-4,5	20,25
15	42	45	14,5	19,5	-5	25
16	32	24	5,5	9	-3,5	12,25
17	48	45	20	19,5	0,5	0,25
18	42	26	14,5	10,5	4	16
19	33	16	7,5	4	3,5	12,25
20	47	26	19	10,5	8,5	72,25
Сумма			**210**	**210**		**392**

Формулировка гипотез:

H_0: Корреляция между средним временем решения наглядно-образных и вербальных заданий не отличается от нуля.

H_1: Корреляция между средним временем решения наглядно-образных и вербальных заданий достоверно отличается от нуля.

<u>Алгоритм подсчёта коэффициента ранговой корреляции Спирмена:</u>

1) Переменная X – среднее время решения наглядно-образных заданий. Её значения вносятся во второй столбец таблицы. Переменная Y – среднее время решения наглядно-образных заданий. Значения вносятся в третий столбец таблицы.

2) Ранжируем значения переменной X. Ранги R_X вносятся в четвёртый столбец таблицы. Находим сумму рангов (210). Проверяем правильность ранжирования: N(N+1)\ 2 = 20·21\ 2 = 210. Ранжирование проведено верно, так как суммы рангов совпали.

3) Ранжируем значения переменной Y. Ранги R_Y вносятся в пятый столбец таблицы. Находим сумму рангов (210). Ранжирование проведено верно, так как суммы рангов совпали.

4) Подсчитываем разности D между рангами X и Y по каждой строке таблицы и заносим в шестой столбец таблицы.

5) Возводим каждую разность в квадрат: D^2. Эти значения заносим в седьмой столбец таблицы. Подсчитываем сумму квадратов (D^2) = 392.

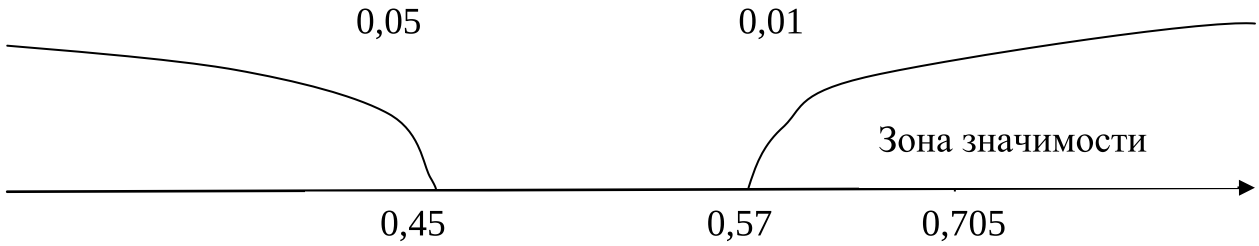
6) Рассчитываем коэффициент ранговой корреляции ρ_{xy} по формуле

$$\rho_{xy} = 1 - \frac{6 \quad (D^2)}{n\,(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 392}{20\,(400 - 1)} = 1 - 0{,}295 = \mathbf{0{,}705}$$

7) Определяем критические значения коэффициента ранговой корреляции для n = 20 по **Таблице 8**:

$\rho_{кр}$ = **0,45** ($P \leq 0{,}05$); $\rho_{кр}$ = **0,57** ($P \leq 0{,}01$).

8) Построим ось значимости. ρ_{xy} попало в зону значимости.



9) Формулируем выводы. Гипотеза H_0 отклоняется и принимается гипотеза H_1: корреляция между средним временем решения наглядно-образных и вербальных заданий достоверно отличается от нуля. Между временем решения этих задач существует высокая значимая положительная корреляция. Полученная прямо пропорциональная зависимость говорит о том, что чем выше

среднее время решения наглядно-образных задач, тем выше среднее время решения вербальных задач и наоборот.

Пример 8.2. Психолога интересует вопрос: в какой степени совпадают оценки супругов личностных качеств, имеющих определяющее значение для семейного благополучия.

Решение: Супругов просят проранжировать 7 личностных черт. Данные представлены в таблице. Для решения задачи используется коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Качества личности	**Муж (ранги)**	**Жена (ранги)**	**D**	D^2
Ответственность	7	1	6	36
Общительность	1	5	-4	16
Сдержанность	3	7	-4	16
Выносливость	2	6	-4	16
Жизнерадостность	5	4	1	1
Терпеливость	4	3	1	1
Решительность	6	2	4	16
Сумма	**28**	**28**		**102**

Формулировка гипотез:

H_0: Корреляция между оценками супругов личностных качеств, имеющих определяющее значение для семейного благополучия, не отличается от нуля.

H_1: Корреляция между оценками супругов личностных качеств, имеющих определяющее значение для семейного благополучия, достоверно отличается от нуля.

Алгоритм подсчёта коэффициента ранговой корреляции Спирмена:

1) Заполнить таблицу, включая все столбцы и строки.

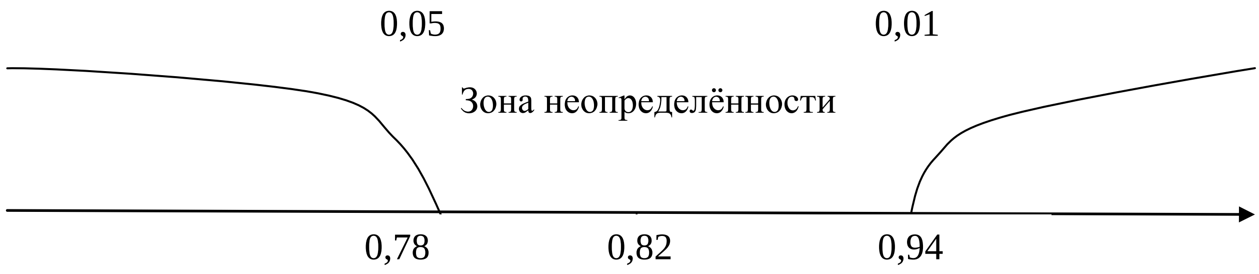
2) Рассчитать эмпирическое значение коэффициента ранговой корреляции Спирмена.

$$\rho_{xy} = 1 - \frac{6 \quad (D^2)}{n\,(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 102}{7 \times (49 - 1)} = \mathbf{-\ 0{,}82}$$

3) Найти критические значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена по **Таблице 8** для n = 7.

$\rho_{кр}$ = **0,78** ($P \leq 0{,}05$); $\rho_{кр}$ = **0,94** ($P \leq 0{,}01$).

4) Построим ось значимости. ρ_{xy} попало в зону неопределённости.



5) Формулируем вывод. Гипотеза H_0 отклоняется и принимается гипотеза H_1: корреляция между оценками супругов к личностным качествам, имеющим определяющее значение для семейного благополучия, достоверно отличается от нуля. Между оценками существует значимая отрицательная корреляция, что свидетельствует о достаточной степени рассогласованности (антагонизма) мнений супругов по данному вопросу.

8.4. Коэффициент линейной корреляции Пирсона.

Назначение и описание критерия

Коэффициент линейной корреляции Пирсона решает те же задачи, что и коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Однако данный коэффициент рассчитан на шкалу интервалов или отношений, а не на шкалу порядка. Кроме этого, предполагается, что переменные X и Y должны быть распределены нормально.

При вычислении коэффициента не используется ранжирование, поэтому его расчёт является более простым, чем коэффициента ранговой корреляции.

В общем виде формула для подсчёта коэффициента корреляции Пирсона выглядит так:

$\mathbf{r_{xy}} = \frac{x_i - x\ (y_i - y)}{(x_i - x)^2\ \ (y_i - y)^2}$, где x и y - средние значения переменных X и Y. Может быть также использована модификация этой формулы:

$$\mathbf{r_{xy}} = \frac{\mathbf{n\ \ (x_i\, y_i) - (\ \ x_i\ \ \ y_i)}}{\mathbf{(n\ \ x_i^2 - \ \ x_i\ ^2)\ (n\ \ y_i^2 - \ \ y_i\ ^2\ )}}$$

, которая не предполагает подсчёт средних значений переменных.

Критические значения коэффициента корреляции Пирсона (**Таблица 7**) рассчитываются для величины k = n – 2 при 5≤ k ≥1000. Считается, что при достаточно большом n (если n>40) распределение переменной должно быть близким к нормальному. Поэтому в этом случае можно вычислять коэффициент

Пирсона r_{xy}, а не коэффициент ранговой корреляции Спирмена ρ_{xy}, таблица критических значений которого (**Таблица 8**) предполагает $n \leq 40$.

Условия применения коэффициента линейной корреляции Пирсона

1) Сравниваемые переменные должны быть получены в интервальной шкале или шкале отношений.

2) Распределения переменных X и Y должны быть близки к нормальному.

3) Число варьирующих признаков в сравниваемых переменных должно быть одинаковым.

