НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

М. А. ФЕДОТКИН

ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИЗУ СЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям ВПО 010400 «Прикладная математика и информатика» и 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2016

УДК 519.2
ББК 22.17
Ф 34

Федоткин М.А. **Лекции по анализу случайных явлений.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 464 с. — ISBN 978-5-9221-1679-4.

Изложены фундаментальные и прикладные вопросы вероятностного моделирования, теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. Особое внимание уделено построению и изучению теоретико-множественной и вероятностной моделей, свойствам функциональных и числовых характеристик эксперимента, методам анализа экспериментальных данных с целью восстановления неизвестных условий проведения эксперимента, знакомству с основами и приемами изучения простейших эволюционных экспериментов с учетом фактора времени. Структура учебника в виде лекций и тестовых задач позволяет освоить материал и развить вероятностное мировоззрение.

Для широкого круга преподавателей, научных работников и студентов, использующих вероятностно-статистические методы в исследованиях случайных экспериментов с применением компьютерных технологий.

Учебник подготовлен в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ № 2014/134, проект № 1988.

Табл. 36. Ил. 55. Библиогр. 11 назв.

Рецензенты:

кафедра математической статистики факультета ВМК
МГУ им. М. В. Ломоносова (д.ф.-м.н., проф. *В. Г. Ушаков*);

кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования
Российского государственного университета нефти и газа им. И. М. Губкина
(д.ф.-м.н., проф. *В. В. Рыков*)

ISBN 978-5-9221-1679-4

Учебное издание

ФЕДОТКИН Михаил Андреевич

ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИЗУ СЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет: *Е.В. Сабаева*
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 11.02.2016. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 31,9. Тираж 400 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17 Б
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ООО «Паблит»
127282, г. Москва, ул. Полярная, д. 31 В, стр. 1
Тел.: (495) 685-93-18
Сайт: www.publit.ru

ISBN 978-5-9221-1679-4

9 785922 116794

ОГЛАВЛЕНИЕ

II. Основы теории вероятностей

IV. Элементы теории случайных процессов

Предисловие

Учебник написан на основе многолетнего опыта применения вероятностно-статистических методов для решения реальных задач, а также на основе опыта преподавания общих лекционных курсов «Вероятностные модели» и «Теория вероятностей и математическая статистика», которые на протяжении более чем 45 лет автор читал студентам различных факультетов Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. В зависимости от специальностей студентов (прикладная математика и информатика, прикладная информатика, информационные технологии, прикладная физика, экономика, социология) эти курсы преподаются в течение двух или трех семестров, сопровождаются практикой и лабораторными работами. Трехсеместровый материал включает 90 академических часов лекций, 90 академических часов практических занятий и 27 академических часов лабораторного практикума на персональном компьютере. Учебник рассчитан на широкий круг преподавателей, научных работников, инженеров, аспирантов и студентов, которым приходится пользоваться методами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов в прикладных исследованиях с применением компьютерных технологий. Это определило его структуру и изложение на основе теоретико-множественного подхода А.Н. Колмогорова с минимально возможным применением теории меры и функционального анализа. В силу этого настоящий учебник значительно отличается от традиционных, так как содержит большое число прикладных задач с подробными решениями, с указаниями на типичные ошибки и возникающие в связи с этим парадоксы. Более того, весь материал, который содержит четыре части: «Вероятностные модели», «Основы теории вероятностей», «Прикладная математическая статистика» и «Элементы теории случайных процессов», разбит на 38 лекций. Первая часть включает лекции 1–9, вторая часть включает лекции 10–27, третья часть включает лекции 28–36 и четвертая часть содержит лекции 37 и 38. Продолжительность каждой лекции, за исключением лекций 14, 21, 33–36, 38, равна двум академическим часам. Так как в каждой из лекций 14, 21, 33–36, 38 имеются таблицы, графики и рисунки, то продолжительность каждой такой лекции составляет четыре академических часа. В конце каждой лекции для контроля усвоения материала приводятся тестовые задачи трех типов. Изложение материала является доступным и математически строгим. Однако в учебнике нет математических построений ради самих построений. Любая сложная математическая конструкция в книге имеет реальную интерпретацию и обоснование ее необходимости.

Основными задачами этого учебного материала являются:

1) знакомство с методами построения и анализа адекватных стохастических моделей реальных экспериментов, которые дают различные исходы при их проведении или наблюдении;

2) изучение фундаментальных основ современной прикладной теории вероятностей и развитие у слушателей курса на содержательном уровне понимания случайных явлений в природе с целью освоения и применения идей вероятностно-статистического моделирования.

Для понимания этого учебного материала необходимы: 1) знания математики в объеме вузовской программы, в частности начальные сведения по комбинаторному анализу, дискретной математике, функциональному анализу и теории множеств; 2) навыки математического моделирования, программирования и компьютерных технологий.

В первых девяти лекциях даны основные неопределяемые понятия в теории построения вероятностных моделей. Предложен способ задания реальных экспериментов и проведена их классификация. В частности, выделены так называемые статистически устойчивые эксперименты. Сформулированы и обоснованы на реальных примерах аксиомы выбора элементарных исходов статистически устойчивого эксперимента и приведены способы построения его теоретико-множественной модели. В рамках этой модели над исходами эксперимента можно прослеживать логические связи и проводить теоретико-множественные операции. Установлено различие между допустимыми и наблюдаемыми случайными событиями статистически устойчивого эксперимента. В этом разделе рассмотрены различные методы приближенного и точного вычисления вероятности наступления наблюдаемого исхода случайного эксперимента в зависимости от принадлежности его к тому или иному классу. Выяснена фундаментальная связь между эмпирическим и аксиоматическим подходами к определению вероятности случайных событий. Подробно изучены общие свойства вероятностной функции Колмогорова, и на этой основе предлагается построение вероятностной модели статистически устойчивого эксперимента. В этой части учебного материала дано описание условных экспериментов и решен важный вопрос обоснования целесообразности формулы, которая определяет условную вероятность. Для условных экспериментов предложены и исследованы унифицированная и локализованная вероятностные модели. Доказаны утверждения, которые устанавливают связь условных и априорных вероятностей. Проблема математического описания общеязыкового смысла причинной и статистической независимости событий и опытов решена с помощью простейших ограничений на вероятностную функцию.

Во второй части, которая включает 18 лекций, изложены проблемы математического описания количественных показаний различных измерителей результатов статистически устойчивого эксперимента. Для выяснения теоретико-множественных и вероятностных свойств измерителей используются понятия борелевской σ-алгебры на действительной прямой и измеримости отображения. Таким образом, адекватными математическими моделями измерителей исходов статистически устойчивого эксперимента являются такие математические объекты, как одномерные случайные величины. Рассмотрены арифметические действия и операции предельного перехода над случайными величинами. Подробно исследованы свойства вероятностных законов распределения одномерных случайных величин и на этой основе проведена замкнутая классификация одномерных случайных величин. Показана целесообразность рассмотрения упорядоченного семейства случайных величин с целью выяснения в дальнейшем функциональных и статистических связей между различными измерителями исходов случайного эксперимента. Подробно изучены свойства многомерных законов распределения. Предложена методика построения выборочного вероятностного пространства для многомерных случайных величин. Большое внимание уделено проблеме статистической зависимости и независимости семейства случайных величин. Проведена простейшая классификация случайных векторов. Исследованы свойства условных законов распределения случайных величин, получены формулы полной вероятности и Байеса для несчетного числа гипотез. На содержательном уровне показана важность рассмотрения в курсе вероятностного моделирования различных числовых характеристик одномерных и многомерных случайных величин. При этом числовые характеристики случайных величин являются математическими моделями интегральных свойств измерителей. Рассмотрены общие свойства характеристик положения, разброса, маловероятных и больших значений случайной величины и, наконец, свойства характеристик асимметрии и крутизны наклона законов распределения. Приведены формулы исчисления этих числовых характеристик. В связи с рассмотрением характеристики разброса случайного вектора введено понятие ковариационной матрицы и изучены ее простейшие свойства. Рассмотрена важная для практики проблема функциональной и статистической зависимости между измерителями исходов случайных экспериментов. Прежде всего решается трудная задача вычисления неизвестных законов распределения некоторого случайного вектора по информации о заданных законах распределения другого случайного вектора и о функциональной зависимости между ними. Для законов распределения неслучайных функций от случайных дискретных или непрерывных аргументов выведены эффективные для применения формулы. Проблема связи функциональной и линейной статистической зависимости между случайными величинами решена в рамках элементарной теории корреляции. Для решения задачи измерения степени статистической зависимости между произвольными случайными величинами рассмотрено понятие условного математического ожидания, и на этой основе изучены простейшие вопросы регрессии случайных величин. В этой части рассмотрены наиболее распространенные законы распределения случайных величин. Исследованы следующие наиболее распространенные на практике законы: биномиальный, пуассоновский, нормальный, равномерный, показательный и распределение хи-квадрат. Особое внимание уделено схеме независимых испытаний Бернулли и свойствам биномиальной случайной величины. Семнадцатая и восемнадцатая лекции посвящены различным типам сходимостей последовательности случайных величин и предельным теоремам теории вероятностей, которые позволяют решать фундаментальную проблему аппроксимации случайных величин и их законов распределения.

В третьей части, которая содержит 14 лекций, рассмотрены предмет математической статистики и его связь с фундаментальными проблемами теории вероятностей. Сформулированы задачи и основные интуитивные понятия математической статистики. Приведены способы вычисления эмпирических (выборочных) характеристик случайных величин, точечного и интервального оценивания неизвестных параметров законов распределения. Материал этой части содержит понятие статистической гипотезы, проверку простых и сложных гипотез о виде распределения, проверку независимости наблюдений с помощью различных критериев согласия.

Наконец, в последней части, которая состоит из двух лекций, кратко изложены элементы теории случайных процессов.

Рассмотрены способы задания случайных процессов и приведена простейшая их классификация. Изучены случайные процессы с дискретным пространством состояний и с дискретным временем.

Материал учебного пособия соответствует федеральному государственному образовательному стандарту третьего поколения высшего профессионального образования программ магистратуры по направлению подготовки 010400 «Прикладная математика и информатика» и адресован студентам второго и третьего курсов.

По этому материалу и практическим занятиям имеется лабораторный практикум, который включает следующие работы на персональном компьютере: свойства вероятности; моделирование случайных величин и проверка гипотезы о виде распределений; вычисление значений функций и определенного интеграла методом Монте-Карло; закон больших чисел, центральная предельная теорема и эмпирические функции распределения.

Автор понимает, что возможно улучшение как представленного учебного материала, так и его распределение по частям и лекциям учебника. Он будет искренне благодарен всем, кто выскажет замечания и пожелания по электронному адресу: fma5@rambler.ru

М.А. Федоткин

Часть I

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

Лекция 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

1.1. Интуитивное представление об экспериментах и их классификация

В любой науке имеется ряд основных интуитивных понятий. Эти понятия не только не имеют точного определения, но и для каждого человека усовершенствуются в течение всей его жизни. Так, например, в геометрии основными неопределяемыми (интуитивными) понятиями являются точка, прямая. В механике — сила, масса, путь. Основными неопределяемыми понятиями в теории вероятностных моделей являются эксперимент, его результаты (исходы), статистически устойчивый эксперимент, элементарный результат и др. [3, 4, 6, 8–10]. Вместо термина эксперимент довольно часто используют слова-синонимы: опыт, испытание, система, наблюдение, процесс и т. п. В дальнейшем произвольный эксперимент обозначим символом E.

Будем считать, что любой реальный эксперимент E задается или вызывается некоторым множеством $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots\}$ условий u_1, $u_2, \ldots$ его проведения и множеством $\Im = \{A, B, C, A_1, A_2, \ldots\}$ всех его исходов. Указанные исходы будем называть допустимыми и обозначать латинскими прописными буквами без индексов и с индексами, например: A, B, C, A_1, A_2 и т. п. Среди допустимых исходов иногда существуют такие, которые не наступают ни при каком проведении эксперимента E. Множества Σ и $\Im$ могут содержать конечное, счетное (бесконечное), несчетное число элементов. Последнее определяется содержанием реального эксперимента и целей его исследования. Множество Σ будем называть комплексом условий проведения эксперимента E. При проведении или наблюдении эксперимента часто невозможно определить и перечислить все его условия. Поэтому приходится указывать конкретно наиболее важные из этих условий. Данный факт будем отображать следующим образом: $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots\}$. Здесь указано s основных условий, а остальные условия, помеченные многоточием после символа u_s, нам точно не известны и называются случайными факторами.

Часто проведение некоторого эксперимента E означает последовательное осуществление других экспериментов E_t, $t \in T$. Здесь T есть некоторое упорядоченное множество. Будем индекс t интерпретировать как время, а T — как промежуток времени. Заметим, что каждый эксперимент E_t определяется комплексом условий Σ_t и множеством $\Im_t$ его допустимых исходов. Эксперимент E будем называть *эволюционным*, обозначать символом $\coprod\limits_{t \in T} E_t$ и говорить, что он функционирует во времени $t \in T$. Если множество T состоит из одного элемента, то эксперимент будем называть *статическим*. Так как эксперимент E объявляется эволюционным или статическим в зависимости от способа его задания или, точнее, от структуры множества T, то интуитивное понятие об эволюционном или статическом эксперименте является относительным. Все реальные эксперименты условно можно классифицировать по признаку однозначности наблюдения его результатов A, B, C, A_1, $A_2, \ldots$ и их предсказания.

К первой группе будем относить так называемый детерминированный эксперимент E, когда по любому $t_0 \in T$ и Σ_{t_0} однозначно определяется исход эксперимента E_t как при $t \geqslant t_0$, так и при $t < t_0$. Иначе, весь будущий ход, включая и настоящее, детерминированного эволюционного эксперимента и все его прошлое однозначно определяются комплексом условий Σ_{t_0} эксперимента E_{t_0} в момент $t = t_0$. Например, классическая механика рассматривает движение материальных точек в пространстве, будущее и прошлое которых однозначно определяется начальными положениями и начальными скоростями всех точек. Подобная ситуация (см. [9], с. 21–24) описана в примерах 1.1–1.6, при этом в примерах 1.2, 1.4 и 1.6 промежуток T состоит из одной точки.

Ко второй группе будем относить так называемый полудетерминированный эволюционный эксперимент E, если по любому $t_0 \in T$ и Σ_{t_0} однозначно определяется исход эксперимента E_t только при $t \geqslant t_0$. Весь будущий ход полудетерминированного эволюционного эксперимента E полностью определяется его исходом или результатом в настоящее время $t = t_0$, а его прошлое не определяется. Распределение тепла в нагретом стержне (см. [9], пример 1.7) является полудетерминированным процессом. Такого рода процессы протекают во времени и изучаются в электродинамике Максвелла, в теории колебаний, в квантовой механике и т. д.

Наконец, к третьей группе будем относить эволюционный эксперимент E, если при его повторении практически в одних и тех же условиях он может давать различные, но вполне определенные результаты из множества $\Im$. Такой эксперимент будем называть случайным или стохастическим. Поэтому результат случайного эксперимента предсказать невозможно (см. [9], примеры 1.8–1.13). Среди всех случайных экспериментов рассмотрим класс статистически устойчивых экспериментов, которые выделим с помощью следующих ограничений.

• Статистически устойчивый эксперимент E можно проводить или наблюдать любое конечное число раз при одних и тех же Σ и $\Im$.

• Пусть $\mu(A, N)$ есть число наступлений исхода $A \in \Im$ за N испытаний эксперимента E. Относительная частота $\mu(A, N)/N$ при неограниченном увеличении N колеблется (группируется) как угодно близко около некоторого, как правило неизвестного, числа, обозначаемого через $\mathbf{P}(A)$.

Здесь нет формального определения близости относительной частоты $\mu(A, N)/N$ к $\mathbf{P}(A)$ при неограниченном увеличении N. Поэтому статистически устойчивый эксперимент также является основным интуитивным и первоначальным понятием. Рассмотрим это понятие на следующем классическом примере.

Пример 1.1. Пусть эксперимент E заключается в одноразовом бросании (условие u_1) симметричной монеты определенного достоинства (условие u_2) с помощью некоторого механизма (условие u_3), обеспечивающего произвольное вращение монеты в воздухе и ее непреднамеренное падение на гладкую поверхность стола (условие u_4) с хорошей освещенностью (условие u_5) для фиксации выпавшей стороны монеты. Для эксперимента E комплекс условий $\Sigma = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots\}$, $s = 5$, множество $\Im = \{A, B, C, \varnothing\}$, где исход A означает выпадение орла, исход B — появление решки, исход C — выпадение орла или решки и, наконец, $\varnothing$ — появление ребра. В этом эксперименте к случайным факторам можно отнести температуру, давление, колебание воздуха и т. п. Так, естествоиспытатель Ж. Бюффон бросал монету $N = 4040$ раз. Орел появился 2048 раз. Тогда отношение $\mu(A, N)/N = 2048/4040 \approx 0{,}507$. Математик К. Пирсон бросал монету $N = 24000$ раз, и при этом орел выпал 12012 раз. В этом случае отношение $\mu(A, N)/N = 0{,}5005$. В данном примере исход A означает выпадение орла и имеем малое колебание около числа $\mathbf{P}(A) = 0{,}5$. В этом опыте можно обнаружить некоторую регулярность (статистическую устойчивость) в поведении относительной частоты $\mu(A, N)/N$ выпадения орла. На рис. 1.1 по оси абсцисс отложено число N проведенных экспериментов, а по оси ординат — относительная частота $\mu(A, N)/N$.

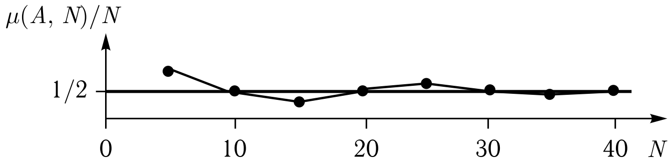


Рис. 1.1

Из этого рисунка видно, что соединяющая черные точки ломаная линия все ближе и ближе прижимается к прямой $\mu(A, N)/N = 1/2$.

1.2. Аксиомы выбора элементарных исходов и описание результатов статистически устойчивого эксперимента

Будем теперь рассматривать только статистически устойчивые эксперименты E. В результате проведения эксперимента E мы можем фиксировать, наблюдать или регистрировать некоторые или все его допустимые исходы (результаты). Среди всех допустимых исходов эксперимента E выделим некоторые $A_1' \in \Im$, $A_2' \in \Im, \ldots,$ которые будем называть элементарными (атомарными, неразложимыми, помеченными). Множество (пространство) элементарных исходов эксперимента E обозначим через $\Im'$. Для каждого элементарного исхода A_i' из множества $\Im'$ выберем его описание ω_i с помощью некоторого языка. Часто описание произвольного элементарного исхода A' из множества $\Im'$ будем обозначать просто греческой буквой ω без индекса и записывать равенство $A' = \{\omega\} \in \Im'$. Теперь одноточечное множество $A' = \{\omega\}$ является математическим объектом, и этот объект будем называть *элементарным событием*. Совокупность описаний всех отобранных элементарных исходов будем называть *пространством описаний элементарных исходов* и обозначать символом Ω. Не существует общего метода выделения элементарных результатов среди допустимых исходов. При решении этой проблемы исследователь чаще всего полагается на интуицию и опыт. Однако при неоднозначном выделении элементарных результатов (исходов) всегда будем накладывать следующие три аксиомы выбора:

1) при проведении эксперимента обязательно наступает один из элементарных исходов;

2) если происходит некоторый элементарный исход, то все остальные элементарные исходы наступать в этом испытании не могут;

3) по наблюдаемому элементарному исходу можно определить наступление или ненаступление любого допустимого исхода A.

В этом случае каждый допустимый исход A эксперимента E может быть представлен через описания некоторых элементарных исходов. Действительно, для этого каждому допустимому исходу A из $\Im$ поставим во взаимно-однозначное соответствие некоторое подмножество множества Ω следующим способом. Выберем произвольное непустое подмножество $\{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$ множества Ω, такое что при многократном проведении эксперимента E когда-нибудь наступает один из элементарных исходов A'_{a_1}, $A'_{a_2}, \ldots$ Тогда поставим во взаимно-однозначное соответствие подмножеству вида $\{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$ некоторый допустимый исход A, который наступает тогда и только тогда, когда происходит один из элементарных исходов вида A'_{a_1}, $A'_{a_2}, \ldots$ При этом будем говорить, что подмножество вида $\{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$ представляет допустимый результат A эксперимента E. Ради простоты будем обозначать подмножество $\{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$ тем же символом A, называть его *событием* и писать равенство $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$. В дальнейшем допустимый результат A исключаем при представлении (описании) других исходов эксперимента E. Если оказалось, что такого допустимого исхода A из совокупности $\Im$ нет, то подмножество $\{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$ не является событием и вместо подмножества $\{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$ выбираем другое подмножество $\{\omega_{b_1}, \omega_{b_2}, \ldots\}$ множества Ω, обладающее аналогичными свойствами. Наконец, подмножеству $\{\omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \ldots\}$, для которого каждый из элементарных исходов A'_{c_1}, $A'_{c_2}, \ldots$ никогда не происходит, ставим во взаимно-однозначное соответствие некоторый исход $C \in \Im$, если он никогда не наступает. При этом математический объект $C = \{\omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \ldots\}$ называется также *событием*. Если такого допустимого исхода нет, то такое множество $\{\omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \ldots\}$ не объявляем *событием*. Описанную процедуру продолжаем до тех пор, пока не переберем все допустимые исходы из $\Im$ за исключением, быть может, такого допустимого исхода $\varnothing$, который никогда не наступает (необходимое условие) при проведении эксперимента E и обязательно не является элементарным исходом. Допустимому исходу $\varnothing$ соответствует пустое множество с тем же обозначением $\varnothing$, которое объявляется событием, так как $\varnothing \in \Im$, $\varnothing \subset \Omega$ и $\varnothing \notin \Im'$. Заметим, что могут существовать эксперименты, для которых математические объекты Ω и $\varnothing$ не являются событием.

1.3. Классификация событий

Отметим важность соблюдения трех ограничений при выборе элементарных событий, которые позволяют описать все допустимые исходы. На содержательном уровне три аксиомы выбора элементарных исходов означают, что множество $\Im'$ содержит почти всю информацию об эксперименте E. На практике широко распространен случай, когда любой из выбранных элементарных исходов когда-нибудь наступает при проведении эксперимента E. Для такого типа экспериментов каждое из множеств (пространств) $\Im'$ и Ω будем называть *регулярным*. Если Ω является регулярным, $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$ и происходит, например, элементарный исход $A'_{a_1} = \{\omega_{a_1}\}$, то также происходит и исход A. В силу этого будем говорить, что исходы A'_{a_1}, $A'_{a_2}, \ldots$ благоприятствуют появлению данного результата A. Выполним теперь классификацию событий для произвольного статистически устойчивого эксперимента E. При выполнении комплекса условий Σ статистически устойчивого эксперимента его конкретный результат $A \in \Im$ может произойти, может не произойти и, наконец, может никогда не наступить. Это свойство допустимого исхода A естественно назвать случайным.

Определение 1.1. Одноточечное множество $A' = \{\omega\}$, где $A' \in \Im'$ и $\omega \in \Omega$, будем называть *элементарным случайным событием*.

Определение 1.2. Любую совокупность $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ из описаний элементарных исходов будем называть *случайным допустимым событием*, если множество $A \in \Im$ и одновременно $A \notin \Im'$.

Определение 1.3. Множество Ω называется *достоверным случайным событием*, если соответствующий ему допустимый исход, обозначаемый также символом Ω, будет наступать каждый раз при проведении статистически устойчивого эксперимента E.

Если $\Im'$ не является регулярным, то может существовать допустимый исход, который неизбежно происходит при проведении эксперимента E, и его описание не совпадает с множеством Ω.

Определение 1.4. Пустое множество $\varnothing$ по отношению к пространству Ω описаний элементарных исходов будем называть *невозможным случайным событием*, если $\varnothing \in \Im$ и допустимый исход $\varnothing$ никогда не происходит.

Выбирая в качестве признака классификации событий структуру подмножеств множества Ω, мы для статистически устойчивого эксперимента E выделили элементарные случайные события, случайные события, достоверное случайное событие, невозможное случайное событие.

Определение 1.5. Пространство $\Im'$ элементарных событий с конечным или счетным множеством элементарных событий $\{\omega\}$ называется дискретным. Пространство другого типа будем называть недискретным или непрерывным.

Тестовые вопросы к лекции 1

1. Тип — одиночный выбор.

Имеется три одинаковых шара, и они произвольно распределяются по трем одинаковым ящикам. Чем объяснить потребность в задании множества Σ условий проведения этого эксперимента и множества $\Im$ всех его исходов (размещений шаров по ящикам)?

• Множество Σ этого эксперимента является неопределяемым основным интуитивным понятием в теории вероятностных моделей.

• Задание множества $\Im$ всех исходов этого эксперимента позволяет провести этот эксперимент.

• Задание множеств Σ и $\Im$ позволяет провести этот эксперимент любое конечное число раз и построить в дальнейшем его теоретико-множественную модель.

2. Тип — множественный выбор.

Какие из приведенных примеров будут случайными и статистически устойчивыми экспериментами?

• В чайнике нагревается один литр воды при естественных условиях до ста градусов по шкале Цельсия и наблюдается состояние воды.

• Имеется три разных шара, и они произвольно распределяются по трем разным урнам. Наблюдается размещение шаров в урнах.

• Наблюдаются высоты при свободном падении с некоторой башни тел, одинаковых по форме, размеру и различных по массе.

• Непреднамеренно выбирается группа людей из пятидесяти человек, которые проживают в России. При этом интересуются только числом курящих людей.

3. Тип — одиночный выбор.

Эксперимент E заключается в непреднамеренном подбрасывании с помощью некоторого механизма над поверхностью стола двух различимых монет. Определите утверждение, которое не является аксиомой выбора элементарных исходов для этого эксперимента.

• При проведении эксперимента обязательно наступает один из элементарных исходов.

• Ни один элементарный исход не выражается через остальные.

• Если происходит некоторый элементарный исход, то все остальные элементарные исходы наступить в этом испытании не могут.

• По наблюдаемому элементарному исходу можно определить наступление или ненаступление любого допустимого исхода A.

4. Тип — множественный выбор.

Опыт E заключается в непреднамеренном подбрасывании над поверхностью стола двух неразличимых монет. Определите утверждения, которые являются аксиомами выбора элементарных исходов для этого опыта.

• При проведении эксперимента всегда наступает один из элементарных исходов.

• Каждый элементарный исход имеет единственное описание.

• Если происходит некоторый элементарный исход, то все остальные элементарные исходы наступить в этом испытании не могут.

• По наблюдаемому элементарному исходу можно определить наступление или ненаступление любого допустимого исхода A.

5. Тип — одиночный выбор.

Непреднамеренно подбрасывается симметричная монета до первого выпадения орла. При $i = 1, 2, \ldots$ обозначим через A'_i элементарный исход, когда в этом эксперименте проведено i бросков, и через A' элементарный исход, когда в этом эксперименте выпадают только решки. Из списка выбрать множество $\Im'$, которое не является регулярным.

• Пусть $\{A'_1, A'_2\}$.

• Пусть $\{A'_1, A'_2, \ldots, A'_{100}\}$.

• Пусть $\{A'_1, A'_2, \ldots\}$.

• Пусть $\{A', A'_1, A'_2, \ldots\}$.

6. Тип — множественный выбор.

Наудачу выбирается группа из 100 человек. Интересуемся только числом курящих людей. Элементарное событие $\{\omega_i\}$ означает выбор ровно $i = 0, 1, \ldots, 100$ курящих людей. Определить множества $\Im$, $\Im'$, Ω и привести примеры элементарных случайных событий, случайных событий, достоверного случайного события и невозможного случайного события.

- Пусть $\Im = \{\{\omega_0\}, \{\omega_{100}\}\}$.
- Пусть $\Im' = \{\{\omega_0\}, \{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_{100}\}\}$.
- Пусть $\Omega = \{\{\omega_0\}, \{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_{100}\}\}$.
- Пусть $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{100}\}$.
- Пусть $\Im = \{A\colon A \subset \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{100}\}\}$.

7. Тип — одиночный выбор.

На отрезке $[0, 1]$ оси Ox произвольно выбирается точка. В качестве описания ω произвольно поставленной точки на этом отрезке можно взять ее абсциссу. Одноточечное множество $A' = \{\omega\}$ будем называть (выберите правильное утверждение):

- множеством описаний элементарных исходов;
- достоверным исходом;
- элементарным случайным событием;
- невозможным исходом.

Лекция 2

ЛОГИЧЕСКИЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ДОПУСТИМЫМИ ИСХОДАМИ ЭКСПЕРИМЕНТА И ИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

2.1. Соотношения между случайными событиями

Из определений 1.1–1.4 первой лекции следует, что любое случайное событие A есть некоторое подмножество множества Ω. Понятие случайного события уже имеет абстрактный характер, так как конкретная природа возникновения события не имеет значения. Поэтому между случайными событиями если и могут существовать соотношения, то, в первую очередь, логического и теоретико-множественного характера.

Определение 2.1. Если каждое описание ω случайного события A принадлежит случайному событию B, то этот факт отношения между A и B записывается символической записью $A \subset B$ или $B \supset A$. В этом случае будем говорить, что A есть часть B или B включает A.

Из отношения $A \subset B$ вытекает, что при каждом осуществлении комплекса условий Σ при проведении эксперимента E вместе с исходом A обязательно наступает исход B. Однако обратное утверждение может и не иметь места, например, когда пространства $\Im'$, Ω не являются регулярными. Можно сказать, что условие $A \subset B$ является более жестким.

Определение 2.2. Если $A \subset B$ и $A \supset B$, то будем говорить, что события A и B равносильны, и обозначать это через $A = B$.

Если $A = B$, то при каждом проведении эксперимента E событие A влечет за собой B и в то же время B влечет за собой A, т. е. события A и B оба наступают или оба не наступают. Обратное утверждение справедливо не всегда.

Определение 2.3. Два события, A и B, называются несовместными (попарно несовместными), если они не содержат общих описаний элементарных исходов. В противном случае A и B называются совместными, и тогда они содержат хотя бы одно общее описание $\omega \in \Omega$.

Если A и B являются несовместными (несовместимыми), то появление одного из них исключает появление другого (необходимое условие, но не достаточное).

Определение 2.4. Событие B, которое содержит все такие описания $\omega \in \Omega$ элементарных исходов из множества $\Im'$, которые не принадлежат некоторому событию A, называется противоположным по отношению к событию A и обозначается символом $\overline{A}$. Итак, имеем равенство: $B = \overline{A}$.

Если события A и $\overline{A}$ являются противоположными, то событие A происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие $\overline{A}$. Обратное утверждение не всегда имеет место. Как правило, удается выбрать множество $\Im'$ из элементарных исходов, каждый из которых когда-нибудь наступает при проведении эксперимента E. В этом случае множество $\Im'$ является регулярным и определения 2.1–2.4 можно дать в терминах наступления событий A, B. Проиллюстрируем это утверждение на следующих простых примерах.

Пример 2.1. Над поверхностью стола наудачу один раз подбрасывается игральная кость. Грани кости занумерованы цифрами от 1 до 6. В этом опыте $\Sigma = \{u_1$ — игральная кость, u_2 — заданный механизм подбрасывания, u_3 — одноразовое подбрасывание кости, u_4 — поверхность стола, u_5 — достаточная освещенность поверхности стола для фиксации числа очков на выпавшей грани, $\ldots\}$, $s = 5$, случайные факторы суть температура, давление, колебание воздуха и т. п. При $i = 1, 2, \ldots, 6$ исход A'_i означает выпадение грани с номером i, который будем описывать (кодировать) символом ω_i. Тогда $\Im' = \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_6\}$, случайное элементарное событие $A'_i = \{\omega_i\}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ и $\Im = \{A \colon A \subset \Omega\}$. Пусть исход B означает выпадение четной грани с номером не больше пяти, исход C — появление четной грани, исход D — наблюдение нечетной грани, H означает выпадение четной грани, номер которой не делится на шесть. Отсюда в терминах наступления событий легко получаем, что событие $B \subset C$, $B = H$ и $D = \overline{C}$. Здесь пространство $\Im'$ является регулярным. Поэтому равенства $B = \{\omega_2, \omega_4\}$, $C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $D = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $H = \{\omega_2, \omega_4\}$ и определения 2.1–2.4 дают те же отношения между этими случайными событиями.

Пример 2.2. Непреднамеренно подбрасывается симметричная монета до первого выпадения орла. В этом эксперименте $\Sigma = \{u_1$ — симметричная монета, u_2 — механизм подбрасывания, u_3 — подбрасывание монеты до первого выпадения орла, u_4 — поверхность стола, u_5 — достаточная освещенность поверхности стола для определения выпавшей стороны монеты, $\ldots\}$, $s = 5$, случайные факторы суть температура, давление, колебание воздуха и т. п. Элементарный исход A'_1 с описанием ω_1 означает выпадение только решек. При $i = 2, 3, \ldots$ элементарный исход A'_i с описанием ω_i означает выпадение числа решек, равного $i - 2$. Тогда $\Im' = \{A'_1, A'_2, \ldots\}$, случайное элементарное событие $A'_i = \{\omega_i\}$, множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ и множество $\Im = \{A\colon A \subset \Omega\}$. Для этого опыта выпадение только решек (элементарный исход A'_1) никогда не наступает и, значит, множества $\Im'$ и Ω не являются регулярными. Поэтому здесь следует принимать во внимание только определения 1.3, 1.4, 2.1–2.4, а не свойства наступления исходов. Например, элементарный исход A'_1 никогда не наступает, однако не будет невозможным случайным событием, так как $A'_1 = \{\omega_1\} \neq \varnothing$. По этой же причине между событиями Ω и $B = \{\omega_2, \omega_3, \ldots\}$ не выполнено соотношение $\Omega \subset B$, хотя вместе с исходом Ω обязательно наступает исход B.

2.2. Теоретико-множественные операции над случайными событиями

Каждый допустимый исход A из $\Im$ реального эксперимента E взаимно-однозначно моделируется некоторым случайным событием в виде подмножества $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$ множества Ω. Тогда над случайными событиями A, $B, \ldots$ естественно ввести известные теоретико-множественные операции из теории множеств, например: объединение ($\cup$), пересечение ($\cap$), разность ($\setminus$), симметрическую разность (Δ) и т. д.

Определение 2.5. Объединением случайных событий A и B, обозначаемым через $A \cup B$, называется такое случайное событие $C = A \cup B$, которое содержит все описания ω события A и все те описания ω события B, которые не входят в A. Если событие $A_i \in \Im$ при каждом $i = 1, 2, \ldots$, то их объединение есть такое случайное событие $C = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, каждое описание ω которого принадлежит хотя бы одному из событий A_1, $A_2, \ldots$

Определение 2.5 для операции объединения можно проинтерпретировать в терминах наступления случайных событий (исходов эксперимента E). Если $C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, то случайное событие C происходит тогда и только тогда, когда происходит по крайней мере одно из случайных событий A_1, $A_2, \ldots$ Обратное утверждение имеет место, если множество Ω является регулярным.

Определение 2.6. Пересечением двух случайных событий A и B, обозначаемым через $A \cap B$, называется такое случайное событие $D = A \cap B$, которое содержит только те описания ω, которые принадлежат как A, так и B. Если событие $A_i \in \Im$ при каждом $i = 1, 2, \ldots$, то их пересечение есть такое случайное событие $D = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, каждое описание которого принадлежит одновременно всем случайным событиям A_1, $A_2, \ldots$

В терминах наступления случайных событий равенство $D = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ означает, что событие D происходит тогда и только тогда, когда происходят все случайные события A_1, $A_2, \ldots$ одновременно. Обратное утверждение имеет место, если множество $\Im'$ элементарных исходов является регулярным.

Определение 2.7. Разностью случайных событий A и B называется такое случайное событие C, которое содержит описания из A и не содержит описаний из B. Разность событий A и B обозначается символом $A \backslash B$.

Если $C = A \backslash B$, то случайное событие C состоит в том, что A произошло, а B нет. Обратное утверждение имеет место, если множество Ω является регулярным.

Определение 2.8. Симметрической разностью случайных событий A и B, которая обозначается символом $A \,\Delta\, B$, называется случайное событие вида $A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Если $C = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, то происходит только одно из событий, либо A, либо B. Обратное утверждение имеет место, если множество $\Im'$ является регулярным.

Определение 2.9. События $A_1, A_2, \ldots$ образуют полную группу несовместных (несовместимых) событий, если их объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ равно событию Ω и они попарно являются несовместными.

Например, множество всех элементарных событий образует полную группу несовместимых событий. События A и $\overline{A}$ образуют также полную группу несовместных событий. Проиллюстрируем теперь введенные теоретико-множественные операции над случайными событиями на следующем простом эксперименте.

Пример 2.3. На прямоугольный участок G земли за некоторый фиксированный промежуток времени из космоса падает частица. В этом опыте будем интересоваться допустимыми исходами, которые заключаются в попадании частицы на некоторые области участка G. Ради простоты естественно предположить, что эти области имеют площадь. Достоверному исходу, который означает попадание частицы на прямоугольный участок G, можно поставить в соответствие (см. рис. 2.1) регулярное достоверное событие $\Omega = \{\omega = (x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$.

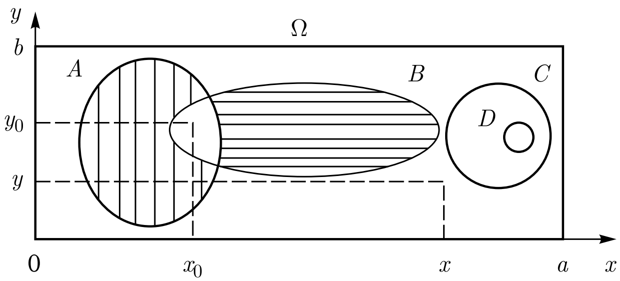


Рис. 2.1

Здесь произвольное элементарное событие $A' = \{\omega = (x, y)\}$ означает прохождение частицы через точку с абсциссой x и ординатой y. Итак, произвольное падение частицы на участок G моделируется непреднамеренным выбором точки в прямоугольнике Ω. Введем события A, B, C, D. Событие A — попадание частицы в эллипс, большая полуось которого расположена вертикально. Событие B — попадание частицы в эллипс, большая полуось которого расположена горизонтально. Событие C — попадание частицы в круг с большим диаметром. Событие D — попадание частицы в круг с маленьким диаметром. Тогда событие $A \cup B$ соответствует попаданию частицы в область прямоугольника, которая получается наложением двух эллипсов без их перемещения. Событие $A \cap B$ соответствует попаданию частицы в светлую область любого из эллипсов. Событие $A \backslash B$ соответствует попаданию частицы в область, которая заштрихована вертикальными линиями. Случайное событие $B \backslash A$ соответствует попаданию частицы в область, которая заштрихована горизонтальными линиями. Случайное событие $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$ соответствует попаданию частицы в область, которая заштрихована горизонтальными или вертикальными линиями. Событие $\overline{C}$ соответствует попаданию частицы в прямоугольник и обязательно ее непопаданию в большой круг. Заметим, что при наблюдении элементарного события $\{\omega_0 = (x_0, y_0)\}$ произойдут, например, события A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ и не произойдут события $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \,\Delta\, B$. Наконец, события A и B являются совместными ($A \cap B \neq \varnothing$), события A и C — несовместными ($A \cap C = \varnothing$) и случайное событие $D \subset C$.

2.3. Основные законы теоретико-множественных операций

Теоретико-множественные операции над случайными событиями удовлетворяют следующим основным законам, методика доказательства которых приведена в учебнике [9]:

• переместительный (коммутативный) закон: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

• сочетательный (ассоциативный) закон: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

• законы Де Моргана: $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}$, $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$;

• распределительный (дистрибутивный) закон;

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)$.

Из определений объединения, пересечения и противоположного события следует, что $A \cup A = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap \Omega = A$, $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$.

Тестовые вопросы к лекции 2

1. Тип — множественный выбор.

Над поверхностью стола наудачу один раз подбрасывается игральная кость. Грани кости занумерованы цифрами от 1 до 6. При $i = 1, 2, \ldots, 6$ элементарный исход A_i' означает выпадение грани с номером i, будем обозначать его символом ω_i. Пусть исход B означает выпадение нечетной грани с номером не больше трех, исход C — появление четной грани. Определить правильные равенства.

• Для событий указано соотношение $B \cup C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

• Для событий указано соотношение $B \cup C = B \,\Delta\, C$.

• Для событий указано соотношение $B \,\Delta\, C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

• Для событий указано равенство $B \,\Delta\, C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

• Для событий указано соотношение $B \cap C = \varnothing$.

2. Тип — одиночный выбор.

Указать закон Де Моргана для событий A и B.

• Для событий указано соотношение $A \cup \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

• Для событий указано соотношение $\overline{A} \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

• Для событий указано соотношение $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

3. Тип — одиночный выбор.

Используя законы для операций над событиями, определить верное равенство между случайными событиями A и B.