4) Таблицы уровней значимости для коэффициента корреляции (**Таблица 7**) рассчитаны от $n = 7$ до $n = 1000$. Оценка уровня значимости осуществляется при числе степеней свободы $k = n – 2$.

Сравнение коэффициентов корреляции можно провести, решив одну и ту же задачу различными способами. В Примере 8.1. задача решена с помощью коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Пример 8.3. – это решение той же самой задачи с помощью коэффициента линейной корреляции Пирсона.

Пример 8.3. 20 школьникам были розданы тесты на наглядно-образное и вербальное мышление. Измерялось среднее время решения заданий теста в секундах. Психолога интересует вопрос: существует ли взаимосвязь между временем решения этих задач?

Решение: Введём переменные: X – среднее время решения наглядно-образных, Y – среднее время решения вербальных тестов. Данные переменные измерены в шкале отношений. (Переменные распределены нормально. Этот факт нуждается в дополнительной проверке, которая здесь опускается). Ответ на вопрос получим с помощью критерия линейной корреляции Пирсона. Исходные данные представлены в виде таблицы.

№ испытуемых п/п	X Среднее время решения наглядно-образных заданий	Y Среднее время решения вербальных заданий	$X \times Y$	X^2	Y^2
1	19	17	323	361	289
2	32	7	224	1024	49
3	33	17	561	1089	289
4	44	28	1232	1936	784
5	28	27	756	784	729
6	35	31	1085	1225	961
7	39	20	780	1521	400
8	39	17	663	1521	289

9	44	35	1540	1936	1225
10	44	43	1892	1936	1849
11	24	10	240	576	100
12	37	28	1036	1369	784
13	29	13	377	841	169
14	40	43	1720	1600	1849
15	42	45	1890	1764	2025
16	32	24	768	1024	576
17	48	45	2160	2304	2025
18	42	26	1092	1764	676
19	33	16	528	1089	256
20	47	26	1222	2209	676
Сумма	**731**	**518**	**20.089**	**27.873**	**16.000**

Формулировка гипотез:

H_0: Корреляция между средним временем решения наглядно-образных и вербальных заданий не отличается от нуля.

H_1: Корреляция между средним временем решения наглядно-образных и вербальных заданий достоверно отличается от нуля.

Алгоритм подсчёта коэффициента корреляции Пирсона:

1) Заполняем все столбцы таблицы, рассчитываем суммы.

2) Рассчитываем эмпирическую величину коэффициента корреляции по формуле:

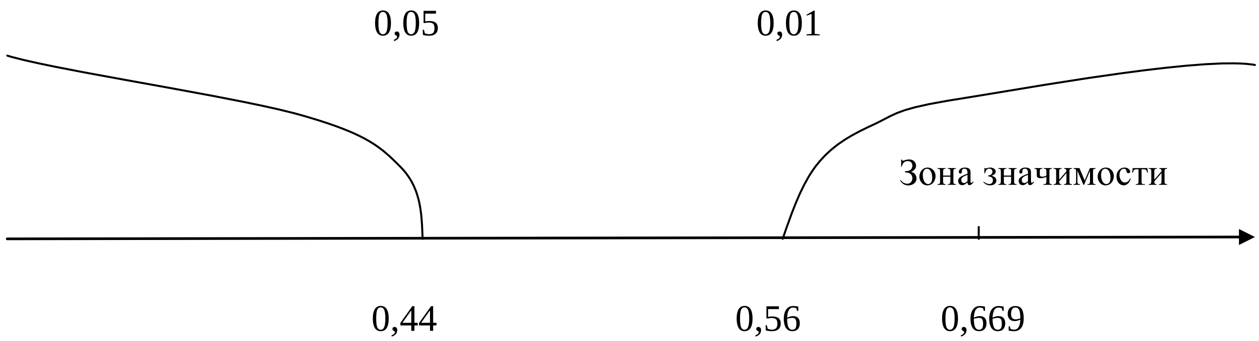
$$r_{xy} = \frac{n \quad (x_i y_i) - (\quad x_i \quad y_i)}{(n \quad x_i^2 - \quad x_i{}^2) - (n \quad y_i^2 - \quad y_i{}^2)} =$$

$$= \frac{20\times20089-731\times518}{20\times27873-731\times731 \quad 20\times16000-518\times518} = \mathbf{0{,}669}$$

3) Находим критические значения коэффициента корреляции по **Таблице 7**. Число степеней свободы: k = n – 2 = 20 – 2 = 18.

$\mathbf{r_{кр} = 0{,}44}$ ($P \leq 0{,}05$); $\mathbf{r_{кр} = 0{,}56}$ ($P \leq 0{,}01$).

4) Строим ось значимости. r_{xy} попадает в зону значимости.



5) Вывод. Отвергается H_0 и принимается H_1. Связь между временем решения наглядно-образных и вербальных задач статистически значима на 1% уровне и положительна. Полученная прямо пропорциональная зависимость говорит о том, что чем выше среднее время решения наглядно-образных задач, тем выше среднее время решения вербальных задач и наоборот.

Таким образом, подтвердился результат решения данной задачи методом ранговой корреляции Спирмена.

Вопросы для обсуждения

1. Что такое «корреляционня связь»? В чём отличие функциональной и корреляционной зависимости?
2. Какая корреляционная связь называется линейной, положительной, отрицательной, нулевой?
3. Каковы основные коэффициенты корреляции и основание для их классификации? Какова область значений коэффициента корреляции?
4. Какова общая классификация корреляционных связей?
5. Какова частная классификация корреляционных связей?
6. Какова корреляционная связь, если коэффициент корреляции:
а) $r = 0{,}55$;
б) $r = 0{,}05$;
в) $r = 0{,}55$ ($P \leq 0{,}05$);
г) $r = 0{,}75$ ($P \leq 0{,}01$);
д) $r = 0{,}75$ ($P \leq 0{,}001$).
7. Каково назначение рангового коэффициента корреляции Спирмена? Каков смысл данного метода? Какова формулировка гипотез?
8. Каковы условия применения рангового коэффициента корреляции Спирмена?
9. Каков алгоритм подсчёта рангового коэффициента корреляции Спирмена?
10. Каковы основные типы задач, решаемые методом ранговой корреляции?
11. Каково назначение коэффициента линейной корреляции Пирсона? Каков смысл данного метода? Какова формулировка гипотез?
12. Каковы условия применения коэффициента линейной корреляции Пирсона?
13. Каков алгоритм подсчёта коэффициента линейной корреляции Пирсона? 14. Проведите сопоставительный анализ коэффициентов корреляции Спирмена и Пирсона.
15. Вы хотите выявить корреляционную связь между уровнем самоактуализации и уровнем профессионального выгорания педагогов школы. В вашей выборке 35 педагогов. Какой статистический метод вы примените?

16. Что необходимо изменить в условиях вашего исследования, чтобы можно было применить другой метод выявления корреляционной связи?
17. Вы выявили, что существует корреляционная связь между уровнем развития абстрактного мышления и возрастом учеников. Можно ли назвать данную связь зависимостью? Что, в таком случае, будет являться независимой переменной, а что зависимой?

ТЕМА №9. Параметрические критерии различий

9.1. Понятие о параметрических критериях.

Критерии носят название «параметрические», потому что в формулу их расчёта включаются такие параметры выборки как среднее, дисперсия и др. Таким образом, необходимо, чтобы распределение выборочных значений было близко к нормальному.

Как правило, в психологических исследованиях чаще всего применяются два параметрических критерия.

1. ***t-критерий Стьюдента.*** Направлен на оценку различий величин средних X и Y двух выборок X и Y, которые распределены по нормальному закону. Одним из главных достоинств критерия является широта его применения. Он может быть использован для сопоставления средних у связных и несвязных выборок, причём выборки могут быть не равными по величине.

2. ***F-критерий Фишера.*** Позволяет сравнивать величины выборочных дисперсий двух рядов наблюдений. Сравниваемые выборки должны быть распределены по нормальному закону. Измерение может быть произведено в шкале интервалов или отношений.

В данном пособии рассматривается t-критерий Стьюдента применительно к случаям связных и несвязных выборок. Критические значения (для уровней значимости 0,05, 0,01 и 0,001) критерия приведены в **Таблице 9** раздела «Таблицы критических значений». Критические значения зависят от числа степеней свободы k, рассчитываемого по определённому правилу.

9.2. t-критерий Стьюдента.

Назначение и описание критерия

Критерий предназначен для сопоставления двух выборок, распределённых по нормальному закону. Выборки могу быть связными или несвязными, равными по величине или неравными. t-критерий Стьюдента основан на оценке различий величин средних двух выборок. Формула для расчёта по t-критерию Стьюдента в общем виде такова:

$$\mathbf{t_{эмп}} = \frac{|X - Y|}{\mathbf{Sd}},$$

где $|X - Y|$ - модуль разности средних арифметических переменных X и Y;

Sd = $\sqrt{S_x^2 + S_y^2}$.

В общем виде формула для расчёта Sd выглядит следующим образом:

$$\mathbf{Sd} = \sqrt{\frac{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \cdot \frac{(n_1 + n_2)}{(n_1 \cdot n_2)}},$$

где n_1 и n_2 – объёмы выборок X и Y;

$(x_i - x)^2$ и $(y_i - y)^2$ - квадраты отклонений значений величин от средней.

Критические значения критерия зависят от числа степеней свободы, которое рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{k = n_1 + n_2 - 2}$$

Условия применения t-критерия Стьюдента

1) Измерение может быть проведено в шкале интервалов или отношений.

2) Сравниваемые выборки должны быть распределены по нормальному закону.

Алгоритм подсчёта t-критерия Стьюдента

1) Убедиться, что переменные X и Y распределены нормально (или их распределение близко к нормальному).

2) Расположить исходные данные в виде таблицы. В первом столбце указана нумерация, во втором и третьем – числовые значения переменных X и Y.

3) По каждой переменной подсчитываются суммы значений и среднее арифметическое. Находится модуль разности средних значений.

4) Вычисляются по каждой переменной отклонения от среднего и записываются в 4-ом и 5-ом столбцах. Проверяется правильность вычисления (сумма отклонений от среднего должна равняться нулю).

5) Вычисляются квадраты отклонений от среднего и записываются в 6-ом и 7-ом столбцах.

6) Находятся суммы квадратов отклонений по каждой переменной.

7) Подсчитывается значение величины Sd по формуле:

$$\mathbf{Sd}= \sqrt{\frac{(x_i-x)^2+\ (y_i-y)^2}{(n_1+n_2-2)}\cdot\frac{(n_1+n_2)}{(n_1 \cdot n_2)}}$$

8) Вычисляется t-критерий Стьюдента по формуле:

$$\mathbf{t}_{эмп}=\frac{|X-Y|}{\mathbf{Sd}}$$

9) Рассчитывается число степеней свободы:

$$\mathbf{k = n_1 + n_2 - 2}$$

10) По **Таблице 9** приложения находятся критические значения t критерия для данного k, соответствующие уровням значимости 0,05; 0,01 и 0,001.

11) Строится ось значимости, наносятся критические и эмпирическое значения критерия. Определяется зона попадания $t_{эмп}$.

12) Формулируются выводы.

Пример 9.1. Психолог проверял время сложной сенсомоторной реакции выбора (в мс) в контрольной и экспериментальной группах. В экспериментальную группу (X) входили 9 спортсменов высокой квалификации. Контрольной группой (Y) являлись 8 человек, не занимающихся спортом активно. Психолог проверяет гипотезу о том, что средняя скорость сложной сенсомоторной реакции выбора у спортсменов выше, чем эта же величина у людей, не занимающихся спортом.

Решение: Результаты эксперимента представлены в виде таблицы.

№	**Группы**		**Отклонения от среднего**		**Квадраты отклонений**	
	X	**Y**	(x_i-x)	(y_i-y)	$(x_i-x)^2$	$(y_i-y)^2$
1	504	580	- 22	- 58	484	3369
2	560	692	34	54	1156	2916
3	420	700	- 106	62	11236	3844
4	600	621	74	- 17	5476	289
5	580	640	54	2	2916	4
6	530	561	4	- 77	16	5929
7	490	680	- 36	42	1296	1764
8	580	630	54	- 8	2916	64
9	470	-	- 56	-	3136	-
Сумма **Среднее**	4734 526	5104 638	0	0	28632	18179

Формулировка гипотез:

H_o: Средняя скорость сложной сенсомоторной реакции выбора в экспериментальной группе не выше, чем в контрольной.

H_1: Средняя скорость сложной сенсомоторной реакции выбора в экспериментальной группе выше, чем в контрольной.

Алгоритм подсчёта критерия t:

1*) Мы должны убедиться, что переменные X и Y распределены нормально, или их распределение согласуется с нормальным. (Установление данного факта выходит за рамки данного пособия. При необходимости можно использовать учебник Е.В. Сидоренко).

2) Находим суммы и средние значения в экспериментальной и контрольной группах.

а) В экспериментальной группе среднее арифметическое: $\frac{4734}{9}$ = 526.

б) В контрольной группе среднее арифметическое: $\frac{5104}{8}$ = 638.

в) Разница по абсолютной величине между средними:

$$|X - Y| = |526 – 638| = \mathbf{112}.$$

3) Заполняем 4-ый столбец таблицы. Для этого от каждого значения X (второй столбец) вычитаем среднее значение (526). Результат записываем в соответствующую строку. Если расчёты проведены без ошибок, сумма всех значений 4-го столбца должна равняться нулю.

4) Аналогично заполняем 5-ый столбец, работая со значениями переменной Y (третий столбец) и соответствующим средним значением (638).

5) Заполняем 6-ой столбец таблицы. Для этого каждое значение 4-го столбца возводим в квадрат. Сумма всех значений 6-го столбца записывается в последней строке (28632).

6) Аналогично заполняется 7-ой столбец на основании данных пятого столбца. Сумма значений данного столбца составит 18179.

7) Подсчитывается значение величины Sd по формуле:

$$\text{Sd}=\sqrt{\frac{(x_i-x)^2+\ (y_i-y)^2}{(n_1+n_2-2)}\cdot\frac{(n_1+n_2)}{(n_1\cdot n_2)}}=\sqrt{\frac{28632+18179}{9+8-2}\cdot\frac{9+8}{9\cdot 8}}=\sqrt{736{,}8}=\mathbf{27{,}14}$$

8) Вычисляем t-критерий Стьюдента по формуле:

$$t_{эмп}=\frac{|X-Y|}{\text{Sd}}=\frac{112}{27{,}14}=\mathbf{4{,}1}$$

9) Рассчитываем число степеней свободы:

$$k = 9 + 8 – 2 = \mathbf{15}$$

10) По **Таблице 9** приложения находим критические значения t критерия для k = 15:

$t_{кр}$ = **2,13** (для P≤ 0,05); $t_{кр}$ = **2,95** (для P≤ 0,01); $t_{кр}$ = **4,07** (для P≤ 0,001).

11) Строим ось значимости, наносим критические и эмпирическое значения критерия. В нашем случае $t_{эмп}$= 4,1 попало в зону значимости правее $t_{кр}$ = 4,07 (для P≤ 0,001).

12) Делаем вывод. Гипотеза H_0 о сходстве отклоняется и на 0,1% уровне значимости принимается альтернативная гипотеза H_1 о различии между экспериментальной и контрольной группами.

Таким образом, обнаруженные психологом различия между экспериментальной и контрольной группами значимы более чем на 0,1% уровне. Иначе говоря, средняя скорость сложной сенсомоторной реакции выбора в группе спортсменов существенно выше, чем в группе людей, не занимающихся спортом активно.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

№1. В классе 25 учащихся. Из них 10 девочек, а остальные – мальчики. Подсчитать процентное содержание девочек и мальчиков в классе.

№2. Во время экзамена в группе из 20 студентов получено 4 пятёрки, 10 четвёрок, а остальные студенты получили тройки. Подсчитать процентное содержание различных оценок в группе.

№3. Во время эксперимента подбрасывалась монетка 30 раз. В результате 14 раз выпал «орел», а в остальных случаях – «решка». Подсчитать процентное содержание выпадений «орла» и «решки» в эксперименте.

№4. Проранжировать показатели в таблице. Сделать проверку.

№ испытуемых п/п	Показатели зрительной памяти	Ранги
1	3	
2	9	
3	6	
4	4	
5	5	
6	6	
7	4	
8	4	
9	8	

№5. Проранжировать показатели в таблице. Сделать проверку.

№ испытуемых п/п	Показатели внимания	Ранги
1	38	
2	25	
3	27	
4	25	
5	31	
6	34	
7	39	
8	38	
9	23	
10	25	

№6. Проранжировать показатели в таблице. Сделать проверку.

№ испытуемых п/п	Показатели тревожности	Ранги
1	2	
2	5	
3	7	
4	2	
5	3	
6	5	
7	1	
8	5	
9	0	

№7. Составить статистический ряд для следующих значений по выборке.:
10, 15, 34, 17, 15, 26, 15, 30, 17, 15, 17, 26, 17, 25, 28, 20, 17, 25, 20, 15.
Найти числовые характеристики распределения.

№8. Составить статистический ряд для следующих значений по выборке:
4, 0, 1, 5, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 5, 4, 2, 1, 4, 5, 0, 2, 2, 1.
Найти числовые характеристики распределения.