• Для событий A и B указано соотношение $A \backslash (A \backslash B) = \Omega \backslash (A \cap B)$.

• Для событий A и B указано соотношение $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$.

• Для событий A и B указано соотношение $A \cap (A \backslash B) = A \cap B$.

4. Тип — множественный выбор.

Указать справедливые свойства событий A, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$.

• Для событий A и B указано свойство $A \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$.

• Для событий A и B указано свойство $A \cap (\overline{A} \cap B \neq \varnothing$.

• Для событий A и B указано свойство $A \cap \overline{A \cup B} \neq \varnothing$.

• Для событий A и B указано свойство $A \cap \overline{A \cup B} = \varnothing$.

• Для событий A и B указано свойство $(\overline{A} \cap B) \cap \overline{A \cup B} \neq \varnothing$.

• Для событий A и B указано свойство $(\overline{A} \cap B) \cap \overline{A \cup B} = \varnothing$.

• Для событий A и B указано свойство $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup \overline{A \cup B} = \Omega$.

5. Тип — одиночный выбор.

Определить такое свойство событий A и B, которое является необходимым и достаточным для выполнения неравенства $A \cap B \neq \varnothing$.

• Для событий A и B указано следующее соотношение:

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$

• Для событий A и B указано соотношение
$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = B.$$
• Для событий A и B указано соотношение
$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \neq \varnothing.$$
6. Тип — одиночный выбор.

Пусть A и B — случайные события. Определить такое событие H, для которого имеет место равенство $(\overline{H \cup A}) \cup \overline{H \cup \overline{A}} = B$.

• Событие $H = A$.
• Событие $H = B$.
• Событие $H = \overline{B}$.

7. Тип — множественный выбор.

Опыт состоит в бросании трех различимых монет. Пусть события C_1, C_2 и C_3 означают выпадение орла на первой, второй и третьей монетах соответственно. Пусть событие A означает выпадение одного орла и двух решек, а событие B есть выпадение не более одного орла. Указать равенства, которые определяют события A и B через C_1, C_2, C_3.

• Событие
$$A = (C_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3) \cup (\overline{C}_1 \cap C_2 \cap \overline{C}_3) \cup (\overline{C}_1 \cap C_2 \cap C_3).$$
• Событие A имеет вид
$$(C_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3) \cup (\overline{C}_1 \cap C_2 \cap \overline{C}_3) \cup (\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3).$$
• Событие B имеет вид
$$(C_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3) \cup (\overline{C}_1 \cap C_2 \cap \overline{C}_3) \cup (\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3) \cup (\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3).$$
• Событие B имеет вид
$$(C_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3) \cup (\overline{C}_1 \cap C_2 \cap \overline{C}_3) \cup (\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3) \cup (C_1 \cap C_2 \cap C_3).$$

Лекция 3

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

3.1. Наблюдаемые случайные события эксперимента и его теоретико-множественная модель

Некоторые события из множества $\Im$, которые когда-нибудь наступают при проведении эксперимента E, по различным причинам могут быть ненаблюдаемы для экспериментатора. Поэтому целесообразно выделить класс всех наблюдаемых исходов или наблюдаемых случайных событий.

Определение 3.1. Любое непустое подмножество $\mathcal{F}$ множества $\Im$ всех случайных допустимых событий будем называть σ-алгеброй, если справедливы следующие ограничения:

• введены теоретико-множественные операции над элементами из $\mathcal{F}$;

• из $A \in \mathcal{F}$ следует $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

• из $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 \in \mathcal{F}, \ldots$ следует $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Если последнее ограничение имеет место для конечного числа событий, то $\mathcal{F}$ называется алгеброй. Так как множество $\mathcal{F}$ не является пустым, то существует $A \in \mathcal{F}$, и поэтому $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Ясно, что $A \cup \overline{A} = \Omega \in \mathcal{F}$ и $\varnothing = \Omega \backslash \Omega = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$. Случайные события из $\mathcal{F}$ называются наблюдаемыми. Поэтому $\mathcal{F}$ будем называть множеством наблюдаемых исходов, хотя оно может содержать исходы, которые никогда не происходят при проведении эксперимента E. Более того, оно всегда содержит невозможный исход $\varnothing$. Теперь отметим важность введения с самого начала в рассмотрение невозможного исхода $\varnothing$. Покажем, что σ-алгебра $\mathcal{F}$ замкнута относительно теоретико-множественных операций. В самом деле, имеем: $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{F}$, $A \backslash B = A \cap \overline{B} \in \mathcal{F}$, $A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{F}$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{F}$ замкнута относительно теоретико-множественных операций, взятых в счетном числе. Переход к множеству $\mathcal{F} \subset \Im$ вызван тем, что не над всеми допустимыми исходами могут быть введены теоретико-множественные операции и, более того, не все допустимые исходы эксперимента E могут иметь место. Поэтому очень часто такого рода события не включают в $\mathcal{F}$. Так как $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй, то в результате теоретико-множественных операций над наблюдаемыми исходами мы получаем снова наблюдаемые исходы. Другими словами, мы будем иметь дело только с известными нам наблюдаемыми исходами (объектами).

Теперь каждому статистически устойчивому эксперименту E поставим в соответствие упорядоченную пару $(\Omega,\ \mathcal{F})$, которая называется его теоретико-множественной моделью. Эта модель позволяет решить следующие важные проблемы:

1) указать допустимые исходы эксперимента E;

2) выбрать элементарные исходы и определить пространство Ω описаний каждого элементарного исхода;

3) представить каждый допустимый исход A в виде множества из описаний $\omega \in \Omega$ и тем самым A назвать случайным событием;

4) определить равные события, соотношения между событиями и найти их интерпретацию через известные исходы эксперимента E;

5) выполнить теоретико-множественные операции над всеми или только над некоторыми случайными событиями из множества $\Im$, породить новые события и выяснить, как одни исходы с помощью теоретико-множественных операций выражаются через другие;

6) выделить множество $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов эксперимента E, замкнутое относительно теоретико-множественных операций над случайными событиями.

3.2. Типы σ-алгебр событий произвольного статистически устойчивого эксперимента E

Для произвольного статистически устойчивого эксперимента E в теории вероятностного моделирования в основном используются следующие σ-алгебры событий.

• Так называемая тривиальная σ-алгебра вида $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$, состоящая из достоверного исхода Ω и невозможного события $\varnothing$. В этом простейшем случае в результате проведения эксперимента E можно фиксировать или наблюдать только достоверное событие. С практической точки зрения система $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$ оказывается бесполезной (самой «бедной»), ибо нельзя наблюдать другие исходы реального эксперимента E, кроме достоверного исхода Ω.

• Порожденная только исходом A σ-алгебра $\mathcal{F} = \{A, \overline{A}, \Omega, \varnothing\}$. Для статистически устойчивого эксперимента E множество $\mathcal{F} = \{A, \overline{A}, \Omega, \varnothing\}$ содержит исходы A, $\overline{A}$, достоверный исход Ω и невозможное событие $\varnothing$. По отношению к эксперименту E система событий $\mathcal{F} = \{A, \overline{A}, \Omega, \varnothing\}$ является более информативной, чем $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$. В качестве простого примера такого эксперимента можно рассмотреть работу персонального компьютера за некоторое фиксированное время T, если пользователю интересна или наблюдаема только следующая информация: произошел отказ компьютера (случайное событие A) или нет (случайное событие $\overline{A}$).

• Совокупность $\mathcal{F} = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ всех, включая и пустое множество, подмножеств достоверного исхода Ω. Здесь Ω — множество описаний (имен, кодов, меток) всех выбранных элементарных исходов. Если множество $\Im'$ всех выбранных элементарных исходов счетно (конечно или бесконечно), то множество $\mathcal{F} = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ — самая информативная («богатая») σ-алгебра и вполне обозримая, именно поэтому ее и рассматривают в качестве множества $\Im$ всех допустимых исходов статистически устойчивого эксперимента E.

3.3. Методы построения теоретико-множественных моделей статистически устойчивых экспериментов E

Выбор множества $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов существенно зависит от структуры множества $\Im$ допустимых исходов, от выбора пространства $\Im'$ элементарных исходов и от средств и целей исследования статистически устойчивых экспериментов E. Так как теоретико-множественная модель $(\Omega,\ \mathcal{F})$ включает пространство Ω описаний элементарных исходов, то естественно множество $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов строить на основе выбора элементарных исходов. В простейшем варианте, когда выбран единственный элементарный исход $A' = \Omega = \{\omega\}$, легко находим, что $\Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\} = \{\Omega, \varnothing\} = \mathcal{F}$. В более сложном случае, когда выбраны два элементарных исхода, $A = A'_1 = \{\omega_1\}$ и $\overline{A} = A'_2 = \{\omega_2\}$, получим, что множество $\Im' = \{A, \overline{A}\}$, множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ и множество $\Im = \{B : B \subseteq \Omega\} = \{A, \overline{A}, \Omega, \varnothing\} = \mathcal{F}$.

В связи с этим заметим, что незначительное увеличение числа выбранных элементарных исходов или, что то же самое, числа элементов множества Ω связано с существенным увеличением числа всех допустимых исходов статистически устойчивого эксперимента E. Например, если достоверное событие Ω состоит из n точек (описаний) ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$, то множество $\mathcal{F} = \Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_q\}$ уже включает $q = 2^n$ всех допустимых исходов эксперимента E. Доказательство этого факта проведем методом индукции по n. Если множество $\Omega = \{\omega_1\}$, то $\Im = \{\{\omega_1\}, \varnothing\}$, $q = 2 = 2^1$ и, значит, равенство $q = 2^n$ установлено при $n = 1$. Предположим, что это равенство справедливо для некоторого числа n, и покажем, что оно выполняется для $n+1$. Пусть множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+1}\}$. Тогда получим, что

$$\Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\} = \{A\colon A \subseteq \Omega, \omega_{n+1} \in A\} \cup \{A\colon A \subseteq \Omega\backslash\{\omega_{n+1}\}\},$$

где $\{A\colon A \subseteq \Omega, \omega_{n+1} \in A\}$ — множество всех подмножеств множества Ω, которые содержат ω_{n+1}, и $\{A : A \subseteq \Omega\backslash\{\omega_{n+1}\}\}$ — множество всех подмножеств множества Ω, которые не содержат элемент ω_{n+1}. Так как множество $\{A\colon A \subseteq \Omega, \omega_{n+1} \in A\} = \{A \cup \{\omega_{n+1}\} : A \subseteq \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}\}$, то это множество состоит по предположению из 2^n элементов. Множество $\{A\colon A \subseteq \Omega\backslash\{\omega_{n+1}\}\} = \{A\colon A \subseteq \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}\}$ содержит 2^n элементов. Множества $\{A\colon A \subseteq \Omega, \omega_{n+1} \in A\}$, $\{A\colon A \subseteq \Omega\backslash\{\omega_{n+1}\}\}$ не содержат одинаковых элементов. Поэтому множество $\Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ включает $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ элементов. Этим заканчивается доказательство утверждения.

Итак, появляется возможность представить большое число 2^n всех исходов статистически устойчивого эксперимента E через относительно малое число n всех выбранных элементарных исходов. Например, при $n = 23$ непосредственно находим $q = 2^n = 8388608$. Однако в случае несчетного множества Ω объект $\Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ оказывается слишком широким и необозримым. Поэтому в случае несчетного множества Ω в качестве множества всех наблюдаемых исходов статистически устойчивого эксперимента E выбирают, как правило, σ-алгебру $\mathcal{F}$, более «узкую», чем σ-алгебра $\{A\colon A \subseteq \Omega\}$. Приведем пример такой ситуации.

Пример 3.1. Пусть опыт E заключается в непреднамеренном выборе точки на отрезке $[0, 1]$ действительной оси. Результат такого эксперимента может состоять в том, что точка выбрана из некоторого подмножества отрезка $[0, 1]$. Простыми и хорошо известными являются стандартные подмножества отрезка $[0, 1]$:

— отрезок $[a, b] = \{\omega = x\colon a \leqslant x \leqslant b\}$;

— замкнутый слева и открытый справа промежуток $[a, b) = \{\omega = x\colon a \leqslant x < b\}$;

— открытый слева и замкнутый справа промежуток $(a, b] = \{\omega = x\colon a < x \leqslant b\}$;

— интервал $(a, b) = \{\omega = x\colon a < x < b\}$;

— одноточечное подмножество $[a, a] = \{x\colon a \leqslant x \leqslant a\} = \{a\}$.

В рассматриваемом эксперименте символ $\omega = x$ — абсцисса (описание, имя, код, метка) выбранной точки (элементарного исхода) вида $\{x\}$, а достоверный исход $\Omega = [0, 1] = \{\omega = x\colon 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ — несчетное множество. В большинстве случаев совокупность $\mathcal{F}$ всех наблюдаемых исходов этого эксперимента совпадает с самой «узкой», или наименьшей, σ-алгеброй из борелевских множеств, содержащей, естественно, все указанные выше тестовые подмножества отрезка $[0, 1]$. Как известно, такая σ-алгебра, называемая борелевской, является достаточно широким классом исходов эксперимента E с точки зрения практических целей. О целесообразности использования борелевской σ-алгебры и ее точном определении будет еще сказано в следующих лекциях. Наряду с борелевской σ-алгеброй, в качестве множества $\mathcal{F}$ всех наблюдаемых исходов этого эксперимента рассматривают также более «широкую» σ-алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, для которых определено понятие длины. Эту σ-алгебру называют системой лебеговских подмножеств отрезка $[0, 1]$.

Этот несколько иллюстративный пример показывает, что одному и тому же множеству $\Im'$ всех элементарных исходов некоторого статистически устойчивого эксперимента E могут отвечать разные множества его наблюдаемых исходов. Поэтому задание статистически устойчивого эксперимента E определяется, в конечном счете, множеством $\Im$ всех его допустимых исходов. Это необходимо всегда принимать во внимание при построении адекватной вероятностной модели эксперимента E.

Итак, множество $\Im$ всех допустимых исходов и множество $\Im'$ элементарных исходов в общем случае следует выбирать относительно «большими», а множество $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов не обязательно должно быть наиболее «широким». Множество $\mathcal{F}$ существенно зависит от различных целей изучения эксперимента E и оно, как правило, содержит только те допустимые события, которые исследователь может наблюдать. Значит, если множества $\Im$ и Ω для эксперимента E определены заранее некоторым образом, то допускается рассмотрение различных σ-алгебр $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов. Например, конкретная σ-алгебра $\mathcal{F}$ может не содержать некоторые или все элементарные исходы. В простейших случаях, когда совокупность $\Im'$ всех элементарных исходов эксперимента E является счетным, например конечным, множество Ω однозначно определяет наиболее широкое множество $\{A\colon A \subseteq \Omega\}$. Если при этом множество $\Im = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$ есть множество всех допустимых исходов, то, как правило, выбирают $\mathcal{F} = \Im$. В общем случае, если $\Im$ представляет собой σ-алгебру и является обозримым математическим объектом, то упорядоченную пару вида $(\Omega,\ \Im)$ часто выбирают в качестве теоретико-множественной модели $(\Omega,\ \mathcal{F})$ реального опыта E.

Методы построения теоретико-множественных моделей статистически устойчивых эволюционных экспериментов E подробно рассмотрены в учебнике [9] на страницах 59–62.

Тестовые вопросы к лекции 3

1. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ и $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Определить σ-алгебру, порожденную только событиями A и B.

• Искомая σ-алгебра имеет вид: $\mathcal{F} = \{A, \overline{A}, \Omega, \varnothing\}$.

• Искомая σ-алгебра имеет вид: $\mathcal{F} = \{A, B, \overline{A}, \overline{B}, A \cup B, \overline{A} \cup \cup \overline{B}, \overline{A \cup B}, A \cap B\}$.

• Искомая σ-алгебра имеет вид: $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$.

2. Тип — одиночный выбор.

Над поверхностью стола наудачу подбрасываются монета с номером один и монета с номером два. На одной стороне каждой монеты изображен орел (О), а на другой — решка (Р). Наблюдается сторона каждой из подброшенных монет. Определите из предложенных вариантов теоретико-множественную модель $(\Omega,\ \mathcal{F})$ для этого эксперимента.

• Искомая модель имеет вид: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \varnothing\}$, где событие $\{\omega_1\}$ означает появление двух орлов и событие $\{\omega_2\}$ означает появление не более одного орла.

• Искомая модель имеет вид: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \{\{\omega_1\},\ \{\omega_2\},\ \{\omega_1, \omega_2\},\ \varnothing\}$, где событие $\{\omega_1\}$ означает появление двух орлов и событие $\{\omega_2\}$ означает появление не более одного орла.

• Искомая модель имеет вид: $\Omega = \{(\text{Р}, \text{Р}), (\text{Р}, \text{О}), (\text{О}, \text{Р}), (\text{О}, \text{О})\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$, где событие $\{(\text{Р}, \text{Р})\}$ означает появление решки на первой монете и на второй монете, событие $\{(\text{Р}, \text{О})\}$ означает появление решки на первой монете и орла на второй монете. Аналогичный смысл имеют события $\{(\text{О}, \text{Р})\}$, $\{(\text{О}, \Gamma)\}$.

3. Тип — одиночный выбор.

Имеется три одинаковых шара, и они распределяются по трем разным ящикам: Я_1, Я_2 и Я_3. Наблюдается размещение шаров в ящиках. Найти описание такого случайного события A этого эксперимента, когда в каждом ящике будет не более двух шаров.

• Искомое описание имеет вид: $A = \{\{1,1,1\},\{2,1,0\}\}$, где множество $\{1,1,1\}$ представляет собой описание такого исхода эксперимента, когда каждый из ящиков содержит по одному шару, и множество $\{2,1,0\}$ — описание такого исхода эксперимента, когда все шарики попали в два ящика.

• Искомое описание имеет вид: $A = \{(1,1,1),\ (2,1,0),\ (2,0,1),\ (1,2,0),(1,0,2),(0,2,1),(0,1,2)\}$, где вектор (x_1,x_2,x_3) есть описание такого исхода эксперимента, когда число шаров в ящике $Я_i$ будет равно x_i при каждом $i = 1,2,3$.

• Искомое описание события есть $A = \{(1,1,1),\ (2,1,0),\ (1,2,0),\ (0,2,1)\}$, где (x_1,x_2,x_3) является описанием такого исхода эксперимента, когда число шаров в ящике $Я_i$ будет x_i при каждом $i = 1,2,3$.

4. Тип — одиночный выбор.

На трассе нефтепровода между городами $Г_1$ и $Г_2$ в определенный момент времени произошла случайная авария. Расстояние между городами равно 24 км. Измеряется расстояние от $Г_1$ до места аварии. Определить адекватную теоретико-множественную модель для этого эксперимента.

• Модель имеет вид: $\Omega = [0,24] = \{\omega = x\colon 0 \leqslant x \leqslant 24\}$, $\mathcal{F} = \{[0,24],\varnothing\}$, где символ $\omega = x$ — расстояние от $Г_1$ до места аварии.

• Модель имеет вид: $\Omega = [0,24] = \{\omega = x\colon 0 \leqslant x \leqslant 24\}$, множество $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega$, длина множества A существует$\}$, где символ $\omega = x$ — расстояние от $Г_1$ до места аварии.

• Модель имеет вид: $\Omega = [0,24] = \{\omega = x : 0 \leqslant x \leqslant 24\}$, $\mathcal{F} = \{[0,12],(12,24],[0,24],\varnothing\}$, где символ $\omega = x$ — расстояние от $Г_1$ до места аварии нефтепровода.

5. Тип — одиночный выбор.

Наудачу выбирается группа из 20 человек, и интересуются числом курящих. Определить теоретико-множественную модель для этого эксперимента и математическое описание такого случайного события A, когда большинство людей в группе будут курящими.

• Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{20}\}$, $\mathcal{F} = \{A : A \subset \{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{20}\}\}$, $A = \{\omega_{11},\omega_{12},\ldots,\omega_{20}\}$ и символ ω_i означает, что в отобранной группе будет ровно $i = 1,\ldots,20$ курящих.

• Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где $\Omega = \{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{20}\}$, $\mathcal{F} = \{\{\omega_{11},\ldots,\omega_{20}\},\ \{\omega_0,\ \omega_1,\ldots,\omega_{10},\ \Omega,\ \varnothing\}$, $A = \{\omega_{11},\omega_{12},\ldots,\omega_{20}\}$ и символ ω_i означает, что в отобранной группе будет ровно $i = 0,1,\ldots,20$ курящих.

• Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где множество $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{20}\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{20}\}\}$, $A = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \ldots, \omega_{20}\}$ и символ ω_i означает, что в отобранной группе будет ровно $i = 0, 1, \ldots, 20$ курящих.

6. Тип — множественный выбор.

На отрезке $[0, 2]$ оси Ox выбирается наудачу точка. Определить для этого эксперимента адекватные теоретико-множественные модели $(\Omega,\ \mathcal{F})$.

• Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где множество $\Omega = [0, 2] = \{\omega = x\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset [0, 2]$, длина множества A существует$\}$ и символ $\omega = x$ есть абсцисса выбранной точки.

• Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где множество $\Omega = [0, 2] = \{\omega = x\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset [0, 2]$, A есть борелевское множество$\}$ и символ $\omega = x$ — абсцисса выбранной точки.

• Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где множество $\Omega = [0, 2] = \{\omega = x\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset [0, 2]\}$ и символ $\omega = x$ есть абсцисса выбранной точки.

• Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где множество $\Omega = [0, 2] = \{\omega = x\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\}$, $\mathcal{F} = \{[0, 1],\ (1, 2],\ [0, 2],\ \varnothing\}$ и символ $\omega = x$ есть абсцисса выбранной точки.

7. Тип — множественный выбор.

Узел компьютера состоит из трех последовательно соединенных элементов. При испытании каждый элемент может оказаться исправным или неисправным. Определить описание такого случайного исхода A, когда два элемента будут неисправными.

• Пусть при $i = 1, 2, 3$ компонента x_i вектора (x_1, x_2, x_3) принимает значение 0, если i-й элемент исправен, и значение 1 в противном случае. Описание исхода имеет вид: $A = \{(0, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0)\}$.

• Пусть при $i = 1, 2, 3$ компонента x_i вектора (x_1, x_2, x_3) принимает значение 0, если i-й элемент неисправен, и значение 1 в противном случае. Описание исхода имеет вид: $A = \{(0, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0)\}$.

• Пусть при $i = 1, 2, 3$ компонента x_i вектора (x_1, x_2, x_3) принимает значение 0, если i-й элемент неисправен, и значение 1 в противном случае. Описание исхода имеет вид: $A = \{(0, 0, 1),\ (1, 0, 0),\ (0, 1, 0)\}$.

• Пусть при $i = 1, 2, 3$ компонента x_i вектора (x_1, x_2, x_3) принимает значение 0, если i-й элемент исправен, и значение 1 в противном случае. Описание исхода имеет вид: $A = \{(0, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$.

Лекция 4

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АПРИОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ИНТУИТИВНЫЙ И КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ

4.1. Субъективный способ измерения шанса наступления случайных событий

В предыдущих лекциях каждому статистически устойчивому эксперименту E, который задается комплексом априори фиксированных условий $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots\}$ и множеством $\Im$ допустимых исходов, мы ставили в соответствие теоретико-множественную модель $(\Omega,\ \mathcal{F})$. Эта модель изучает свойства эксперимента E с качественной точки зрения. В повседневной деятельности люди издавна проводят или наблюдают различные эксперименты. В этом случае первый и самый трудный вопрос состоит в том, чтобы измерить некоторым числом наше интуитивное представление о конкретном результате эксперимента. Например, у людей разного возраста, преодолевших одно и то же расстояние, возникает неодинаковое ощущение усталости. Затем, чтобы сделать это ощущение усталости понятием более ясным, люди стали приближенно измерять расстояние в некоторых единицах, например в шагах, локтях и т. д. Прошло большое время, пока человечество не научилось объективно измерять чувство усталости от преодоления расстояния, например в метрах. И тогда появилась возможность обратного сравнения: зная расстояние между пунктами, каждый человек для себя определяет, насколько он устанет, пройдя его. Аналогичная ситуация усталости возникала, когда человек поднимал некоторый груз, например ведро с водой из колодца. Это побудило людей количественно измерять способность груза причинять им усталость в некоторых единицах, например в пудах, фунтах, граммах и т. д.

В настоящее время люди с некоторой степенью точности научились измерять расстояние между населенными пунктами, вес тела, его массу, температуру и т. д. При этом основной метод приближенного измерения заключается в выборе так называемого эталонного результата эксперимента с целью его доступного измерения. Далее тем или иным способом сравнивают представление об эталоне с представлением о некотором другом результате и тем самым получают приближенное измерение последнего. Перейдем теперь к аналогичной и в то же время необычно сложной ситуации.

Человек издавна наблюдал различные явления природы: смену дня и ночи, смену времен года, выпадение осадков, изменение температуры воздуха, пожары, землетрясения, падения метеоритов и т. д. Он мог точно предсказать некоторые из перечисленных явлений, например смену дня и ночи, времен года. Какие-то мог предвидеть с той или иной степенью уверенности (выпадение осадков, изменение температуры воздуха) и, наконец, явления типа пожаров, землетрясений, падения метеоритов он был бессилен предугадать. Последние три типа явлений суть исходы некоторого статистически устойчивого эксперимента E, для которого мы можем построить теоретико-множественную модель $(\Omega, \mathcal{F})$.

При достаточно большом числе N наблюдений за экспериментом E у человека возникает некоторое чувство уверенности в возможности предсказания каждого из случайных явлений $A \in \mathcal{F}$. Поэтому у субъекта на основе его интуиции и наблюдений возникает желание количественно измерить представление о возможном наступлении некоторого случайного явления A. К сожалению, у разных людей представления о шансе наступления некоторого случайного явления A неодинаковы и количественному измерению поддаются с большим трудом и с грубым приближением. Однако для каждого человека очевидно, что при проведении N раз эксперимента E в одних и тех же априори заданных условиях $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots\}$ событие A наверное наступает около $N \times \mathbf{P}_{\text{c}}(A)$ раз. Здесь число $\mathbf{P}_{\text{c}}(A)$ назначается субъектом, измеряет шанс наступления события A и удовлетворяет естественному условию $0 \leqslant \mathbf{P}_{\text{c}}(A) \leqslant 1$. В качестве эталонных событий обычно выбирают достоверное событие Ω и невозможное событие $\varnothing$. Поэтому $\mathbf{P}_{\text{c}}(\Omega) = 1$ и $\mathbf{P}_{\text{c}}(\varnothing) = 0$. На содержательном уровне число $1/\mathbf{P}_{\text{c}}(A)$ показывает, во сколько раз случайное событие A наступает реже, чем достоверное Ω. Число $\mathbf{P}_{\text{c}}(A)$ будем называть субъективной вероятностью события A. Субъективное назначение вероятности для случайных событий $A \in \mathcal{F}$ является ее первым и наиболее грубым приближенным вычислением. Заметим, что в учебнике [9] предлагаются непростые аксиомы, которые позволяют единственным образом определить субъективные вероятности $\mathbf{P}_c(A) = \mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$. При этом относительная частота $\mu(A, N)/N$ при неограниченном увеличении N группируется как угодно близко около числа $\mathbf{P}_c(A)$. В этом случае упорядоченную тройку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_c(A))$ называют вероятностной моделью или вероятностным пространством априорного эксперимента. С другой стороны, приближенное измерение субъектом шанса (чувства) наступления исхода A имеет большое значение для понимания природы и сути случайного эксперимента E и развивает у исследователей навыки вероятностно-статистического мировоззрения. Действительно, если $\mathbf{P}_c(A)$ близко к единице, то субъект может сказать, что событие A, по-видимому, наступит при единичном проведении эксперимента E. Напротив, при $\mathbf{P}_c(A)$, близком к нулю, событие A скорее всего не наступит при единичном проведении эксперимента E. И, наконец, если $\mathbf{P}_c(A)$ близко к $1/2$, то факт наступления результата A вызывает у субъекта слишком неопределенные и даже непонятные чувства. Для иллюстрации рассмотрим примеры назначения субъективных вероятностей.

Пример 4.1. Из колоды игральных карт, состоящей только из дамы, короля и туза, наудачу вынимается одна карта. Назначить субъективные вероятности исходов опыта.

Решение. Обозначим через ω_1, ω_2 и ω_3 описание элементарного исхода, который заключается в появлении дамы, короля и туза соответственно. В этом случае достоверный исход $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$, $\Im = \mathcal{F} = \{\Omega,\ \varnothing,\ \{\omega_1\},\ \{\omega_2\},\ \{\omega_3\},\ \{\omega_1,\ \omega_2\},\ \{\omega_1,\ \omega_3\},\ \{\omega_2, \omega_3\}\}$. Субъекту, исходя из интуитивного представления, нетрудно предположить, что карта с изображением дамы — событие $\{\omega_1\}$ — выпадает, скорее всего, в три раза реже, чем появляется любая из трех карт — достоверное событие Ω. Поэтому при $\mathbf{P}_c(\Omega) = 1$ можно принять, что субъективная вероятность $\mathbf{P}_c(\{\omega_1\}) \approx 1/3$. Аналогично получим, что $\mathbf{P}_c(\{\omega_2\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_3\}) \approx 1/3$. Далее ясно, что туз выпадает в два раза реже, чем дама или король — событие $\{\omega_1, \omega_2\}$. В силу этого $\mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_2\}) \approx 2/3$. Аналогично находим, что субъективная вероятность $\mathbf{P}_c(\{\omega_1, \omega_3\}) = \mathbf{P}_c(\{\omega_2, \omega_3\}) \approx 2/3$. Назначение субъективных вероятностей $\mathbf{P}_c(A)$, $A \in \mathcal{F}$, и, следовательно, упорядоченной тройки $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}_c(A))$ для этого простого эксперимента определено.

4.2. Определение вероятности для опытов с конечным множеством равновозможных исходов

Субъективный подход, как уже отмечалось выше, дает различные числа $\mathbf{P}_c(A)$ при его использовании для измерения шанса наступления случайного события A. Поэтому естественно желание предложить другие подходы, которые измеряли бы шанс наступления случайного события A в виде одного и того же числа $\mathbf{P}(A)$ и независимо от субъекта. Как правило, для этого рассматривают некоторые классы экспериментов, которые выделяются с помощью тех или иных аксиом (см. [9], с. 68) или ограничений. Так, для совокупности «классических экспериментов» имеют место два ограничения:

1) конечное число элементарных исходов, каждый из которых можно наблюдать;

2) симметрия эксперимента E, которая позволяет на интуитивном уровне определенно говорить о равновозможных шансах наступления каждого из элементарных исходов.

Такого рода опыты рассмотрены в примерах 1.1, 2.1 и 4.1. Люди давно умели объективно измерять вероятности (шансы наступления) различных событий, производить вычисления с этими вероятностями, а также использовать результаты произведенных вычислений в практической деятельности и научных исследованиях. Это умение определять вероятности непосредственно связано с нашими интуитивными представлениями о равновозможности и симметрии, а последние не подлежат формальному анализу.

Пример 4.2. Рассмотрим опыт по извлечению белого или черного шара из урны, содержащей несколько одинаковых по размеру, весу и другим осязаемым признакам шаров, тщательно перемешанных перед извлечением. Если число белых шаров не равно числу черных, то можно присвоить каждому шару его единственный номер. Этим приемом добиваемся симметрии эксперимента. В данной ситуации говорят о равновозможности появления любого номера шара или о том, что каждый шар имеет одинаковый шанс появления.

Пусть эксперименту E поставлена в соответствие теоретико-множественная модель $(\Omega,\ \mathcal{F})$. Тогда согласно ограничениям (1) и (2) будем иметь: $\Im' = \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_n\}$ и $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Элементарные события $A'_k = \{\omega_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, образуют полную группу несовместимых равновозможных событий. Составим теперь множество $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$ наблюдаемых событий. Итак, множество $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_q\}$, $q = 2^n$. Другими словами, множество $\mathcal{F}$ является множеством всех подмножеств множества Ω. Легко установить, что множество $\mathcal{F}$ образует σ-алгебру событий. Пусть при $m \leqslant n$ случайное событие

$$A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots, \omega_{a_m}\} = \{\omega_{a_1}\} \cup \{\omega_{a_2}\} \cup \ldots \cup \{\omega_{a_m}\} = \\ = A'_{a_1} \cup A'_{a_2} \cup \ldots \cup A'_{a_m}.$$

Заметим, что элементарные события $A'_{a_1}, A'_{a_2}, \ldots, A'_{a_m}$ благоприятствуют появлению события A.

Определение 4.1. Если $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots, \omega_{a_m}\}$, где $m \leqslant n$, и все элементарные события равновозможны, то вероятность наступления события A равна $\mathbf{P}(A) = m/n$. Упорядоченную тройку (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A)$) называют вероятностной моделью априорного эксперимента.

Иначе, вероятностью события A называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих появлению данного события, к числу всех возможных элементарных событий. Отсюда следует, что вероятность $\mathbf{P}(A'_k) = 1/n$ и $\mathbf{P}(A) = m/n = \mathbf{P}(A'_{a_1}) + \mathbf{P}(A'_{a_2}) + \ldots + \mathbf{P}(A'_{a_m})$. Итак, классическое определение вероятностей основывается на так называемом принципе равных возможностей Лапласа, Бернулли, Байеса. Рассмотрим пример на классическое определение вероятностей.

4.3. Задача Даламбера

Симметричная монета непреднамеренно бросается два раза на поверхность стола. Найти вероятность того, что хотя бы раз появится орел (ожидаемое по Даламберу событие A).

Решение. По одной из легенд, Даламбер и его последователи рассуждали следующим образом. Орел появится либо при первом бросании, и в этом случай второе бросание не нужно, либо только при втором, либо орел совсем не выпадает. Всех элементарных случаев три. Из них благоприятствуют ожидаемому событию A только два. Следовательно, искомая вероятность равна 2/3. Но практика показывала, что относительная частота $\mu(A, N)/N$ при неограниченном увеличении N колеблется (группируется) как угодно близко около числа 3/4. Так, при 1000 проведенных опытов приблизительно в 750 случаях появлялось событие A.

Приведем правильное решение задачи Даламбера [8, 9]. Для этого построим теоретико-множественную модель (Ω, $\mathcal{F}$) этого эксперимента. Пусть $\Sigma = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots\}$, где u_1 — выбрана симметричная монета определенного достоинства, u_2 — выбран механизм бросания монеты, u_3 — монета бросается два раза, u_4 — выбрана поверхность стола, u_5 — выбрана достаточная освещенность для определения выпавшей стороны монеты и т. д. Итак, перечислены основные условия u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 проведения данного эксперимента.

Выберем теперь элементарные исходы и математический язык для их описания. Пусть $\omega_1 = (0,0)$ означает описание такого элементарного исхода, когда выпадает орел при первом и втором бросках; $\omega_2 = (0,1)$ означает описание такого элементарного исхода, когда выпадает орел при первом броске и решка при втором; $\omega_3 = (1,0)$ означает описание такого элементарного исхода, когда выпадает решка при первом броске и орел при втором; $\omega_4 = (1,1)$ означает описание такого элементарного исхода, когда выпадает решка при первом и втором бросках. Тогда достоверное событие $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{16}\}$, например, $A_i' = A_i = \{\omega_i\}$ — элементарное случайное событие при $i = 1,2,3,4$ и $A = A_{11} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — случайное событие (ожидаемое по Даламберу событие), которое заключается в том, что хотя бы раз появится орел. В этом случае $n = 4$, $m = 3$ и $\mathbf{P}(A_{11}) = 3/4$ согласно классическому определению вероятности. Отметим типичные ошибки первого решения.

• Нарушено в действительности не только условие проведения эксперимента, но и условие симметрии его проведения, поскольку если орел появился при первом броске, то отказывались от проведения второго броска.

• Выбранные по Даламберу элементарные исходы не равновозможны, т. е. имеют разные шансы наступления, и, следовательно, классическое определение вероятности применять нельзя.

Тестовые вопросы к лекции 4

1. Тип — множественный выбор.

Колода в 36 карт делится пополам наудачу. Определите $(\Omega, \mathcal{F})$ для этого опыта и вероятность исхода B, когда в каждой части будет одинаковое число черных и красных карт.

• Пусть $M = \{1, 2, \ldots, 36\}$ — множество номеров карт. Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega, \mathcal{F})$, где $\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{18}\}\colon x_1 \in M,\ x_2 \in M, \ldots, x_{18} \in M;\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j;\ i,j = 1,2,\ldots,18\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$. Вероятность $\mathbf{P}(B) = C_{18}^9 C_{18}^9 / C_{36}^{18}$.

• Пусть $M = \{1, 2, \ldots, 36\}$ есть множество номеров карт. Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где $\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{18}\}\colon\ x_1 \in M,\ x_2 \in M, \ldots, x_{18} \in M;\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, 18\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$. Вероятность $\mathbf{P}(B) = 0{,}52$.

• Пусть $M = \{1, 2, \ldots, 36\}$ есть множество номеров карт. Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{18})\colon x_1 \in M,\ x_2 \in M, \ldots, x_{18} \in M;\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, 18\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$. Вероятность $\mathbf{P}(B) = 0{,}1$.

• Пусть $M = \{1, 2, \ldots, 36\}$ есть множество номеров карт. Теоретико-множественная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где $\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{18}\}\colon\ x_1 \in M,\ x_2 \in M, \ldots, x_{18} \in M;\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, 18\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$. Вероятность $\mathbf{P}(B) \approx 0{,}26$.

2. Тип — одиночный выбор.

Две игральные кости брошены наудачу один раз. Определите для этого опыта $(\Omega,\ \mathcal{F})$ и вероятность события B, когда сумма выпавших очков представляет собой простое число.

• Теоретико-множественная модель имеет вид: $\Omega = \{\{x_1, x_2\}\colon x_1, x_2 \in \{1, 2, \ldots, 6\},\ \mathcal{F} = \{A : A \subset \Omega\}$, где x_1 и x_2 означают число очков на одной кости и соответственно на другой. Вероятность $\mathbf{P}(B) = 8/21$.

• Теоретико-множественная модель имеет вид: $\Omega = \{(x_1, x_2)\colon x_1, x_2 \in \{1, 2, \ldots, 6\},\ \mathcal{F} = \{A : A \subset \Omega\}$, где x_1 и x_2 означают число очков на одной кости и соответственно на другой. Вероятность $\mathbf{P}(B) = 5/12$.

• Теоретико-множественная модель имеет вид: $\Omega = \{y\colon y \in \{2, 3, \ldots, 12\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$, где y — сумма выпавших очков. Вероятность $\mathbf{P}(B) = 5/11$.

3. Тип — одиночный выбор.

В урне имеется десять черных и три белых шара. Наудачу извлекают один шар. Определите для этого опыта $(\Omega,\ \mathcal{F})$ и вероятность исхода B, когда появляется белый шар.

• Теоретико-множественная модель имеет вид: $\Omega = \{x\colon x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$, где x означает номер извлеченного шара. Вероятность $\mathbf{P}(B) = 3/10$.

• Теоретико-множественная модель имеет вид: $\Omega = \{x\colon x \in \{1, 2, \ldots, 13\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$, где x означает номер извлеченного шара. Вероятность $\mathbf{P}(B) = 3/13$.

• Теоретико-множественная модель имеет вид: $\Omega = \{y\colon y \in \{1, 2\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$, где $y = 1$, если появляется белый шар, и $y = 2$, если появляется черный шар. Вероятность $\mathbf{P}(B) = 1/2$.

4. Тип — проверка ответов.

В партии из r изделий имеется q бракованных. Из партии наугад выбирается d изделий. Определить: 1) вероятность $\mathbf{P}(A(r,q,d,l))$ того, что среди d изделий имеется ровно l бракованных; 2) $\mathbf{P}(A(r,q,d,l))$ при $r=5$, $q=3$, $d=3$, $l = 2$; 3) $\mathbf{P}(A(r,q,d,l))$ при $r=6$, $q=4$, $d=4$, $l=3$.

Ответы:

1) вероятность $\mathbf{P}(A(r,q,d,l)) = C_q^l C_{r-q}^{d-l}/C_r^d$;

2) вероятность $(A(5,3,3,2)) = 3/5$;

3) вероятность $\mathbf{P}(A(6,4,4,3)) = 8/15$.

5. Тип — проверка ответов.

Наудачу выбирается k людей. Вычислить приближенное значение вероятности $\mathbf{P}(A(k))$ события $A(k)$, заключающегося в том, что по крайней мере у двух человек дни рождения совпадают: 1) при $k=10$; 2) при $k=30$; 3) при $k=50$.

Ответы:

1) вероятность $\mathbf{P}(A(10)) \approx 0{,}117$;

2) вероятность $\mathbf{P}(A(30)) \approx 0{,}706$;

3) вероятность $\mathbf{P}(A(50)) \approx 0{,}970$.

6. Тип — проверка ответов.

Из игральной колоды, в которой имеется r карт, а валет, дама и король являются фигурами, вынимаются наудачу две карты. Вычислить вероятность $\mathbf{P}(A(r))$ того, что вынуты две фигуры при: 1) $r=36$; 2) $r=37$; 3) $r=52$.