№9. Составить статистический ряд для следующих значений по выборке:
13, 15, 11, 13, 17, 20, 13, 25, 11, 11, 17, 25, 20, 11, 13, 15, 13, 20, 15, 11.
Найти числовые характеристики распределения.

№10. Составить статистический ряд для следующих значений по выборке:
12, 4, 10, 12, 6, 9, 6, 8, 12, 10, 10, 4, 6, 10, 12, 9, 9, 4, 10, 12.
Найти числовые характеристики распределения.

№11. Составить статистический ряд для следующих значений по выборке:
54, 56, 59, 50, 57, 55, 50, 54, 59, 50, 56, 50, 54, 54, 50, 55, 56, 59, 55, 54.
Найти числовые характеристики распределения.

№12. Составить статистический ряд для следующих значений по выборке:
107, 98, 105, 103, 100, 98, 99, 100, 99, 98, 105, 103, 99, 100, 99, 105, 103, 100, 105, 100.

№13. Составить статистический ряд для следующих значений по выборке:
25, 21, 29, 21, 26, 31, 21, 35, 31, 29, 25, 35, 21, 31, 35, 21, 25, 21, 35, 35.

Найти числовые характеристики распределения.

№14. Получив отрицательный результат, психолог внёс в способ тренинга соответствующие коррективы. Он снова выдвигает гипотезу: улучшенный способ тренинга позволяет эффективно снижать уровень тревожности испытуемых. Для проверки этого утверждения психолог провёл аналогичный эксперимент, но уже на большей выборке испытуемых. В таблице приведены результаты. (Применить критерий знаков G).

№ испытуемых п/п	**Уровень тревожности «до» тренинга**	**Уровень тревожности «после» тренинга**	**Сдвиг**
1	24	22	
2	12	12	
3	40	23	
4	30	31	
5	40	32	
6	35	24	
7	40	40	
8	32	12	
9	40	22	
10	24	21	
11	33	30	
12	38	26	
13	39	38	
14	25	23	
15	28	22	
16	36	22	
17	37	36	
18	32	38	
19	25	25	

№15. Психолог выясняет вопрос, будут ли обнаружены различия в успешности решения двух, различных по сложности мыслительных задач. Для решения этого вопроса группа из 120 учащихся решала оба типа задач. Полученные результаты представлены в таблице.

		Первая задача		**Сумма**
		Решена верно	**Решена неверно**	
Вторая задача	Решена верно	A = 50	B = 31	81
	Решена неверно	C = 19	D = 20	39
	Сумма	69	51	120

Решить задачу, используя критерий Макнамары.

№16. Используя тест Векслера психолог определил показатели интеллекта у двух групп учащихся из городской и сельской школы. Его интересует вопрос – будут ли обнаружены статистически значимые различия в показателях интеллекта, если в городской выборке 11 детей, а в сельской 12? Полученные показатели:
- в городской выборке: 96, 104, 120, 120, 126, 134, 130, 120, 120, 104, 100;
- в сельской выборке: 120, 110, 102, 96, 84, 82, 76, 82, 88, 100, 104, 118. Применить U-критерий Манна – Уитни.

№17. Самостоятельно провести «исследование». Выбрать 2 различные выборки (по качеству и количеству). Например, 5 юношей и 7 девушек. Или 6 младших школьников и 4 бабушки и т.д.

Всем испытуемым предложить назвать любое число от 1 до 5. Результаты «исследования» записать.

Проверить различие между выборками по признаку «любимое число» с помощью U-критерия.

№18. В двух школах района психолог выяснял мнения учителей об организации психологической службы в школе. Психолога интересовал вопрос: в какой школе психологическая служба поставлена лучше? Учителя давали ответы по номинативной шкале – нравится (да), не нравится – (нет). В первой школе было опрошено 20 учителей (15 ответили «да», 5 – «нет»). Во второй школе – 15 учителей (7 – «да», 8 – «нет»).

№19. Психолог сравнивает два эмпирических распределения, в каждом из которых было обследовано 200 человек по тесту интеллекта. Вопрос: различаются ли между собой эти два распределения? Эмпирические данные представлены в виде таблицы:

Уровни интеллекта	**Частоты**	
	1 гр	**2 гр**
60-69	1	1
70-79	5	3
80-89	17	7
90-99	45	22
100-109	70	88
110-119	51	69
120-129	10	7
130-139	1	2
140-149	0	1

№20. Психолог сравнивает два эмпирических распределения, в каждом из которых было обследовано по тесту интеллекта разное количество испытуемых. Вопрос: различаются ли между собой эти два распределения? Эмпирические данные представлены в виде таблицы:

Уровни интеллекта	**Частоты**	
	1 гр	**2 гр**
60-69	1	0
70-79	8	0
80-89	23	1
90-99	30	11
100-109	38	18
110-119	12	14
120-129	7	3
130-139	4	4
140-149	1	1
150-159	0	1

№21. Влияет ли уровень интеллекта на профессиональные достижения? Для решения этой задачи 90 человек оценили по степени их профессиональных достижений и по уровню интеллекта. При разбиении на уровни (градации признака) по обоим признакам было взято три уровня. Все эмпирические данные (частоты) представлены в таблице.

IQ	**Оценка профессиональных достижений**		
	Ниже среднего	**Средняя**	**Выше среднего**
Ниже среднего	20	5	5
Средний	5	15	10
Выше среднего	5	20	5

№22. Будет ли уровень тревожности у подростков-сирот более высоким, чем у их сверстников из полных семей?

Для решения этой задачи психолог проводил анализ выраженности уровня тревожности в группе сирот и в группе детей из полных семей при помощи опросник Тейлора. 40 баллов и выше рассматривались как показатель очень высокого уровня тревоги. В первой группе из 10 человек высокий уровень тревожности наблюдался у 7 испытуемых. Во второй группе из 13 человек – у 3 испытуемых.

№23. Психологом изучалась проблема психологических барьеров при обращении в службу знакомств у мужчин и женщин. В эксперименте участвовали 17 мужчин и 23 женщины в возрасте от 17 до 45 лет (средний возраст 32,5) года. Испытуемые должны были отметить на отрезке точку, соответствующую интенсивности внутреннего сопротивления, которое им пришлось преодолеть, чтобы обратиться в службу знакомств. Длина отрезка, отражающая максимально возможное сопротивление, составляла 100 мм. В таблице приведены показатели интенсивности сопротивления, выраженные в миллиметрах.

Можно ли утверждать, что мужчинам приходится преодолевать субъективно более мощное сопротивление?

Группа 1 – мужчины (n_1 = 17)		**Группа 2 – женщины (n_2 = 23)**	
1	81	1	70
2	80	2	66
3	73	3	66
4	72	4	63
5	72	5	63
6	69	6	61
7	69	7	60
8	65	8	54
9	65	9	47
10	62	10	43
11	60	11	41
12	54	12	40
13	54	13	39
14	43	14	38
15	30	15	38
16	26	16	35
17	26	17	30
		18	27
		19	25
		20	23
		21	17
		22	10
		23	9

№ 24. 12 участников комплексной программы тренинга партнёрского общения, продолжавшегося 7 дней, дважды оценивали у себя уровень владения тремя важнейшими коммуникативными навыками. Первое измерение производилось в первый день тренинга, второе – в последний. Участники должны были также наметить для себя реально достижимый, с их точки зрения, индивидуальный идеал в развитии каждого из навыков. Все измерения производились по 10-балльной шкале. Данные представлены в таблице.

Код имени участника		1 измерение						2 измерение					
		Активное слушание		Снижение эмоционального напряжения		Аргументация		Активное слушание		Снижение эмоционального напряжения		Аргументация	
		Реал	Идеал	Реал	Идеал	Реал	Идеал	Реал	Идеал	Реал	Идеал	Реал	Идеал
1	И.	6	9	5	8	5	8	7	10	6	10	7	9
2	Я.	3	5	1	3	4	5	5	7	4	6	5	7
3	Ин.	4	6	4	6	5	8	8	10	7	8	6	8
4	Р.	4	6	4	5	5	7	6	7	5	7	5	7
5	К.	6	9	4	9	4	8	4	10	5	10	5	10
6	Н.	6	8	5	8	3	6	8	9	7	9	6	8
7	Е.	3	8	5	10	2	6	7	8	8	10	5	7
8	Ле.	6	9	5	8	3	7	5	8	7	10	5	9
9	Ли.	6	8	5	9	5	9	7	8	6	9	5	9
10	Т.	5	8	6	9	5	8	7	10	7	10	6	10
11	Ет.	6	8	6	10	3	9	5	10	4	9	3	9
12	Б.	6	8	3	10	4	7	7	9	6	8	5	8

Вопросы:

1. Ощущаются ли участниками достоверные сдвиги в уровне владения каждым из трёх навыков после тренинга?
2. Произошли ли по трём группам навыков разные сдвиги, или эти сдвиги для разных навыков примерно одинаковы?
3. Уменьшается ли расхождение между «идеальным» и реальным уровнями владения навыками после тренинга?
4. Произошли ли под влиянием тренинга достоверные изменения в представлении участников об «идеальном» владении навыками?