Ответы:

1) вероятность $\mathbf{P}(A(36)) = 11/105$;

2) вероятность $\mathbf{P}(A(37)) = 11/111$;

3) вероятность $\mathbf{P}(A(52)) = 11/221$.

7. Тип — проверка ответов.

Бросают один раз три игральные разноцветные кости. Пусть события A_1, A_2 и A_3 означают выпадение трех различных чисел очков на гранях костей, суммы очков 11 и суммы очков 12 соответственно. Вычислить вероятности: 1) $\mathbf{P}(A_1)$; 2) $\mathbf{P}(A_2)$; 3) $\mathbf{P}(A_3)$.

Ответы:

1) вероятность $\mathbf{P}(A_1) = 5/9$;

2) вероятность $\mathbf{P}(A_2) = 1/8$;

3) вероятность $\mathbf{P}(A_3) = 25/216$.

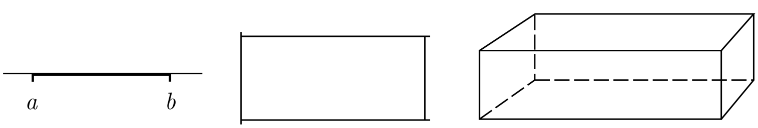
Лекция 5

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АПРИОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ЭМПИРИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ

5.1. Вычисление вероятности для испытаний с несчетным числом равновозможных исходов

Имеется большое число симметричных экспериментов, в которых мыслимо несчетное множество элементарных равновозможных исходов. Тем не менее каждому элементарному исходу $A' = \{\omega\}$ из $\Im'$ уже нельзя приписать одну и ту же положительную вероятность, так как случайное событие A может быть представлено в виде объединения бесконечного числа элементарных событий. Поэтому вероятность $\mathbf{P}(A)$ такого события нельзя вычислить суммированием вероятностей $\mathbf{P}(\{\omega\})$ тех элементарных исходов, каждый из которых может наступать одновременно с исходом A. Для таких симметричных экспериментов положительная вероятность уже задается для некоторых случайных событий, которые не совпадают ни с одним из элементарных исходов. В связи с этим переходим к понятию геометрической вероятности. Пусть a, b, c, d, u, v суть некоторые действительные числа и реальный эксперимент E таков, что множество Ω описаний ω всех элементарных равновозможных исходов A' можно представить некоторой совокупностью G в виде:

1) некоторого промежутка (см. рис. $5.1, a$) на действительной оси, имеющего положительную длину (mes), например отрезка $G = [a, b]$;



а *б* *в*

Рис. 5.1

2) некоторой геометрической фигуры (см. рис. 5.1, *б*) на плоскости, имеющей положительную площадь (mes), например прямоугольника $G = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$;

3) некоторой трехмерной фигуры (см. рис. 5.1, *в*) в пространстве, имеющей строго положительный объем (mes), например параллелепипеда $G = \{(x, y, z)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ u \leqslant z \leqslant v\}$.

Вместо реального эксперимента E будем теперь рассматривать адекватный ему модельный эксперимент E_m. Эксперимент E_m заключается в том, что в область G непреднамеренно бросается точка. Указанная адекватность такова, что случайный выбор любого элементарного исхода эксперимента E с описанием, например, в виде $\omega = (x, y, z)$ взаимно-однозначно соответствует непреднамеренному выбору точки из области G с описанием $\omega_m = (x, y, z)$, и наоборот. Термин «непреднамеренный выбор» на содержательном уровне означает, что ни одному положению точки внутри области G не отдается предпочтения. Этим обеспечивается симметрия экспериментов E и E_m. Более того, наблюдаемый исход A эксперимента E и наблюдаемый исход A_m модельного эксперимента E_m взаимно-однозначно соответствуют друг другу, если каждый из этих исходов представлен в виде одного и того же множества $A_m \subset G$. Другими словами, при наблюдении случайного события A мы наблюдаем случайное событие A_m, и наоборот. В качестве теоретико-множественной модели эксперимента E_m выберем упорядоченную пару $(\Omega_m,\ \mathcal{F}_m)$, где $\Omega_m = G$, $\mathcal{F}_m = \{g\colon g \subset G,\ \mathrm{mes}\,(g)\ \text{существует}\}$ и $\mathrm{mes}\,(G) \neq 0$. Так как между наблюдаемыми исходами экспериментов E и E_m установлено взаимно-однозначное соответствие, то в качестве теоретико-множественной модели эксперимента E естественно выбрать упорядоченную пару $(\Omega,\ \mathcal{F})$, где $\Omega = \Omega_m = G$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m = \{g\colon g \subset G,\ \mathrm{mes}\,(g)\ \text{существует}\}$. Итак, разным экспериментам соответствует одна и та же теоретико-множественная модель.

Число $\mathrm{mes}\,(g)/\mathrm{mes}\,(G)$ будем интерпретировать как шанс выбора точки из области g, называть вероятностью появления события $A_m = g$ в результате проведения модельного эксперимента E_m и обозначать символом $\mathbf{P}_m(g)$. Упорядоченную тройку $(\Omega_m,\ \mathcal{F}_m,\ \mathbf{P}_m(g))$ назовем вероятностной моделью эксперимента E_m.

Определение 5.1. Вероятность наблюдаемого события A реального эксперимента E с несчетным числом равновозможных исходов равна $\mathbf{P}(A) = \mathrm{mes}\,(g)/\mathrm{mes}\,(G)$. При этом появление события A адекватно выбору точки из области g или появлению события A_m для модельного эксперимента E_m. Упорядоченную тройку $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(A))$ назовем вероятностной моделью эксперимента E.

Если проведение испытаний над реальным экспериментом E требует значительных временных и денежных затрат, то для изучения такого рода экспериментов, как правило, необходимо последовательное составление нескольких адекватных вероятностных моделей. Из этой последовательности построенных моделей выделяется наиболее простая, которая поддается исследованию. Затем результаты исследования такой модели интерпретируются и сопоставляются применительно к остальным моделям и, естественно, к исходному эксперименту E. В учебнике [9] приводится решение ряда задач такого сорта. Рассмотрим пример.

Пример 5.1 (*задача Бюффона*). На поверхности стола проведен ряд параллельных прямых, отстоящих друг от друга на расстояние $2h$. На стол случайным образом бросают иглу, длина которой равна $2l$. Предполагается, что $l < h$. Эта ситуация показана на рис. 5.2, *а*. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из параллельных прямых?

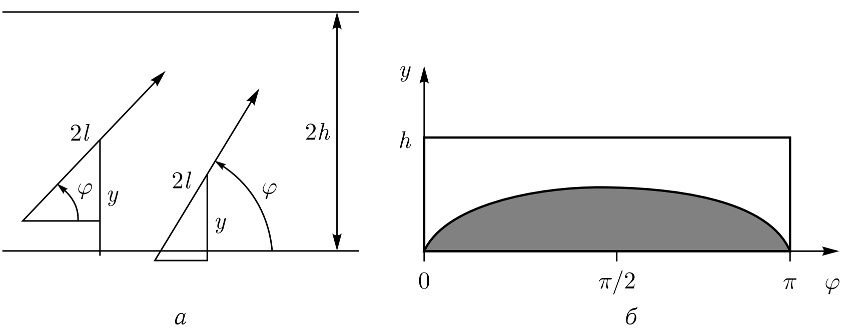


Рис. 5.2

Решение. На рис. 5.2, *а* приведены два случая, когда игла после броска пересекает какую-нибудь прямую и когда игла не пересекает ни одну из параллельных прямых. Положение иглы на поверхности стола полностью определяет расстояние y от ее центра до ближайшей параллели и угол φ, составленный иглой с этой параллелью и отсчитываемый против хода часовой стрелки и наоборот, с учетом параллельного сдвига. Тогда в качестве описания ω положения иглы (элементарного исхода) этого эксперимента выберем упорядоченную пару $(\varphi,\ y)$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $0 \leqslant y \leqslant h$. В данной задаче реальный эксперимент E с бросанием иглы заменяется адекватным модельным экспериментом E_m

с выбором наудачу точки в прямоугольнике G вида $\{\omega = (\varphi, y)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant h\}$ на плоскости $\varphi 0 y$. Элементарный исход опыта Бюффона и соответствующий элементарный исход модельного эксперимента E_m имеют одно и то же описание $(\varphi,\ y)$. Отсюда получаем, что $\Omega = \{\omega = (\varphi, y)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant h\}$, область $G = \{(\varphi, y)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $0 \leqslant y \leqslant h\}$ и $\mathcal{F} = \{g : g \subset G$, g имеет площадь$\}$. Из рис. 5.2, *а* ясно, что игла пересечет одну из прямых, или в этом опыте наступит событие A, только в случае выполнения неравенства вида $y \leqslant l \sin\varphi$. Тогда легко видеть, что $A = \{\omega = (\varphi, y)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant h,\ y \leqslant l \sin\varphi\}$. В модельном эксперименте E_m естественно рассматривается событие A_m, которое заключается в том, что точка будет наудачу выбрана в заштрихованной области рис. 5.2, *б*. Между событием A реального опыта Бюффона и событием A_m модельного эксперимента E_m установлено взаимно-однозначное соответствие, так как эти события имеют одинаковое описание в виде области $g = \{(\varphi, y)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant h,\ y \leqslant l \sin\varphi\}$. Отметим, что области G и g приведены на рис. 5.2, *б*. Площадь области $g = \int\limits_0^\pi l \sin\varphi\, d\varphi = -l \cos\varphi \Big|_0^\pi = 2l$, а площадь области $G = \pi h$. Из определения геометрической вероятности на плоскости с учетом рис. 5.2, *б* получаем, что вероятность $\mathbf{P}(A)$ равна отношению заштрихованной площади к площади прямоугольника. Следовательно, вероятность $\mathbf{P}(A) = 2l(\pi h)^{-1}$.

5.2. Эмпирический подход вычисления вероятности случайных событий

Рассмотрим свойства относительных частот исходов эксперимента и статистическое определение вероятности. Одной из фундаментальных проблем теории вероятности является построение математических моделей таких реальных экспериментов, которые могут давать различные результаты при одних и тех же условиях их проведения, и, следовательно, эти результаты не могут быть точно предсказаны заранее. Поэтому при использовании той или иной теоретико-вероятностной модели всегда возникает вопрос, насколько эта модель адекватна реальному эксперименту или опыту. Ответить на него можно только путем проведения наблюдений над исходами реальных экспериментов. К тому же на практике часто встречается случай, когда невозможно применить ни субъективный, ни классический, ни геометрический способ определения вероятности. Так, например, при решении задачи нахождения вероятности попадания пули в некоторую область мишени при стрельбе из пистолета мы имеем дело с несчетным множеством элементарных случайных событий. Однако попадание пули в некоторую область зависит и от площади этой области, и от ее положения в мишени. Этот факт становится особенно очевидным, когда стрельбу ведет мастер. В связи с этим многие естествоиспытатели определяют вероятность только эмпирическим путем или путем многократного проведения эксперимента, т. е. используют так называемый статистический подход в определении вероятности. В основу этой концепции положена стабильность относительной частоты $\mu(A, N)/N$ события A при достаточно большом числе N всех опытов. Это, в свою очередь, является следствием понятия на содержательном уровне статистически устойчивого эксперимента. Статистической вероятностью события A называется отношение $\mu(A, N)/N$, ее обозначают $\mathbf{P}^*(A, N)$ или, ради сокращения записи, $\mathbf{P}^*(A)$, опуская ради простоты символ N, где это не вызывает путаницы.

При небольшом числе испытаний статистическая вероятность $\mathbf{P}^*(A, N)$ события A носит нерегулярный характер и может заметно меняться от опыта к опыту. Однако по мере увеличения числа N испытаний статистическая вероятность начинает терять случайный характер и стремится стабилизироваться около некоторого постоянного числа $\mathbf{P}(A)$. Это число характеризует связь между комплексом условий Σ и наблюдаемым событием A. Из определения статистической вероятности события легко вывести три простейших ее свойства. Например, получаем, что $0 \leqslant \mathbf{P}^*(A) \leqslant 1$, $\mathbf{P}^*(\Omega) = N/N = 1$ и $\mathbf{P}^*(\varnothing) = 0/N = 0$. Более того, $\mathbf{P}^*(A \cup B) = \mathbf{P}^*(A) + \mathbf{P}^*(B)$, если только случайные события A и B являются несовместными.

Эмпирическое вычисление вероятности случайного события $A \in \mathcal{F}$ не есть формальное математическое определение его вероятности, оно лишь постулирует при некоторых условиях ее существование и указывает метод ее приближенного вычисления. На содержательном уровне вероятность случайного события — это число $\mathbf{P}(A)$, около которого группируются частоты этого события по мере увеличения числа испытаний. В этом и заключается основной тезис при эмпирическом подходе к вычислению вероятности случайного события A. Основоположниками этого подхода являются Ричард фон Мизес и Ганс Рейхенбах. В качестве примера приведем опыт английского математика К. Пирсона с бросанием симметричной монеты $N = 12000$ раз. Орел выпал 6019 раз. В этом случае отношение $\mu(A, N)/N = 0{,}5016$, где исход A означает выпадение орла.

Значит, К. Пирсон получил эмпирическую, или статистическую, вероятность $\mathbf{P}^*(A) = 0{,}5016$. Заметим, что применение классического подхода к вычислению вероятности выпадение орла симметричной монеты дает число $\mathbf{P}(A) = 0{,}5$. Итак, для этого примера имеем $\mathbf{P}^*(A) \approx \mathbf{P}(A)$.

5.3. Метод имитационного моделирования

Статистическое понятие вероятности послужило созданию универсального вычислительного метода в современной компьютерной математике. Этот метод называется методом статистических испытаний или методом Монте-Карло. В свою очередь метод Монте-Карло послужил в дальнейшем одним из первоисточников при создании более универсального метода изучения свойств реальных явлений — метода имитационного моделирования реальных процессов. Проиллюстрируем этот метод на задаче имитации опыта Бюффона [9]. Покажем, что опыт Бюффона позволяет приближенно вычислить значение числа π. Действительно, проведем этот опыт достаточное число N раз. Пусть при N бросках иглы на разграфленную поверхность в $\mu(A, N)$ опытах она пересекала прямые. Эмпирически полученная статистическая вероятность события A будет равна $\mu(A, N)/N$. Из приближенного равенства $\mu(A, N)/N \approx 2l/(\pi h)$ можно найти приближенное значение числа π, а именно: $\pi \approx 2lN/h\mu(A, N)$. В опытах, проведенных Вольфом в 1849 г., длина иглы составляла $2l = 36$ мм, а ширина полос была равна величине $2h = 45$ мм. При числе бросков $N = 5000$ игла пересекла полосы $\mu(A, N) = 2532$ раза, так что $\mathbf{P}(A) \approx 2532/5000 \approx 0{,}5064$. Отсюда значение $\pi = 2l/(h\mathbf{P}(A)) \approx 72/(45 \times 0{,}5064) \approx 3{,}159$. Отметим простоту и доступность такого способа определения числа π. Однако для более точного вычисления π необходимо выполнить большое число испытаний. Такого рода испытания можно проводить на современных компьютерах.

Тестовые вопросы к лекции 5

1. Тип — проверка ответов.

В некоторой точке K электрического провода MN длины L произошел разрыв. Вычислить вероятность $\mathbf{P}(A(L, l))$ того, что точка K удалена от точки M на расстояние не менее l при 1) $L = 10$, $l = 5$; 2) при $L = 20$, $l = 9$; 3) при $L = 15$, $l = 8$.

Ответы:
1) $\mathbf{P}(A(10,5)) = 1/2$;
2) $\mathbf{P}(A(20,10)) = 11/20$;
3) $\mathbf{P}(A(15,8)) = 7/15$.

2. Тип — проверка ответов.

Два парохода прибывают к одному причалу, причем время прихода каждого из пароходов равновозможно в течение суток. Вычислить вероятность $\mathbf{P}(A(r,q))$ того, что ни одному из пароходов не придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода составляет r часов, а второго — q, где 1) $r = 1$, $q = 2$; 2) $r = 2$, $q = 3$; 3) $r = 3$, $q = 4$.

Ответы:
1) $\mathbf{P}(A(1,2)) \approx 0{,}879$;
2) $\mathbf{P}(A(2,3)) \approx 0{,}802$;
3) $P(A(3,4)) \approx 0{,}730$.

3. Тип — проверка ответов.

Стержень длины l разломали в двух наудачу выбранных точках на три части. Вычислить вероятность $\mathbf{P}(A(l))$ того, что из полученных частей можно составить треугольник, где 1) $l = 1$; 2) $l = 2$; 3) $l = 3$.

Ответы:
1) $\mathbf{P}(A(1)) = 0{,}25$;
2) $\mathbf{P}(A(2)) = 0{,}25$;
3) $\mathbf{P}(A(3)) = 0{,}25$.

4. Тип — проверка ответов.

Радиосигналы по одному от каждой из двух станций поступают на видеоэкран в произвольный промежуток времени длительности L. На экране появляется отметка, если разность между моментами поступления будет меньше l. Вычислить вероятность $\mathbf{P}(A(L,l))$ появления отметки, где 1) $L = 11$, $l = 1$; 2) $L = 22$, $l = 2$; 3) $L = 13$, $l = 3$.

Ответы:
1) $\mathbf{P}(A(11,1)) = 21/121$;
2) $\mathbf{P}(A(22,2)) = 21/121$;
3) $\mathbf{P}(A(13,3)) = 69/169$.

5. Тип — проверка ответов.

На окружности радиуса r наугад выбраны две точки. Вычислить вероятность $\mathbf{P}(A(r))$ того, что расстояние между ними превысит величины $\sqrt{3}\,r$, где 1) $r = 1$; 2) $r = 2$; 3) $r = 3$.

Ответы:
1) $\mathbf{P}(A(1)) = 1/3$;
2) $\mathbf{P}(A(2)) = 1/3$;
3) $\mathbf{P}(A(3)) = 1/3$.

6. Тип — проверка ответов.

Лодка перевозит груз с одного берега реки на другой за один час. Курс байдарки перпендикулярен курсу лодки. С лодки обнаруживают байдарку в случае, если пересекают ее курс не ранее чем за r мин до пересечения байдаркой курса лодки, и не позднее чем через r мин после пересечения байдаркой курса лодки. Любой момент и любое место пересечения байдаркой курса лодки равновозможны. Вычислить вероятность $\mathbf{P}(A(r))$ того, что идущая по течению реки байдарка будет замечена, если 1) $r = 20$ мин; 2) $r = 25$ мин; 3) 30 мин.

Ответы:
1) $\mathbf{P}(A(r)) = 5/9$;
2) $\mathbf{P}(A(2)) = 95/144$;
3) $\mathbf{P}(A(3)) = 3/4$.

7. Тип — проверка ответов.

Сигналы поступают на экран от двух станций обнаружения цели в промежутке длительности L. Цель фиксируется, если разность между моментами поступления сигналов меньше l. Вычислить вероятность $\mathbf{P}(A(L, l))$ того, что цель не будет обнаружена, если 1) $L = 11$, $l = 1$; 2) $L = 22$, $l = 2$; 3) $L = 13$, $l = 3$.

Ответы:
1) $\mathbf{P}(A(1)) = 100/121$;
2) $\mathbf{P}(A(2)) = 100/121$;
3) $\mathbf{P}(A(3)) = 100/169$.

Лекция 6

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АПРИОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

6.1. Система аксиом Колмогорова и выбор адекватной вероятностной модели априорных экспериментов

В реальных экспериментах, например в военном деле, часто требуется определить вероятности таких исходов, к которым неприменимы не только субъективный, классический и геометрический подходы, но и статистический из-за чрезвычайной сложности и большой стоимости соответствующих экспериментов. В подобных случаях вероятности событий должны определяться исключительно из структуры самого априори заданного эксперимента E с помощью аксиом и теорем независимо от того, проводится или не проводится эксперимент. Таким образом, мы приходим к построению абстрактной теории вероятностного моделирования реальных явлений случайного типа. Рассматривается статистически устойчивый случайный эксперимент E, который определяется комплексом условий $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots\}$ и множеством $\Im$ его допустимых исходов. Пусть построена теоретико-множественная модель $(\Omega,\ \mathcal{F})$ эксперимента E, в которой Ω — множество описаний ω всех его элементарных исходов $\{\omega\}$ и $\mathcal{F}$ — σ-алгебра наблюдаемых случайных событий $A \subset \Omega$. Множество A содержит по меньшей мере все такие описания $\omega \in \Omega$ элементарных исходов эксперимента E, каждый из которых может наблюдаться одновременно с A. Тогда вероятность любого события $A \in \mathcal{F}$ для априорного эксперимента вводится с помощью следующего определения.

Определение 6.1. Вероятностью любого события $A \in \mathcal{F}$ называется некоторое *неотрицательное число* $\mathbf{P}(A)$, которое для любой последовательности $A_1, A_2, \ldots$ попарно непересекающихся случайных событий из $\mathcal{F}$ удовлетворяет *аксиоме счетной* *аддитивности* вида $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$, а также *аксиоме нормировки* вида $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Выделенные курсивом три аксиомы Колмогорова для вероятности $\mathbf{P}(A)$ с областью определения $\mathcal{F}$ повторяют свойства относительных частот исходов реального эксперимента.

Определение 6.2. Упорядоченная тройка $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ называется вероятностной моделью априорного эксперимента E.

Заметим, что аксиомы Колмогорова и упорядоченная тройка вида $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ непротиворечивы и неполны. Эти аксиомы непротиворечивы, так как существуют реальные эксперименты, например классические опыты, удовлетворяющие всем этим аксиомам. Неполнота системы аксиом означает неоднозначность выбора теоретико-множественной модели $(\Omega,\ \mathcal{F})$ и вероятности $\mathbf{P}(\cdot)$ на множестве $\mathcal{F}$. Это вызвано тем, что для реальных опытов могут встретиться одинаковые теоретико-множественные модели $(\Omega,\ \mathcal{F})$ с различными вероятностными функциями $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$. Например, существуют игральные кости различной симметрии. Более того, для одного и того же эксперимента мы можем по-разному выбирать семейство элементарных исходов и их описания. Тот факт, что система аксиом не является полной, скорее положителен, чем отрицателен. В силу этого можно ставить вопрос о построении в некотором смысле оптимальной модели эксперимента E. В этом заключается принципиальная особенность и универсальность подхода Колмогорова.

Проиллюстрируем сказанное на задаче Даламбера. В этом опыте достоверный исход $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, множество всех результатов $\Im = \mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{16}\}$. Следовательно, в этом эксперименте можно наблюдать пятнадцать исходов. Напомним, что $\omega_1 = (0, 0)$ — описание исхода орла при первом и втором бросках, $\omega_2 = (0, 1)$ — описание выпадения орла при первом броске и решки при втором, $\omega_3 = (1, 0)$ — описание выпадения решки при первом броске и орла при втором, $\omega_4 = (1, 1)$ — описание исхода решки при первом и втором бросках. При этом случайные события из множества $\mathcal{F}$ представляются в следующем виде: $A_1 = \{\omega_1\}$, $A_2 = \{\omega_2\}$, $A_3 = \{\omega_3\}$, $A_4 = \{\omega_4\}$, $A_5 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $A_6 = \{\omega_1, \omega_3\}$, $A_7 = \{\omega_1, \omega_4\}$, $A_8 = \{\omega_2, \omega_3\}$, $A_9 = \{\omega_2, \omega_4\}$, $A_{10} = \{\omega_3, \omega_4\}$, $A_{11} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $A_{12} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, $A_{13} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$, $A_{14} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A_{15} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A_{16} = \varnothing$. В силу симметрии эксперимента Даламбера вероятность $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$ можно вычислить, используя классический подход, например: $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_4) = 1/4$, $\mathbf{P}(A_5) = 1/2$

и т. д. Таким образом, хотя бы для одной реальной задачи Даламбера построили вероятностную модель $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$, для которой справедливы все аксиомы множества $\mathcal{F}$ и все аксиомы вероятности $\mathbf{P}(\cdot)$. Эти утверждения легко проверяются, если воспользоваться конкретным видом $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$.

Рассмотрим теперь другой способ выбора элементарных исходов, а именно: пусть ω_1' означает описание исхода орла при первом броске, ω_2' означает описание выпадения орла только при втором броске и ω_3' означает описание невыпадения орла при двух бросаниях симметричной монеты. При таком выборе имеем: $\Omega' = \{\omega_1', \omega_2', \omega_3'\}$, $\mathcal{F}' = \{B_1, B_2, \ldots, B_8\}$, $B_1 = \{\omega_1'\}$, $B_2 = \{\omega_2'\}$, $B_3 = \{\omega_3'\}$, $B_4 = \{\omega_1', \omega_2'\}$, $B_5 = \{\omega_1', \omega_3'\}$, $B_6 = \{\omega_2', \omega_3'\}$, $B_7 = \{\omega_1', \omega_2', \omega_3'\} = \Omega'$, $B_8 = \varnothing$, $\mathbf{P}'(B_1) = 1/2$, $\mathbf{P}'(B_2) = 1/4$, $\mathbf{P}'(B_3) = 1/4$, $\mathbf{P}'(B_4) = \mathbf{P}'(\{\omega_1'\}) + \mathbf{P}'(\{\omega_2'\}) = 3/4$ и т. д. Получаем новую вероятностную модель $(\Omega',\ \mathcal{F}',\ \mathbf{P}'(\cdot))$ задачи Даламбера, в которой уже не наблюдаются восемь исходов. Поэтому данная модель менее адекватна по сравнению с первой, в частности, мы не можем интересоваться вероятностью выпадения только орлов.

Наконец, выберем теперь несимметричную монету. Например, выберем монету, которая некоторое время была в употреблении в игре в орлянку. Тогда для первой модели $(\Omega,\ \mathcal{F})$ может оказаться, что $\mathbf{P}''(A_1) = 1/9$, $\mathbf{P}''(A_2) = \mathbf{P}''(A_3) = 2/9$, $\mathbf{P}''(A_4) = 4/9$, $\mathbf{P}''(A_5) = \mathbf{P}''(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}''(\{\omega_2\}) = \mathbf{P}''(A_1) + \mathbf{P}''(A_2) = 3/9 = 1/3$ и т. д. В этом несимметричном случае мы получаем третью вероятностную модель, которая отличается от первой только выбором другой вероятности $\mathbf{P}''(\cdot)$ для каждого события.

6.2. Простейшие свойства вероятностной функции Колмогорова

Построение вероятностного пространства $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ является основным этапом в создании математической модели того или иного статистически устойчивого случайного эксперимента E. Однако не меньшую роль играет выяснение основных свойств вероятности $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$, которые непосредственно следуют из системы аксиом Колмогорова. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 6.1. *Для всех $A \in \mathcal{F}$ имеет место неравенство $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$, т. е. область значений вероятностной функции $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$, есть отрезок $[0, 1]$, и верно равенство $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.*

Доказательство. Из определения событий A и $\overline{A}$ имеем: $\overline{A} \cap A = \varnothing$, $\overline{A} \cup A = \Omega$. Отсюда, используя аксиомы нормировки и счетной аддитивности, находим: $\mathbf{P}(\overline{A}) + \mathbf{P}(A) = 1$, или $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, и на основании аксиомы неотрицательности $1 - \mathbf{P}(A) \geqslant 0$, или $1 \geqslant \mathbf{P}(A)$. Итак, имеем соотношение $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$. Если $A = \Omega$, то $\mathbf{P}(\varnothing) + \mathbf{P}(\Omega) = 1$ и $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$. Здесь также отметим важность полученной формулы $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, которая будет постоянно использоваться.

Теорема 6.2. *Если $A \subset B$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, то $\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A)$ и имеет место так называемое свойство монотонности вероятностной функции $\mathbf{P}(A)$: $\mathcal{F} \to [0,1]$.*

Доказательство. При $A \subset B$ выполняется равенство $B = A \cup (B \backslash A)$ в событиях. Более того, имеем: $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$. Действительно, если $\omega \in B$, то либо $\omega \in A$ и $\omega \in A \cup (B \backslash A)$, либо $\omega \notin A$, и поэтому $\omega \in B \backslash A$. Отсюда $\omega \in A \cup (B \backslash A)$ и событие $B \subset A \cup (B \backslash A)$. Наоборот, если $\omega \in A \cup (B \backslash A)$, то либо $\omega \in A$ и, поскольку $A \subset B$, имеем: $\omega \in B$, либо $\omega \in B \backslash A$ и из определения разности событий имеем $\omega \in B$, т. е. $A \cup (B \backslash A) \subset B$. На основании определения равенства событий получаем, что событие $B = A \cup (B \backslash A)$. Равенство $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$ будем доказывать методом от противного. Если $A \cap (B \backslash A) \neq \varnothing$, то существует такое $\omega_0 \in \Omega$, что $\omega_0 \in A$ и одновременно $\omega_0 \in B \backslash A$. Из определения разности событий B, A находим, что $\omega_0 \in B$ и $\omega_0 \notin A$. Получаем противоречивые утверждения типа $\omega_0 \in A$ и $\omega_0 \notin A$. Из равенства $B = A \cup (B \backslash A)$ и аксиомы счетной аддитивности находим, что вероятность $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \backslash A)$ и $\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A)$, поскольку $\mathbf{P}(B \backslash A) \geqslant 0$. Отсюда имеем важное равенство $\mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ при $A \subset B$.

Теорема 6.3. *Если $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, то имеет место теорема сложения вероятностей вида $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.*

Доказательство. Имеем равенства $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$, $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$, $B = (A \cap B) \cup (B \backslash A)$, $(A \cap B \cap (B \backslash A) = \varnothing$. Для установления этих равенств можно воспользоваться основными законами теоретико-множественных операций над случайными событиями. Например, первые два из этих равенств установим с помощью тождественных преобразований:

$$A \cup (B \backslash A) = A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B,$$

$$A \cap (B \backslash A) = A \cap (B \cap \overline{A}) = \varnothing.$$

Из установленных равенств в событиях и аксиомы счетной аддитивности находим равенства в вероятностях:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \backslash A), \quad \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \backslash A).$$

Вычитая эти равенства и перенося затем $\mathbf{P}(B)$ в правую часть, окончательно получим теорему сложения вероятностей.

Используя теорему 6.3 и законы теоретико-множественных операций над событиями, легко показать теорему сложения для трех событий A, B, C. Например, последовательно имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}((A \cup B) \cap C) = \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \\ &\qquad + \mathbf{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Методом математической индукции легко получить

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant m}^{m} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ &+ \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant m}^{m} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \ldots \\ &\ldots + (-1)^{m-1} \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)\end{aligned}$$

для любого конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$. В целях применения установленных общих свойств решим такую задачу.

6.3. Задача о туристах

Группе туристов, состоящей из m человек, в гостинице выделили комнаты с номерами $1, 2, \ldots, m$. Любая комната открывается только одним ключом, номер которого совпадает с номером такой комнаты. Каждый из туристов наудачу взял из ящика дежурного стола только один ключ. Найти вероятность того, что хотя бы один турист откроет комнату?

Решение. Пусть x_i — номер выбранного ключа туристом, которому выделили комнату с номером i. Случайное событие, которое состоит в том, что турист из первой комнаты выберет ключ с номером x_1, турист из второй комнаты выберет ключ с номером $x_2, \ldots$, наконец, турист из m-й комнаты выберет ключ с номером x_m, объявляем элементарным с описанием ω в виде вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Тогда достоверное событие Ω равно $\{\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_m)\colon x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_m,\ x_i = 1, 2, \ldots, m\}$, число $\aleph(\Omega)$ всех описаний равно $m!$ и $\mathcal{F} = \{A : A \subset \Omega\}$.

Для $i = 1, 2, \ldots, m$ обозначим через $A_i = \{\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_m)\colon x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_m,\ x_i = i,\ x_j = 1, 2, \ldots, m,\ j \neq i\}$ событие, которое заключается в том, что турист из i-й комнаты выбрал свой ключ. Множество A_i содержит все перестановки из $(m-1)$ элементов. Значит, число $\aleph(A_i)$ всех описаний для A_i равно $(m-1)!$, и оно не зависит от i. Для любых различных чисел $i_1, i_2, \ldots, i_r$ из $\{1, 2, \ldots, m\}$ рассмотрим событие $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r} = \{\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_m)\colon x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_m;\ x_{i_1} = i_1, x_{i_2} = i_2, \ldots, x_{i_r} = i_r;\ x_j = 1, 2, \ldots, m;\ j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}\}$, которое состоит в том, что туристы из комнат с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ выбрали свои ключи. Множество $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}$ содержит все перестановки из $(m-r)$ элементов. Поэтому число $\aleph(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r})$ всех описаний для $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}$ равно $(m-r)!$, и оно не зависит от набора чисел $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Из классического определения вероятности имеем следующие соотношения: $\mathbf{P}(A_i) = (m-1)!/m!$, $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = (m-2)!(m!)^{-1}, \ldots, \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}) = (m-r)!(m!)^{-1}$. Если теперь событие A состоит в том, что хотя бы один турист откроет выделенную ему комнату, то событие $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$, и по общей формуле находим, что вероятность $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i\Big)$ равна величине $C_m^1 \dfrac{(m-1)!}{m!} - C_m^2 \dfrac{(m-2)!}{m!} + C_m^3 \dfrac{(m-3)!}{m!} - \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m \dfrac{1}{m!} = 1 - (1/2!) + (1/3!) - \ldots + (-1)^{m-1}(m!)^{-1}$. Заметим, что вероятность $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = (1/2!) - (1/3!) + (1/4!) - \ldots + (-1)^m (m!)^{-1}$. Здесь $\overline{A}$ — событие, состоящее в том, что ни один турист не выбрал нужный ему ключ. Так как $e^{-1} = (1/2!) - (1/3!) + (1/4!) - (1/5!) + \ldots$, то при больших значениях m вероятность $\mathbf{P}(A) \approx 1 - e^{-1}$ и вероятность $\mathbf{P}(\overline{A}) \approx e^{-1}$. Например, для $m = 6$ с использованием точных формул получим, что значение вероятности вида $\mathbf{P}(A) = 91/144 \approx 0{,}631944$ и значение вероятности $\mathbf{P}(\overline{A}) = 53/144$, или $\mathbf{P}(\overline{A}) \approx 0{,}368055$. Простые вычисления по приближенным формулам приводят к достаточно близкому результату, а именно: вероятность $\mathbf{P}(A) \approx 0{,}632121$ и вероятность $\mathbf{P}(\overline{A}) \approx 0{,}367879$, так как $e^{-1} \approx 0{,}367879$.

Таковы первые предварительные свойства вероятностной функции $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$, которые постоянно применяются в прикладных задачах. Более того, свойства вероятностей и различные равенства в событиях позволяют находить вероятности одних событий через известные вероятности других событий.

Тестовые вопросы к лекции 6

1. Тип — проверка ответов.

Вычислить вероятность $\mathbf{P}(A \Delta B)$, если 1) $\mathbf{P}(A) = 1/4$, $\mathbf{P}(B) = 1/3$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/12$; 2) $\mathbf{P}(A) = 1/5$, $\mathbf{P}(B) = 1/4$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/14$; 3) $\mathbf{P}(A) = 1/6$, $\mathbf{P}(B) = 1/5$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/16$.

Ответы:

1) $\mathbf{P}(A \Delta B) = 5/12$;

2) $\mathbf{P}(A \Delta B) = 43/140$;

3) $\mathbf{P}(A \Delta B) = 29/120$.

2. Тип — одиночный выбор.

Определите теорему сложения для событий A, B и C.

• Теорема сложения имеет вид $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$.

• Теорема сложения имеет вид $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$.

• Теорема сложения имеет вид $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap C) + \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$.

3. Тип — одиночный выбор.

Определите верное соотношение для событий A, B и C.

• Рассматривается соотношение $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) \geqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$.

• Рассматривается соотношение $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) \geqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C)$.

• Имеет место соотношение $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть $A_i \in \mathcal{F}$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ Определите верные соотношения для событий $A_1, A_2, \ldots$

• Рассматривается соотношение $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

• Рассматривается соотношение

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant m}^{m} \mathbf{P}\Big(A_{i_1} \bigcap A_{i_2}\Big) + \\ + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant m}^{m} \mathbf{P}\Big(A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap A_{i_3}\Big) - \ldots \\ \ldots + (-1)^{m-1} \mathbf{P}\Big(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_m\Big).$$

• Рассматривается соотношение

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant m}^{m} \mathbf{P}\Big(A_{i_1} \bigcap A_{i_2}\Big).$$

• Рассматривается соотношение

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant m}^{m} \mathbf{P}\Big(A_{i_1} \bigcap A_{i_2}\Big) + \\ + \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant m}^{m} \mathbf{P}\Big(A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap A_{i_3}\Big).$$

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть $A_i \in \mathcal{F}$ и $A_i \supset A_{i+1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ Определите верное соотношение для событий $A_1, A_2, \ldots$

• Рассматривается соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$.

• Рассматривается соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) + \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$.

• Рассматривается соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $A_i \in \mathcal{F}$ и $A_i \subset A_{i+1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ Определите верное соотношение для событий $A_1, A_2, \ldots$

• Рассматривается соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$.

• Рассматривается соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$.

• Рассматривается соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) + \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$.

7. Тип — одиночный выбор.

Определите верное утверждение.

• Система аксиом Колмогорова противоречива.
• Система аксиом Колмогорова полна.
• Система аксиом Колмогорова непротиворечива и неполна.

Лекция 7

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ УСЛОВНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

7.1. Задание условных экспериментов

Напомним, что статистически устойчивый эксперимент E задается множеством Σ условий его проведения и совокупностью $\Im$ его допустимых исходов. В основе построения вероятностной модели $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ лежат указанные совокупности Σ и $\Im$. При этом Σ и $\Im$ остаются неизменными и никаких дополнительных ограничений на эксперимент E не налагается. В силу этого объекты E и $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ называются *априорными*, а вероятности $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$ — *доопытными* или *априорными*. С другой стороны, на практике часто встречаются случаи, когда нам по той или иной причине недоступны наблюдения элементарных исходов эксперимента E. В то же время мы можем утвердительно ответить на вопрос о том, произошло или не произошло некоторое случайное событие B эксперимента E. Например, взрывая мощный ядерный заряд, мы не можем находиться в эпицентре и наблюдать элементарные исходы этого эксперимента. Нам доступны только некоторые наблюдения на достаточном расстоянии от эпицентра взрыва (событие B). Рассмотрим более знакомый нам пример. В процессе случайного поступления автомобилей к стоп-линии перекрестка в течение суток мы не имеем технической возможности регистрировать их число. Однако к нам может поступать опосредованная информация от сотрудников дорожной инспекции о количестве нарушений за это время (событие B). Другими словами, в этих и им аналогичных экспериментах к комплексу $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots\}$ условий проведения эксперимента E добавляется еще одно условие: «произошло некоторое событие $B \in \Im$». В силу этого мы фактически должны рассматривать новый статистически устойчивый эксперимент $E_{\text{у}}$ с комплексом условий $\Sigma_{\text{у}} = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, B, \ldots\}$.

Эксперимент $E_{\text{у}}$ по отношению к эксперименту E будем называть *условным*. Этот термин носит относительный характер, потому что с самого начала имеем дело с априорным экспериментом E, хотя для его проведения тоже требуется выполнение условий $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots\}$. Так как событие $B \in \mathcal{F}$ является случайным, то реализовать на практике условия $\Sigma_{\text{у}} = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, B, \ldots\}$ эксперимента $E_{\text{у}}$, как правило, не удается. В этом случае для проведения эксперимента $E_{\text{у}}$ требуется многократное проведение эксперимента E до тех пор, пока впервые не наступит случайное событие B. Затем то испытание эксперимента E, при котором первый раз наступает случайное событие B, отождествляем с проведением условного эксперимента $E_{\text{у}}$. Значит, для проведения условного эксперимента $E_{\text{у}}$ можно либо воспользоваться многократным проведением эксперимента E, либо непосредственно выполнить все условия из множества $\Sigma_{\text{у}} = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, B, \ldots\}$. В силу этого можно построить различные теоретико-множественные и вероятностные модели условного эксперимента $E_{\text{у}}$, которые будем обозначать соответственно символами $(\Omega_{\text{у}}, \mathcal{F}_{\text{у}})$ и $(\Omega_{\text{у}}, \mathcal{F}_{\text{у}}, \mathbf{P}_{\text{у}}(\cdot))$.

7.2. Унифицированная вероятностная модель

Нетрудно видеть, что у эксперимента $E_{\text{у}}$ не может появиться новых исходов, отличных от допустимых исходов эксперимента E. По этой причине мы можем считать, что множество $\Im_{\text{у}}$ допустимых исходов эксперимента $E_{\text{у}}$ равно множеству $\Im$ допустимых исходов эксперимента E. Аналогично рассуждая, примем, что множество $\Omega_{\text{у}}$ описаний всех элементарных исходов эксперимента $E_{\text{у}}$ совпадает с множеством Ω. Так как $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй, то можно в качестве множества $\mathcal{F}_{\text{у}}$ взять $\mathcal{F}$. Итак, мы непосредственно приходим к построению первой теоретико-множественной модели $(\Omega_{\text{у}},\ \mathcal{F}_{\text{у}}) = (\Omega, \mathcal{F})$ эксперимента $E_{\text{у}}$. Следует заметить, что некоторые элементарные исходы и случайные события из $\mathcal{F}_{\text{у}} = \mathcal{F}$ не имеют места при проведении эксперимента $E_{\text{у}}$, а именно те события, которые не наблюдаются одновременно с B. С этой точки зрения построенная первая теоретико-множественная модель $(\Omega,\ \mathcal{F})$ условного эксперимента $E_{\text{у}}$ является избыточной. Однако ее не следует отвергать, так как она, во-первых, совпадает с уже хорошо изученной теоретико-множественной моделью эксперимента E и, во-вторых, остается неизменной, если мы будем рассматривать различные события B из $\mathcal{F}$. В этом смысле указанную модель назовем *согласованной* или *унифицированной*.

Для построения вероятностной модели эксперимента $E_{\text{у}}$ важно установить связь между случайными наблюдаемыми исходами эксперимента E. Здесь возникает трудный вопрос: как на возможность осуществления события A влияет дополнительное условие о том, что произошло некоторое событие $B \in \mathcal{F}$? В простейшем варианте между двумя событиями может быть причинно-следственная связь, когда наступление одного из событий ведет к обязательному наблюдению другого, или же наоборот, когда наступление одного события исключает осуществление другого. В более сложном случае, когда такая причинно-следственная зависимость отсутствует, некоторая связь между событиями все же имеется, и она называется статистической. Чтобы пояснить сказанное, приведем пример.

Пример 7.1. Наудачу выбирается одна из двух урн, а затем из выбранной урны вытаскивается непреднамеренно один шар. В первой урне содержится 100 черных и 2 белых шара. Во второй урне имеется 100 белых и 2 черных шара. Пусть событие A означает выбор второй урны, а событие B состоит в том, что вынут белый шар. В этом примере было бы неверно утверждать, что одно из этих событий влечет за собой другое или что, наоборот, одно из них исключает другое. С другой стороны, почти для всех очевидно, что между событиями A и B имеется статистическая зависимость. В самом деле, при отсутствии предварительной информации о цвете выбранного шара шанс наступления события A оцениваются числом $1/2$. Если же считать наступившим событие B, то, вероятнее всего, шар был вынут из второй урны, т. е. шанс наступления события A при этом условии значительно повышается.

Итак, возникает проблема определения характеристики зависимости одних случайных событий от других. Следующее определение дает количественное измерение такой зависимости в простейшем случае, когда безусловная вероятность $\mathbf{P}(B) \neq 0$.

Определение 7.1. Условной (апостериорной, послеопытной) вероятностью осуществления события $A \in \mathcal{F}$ при наблюдении события B, для которого $\mathbf{P}(B) \neq 0$, называется число $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$, которое будем обозначать символом $\mathbf{P}_{\text{у}}(A)$ или чаще символом $\mathbf{P}(A|B)$.

Обоснование целесообразности вычисления условной вероятности события A по формуле $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$ с экспериментальной точки зрения подробно приведено в учебнике [9]. Показано, что относительная частота появления события A при проведении условного эксперимента $E_{\text{у}}$ группируется около дроби $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$. Более того, для статистически устойчивых экспериментов простейшей структуры, например для классических экспериментов, формулу $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$ даже можно доказать (см. [9], с. 131–132). При этом за меру статистической или вероятностной зависимости случайного события A от случайного события B естественно принять величину $|\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)|$.

Теорема 7.1. *Упорядоченная тройка* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot|B))$ *является условным вероятностным пространством*, *или моделью*, *для эксперимента* $E_{\text{у}}$.

Доказательство. Так как $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью априорного эксперимента E, то упорядоченная пара $(\Omega,\ \mathcal{F})$ обладает всеми необходимыми свойствами в аксиоматике Колмогорова. Осталось проверить свойства нормировки, неотрицательности и счетной аддитивности для условной вероятности $\mathbf{P}(A|B)$, $A \in \mathcal{F}$. Свойство нормировки следует из равенств $\mathbf{P}(\Omega|B) = \mathbf{P}(\Omega \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)/\mathbf{P}(B) = 1$, а свойство неотрицательности следует из $\mathbf{P}_{\text{у}}(A) = \mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B) \geqslant 0$, так как $\mathbf{P}(A \cap B) \geqslant 0$ и $\mathbf{P}(B) > 0$. Пусть имеем любую счетную последовательность $A_1, A_2, \ldots$ попарно непересекающихся событий из $\mathcal{F}$. Тогда находим

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\Big) = \frac{\mathbf{P}\Big(\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \cap B\Big)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\Big)}{\mathbf{P}(B)} = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i|B)$$

для случайных событий $A_1, A_2, \ldots$ Заметим, что $A_i \cap B \subset A_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots$, и, значит, последовательность $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots$ составлена из попарно непересекающихся случайных событий. Свойство счетной аддитивности имеет место для условной вероятности. Можно сказать, что условная вероятность обладает всеми свойствами априорной вероятности, т. е. она является неотрицательной, нормированной и счетно-аддитивной функцией на множестве $\mathcal{F}$.

7.3. Локализованная вероятностная модель

Переходим к построению второй вероятностной модели условного эксперимента $E_{\text{у}}$. Любой элементарный исход из $\Im'$, который не пересекается с $B \in \mathcal{F}$, не имеет места при проведении эксперимента $E_{\text{у}}$. Поэтому такого рода элементарные исходы из $\Im'$ могут быть отнесены к невозможному событию $\varnothing$ по отношению к эксперименту $E_{\text{у}}$. Так как исход B всегда наступает при проведении эксперимента $E_{\text{у}}$, то в качестве достоверного события $\Omega_{\text{у}}$ для эксперимента $E_{\text{у}}$ можно взять событие B. Все случайные события из $\mathcal{F}$, которые не пересекаются с B, также не происходят при проведении эксперимента $E_{\text{у}}$ и поэтому могут быть отнесены к ненаблюдаемым событиям по отношению к эксперименту $E_{\text{у}}$. Эти несложные рассуждения позволяют выбрать в качестве множества $\mathcal{F}_{\text{у}}$ наблюдаемых исходов условного эксперимента $E_{\text{у}}$ совокупность вида $\mathcal{F} \cap B = \{A \cap B \colon A \in \mathcal{F}\}$.

Покажем, что $\mathcal{F} \cap B$ есть σ-алгебра подмножеств из множества B. Так как $\mathcal{F} \cap B \subset \mathcal{F}$, то в $\mathcal{F} \cap B$ введены все те же теоретико-множественные операции, что и в $\mathcal{F}$. Равенство $B = B \cap B$ позволяет утверждать, что событие $B \in \mathcal{F} \cap B$ и, значит, $\mathcal{F} \cap B \neq \varnothing$. Далее, если $C \in \mathcal{F} \cap B$, то событие $C = C_0 \cap B$, где C_0 — некоторое случайное событие из $\mathcal{F}$. Отсюда нетрудно получить соотношения

$$\overline{C} = \Omega_{\text{у}} \backslash C = B \backslash C = B \backslash (C_0 \cap B) = B \cap \overline{C_0 \cap B} = B \cap (\overline{C}_0 \cup \overline{B}) = \\ = (B \cap \overline{C}_0) \cup (B \cap \overline{B}) = (\overline{C}_0 \cap B) \cup \varnothing = (\overline{C}_0 \cap B) \in \mathcal{F} \cap B,$$

ибо $\overline{C}_0 \in \mathcal{F}$. Наконец, если $A_1, A_2, \ldots$ суть последовательность множеств из $\mathcal{F} \cap B$, то имеем: $A_1 = D_1 \cap B$, $A_2 = D_2 \cap B, \ldots$, где $D_1, D_2, \ldots$ — некоторые случайные события из $\mathcal{F}$. Найдем следующее случайное событие: $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (D_i \cap B) = \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i\Big) \cap$ $\cap B$, и, значит, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \cap B$, если учесть, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i \in \mathcal{F}$. Итак, для $\mathcal{F} \cap B$ является σ-алгеброй.

Проверим аксиомы Колмогорова для условной вероятности $\mathbf{P}(A|B)$, $A \in \mathcal{F} \cap B$. Свойство нормировки получим из равенств вида $\mathbf{P}(B|B) = \mathbf{P}(B \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)/\mathbf{P}(B) = 1$. Свойства неотрицательности и счетной аддитивности условной вероятности $\mathbf{P}(A|B)$, $A \in \mathcal{F} \cap B$, следуют из соотношения $\mathcal{F} \cap B \subset \mathcal{F}$ и из того факта, что условная вероятность $\mathbf{P}(A|B)$ обладает указанными свойствами на $\mathcal{F}$. Как уже отмечалось, при $A \in \mathcal{F} \cap B$

условную вероятность $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(B)$ обозначают через $\mathbf{P}_{\text{у}}(A)$, подчеркивая тем самым, что мы рассматриваем эксперимент $E_{\text{у}}$ и его теоретико-множественную модель $(\Omega_{\text{у}}, \mathcal{F}_{\text{у}}) = (B, \mathcal{F} \cap B)$, которая существенно зависит от B. При этом вероятность $\mathbf{P}_{\text{у}}(A)$, $A \in \mathcal{F} \cap B$, можно также найти, рассматривая эксперимент $E_{\text{у}}$ как априорный эксперимент и используя различные подходы к определению вероятности, излагаемые в предыдущих лекциях. Можно сказать, что при построении модели $(B, \mathcal{F} \cap B, \mathbf{P}_{\text{у}}(A))$ условного эксперимента $E_{\text{у}}$ используются такие элементарные исходы априорного эксперимента E, которые полностью определяют локальные свойства исхода B. При этом исход B эксперимента E считаем одним из условий проведения эксперимента $E_{\text{у}}$. Поэтому такую модель будем называть локализованной по отношению к событию B. Этапы построения предложенных вероятностных моделей условного эксперимента $E_{\text{у}}$ наглядно проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 7.2. В урне находятся два белых шара и один черный. Два лица вынимают из урны одновременно по одному шару. Найти вероятность появления белого шара у первого лица, если у второго появился белый шар.

Решение. Первый способ. Сначала построим вероятностную модель $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ априорного эксперимента E. Комплекс условий его проведения $\Sigma = \{u_1$ — взята некоторая урна с тремя шарами, u_2 — два белых шара в урне, u_3 — один черный шар в урне, u_4 — два лица одновременно наудачу вынимают по одному шару, $\ldots\}$. В комплекс условий проведения эксперимента E не входит утверждение о том, что второе лицо изъяло из урны белый шар. Пусть теперь $\omega_1 = (\text{б}, \text{б})$ — описание элементарного исхода, при котором оба лица вытаскивают по белому шару. Далее, $\omega_2 = (\text{б}, \text{ч})$ — описание элементарного исхода, заключающегося в том, что первое лицо вытаскивает белый шар, а второе — черный. Наконец, $\omega_3 = (\text{ч}, \text{б})$ — описание элементарного исхода, при котором первое лицо вытаскивает черный шар, а второе — белый. Тогда достоверное событие $\Omega = \{(\text{б}, \text{б}), (\text{б}, \text{ч}), (\text{ч}, \text{б})\}$ и σ-алгебра $\mathcal{F} = \{\varnothing, \{(\text{б}, \text{б}), (\text{б}, \text{ч}), (\text{ч}, \text{б})\}, \{(\text{б}, \text{б})\}, \{(\text{б}, \text{ч})\}, \{(\text{ч}, \text{б})\}, \{(\text{б}, \text{б}), (\text{б}, \text{ч})\}, \{(\text{б}, \text{б}), (\text{ч}, \text{б})\}, \{(\text{ч}, \text{б}), (\text{б}, \text{ч})\}\}$. Используя классическое определение вероятности, найдем: $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, $\mathbf{P}(\{(\text{б}, \text{б})\}) = \mathbf{P}(\{(\text{б}, \text{ч})\}) = \mathbf{P}(\{(\text{ч}, \text{б})\}) = 1/3$, $\mathbf{P}(\{(\text{б}, \text{б}), (\text{б}, \text{ч})\}) = \mathbf{P}(\{(\text{б}, \text{б}), (\text{ч}, \text{б})\}) = \mathbf{P}(\{(\text{ч}, \text{б}), (\text{б}, \text{ч})\}) = 2/3$. Итак, для данного априорного эксперимента E построена вероятностная модель $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$.

Элементы $\Omega_{\text{у}}$, $\mathcal{F}_{\text{у}}$ первой вероятностной модели рассматриваемого условного эксперимента $E_{\text{у}}$ с комплексом условий $\Sigma_{\text{у}} = \{u_1$ — взята некоторая урна с тремя шарами, u_2 — два белых шара в урне, u_3 — один черный шар в урне, u_4 — два лица одновременно наудачу вынимают по одному шару, u_5 — второе лицо вытаскивает белый шар, $\ldots\}$ имеют следующий вид: $\Omega_{\text{у}} = \Omega$, $\mathcal{F}_{\text{у}} = \mathcal{F}$. Если теперь $A = \{(\text{б},\text{б}), (\text{б},\text{ч})\}$ — событие, которое заключается в том, что первое лицо вытаскивает белый шар и $B = \{(\text{б},\text{б}), (\text{ч},\text{б})\}$ — событие, которое заключается в том, что второе лицо вытаскивает белый шар, то $A \cap B = \{(\text{б},\text{б})\}$. Теперь по формуле для условной вероятности найдем, что послеопытная вероятность $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\{(\text{б},\text{б})\})/\mathbf{P}(\{(\text{б},\text{б}), (\text{ч},\text{б})\}) = \mathbf{P}(\{\omega_1\})/\mathbf{P}(\{\omega_1, \omega_3\}) = 1/2$. Это и есть окончательный ответ на поставленный в данном примере вопрос. Заметим, что, используя определение 7.1, нетрудно найти условные вероятности $\mathbf{P}(\cdot|B)$ для остальных событий из $\mathcal{F}_{\text{у}} = \mathcal{F}$.

Второй способ. Элементы $\Omega_{\text{у}}$, $\mathcal{F}_{\text{у}}$ локализованной вероятностной модели данного условного эксперимента $E_{\text{у}}$ с комплексом условий $\Sigma_{\text{у}}$ имеют следующий вид: $\Omega_{\text{у}} = B = \{(\text{б},\text{б}), (\text{ч},\text{б})\}$, $\mathcal{F}_{\text{у}} = \mathcal{F} \cap B = \{\varnothing, \{(\text{б},\text{б}), (\text{ч},\text{б})\}, \{(\text{б},\text{б})\}, \{(\text{ч},\text{б})\}\} \subset \mathcal{F}$. Теперь для события $\{(\text{б},\text{б})\} = A \cap B \in \mathcal{F}_{\text{у}}$, в котором уже учтено, что событие B произошло и $B = \Omega_{\text{у}}$, имеем: $\mathbf{P}(\{(\text{б},\text{б})\}|B) = \mathbf{P}((A \cap B)|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B) = 1/2$. Заметим, что эту же вероятность можно определить, используя классическое определение для эксперимента $E_{\text{у}}$ всего с двумя элементарными исходами. Тогда $\mathbf{P}_{\text{у}}(\{(\text{б},\text{б})\}) = 1/2$, так как для $E_{\text{у}}$ имеем: $n = 2$, $m = 1$.

Тестовые вопросы к лекции 7

1. Тип — проверка ответов.

Наудачу бросается игральная кость. Пусть A — выпадение четного числа очков, и B — выпадение числа очков, меньшего трех. Вычислить вероятности $\mathbf{P}(A|B)$, $\mathbf{P}(B|A)$ и $\mathbf{P}((A \backslash B)|B)$.

Ответы:

1) $\mathbf{P}(A|B) = 1/2$;

2) $\mathbf{P}(B|A) = 1/3$;

3) $\mathbf{P}_{\text{у}}((A \backslash B)|B) = 0$.

2. Тип — проверка ответов.

Две игральные кости бросают наудачу один раз. Пусть A — выпадение простой суммы и B — выпадение суммы очков больше пяти. Вычислить вероятности $\mathbf{P}(A|B)$, $\mathbf{P}(B|A)$ и $\mathbf{P}((A/B)|A)$.

Ответы:
1) $\mathbf{P}(A|B) = 4/13$;
2) $\mathbf{P}(B|A) = 8/15$;
3) $\mathbf{P}((A \backslash B)|A) = 7/15$.

3. Тип — одиночный выбор.

Из колоды в 36 карт последовательно вынуты две карты. Пусть событие A означает, что вторая карта есть туз, а событие B означает, что первая карта есть туз. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}(A|B)$ того, что вторая карта — туз, если первоначально был вынут туз.

- Вероятность $\mathbf{P}(A|B) = 1/105$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A|B) = 1/9$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A|B) = 3/35$.

4. Тип — одиночный выбор.

Некто непреднамеренно выбирает семью из двух детей. Трубку телефона случайно взял мальчик. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}(A)$ того, что в семье оба ребенка — мальчики.

- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 1/3$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 1/2$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 1/4$.

5. Тип — одиночный выбор.

Некто непреднамеренно выбирает семью из двух детей. По телефону от бабушки он узнает, что в семье есть мальчик. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}(A)$ того, что в семье оба ребенка — мальчики.

- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 1/4$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 1/2$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 1/3$.

6. Тип — множественный выбор.

Эксперимент заключается в однократном бросании игральной кости. При этом произошло событие B, когда выпало число очков больше трех. Пусть при каждом $i = 1, 2, \ldots, 6$ символом ω_i описывается элементарный исход A'_i, когда выпадает i очков. Определите вероятностные модели условного эксперимента и вероятность $\mathbf{P}_{\text{у}}(C)$ выпадения нечетного числа очков для условного опыта.

- Вероятностная модель условного эксперимента имеет следующий вид: $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}_{\text{у}}(\cdot))$, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$, $\mathbf{P}_{\text{у}}(A) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$, $A \in \mathcal{F}$, $B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $\mathbf{P}_{\text{у}}(C) = 1/3$.

• Вероятностная модель условного эксперимента имеет следующий вид: $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}_{\text{у}}(\cdot))$, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon A \subset \Omega\}$, $\mathbf{P}_{\text{у}}(A) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$, $A \in \mathcal{F}$, $C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $\mathbf{P}_{\text{у}}(C) = 2/3$.

• Вероятностная модель условного эксперимента имеет следующий вид: $(B, \mathcal{F} \cap B, \mathbf{P}_{\text{у}}(A))$, где $B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $\mathcal{F} \cap B = \{A\colon A \subset B\} = \{\{\omega_4\},\ \{\omega_5\},\ \{\omega_6\},\ \{\omega_4, \omega_5\},\ \{\omega_4, \omega_6\},\ \{\omega_5, \omega_6\},\ \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\},\ \varnothing\}$, $\mathbf{P}_{\text{у}}(A) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(B), A \in \mathcal{F}$, $C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $\mathbf{P}_{\text{у}}(C) = 1$.

• Вероятностная модель условного эксперимента имеет следующий вид: $(B, \mathcal{F} \cap B, \mathbf{P}_{\text{у}}(A))$, где $B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $\mathcal{F} \cap B = \{A\colon A \subset B\} = \{\{\omega_4\},\ \{\omega_5\},\ \{\omega_6\},\ \{\omega_4, \omega_5\},\ \{\omega_4, \omega_6\},\ \{\omega_5, \omega_6\},\ \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\},\ \varnothing\}$, $\mathbf{P}_{\text{у}}(A) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(B)$, $A \in \mathcal{F} \cap B$, $C = \{\omega_5\}$, $\mathbf{P}_{\text{у}}(C) = 1/3$.

7. Тип — одиночный выбор.

Подбрасываются два разноцветных игральных кубика. Известно, что сумма выпавших очков равна семи. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}_{\text{у}}(A)$ того, что хотя бы один раз выпадет пять очков.

• Вероятность $\mathbf{P}_{\text{у}}(A) = 1/5$.

• Вероятность $\mathbf{P}_{\text{у}}(A) = 1/3$.

• Вероятность $\mathbf{P}_{\text{у}}(A) = 1/2$.

Лекция 8

ФОРМУЛЫ И МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ ШАНСОВ НАСТУПЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

8.1. Связь условных и априорных вероятностей. Теорема умножения

При изучении общих свойств вероятностной функции вида $\mathbf{P}(A)$: $\mathcal{F} \to [0, 1]$ получены простейшие формулы для вычисления вероятностей одних событий через вероятности других событий. Например, при $A \in \mathcal{F}$ имеем: $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, при $A, B \in \mathcal{F}$ и $A \subset B$ верно равенство $\mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, наконец, при $A, B \in \mathcal{F}$ справедливо соотношение вида $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$. Далее рассмотрим два случайных события $A, B \in \mathcal{F}$, и пусть $\mathbf{P}(A) \neq 0$ и $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Из определения условных вероятностей имеем: $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B \cap A)/\mathbf{P}(A)$. Каждое из этих равенств эквивалентно теореме умножения для двух событий: $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$, $\mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)$. Можно сказать, что вероятность пересечения двух событий равна вероятности одного события, умноженной на условную вероятность второго события при условии, что первое событие произошло. Докажем теперь общее утверждение.

Теорема 8.1 (*теорема умножения*). *Пусть события* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ *принадлежат* σ-*алгебре* $\mathcal{F}$ *и вероятность* $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) > 0$. *Тогда имеет место следующее правило умножения вероятностей*:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) = \\ = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1) \times \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \\ \ldots \times \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Доказательство. Утверждение теоремы установлено для двух событий. Завершим доказательство для n событий методом математической индукции. Пусть вероятность

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2|A_1) \times \\ \times \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \times \mathbf{P}(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2})$$

для $(n-1)$ событий. Докажем подобное равенство для n событий. Обозначим вероятность вида $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n)$ через $\mathbf{P}(A \cap B)$, где $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}$ и событие $B = A_n$. Далее имеем

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \times \\ \times \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1) \times \\ \times \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \times \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Для доказательства теоремы достаточно потребовать более слабое ограничение $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, из которого следует $\mathbf{P}(A_1) > 0$, $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) > 0, \ldots, \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Однако в формулировке теоремы требуется более жесткое ограничение $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) > 0$, которое позволяет доказать и использовать $n!$ ее различных форм. Например, форму вида $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) = \mathbf{P}(A_n) \times \mathbf{P}(A_{n-1}|A_n) \times \ldots$ $\ldots \times \mathbf{P}(A_{n-2}|A_{n-1} \cap A_n) \times \ldots \times \mathbf{P}(A_1|A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n)$. Наконец, отметим, что теорема умножения применима, если вероятность только одного из событий A или B равна нулю. Пусть для определенности вероятность $\mathbf{P}(A) = 0$ и $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Отсюда получаем $0 = \mathbf{P}(A) \geqslant \mathbf{P}(A \cap B) = 0$. Поэтому имеем $\mathbf{P}(A|B) = 0$ и, значит, $0 = \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B) = 0$.

8.2. Локализованные вероятностные модели классических экспериментов и теорема умножения

Выясним связь между построением моделей классических экспериментов и теоремой умножения. Эту связь и ее применение продемонстрируем на простом примере.

Пример 8.1. Буквы слова *арба* написаны каждая на отдельной карточке. Одинаковые по форме карточки тщательно перемешаны, после чего последовательно и без возвращения извлекаются три. Выбранные карточки кладутся слева направо. Определить вероятность того, что в результате получается слово *раб* или, другими словами, наступает событие A.

1. *Классический способ решения задачи.* Пусть для отличия одинаковых букв с целью симметрии данного эксперимента E буквы в слове *арба* занумерованы слева направо цифрами 1,

2, 3 и 4. Обозначим множество $\{1,2,3,4\}$ символом M. Комплекс условий априорного эксперимента E имеет вид $\Sigma = \{u_1$ — четыре карточки, на каждой из которых написаны одна буква из слова *арба* и ей соответствующая метка — цифра из множества M; u_2 — наудачу по одной отбираются три карточки без возвращения и последовательно располагаются слева направо; u_3 — условие для прочтения записей на отобранных карточках; $\ldots\}$. В этом опыте предлагается под элементарным событием $\{\omega_i\}$ понимать упорядоченный список из трех последовательно отобранных карточек с описанием в виде вектора $\omega_i = (x_1, x_2, x_3)$, причем среди компонент x_1, x_2, x_3 нет одинаковых цифр из множества M. Здесь x_1 — цифра на первой отобранной карточке, x_2 — цифра на второй отобранной карточке и, наконец, x_3 — цифра на третьей отобранной карточке. Например, описанию (3, 1, 2) соответствует такой последовательный отбор трех карточек, при котором получается слово *бар*. При таком подходе элементарные исходы опыта будут равновероятными. Равенства $\Omega = \{\omega_i = (x_1,x_2,x_3)\colon x_1 \neq x_2 \neq x_3;$ $x_1, x_2, x_3 \in M\}$, $A = \{\omega_i = (x_1,x_2,x_3)\colon\ x_1 \neq x_2 \neq x_3;\ x_1 = 2;$ $x_2 \in M;\ x_3 = 3\} = \{(2,1,3),(2,4,3)\}$ определяют достоверное событие и событие появления слова *раб*. Если число элементов каждого из множеств Ω и A соответственно равно $\aleph(\Omega)$ и $\aleph(A)$, то по правилам комбинаторики имеем: $\aleph(\Omega) = 4 \times 3 \times 2 = 24$ и $\aleph(A) = 1 \times 2 \times 1 = 2$. Отсюда, применяя классическое определение вероятности, сразу получим: $\mathbf{P}(A) = 2/24 = 1/12$. Отметим, что для этого классического эксперимента σ-алгебра $\mathcal{F} = \{B\colon B \subset \Omega\}$.

2. *Решение с использованием теоремы умножения*. Пусть событие $A_1 \in \mathcal{F}$ означает появление первой карточки с надписью буквы *р*, событие $A_2 \in \mathcal{F}$ означает появление второй карточки с буквой *а*, и, наконец, символ $A_3 \in \mathcal{F}$ означает появление третьей карточки с буквой *б*. Из определения событий A_1, A_2 и A_3 получим: $A_1 = \{\omega_i = (x_1,x_2,x_3)\colon x_1 \neq x_2 \neq x_3;$ $x_1 = 2;\ x_2, x_3 \in M\}$, $A_2 = \{\omega_i = (x_1,x_2,x_3)\colon\ x_1 \neq x_2 \neq x_3;$ $x_2 = 1,4;\ x_1, x_3 \in M\}$, $A_3 = \{\omega_i = (x_1,x_2,x_3)\colon\ x_1 \neq x_2 \neq x_3;$ $x_3 = 3;\ x_1, x_2 \in M\}$, $A_1 \cap A_2 = \{\omega_i = (x_1,x_2,x_3)\colon x_1 \neq x_2 \neq x_3;$ $x_1 = 2;\ x_2 = 1,4;\ x_3 \in M\}$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{\omega_i = (x_1,x_2,x_3)\colon$ $x_1 \neq x_2 \neq x_3;\ x_1 = 2;\ x_2 = 1,4;\ x_3 = 3\} = \{(2,1,3),(2,4,3)\}$. Итак, событие A наступает, если происходят одновременно события A_1, A_2 и A_3. Тогда событие $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ и вероятность $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$.

Для вычисления условной вероятности $\mathbf{P}(A_2|A_1)$ рассмотрим по отношению к первоначальному эксперименту E первый условный эксперимент $E_{у1}$ с комплексом условий $\Sigma_{у1} = \{u_1$ — четыре карточки, на каждой из которых написаны одна буква из слова *арба* и соответствующая ей метка — цифра из множества M; u_2 — наудачу по одной отбираются три карточки без возвращения и последовательно располагаются слева направо; u_3 — на первой карточке появляется буква *р*; u_4 — условие для прочтения записей на отобранных карточках; $\ldots\}$. Для эксперимента $E_{у1}$ строим локализованную теоретико-множественную модель $(\Omega_{у1},\ \mathcal{F}_{у1}) = (A_1, \mathcal{F} \cap A_1)$, а вероятности событий из $\mathcal{F} \cap A_1$ определяем классическим способом. Так как случайное событие $A_1 = \{\omega_i = (x_1, x_2, x_3)\colon x_1 \neq x_2 \neq x_3;\ x_1 = 2;\ x_2, x_3 \in M\} = \{(2,1,3),\ (2,3,1),\ (2,1,4),\ (2,4,1),\ (2,3,4),\ (2,4,3)\}$ и случайное событие $A_2 \cap A_1 = \{\omega_i = (x_1, x_2, x_3)\colon x_1 \neq x_2 \neq x_3;\ x_1 = 2;\ x_2 = 1, 4;\ x_3 \in M\} = \{(2,1,3),\ (2,1,4),\ (2,4,1),\ (2,4,3)\}$, то $\aleph(A_1) = 6$, $\aleph(A_2 \cap A_1) = 4$. Отсюда находим, что $\mathbf{P}_{у1}(A_2 \cap A_1) = 4/6 = 2/3 = \mathbf{P}(A_2|A_1)$, где $A_2 \cap A_1 \in \mathcal{F} \cap A_1$.

Совершенно аналогично определяется условная вероятность $\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$. Для этого введем по отношению к первоначальному эксперименту E еще один условный эксперимент $E_{у2}$ с комплексом условий $\Sigma_{у2} = \{u_1$ — четыре карточки, на каждой из которых написаны одна буква из слова *арба* и ей соответствующая метка — цифра из множества M; u_2 — наудачу по одной отбираются три карточки без возвращения и последовательно располагаются слева направо; u_3 — на первой карточке появляется буква *р*; u_4 — на второй карточке появляется буква *а*; u_5 — условие для прочтения записей на отобранных карточках; $\ldots\}$. Для условного эксперимента $E_{у2}$ строим локализованную теоретико-множественную модель $(\Omega_{у2}, \mathcal{F}_{у2})$ вида $(A_1 \cap A_2,\ \mathcal{F} \cap (A_1 \cap A_2))$, а вероятности событий из $\mathcal{F} \cap (A_1 \cap A_2)$ определяем также классическим способом. Так как событие $A_1 \cap A_2 = \{(2,1,3),\ (2,1,4),\ (2,4,1),\ (2,4,3)\}$ и $A_3 \cap A_1 \cap A_2 = \{\omega_i = (x_1, x_2, x_3)\colon x_1 \neq x_2 \neq x_3;\ x_1 = 2;\ x_2 = 1, 4;\ x_3 = 3\} = \{(2,\ 1,\ 3),\ (2,4,3)\}$, то величина $\aleph(A_1 \cap A_2) = 4$ и величина $\aleph(A_3 \cap A_1 \cap A_2) = 2$. Поэтому следующая условная вероятность $\mathbf{P}_{у2}(A_3 \cap A_1 \cap A_2) = 2/4 = 1/2 = \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$, где $A_3 \cap A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F} \cap A_1$. В результате окончательно находим вероятность $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = (1/4) \times (2/3) \times (1/2) = 1/12$, и получаем тот же ответ.

Итак, при решении примера 8.1 предложен метод, который позволяет находить вероятности пересечений событий априорного эксперимента E через вероятности событий специально построенных и более простых условных экспериментов $E_{у1}$ и $E_{у2}$. Этот метод следует применять, если определение чисел $\aleph(\Omega)$ и $\aleph(A)$ вызывает значительные сложности.

8.3. Теоремы о полной вероятности и о гипотезах

Если последовательность $H_1, H_2, \ldots$ образует полную группу попарно несовместимых событий из $\mathcal{F}$, то события $H_1, H_2, \ldots$ принято называть гипотезами. С теоремой умножения и определением гипотез тесно связаны две формулы, с помощью которых можно вычислять априорные и апостериорные вероятности случайных событий. С этой целью перейдем к теоремам о полной вероятности и о гипотезах.

Теорема 8.2. *Пусть задана вероятностная модель* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ *и последовательность* $H_1, H_2, \ldots$ *образует полную группу попарно несовместных событий из* $\mathcal{F}$. *Если* $\mathbf{P}(H_i) > 0$ *для* $i \geqslant 1$ *и* $A \in \mathcal{F}$, *то имеет место формула полной вероятности*: $\mathbf{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$. Отсюда имеем: $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i)$. Так как события $H_1, H_2, \ldots$ попарно несовместны, т. е. $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то и их части $A \cap H_i$, $i = 1, 2, \ldots$, также будут попарно несовместны. Учитывая все вышесказанное, аксиому счетной аддитивности, условие $\mathbf{P}(H_i) > 0$ для $i \geqslant 1$ и теорему умножения, получим, что вероятность $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A \cap H_i)\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A \cap H_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)$. Доказанная теорема часто используется на практике.

Перейдем к рассмотрению теоремы о гипотезах.

Теорема 8.3 (*теорема о гипотезах*, *или теорема Байеса*). *Пусть выполняются все условия теоремы* 8.2 *и* $\mathbf{P}(A) > 0$. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots$ *имеет место формула Байеса*: $\mathbf{P}(H_k|A) = \mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A|H_k) \Big/ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)$.

Доказательство. В самом деле, учитывая условие $\mathbf{P}(A) > 0$, определение условной вероятности, теорему умножения и формулу полной вероятности, для каждого фиксированного $k = 1, 2, \ldots$ легко находим, что $\mathbf{P}(H_k|A) = \mathbf{P}(H_k \cap A)/\mathbf{P}(A) = (\mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A|H_k))\Big/\Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)\Big)$. Это выражение называют формулой Байеса. Таким образом, теорема о гипотезах доказана.

Полезно отметить, что функция $\mathbf{P}(H_i)$ одна и та же, изменяется здесь только аргумент — событие H_i из σ-алгебры $\mathcal{F}$. Но функции $\mathbf{P}(A|H_i)$, вообще говоря, различны. Здесь для каждого события H_i определяется своя функция $\mathbf{P}(A|H_i)\colon \mathcal{F} \to [0, 1]$. При этом аргументы у этих функций рассматриваются одинаковые и равные событию A из σ-алгебры $\mathcal{F}$. Далее, смысл формулы Байеса таков, что если наблюдалось событие A, то эту информацию можно и нужно использовать для уточнения вероятностей событий — гипотез $H_1, H_2, \ldots$ Рассмотрим примеры применения доказанных в этой лекции теорем.

Пример 8.2 (*задача о легком экзаменационном билете*). Преподаватель по теории вероятностей составил для r студентов $n > r$ экзаменационных билетов, среди которых m легких. Билеты вытаскиваются студентами один за другим по очереди в порядке их прибытия на экзамен случайным образом и без возвращения. Найти вероятность того, что второй извлеченный билет окажется легким. Пусть гипотеза H_1 означает появление легкого билета для студента, который пришел на экзамен первым, а гипотеза H_2 — появление у такого студента трудного билета. Вероятности событий H_1 и H_2 легко вычисляются с использованием классического подхода следующим образом: $\mathbf{P}(H_1) = m/n$, $\mathbf{P}(H_2) = (n - m)/n$. Если событие A есть появление легкого билета у студента, который был в очереди вторым, то $A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2)$. Отсюда по формуле полной вероятности находим, что вероятность $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)$. Используя способ построения локализованных вероятностных моделей $(H_1, \mathcal{F} \cap H_1, \mathbf{P}(\cdot|H_1))$ и $(H_2, \mathcal{F} \cap H_2, \mathbf{P}(\cdot|H_1))$ для условных экспериментов и классическое определение вероятности (см. решение примера 8.1), легко вычислим условные вероятности появления легкого билета у второго студента при различных гипотезах H_1 и H_2: $\mathbf{P}(A|H_1) = (m - 1) \times (n - 1)^{-1}$, $\mathbf{P}(A|H_2) = m/(n-1)$. Отсюда вероятность события A равна: $\mathbf{P}(A) = (m/n) \times [(m - 1)/(n - 1)] + [(n - m)/n] \times [m/(n - 1)] = m/n$. Итак, вероятность вытащить легкий билет для первого студента или второго оказывается равной. Аналогично можно показать, что вероятность вытащить легкий билет для s-го ($2 < s \leqslant r$) студента равна m/n. Поэтому не играет роли, в какое время идти студенту на экзамен с точки зрения появления у него легкого билета, и он может не нарушать свой привычный распорядок сна в день сдачи экзамена.

Пример 8.3. Страховая компания разделяет застрахованных лиц по трем классам риска: первый класс — это малый риск, второй класс означат средний риск, третий класс — большой риск. Среди клиентов компании 50 % составляют первый класс риска, 30 % — второй и 20 % — третий. Вероятность наступления страхового случая для первого класса риска равна 0,01; второго — 0,03 и третьего — 0,08. Какова вероятность того, что клиент, получивший денежное вознаграждение за период страхования, относится к группе малого риска?

Решение. Пусть событие A означает, что клиент получил вознаграждение. Событие A может наступить лишь совместно с одним из трех следующих попарно несовместных событий. Гипотеза H_1 означает, что клиент относится к первому классу риска. Гипотеза H_2 означает, что клиент относится ко второму классу риска. Наконец, гипотеза H_3 означает, что клиент относится к третьему классу риска. Необходимо определить условную вероятность $\mathbf{P}(H_1|A)$. Из условия задачи определяем вероятности гипотез: $\mathbf{P}(H_1) = 0{,}5$; $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}3$; $\mathbf{P}(H_3) = 0{,}3$. Известны также условные вероятности: $\mathbf{P}(A|H_1) = 0{,}01$; $\mathbf{P}(A|H_2) = 0{,}03$ и $\mathbf{P}(A|H_3) = 0{,}08$. По формуле Байеса имеем

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1)}{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2) + \mathbf{P}(H_3)\mathbf{P}(A|H_3)} = \\ = 1/6 < \mathbf{P}(H_1) = 0{,}5.$$

Тестовые вопросы к лекции 8

1. Тип — одиночный выбор.

В урне находится a белых шаров и b черных. Извлекаются последовательно два шара без возвращения. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}(A)$ того, что первый шар черный, а второй — белый.

- Вероятность $\mathbf{P}(A) = a(b-1)/(a+b)(a+b-1)$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = ab/(a+b-1)(a+b-1)$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = ab/(a+b)(a+b-1)$.

2. Тип — одиночный выбор.

Буквы слова *панама* написаны каждая на отдельной карточке, карточки тщательно перемешаны, и последовательно извлечены три карточки без возвращения. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}(A)$ того, что в результате опыта можно получить слово *нам*.

- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 0{,}025$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 0{,}023$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 0{,}035$.

3. Тип — одиночный выбор.

В урне находится $n = 20$ шаров, из которых $m = 9$ белых, а остальные черные. Из урны последовательно извлекаются три шара без возвращения, и при каждом излечении определяется цвет шара. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}(A)$ того, что в результате опыта можно ожидать появление белого шара при третьем извлечении.

- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 0{,}4$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 0{,}45$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 0{,}5$.

4. Тип — одиночный выбор.

Имеется пять урн. Первая урна состоит из двух белых и одного черного шара, вторая состоит только из 10 черных шаров, третья урна содержит два белых шара и один черный, четвертая — три белых и один черный, и, наконец, пятая урна также содержит три белых и один черный шар. Наудачу выбирается урна, и из нее наудачу вынимается шар. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}(A)$ того, что вынутый шар будет белым.

- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 0{,}5$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 0{,}6$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 17/30$.

5. Тип — одиночный выбор.

В урне находятся черные и белые шарики. Если из урны последовательно и без возвращения наудачу извлекаются два шарика, то вероятность того, что они оба будут белыми, оказывается равной $1/2$. Определите минимально возможное число шариков в урне.

- 5.
- 4.
- 3.

6. Тип — одиночный выбор.

Преподаватель составил для r студентов $n > r$ экзаменационных билетов, среди которых m легких. Билеты вытаскиваются студентами в порядке их прибытия на экзамен случайным образом. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}(A)$ того, что второй извлеченный билет окажется трудным.

- $\mathbf{P}(A) = m(n-m)/n(n-1)$.
- $\mathbf{P}(A) = (n-m)(n-m-1)/n(n-1)$.
- $\mathbf{P}(A) = (n-m)/n$.

7. Тип — одиночный выбор.

Компьютеры собираются из высококачественных элементов и из элементов обычного качества. Известно, что 80 % компьютеров собирается из высококачественных элементов. Если компьютер собран из высококачественных схем, то вероятность его безотказной работы равна 0,9. Если компьютер собран из элементов обычного качества, то его надежность равна 0,5. При испытании компьютер работал безотказно. Определите верное значение вероятности $\mathbf{P}(A)$ того, что компьютер собран из высококачественных элементов.

- $\mathbf{P}(A) = 0{,}878$.
- $\mathbf{P}(A) = 0{,}82$.
- $\mathbf{P}(A) = 0{,}79$.