№ 25. Наблюдателем установлено, что 51 человек из 70-ти выбрал правую дорожку при переходе из точки А в точку Б, а 19 человек – левую. Можно ли утверждать, что правая дорожка предпочиталась достоверно чаще?

№ 26. В тренинге профессиональных наблюдателей допускается, чтобы наблюдатель ошибался в оценке возраста ребёнка не более, чем на 1год в ту или иную сторону. Наблюдатель допускается к работе, если он совершает не более 15% ошибок, превышающих отклонение на 1 год. Наблюдатель Н допустил одну ошибку в 50 попытках, а наблюдатель К – 15 ошибок в 50 попытках. Достоверно ли отличаются эти результаты от контрольной величины?

№ 27. В эксперименте испытуемый должен произвести выбор левого или правого стола с заданиями. В инструкции психолог подчёркивает, что задания на обоих столах одинаковы. Из 150 испытуемых правый стол выбрали 98 человек, а левый 52. Можно ли утверждать, что подобный выбор левого или правого стола равновероятен или он обусловлен какой-либо причиной, неизвестной психологу?

№ 28. Психолог выясняет, как связаны между собой индивидуальные показатели готовности к школе, полученные до начала обучения в школе у 11 первоклассников и их средняя успеваемость в конце учебного года. Для решения этой задачи были проранжированы, во-первых, значения показателей школьной готовности, полученные при поступлению в школу, и, во-вторых, итоговые показатели успеваемости в конце года у этих же учащихся в среднем. (Результаты представлены в таблице).

№ учащихся п/п	Ранги показателей школьной готовности	Ранги среднегодовой успеваемости
1	3	2
2	5	7
3	6	8
4	1	3
5	4	4
6	11	6
7	9	11
8	2	1
9	8	10
10	7	5
11	10	9

№ 29. Провести самостоятельное исследование на сравнение двух несвязных выборок по проявлению одного и того же признака. Определить исследуемый признак, необходимый объём выборок, адекватный метод математической статистики; осуществить эмпирическое исследование, математическую обработку результатов; сформулировать выводы.

Если возможно применение нескольких математических методов при решении данной задачи, указать все, а задачу решить одним (любым из указанных). Пояснить, почему данный метод оказался предпочтительным.

№ 30. Провести самостоятельное исследование на выявление связи между двумя признаками в одной и той же выборке.

№ 31. Психолог поставил цель выявить, существует ли связь между самоактуализацией педагогов и уровнем профессионального «выгорания». Исследована выборка педагогов одной школы в составе 16 учителей.

Самоактуализация изучалась по тесту САМОАЛ по 10 субшкалам; профессиональное «выгорание» - по методике, адаптированной для педагогических специальностей. Согласно ей феномен профессионального «выгорания» может быть представлен следующими показателями: эмоциональное истощение, деперсонализация, редукция личных достижений. В таблице приведены данные по выборке по следующим показателям: субшкалы теста САМОАЛ (взгляд на природу человека; креативность; автономность; аутосимпатия) и показатели профессионального «выгорания». Определить, между какими шкалами существует связь. Как можно это интерпретировать?

№ педагога п/п	**Самоактуализация (субшкалы САМОАЛ)**				**Профессиональное «выгорание»**		
	Взгляд на прир. чел.	Креатив-ность	Автоном-ность	Аутосим-патия	Эмоц. истощ.	Деперс.	Редукция личн. достиж.
1	0,90	0,27	0,27	0,20	31	7	23
2	0,30	0,40	0,13	0,20	39	21	26
3	0,60	0,47	0,13	0,13	26	8	30
4	0,10	0,60	0,27	0,33	32	14	31
5	0,70	0,47	0,33	0,33	28	12	31
6	0,30	0,53	0,27	0,27	24	12	41
7	0,40	0,67	0,33	0,33	33	16	31
8	0,50	0,60	0,27	0,40	28	7	33
9	0,60	0,53	0,40	0,67	40	17	34
10	0,50	0,53	0,60	0,67	13	7	24
11	0,40	0,87	0,53	0,67	12	4	39
12	0,60	0,47	0,60	0,53	19	3	31
13	0,70	0,67	0,67	0,47	11	7	39
14	0,60	0,60	0,40	0,40	29	10	30
15	0,80	0,67	0,60	0,53	15	1	35
16	0,40	0,80	0,33	0,67	20	3	35

№ 32. Представить план эмпирического (экспериментального) исследования и соответствующие методы математической статистики для исследований по следующим темам:

1) Развитие эмпатии у детей старшего дошкольного возраста.

2) Фрустрационные реакции у детей старшего дошкольного возраста с повышенным уровнем тревожности.

3) Особенности эмоционального интеллекта у детей старшего дошкольного возраста.

4) Особенности страхов у мальчиков и девочек в старшем дошкольном возрасте.

5) Особенности психологического здоровья детей младшего школьного возраста из полных и неполных семей.

6) Взаимосвязь социального интеллекта и успеваемости у младших школьников.

7) Коммуникативные особенности младших школьников с признаками компьютерной зависимости.

8) Взаимосвязь самооценки младшего школьника и типа семейного воспитания.

9) Половозрастные особенности творческого мышления у младших школьников.

10) Профилактика социально-психологической дезадаптации младших школьников при переходе в среднюю школу.

11) Психологическая готовность к школе у детей из семей с разным образовательным уровнем родителей.

12) Сравнительный анализ эмоционально-волевой сферы детей младшего школьного возраста.

13) Гендерные различия в отношении к будущему родительству у старших подростков.

14) Удовлетворенность отношениями в различных формах брака.

15) Психологические особенности неуспевающих студентов.

16) Взаимосвязь мотивации достижения и социального интеллекта у старшеклассников.

17) Психологическая помощь учителям с симптомами эмоционального выгорания.

18) Эмоциональный интеллект как фактор профессионального становления сотрудников организации.

19) Взаимосвязь личностной тревожности и особенностей мышления подростков.

20) Особенности акцентуаций характера у подростков из неполных семей.

21) Методы исследования творческого мышления у старших дошкольников.

22) Взаимосвязь индивидуальных особенностей ребенка и проявлений капризов в детском саду.

23) Особенности психологической готовности к школе у детей с разным профилем межполушарной асимметрии.

№ 33. Сформулировать темы курсовых работ по психологии (педагогике), в которых предполагается использование следующего метода математической статистики:

1) φ-критерий Фишера.
2) T-критерий Вилкоксона.
3) ρ коэффициент Спирмена.
4) U-критерий Манна – Уитни.
5) G-критерий знаков.
6) χ^2 Пирсона.
7) t-критерий Стьюдента.

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

1. Непараметрические критерии для связных выборок. Критерий Фридмана.
2. Непараметрические критерии для связных выборок. Критерий тенденций Пейджа.
3. Непараметрические критерии для связных выборок. Критерий Макнамары.
4. Непараметрические критерии для несвязных выборок. Критерий тенденций Джонкира.
5. Геометрическая интерпретация углового преобразования Фишера.
6. Критерий Колмогорова – Смирнова.
7. Параметрические критерии различий. t-критерий Стьюдента.
8. Параметрические критерии различий. F-критерий Фишера.
9. Многофункциональные критерии. Биномиальный критерий m.
10. Расчёт уровней значимости коэффициентов корреляции.
11. Расчёт рангового коэффициента корреляции Спирмена в случае равных рангов.
12. Коэффициент корреляции «φ».
13. Бисериальный и рангово-бисериальный коэффициенты корреляции.
14. Коэффициент корреляции τ Кендалла.
15. Корреляционное отношение Пирсона η.
16. Однофакторный дисперсионный анализ для несвязных выборок.
17. Однофакторный дисперсионный анализ для связных выборок.
18. Критерии дисперсионного анализа. Критерий Линка и Уоллеса.
19. Критерии дисперсионного анализа. Критерий Немени.
20. Двухфакторный дисперсионный анализ для несвязных выборок.
21. Двухфакторный дисперсионный анализ для связных выборок.
22. Основные понятия и смысл регрессионного анализа.
23. Понятие о факторном анализе и его применении в психологии.
24. История создания и применения в психологических исследованиях математических методов.

ТАБЛИЦЫ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ

Таблица 1.