Лекция 9

СТАТИСТИЧЕСКИ НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

9.1. Причинная независимость исходов одного и того же эксперимента и различных экспериментов на содержательном уровне

Общеязыковой смысл понятия причинной независимости исходов A и B реального эксперимента E означает, что осуществление события B не влияет на возможность наступления события A или $\overline{A}$. При достаточно большом числе N испытаний эксперимента E для независимых реальных событий A и B приближенное равенство $\mu(A \cap B, N)/N \approx (\mu(A, N)/N)(\mu(B, N)/N)$ для относительных частот установлено эмпирически многовековой практикой. Учитывая определение статистической вероятности, получим основополагающее соотношение *эмпирической независимости* вида $\mathbf{P}^*(A \cap B) \approx \mathbf{P}^*(A) \times \mathbf{P}^*(B)$. Очень трудно на интуитивном уровне выявить независимые исходы A и B некоторого статистически устойчивого эксперимента E. Например, при непреднамеренном одноразовом подбрасывании симметричной игральной кости исходы, состоящие в выпадении нечетного числа очков (событие A) и выпадении числа очков, кратного трем (событие B), не представляются на первый взгляд независимыми. Однако многочисленные опыты с этим экспериментом подтверждают справедливость условия $\mathbf{P}^*(A \cap B) \approx \mathbf{P}^*(A) \times \mathbf{P}^*(B)$, и эти события мы должны считать эмпирически независимыми. Но настоящая экзотика для нашей интуиции наступает, если рассмотреть в этом эксперименте три новые пары исходов: 1) выпадение четного числа очков (результат A_1) и выпадение числа очков, кратного трем (результат B); 2) выпадение четного числа очков (результат A_1) и выпадение числа очков, некратного трем (событие B_1); 3) выпадение нечетного числа очков (результат A) и выпадение числа очков, некратного трем (результат B_1). Опытным путем легко убедиться, что для этих пар при достаточно большом числе N также имеет место условие эмпирической независимости. Для этого примера, как и для других, понятие независимости событий может показаться несколько искусственным. На содержательном уровне не так просто себе представить, что одни и те же условия этого (или другого) эксперимента некоторые его исходы A и B делают безразличными по отношению друг к другу в смысле их наступления или ненаступления.

Настоящая сфера рассмотрения и применения интуитивного понятия независимости относится к случаю, когда приходится одновременно или последовательно проводить несколько причинно независимых экспериментов $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Например, пусть в одной комнате наудачу бросается симметричная монета (эксперимент E_1), а в другой комнате непреднамеренно подбрасывается симметричная игральная кость (эксперимент E_2). Совершенно ясно, что выпадение той или другой стороны монеты не оказывает никакого влияния на выпадение той или иной грани игральной кости. Значит, выпадение, например, орла на монете (событие A) и выпадение четного числа очков на игральной кости (событие B), очевидно, всеми признается причинно независимыми.

В учебнике [9] подробно показывается выполнение условий эмпирической независимости для такого рода экспериментов. При этом в основе лежит следующий принцип совместного рассмотрения экспериментов E_1 и E_2. Это означает, что фиксированное испытание с номером $i = 1, 2, \ldots, N_1$ эксперимента E_1 можно рассматривать с любым номером $j = 1, 2, \ldots, N_2$ испытания эксперимента E_2. Наоборот, фиксированное испытание с номером $j = 1, 2, \ldots, N_2$ эксперимента E_2 можно рассматривать с любым номером $i = 1, 2, \ldots, N_1$ испытания эксперимента E_1. Тогда испытание с номером i эксперимента E_1 и испытание с номером j эксперимента E_2 можно представить как испытание с векторным номером $(i,\ j)$ совместного и более сложного эксперимента E, обозначаемого символом $E_1 \otimes E_2$. Если при этом испытание с номером i эксперимента E_1 дает некоторый его исход A и испытание с номером j эксперимента E_2 дает некоторый его исход B, то будем считать, что испытание с векторным номером $(i,\ j)$ совместного эксперимента $E = E_1 \otimes E_2$ дает некоторый его результат, обозначаемый символом $A \times B$. Таким образом, для причинно-независимых статистически устойчивых экспериментов E_1 и E_2 произвольной природы удается рассмотреть единый совместный эксперимент $E = E_1 \otimes E_2$ с выделением в опыте E эмпирически независимых исходов.

9.2. Математическое описание независимости случайных событий

В разделе 9.1 для статистически устойчивого эксперимента E произвольной природы понятие причинной независимости исходов A и B подтверждается фундаментальным условием эмпирической независимости. Это позволяет в рамках вероятностной модели $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ произвольного статистически устойчивого эксперимента E математически формализовать интуитивное понятие независимости исходов.

Определение 9.1. События A, B из $\mathcal{F}$ называются статистически независимыми относительно вероятности $\mathbf{P}(\cdot)$ или попарно независимыми, если $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. Иначе они называются зависимыми.

С помощью этого определения доказывается, что из независимости A и B следует независимость событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Так как событие $A \cup \overline{A} = \Omega$ и $(A \cap \overline{A}) = \varnothing$, то вероятность $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}(B \cap \overline{A})$. Поскольку $\mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, то $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(B \cap \overline{A})$ и $\mathbf{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)(1 - \mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\overline{A})$. Таким образом, события $\overline{A}$ и B являются статистически независимыми. Для остальных пар вида A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ доказательство проверяется аналогичным способом. При $\mathbf{P}(A_1) > 0$, $\mathbf{P}(A_2) > 0$ и в случае статистической независимости A_1 и A_2 с использованием формулы для условной вероятности имеем

$$\mathbf{P}(A_1|A_2) = \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbf{P}(A_2)} = \frac{\mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2)}{\mathbf{P}(A_2)} = \mathbf{P}(A_1),$$

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbf{P}(A_1)} = \frac{\mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2)}{\mathbf{P}(A_1)} = \mathbf{P}(A_2).$$

Таким образом, в случае независимости случайных событий A_1 и A_2 их условные и безусловные вероятности совпадают, т. е. осуществление события A_2 не изменяет вероятности появления события A_1. В этом и заключается содержательный смысл статистической независимости событий. Однако следует заметить, что эти равенства имеют место только при $\mathbf{P}(A_1) \neq 0$, $\mathbf{P}(A_2) \neq 0$, и поэтому их неразумно использовать в качестве определения статистической независимости. Более того, пусть для проверки статистической независимости событий A_1 и A_2 используются определение независимости в виде равенства $\mathbf{P}(A_1|A_2) = \mathbf{P}(A_1)$, статистическое определение условной и безусловной вероятности и приближенное равенство $\mathbf{P}^*(A_1|A_2) \approx \mathbf{P}^*(A_1)$. Тогда на практике необходимо проводить условный эксперимент $E_{\text{у}}$. Это обстоятельство вызывает значительные трудности. Рассмотрим простую связь между совместностью и независимостью событий A и B. Пусть события A и B несовместимы и $\mathbf{P}(B) \neq 0$, тогда имеем: $A \cap B = \varnothing$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$, $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B) = 0$, и если $\mathbf{P}(A) \neq 0$, то события A и B зависимы, а если $\mathbf{P}(A) = 0$, то A и B независимы. Приведем теперь важное определение статистической независимости событий в совокупности.

Определение 9.2. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого набора $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots$ $\ldots, A_{j_s}$ событий из семейства $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ выполняется равенство $\mathbf{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_s}) = \mathbf{P}(A_{j_1}) \times \mathbf{P}(A_{j_2}) \times \ldots \times \mathbf{P}(A_{j_s})$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$, $1 < s \leqslant n$.

Заметим, что из попарной независимости событий A_1, $A_2, \ldots, A_n$, вообще говоря, не следует их независимость в совокупности (см. [9], с. 155). Более того, для независимости в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ недостаточно выполнения равенства $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2) \times \ldots \times \mathbf{P}(A_n)$. Для подтверждения этого рассмотрим опыт.

Пример 9.1. Над поверхностью стола наудачу два раза подбрасывается симметричная игральная кость, и определяется число выпавших очков при каждом броске. Найти такие события A, B и C, для которых независимость тройки не влечет их попарную независимость.

Решение. Обозначим вектором (x, y) такой элементарный исход, когда при первом броске выпадает x очков, а при втором — y. Каждая из компонент x, y может принимать целое значение от единицы до шести. Здесь имеется $n = 36$ равновозможных элементарных событий $\{(x, y)\}$, и достоверное событие $\Omega = \{\omega = (x, y)\colon\ x, y = 1, 2, \ldots, 6\}$. Если $\mathcal{F}$ — множество всех подмножеств множества Ω, то $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}\}$. Обозначим через $A \in \mathcal{F}$ событие, когда при втором броске выпадает не более трех очков. Обозначим через $B \in \mathcal{F}$ событие, когда при втором броске выпадает не менее трех и одновременно не более пяти очков. Пусть событие C состоит в том, что сумма выпавших очков при двух бросках равна девяти. Тогда событие $A = \{\omega = (x, y)\colon\ x = \overline{1, 6},\ y = 1, 2, 3\} = \{(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$, $(6, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$, $(6, 3)\}$, событие $B = \{\omega = (x, y)\colon\ x = \overline{1, 6},\ y = 3, 4, 5\} = \{(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(5,\ 3)$, $(6, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$, $(5, 4)$, $(6, 4)$, $(1, 5)$,

$(2,5)$, $(3,5)$, $(4,\ \ 5)$, $(5,5)$, $(6,5)\}$ и событие $C = \{\omega = (x,y)\colon x, y = \overline{1,6},\ x+y=9\} = \{(6,3),\ (5,4),\ (4,5),\ (3,6)\}$. Отсюда $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$, $\mathbf{P}(C) = 1/9$ и

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}\bigl(\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}\bigr) = \\ = 1/6 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}\bigl(\{(6,3)\}\bigr) = 1/36 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C),$$

$$\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}\bigl(\{(6,3),(5,4),(4,5)\}\bigr),$$

$$\mathbf{P}(B \cap C) = 1/12 \neq \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(C).$$

Теперь $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}\bigl(\{(6,3)\}\bigr) = 1/36 = (1/2) \times (1/2) \times (1/9) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$. Итак, имеем независимость событий A, B и C, но всевозможные пары этих событий являются зависимыми объектами.

9.3. Фундаментальная роль статистической независимости в теории вероятностных моделей

Статистическая независимость является одним из фундаментальных понятий, играющим центральную роль в различных приложениях теории вероятностного моделирования. Определения 9.1 и 9.2 фактически формализуют интуитивный смысл независимости исходов многих реальных явлений и процессов. Однако статистическая независимость не тождественна причинной независимости, которую мы часто употребляем и используем на интуитивном уровне в обыденной жизни. Особенности статистической независимости случайных событий — отражение некоторых основных свойств их причинной независимости. Прежде всего заметим, что если пара $(\Omega, \mathcal{F})$ фиксирована, то некоторые события A и B из $\mathcal{F}$ могут быть статистически независимыми относительно одной вероятностной функции и в то же время оказаться статистически зависимыми относительно другой. Следующий пример подтверждает это очевидное замечание.

Пример 9.2. Пусть опыт заключается в случайном бросании симметричной игральной кости, грани которой помечены цифрами от 1 до 6. Определяется цифра на выпавшей грани.

При $i = 1, 2, \ldots, 6$ символом ω_i обозначим описание такого элементарного исхода, когда при броске выпадает грань с цифрой i. Поэтому $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ и множество всех подмножеств множества Ω есть $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{64}\}$. Рассмотрим исходы A и B, которые заключаются в появлении четной грани и соответственно в появлении любой грани с цифрой от 3 до 6. Тогда $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $A \cap B = \{\omega_4, \omega_6\}$ и, используя классическое определение вероятности, находим: $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 2/3$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/3 = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. Значит, события A и B независимы. Если же у этой игральной кости так нарушить симметрию, что вероятность $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \mathbf{P}(\{\omega_3\}) = \mathbf{P}(\{\omega_4\}) = \mathbf{P}(\{\omega_5\}) = \mathbf{P}(\{\omega_6\}) = 4/25$, $\mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 1/5$, то $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{\omega_2\}) + \mathbf{P}(\{\omega_4\}) + \mathbf{P}(\{\omega_6\}) = 13/25$, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\{\omega_3\}) + \mathbf{P}(\{\omega_4\}) + \mathbf{P}(\{\omega_5\}) + \mathbf{P}(\{\omega_6\}) = 16/25$ и вероятность $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\{\omega_4\}) + \mathbf{P}(\{\omega_6\}) = 8/25$, то, поскольку теперь $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, события A и B для несимметричной игральной кости уже станут зависимыми. Легко видеть, что эксперимент с симметричной игральной костью и эксперимент с несимметричной игральной костью имеют одну и ту же теоретико-множественную модель $(\Omega,\ \mathcal{F})$. Более интересным является такой случай, когда совсем незначительное изменение условий эксперимента приводит к изменению $(\Omega,\ \mathcal{F})$ и, самое главное, к потере независимости событий. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 9.3. Пусть имеется стандартная колода из 36 карт. Каждая карта имеет одну из четырех мастей (пики, трефы, червы, бубны) и одно из девяти значений (6, 7, 8, 9, 10, валет, дама, король, туз). Случайно выбирают одну карту. Рассмотрим исходы A и B этого опыта, которые заключаются в появлении короля и соответственно в появлении карты пиковой масти. Тогда событие $A \cap B$ означает, что вынут король пиковой масти. В этом простом эксперименте имеем: $\mathbf{P}(A) = 4/36 = 1/9$, $\mathbf{P}(B) = 9/36 = 1/4$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/36 = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$ и события A и B независимы. Теперь незначительно изменим этот опыт. Известно, что при игре в покер необходимо добавить в колоду карту «джокер». Итак, в колоде уже содержится 37 карт. В последнем опыте события A и B станут зависимыми, так как $\mathbf{P}(A) = 4/37$, $\mathbf{P}(B) = 9/37$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/37 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Тестовые вопросы к лекции 9

1. Тип — одиночный выбор.

Определите единственное соотношение, которое следует из приближенного равенства вида $\mu(A \cap B, N)/\mu(B, N) \approx \mu(A \cap \overline{B}, N)/\mu(\overline{B}, N)$, установленного эмпирическим путем.

- $\mu(A \cap B, N)/\mu(B, N) \approx (\mu(A, N)/N) \times (\mu(B, N)/N)$.
- $\mu(A \cap B, N)/N = (\mu(A, N)/\mu(B, N)) \times (\mu(B, N)/N)$.
- $\mu(A \cap B, N)/N \approx (\mu(A, N)/N) \times (\mu(B, N)/N)$.

2. Тип — множественный выбор.

В одной комнате наудачу бросается симметричная монета (эксперимент E_1), а в другой комнате непреднамеренно подбрасывается симметричная игральная кость (эксперимент E_2). Пусть исход A означает выпадение орла на монете и событие B означает выпадение четного числа очков на игральной кости. Из приведенных соотношений определите эмпирические независимости событий A и B.

- $\mu(A \cap B, N)/\mu(B, N) \approx \mu(A \cap \overline{B}, N)/\ \mu(\overline{B}, N)$.
- $\mu(A \cap B, N)/N = (\mu(A, N)/\mu(B, N)) \times (\mu(B, N)/N)$.
- $\mu(A \cap B, N)/N \approx (\mu(A, N)/N) \times (\mu(B, N)/N)$.

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть события A и B являются независимыми. Определите верное утверждение.

- События $\overline{A}$ и $\overline{B}$ являются независимыми.
- События $\overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{B}$ являются независимыми.
- События $A \cap \overline{B}$ и $\overline{B}$ являются независимыми.

4. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ — вероятностная модель некоторого опыта, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$ и $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = \mathbf{P}(\{\omega_3\}) = \mathbf{P}(\{\omega_4\}) = 1/4$. Рассматриваются события $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4\}$ и $C = \{\omega_3, \omega_4\}$. Определите верные равенства для событий A, B и C.

- Вероятность $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(C)$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(C)$.
- Вероятность $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(C)$.

5. Тип — одиночный выбор.

Из урны, содержащей три белых и семь красных шаров, наудачу последовательно и без возвращения извлекаются два шара. Пусть события A, B и C соответственно означают, что первым извлечен белый шар, второй шар вынут белый и, наконец, по крайней мере один из вынутых шаров белый. Определите верное утверждение для событий A, B и C.

- Вероятность $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|C)$.
- События A, B и C не являются независимыми в совокупности.

6. Тип — множественный выбор.

События A_1 и A_2 независимы, и $\mathbf{P}(A_1) = p_1$, $\mathbf{P}(A_2) = p_2$. Пусть события A, B и C соответственно означают, что не произойдет ни одного из событий A_1, A_2; произойдет хотя бы одно из событий A_1, A_2; произойдет одно и только одно из событий A_1, A_2. Определите верные равенства для событий A, B и C.

- Вероятность $\mathbf{P}(A) = 2(1 - p_1)(1 - p_2)$.
- Вероятность $\mathbf{P}(B) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$.
- Вероятность $\mathbf{P}(C) = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть достоверное событие $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ и $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 3/8$, $\mathbf{P}(\{\omega_3\}) = \mathbf{P}(\{\omega_4\}) = 1/8$, $A = \{\omega_1, \omega_3\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$, $C = \{\omega_2, \omega_3\}$. Определите верные утверждения для событий A, B и C.

- Вероятность $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 1/8$.
- Вероятность $\mathbf{P}(B \cap C) = 1/2$.
- События A, B и C являются независимыми в совокупности.
- Вероятность $\mathbf{P}(C) = 1/2$.
- Вероятность $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(C)$.

Часть II

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Лекция 10

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

10.1. Предел последовательности случайных событий и аксиомы непрерывности

Напомним [9], что эксперимент E задается множеством Σ условий его проведения и совокупностью $\Im$ его допустимых исходов. Это позволяет построить для эксперимента E адекватную вероятностную модель $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. В этой модели Ω есть множество описаний всех элементарных исходов и σ-алгебра $\mathcal{F}$ наблюдаемых случайных событий эксперимента E является подмножеством $\Im$. Вероятность $\mathbf{P}(A)$ определяет шанс наступления исхода $A \in \mathcal{F}$. Изучим теперь общие свойства вероятности $\mathbf{P}(A)$, рассматриваемой на любой последовательности $A_1, A_2, \ldots$ случайных событий из $\mathcal{F}$. Эту последовательность будем также обозначать через $\{A_i; i \geqslant 1\}$.

Определение 10.1. Верхним пределом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ последовательности $\{A_i; i \geqslant 1\}$ событий из $\mathcal{F}$ называется такое событие $A^* \in \mathcal{F}$, что $A^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, т. е. A^* — событие, которое состоит только из тех $\omega \in \Omega$, которые принадлежат бесконечному числу событий A_k.

Верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ также обозначают символом $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$.

Определение 10.2. Нижним пределом $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ последовательности $\{A_i; i \geqslant 1\}$ случайных событий из $\mathcal{F}$ называется такое событие $A_* \in \mathcal{F}$, что $A_* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, т. е. событие A_* состоит из тех описаний $\omega \in \Omega$ элементарных исходов, которые принадлежат всем событиям $A_1, A_2, \ldots$, за исключением конечного числа.

Другими словами, событие A_* наступит, если произойдут все события $A_1, A_2, \ldots$, за исключением, быть может, только конечного их числа. Нижний предел $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$ также обозначают символом $\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n$.

Очевидно, что $A_* \subset A^*$. Действительно, если $\omega \in A_*$, то существует такое натуральное число N, что элемент $\omega \in A_N \cap \cap A_{N+1} \cap \ldots$ Отсюда получим, что $\omega \in A_N$, $\omega \in A_{N+1}, \ldots$ Тогда $\omega \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $\omega \in \bigcup\limits_{k=2}^{\infty} A_k, \ldots$ и, следовательно, описание $\omega \in A^*$, т. е. $A_* \subset A^*$. Обратное утверждение неверно.

Определение 10.3. Если $A_* = A^*$, то говорят, что последовательность $\{A_i; i \geqslant 1\}$ событий из $\mathcal{F}$ имеет предел, и записывают $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Теорема 10.1. *Вероятностная функция* $\mathbf{P}(\cdot)\colon\ \mathcal{F} \to [0,1]$ *непрерывна снизу, т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$ *для любой последовательности* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *событий из* $\mathcal{F}$.

Доказательство. Покажем, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{F}$ существует. Для событий A_* и A^*, учитывая $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, находим

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \inf A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \\
&= (A_1 \cap A_2 \cap \ldots) \cup (A_2 \cap A_3 \cap \ldots) \cup \ldots = \\
&= (A_1 \cap A_2 \cap \ldots) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots) \cup \ldots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \\
&= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \cap (A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \cap \ldots = \\
&= A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A^*.
\end{aligned}$$

Отсюда $A_* = A^*$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Далее покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big)$. Любое событие A_n

при $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ можно представить в виде

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \Big(A_k \cap \overline{A}_{k+1}\Big) \cup \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

События $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} (A_k \cap \overline{A}_{k+1})$ не пересекаются. События $A_1 \cap \overline{A}_2$, $A_2 \cap \overline{A}_3, \ldots$ попарно не пересекаются. Поэтому для вероятностей $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(A_n)$ имеем

$$\mathbf{P}(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k \cap \overline{A}_{k+1}) + \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big),$$

$$\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k \cap \overline{A}_{k+1}) + \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k \cap \overline{A}_{k+1})$ сходится, так как его сумма равна $\mathbf{P}(A_1) - \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\Big)$. Поэтому его остаток

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k \cap \overline{A}_{k+1}) \to 0$$

при $n \to \infty$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве для вероятности $\mathbf{P}(A_n)$, получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big)$. Теорема 10.1 (первая аксиома непрерывности) доказана.

Теорема 10.2. *Вероятностная функция* $\mathbf{P}(\cdot)$: $\mathcal{F} \to [0,1]$ *непрерывна сверху, т. е. предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big) = \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$ *для любой последовательности* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *из* $\mathcal{F}$.

Доказательство. При $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ получим, что

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k &= \\ &= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \cap (A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \cap \ldots = \\ &= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \cap \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.\end{aligned}$$

Аналогично найдем, что

$$\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \\ = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots) \cup (A_2 \cap A_3 \cap \ldots) \cup \ldots = \\ = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

Поэтому $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Введем события: $B_1 = A\backslash A_1$, $B_2 = A\backslash A_2, \ldots, B_n = A\backslash A_n, \ldots$ Очевидно, что $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, так как $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ Покажем, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. Предположим обратное, т. е. что $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing$. Тогда существует такое $\omega_0 \in \Omega$, что $\omega_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Поэтому $\omega_0 \in B_1, \omega_0 \in B_2, \ldots$ Так как событие $B_n = A\backslash A_n$, то $\omega_0 \in A$ и $\omega_0 \notin A_n$ для каждого $n \geqslant 1$. Отсюда $\omega_0 \in A$ и $\omega_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Получили противоречие, и, значит, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. Для событий B_n, $n \geqslant 1$, верна теорема 10.1. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty} B_n\big) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A\backslash A_n)$. Так как $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $A \supset A_n$ для всех $n \geqslant 1$. Поэтому вероятность $\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A_n)$ и, значит, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(A) - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$. Получаем, что $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big)$, теорема 10.2 (вторая аксиома непрерывности) доказана.

10.2. Одномерные случайные величины

Некоторый элементарный исход $A' = \{\omega\}$ с описанием $\omega \in \Omega$ характеризует эксперимент E с качественной точки зрения. Вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\})$ определяет шанс наступления элементарного исхода $A' = \{\omega\}$. Однако каждому элементарному случайному событию A' опыта можно дать и количественную характеристику. С этой целью над элементарными исходами статистически устойчивых экспериментов с помощью приборов проводят различные измерения. Результатом этих измерений обычно являются некоторые действительные числа. Приведем два примера.

Пример 10.1. Опыт состоит в наблюдении процесса распада некоторого количества радиоактивного вещества. Например, химический элемент радий (Ra) превращается в химический элемент радон (Rn), при этом излучается альфа-частица — ядро атома гелия (He). С помощью счетчика Гейгера–Мюллера в течение десятиминутного интервала фиксируется число распавшихся атомов. Это число — количественная характеристика наблюдаемого элементарного результата данного эксперимента. Возможными значениями числа распавшихся атомов за каждые десять минут могут быть все неотрицательные целые числа.

Пример 10.2. Эксперимент заключается в испытании некоторого узла космического корабля в течение 200 ч непрерывной работы. Определяется время работы узла до возникновения отказа. В этом эксперименте количественная характеристика результата измерения его элементарных исходов может принимать значения на отрезке $[0, 200]$.

В этих примерах мы имели всегда одну и ту же картину. Если эксперимент проведен и зарегистрирован определенный его элементарный исход A' с описанием ω, то с помощью измерителя имеем значение функции $\xi(\omega)$ с областью определения Ω и областью значений $X \subset R = \{x\colon -\infty < x < \infty\}$. Значения аргумента ω отображения $\xi(\omega)\colon \Omega \to X$, в отличие от функций, которые рассматриваются в математическом анализе, не находятся в нашем распоряжении, а определяются исходом статистически устойчивого эксперимента E. Некоторые значения аргумента ω функции $\xi(\omega)$ появляются часто, а некоторые — редко, и, следовательно, соответствующие им значения функции также появляются часто или редко. Очень важно, какие значения принимает функция $\xi(\omega)$, но не менее важно уметь находить вероятности появления тех или иных значений функции $\xi(\omega)$. При определении вероятностей того, что функция $\xi(\omega)$ будет принимать значения из промежутков вида $(-\infty, a)$, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $\{a\}$, и $\{b\}$, необходимо потребовать, чтобы соответствующие им множества $\{\omega\colon \xi(\omega) < a\}$, $\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) \leqslant b\}$, $\{\omega\colon a < \xi(\omega) < b\}$, $\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) < b\}$, $\{\omega\colon a < \xi(\omega) \leqslant b\}$, $\{\omega\colon \xi(\omega) = a\}$ и $\{\omega\colon \xi(\omega) = b\}$ принадлежали $\mathcal{F}$. Другими словами, эти подмножества множества Ω должны быть случайными событиями. Введем следующее определение.

Определение 10.4. Одномерной случайной величиной $\xi(\omega)$ на объекте $(\Omega,\ \mathcal{F})$ называется всякое отображение Ω на $X \subset R$, для которого выполняется условие измеримости вида $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ при любом $x \in R$.

Если $\xi(\omega)$ является одномерной случайной величиной или измеримым отображением, то легко доказываются следующие соотношения:

$$\{\omega\colon\ \xi(\omega) \geqslant a\} = \Omega \backslash \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a\} \in \mathcal{F},$$

$$\{\omega\colon\ \xi(\omega) \leqslant a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a + 1/i \in \mathcal{F},$$

$$\{\omega\colon\ \xi(\omega) > a\} = \Omega \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a + 1i\} \right) \in \mathcal{F}, \tag{10.1}$$

$$\{\omega\colon\ a \leqslant \xi(\omega) < b\} = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < b\} \backslash \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a\} \in \mathcal{F},$$

$$\{\omega\colon\ a < \xi(\omega) < b\} = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < b\} \backslash \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a + 1/i\} \in \mathcal{F},$$

$$\{\omega\colon\ \xi(\omega) = a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a + 1/i\} \backslash \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a\} \in \mathcal{F}.$$

Соотношения (10.1) и свойства вероятностной модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ эксперимента E, изложенные и доказанные в [1, 4, 6, 8–11], позволяют в дальнейшем более подробно рассматривать только свойства вероятностей случайных событий специального вида $A_x = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\}$, $x \in R$.

Пример 10.3. Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F})$ — теоретико-множественная модель произвольного статистически устойчивого эксперимента E и A — некоторое случайное событие из $\mathcal{F}$. Рассмотрим отображение $\xi(\omega)\colon\ \Omega \to \{0, 1\} = X$, которое принимает значение 1 при $\omega \in A$ и значение 0 при $\omega \in \overline{A}$. Эта функция является случайной величиной, так как $A_x = \varnothing \in \mathcal{F}$ при $x \leqslant 0$, $A_x = \overline{A} \in \mathcal{F}$ при $0 < x \leqslant 1$ и $A_x = \Omega \in \mathcal{F}$ при $x > 1$, т. е. при $x \in R$ множество $\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Такую случайную величину называют индикатором события A и обозначают через $I_A(\omega)$.

Пример 10.4. Наудачу над поверхностью стола подбрасывается монета до первого выпадения орла. В этом случае ω_i при фиксированном $i \geqslant 1$ представляет собой описание такого элементарного исхода, когда $(i-1)$ раз выпадает решка, а последний раз выпадает орел. Пусть ω_∞ — описание такого элементарного исхода, когда орел не выпадает. Для этого эксперимента достоверное событие $\Omega = \{\omega_\infty, \omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon\ A \subset \Omega\}$ — множество всех подмножеств множества Ω. Если теперь $\xi(\omega)$ определяет число произведенных бросков в каждом таком опыте, то естественно положить $\xi(\omega_i) = i$ при $i \geqslant 1$ и $\xi(\omega_\infty) = +\infty$. При $x \in R$ получаем, что $\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\} \subset \Omega$ и, значит, $\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Однако такая функция не будет случайной величиной, так как $\xi(\omega_\infty) \notin R$, и, более того, это отображение имеет вид $\xi(\omega)\colon \Omega \to \{0, 1, \ldots\} \cup \{+\infty\}$.

Теперь функцию $\xi(\omega)\colon\ \Omega \to R$ естественно рассматривать в качестве математической модели конкретного измерителя случайных элементарных событий эксперимента E. Случайные величины, которые являются математическими моделями различных измерителей эксперимента E, будем обозначать буквами греческого алфавита $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$, $\xi_1(\cdot)$, $\eta_1(\cdot), \ldots$ без индексов или с индексами, а их возможные значения соответственно строчными (малыми) буквами латинского алфавита x, y, z, $u, \ldots$

10.3. Способы задания одномерных случайных величин

Поточечное задание случайных величин представляет собой первый способ. Он заключается в указании для любого $\omega \in \Omega$ численного значения каждой рассматриваемой для этого эксперимента случайной величины, например: $\xi(\omega) = x \in R$, $\eta(\omega) = y \in R$ и т. д.

Так как элементарные результаты появляются или не появляются согласно вероятностной функции $\mathbf{P}(\cdot)\colon\ \mathcal{F} \to [0, 1]$, то наблюдаемые значения случайной величины меняются от опыта к опыту случайным образом. Поэтому для полной характеристики свойств случайной величины недостаточно задать множество $\{\xi(\omega)\colon\ \omega \in \Omega\} = X$ всех элементов вида $\xi(\omega)$. Необходимо дополнительно указать, с какой вероятностью следует ожидать в каждом отдельном опыте появления того или иного значения случайной величины. В силу этого естественным образом возникает второй способ задания одномерной случайной величины ξ с помощью функции $F(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\})\colon$ $R \to [0, 1]$. Пользуясь определением 10.4, можно найти вероятности $\mathbf{P}(\{\omega:\ \xi(\omega) < x\})$, $x \in R$, и рассмотреть их свойства. Функция $F(x)$ называется интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения случайной величины $\xi(\cdot)$. Интегральная функция распределения устанавливает соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями некоторых событий из $\mathcal{F}$, связанных определенным образом с этими возможными значениями. Для краткости иногда будем записывать равенство $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$ вместо равенства $F(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$.

Если рассматриваем в контексте несколько случайных величин, например $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot), \ldots$, то естественно обозначать их интегральные функции распределения соответственно через $F_\xi(x)$, $F_\eta(x), \ldots$ Ниже будет показано, что вероятностные свойства случайной величины $\xi(\cdot)$ полностью определяются ее интегральной функцией распределения $F(x)$. В частности, с помощью $F(x)$ довольно просто вычисляется вероятность того, что значения случайной величины $\xi(\cdot)$ принадлежат тому или иному подмножеству вида $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $\{a\}$, $\{b\}$. Нетрудно видеть, что поточечное задание случайной величины $\xi(\cdot)$ полностью определяет $F(x)$, $x \in R$, но обратное имеет место не всегда. Другими словами, восстановить случайную величину $\xi(\omega)\colon \Omega \to R$ по ее интегральной функции распределения в общем случае нельзя, так как различные случайные величины могут определять одну и ту же функцию $F(x)$. Таким образом, задание случайной величины с помощью интегральной функции распределения является более бедным в информативном смысле, чем ее поточечное задание.

Рассмотрим теперь третий способ задания случайных величин. Над количественными характеристиками $\xi(\omega)$, $\eta(\omega)$, $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega), \ldots$ произвольного эксперимента E можно проводить различные арифметические действия и операции предельного перехода [9], если только все эти действия и операции при любом $\omega \in \Omega$ определены в R. Например, арифметическая операция $\xi(\omega)/\eta(\omega)$ рассматривается, если $\eta(\omega) \neq 0$ ни при каком $\omega \in \Omega$. При $c \in R$ на практике часто применяются операции: $c \times \xi(\omega)$, $\xi(\omega) + c$, $\xi(\omega) \pm \eta(\omega)$, $\xi(\omega) \times \eta(\omega)$, $|\xi(\omega)|$, $\sup\{\xi_n(\omega);\, n = 1, 2, \ldots\}$, $\inf\{\xi_n(\omega);\ n = 1, 2, \ldots\}$, $\overline{\lim}\,\xi_n(\omega)$, $\underline{\lim}\,\xi_n(\omega)$. В результате этих операций мы получаем снова случайные величины. В качестве примера докажем это утверждение для операций вида $c\xi(\omega)$. Так как $c \in R$ и $\xi(\omega) \in R$ при любом $\omega \in \Omega$, то $c\xi(\omega)\colon \Omega \to R$. Множество $\{\omega\colon c\xi(\omega) < x\}$ равно $\varnothing \in \mathcal{F}$ при $c = 0$, $x \leqslant 0$, и равно $\Omega \in \mathcal{F}$ при $c = 0$, $x > 0$. Пусть теперь $c \neq 0$, тогда множество $\{\omega\colon c\xi(\omega) < x\}$ равно $\{\omega\colon \xi(\omega) < x/c\} \in \mathcal{F}$ при $c > 0$ и равно множеству $\{\omega\colon \xi(\omega) > x/c\} \in \mathcal{F}$ при $c < 0$. Значит, $c\xi(\omega)$ является случайной величиной. Итак, рассмотрены простейшие функции от случайных величин. Аналогично можно построить или задать новые случайные величины с помощью более сложных функций от заданных случайных величин.

Тестовые вопросы к лекции 10

1. Тип — одиночный выбор.

Пусть событие $A^* = \lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\mathrm{k=n}}^{\infty} A_k$, $A_* = \lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{\mathrm{k=n}}^{\infty} A_k$ и $A^* \neq A_*$. Определить правильное утверждение.

- Событие $A^* \subset A_*$.
- Предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ всегда существует.
- Событие $A^* \supset A_*$.
- Событие $A^* \backslash A_* = \varnothing$.

2. Тип — множественный выбор.

Пусть событие $A^* = \lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\mathrm{k=n}}^{\infty} A_k$, $A_* = \lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{\mathrm{k=n}}^{\infty} A_k$. Какие из приведенных высказываний будут верными?

- $A^* = A_*$, если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$
- $A^* \neq A_*$, если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$
- $A^* = A_*$, если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$
- $A^* \neq A_*$, если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть последовательность $\{A_i; i \geqslant 1\}$ событий из $\mathcal{F}$ имеет предел $A = \lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} A_n$. Определить соотношение, которое является верным.

- $A \notin \mathcal{F}$.
- $A \neq \lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$.
- $A \neq \lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n$.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть последовательность $\{A_i; i \geqslant 1\}$ событий из $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ Определить соотношения, которые являются верными.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \neq \mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big)$.
- $\mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$.

• $\mathbf{P}\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) \neq \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является одномерной случайной величиной на $(\Omega,\ \mathcal{F})$. Определить соотношение между событиями, которое является ошибочным.

• $\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant a\} = \Omega\backslash\{\omega\colon \xi(\omega) < a\}$.
• $\{\omega\colon \xi(\omega) > a\} \neq \Omega\backslash\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a + 1/i\}\right)$.
• $\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$.
• $\{\omega\colon \xi(\omega)=a\}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega)<a+1/i\}\backslash\{\omega\colon \xi(\omega) < a\}$.

6. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является одномерной случайной величиной на $(\Omega,\ \mathcal{F})$. Определить соотношения между событиями, которые являются верными.

• $\{\omega\colon \xi(\omega) > a\} \neq \Omega\backslash\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a + 1/i\}\right)$.
• $\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$.
• $\{\omega\colon \xi(\omega)=a\}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega)<a+1/i\}\backslash\{\omega\colon \xi(\omega) < a\}$.
• $\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant a\} = \Omega\backslash\{\omega\colon \xi(\omega) < a\}$.

7. Тип — одиночный выбор.

Пусть $c \in R$ и $\xi(\omega)$, $\eta(\omega)$ являются случайными величинами. Определить утверждение, которое будет ошибочным.

• Функция $c\xi(\omega)$ является случайной величиной.
• Функция $c(\xi(\omega) + \eta(\omega))$ является случайной величиной.
• Функция $c(\xi(\omega) - \eta(\omega))$ является случайной величиной.
• Функция $\xi(\omega)$ не является случайной величиной.

8. Тип — проверка ответов.

Пусть рассматривается последовательность $A_1, A_2, \ldots$ случайных событий на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$

Ответы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Лекция 11

ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ

11.1. Свойства интегральной функции распределения одномерной случайной величины

Изучим наиболее характерные и в то же время общие свойства интегральной функции распределения $F(x)$.

Теорема 11.1. *Интегральная функция*

$$F(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\})$$

определена при $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ *и принимает значение из отрезка* $[0, 1]$.

Доказательство. В самом деле, $\xi(\omega) \neq -\infty$ и $\xi(\omega) \neq +\infty$, так как $-\infty$ и $+\infty$ — это не числа, а специальные математические объекты. В таком случае множество $\{\omega\colon\ \xi(\omega) < +\infty\} = \Omega$, поскольку неравенство $\xi(\omega) < +\infty$ выполняется при любом $\omega \in \Omega$, а $\{\omega\colon\ \xi(\omega) < -\infty\} = \varnothing$, ибо неравенство $\xi(\omega) < -\infty$ не имеет решения. Отсюда принимаем, что $F(+\infty) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < +\infty\}) = 1$, $F(-\infty) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < -\infty\}) = 0$. Для остальных значений $x \in (-\infty, +\infty)$ функции $F(x)$ имеем: $F(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\})$. Вспоминая свойства вероятностной функции, теперь можно считать, что интегральная функция распределения $F(x)$: $\{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\} \to [0, 1]$.

Теорема 11.2. *Функция распределения* $F(x)$ *представляет собой неубывающую функцию аргумента.*

Доказательство. Рассмотрим действительные числа $a_1 < a_2$. Покажем, что $F(a_1) \leqslant F(a_2)$. Введем события $A_{a_1} = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_1\}$, $A_{a_2} = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_2\}$ и $A_{a_1,a_2} = \{\omega\colon\ a_1 \leqslant \xi(\omega) < a_2\}$, которые порождаются $\xi(\omega)$. Пусть $\omega \in A_{a_2}$, тогда $\xi(\omega) < a_2$. Следовательно, выполняется либо соотношение $\xi(\omega) \in (-\infty, a_1)$, либо $a_1 \leqslant \xi(\omega) < a_2$. Значит, $\omega \in A_{a_1}$ или $\omega \in A_{a_1,a_2}$, т. е. $\omega \in A_{a_1} \cup A_{a_1,a_2}$. Обратно, пусть $\omega \in A_{a_1} \cup A_{a_1,a_2}$, тогда $\xi(\omega) < a_1$ или $a_1 \leqslant \xi(\omega) < a_2$ и, значит, $\xi(\omega) < a_2$, т. е. $\omega \in A_{a_2}$. Итак, имеем: $A_{a_2} = A_{a_1} \cup A_{a_1,a_2}$. Далее, покажем, что $A_{a_1} \cap A_{a_1,a_2} = \varnothing$. Доказательство проведем от противного. Пусть существует $\omega^* \in \Omega$, такое что $\omega^* \in A_{a_1} \cap A_{a_1,a_2}$. Тогда выполняются неравенства $\xi(\omega^*) < a_1$ и $a_1 \leqslant \xi(\omega^*) < a_2$, а такого не может быть. Приходим к противоречию. На основании аксиомы счетной аддитивности для $\mathbf{P}(\cdot)$ можно записать равенство $\mathbf{P}(A_{a_2}) = \mathbf{P}(A_{a_1}) + \mathbf{P}(A_{a_1,a_2})$. Так как $\mathbf{P}(A_{a_1,a_2}) \geqslant 0$, то $\mathbf{P}(A_{a_2}) \geqslant \mathbf{P}(A_{a_1})$ или $F(a_2) \geqslant F(a_1)$. Свойство монотонности для интегральной функции $F(x)$ доказано. Из теоремы получаем, что $\mathbf{P}(A_{a_1,a_2}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon a_1 \leqslant \xi(\omega) < a_2\}) = F(a_2) - F(a_1)$. Итак, случайная величина примет значение из промежутка вида $[a_1, a_2)$ с вероятностью, которая равна разности значений ее интегральной функции в точках a_2 и a_1.