Критические значения критерия знаков G

n	p		n	p		n	p		n	p	
	0,05	**0,01**		**0,05**	**0,01**		**0,05**	**0,01**		**0,05**	**0,01**
5	0	-	**27**	8	7	**49**	18	15	**92**	37	34
6	0	0	**28**	8	7	**50**	18	16	**94**	38	35
7	0	0	**29**	9	7	**52**	19	17	**96**	39	36
8	1	0	**30**	10	8	**54**	20	18	**98**	40	37
9	1	0	**31**	10	8	**56**	21	18	**100**	41	37
10	1	0	**32**	10	8	**58**	22	19	**110**	45	42
11	2	1	**33**	11	9	**60**	23	20	**120**	50	46
12	2	1	**34**	11	9	**62**	24	21	**130**	55	51
13	3	1	**35**	12	10	**64**	24	22	**140**	59	55
14	3	2	**36**	12	10	**66**	25	23	**150**	64	60
15	3	2	**37**	13	10	**68**	26	23	**160**	69	64
16	4	2	**38**	13	11	**70**	27	24	**170**	73	69
17	4	3	**39**	13	11	**72**	28	25	**180**	78	73
18	5	3	**40**	14	12	**74**	29	26	**190**	83	78
19	5	4	**41**	14	12	**76**	30	27	**200**	87	83
20	5	4	**42**	15	13	**78**	31	28	**220**	97	92
21	6	4	**43**	15	13	**80**	32	29	**240**	106	101
22	6	5	**44**	16	13	**82**	33	30	**260**	116	110
23	7	5	**45**	16	14	**84**	33	30	**280**	125	120
24	7	5	**46**	16	14	**86**	34	31	**300**	135	129
25	7	6	**47**	17	15	**88**	35	32			
26	8	6	**48**	17	15	**90**	36	33			

Таблица 2.

Критические значения критерия Т – Вилкоксона

n	p		n	p	
	0,05	**0,01**		**0,05**	**0,01**
5	0	-	**28**	130	101
6	2	-	**29**	140	110
7	3	0	**30**	151	120
8	5	1	**31**	163	130
9	8	3	**32**	175	140
10	10	5	**33**	187	151
11	13	7	**34**	200	162
12	17	9	**35**	213	173
13	21	12	**36**	227	185
14	25	15	**37**	241	198
15	30	19	**38**	256	211
16	35	23	**39**	271	224
17	41	27	**40**	286	238
18	47	32	**41**	302	252
19	53	37	**42**	319	266
20	60	43	**43**	336	281
21	67	49	**44**	353	296
22	75	55	**45**	371	312
23	83	62	**46**	389	328
24	92	69	**47**	407	345
25	100	76	**48**	426	362
26	110	84	**49**	446	379
27	119	92	**50**	466	397

Таблица 3.

Критические значения критерия U Манна-Уитни

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2	**p = 0,05**																		
3	-	0																	
4	-	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	11													
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
p = 0,01																			
5	-	-	0	1															
6	-	-	1	2	3														
7	-	0	1	3	4	6													
8	-	0	2	4	6	7	9												
9	-	1	3	5	7	9	11	14											
10	-	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	-	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	-	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

Продолжение таблицы 3.

p = 0,05

n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
21	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146	154
22	20	28	36	44	52	60	69	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154	162
23	21	29	37	46	55	63	72	81	90	99	107	116	125	134	143	152	161	170
24	22	31	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179
25	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177	187
26	24	33	43	53	62	72	82	93	103	113	123	133	143	154	164	174	185	195
27	25	35	45	55	65	75	86	96	107	118	128	139	150	160	171	182	193	203
28	26	36	47	57	68	79	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200	212
29	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	139	150	162	173	185	196	208	220
30	28	39	50	62	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
31	29	41	52	64	76	88	100	112	124	137	149	161	174	186	199	211	224	236
32	30	42	54	66	78	91	103	116	129	141	154	167	180	193	206	219	232	245
33	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	173	186	199	213	226	239	253
34	32	45	58	71	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247	261
35	33	46	59	73	86	100	114	128	142	156	170	184	198	212	226	241	255	269
36	35	48	61	75	89	103	117	132	146	160	175	189	204	219	233	248	263	278
37	36	49	63	77	92	106	121	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271	286
38	37	51	65	79	94	109	124	139	155	170	185	201	216	232	247	263	278	294
39	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286	302
40	39	53	69	84	100	115	131	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294	311

p = 0,01

n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
21	10	16	22	29	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	113	120	127
22	10	17	23	30	37	45	52	59	66	74	81	89	96	104	111	119	127	134
23	11	18	25	32	39	47	55	62	70	78	86	94	102	109	117	125	133	141
24	12	19	26	34	42	49	57	66	74	82	90	98	107	115	123	132	140	149
25	12	20	27	35	44	52	60	69	77	86	95	103	112	121	130	138	147	156
26	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	99	108	117	126	136	145	154	163
27	14	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	132	142	151	161	171
28	14	23	32	41	50	59	69	78	88	98	108	118	128	138	148	158	168	178
29	15	24	33	42	52	62	72	82	92	102	112	123	133	143	154	164	175	185
30	15	25	34	44	54	64	75	85	95	106	117	127	138	149	160	171	182	192
31	16	26	36	46	56	67	77	88	99	110	121	132	143	155	166	177	188	200
32	17	27	37	47	58	69	80	91	103	114	126	137	149	160	172	184	195	207
33	17	28	38	49	60	72	83	95	106	118	130	142	154	166	178	190	202	214
34	18	29	40	51	62	74	86	98	110	122	134	147	159	172	184	197	209	222
35	19	30	41	53	64	77	89	101	114	126	139	152	164	177	190	203	216	229
36	19	31	42	54	67	79	92	104	117	130	143	156	170	183	196	210	223	236
37	20	32	44	56	69	81	95	108	121	134	148	161	175	189	202	216	230	244
38	21	33	45	58	71	84	97	111	125	138	152	166	180	194	208	223	237	251
39	21	34	46	59	73	86	100	114	128	142	157	171	185	200	214	229	244	258
40	22	35	48	61	75	89	103	117	132	146	161	176	191	206	221	236	251	266

Таблица 4.

Критические значения критерия Q Розенбаума

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
P=0,05																
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	7	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7
P = 0,01																
n	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9					
22	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9

Таблица 5.

Критические значения критерия χ^2 Пирсона

ν	**p**		**ν**	**p**		**ν**	**p**	
	0,05	**0,01**		**0,05**	**0,01**		**0,05**	**0,01**
1	3,841	6,635	**35**	49,802	57,342	**69**	89,391	99,227
2	5,991	9,210	**36**	50,998	58,619	**70**	90,631	100,425
3	7,815	11,345	**37**	52,192	59,892	**71**	91,670	101,621
4	9,488	13,277	**38**	53,384	61,162	**72**	92,808	102,816
5	11,070	15,086	**39**	54,572	62,428	**73**	93,945	104,010
6	12,592	16,812	**40**	55,758	63,691	**74**	95,081	105,202
7	14,067	18,475	**41**	56,942	64,950	**75**	96,217	106,393
8	15,507	20,090	**42**	58,124	66,206	**76**	97,351	107,582
9	16,919	21,666	**43**	59,304	67,459	**77**	98,484	108,771
10	18,307	23,209	**44**	60,481	68,709	**78**	99,617	109,958
11	19,675	24,725	**45**	61,656	69,957	**79**	100,749	111,144
12	21,026	26,217	**46**	62,830	71,201	**80**	101,879	112,329
13	22,362	27,688	**47**	64,001	72,443	**81**	103,010	113,512
14	23,685	29,141	**48**	65,171	73,683	**82**	104,139	114,695
15	24,996	30,578	**49**	66,339	74,919	**83**	105,267	115,876
16	26,296	32,000	**50**	67,505	76,154	**84**	106,395	117,057
17	27,587	33,409	**51**	68,669	77,386	**85**	107,522	118,236
18	28,869	34,805	**52**	69,832	78,616	**86**	108,648	119,414
19	30,144	36,191	**53**	70,993	79,843	**87**	109,773	120,591
20	31,410	37,566	**54**	72,153	81,069	**88**	110,898	121,767
21	32,671	38,932	**55**	73,311	82,292	**89**	112,022	122,942
22	33,924	40,289	**56**	74,468	83,513	**90**	113,145	124,116
23	35,172	41,638	**57**	75,624	84,733	**91**	114,268	125,289
24	36,415	42,980	**58**	76,778	85,950	**92**	115,390	126,462
25	37,652	44,314	**59**	77,931	87,166	**93**	116,511	127,633
26	38,885	45,642	**60**	79,082	88,379	**94**	117,632	128,803
27	40,113	46,963	**61**	80,232	89,591	**95**	118,752	129,973
28	41,337	48,278	**62**	81,381	90,802	**96**	119,871	131,141
29	42,557	49,588	**63**	82,529	92,010	**97**	120,990	132,309
30	43,773	50,892	**64**	83,675	93,217	**98**	122,108	133,476
31	44,985	52,191	**65**	84,821	94,422	**99**	123,225	134,642
32	46,194	53,486	**66**	85,965	95,626	**100**	124,342	135,807
33	47,400	54,776	**67**	87,108	96,828			
34	48,602	56,061	**68**	88,250	98,028			

Таблица 6.