Лемма 11.1. *Множество значений x, в каждом из которых интегральная функция $F(x)$ терпит скачок, является или пустым, или счетным.*

Доказательство. Функция $F(x)$ имеет при $x = a$ скачок, если $F(a+0) - F(a-0) > 0$. Пусть

$$H_i = \{a\colon F(a+0) - F(a-0) = h_i, \quad 2^{-i} < h_i \leqslant 2^{-i+1}\}$$

при $i = 1, 2, \ldots$ Из теорем 11.1 и 11.2 следует, что множество H_1 может содержать не более одного элемента, множество H_2 — не более трех. В общем случае множество H_i может иметь не более $(2^i - 1)$ элементов. Каждое из множеств H_i может оказаться пустым, и в этом случае интегральная функция распределения $F(x)$ будет непрерывной. В противном случае все элементы множества $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i$ можно пронумеровать, откуда и следует его счетность. Итак, интегральная функция распределения $F(x)$ непрерывна всюду, за исключением, быть может, счетного множества значений аргумента.

Теорема 11.3. *Интегральная функция распределения $F(x)$ непрерывна слева при $x \in R$.*

Доказательство. Рассмотрим $F(a)$, где $a \in R$. Выберем некоторую числовую последовательность $\{a_n; n \geqslant 1\}$, такую что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots < a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (см. рис. 11.1).

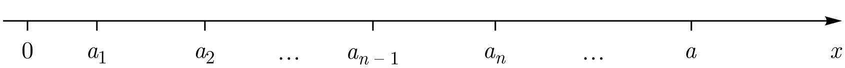


Рис. 11.1

Для доказательства равенства $F(a-0) = \lim\limits_{n\to\infty} F(a_n) = F(a)$ введем последовательность событий вида

$$A_1 = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_1\},$$
$$A_2 = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_2\}, \ldots, A_n = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}, \ldots$$

Заметим, что событие $A = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}$. Из определения $\{a_n; n \geqslant 1\}$ и $\{A_n; n \geqslant 1\}$ следует, что $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Используя определение $F(a)$ и непрерывность сверху вероятностной функции (вторую аксиому непрерывности), находим, что имеет место соотношение

$$F(a) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < a\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}\right) =$$
$$= \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty}\{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} F(a_n) = F(a-0).$$

Теорема доказана.

Теорема 11.4. *Вероятность* $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) \leqslant a\})$ *равна* $F(a+0)$, $a \in R$.

Доказательство. Рассмотрим $F(a)$, где $a \in R$, и последовательность $\{a_n; n = 1, 2, \ldots\}$, такую что $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > > a_{n+1} > \ldots > a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Эта ситуация представлена на рис. 11.2.

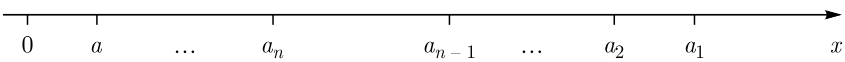


Рис. 11.2

Числовая последовательность $\{a_n; n = 1, 2, \ldots\}$ и случайная величина $\xi(\omega)$ порождают невозрастающую последовательность событий следующего вида: $A_1 = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_1\}$, $A_2 = = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_2\}, \ldots, A_n = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}$. Поэтому по свойству непрерывности вероятностной функции снизу и в силу равенства $\{\omega\colon\ \xi(\omega) \leqslant a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}$ получаем соотношение

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) \leqslant a\}) = \\ = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}\Big) = \mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty}\{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}\big) = \\ = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < a_n\}) = \lim_{n\to\infty}F(a_n) = F(a+0).$$

Теорема доказана. Заметим, что в теоремах 11.3 и 11.4 мы предполагали, что a — конечное число.

Рассмотрим теперь оставшиеся случаи, когда $a = -\infty$ или $a = +\infty$.

Теорема 11.5. *Для последовательностей* $\{a_n; n\geqslant 0\}$ *и* $\{a_{-n}; n \geqslant 1\}$, *таких что* $a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *и* $a_0 > a_{-1} > \ldots > a_{-n} > a_{-n-1} > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{-n} = -\infty$, *интегральная функция распределения* $F(x)$ *случайной величины удовлетворяет следующим предельным свойствам*: $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_n) = F(+\infty) = 1$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_{-n}) = F(-\infty) = 0$.

Доказательство. Используя результаты теоремы 11.1 и несовместимость событий вида $\{\omega\colon\ a_n \leqslant \xi(\omega) < a_{n+1}\}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, последовательно найдем, что

$$1 = F(+\infty) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < +\infty\}) = \\ = \mathbf{P}\Bigg(\bigcup_{n=-\infty}^{n=+\infty}\{\omega\colon\ a_n \leqslant \xi(\omega) < a_{n+1}\}\Bigg) = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a_n \leqslant \xi(\omega) < a_{n+1}\}).$$

Так как для любого $n = 0, \pm 1, \ldots$ вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a_n \leqslant \xi(\omega) < a_{n+1}\}) \geqslant 0$$

и ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a_n \leqslant \xi(\omega) < a_{n+1}\})$$

сходится, то его частичная сумма

$$S_n = \sum_{k=1-n}^{n}\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a_{k-1} \leqslant \xi(\omega) < a_k\}) = \\ = \sum_{k=1-n}^{n}(F(a_k) - F(a_{k-1})) = F(a_n) - F(a_{-n})$$

при $n \to +\infty$ стремится к единице. Неубывающая последовательность $\{F(a_n); n = 1, 2, \ldots\}$ ограничена сверху единицей, поэтому она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_n) = a_+ \leqslant 1$. Невозрастающая последовательность $\{F(a_{-n}); n = 1, 2, \ldots\}$ ограничена снизу нулем, поэтому она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_{-n}) = a_- \geqslant 0$. Тогда будет верно предельное равенство $a_+ - a_- = 1$, которое для $0 \leqslant a_-$, $a_+ \leqslant 1$ может выполняться только при $a_+ = 1$ и $a_- = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_n) = 1 = F(+\infty)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_{-n}) = 0 = F(-\infty)$.

Замечание 11.1. Утверждения теоремы 11.5 позволяют в дальнейшем для $F(x)$ записать соотношения $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Далее из

$$\{\omega\colon \xi(\omega) \leqslant x\} = \{\omega\colon \xi(\omega) = x\} \cup \{\omega\colon \xi(\omega) < x\},$$
$$\{\omega\colon \xi(\omega) = x\} \cap \{\omega\colon \xi(\omega) < x\} = \varnothing,$$

теоремы 11.4 и равенств (10.1) легко находим следующие формулы:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \leqslant x\}) - \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}) = F(x+0) - F(x),$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) \leqslant b\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) < b\}) + \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = b\}) = \\ = F(b) - F(a) + F(b+0) - F(b) = F(b+0) - F(a),$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant x\}) = 1 - \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}) = 1 - F(x),$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) > x\}) = 1 - \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \leqslant x\}) = 1 - F(x+0),$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon a < \xi(\omega) < b\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) < b\}) - \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) =\}) = \\ = F(b) - F(a) - F(a+0) + F(a) = F(b) - F(a+0).$$

Итак, вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого стандартного промежутка, определяется ее интегральной функцией распределения $F(x)$.

Обобщим результаты доказанных теорем, сформулировав окончательное утверждение. Если $F(x)$ является интегральной функцией некоторой случайной величины, то необходимо выполнение утверждений теорем 11.1–11.5, а утверждение леммы 11.1 представляет собой их следствие.

11.2. Обоснование введения выборочного вероятностного пространства

Современное математическое представление о реальном мире, в котором закономерности определяются случаем, формулируется следующим образом [1, 3, 4, 6, 8–11]. Каждому статистически устойчивому эксперименту E с комплексом Σ условий его проведения и множеством $\Im$ допустимых исходов ставится в соответствие вероятностная модель вида $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$.

В качестве вероятностных моделей количественных характеристик эксперимента E выступают так называемые случайные величины — измеримые отображения на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. При этом все вероятностные свойства количественной характеристики $\xi(\omega)$ определяются ее интегральной функцией распределения $F_\xi(x)$. Интегральная функция распределения $F_\xi(x)$ однозначно определяется, если известны основное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ для эксперимента E и поточечное задание отображения $\xi(\omega)\colon \Omega \to R$.

К сожалению, чаще всего построить $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ или найти поточечное задание отображения $\xi(\omega)\colon \Omega \to R$ не удается в силу сложности конкретного статистически устойчивого эксперимента E. Например, в простейшем случае может быть неизвестна область определения Ω для функции $\xi(\omega)$. Поэтому говорить в этой и других аналогичных ситуациях о случайной величине $\xi(\omega)$ и о ее вероятностных свойствах по меньшей мере математически некорректно. Однако в результате многократного и достаточно большого числа проведений эксперимента E удается вычислить статистические вероятности $\mathbf{P}^*(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$, $x \in R$.

Эти вероятности на основании предельных теорем теории вероятностей восстанавливают функцию распределения $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\})$ с заданной степенью точности. Поэтому на практике, не имея возможности построить математические объекты $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ и $\xi(\omega)\colon\ \Omega \to R$, исследователи свойств некоторой количественной характеристики эксперимента E все же используют экспериментальным образом полученную интегральную функцию $F_\xi(x)$.

Способ применения интегральной функции $F_\xi(x)$ при изучении свойств некоторого количественного признака сложного эксперимента E и обоснование такого подхода даются фактически следующей важной для практики теоремой.

11.3. Теорема о выборочном вероятностном пространстве

Пусть функция $G(x)$: $R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \to [0,1]$ *является неубывающей, непрерывной слева и* $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$. *Тогда существует некоторый искусственный эксперимент* $E_{\text{и}}$, *для которого можно построить вероятностную модель* ($\Omega_{\text{и}}$, $\mathcal{F}_{\text{и}}$, $\mathbf{P}(\cdot)_{\text{и}}$) *и случайную величину вида* $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}})$: $\Omega_{\text{и}} \to R$, *такую что ее интегральная функция равна* $G(x)$.

Доказательство. Рассмотрим искусственный (модельный) эксперимент $E_{\text{и}}$, который заключается в бросании точки на действительную прямую R с помощью некоторого случайного механизма. При этом случайный механизм выбора места положения точки на прямой R будет разъяснен в дальнейшем, и он будет существенно зависеть от функции $G(x)$. Исход этого модельного эксперимента может заключаться в том, что точка взята из некоторого стандартного промежутка на действительной прямой, например из интервала (a,b) или из отрезка $[a,b]$ и т. п. Обозначим через $\omega_{\text{и}}$ абсциссу случайным образом поставленной на R точки. В эксперименте $E_{\text{и}}$ достоверный исход можно представить в виде $\Omega_{\text{и}} = \{\omega_{\text{и}}\colon -\infty < \omega_{\text{и}} < +\infty\}$, а множество $\mathcal{F}_{\text{и}} = \mathcal{B}$ всех наблюдаемых исходов есть σ-алгебра борелевских подмножеств на R. Из курса математического анализа нам известно, что борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}$ называется такая σ-алгебра, для которой $\{[a,b)\colon -\infty < a < b < \infty\} \subset \mathcal{B}$ и для любой σ-алгебры $\mathcal{R}$ подмножеств на R выполняются соотношения $\{[a,b)\colon -\infty < a < b < \infty\} \subset \mathcal{R}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$. Можно сказать, что борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$ является наименьшей σ-алгеброй на действительной прямой, содержащей класс всех полуинтервалов вида $[a,b) \subset R$. Например, лебеговская σ-алгебра на R, которая содержит только имеющие длину подмножества R, является более широкой σ-алгеброй. Значит, построена теоретико-множественная модель ($\Omega_{\text{и}}$, $\mathcal{F}_{\text{и}}$) для $E_{\text{и}}$.

Трудным шагом будет определение вероятностной функции $\mathbf{P}_{\text{и}}(A)$ на $\mathcal{F}_{\text{и}}$. Используя свойства функции $G(x)$: $R \cup \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \to [0,1]$, по определению полагаем, что $\mathbf{P}_{\text{и}}([a,b)) = G(b) - G(a)$ при $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда по теореме Каратеодори [11] вероятность $\mathbf{P}_{\text{и}}(\cdot)$ на $\{[a,b)\colon -\infty < a < b < \infty\}$ можно единственным образом продолжить на борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}$. На этом шаге заканчивается построение математической вероятностной модели $(\Omega_{\text{и}}, \mathcal{F}_{\text{и}}, \mathbf{P}_{\text{и}}(\cdot))$ для модельного эксперимента $E_{\text{и}}$. Наконец, поясним механизм выбора точки на действительной прямой. Случайный механизм должен выбирать точку из каждого промежутка $[a, b)$ на действительной прямой с вероятностью $\mathbf{P}_{\text{и}}([a, b))$, равной величине $G(b) - G(a)$.

В качестве количественной характеристики $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}})\colon \Omega_{\text{и}} \to R$ модельного эксперимента $E_{\text{и}}$ выберем абсциссу места положения выбранной случайным образом точки на действительной прямой. Значит, для величины $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}})$ на $(\Omega_{\text{и}},\ \mathcal{F}_{\text{и}},\ \mathbf{P}_{\text{и}}(\cdot))$ имеем тождество $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}}) \equiv \omega_{\text{и}}$, а для ее интегральной функции распределения сразу находим

$$F_{\xi_{\text{и}}}(x) = \mathbf{P}_{\text{и}}(\{\omega_{\text{и}}\colon \xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}}) < x\}) = \mathbf{P}_{\text{и}}(\{\omega_{\text{и}}\colon \omega_{\text{и}} < x\}) = \\ = \mathbf{P}_{\text{и}}(\{\omega_{\text{и}}\colon -\infty < \omega_{\text{и}} < x\}) = G(x) - G(-\infty) = G(x),$$

и теорема о выборочном вероятностном пространстве доказана.

Замечание 11.2. Пусть для случайной величины $\xi(\omega)\colon \Omega \to \to R$ имеет место равенство $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) \in B\}) = \mathbf{P}_{\text{и}}(B)$ для любого борелевского множества B на действительной прямой. Тогда будет полностью определено вероятностное пространство $(\Omega_{\text{и}},\ \mathcal{F}_{\text{и}},\ \mathbf{P}_{\text{и}}(\cdot))$, где $\Omega_{\text{и}} = R$ и $\mathcal{F}_{\text{и}} = \mathcal{F}$. Отсюда для любого $x \in \in R$ имеем для интегральной функции распределения $F_\xi(x) = = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\}) = \mathbf{P}_{\text{и}}((-\infty, x)) = \mathbf{P}_{\text{и}}(\{\omega_{\text{и}}\colon\ \xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}}) < x\}) = = F_{\xi_{\text{и}}}(x)$, если только $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}}) \equiv \omega_{\text{и}}$. Теперь остается в качестве функции $G(x)$ взять $F_\xi(x)$ и воспользоваться теоремой о выборочном вероятностном пространстве. Еще раз напомним, что, согласно этой теореме, функция $F_\xi(x)$ однозначно определяет вероятность $\mathbf{P}_{\text{и}}(B)$ для любого борелевского множества B на действительной прямой. Итак, на практике при изучении конкретной количественной характеристики $\xi(\omega)$ сложного эксперимента E можно вместо неизвестной его вероятностной модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ рассматривать вероятностную модель $(\Omega_{\text{и}}, \mathcal{F}_{\text{и}}, \mathbf{P}_{\text{и}}(\cdot))$ более простого эксперимента $E_{\text{и}}$. Далее, возможно незаданную поточечно на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ случайную величину $\xi(\omega)\colon\ \Omega \to R$ необходимо заменить случайной величиной вида $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}})\colon\ \Omega_{\text{и}} = R \to R$. Так как интегральные функции распределения $F_\xi(x)$ и $F_{\xi_{\text{и}}}(x)$ совпадают, то вероятностные свойства случайной величины $\xi(\omega)$ будут определяться вероятностными свойствами $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}})$. Поэтому вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) \in B\}) = \mathbf{P}_{\text{и}}(\{\omega_{\text{и}}\colon\ \xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}}) \in B\})$ для любого $B \in \mathcal{B}$. В силу вышесказанного, а также тождества $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}}) \equiv \omega_{\text{и}}$ в дальнейшем $\mathbf{P}_{\text{и}}(\{\omega_{\text{и}}\colon\ \xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}}) \in B\})$ будем обозначать через функцию $\mathbf{P}_\xi(B)$. Можно сказать, что с точки зрения количественных характеристик $\xi(\omega)$, $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}})$ эксперимент $E_{\text{и}}$ является моделью эксперимента E. При этом основное вероятностное пространство $(\Omega_{\text{и}}, \mathcal{F}_{\text{и}}, \mathbf{P}_{\text{и}}(\cdot)) = (R, \mathcal{B}, \mathbf{P}_{\xi}(\cdot))$ для эксперимента $E_{\text{и}}$ называется выборочным для случайной величины $\xi(\omega)\colon \Omega \to R$. Таково практическое значение теоремы о выборочном вероятностном пространстве.

Подводя итог, можно сказать, что функция распределения любой случайной величины является неубывающей и непрерывной слева функцией, удовлетворяющей неравенствам вида $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ и предельным равенствам $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$. Однако верно и в некотором смысле обратное утверждение. Если есть функция $G(x)$, которая обладает этим свойством, то существует такой искусственный эксперимент $E_{\text{и}}$ с комплексом условий $\Sigma_{\text{и}}$ и исходами $\mathcal{F}_{\text{и}}$, для которого можно построить основное вероятностное пространство $(\Omega_{\text{и}}, \mathcal{F}_{\text{и}}, \mathbf{P}_{\text{и}}(\cdot))$. Более того, можно ввести искусственную случайную величину $\xi_{\text{и}}(\omega_{\text{и}})$, такую что ее функция распределения $F_{\xi_{\text{и}}}(x)$ будет тождественно совпадать с функцией $G(x)$. Можно сказать, что указанные свойства для $F(x)$ являются необходимыми и достаточными.

Тестовые вопросы к лекции 11

1. Тип — множественный выбор.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией распределения случайной величины ξ. Определить правильные соотношения.

- $F(+\infty) \neq 1$.
- $F(-\infty) = 0$.
- $F(+\infty) = 1$.
- $F(-\infty) \neq 0$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией распределения случайной величины ξ. Определить правильное утверждение.

- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a \leqslant \xi(\omega) < b\}) = F(a) - F(b).$$
- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то вероятность вида
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a \leqslant \xi(\omega) < b\}) < F(a) - F(b).$$
- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то вероятность вида
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a \leqslant \xi(\omega) < b\}) = F(b) - F(a).$$
- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то вероятность вида
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a \leqslant \xi(\omega) < b\}) > F(b) - F(a).$$

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть числовая последовательность $\{a_n; n \geqslant 1\}$ удовлетворяет условиям: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots < a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Определить верное соотношение.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < a\}) > \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a_n\}\Big)$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < a\}) < \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a_n\}\Big)$.
- $\mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a_n\}\big) = F(a)$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < a\}) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a_n\}\Big)$.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть числовая последовательность $\{a_n; n \geqslant 1\}$ удовлетворяет условиям: $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots > a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Определить верные высказывания.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \leqslant a\}) > \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a_n\}\Big)$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \leqslant a\}) < \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a_n\}\Big)$.
- $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a_n\}\Big) = \mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty}\{\omega\colon \xi(\omega) < a_n\}\big)$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \leqslant a\}) = \lim\limits_{n\to\infty} F(a_n)$.

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией распределения случайной величины ξ. Определить ошибочное утверждение.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x\}) = F(x+0) - F(x)$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a < \xi(\omega) < b\}) > F(b) - F(a+0)$, $-\infty < a < b < +\infty$.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств на действительной прямой R. Определить верное соотношение.

- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то промежуток $[a, b) \notin \mathcal{B}$.
- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то промежуток $(a, b] \notin \mathcal{B}$.
- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то интервал $(a, b) \notin \mathcal{B}$.
- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то отрезок $[a, b] \in \mathcal{B}$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств на действительной прямой R. Определить ошибочные соотношения.

- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то промежуток $[a, b) \cup (a, b] \in \mathcal{B}$.
- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то промежуток $[a, b) \setminus (a, b] \notin \mathcal{B}$.
- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то интервал $(a, b) \cap [a, b] \notin \mathcal{B}$.
- Если $-\infty < a < b < +\infty$, то промежуток $[a, b] \setminus (a, b) \in \mathcal{B}$.

8. Тип — проверка ответов.

Пусть $\xi(\omega)$ является одномерной случайной величиной на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$, $F(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$ и $A_n = \{\omega\colon \xi(\omega) < a_n\}$, где $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots > a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < +\infty$. Вычислить пределы: 1) $\mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n\big)$; 2) $\mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n\big)$; 3) $\mathbf{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big)$.

Ответы:

1) $\mathbf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n) = F(a+0)$;

2) $\mathbf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n) = F(a+0)$;

3) $\mathbf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = F(a+0)$.

Лекция 12

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

12.1. Признаки классификации случайных величин

Разнородность реальных экспериментов и большое число приборов, которые измеряют количественные характеристики каждого из них, порождают великое многообразие случайных величин [1, 3, 4, 6, 8–11]. Например, множество принимаемых случайными величинами значений может быть конечным, счетным или даже несчетным. Значения некоторой случайной величины могут быть расположены дискретно, и любые два из них могут быть разделены интервалом. Множество значений другой случайной величины может быть счетным и всюду плотным на действительной прямой. Поэтому возникает проблема классификации случайных величин, столь различных по своей физической природе и математической структуре. Классификация математических объектов, как и любых других, существенно зависит от удачно выбранного для этой цели признака. В замечании 11.2 для случайной величины $\xi(\omega)$ было введено выборочное пространство вида $(R,\ \mathcal{B},\ \mathbf{P}_\xi(\cdot))$. В этом пространстве только вероятность $\mathbf{P}_\xi(\cdot)$ или распределение случайной величины $\xi(\omega)$ зависит от интегральной функции $F_\xi(x)$. Поэтому в качестве одного из основных признаков классификации выберем такие локальные свойства интегральной функции распределения, как ее разрывность, непрерывность и абсолютная непрерывность. Если через $X \subset R$, как и ранее, обозначить множество значений произвольной случайной величины, то вторым дополнительным признаком классификации будут мощностные и структурные свойства числового множества X. Очевидно, что множество X может быть только счетным (бесконечным, возможно и конечным) или только несчетным.

12.2. Функциональные характеристики измерителей элементарных исходов с дискретным распределением

Рассмотрим случай, когда для классификации случайной величины ξ используются особые свойства структуры множества $X = \{\xi(\omega)\colon \omega \in \Omega\}$.

Определение 12.1. Случайная величина $\xi(\omega)$ называется дискретной, если из X можно выделить такое счетное подмножество $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$ так называемых возможных ее значений, что $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_1\}) = p_1 > 0$, $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_2\}) = p_2 > 0, \ldots$ и $p_1 + p_2 + \ldots = 1$.

В простейшем варианте подмножество X_1 может содержать лишь конечное число m элементов, т. е. $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Если случайная величина ξ принимает только счетное множество возможных значений, то достаточно использовать второй признак классификации, так как в этом варианте требования определения 12.1 выполняются. Принятое определение 12.1 не исключает необычной ситуации из [9], когда дискретная случайная величина ξ может принимать несчетное число различных значений из некоторого множества X_2. В этом случае множество $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \in X_2\}) = 0$. Однако на практике, как правило, множество $X_2 = \varnothing$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай, когда $X = X_1$ и $X_2 = \varnothing$. Совокупность $\{p_i : i = 1, 2, \ldots\}$ называется распределением дискретной случайной величины ξ. Интегральная функция $F(x)$ дискретной случайной величины ξ вычисляется с помощью формулы

$$F(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\}) = \mathbf{P}\Bigg(\bigcup_{i\colon x_i < x} \{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_i\}\Bigg) = \\ = \sum_{i: x_i < x} \mathbf{P}(\xi = x_i) = \sum_{i\colon x_i < x} p_i.$$

Рассмотрим теперь важный для практики случай, когда значения дискретной случайной величины из множества X можно занумеровать и расположить на действительной прямой R в виде строго возрастающей последовательности $x_1 < x_2 < \ldots$ При этом значения дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ из множества X отделены интервалами. Например, если X содержит конечное число элементов, то это всегда можно сделать. График такой интегральной функции распределения $F(x)$ имеет ступенчатый или кусочно-постоянный вид (рис. 12.1).

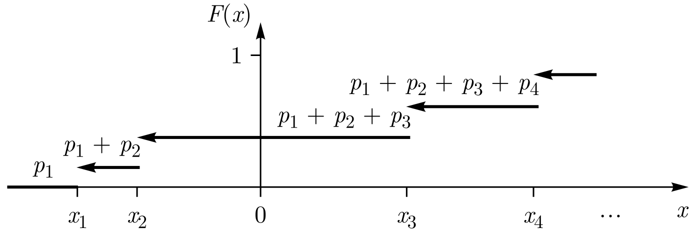


Рис. 12.1

Отсюда легко видеть, что производная интегральной функции распределения дискретной случайной величины всюду равна нулю, за исключением точек из X, в которых $F(x)$ терпит разрывы и $F(x_i + 0) - F(x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Для случайной величины $\xi(\omega)$, которая рассмотрена в этом абзаце, очень часто используют другие законы распределения. Эти законы полностью эквивалентны интегральной функции $F(x)$ и распределению $\{p_i\colon\ i = 1, 2, \ldots\}$. В качестве такого закона распределения удобно применять так называемый ряд распределения. В табл. 12.1 представлен ряд распределения дискретной случайной величины ξ при $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ вида

Таблица 12.1

$\xi(\omega)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
$\mathbf{P}(\cdot)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

и соответственно при $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ табл. 12.2 вида

Таблица 12.2

$\xi(\omega)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
$\mathbf{P}(\cdot)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_m

Иногда ряд распределения изображают графически. Для этого вероятностные характеристики случайной величины дискретного типа и ее численные значения удобно представить наглядно в прямоугольной системе координат на плоскости. На плоскости для $i = 1, 2, \ldots$ отметим точку с абсциссой x_i и ординатой p_i. Затем каждые две соседние точки соединим отрезком. Полученный график в виде ломаной кривой определяет так называемый многоугольник (или полигон) распределения вероятностей.

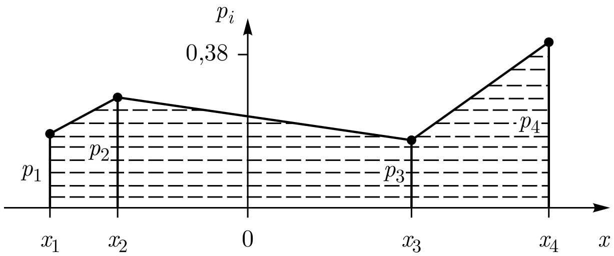


Рис. 12.2

На рис. 12.2 представлен пример, когда ξ принимает значения x_1, x_2, x_3 и x_4 с вероятностями p_1, p_2, p_3 и p_4.

При этом многоугольник распределения вероятностей для этого частного случая помечен штриховкой и является еще одной формой представления закона распределения. Этот график дает исследователю наглядное представление о вероятностных свойствах дискретной случайной величины. Например, вероятность того, что дискретная случайная величина примет значения строго меньше нуля, равна сумме $p_1 + p_2$ длин вертикальных отрезков, расположенных левее прямой $x = 0$.

Замечание 12.1. В общем случае интервалов постоянства у функции $F(x)$ дискретной случайной величины может и не быть. Действительно, пусть значениями случайной величины ξ будут все рациональные числа. Мощность множества рациональных чисел счетно. Тогда множество всех рациональных чисел можно записать в виде $\{r_i\colon\ i = 1, 2, \ldots\}$. Пусть эта дискретная случайная величина принимает некоторое значение r_i с вероятностью $p_i = 1/2^i$. Легко видеть, что $p_i = 1/2^i > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 1/2^i = 1$, т. е. выполняется условие нормировки. Множество рациональных чисел является всюду плотным на прямой. Поэтому интервалов постоянства у интегральной функции распределения для такой дискретной случайной величины быть не может. Также не существует минимального рационального числа $r \in \{r_i\colon\ i = 1, 2, \ldots\}$. Итак, для такой случайной величины нельзя записать ряд распределения, построить многоугольник распределения и, наконец, графически отобразить функцию распределения.

12.3. Количественные характеристики элементарных исходов с несчетным множеством значений и абсолютно непрерывным распределением

Для выделения этого класса будем использовать первый признак классификации. Каждая случайная величина из этого класса имеет абсолютно непрерывную интегральную функцию $F(x)$: $R \to [0,1]$ и, следовательно, принимает несчетное множество значений. Напомним, что функция $F(x)$ называется абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset R$, $k = \overline{1, n}$, с суммой длин строго меньше δ, будет иметь место неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$.

Определение 12.2. Случайная величина $\xi(\omega)$: $\Omega \to X$ называется непрерывной, если существует такая неотрицательная функция $f(x)$ с областью определения R, что для любого действительного числа x имеет место равенство $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du$.

Очевидно, что график интегральной функции распределения $F(x)$ не имеет скачков и, тем самым, имеет качественный вид (рис. 12.3).

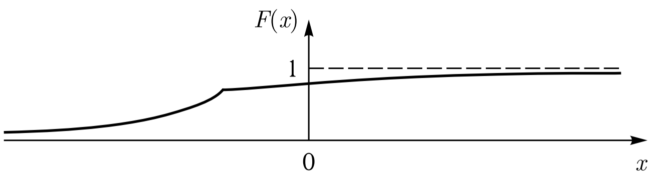


Рис. 12.3

Функция $f(x)$ называется плотностью распределения или дифференциальной функцией распределения случайной величины $\xi(\omega)$. Если одновременно в контексте рассматривают несколько случайных величин, то плотность распределения обозначают $f_\xi(x)$ вместо $f(x)$. Из курса математического анализа известно, что интеграл с переменным верхним пределом является абсолютно непрерывной функцией и, более того, эта функция имеет производную $dF(x)/dx = f(x)$ почти всюду по мере Лебега. Поэтому плотность распределения вероятностей для случайной величины $\xi(\omega)$ часто называют дифференциальной функцией распределения. Так как $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du$, то подынтегральную функцию $f(x)$ можно изменить, не нарушив при этом величины интегральной функции распределения. Значит, функция $f(x)$ определяется неоднозначно. Как правило, на практике $f(x)$ имеет не более счетного числа точек разрыва на R, причем на конечном промежутке таких точек разрыва может быть лишь конечное число. На рис. 12.4 приведен пример графика функции $f(x)$, который называется кривой распределения вероятностей случайной величины $\xi(\omega)$.

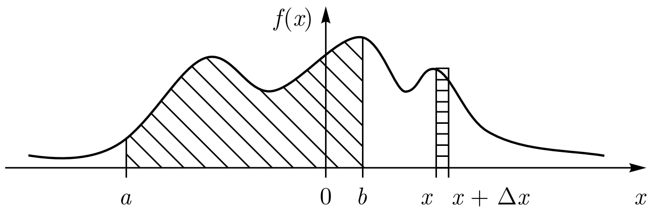


Рис. 12.4

Так как $F(x)$ является непрерывной функцией, то случайная величина $\xi(\omega)$ принимает несчетное множество значений и следующая вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = x\}) = F(x+0) - F(x) = 0$. Отсюда имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a \leqslant \xi(\omega) < b\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ a \leqslant \xi(\omega) \leqslant b\}) =$$
$$= \mathbf{P}(\{\omega\colon\ a < \xi(\omega) < b\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ a < \xi(\omega) \leqslant b\}) = \int\limits_{a}^{b} f(u)\,du.$$

Значит, вероятность попадания случайной величины в каждый из указанных промежутков $\xi(\omega)$ равна площади криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 12.4 наклонными линиями. Поскольку предел $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$, то получаем известное условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = 1$ для плотности распределения $f(x)$. Площадь между кривой распределения и осью абсцисс равна единице. Если дифференциальная функция распределения $f(x)$ является непрерывной, то вероятность вида $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ x \leqslant \xi(\omega) < x + \Delta x\}) = f(x)\Delta x + o(\Delta x) \approx f(x)\Delta x$. Итак, вероятность попадания случайной величины в промежуток $[x, x + \Delta x)$ при малом Δx приближенно равна площади заштрихованного на рис. 12.4 горизонтальными линиями прямоугольника со сторонами Δx и $f(x)$.

12.4. Сингулярные случайные величины

Кроме класса дискретных случайных величин, которые принимают конечное или счетное множество значений с вероятностью единица, и класса непрерывных случайных величин, интегральная функция распределения которых является абсолютно непрерывной, существует класс так называемых сингулярных случайных величин. Сингулярные случайные величины в реальных экспериментах практически не встречаются. Однако класс сингулярных случайных величин имеет большое теоретическое значение, так как позволяет понять все многообразие случайных величин и провести их полную классификацию. Для выделения этого класса предварительно рассмотрим понятие точки роста для интегральной функции распределения. Точка $\{a_0\} \in R$ называется точкой роста функции $F(x)$, если выполняется неравенство вида $F(a_0 + \varepsilon) - F(a_0 - \varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Например, изображенная на рис. 12.1 интегральная функция распределения имеет точки роста $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots$, а множество точек роста для приведенной на рис. 12.3 интегральной функции распределения совпадает с R.

Определение 12.3. Случайная величина $\xi(\omega)\colon \Omega \to X$ называется сингулярной, если ее интегральная функция распределения $F(x)$ непрерывна и точки роста функции $F(x)$ образуют промежуток на R, длина которого равна нулю.

Из этого определения следует, что сингулярная случайная величина принимает несчетное множество значений и ее интегральная функция распределения $F(x)$ почти всюду по мере Лебега постоянна или имеет место равенство $dF(x)/dx = 0$. Поэтому сингулярная случайная величина, в отличие от непрерывной случайной величины, не имеет плотности распределения. Заметим, что интегральная функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины также почти всюду по мере Лебега постоянна (или $dF(x)/dx = 0$), но при этом $F(x)$ не является непрерывной. Таковы в общих чертах различия трех выделенных типов случайных величин.

Тестовые вопросы к лекции 12

1. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является дискретной случайной величиной, которая принимает возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ Определить верное утверждение.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_1\}) = 0$.
- $F(x) = \sum\limits_{i:x_i<x} \mathbf{P}(\xi = x_i)$.
- $\sum\limits_{i} \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}) < 1$.
- $\sum\limits_{i} \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}) > 1$.

2. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является непрерывной случайной величиной, плотность вероятностей которой равна $f(x)$. Определить верные утверждения.

- Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывную интегральную функцию распределения $F(x)$.
- $F(x) \neq \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du$.
- Интегральная функция $F(x)$ имеет почти всюду по мере Лебега первую производную $dF(x)/dx = f(x)$.
- $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du$.

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является непрерывной случайной величиной. Определить ошибочное утверждение.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) < b\}) < \int\limits_{a}^{b} f(u)\,du$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a < \xi(\omega) < b\}) = \int\limits_{a}^{b} f(u)\,du$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi(\omega) \leqslant b\}) = \int\limits_{a}^{b} f(u)\,du$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a < \xi(\omega) \leqslant b\}) = \int\limits_{a}^{b} f(u)\,du$.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является случайной величиной. Определить ошибочные утверждения.

- Точка $\{a_0\} \in R$ всегда будет точкой роста интегральной функции $F(x)$, если существует число $\varepsilon > 0$, для которого выполняется неравенство $F(a_0 + \varepsilon) - F(a_0 - \varepsilon) > 0$.

• Точка $\{a_0\} \in R$ всегда будет точкой роста интегральной функции $F(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство вида $F(a_0 + \varepsilon) - F(a_0 - \varepsilon) > 0$.

• Точка $\{a_0\} \in R$ всегда будет точкой роста интегральной функции $F(x)$, если существует число $\varepsilon > 0$, для которого выполняется равенство $F(a_0 + \varepsilon) - F(a_0 - \varepsilon) = 0$.

• Точка $\{a_0\} \in R$ всегда будет точкой роста интегральной функции $F(x)$, если существует число $\varepsilon > 0$, для которого выполняется равенство $F(a_0 + \varepsilon) - F(a_0 - \varepsilon) = \varepsilon$.

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является дискретной случайной величиной, которая принимает возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ Определить верное утверждение.

• $F(x_i + 0) - F(x_i) > \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\})$.

• $F(x_i + 0) - F(x_i) < \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\})$.

• $F(x_i + 0) - F(x_i) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\})$.

• $F(x_i) - F(x_i - 0) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\})$.

6. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является сингулярной случайной величиной. Определить верные утверждения.

• Интегральная функция распределения $F(x)$ сингулярной случайной величины почти всюду постоянна по мере Лебега.

• Интегральная функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условию $dF(x)/dx > 0$.

• Интегральная функция распределения $F(x)$ почти всюду удовлетворяет условию $dF(x)/dx = 0$ по мере Лебега.

• Интегральная функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условию $dF(x)/dx < 0$.

7. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является сингулярной случайной величиной. Определить ошибочное утверждение.

• Интегральная функция распределения $F(x)$ непрерывна.

• Интегральная функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условию $dF(x)/dx > 0$.

• Сингулярная случайная величина принимает несчетное множество значений.

• Сингулярная случайная величина не имеет плотности распределения.

8. Тип — проверка ответов.

Пусть $\xi(\omega)$ является дискретной случайной величиной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = i\}) = p(1-p)^{i-1}$, где $0 < p < 1$, $i = 1, 2, \ldots$ Вычислить следующие вероятности: 1) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant 2\})$; 2) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant 5\})$; 3) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant 10\})$.

Ответы:

1) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant 2\}) = 1 - p$;

2) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant 5\}) = (1-p)^4$;

3) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant 10\}) = (1-p)^9$.

Лекция 13

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СМЕШАННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

13.1. Интегральная функция распределения сингулярной случайной величины

Основные особенности [1, 8, 9, 11] интегральной функции распределения сингулярной случайной величины рассмотрим на следующем конкретном примере.

Пример 13.1. Рассмотрим модельный эксперимент E, который заключается в случайном бросании точки на отрезок $[0,1]$ с помощью следующего механизма. На первом шаге делим отрезок $[0,1]$ на три равные части. При этом внутренняя часть обязательно является интервалом. Точка может находиться в одном из полученных отрезков $[0,1/3]$, $[2/3,1]$ с вероятностью 2^{-1} или в интервале $(1/3,2/3)$ с нулевой вероятностью. На втором шаге этот процесс деления применяем к вновь полученным отрезкам. Тогда точка может оказаться в одном из отрезков $[0,1/9]$, $[2/9,3/9]$, $[6/9,7/9]$, $[8/9,1]$ с вероятностью 2^{-2} или в одном из интервалов $(1/9,2/9)$, $(7/9,8/9)$ с нулевой вероятностью. На k-м шаге точка может оказаться в одном из 2^k отрезков с вероятностью 2^{-k} или в одном из 2^{k-1} интервалов с нулевой вероятностью. Это правило выбора новых отрезков и интервалов, как и механизм уточнения случайного положения точки в этих промежутках, применяется счетное число раз. В результате точка попадает в один из интервалов $(1/3,2/3)$, $(1/9,2/9)$, $(7/9,8/9)$, $(1/27,2/27)$, $(7/27,8/27)$, $(19/27,20/27)$, $(25/27,26/27), \ldots$ с нулевой вероятностью. Исход этого эксперимента может заключаться в том, что точка появится в некотором стандартном промежутке отрезка $[0,1]$, например в интервале $(1/3,8/9)$ или в отрезке $[2/27,25/27]$ и т. п.

Обозначим символом ω абсциссу случайным образом поставленной на отрезке $[0,1]$ точки $\{\omega\}$. В этом опыте E достоверный исход $\Omega=\{\omega\colon\, 0\leqslant\omega\leqslant 1\}$, а множество всех наблюдаемых исходов $\mathcal{F}$ представляет собой σ-алгебру борелевских подмножеств на отрезке $[0,1]$. Этим завершается построение теоретико-множественной модели $(\Omega,\ \mathcal{F})$ эксперимента E. При этом случайный механизм выбора точки в одном из указанных отрезков или интервалов отрезка $[0,1]$ был описан в предыдущем абзаце.

В качестве числовой характеристики $\xi(\omega)$ эксперимента E выберем абсциссу местоположения точки на отрезке $[0,1]$, выбранной с помощью описанного выше механизма. Следовательно, для функции $\xi(\omega)$ на измеримом пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F})$ имеем тождество $\xi(\omega)\equiv\omega$. Отсюда легко находим, что множество $\{\omega: \xi(\omega)<x\}$ равно $\varnothing\in\mathcal{F}$ при $x\leqslant 0$, равно промежутку $[0,x)\in\mathcal{F}$ при $0<x\leqslant 1$ и, наконец, равно отрезку $[0,1]=\Omega\in\mathcal{F}$ при $x>1$. Итак, отображение $\xi(\omega)$: $\Omega\to[0,1]$ является случайной величиной на $(\Omega,\ \mathcal{F})$. Перейдем теперь к определению и непосредственному построению интегральной функции распределения $F(x)$ для такого рода случайной величины ξ (см. рис. 13.1).

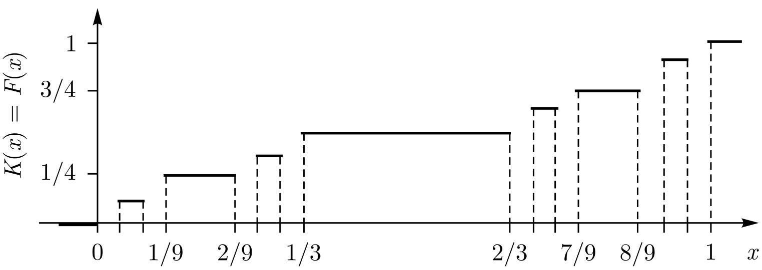


Рис. 13.1

Так как $\{\omega$: $\xi(\omega)<x\}=\varnothing$ при $x\leqslant 0$ и $\{\omega$: $\xi(\omega)<x\}=\Omega$ при $x>1$, то $F(x)=0$ при $x\leqslant 0$ и $F(x)=1$ при $x>1$. В этом эксперименте точка выбирается в интервале $(1/3,2/3)$ с нулевой вероятностью или на отрезке $[2/3,1]$ с вероятностью $1/2$. Поэтому функция $F(x)=1-1/2=1/2$ при $1/3<x<2/3$. Так как точка выбирается в интервале $(1/9,2/9)$ с нулевой вероятностью или на отрезке $[2/9,1]$ с вероятностью $1/4+1/2$, то $F(x)=$ $=1-1/4-1/2=1/4$ при $1/9<x<2/9$. Далее, поскольку точка выбирается в интервале $(7/9,8/9)$ с нулевой вероятностью или на отрезке $[8/9,1]$ с вероятностью $1/4$, то $F(x)=1-1/4=3/4$ при $7/9<x<8/9$. Продолжая аналогичным образом этот процесс, определим интегральную функцию распределения $F(x)$ на последовательности интервалов: $(1/3,2/3)$, $(1/9,2/9)$, $(7/9,8/9)$, $(1/27,2/27)$, $(7/27,8/27)$, $(19/27,20/27)$, $(25/27,26/27),\ldots$ Сумма длин всех этих интервалов постоянства функции $F(x)$, очевидно, равна $1/3 + 2 \times (1/9) + 4 \times (1/27) + \ldots = 1$. Значит, интегральная функция распределения $F(x)$ определена на R почти всюду по мере Лебега. В остальных точках отрезка $[0, 1]$ функцию $F(x)$ определим по непрерывности [7, 11]. Построенная таким способом функция распределения $F(x)$ является непрерывной и называется кривой Кантора $K(x)$ или канторовой лестницей [7]. Используя методику построения выборочного вероятностного пространства $(R,\ \mathcal{B},\ \mathbf{P}_{\xi}(\cdot))$ с помощью интегральной функции $F(x) = K(x)$ и выводы замечания 11.2, нетрудно закончить построение вероятностной модели $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ для рассматриваемого в примере 13.1 эксперимента.

Применяя метод исследования из примера 13.1, легко построить кривую Кантора $K(x)$, все изменения которой происходят на любом конечном отрезке $[a, b]$. Функция $K(x)$ удовлетворяет условию $0 \leqslant K(x) \leqslant 1$, является неубывающей, непрерывна на R и, наконец, удовлетворяет предельным соотношениям $\lim\limits_{x \to +\infty} K(x) = K(+\infty) = 1$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} K(x) = F(-\infty) = 0$. Функция $K(x)$ на множестве лебеговской меры нуль возрастает без скачков от нуля до числа, равного единице. При этом множество точек роста функции $K(x)$ несчетно. Этот факт можно установить следующими рассуждениями. Во-первых, величина изменения непрерывной функции в каждой отдельной точке равна нулю. Во-вторых, если бы это множество точек роста было счетным, то непрерывная функция $K(x)$ не могла бы измениться, т. е. была бы постоянной. Наконец, отметим, что случайная величина с интегральной функцией $K(x)$ не является дискретной, так как функция $K(x)$ является непрерывной. Одновременно такая случайная величина не является непрерывной, так как кривая Кантора $K(x)$ почти всюду по мере Лебега имеет нулевую производную. Поэтому функция $K(x)$ не может быть представлена интегралом от своей производной. С другой стороны, случайная величина с интегральной функцией $K(x)$ напоминает непрерывную величину тем, что она принимает несчетное число значений, но для нее не существует плотности распределения. Далее, такого рода случайная величина напоминает дискретную случайную величину тем, что у этой функции распределения есть точки, которые образуют интервалы постоянства и, значит, не являются точками роста. Подводя итог, можно сказать, что случайная величина $\xi(\omega)$ называется сингулярной, если ее интегральная функция распределения является функцией Кантора.

13.2. Смешанные случайные величины

В предыдущем разделе было выделено три типа случайных величин: дискретные, непрерывные и сингулярные случайные величины. Известная теорема Лебега о разложении показывает, что совокупность всех случайных величин покрывается указанными тремя типами.

Теорема Лебега. *Любая интегральная функция распределения $F(x)$ может быть представлена в виде суммы $q_1F_{\text{д}}(x) + q_2F_{\text{ан}}(x) + q_3F_{\text{c}}(x)$, где число $q_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$ и $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, а функции $F_{\text{д}}(x)$, $F_{\text{ан}}(x)$ и $F_{\text{c}}(x)$ являются интегральными функциями распределения соответственно дискретной, непрерывной и сингулярной случайной величины.*

Из этой теоремы [1] следует, что если случайная величина $\xi(\omega)$ является дискретной, то имеем: $q_1 = 1$, $q_2 = q_3 = 0$. Аналогичным образом для непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$ находим: $q_2 = 1$, $q_1 = q_3 = 0$, для сингулярной случайной величины $\xi(\omega)$ получим: $q_3 = 1$, $q_1 = q_2 = 0$. Если по крайней мере два из чисел q_1, q_2 и q_3 в разложении Лебега интегральной функции отличны от нуля, то соответствующая ей величина $\xi(\omega)$ называется смешанной или произвольной. Интегральная функция распределения смешанных случайных величин качественно может быть представлена в виде, приведенном на рис. 13.2, где точки $\{a_0\}$ и $\{a_1\}$ являются точками разрыва.

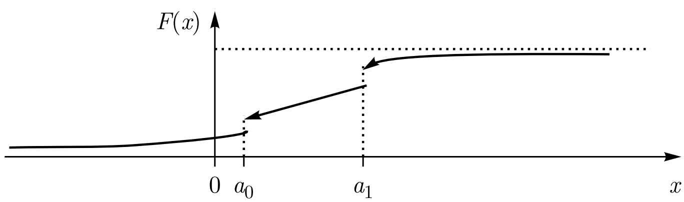


Рис. 13.2

Теорема Лебега позволяет утверждать, что существует замкнутая классификация множества всех одномерных случайных величин. Другими словами, среди множества всех одномерных случайных величин можно выделить только дискретные, непрерывные, сингулярные и смешанные случайные величины. Итак, кроме дискретных, непрерывных и сингулярных случайных величин, на практике встречаются случайные величины произвольного вида. Как правило, значения смешанной случайной величины сосредоточены как в конечном или счетном множестве изолированных точек (признак дискретной случайной величины), так и непрерывно на участках между этими точками (признак непрерывной случайной величины). Поэтому интегральная функция смешанных случайных величин имеет обыкновенные разрывы (скачки) в тех точках, вероятности попадания в которые отличны от нуля, а на участках между указанными точками изменяется непрерывно.

13.3. Примеры смешанных случайных величин

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 13.2. Функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ равна нулю при $x \leqslant 0$, равна $0{,}1 + x$ при $0 < x \leqslant 0{,}5$ и, наконец, равна единице при $x > 0{,}5$. Проверить необходимые и достаточные свойства $F(x)$, которые справедливы для интегральной функции распределения.

Решение. Для наглядности рассуждений изобразим график этой функции на рис. 13.3.

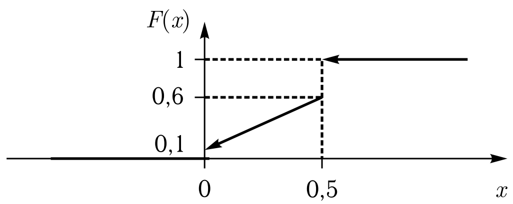


Рис. 13.3

Из формулы для $F(x)$ или из ее графика следует, что $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$. Далее, легко проверить, что функция $F(x)$ является неубывающей и непрерывной слева в точках с координатами $x = 0$ и $x = 0{,}5$. Действительно, для $\delta > 0$ имеем равенства

$$\lim_{\delta \to 0}(F(0) - F(0 - \delta)) = 0, \quad \lim_{\delta \to 0}(F(0{,}5) - F(0{,}5 - \delta)) = 0.$$

Очевидно, что функция $F(x)$ имеет конечное число скачков в точках с координатами $x = 0$ и $x = 0{,}5$. Это видно из соотношений:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = 0\}) = \lim_{\delta \to 0}(F(0 + \delta) - F(0 - \delta)) = 0{,}1 - 0 = 0{,}1$$

и

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = 0{,}5\}) = \lim_{\delta \to 0}(F(0{,}5 + \delta) - F(0{,}5 - \delta)) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Рассмотрим еще пример смешанной случайной величины $\xi(\omega)$, когда ее интегральная функция распределения на некоторых промежутках прямой является непрерывной, а в некоторой точке имеет скачок (разрыв первого рода).

Пример 13.3. Компьютер выходит из строя в результате транспортировки с вероятностью $p_0 > 0$. Если компьютер не вышел из строя при транспортировке, то вероятность того, что он проработает в течение времени $t > 0$, равна $\exp\{-\lambda t\}$ при $\lambda = \mathrm{const} > 0$. Определить тип случайной величины ξ, которая считает время безотказной работы компьютера.

Решение. Многие детали и условия эксплуатации компьютера нам неизвестны. Поэтому мы находимся в таких обстоятельствах, когда нет никакой возможности построить для этого эксперимента вероятностную модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и поточечно задать его количественный признак (время безотказной работы) $\xi(\omega)$: $\Omega \to R$. Мы можем только постулировать факт существования основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и отображения $\xi(\omega)$: $\Omega \to R$. Следуя теперь содержанию замечания 11.2 из лекции 11, воспользуемся для изучения вероятностных свойств времени безотказной работы компьютера выборочным пространством вида $(R, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\xi(\cdot))$, в котором функция $\mathbf{P}_\xi(\cdot)$ пока не определена.

Из физических соображений имеем: $\xi(\omega) \geqslant 0$. Отсюда вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < t\}) = \mathbf{P}_\xi((-\infty, t)) = 0$ для $t \leqslant 0$. По условию задачи вероятность того, что компьютер откажет мгновенно в момент включения, равна $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = 0\}) = \mathbf{P}_\xi(\{0\}) = p_0$. Здесь для опыта E событие $\{\omega\colon \xi(\omega) = 0\}$ выхода из строя компьютера при транспортировке взаимно-однозначно соответствует событию $\{0\}$ выбора точки в начале действительной прямой модельного эксперимента $E_{\text{и}}$. Подобным же образом из условия задачи находим, что условная вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant t\} | \{\omega\colon \xi(\omega) > 0\}) = \mathbf{P}_\xi([t, +\infty) | (0, +\infty)) = \exp\{-\lambda t\}$$

при $t > 0$. Здесь опять случайное событие $\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant t\}$ безотказной работы компьютера в течение времени $t > 0$ взаимно-однозначно соответствует событию выбора точки на промежутке $[t, +\infty)$ действительной прямой. По теореме умножения для событий из пространства $(R, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\xi(\cdot))$ имеем соотношение вида $\mathbf{P}_\xi((0, +\infty) \cap [t, +\infty)) = \mathbf{P}_\xi((0, +\infty))\mathbf{P}_\xi([t, +\infty) | (0, +\infty)) =$ $= \mathbf{P}_\xi([t, +\infty)) \times \mathbf{P}_\xi((0, +\infty) | [t, +\infty))$ или равенство $(1 - p_0) \times$ $\times \exp\{-\lambda t\} = \mathbf{P}_\xi([t, +\infty)) \times 1$. Отсюда при $t > 0$ легко получаем, что вероятность $\mathbf{P}_\xi((-\infty, t)) = 1 - (1 - p_0)\exp\{-\lambda t\}$.

Поэтому интегральная функция распределения $F(t)$ времени ξ безотказной работы компьютера с учетом транспортировки и эксплуатации равна вероятности $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < t\}) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$ при $t \leqslant 0$ и равна вероятности $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < t\}) = 1 - \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant t\}) = 1 - (1 - p_0)\exp\{-\lambda t\}$ при $t > 0$. Значит, вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = 0\}) = F(+0) - F(0) = p_0$. В этом примере величина ξ не является дискретной, так как она с положительной вероятностью может принимать несчетное число значений из промежутка $(0, \infty)$. Она не является также непрерывной, так как функция $F(t)$ имеет скачок в точке $t = 0$. Эта случайная величина не имеет сингулярной компоненты, так как $dF(t)/dt = \lambda(1 - p_0)\exp\{\lambda t\} > 0$ при $t > 0$. График интегральной функции распределения $F(t)$ представлен на рис. 13.4.

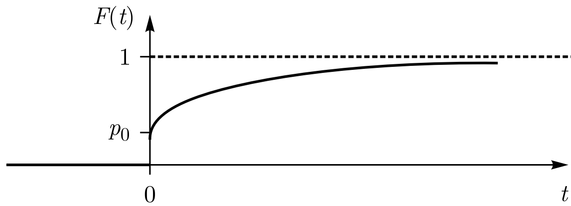


Рис. 13.4

Из этого графика видно, что интегральная функция $F(t)$ равна нулю при всех $t \leqslant 0$ и равна $1 - (1 - p_0)\exp\{-\lambda t\} = p_0 + (1 - p_0)(1 - \exp\{-\lambda t\}) = p_0 F_{\text{д}}(t) + (1 - p_0)F_{\text{ан}}(t)$ при $t > 0$. Следовательно, каждая из функций $F_{\text{д}}(t)$ — дискретная компонента, $F_{\text{ан}}(t)$ — абсолютно непрерывная компонента — равна нулю при $t \leqslant 0$ и $F_{\text{д}}(t) = 1$, $F_{\text{ан}}(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\}$ при $t > 0$. Таким образом, интегральная функция распределения $F(t)$ на промежутке $(0, +\infty)$ действительной прямой является абсолютно непрерывной. В начале координат функция $F(t)$ имеет разрыв, величина которого равна p_0. Поэтому время $\xi(\omega)$ безотказной работы компьютера является смешанной случайной величиной и представляет собой смесь дискретной и непрерывной случайных величин.

Тестовые вопросы к лекции 13

1. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является сингулярной случайной величиной, которая принимает значения из отрезка $[0, 1]$. Определить соотношения, которые являются верными.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}) = 0$ при $x \leqslant 0$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}) > 1/2$ при $1/3 < x < 2/3$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}) < 1/4$ при $1/9 < x < 2/9$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}) = 3/4$ при $7/9 < x < 8/9$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть функция $K(x)$ является канторовой лестницей на отрезке $[0, 1]$. Определить соотношение, которое является ошибочным.

- $K(x) = 1/8$ при $1/27 < x < 2/27$.
- $K(x) = 1/2$ при $7/27 < x < 8/27$.
- $K(x) = 5/8$ при $19/27 < x < 20/27$.
- $K(x) = 7/8$ при $25/27 < x < 26/27$.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией распределения сингулярной случайной величины $\xi(\omega)\colon \Omega \to [0, 1]$. Определить соотношения, которые являются верными.

- $F(x) = 1$ при $x \geqslant 26/27$.
- $F(x) = 1$ при $x \geqslant 1$.
- $F(x) \geqslant 1/16$ при $x \geqslant 1/27$.
- $F(x) \leqslant 3/8$ при $x \leqslant 1/3$.

4. Тип — проверка ответов.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией распределения сингулярной случайной величины $\xi(\omega)\colon \Omega \to [0, 1]$. Вычислить значение функции $F(x)$ при: 1) $x = 10/27$; 2) $x = 20/27$; 3) $x = 22/27$.

Ответы:

1) $F(10/27) = 1/2$;
2) $F(20/27) = 5/8$;
3) $F(22/27) = 3/4$.

5. Тип — проверка ответов.

Пусть функция $K(x)$ является канторовой лестницей на отрезке $[0, 1]$. Вычислить значение канторовой функции $K(x)$ при: 1) $x = 11/27$; 2) $x = 21/27$; 3) $x = 23/27$.

Ответы:

1) $K(11/27) = 1/2$;
2) $K(21/27) = 3/4$;
3) $K(23/27) = 3/4$.

6. Тип — проверка ответов.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией распределения сингулярной случайной величины $\xi(\omega)$: $\Omega \to [0, 1]$. Вычислить значение функции $F(x)$ при: 1) $x = 1/27$; 2) $x = 2/27$; 3) $x = 4/27$.

Ответы:

1) $F(1/27) = 1/8$.
2) $F(2/27) = 1/8$.
3) $F(4/27) = 1/4$.

7. Тип — проверка ответов.

Пусть функция $K(x)$ является канторовой лестницей на отрезке $[0, 1]$. Вычислить значение канторовой функции $K(x)$ при: 1) $x = 4/27$; 2) $x = 7/27$; 3) $x = 26/27$.

Ответы:

1) $K(4/27) = 1/4$;
2) $KK(7/27) = 3/8$;
3) $K(26/27) = 7/8$.

Лекция 14

МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

14.1. Понятие о случайных векторах

При исследовании эксперимента E приходится отдельно исследовать различные случайные величины $\xi(\omega), \eta(\omega), \ldots$ Следующим шагом изучения эксперимента E является рассмотрение совместных свойств целого семейства $\Lambda = \{\xi(\omega), \eta(\omega), \ldots\}$ случайных величин. К таким свойствам, например, можно отнести функциональные и статистические зависимости [1, 3, 4, 8–11] между случайными величинами семейства Λ. Более того, очень часто необходимо рассматривать набор Λ или его подмножество как единую упорядоченную систему из нескольких случайных величин на одном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Приведем пример, который поясняет эту ситуацию.

Пример 14.1. Опыт состоит в обнаружении станцией слежения в некотором пространстве летательного космического аппарата и пуске ракеты с целью его уничтожения. В качестве одной из количественных характеристик этого эксперимента можно взять точку разрыва снаряда ракеты вблизи летательного космического аппарата. Ясно, что точка в трехмерном пространстве определяется случайными координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 или единой системой из трех упорядоченных случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Определение 14.1. Упорядоченная система из n одномерных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, заданных на одном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$, называется случайным вектором или многомерной случайной величиной и обозначается $\boldsymbol{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$.

Итак, имеем следующее однозначное отображение $\boldsymbol{\xi}(\omega)\colon \Omega \to R^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon -\infty < x_i < +\infty,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. В этом случае говорят, что поточечно задана многомерная случайная величина $\boldsymbol{\xi}$ размерности n или что задан случайный вектор размерности n. Поскольку множество вида $\{\omega\colon \xi_1(\omega) <$

$< x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\}$ равно $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{\omega\colon \xi_i(\omega) < x_i\}$ и $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ являются одномерными случайными величинами, то множество $\{\omega\colon \xi_1(\omega) < x_1,\ \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\} \in \mathcal{F}$.

Следовательно, при любом фиксированном наборе чисел x_1, $x_2, \ldots, x_n$ для n-мерного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ можно определить многомерную интегральную функцию распределения

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\}).$$

Ради упрощения записей и геометрической интерпретации изложения материала в дальнейшем будем подробно рассматривать только двумерные случайные величины ($n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$). Изучение свойств n-мерных случайных величин полностью аналогично. Более того, свойства n-мерных и двумерных функций распределения совпадают. При переходе от одномерных случайных величин к многомерным возникают дополнительные свойства интегральной функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

14.2. Двумерная случайная величина и свойства ее интегральной функции распределения

При $n = 2$ получаем, что двумерная случайная величина $\boldsymbol{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega),\ \xi_2(\omega))\colon \Omega \to R^2$ представляет собой упорядоченную систему из одномерных случайных величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. В дальнейшем для наглядности упорядоченный набор $(\xi_1,\ \xi_2)$ из двух случайных величин можно отобразить случайной точкой на плоскости с абсциссой ξ_1 и ординатой ξ_2 (см. рис. 14.1).

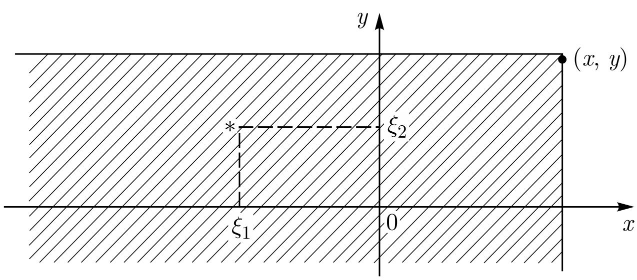


Рис. 14.1

Далее, при $(x, y) \in R^2$ интегральной функцией $F(x, y)$ двумерной случайной величины (ξ_1, ξ_2) называется вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < x,\ \xi_2(\omega) < y\})$. Тогда функция распределения $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (ξ_1, ξ_2)

попадет в заштрихованную на рис. 14.1 область. При этом в эту область стороны прямого угла с вершиной в точке (x, y) не включаются. Такая геометрическая интерпретация и терминология во многом позволяют понять на содержательном уровне и наглядно проиллюстрировать основные свойства интегральной функции $F(x, y)$.

Сформулируем теперь такие свойства многомерной интегральной функции распределения, которые совершенно аналогичны свойствам интегральной функции распределения одномерной случайной величины. Более того, эти свойства $F(x, y)$ доказываются почти так же, как и в одномерном случае. Итак, справедливы следующие утверждения.

1. Функция $F(x, y)$ принимает значения на отрезке $[0, 1]$, поскольку по определению она равна вероятности

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x,\ \xi_2(\omega) < y\}).$$

2. Функция $F(x, y)$ является неубывающей функцией по x и y. Для доказательства обратимся к рис. 14.2.

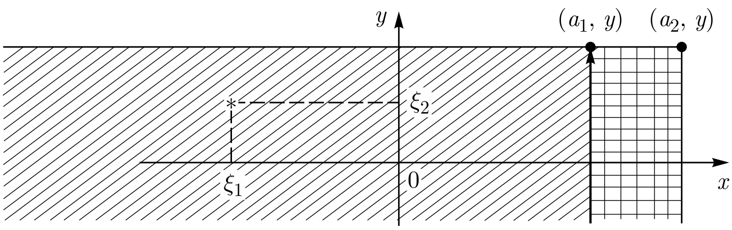


Рис. 14.2

Если $a_1 < a_2$ и события $A_{a_1} = \{\omega\colon \xi_1(\omega) < a_1,\ \xi_2(\omega) < y\}$, $A_{a_2} = \{\omega\colon \xi_1(\omega) < a_2,\ \xi_2(\omega) < y\}$, $A_{a_1,a_2} = \{\omega\colon a_1 \leqslant \xi_1(\omega) < a_2,\ \xi_2(\omega) < y\}$ порождены вектором $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$, то $A_{a_2} = A_{a_1} \cup A_{a_1,a_2}$, $A_{a_1} \cap A_{a_1,a_2} = \varnothing$ и вероятность $\mathbf{P}(A_{a_2}) = \mathbf{P}(A_{a_1}) + \mathbf{P}(A_{a_1,a_2})$, или интегральная функция распределения $F(a_2, y) = F(a_1, y) + \mathbf{P}(\{\omega\colon a_1 \leqslant \xi_1(\omega) < a_2,\ \xi_2(\omega) < y\}) \geqslant F(a_1, y)$. Отсюда получаем важную формулу:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a_1 \leqslant \xi_1(\omega) < a_2, \xi_2(\omega) < y\}) = F(a_2, y) - F(a_1, y). \quad (14.1)$$

Можно сказать, что формула (14.1) вычисляет вероятность попадания случайной точки (ξ_1, ξ_2) в область с двойной штриховкой (рис. 14.2). При этом граница, включаемая в эту область, помечена жирной линией со стрелкой. По такой же схеме получим, что при $b_2 > b_1$ имеет место неравенство $F(x, b_2) \geqslant F(x, b_1)$ и дополнительно простая формула

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x, b_1 \leqslant \xi_2(\omega) < b_2\}) = F(x, b_2) - F(x, b_1). \quad (14.2)$$

3. Функция $F(x, y)$ при $i \to \infty$ удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{a_{-i}\to-\infty} F(a_{-i}, y) = \lim_{b_{-i}\to-\infty} F(x, b_{-i}) = 0,$$

$$\lim_{b_i\to+\infty} F(x, b_i) = F(x, +\infty) = F_{\xi_1}(x),$$

$$\lim_{a_i\to+\infty} F(a_i, y) = F(+\infty, y) = F_{\xi_2}(y),$$

$$\lim_{\substack{a_i\to+\infty\\ b_i\to+\infty}} F(a_i, b_i) = F(+\infty, +\infty) = 1,$$

$$\lim_{\substack{a_{-i}\to-\infty\\ b_{-i}\to-\infty}} F(a_{-i}, b_{-i}) = F(-\infty, -\infty) = 0,$$

где $F_{\xi_1}(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < x\})$ и $F_{\xi_2}(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\})$ — функции распределения случайных величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$F(+\infty, y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < +\infty,\ \xi_2(\omega) < y\}).$$

Тогда $F(+\infty, y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < +\infty\} \cap \{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\}) = \mathbf{P}(\Omega \cap \{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\}) = F_{\xi_2}(y)$. Вместо последовательностей $\{a_i; i = 0, 1, \ldots\}$ и $\{a_{-i}; i = 1, 2, \ldots\}$, таких что $a_0 < a_1 < \ldots < a_i < a_{i+1} < \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = +\infty$ и $a_0 > a_{-1} > \ldots \ldots > a_{-i} > a_{-i-1} > \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} a_{-i} = -\infty$, можно использовать последовательности $\{a_i = i;\ i = 0, 1, \ldots\}$, $\{a_{-i} = -i;\ i = 1, 2, \ldots\}$. Далее, вероятность вида $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < +\infty\} \cap \{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\})$ представим в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < +\infty\} \cap \{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\}) = \\
&\quad = \mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \{\omega\colon k-1 \leqslant \xi_1(\omega) < k\}\right) \cap \{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\}\right) = \\
&\quad = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (\{\omega\colon k-1 \leqslant \xi_1(\omega) < k\} \cap \{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\})\right) = \\
&\quad = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \{\omega\colon k-1 \leqslant \xi_1(\omega) < k, \xi_2(\omega) < y\}\right) = \\
&\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon k-1 \leqslant \xi_1(\omega) < k, \xi_2(\omega) < y\}).
\end{aligned}$$

Итак, $F_{\xi_2}(y) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon k-1 \leqslant \xi_1(\omega) < k,\ \xi_2(\omega) < y\})$, поэтому имеем: $0 \leqslant \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon k-1 \leqslant \xi_1(\omega) < k,\ \xi_2(\omega) < y\}) \leqslant 1$, т. е. указанный ряд сходится. Частичные суммы вида

$$S_i = \sum_{k=1-i}^{i} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ k-1 \leqslant \xi_1(\omega) < k, \xi_2(\omega) < y\}), \quad i = 0, 1, \ldots,$$

будут сходиться к функции $F_{\xi_2}(y)$. Используя формулу (14.1), найдем сумму $S_i = \sum\limits_{k=1-i}^{i} \mathbf{P}(\{\omega\colon k-1 \leqslant \xi_1(\omega) < k,\ \xi_2(\omega) < y\}) = F(i,y) - F(-i,y)$. Последовательность $\{F(i,y); i \geqslant 0\}$ не убывает по i и ограничена сверху единицей, а последовательность $\{F(-i,y); i \geqslant 0\}$ не возрастает по i и ограничена снизу нулем. Поэтому существуют следующие пределы: $\lim\limits_{i\to+\infty} F(i,y)$, $\lim\limits_{i\to+\infty} F(-i,y)$. Отсюда $\lim\limits_{i\to+\infty} S_i = \lim\limits_{i\to+\infty} F(i,y) - \lim\limits_{i\to+\infty} F(-i,y) = F_{\xi_2}(y)$. Так как при $i = 0, 1, \ldots$ имеем

$$F(i,y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < i, \xi_2(\omega) < y\}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < +\infty, \xi_2(\omega) < y\}) = F_{\xi_2}(y),$$

то $\lim\limits_{i\to+\infty} F(i,y) \leqslant F_{\xi_2}(y)$. Далее, $\lim\limits_{i\to+\infty} F(-i,y) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{i\to+\infty} F(i,y) = F_{\xi_2}(y) + \lim\limits_{i\to+\infty} F(-i,y)$. Отсюда $\lim\limits_{i\to+\infty} F(i,y) = F_{\xi_2}(y)$ и $\lim\limits_{i\to+\infty} F(-i,y) = 0$. Утверждения о том, что $\lim\limits_{b_{-i}\to-\infty} F(x, b_{-i}) = 0$, $\lim\limits_{b_i\to+\infty} F(x, b_i) = F(x, +\infty) = F_{\xi_1}(x)$ и $\lim\limits_{\substack{a_i\to+\infty \\ b_i\to+\infty}} F(a_i, b_i) = 1$, $\lim\limits_{\substack{a_{-i}\to-\infty \\ b_{-i}\to-\infty}} F(a_{-i}, b_{-i}) = 0$, доказываются аналогичным образом. Свойство 3 установлено.

Замечание 14.1. Формулы вида $\lim\limits_{b_i\to+\infty} F(x, b_i) = F(x, +\infty) = F_{\xi_1}(x)$, $\lim\limits_{a_i\to+\infty} F(a_i, y) = F(+\infty, y) = F_{\xi_2}(y)$ позволяют найти одномерные (маргинальные) законы распределения каждой случайной величины ξ_1 и ξ_2, зная закон распределения $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$. В общем случае обратную задачу решить не удается. Если известны $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$, то

$$F(x,y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < x, \xi_2(\omega) < y\}) =$$
$$= \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < x\}) \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\} \mid \{\omega\colon \xi_1(\omega) < x\}) =$$
$$= F_{\xi_1}(x)\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\} \mid \{\omega\colon \xi_1(\omega) < x\}).$$

Однако условная вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\} \mid \{\omega\colon \xi_1(\omega) < x\})$ неизвестна и вычислить ее не представляется возможным. Значит, одномерные распределения $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$ не восстанавливают $F(x,y)$. Можно сказать, что совместное распределение $F(x,y)$ содержит больше информации, чем одномерные распределения $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$. Поэтому важно изучать случайные векторы.

4. Интегральная функция распределения $F(x,y)$ непрерывна слева по каждому аргументу. Для этого достаточно показать, что для любых строго возрастающих числовых последовательностей $\{a_i; i \geqslant 1\}$ и $\{b_i; i \geqslant 1\}$, которые сходятся при $i \to \infty$ к числам a и b, выполняются равенства вида

$$F(a-0, y) = \lim_{a_i \to a, a_i < a} F(a_i, y) = F(a, y),$$
$$F(x, b-0) = \lim_{b_i \to b, b_i < b} F(x, b_i) = F(x, b).$$

Используя опыт доказательств свойств 1–3 для интегральной функции $F(x,y)$ и метод доказательства теоремы 11.3 из лекции 11, легко установить сформулированное здесь утверждение.

14.3. Достаточные условия существования двумерной интегральной функции

Перечисленные выше свойства 1–4 (раздел 14.2) для многомерных случайных величин выполняются и для одномерных случайных величин. Эти свойства с учетом теоремы о выборочном вероятностном пространстве из раздела 11.2 лекции 11 являются необходимыми и достаточными для того, чтобы любую функцию $G(x)$ с такими свойствами объявить интегральной функцией распределения некоторой одномерной случайной величины. Однако в многомерном случае свойства 1–4 не будут достаточными. Для доказательства этого утверждения предварительно рассмотрим следующий вопрос. Зная функцию распределения $F(x,y)$, найти вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ_1, ξ_2) в некоторую заштрихованную прямоугольную область на плоскости со сторонами, параллельными осям координат. Эта область приведена на рис. 14.3 и заштрихована в виде прямоугольной сетки. При этом границы, включаемые в прямоугольник, помечены жирными линиями.

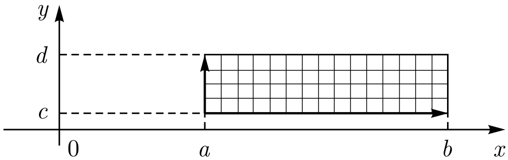


Рис. 14.3

Введем следующие события:

$$A = \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < a, \xi_(\omega) < c\}, \quad B = \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < a, \xi_2(\omega) < d\},$$

$$C = \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < b, \xi_2(\omega) < d\}, \quad D = \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < b, \xi_2(\omega) < c\},$$

$$G = \{\omega\colon\ a \leqslant \xi_1(\omega) < b,\ c \leqslant \xi_2(\omega) < d\}.$$

Событие $C = G \cup B \cup D$, причем события G и $(B \cup D)$ несовместны, а событие $(B \cap D) = A$. Тогда по теореме сложения

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(G \cup B \cup D) = \mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(B \cup D) = \\ = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(D) - \mathbf{P}(B \cap D) + \mathbf{P}(G) = \\ = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(D) - \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(G).$$

Итак, $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(D) - \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(G)$. По определению $F(x, y)$ имеем

$$F(b, d) = F(a, d) + F(b, c) - F(a, c) + \\ + \mathbf{P}(\{\omega\colon\ a \leqslant \xi_1(\omega) < b, c \leqslant \xi_2(\omega) < d\}).$$

Откуда получаем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a \leqslant \xi_1(\omega) < b, c \leqslant \xi_2(\omega) < d\}) = \\ = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c).$$

Заметим, что это равенство позволяет получить (14.1) при $a = a_1$, $b = a_2$, $c = -\infty$, $d = y$ и (14.2) при $a = -\infty$, $b = x$, $c = b_1$, $d = b_2$. Так как $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a \leqslant \xi_1(\omega) < b,\ c \leqslant \xi_2(\omega) < d\}) \geqslant 0$, то имеем пятое свойство для $F(x, y)$ вида $F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geqslant 0$ при любых $a < b$, $c < d$.

Рассмотрим теперь функцию $G(u, v)$, для которой свойства вида 1–4 выполняются, однако она не является интегральной. Пусть $G(u, v)$ равна нулю при $(u, v) \in \{(x, y)\colon x + y \leqslant 1\} \cup \{(x, y)\colon x \leqslant 0\} \cup \{(x, y)\colon\ y \leqslant 0\}$ и равна единице в остальной части плоскости xOy. Используя определение функции $G(x, y)$ и рис. 14.4, a, легко проверить, что эта функция удовлетворяет свойствам 1–4. Отметим, что каждая из функций $G(+\infty, y) = \lim\limits_{a_i \to +\infty} G(a_i, y), G(x, +\infty) = \lim\limits_{b_i \to +\infty} G(x, b_i)$ является вырожденным распределением, сосредоточенным в точке нуль.

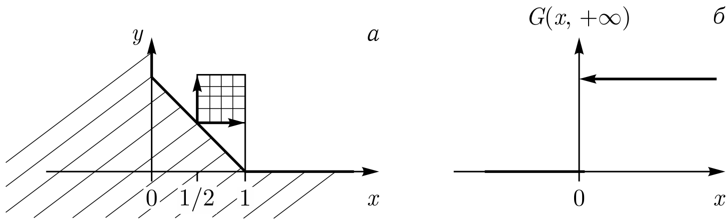


Рис. 14.4

Например, для функции $G(x, +\infty)$ это отображено на рис. 14.4, *б*. Однако функцию $G(x, y)$ нельзя считать интегральной. Иначе вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ 1/2 \leqslant \xi_1(\omega) < 1, 1/2 \leqslant \xi_2(\omega) < 1\}) = \\ = G(1,1) - G(1/2,1) - G(1,1/2) + G(1/2,1/2) = \\ = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0$$

попадания двумерной случайной точки (ξ_1, ξ_2) в квадрат, изображенный на рис. 14.4, a в виде двойной заштрихованной области, будет отрицательной. Заметим, что выполнение свойств 1–4 и неравенств $F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \geqslant 0$ при любых $a < b$, $c < d$ являются не только необходимыми, но и достаточными для существования интегральной функции распределения $F(x, y)$ некоторой двумерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$. Доказательство этого факта с незначительными изменениями повторяет одномерный случай построения выборочного вероятностного пространства $(R,\ \mathcal{B},\ \mathbf{P}_\xi(\cdot))$.

14.4. Независимость семейства случайных величин

При изучении семейства двух случайных величин (ξ_1, ξ_2) было показано, что вероятностные свойства этой совокупности не исчерпываются вероятностными свойствами отдельных случайных величин ξ_1 и ξ_2. Такая ситуация объясняется тем, что между случайными величинами ξ_1, ξ_2 может существовать разная степень зависимости. Для некоторых конкретных экспериментов, зная значение количественной характеристики одной ξ_1, можно совершенно точно определить значение другой ξ_2. Другими словами, можно сказать, что мы имеем дело с привычной для математики функциональной зависимостью вида $\xi_2(\omega) = g(\xi_1(\omega))$, где функция $y = g(x)\colon\ R \to R$. Например, число ξ_1 всех вышедших из строя однотипных лампочек в подъезде жилого дома в течение года и их общая стоимость ξ_2 связаны функциональной зависимостью $\xi_2 = z\xi_1$, где стоимость z электрической лампочки предполагается постоянной величиной. В общем случае, зная значение одной случайной величины ξ_1, мы можем указать только закон распределения другой случайной величины ξ_2, и этот закон зависит от конкретного значения случайной величины ξ_1. Такая зависимость между случайными величинами называется статистической (вероятностной, стохастической). Так, высота ξ_1 найденного наудачу гриба в лесу и его вес ξ_2 зависимы, но эта связь не является функциональной. В то же время можно указать примеры совершенно другой ситуации, когда количественные признаки эксперимента на интуитивном уровне считаются причинно несвязанными. Например, нет оснований сомневаться в том, что рост ξ_1 выбранного наудачу взрослого человека в Нижнем Новгороде практически не связан с имеющейся у него суммой ξ_2 денег в рублях. Математическая формализация независимости величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ должна быть такой, что любые количественные характеристики, не связанные причинно (по происхождению), должны объявляться независимыми случайными величинами. Поскольку случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ порождают семейство событий из $\mathcal{F}$, то определение независимости событий целесообразно перенести на случайные величины.

Определение 14.2. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются статистически независимыми, если для точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ имеем: $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1 < x_1\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2 < x_2\}) \times \ldots \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2 < x_2\})$ или $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2) \times \ldots \times F_{\xi_n}(x_n)$. Иначе случайные величины называются статистически зависимыми.

Легко показать, что любой набор из статистических независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ образует статистически независимые случайные величины. Действительно, ради простоты, покажем это для случайных величин ξ_1 и ξ_2. Непосредственно из определения 14.2 получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\}) = \\
&\quad = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \xi_3 < \infty, \xi_4 < \infty, \ldots, \xi_n < \infty\}) = \\
&\quad\quad = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1 < x_1\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2 < x_2\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_3 < \infty\}) \times \\
&\quad\quad\quad \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_4 < \infty\}) \times \ldots \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n < \infty\}) = \\
&\quad\quad\quad\quad = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1 < x_1\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2 < x_2\}).
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично доказывается независимость случайных величин для любого другого набора.

Пример 14.2 (эксперимент *Даламбера*). Симметричная монета непреднамеренно бросается два раза на поверхность стола. Доказать, что число ξ_1 выпадений орла при первом броске и число ξ_2 выпадений орла при втором броске являются независимыми случайными величинами, между которыми нет функциональной зависимости.

Тестовые вопросы к лекции 14

1. Тип — одиночный выбор.

Пусть $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ является многомерной случайной величиной. Определить правильное соотношение.

- $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{\omega\colon \xi_i(\omega) < x_i\} \notin \mathcal{F}$.
- $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{\omega : \xi_i(\omega) > x_i\} \notin \mathcal{F}$.
- $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{\omega\colon \xi_i(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$.
- $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{\omega\colon \xi_i(\omega) \geqslant x_i\} \notin \mathcal{F}$.

2. Тип — множественный выбор.

Пусть $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ является многомерной случайной величиной. Определить ошибочные соотношения.

- $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$$= 1 - \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\}).$$
- $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$$= \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\}).$$
- $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$$= \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) \leqslant x_1, \xi_2(\omega) \leqslant x_2, \ldots, \xi_n(\omega) \leqslant x_n\}).$$
- $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$$= \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) > x_1, \xi_2(\omega) > x_2, \ldots, \xi_n(\omega) > x_n\}).$$

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть $F(x, y)$ является интегральной функцией двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$. Определить правильное утверждение.