Величины угла φ (в радианах) для разных процентных долей: $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{p}$

% доля	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,020	0,028	0,035	0,040	0,045	0,049	0,053	0,057	0,060
0,1	0,063	0,066	0,069	0,072	0,075	0,077	0,080	0,082	0,085	0,087
0,2	0,089	0,092	0,094	0,096	0,098	0,100	0,102	0,104	0,106	0,108
0,3	0,110	0,111	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120	0,122	0,123	0,125
0,4	0,127	0,128	0,130	0,131	0,133	0,134	0,136	0,137	0,139	0,140
0,5	0,142	0,143	0,144	0,146	0,147	0,148	0,150	0,151	0,153	0,154
0,6	0,155	0,156	0,158	0,159	0,160	0,161	0,163	0,164	0,169	0,166
0,7	0,168	0,169	0,170	0,171	0,172	0,173	0,175	0,176	0,177	0,178
0,8	0,179	0,180	0,182	0,183	0,184	0,185	0,186	0,187	0,188	0,189
0,9	0,190	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,196	0,197	0,198	0,199
1	0,200	0,210	0,220	0,229	0,237	0,246	0,254	0,262	0,269	0,277
2	0,284	0,291	0,298	0,304	0,311	0,318	0,324	0,330	0,336	0,342
3	0,348	0,354	0,360	0,365	0,371	0,376	0,382	0,387	0,392	0,398
4	0,403	0,408	0,413	0,418	0,423	0,428	0,432	0,437	0,442	0,446
5	0,451	0,456	0,460	0,465	0,469	0,473	0,478	0,482	0,486	0,491
6	0,495	0,499	0,503	0,507	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532
7	0,536	0,539	0,543	0,547	0,551	0,555	0,559	0,562	0,566	0,570
8	0,574	0,577	0,581	0,584	0,588	0,592	0,595	0,599	0,602	0,606
9	0,609	0,613	0,616	0,620	0,623	0,627	0,630	0,633	0,637	0,640
10	0,644	0,647	0,650	0,653	0,657	0,660	0,663	0,666	0,670	0,673
11	0,676	0,679	0,682	0,686	0,689	0,692	0,695	0,698	0,701	0,704
12	0,707	0,711	0,714	0,717	0,720	0,723	0,726	0,729	0,732	0,735
13	0,738	0,741	0,744	0,747	0,750	0,752	0,755	0,758	0,761	0,764
14	0,767	0,770	0,773	0,776	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790	0,793
15	0,795	0,798	0,801	0,804	0,807	0,809	0,812	0,815	0,818	0,820
16	0,823	0,826	0,828	0,831	0,834	0,837	0,839	0,842	0,845	0,847
17	0,850	0,853	0,855	0,858	0,861	0,863	0,866	0,868	0,871	0,874
18	0,876	0,879	0,881	0,884	0,887	0,889	0,892	0,894	0,897	0,900
19	0,902	0,905	0,907	0,910	0,912	0,915	0,917	0,920	0,922	0,925
20	0,927	0,930	0,932	0,935	0,937	0,940	0,942	0,945	0,947	0,950
21	0,952	0,955	0,957	0,959	0,962	0,964	0,967	0,969	0,972	0,974
22	0,976	0,979	0,981	0,984	0,986	0,988	0,991	0,993	0,996	0,998
23	1,000	1,003	1,005	1,007	1,010	1,012	1,015	1,017	1,019	1,022
24	1,024	1,026	1,029	1,031	1,033	1,036	1,038	1,040	1,043	0,045
25	1,047	1,050	1,052	1,054	1,056	1,059	1,061	1,063	1,066	1,068
26	1,070	1,072	1,075	1,077	1,079	1,082	1,084	1,086	1,088	1,091
27	1,093	1,095	1,097	1,100	1,102	1,104	1,106	1,109	1,111	0,113
28	1,115	1,117	1,120	1,122	1,124	1,126	1,129	1,131	1,133	1,135
29	1,137	1,140	1,142	1,144	1,146	1,148	1,151	1,153	1,155	1,157
30	1,159	1,161	1,164	1,166	1,168	1,170	1,172	1,174	1,177	1,179

% доля	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
31	1,182	1,183	1,185	1,187	1,190	1,192	1,194	1,196	1,198	1,200
32	1,203	1,205	1,207	1,209	1,211	1,213	1,215	1,217	1,220	1,222
33	1,224	1,226	1,228	1,230	1,232	1,234	1,237	1,239	1,241	1,243
34	1,245	1,247	1,249	1,251	1,254	1,256	1,258	1,260	1,262	1,264
35	1,266	1,268	1,270	1,272	1,274	1,277	1,279	1,281	1,283	1,285
36	1,287	1,289	1,291	1,293	1,295	1,297	1,299	1,302	1,304	1,306
37	1,308	1,310	1,312	1,314	1,316	1,318	1,320	1,322	1,324	1,326
38	1,328	1,330	1,333	1,335	1,337	1,339	1,341	1,343	1,345	1,347
39	1,349	1,351	1,353	1,355	1,357	1,359	1,361	1,363	1,365	1,367
40	1,369	1,371	1,374	1,376	1,378	1,380	1,382	1,384	1,386	1,388
41	1,390	1,392	1,394	1,396	1,398	1,400	1,402	1,404	1,406	1,408
42	1,410	1,412	1,414	1,416	1,418	1,420	1,422	1,424	1,426	1,428
43	1,430	1,432	1,434	1,436	1,438	1,440	1,442	1,444	1,446	1,448
44	1,451	1,453	1,455	1,457	1,459	1,461	1,463	1,465	1,467	1,469
45	1,471	1,473	1,475	1,477	1,479	1,481	1,483	1,485	1,487	1,489
46	1,491	1,493	1,495	1,497	1,499	1,501	1,503	1,505	1,507	1,509
47	1,511	1,513	1,515	1,517	1,519	1,521	1,523	1,525	1,527	1,529
48	1,531	1,533	1,535	1,537	1,539	1,541	1,543	1,545	1,547	1,549
49	1,551	1,553	1,555	1,557	1,559	1,561	1,563	1,565	1,567	1,569
50	1,571	1,573	1,575	1,577	1,579	1,581	1,583	1,585	1,587	1,589
51	1,591	1,593	1,595	1,597	1,599	1,601	1,603	1,605	1,607	1,609
52	1,611	1,613	1,615	1,617	1,619	1,621	1,623	1,625	1,627	1,629
53	1,631	1,633	1,635	1,637	1,639	1,641	1,643	1,645	1,647	1,649
54	1,651	1,653	1,655	1,657	1,659	1,661	1,663	1,665	1,667	1,669
55	1,671	1,673	1,675	1,677	1,679	1,681	1,683	1,685	1,687	1,689
56	1,691	1,693	1,695	1,697	1,699	1,701	1,703	1,705	1,707	1,709
57	1,711	1,713	1,715	1,717	1,719	1,721	1,723	1,725	1,727	1,729
58	1,731	1,734	1,736	1,738	1,740	1,742	1,744	1,746	1,748	1,750
59	1,752	1,754	1,756	1,758	1,760	1,762	1,764	1,766	1,768	1,770
60	1,772	1,774	1,776	1,778	1,780	1,782	1,784	1,786	1,789	1,791
61	1,793	1,795	1,797	1,799	1,801	1,803	1,805	1,807	1,809	1,811
62	1,813	1,815	1,817	1,819	1,821	1,823	1,826	1,828	1,830	1,832
63	1,834	1,836	1,838	1,840	1,842	1,844	1,846	1,848	1,850	1,853
64	1,855	1,857	1,859	1,861	1,863	1,865	1,867	1,869	1,871	1,873
65	1,875	1,878	1,880	1,882	1,884	1,886	1,888	1,890	1,892	1,894
66	1,897	1,899	1,901	1,903	1,905	1,907	1,909	1,911	1,913	1,916
67	1,918	1,920	1,922	1,924	1,926	1,928	1,930	1,933	1,935	1,937
68	1,939	1,941	1,943	1,946	1,948	1,950	1,952	1,954	1,956	1,958
69	1,961	1,963	1,965	1,967	1,969	1,971	1,974	1,976	1,978	1,980
70	1,982	1,984	1,987	1,989	1,991	1,993	1,995	1,998	2,000	2,002
71	2,004	2,006	2,009	2,011	2,013	2,015	2,018	2,020	2,022	2,024
72	2,026	2,029	2,031	2,033	2,035	2,038	2,040	2,042	2,044	2,047
73	2,049	2,051	2,053	2,056	2,058	2,060	2,062	2,065	2,067	2,069
74	2,071	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,085	2,087	2,090	2,092
75	2,094	2,097	2,099	2,101	2,104	2,106	2,108	2,111	2,113	2,115
76	2,118	2,120	2,122	2,125	2,127	2,129	2,132	2,134	2,136	2,139
77	2,141	2,144	2,146	2,148	2,151	2,153	2,156	2,158	2,160	2,163
78	2,165	2,168	2,170	2,172	2,175	2,177	2,180	2,182	2,185	2,187
79	2,190	2,192	2,194	2,197	2,199	2,202	2,204	2,207	2,209	2,212
80	2,214	2,217	2,219	2,222	2,224	2,227	2,229	2,231	2,234	2,237

Окончание таблицы 6.

% доля	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
81	2,240	2,242	2,245	2,247	2,250	2,252	2,255	2,258	2,260	2,263
82	2,256	2,268	2,271	2,273	2,276	2,278	2,281	2,284	2,286	2,289
83	2,292	2,294	2,297	2,300	2,302	2,305	2,308	2,310	2,313	2,316
84	2,319	2,321	2,324	2,327	2,330	2,332	2,335	2,338	2,341	2,343
85	2,346	2,349	2,352	2,355	2,357	2,360	2,363	2,366	2,369	2,372
86	2,375	2,377	2,380	2,383	2,386	2,389	2,392	2,395	2,398	2,401
87	2,404	2,407	2,410	2,413	2,416	2,419	2,422	2,425	2,428	2,231
88	2,434	2,437	2,440	2,443	2,447	2,450	2,453	2,456	2,459	2,462
89	2,465	2,469	2,472	2,475	2,478	2,482	2,485	2,488	2,491	2,495
90	2,498	2,501	2,505	2,508	2,512	2,515	2,518	2,522	2,525	2,529
91	2,532	2,536	2,539	2,543	2,546	2,550	2,554	2,557	2,561	2,564
92	2,568	2,572	2,575	2,579	2,583	2,587	2,591	2,594	2,598	2,602
93	2,606	2,610	2,614	2,618	2,622	2,626	2,630	2,634	2,638	2,642
94	2,647	2,651	2,655	2,659	2,664	2,668	2,673	2,677	2,681	2,686
95	2,691	2,295	2,700	2,705	2,709	2,714	2,719	2,724	2,729	2,734
96	2,739	2,744	2,749	2,754	2,760	2,765	2,771	2,776	2,782	2,788
97	2,793	2,799	2,805	2,811	2,818	2,824	2,830	2,837	2,844	2,851
98	2,858	2,865	2,872	2,880	2,888	2,896	2,904	2,913	2,922	2,931
99,0	2,941	2,942	2,943	2,944	2,945	2,946	2,948	2,949	2,950	2,951
99,1	2,952	2,953	2,954	2,955	2,956	2,957	2,958	2,959	2,960	2,961
99,2	2,963	2,964	2,965	2,966	2,967	2,968	2,969	2,971	2,972	2,973
99,3	2,974	2,975	2,976	2,978	2,979	2,980	2,981	2,983	2,984	2,985
99,4	2,987	2,988	2,989	2,990	2,992	2,993	2,995	2,996	2,997	2,999
99,5	3,000	3,002	3,003	3,004	3,006	3,007	3,009	3,010	3,012	3,013
99,6	3,015	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,028	3,030
99,7	3,032	3,034	3,036	3,038	3,040	3,041	3,044	3,046	3,048	3,050
99,8	3,052	3,054	3,057	3,059	3,062	3,064	3,067	3,069	3,072	3,075
99,9	3,078	3,082	3,085	3,089	3,093	3,097	3,101	3,107	3,113	3,122
100	3,142									

Таблица 7.

Критические значения коэффициента корреляции r_{xy} Пирсона

k=n-2	**p**		**k=n-2**	**p**	
	0,05	**0,01**		**0,05**	**0,01**
5	0,75	0,87	**27**	0,37	0,47
6	0,71	0,83	**28**	0,36	0,46
7	0,67	0,80	**29**	0,36	0,46
8	0,63	0,77	**30**	0,35	0,45
9	0,60	0,74	**35**	0,33	0,42
10	0,58	0,71	**40**	0,30	0,39
11	0,55	0,68	**45**	0,29	0,37
12	0,53	0,66	**50**	0,27	0,35
13	0,51	0,64	**60**	0,25	0,33
14	0,50	0,62	**70**	0,23	0,30
15	0,48	0,61	**80**	0,22	0,28
16	0,47	0,59	**90**	0,21	0,27
17	0,46	0,58	**100**	0,20	0,25
18	0,44	0,56	**125**	0,17	0,23
19	0,43	0,55	**150**	0,16	0,21
20	0,42	0,54	**200**	0,14	0,18
21	0,41	0,53	**300**	0,11	0,15
22	0,40	0,52	**400**	0,10	0,13
23	0,40	0,51	**500**	0,09	0,12
24	0,39	0,50	**700**	0,07	0,10
25	0,38	0,49	**900**	0,06	0,09
26	0,37	0,48	**1000**	0,06	0,09

Таблица 8.

Критические значения коэффициента корреляции рангов Спирмена

n	p		n	p		n	p	
	0,05	**0,01**		**0,05**	**0,01**		**0,05**	**0,01**
5	0,94	-	**17**	0,48	0,62	**29**	0,37	0,48
6	0,85	-	**18**	0,47	0,60	**30**	0,36	0,47
7	0,78	0,94	**19**	0,46	0,58	**31**	0,36	0,46
8	0,72	0,88	**20**	0,45	0,57	**32**	0,36	0,45
9	0,68	0,83	**21**	0,44	0,56	**33**	0,34	0,45
10	0,64	0,79	**22**	0,43	0,54	**34**	0,34	0,44
11	0,61	0,76	**23**	0,42	0,53	**35**	0,33	0,43
12	0,58	0,73	**24**	0,41	0,52	**36**	0,33	0,43
13	0,56	0,70	**25**	0,40	0,51	**37**	0,33	0,43
14	0,54	0,68	**26**	0,39	0,50	**38**	0,32	0,41
15	0,52	0,66	**27**	0,38	0,49	**39**	0,32	0,41
16	0,50	0,64	**28**	0,38	0,48	**40**	0,31	0,40

Таблица 9.

Критические значения t-критерия Стьюдента

Число степеней свободы К	p			Число степеней свободы К	p		
	0,05	**0,01**	**0,001**		**0,05**	**0,01**	**0,001**
1	12,71	63,66	64,60	**18**	2,10	2,88	3,92
2	4,30	9,92	31,60	**19**	2,09	2,86	3,88
3	3,18	5,84	12,92	**20**	2,09	2,85	3,85
4	2,78	4,60	8,61	**21**	2,08	2,83	3,82
5	2,57	4,03	6,87	**22**	2,07	2,82	3,79
6	2,45	3,71	5,96	**23**	2,07	2,81	3,77
7	2,37	3,50	5,41	**24**	2,06	2,80	3,75
8	2,31	3,36	5,04	**25**	2,06	2,79	3,73
9	2,26	3,25	4,78	**26**	2,06	2,78	3,71
10	2,23	3,17	4,59	**27**	2,05	2,77	3,69
11	2,20	3,11	4,44	**28**	2,05	2,76	3,67
12	2,18	3,05	4,32	**29**	2,05	2,76	3,66
13	2,16	3,01	4,22	**30**	2,04	2,75	3,65
14	2,14	2,98	4,14	**40**	2,02	2,70	3,55
15	2,13	2,95	4,07	**60**	2,00	2,66	3,46
16	2,12	2,92	4,02	**120**	1,98	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,97	∞	1,96	2,58	3,29

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов. М.: Московский психолого-социальный институт, Флинта, 2003. 336 с.

2. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб.: Речь, 2001. 349 с.

3. Стрюкова Г.А. Математические основы психологии: Учебно-методическое пособие. Ульяновск: УлГПУ, 2012. 83 с.

Дополнительная литература:

1. Годин А.М. Статистика: учеб. для вузов. М.: Дашков и К°, 2009. 457 с.

2. Математическая психология: Школа В.Ю. Крылова. М.: Институт психологии РАН, 2010. 503 с.

3. Романко В.К. Статистический анализ данных в психологии: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 313 с.

4. Суходольский Г.В. Математическая психология. Харьков: Гуманитарный центр, 2006. 358 с.

5. Туганбаев А.А. Задачи по высшей математике для психологов: учеб. пособие для вузов. М.: Флинта: МПСИ, 2008. 319 с.

Подписано в печать 18.09.2017 Тираж 200 Формат 60х84/16
Усл. печ. л. 5,34 Заказ № 401

Отпечатано на участке оперативной полиграфии
при ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»,
432063, г. Ульяновск, б-р Пластова, д. 13, корп. 2