• Функция $F(x, y)$ принимает значение из интервала $(0, 1)$.
• Функция $F(x, y)$ принимает значение из промежутка $(0, 1]$.
• Функция $F(x, y)$ принимает значение из промежутка $[0, 1)$.
• Функция $F(x, y)$ принимает значение на отрезке $[0, 1]$.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть $F(x, y)$ является интегральной функцией двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$. Определить правильные утверждения.

• $\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi_1(\omega) \leqslant b,\ \xi_2(\omega) \leqslant y\}) = F(b, y) - F(a, y)$.
• $\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi_1(\omega) < b,\ \xi_2(\omega) < y\}) = F(b, y) - F(a, y)$.
• $\mathbf{P}(\{\omega\colon a < \xi_1(\omega) < b,\ \xi_2(\omega) < y\}) = F(b, y) - F(a, y)$.
• Функция $F(x, y)$ является неубывающей функцией по аргументам x и y.

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть $F(x, y)$ является интегральной функцией распределения двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$. Пусть также функции $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$ являются интегральными функциями распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 соответственно. Определить верное утверждение.

• $F(+\infty, y) < F_{\xi_2}(y)$.
• $F(x, +\infty) > F_{\xi_1}(x)$.
• $F(-\infty, -\infty) = 0$.
• $F(+\infty, +\infty) < 1$.

6. Тип — множественный выбор.

Пусть $F(x, y)$ является интегральной функцией распределения двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ и возрастающие последовательности $\{a_i; i \geqslant 1\}$ и $\{b_i; i \geqslant 1\}$ сходятся при $i \to \infty$ к числам a и b соответственно. Пусть также функции $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$ являются интегральными функциями распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 соответственно. Определить ошибочные утверждения.

• $F(a, b) = F_{\xi_1}(a)$.
• $F(a - 0, y) = \lim\limits_{\substack{a_i \to a \\ a_i < a}} F(a_i, y) = F(a, y)$.
• $F(x, b - 0) = \lim\limits_{\substack{b_i \to b \\ b_i < b}} F(x, b_i) = F(x, b)$.
• $F(x, y) = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)$.

7. Тип — одиночный выбор.

Пусть $F(x,y)$ является интегральной функцией распределения двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$ и $a<b$, $c<d$. Пусть также функции $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$ являются интегральными функциями случайных величин ξ_1 и ξ_2 соответственно. Определить верное утверждение.

• $F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)>0$.

• $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a\leqslant\xi_1(\omega)<b,\ c\leqslant\xi_2(\omega)<d\})=F(b,d)-F(b,c)-$ $-F(a,d)+F(a,c)$.

• $F(x_1,x_2)>F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)$, если случайные величины ξ_1 и ξ_2 статистически независимы.

• $F(x_1,x_2)=F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)$, если случайные величины ξ_1 и ξ_1 статистически зависимы.

8. Тип — проверка ответов.

Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_1 являются независимыми. Пусть $F_{\xi_1}(x_1)=0$ при $x_1\leqslant 0$ и $F_{\xi_1}(x_1)=1-\exp\{-\lambda x_1\}$ при $x_1>0$, $\lambda=\mathrm{const}>0$, а $F_{\xi_2}(x_2)=0$ при $x_2\leqslant 0$ и $F_{\xi_2}(x_2)=$ $=1-\exp\{-\beta x_2\}$ при $x_2>0$, $\beta=\mathrm{const}>0$. Вычислить значение двумерной интегральной функции распределения $F(x_1,x_2)=$ $=\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1<x_1,\ \xi_2<x_2\})$ при следующих аргументах: 1) $x_1=$ $=x_2=0$; 2) $x_1=0$, $x_2=1$; 3) $x_1=1$, $x_2=1$.

Ответы:

1) $F(0,0)=0$;

2) $F(0,1)=0$;

3) $F(1,1)=1-\exp\{-\lambda\}-\exp\{-\beta\}+\exp\{-\lambda-\beta\}$.

Лекция 15

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

15.1. Дискретные двумерные случайные величины

Теорема Лебега о разложении интегральной функции распределения позволяет решить важную проблему классификации множества одномерных случайных величин. Было установлено, что это множество включает дискретные, непрерывные, сингулярные и смешанные одномерные случайные величины. Однако многомерные случайные величины по сравнению с одномерными случайными величинами более разнообразны по своей физической природе и математической структуре. Это разнообразие прежде всего порождается наличием функциональной или статистической зависимости между случайными величинами, которые составляют многомерную случайную величину. Поэтому не удается провести замкнутую и достаточно простую классификацию совокупности всех случайных векторов, как это было сделано в одномерном случае. Так же как и для одномерных случайных величин, мы подробно рассмотрим наиболее часто встречающиеся в конкретных задачах так называемые дискретные и непрерывные многомерные случайные величины [1, 3, 4, 8–11]. Пусть ради простоты $n = 2$ и каждая из случайных величин ξ_1, ξ_2 принимает не более чем счетное число возможных значений.

Определение 15.1. Двумерная случайная величина $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ называется дискретной, если величины ξ_1 и ξ_2 являются дискретными.

Пусть $\xi_1(\omega)$ принимает значение из $\{x_1, x_2, \ldots\}$ и $\xi_2(\omega)$ принимает значение из $\{y_1, y_2, \ldots\}$. Обозначим вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i,\ \xi_2(\omega) = y_j\})$ через $r_{i,j}$. Множество $\{r_{i,j}\colon i, j = 1, 2, \ldots\}$ называется распределением двумерной дискретной случайной величины (ξ_1, ξ_2). В частном случае распределение может принять вид $\{r_{i,j}\colon\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, s\}$. Найдем интегральную функцию $F(x, y)$:

$$F(x,y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x, \xi_2(\omega) < y\}) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\bigcup_{(i,j)\colon\, x_i<x,\, y_j<y} \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i, \xi_2(\omega) = y_j\}\right) =$$
$$= \sum_{i\colon\, x_i<x}\sum_{j\colon\, y_j<y} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i, \xi_2(\omega) = y_j\}) = \sum_{i\colon\, x_i<x}\sum_{j\colon\, y_j<y} r_{i,j}.$$

Зная распределение $\{r_{i,j}\colon\ i, j = 1, 2, \ldots\}$, можно определить интегральные функции каждой из случайных величин ξ_1, ξ_2: $F_{\xi_1}(x) = F(x, +\infty) = \sum\limits_{i\colon\, x_i<x}\sum\limits_{j} r_{i,j}$, $F_{\xi_2}(y) = F(+\infty, y) = \sum\limits_{j\colon\, y_j<y}\sum\limits_{i} r_{i,j}$. Равенства вида

$$\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i\} = \bigcup_j \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i, \xi_2(\omega) = y_j\},$$
$$\{\omega\colon\ \xi_2(\omega) = y_j\} = \bigcup_i \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i, \xi_2(\omega) = y_j\}$$

позволяют найти формулы для распределений одномерных случайных величин ξ_1 и ξ_2 в следующем виде:

$$p_i = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i\}) = \sum_j r_{i,j},$$
$$q_j = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_2(\omega) = y_j\}) = \sum_i r_{i,j}.$$

Однако одномерные распределения вида $\{p_i\colon\ i \geqslant 1\}$ и $\{q_j\colon\ j \geqslant 1\}$ не определяют в общем случае двумерное распределение $\{r_{i,j}\colon\ i, j = 1, 2, \ldots\}$.

Пример 15.1. Два игрока независимо друг от друга наудачу бросают по два раза каждый свою несимметричную монету. Вероятность выпадения орла для первого игрока равна 0,7, для второго игрока — 0,4. Найти законы распределения системы случайных величин ξ_1 и ξ_2, которые определяют число выпадений орлов для первого и второго игрока.

Решение. В качестве описания произвольного элементарного исхода игры выберем символ ω_k, где $k = b_1 2^3 + b_2 2^2 + b_3 2^1 + b_4 2^0$ и $b_c = 0,\ 1$ для всех $c = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Символы b_1 и b_2 определяют число выпадений орлов для первого игрока при первом и соответственно при втором броске. Символы b_3 и b_4 определяют число выпадений орлов для второго игрока при первом и соответственно при втором броске. Так, например, описание ω_0 означает, что игроки выбросили только решки, так как индекс $k = 0$ при $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Аналогично, описание ω_{15} соответствует такому элементарному исходу, когда выпали только орлы, так как индекс $k = 15$ при $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$. Используя независимость каждого из бросков, легко вычислить вероятности элементарных событий. Например, вероятность вида $\mathbf{P}(\{\omega_0\}) = 0{,}0324$ и вероятность $\mathbf{P}(\{\omega_{15}\}) = 0{,}0784$. Легко найти поточечное задание случайных величин ξ_1 и ξ_2. Действительно, имеем: множество $\{\omega\colon \xi_1(\omega) = 0\} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\{\omega\colon \xi_1(\omega) = 1\} = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}\}$, $\{\omega\colon \xi_1(\omega) = 2\} = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}\}$, $\{\omega\colon \xi_2(\omega) = 0\} = \{\omega_0, \omega_4, \omega_8, \omega_{12}\}$, $\{\omega\colon \xi_2(\omega) = 1\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{13}, \omega_{14}\}$, $\{\omega\colon \xi_2(\omega) = 2\} = \{\omega_3, \omega_7, \omega_{11}, \omega_{15}\}$. Таким образом, возможными значениями случайных величин ξ_1 и ξ_2 являются: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ и $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$. Поэтому двумерная случайная величина (ξ_1, ξ_2) принимает значения вида: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$. Теперь имеем всю необходимую информацию, чтобы выписать табл. 15.1 распределения для случайного вектора (ξ_1, ξ_2) и ряды распределения для случайных величин ξ_1 и ξ_2.

Таблица 15.1

ξ_2	ξ_1		
	0	1	2
0	0,0324	0,1512	0,1764
1	0,0432	0,2016	0,2352
2	0,0144	0,0672	0, 0784

Например, вероятность $r_{2,3}$, которая приведена на пересечении третьего столбца и четвертой строки табл. 15.1, вычислим с использованием поточечного задания величин ξ_1 и ξ_2:

$$\begin{aligned} r_{2,3} &= \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = 1, \xi_2(\omega) = 2\}) = \\ &= \mathbf{P}(\{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}\} \cap \{\omega_3, \omega_7, \omega_{11}, \omega_{15}\}) = \\ &= \mathbf{P}(\{\omega_7, \omega_{11}\}) = \mathbf{P}(\{\omega_7\}) + \mathbf{P}(\{\omega_{11}\}) = 0{,}0336 + 0{,}0336 = 0{,}0672. \end{aligned}$$

Используя эту таблицу, легко вычислить функцию распределения $F(x, y)$ случайных величин ξ_1 и ξ_2. Например, функция $F(x, y) = \sum\limits_{i: x_i < x} \sum\limits_{j: y_j < y} r_{ij} = r_{1,1} + r_{2,1} + r_{1,2} + r_{2,2} = 0{,}0324 +$

$+\,0{,}1512+0{,}0432+0{,}2016=0{,}42840$ при $1<x\leqslant 2$ и $1<y\leqslant 2$. Поступая аналогичным образом, можно вычислить все остальные значения функции $F(x,y)$. Из табл. 15.1 имеем ряд распределения (табл. 15.2) для случайной величины ξ_1 и ряд распределения (табл. 15.3) для случайной величины ξ_2.

Таблица 15.2

ξ_1	0	1	2
$\mathbf{P}(\cdot)$	0,09	0,42	0,49

Таблица 15.3

ξ_2	0	1	2
$\mathbf{P}(\cdot)$	0,36	0,48	0,16

Вероятности в представленных рядах мы могли получить непосредственно из поточечного задания этих случайных величин. Например, $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega)=0\})=$ $=\mathbf{P}(\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3\})=\mathbf{P}(\{\omega_0\})+\mathbf{P}(\{\omega_1\})+\mathbf{P}(\{\omega_2\})+\mathbf{P}(\{\omega_3\})=$ $=0{,}09$, или $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_2(\omega)=2\})=\mathbf{P}(\{\omega_3,\omega_7,\omega_{11},\omega_{15}\})=\mathbf{P}(\{\omega_3\})+$ $+\,\mathbf{P}(\{\omega_7\})+\mathbf{P}(\{\omega_{11}\})+\mathbf{P}(\{\omega_{15}\})=0{,}16$. Наконец, проверим, что величины ξ_1 и ξ_2 являются статистически независимыми. В самом деле, вероятность $r_{1,1}=0{,}0324=0{,}09\times 0{,}036=p_1q_1$, вероятность $r_{1,2}=0{,}0432=0{,}09\times 0{,}48=p_1q_2$ и т. д.

15.2. Непрерывные двумерные случайные величины

В качестве другого важного для практики класса двумерных случайных величин рассмотрим множество так называемых непрерывных случайных величин.

Определение 15.2. Двумерная случайная величина, или отображение, вида $(\xi_1(\omega),\ \xi_2(\omega))\colon \Omega\to R^2$ называется непрерывной, если существует такая неотрицательная функция $f(x,y)$ с областью определения R^2, что для любой области H двумерной плоскости, для которой существует площадь, имеет место равенство $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ (\xi_1,\xi_2)\in H\})=\iint\limits_H f(x,y)\,dx\,dy$.

Отсюда следует, что непрерывная двумерная случайная величина принимает несчетное число различных значений, сплошь заполняя либо всю двумерную плоскость R^2, либо некоторую область D на этой плоскости, причем площадь D должна быть строго положительна. Вспоминая специальное обозначение двойного интеграла на случай прямоугольной области, получим, что вероятность попадания вектора (ξ_1, ξ_2) в прямоугольник $H = \{(u, v)\colon\ u_1 \leqslant u < u_2,\ v_1 \leqslant v < v_2\}$ равна

$$\mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon\ u_1 \leqslant \xi_1(\omega) < u_2, v_1 \leqslant \xi_2(\omega) < v_2\}\bigr) = \int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1}^{v_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Неотрицательная функция $f(x, y)$ называется плотностью распределения вероятностей случайной величины (ξ_1, ξ_2). Так как $\{\omega\colon\ (\xi_1, \xi_2) \in R^2\} = \Omega$, то имеем равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ (\xi_1, \xi_2) \in R^2\}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1.$$

Это равенство называется условием нормировки для плотности распределения $f(x, y)$. Если $H = \{(u, v)\colon\ -\infty < u < x, -\infty < v < y\}$, то найдем выражение для интегрального закона $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\,du\,dv = \int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\,dv\right)du = \int\limits_{-\infty}^{y}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} f(u, v)\,du\right)dv$. Это соотношение означает равенство двойного и повторных интегралов и имеет место, например, в случае, когда функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке $(x, y) \in R^2$. Дифференцируя $F(x, y)$ сначала по x, а затем по y, найдем: $f(x, y) = \partial^2 F(x, y)/\partial x \partial y$. Если не предполагать непрерывность функции $f(x, y)$ в каждой точке плоскости, то для плотности распределения вероятностей $f(x, y)$ почти всюду относительно лебеговской меры в R^2 такое представление будет верно. По этой причине функцию $f(x, y)$ еще называют дифференциальной функцией распределения. Если ξ_1 и ξ_2 являются независимыми случайными величинами, то

$$F(x, y) = F_{\xi_1}(x) \times F_{\xi_2}(y),$$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(F_{\xi_1}(x)) \times \frac{\partial}{\partial y}(F_{\xi_2}(y)) = f_{\xi_1}(x) \times f_{\xi_2}(y).$$

Заметим, что дифференциальная функция распределения $f(x, y)$ определяет дифференциальную функцию распределения каждой из одномерных случайных величин ξ_1 и ξ_2. В самом деле, из свойств функции $F(x, y)$ имеем: $F_{\xi_1}(x) =$

$= F(x, +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)\, dv \right) du, \quad F_{\xi_2}(y) = F(+\infty, y) =$
$= \int\limits_{-\infty}^{y} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)\, du \right) dv$ для одномерных случайных величин. Такое представление интегральных функций распределения $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$ для случайных величин ξ_1 и ξ_2 позволяет выписать одномерные плотности вероятностей $f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, v)\, dv$ и $f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, du$. Итак, если (ξ_1, ξ_2) является непрерывным, то величины ξ_1 и ξ_2 будут также непрерывными.

15.3. Геометрический смысл плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины

Выясним геометрический смысл функции $f(x, y)$. Выберем на плоскости xOy так называемый элементарный прямоугольник $\{(u, v)\colon\ x \leqslant u < x + \Delta x,\ y \leqslant v < y + \Delta y\}$. Используя это, последовательно находим, что предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ x \leqslant \xi_1 < x + \Delta x, y \leqslant \xi_2(\omega) < y + \Delta y\})/\Delta x \Delta y =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta y \to 0\\ \Delta x \to 0}} (F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y))/\Delta y \Delta x -$$
$$- \lim_{\substack{\Delta y \to 0\\ \Delta x \to 0}} (F(x, y + \Delta y) - F(x, y))/\Delta y \Delta x = f(x, y).$$

Тогда имеем: $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ x \leqslant \xi_1 < x + \Delta x,\ y \leqslant \xi_2(\omega) < y + \Delta y\}) = f(x, y)\Delta x \Delta y + o(\Delta x \Delta y) \approx f(x, y)\Delta x \Delta y$. На рис. 15.1 изображена поверхность $z = f(x, y)$ и элементарный прямоугольник $\{(u, v)\colon x \leqslant u < x + \Delta x, y \leqslant v < y + \Delta y\}$.

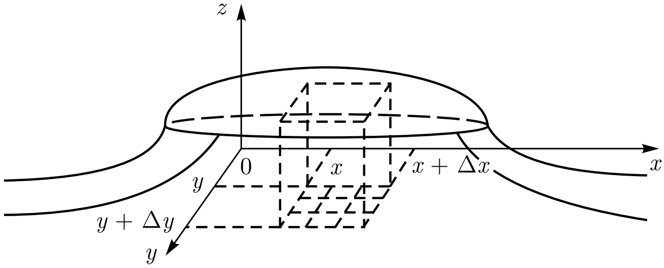


Рис. 15.1

Величина $f(x,y)\Delta x\Delta y$ равна объему параллелепипеда с основанием $\{(u,v)\colon\ x \leqslant u < x+\Delta x,\ y \leqslant v < y+\Delta y\}$ и высотой $f(x,y)$. Эта величина вычисляет с точностью до бесконечно малых высших порядков вероятность попадания случайной точки (ξ_1,ξ_2) в элементарный прямоугольник. При этом величина $z=f(x,y)$ считает приближено эту вероятность на единицу площади элементарного прямоугольника. Поэтому на плотность $z=f(x,y)$ можно смотреть как на некоторую поверхность распределения.

Итак, в этой лекции были рассмотрены дискретные и непрерывные двумерные случайные величины. Такого рода двумерные случайные величины наиболее часто используются на практике. Если ξ_1 и ξ_2 являются дискретными случайными величинами, то (ξ_1,ξ_2) всегда будет двумерным дискретным случайным вектором. Однако для непрерывных случайных величин это свойство не всегда будет выполняться. В связи с этим рассмотрим пример, который показывает, что в многомерном случае существует более сложное разнообразие векторных случайных величин.

Пример 15.2. Пусть ξ_1 является одномерной непрерывной случайной величиной и случайная величина $\xi_2=a\xi_1+b$, где $a>0$. В этом случае ξ_2 будет одномерной непрерывной случайной величиной. Поэтому случайный вектор (ξ_1,ξ_2) не является дискретным. Легко видеть, что двумерная случайная величина (ξ_1,ξ_2) принимает заданное значение с нулевой вероятностью из несчетного множества, элементы которого расположены на прямой $y=ax+b$ двумерной плоскости. С другой стороны, при $y>ax+b$ интегральная функция вида $F(x,y)=\mathbf{P}(\{\omega:\ \xi_1(\omega)<x,\xi_2(\omega)<y\})=\mathbf{P}(\{\omega:\ \xi_1(\omega)<x,a\xi_1+b<y\})=\mathbf{P}(\{\omega:\ \xi_1(\omega)<x\})=F_{\xi_1}(x)$, а при $y<ax+b$ двумерная интегральная функция $F(x,y)=\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega)<x,\ a\xi_1+b<y\})=\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a\xi_1+b<y\})=\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega)<(y-b)a^{-1}\})=F\xi_1((y-b)a^{-1})$. Отсюда получаем, что при $y\neq ax+b$ имеет место равенство $\partial^2F(x,y)/\partial x\partial y=0$. Значит, если бы случайный вектор (ξ_1,ξ_2) был непрерывным, то $f(x,y)=\partial^2F(x,y)/\partial x\partial y=0$ для всех $y\neq ax+b$. Далее, площадь множества значений двумерной случайной величины (ξ_1,ξ_2) равна нулю. Поэтому неотрицательную функцию $f(x,y)$, для которой имеет место условие нормировки, здесь определить не удается. Значит, случайный вектор (ξ_1,ξ_2) нельзя назвать непрерывным. Этот пример показывает, что нельзя выполнить достаточно простую классификацию случайных векторов.

Тестовые вопросы к лекции 15

1. Тип — проверка ответов.

Пусть вероятности $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i,\ \xi_2(\omega) = y_j\}) = r_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, являются распределением дискретной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$. Пусть также функции $F(x, y)$, $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$ являются интегральными функциями распределения двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$, случайных величин ξ_1 и соответственно ξ_2. Вычислить следующие интегральные функции распределения: 1) $F(x, y)$; 2) $F_{\xi_1}(x)$; 3) $F_{\xi_2}(y)$.

Ответы:

1) $F(x, y) = \sum\limits_{i\colon x_i < x}\ \sum\limits_{j\colon y_j < y} r_{i,j}$;

2) $F_{\xi_1}(x) = \sum\limits_{i\colon x_i < x}\ \sum\limits_{j} r_{i,j}$;

3) $F_{\xi_2}(y) = \sum\limits_{j\colon y_j < y}\ \sum\limits_{i} r_{i,j}$.

2. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятности $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i,\ \xi_2(\omega) = y_j\}) = r_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, являются распределением дискретной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$. Определить верные равенства.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_i\}) = \sum\limits_{j} r_{i,j}$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2(\omega) = y_j\}) = \sum\limits_{i} r_{i,j}$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_i,\ \xi_2(\omega) = y_j\}) = \Big(\sum\limits_{j} r_{i,j}\Big) \times \Big(\sum\limits_{i} r_{i,j}\Big)$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_i,\ \xi_2(\omega) = y_j\}) > \sum\limits_{j} r_{i,j} + \sum\limits_{i} r_{i,j}$.

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть вероятности $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i,\ \xi_2(\omega) = y_j\}) = r_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, являются распределением дискретной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$. Определить ошибочное утверждение.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) < x\}) = \sum\limits_{i\colon x_i < x}\ \sum\limits_{j} r_{i,j}$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2(\omega) < y\}) \neq \sum\limits_{j\colon y_j < y}\ \sum\limits_{i} r_{i,j}$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_i,\ \xi_2(\omega) = y_j\}) \neq \Big(\sum\limits_{j} r_{i,j}\Big) \times \Big(\sum\limits_{i} r_{i,j}\Big)$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_i\} \cup \{\omega\colon \xi_2(\omega) = y_j\}) \leqslant \sum\limits_{j} r_{i,j} + \sum\limits_{i} r_{i,j}$.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть функция $f(x,y)$ является плотностью распределения вероятностей двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ и $a < b$, $c < d$. Определить верные соотношения.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi_1(\omega) < b,\ c \leqslant \xi_2(\omega) < d\}) > \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi_1(\omega) < b,\ c \leqslant \xi_2(\omega) < d\}) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi_1(\omega) < b,\ c \leqslant \xi_2(\omega) < d\}) < \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy$.
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть функция $f(x,y)$ является плотностью распределения вероятностей двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ и $a < b$, $c < d$. Определить ошибочное утверждение.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a < \xi_1(\omega) < b,\ c < \xi_2(\omega) < d\}) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a < \xi_1(\omega) \leqslant b,\ c \leqslant \xi_2(\omega) \leqslant d\}) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi_1(\omega) < b,\ c \leqslant \xi_2(\omega) < d\}) > \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon a \leqslant \xi_1(\omega) \leqslant b,\ c \leqslant \xi_2(\omega) < d\}) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dx\,dy$.

6. Тип — множественный выбор.

Пусть функция $f(x,y)$ является плотностью распределения вероятностей двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$. Пусть также функции $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(y)$ являются плотностями распределения случайных величин ξ_1 и соответственно ξ_2. Определить справедливые утверждения.

• Если ξ_1 и ξ_2 являются независимыми, то $f(x,y) = f_{\xi_1}(x) \times \times f_{\xi_2}(y)$.

• $f_{\xi_1}(x) > \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dv$.

• $f_{\xi_2}(y) < \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,du$.

• $f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dv$.

7. Тип — одиночный выбор.

Пусть функция $f(x,y)$ является плотностью распределения вероятностей двумерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$. Пусть также функции $F(x,y)$, $F_{\xi_1}(x)$ и $F_{\xi_2}(y)$ являются интегральными функциями распределения случайного вектора $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$, случайных величин ξ_1 и соответственно ξ_2. Определить верное утверждение.

• $F_{\xi_1}(x) < \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv \right) du$.

• $F_{\xi_2}(y) > \int\limits_{-\infty}^{y} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du \right) dv$

• Пусть ξ_1 является одномерной непрерывной случайной величиной и $\xi_2 = a\xi_1 + b$, где $a < 0$, $b > 0$. Тогда (ξ_1, ξ_2) будет непрерывным случайным вектором.

• Если ξ_1 и ξ_2 являются независимыми, то $F(x,y) = = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)$.

Лекция 16

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УСЛОВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

16.1. Унифицированная вероятностная модель и условные законы распределения случайных величин

Рассмотрим снова вероятностную модель $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ статистически устойчивого эксперимента E, некоторые его количественные характеристики или случайные величины ξ_1, ξ_2 и событие $B \in \mathcal{F}$. Известно [1, 3, 4, 8–11], что при $\mathbf{P}(B) > 0$ для условного эксперимента $E_{\text{у}}$ унифицированная вероятностная модель имеет вид $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot|B))$, где условная вероятность $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$. Очевидно, что функции $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ будут случайными величинами и на условном вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot|B))$. Законы распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2, которые рассматриваются на пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot|B))$, называются условными. Например, условная интегральная функция распределения случайной величины ξ_1 относительно события $B \in \mathcal{F}$, обозначаемая $F_{\xi_1}(x|B)$, вычисляется по формуле

$$F_{\xi_1}(x|B) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x\}|B) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x\} \cap B)/\mathbf{P}(B) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x, B\})/\mathbf{P}(B).$$

Для дискретной случайной величины $\xi_1(\omega)$ при $\mathbf{P}(B) > 0$ выполняются равенства

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i\}|B) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i, B\})/\mathbf{P}(B)$$

и

$$F_{\xi_1}(x|B) = (\mathbf{P}(B))^{-1} \sum_{i\colon x_i < x} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i, B\}),$$

которые определяют ее условные законы распределения относительно события B. Если ξ_1 — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_{\xi_1}(x)$, то при $\mathbf{P}(B) > 0$ функцию $d(F_{\xi_1}(x|B))/dx$ называют условной плотностью распределения случайной величины ξ_1 относительно случайного события B и обозначают через $f_{\xi_1}(x|B)$. При $\mathbf{P}(B) > 0$ условная вероятность вида $\mathbf{P}(\cdot|B)$ на σ-алгебре $\mathcal{F}$ обладает свойствами априорной вероятности $\mathbf{P}(\cdot)$ на $\mathcal{F}$. Поэтому условные и безусловные законы распределения случайной величины имеют одинаковые свойства.

Пример 16.1. Несимметричная монета подбрасывается до первого выпадения орла с помощью некоторого механизма, обеспечивающего произвольное вращение монеты в воздухе и ее непреднамеренное падение на поверхность стола. Пусть асимметрия монеты и механизм ее подбрасывания таковы, что в каждом броске орел выпадает с вероятностью p, а решка с вероятностью $q = 1 - p$ и, наконец, появление бесконечного числа решек является невозможным событием. Найти ряд распределения числа выпадений решек, если в опыте было выполнено более k бросков.

Решение. Обозначим через ω_i при каждом фиксированном $i = 1, 2, \ldots$ описание такого элементарного исхода, когда $(i - 1)$ раз выпадает решка, а последний раз выпадает орел. Очевидно, что для этого эксперимента достоверное событие $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = \{A\colon\ A \subset \Omega\}$ — множество всех подмножеств множества Ω и, наконец, вероятность $\mathbf{P}(\{\omega_i\})$ появления произвольного элементарного исхода $\{\omega_i\}$ равна pq^{i-1}. Если теперь ξ_1 определяет случайное число выпадений решек в каждом таком опыте, то случайная величина $\xi_1(\omega_i) = i - 1$ при $i = 1, 2, \ldots$ и, следовательно, априорное распределение $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = i - 1\}) = \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = pq^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ Такое распределение в теории вероятностей называется геометрическим. Обозначим через B событие, которое заключается в том, что в опыте было выполнено более k бросков. Тогда событие $B = \{\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \ldots\} = \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) \geqslant k\}$ и $\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{i=k}^{\infty} pq^i = q^k$.
Отсюда при $i \geqslant k + 1$ получим условное распределение для ξ_1 в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = i - 1\}|\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) \geqslant k\}) = \\
&\qquad = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = i - 1, B\})/\mathbf{P}(B) = \\
&\qquad = \mathbf{P}(\{\omega_i\})/q^k = pq^{i-1}/q^k = pq^{i-1-k} = \\
&\qquad = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = i - 1 - k\}), \quad i \geqslant k + 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, условная вероятность того, что число решек окажется ровно $i - 1$, если известно, что их было не менее k, совпадает с априорной вероятностью того, что число выпадений решек будет в точности равно $i-1-k=0,1,\ldots$ Это означает, что искомая условная вероятность при заданном числе $i-1-k$ не зависит от k. Такое свойство распределения называется отсутствием последействия. На содержательном уровне можно сказать, что механизм подбрасывания монеты не запоминает число уже выпавших решек.

При использовании условных законов распределения часто приходится решать два конкретных вопроса. Во-первых, в реальных задачах далеко не всегда известна совместная интегральная функция распределения $F(x,y)$ двумерного случайного вектора (ξ_1,ξ_2). Поэтому по результатам наблюдений возникает потребность непосредственного вычисления условной интегральной функции распределения $F_{\xi_1}(x|B_y)$, $B_y=\{\omega\colon \xi_2(\omega)<y\}$, которая позволяет определить $F(x,y)$ по формуле

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega)<x,\xi_2(\omega)<y\})=\\&=\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_2(\omega)<y\})\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega)<x\}|\{\omega\colon\ \xi_2(\omega)<y\})=\\&=F_{\xi_2}(y)\times F_{\xi_1}(x|B_y).\end{aligned}$$

Во-вторых, определение условных законов распределения одной случайной величины при известных значениях другой случайной величины. Например, пусть $\xi_2(\omega)=\xi_1(\omega)+\eta(\omega)$, где ξ_2 — наблюдаемая случайная величина и η — ошибка измерения непрерывной случайной величины ξ_1. Итак, необходимо найти условные законы распределения измеряемой случайной величины ξ_1 при условии, что с помощью некоторого прибора наблюдалось значение y случайной величины ξ_2. В этом примере случайное событие $B_y=\{\omega\colon\ \xi_2(\omega)=y\}$. Перейдем к решению этой задачи.

Пусть теперь двумерная случайная величина (ξ_1,ξ_2) обладает плотностью вероятности $f(x,y)$. Если $F(x,y)$ является двумерной интегральной функцией распределения для непрерывного вектора (ξ_1,ξ_2) и событие $B_{y,\Delta y}=\{\omega\colon\ y\leqslant\xi_2(\omega)<y+\Delta y\}$, то

$$\mathbf{P}(B_{y,\Delta y})=F_{\xi_2}(y+\Delta y)-F_{\xi_2}(y),$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega)<x,y\leqslant\xi_2(\omega)<y+\Delta y\})=F(x,y+\Delta y)-F(x,y).$$

Предположим, что для $\Delta y>0$ будет $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ y\leqslant\xi_2(\omega)<y+\Delta y\})>$ >0. Отсюда при $\Delta y>0$ функция

$$\begin{aligned}F_{\xi_1}(x|B_{y,\Delta y})&=F_{\xi_1}(x|\{\omega\colon\ y\leqslant\xi_2(\omega)<y+\Delta y\})=\\&=\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1<x,y\leqslant\xi_2<y+\Delta y\})(\mathbf{P}(\{\omega\colon\ y\leqslant\xi_2<y+\Delta y\}))^{-1}=\\&=(F(x,y+\Delta y)-F(x,y))/(F_{\xi_2}(y+\Delta y)-F_{\xi_2}(y)).\end{aligned}$$

Обозначим через $F_{\xi_1}(x|y)$ предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} F_{\xi_1}(x|\{\omega\colon\ y \leqslant \xi_2(\omega) < y + \Delta y\}),$$

если он существует [9]. Тогда получим, что

$$F_{\xi_1}(x|y) = \lim_{\Delta y \to 0} \big((F(x, y+\Delta y) - F(x, y))/(F_{\xi_2}(y+\Delta y) - F_{\xi_2}(y))\big) =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \{(F(x, y + \Delta y) - F(x, y))/\Delta y\} \times$$
$$\times \lim_{\Delta y \to 0} \{(F_{\xi_2}(y + \Delta y) - F_{\xi_2}(y))/\Delta y\}^{-1} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(F(x, y))\Big(\frac{d}{dy}(F_{\xi_2}(y))\Big)^{-1} = \left(\int\limits_{-\infty}^{x} f(u, y)\, du\right)/f_{\xi_2}(y).$$

Отсюда определим условную плотность распределения $f_{\xi_1}(x|y)$ случайной величины ξ_1 относительно значения y случайной величины ξ_2:

$$f_{\xi_1}(x|y) = \frac{\partial}{\partial x}(F_{\xi_1}(x|y)) = f(x, y)/f_{\xi_2}(y) = f(x, y)/\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

Аналогичным образом получим следующие формулы для условных законов распределения случайной величины ξ_2 относительно значения x другой случайной величины ξ_1:

$$F_{\xi_2}(y|x) = \left(\int\limits_{-\infty}^{y} f(x, v)\, dv\right)/f_{\xi_1}(x),\ f_{\xi_2}(y|x) = \frac{\partial}{\partial y}(F_{\xi_2}(y|x)) =$$
$$= f(x, y)/f_{\xi_1}(x) = f(x, y)/\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy.$$

Непосредственно из этих формул получаем известную теорему умножения для плотностей: $f(x, y) = f_{\xi_2}(y) f_{\xi_1}(x|y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y|x)$. Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то $f(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y|x) = f_{\xi_2}(y) f_{\xi_1}(x|y)$, или $f_{\xi_1}(x|y) = f_{\xi_1}(x),\ f_{\xi_2}(y|x) = f_{\xi_2}(y)$.

16.2. Формула полной вероятности для несчетного числа гипотез

Понятие условной вероятности относительно событий, которые порождаются непрерывной случайной величиной, позволяет обобщить формулу полной вероятности и формулу Байеса для счетного множества гипотез на случай, когда множество гипотез имеет континуальную мощность. Пусть гипотезами являются возможные значения случайной величины ξ непрерывного типа с плотностью $f(x)$, т. е. $H_x = \{\omega\colon\ \xi(\omega) = x\}$, $x \in R$, и $\mathbf{P}(H_x) = F(x+0) - F(x) = 0$. В этом случае нельзя находить условную вероятность $\mathbf{P}(A|H_x)$ по известной формуле $\mathbf{P}(A|H_x) = \mathbf{P}(A \cap H_x)/\mathbf{P}(H_x)$, так как $\mathbf{P}(A \cap H_x) = 0$ и $\mathbf{P}(H_x) = 0$. Эту проблему можно решить, если положить, что $\mathbf{P}(A|H_x) = \mathbf{P}(A|x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \mathbf{P}(A|\{\omega\colon\ x \leqslant \xi(\omega) < x + \Delta x\})$. Далее, вычислим указанный предел следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A|x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{P}(A \cap \{\omega\colon\ x \leqslant \xi(\omega) < x + \Delta x\})}{\mathbf{P}(\{\omega\colon\ x \leqslant \xi(\omega) < x + \Delta x\})} = \\ = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{P}(A \cap \{\omega\colon\ x \leqslant \xi(\omega) < x + \Delta x\})/\Delta x\right) \times \\ \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ x \leqslant \xi(\omega) < x + \Delta x\})/\Delta x\right)^{-1} = \\ = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{P}(A \cap \{\omega\colon\ x \leqslant \xi(\omega) < x + \Delta x\})/\Delta x\right)/f(x).\end{aligned}$$

Итак, в случае существования указанных пределов получаем, что $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ A, x \leqslant \xi(\omega) < x + \Delta x\}) = \mathbf{P}(A|x')f(x')\Delta x + o(\Delta x)$, где $x' \in [x, x + \Delta x)$.

Теорема о полной вероятности для несчетного числа гипотез. *Если $\xi(\omega)$ — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, событие $A \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{P}(A|x)$ — условная вероятность события A относительно значения x случайной величины ξ, то справедлива следующая формула полной вероятности*: $\mathbf{P}(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(A|x)f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть ради простоты $\xi(\omega)$ принимает значения из интервала (a, b) при любом $\omega \in \Omega$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Тогда $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$ и $f(x) = 0$ для $x \notin (a, b)$. Разобьем интервал (a, b) на s частей следующим образом: $\Delta a_1 = a_1 - a_0$, $\Delta a_2 = a_2 - a_1, \ldots, \Delta a_s = a_s - a_{s-1}$, где $a_0 = a$, $a_s = b$, $a_i \in (a, b)$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Введем для $i = 1, 2, \ldots, s$ новые гипотезы $H_i = \{\omega\colon\ a_{i-1} \leqslant \xi(\omega) < a_i\}$. Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{s} H_i = \Omega$, и $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то для $A \in \mathcal{F}$ имеем: $A = A \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{s} H_i\right) =$

$= \bigcup\limits_{i=1}^{s}(A \cap H_i)$, $\mathbf{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{s}\mathbf{P}(H_i \cap A)$. Если $a_i' \in [a_{i-1}, a_{i-1} + \Delta a_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, s$, то, учитывая равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ A, x \leqslant \xi(\omega) < x + \Delta x\}) = \mathbf{P}(A|x')f(x')\Delta x + o(\Delta x),$$

находим

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{s}(\mathbf{P}(A|a_i')f(a_i')\Delta a_i + o(\Delta a_i)) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta a_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,s}}\left(\sum_{i=1}^{s}(\mathbf{P}(A|a_i')f(a_i')\Delta a_i + o(\Delta a_i))\right) = \int\limits_a^b \mathbf{P}(A|x)f(x)\,dx.$$

При $a = -\infty$ и $b = +\infty$, рассуждая аналогичным образом, получим: $\mathbf{P}(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}(A|x)f(x)\,dx$. Теорема доказана.

Пример 16.2. Определить вероятность обнаружения космического тела, если плотность распределения $f(x)$ расстояния ξ до него, измеряемого в километрах, равна нулю при $x \notin (100, 200)$ и равна величине 0,01 при $x \in (100, 200)$. При этом известно, что если расстояние до космического тела равно x, то вероятность его обнаружения равна $3000/x^2$.

Решение. Обозначим через A случайное событие, заключающееся в том, что станция слежения обнаружит объект. Из условия задачи вероятность $\mathbf{P}(A|\{\omega\colon \xi(\omega) = x\}) = \mathbf{P}(A|x) = 3000/x^2$. Используя формулу полной вероятности для несчетного числа гипотез, легко подсчитаем вероятность события A: $\mathbf{P}(A) = $ $= \int\limits_{100}^{200}\mathbf{P}(A|x)f(x)\,dx = \int\limits_{100}^{200}(3000/x^2) \times (1/100)\,dx = 0{,}15$.

16.3. Теорема Байеса для несчетного числа гипотез

Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и $\mathbf{P}(A) > 0$. *Тогда для условной плотности* $f(x|A)$ *непрерывной случайной величины* ξ *имеет место равенство*: $f(x|A) = (\mathbf{P}(A|x)f(x))/\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}(A|x)f(x)\,dx$.

Доказательство. Так как выполняются соотношения

$$\{\omega\colon\ \xi < x + \Delta x\} \cap A =$$
$$= (\{\omega\colon\ \xi < x\} \cap A) \cup (\{\omega\colon\ x \leqslant \xi < x + \Delta x\} \cap A),$$

$$(\{\omega\colon\ \xi < x\} \cap A) \cap (\{\omega\colon\ x \leqslant \xi < x + \Delta x\} \cap A) = \varnothing,$$

то получаем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi < x + \Delta x\} \cap A) - \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi < x\} \cap A) = \\ = \mathbf{P}(\{x \leqslant \xi < x + \Delta x\} \cap A).$$

Теперь из определений условной плотности $f(x|A)$ и условной интегральной функции $F(x|A)$ имеем равенства и формулу Байеса:

$$f(x|A) = d(F(x|A))/dx = \lim_{\Delta x \to 0}((F(x + \Delta x|A) - F(x|A))/\Delta x) = \\ = \lim_{\Delta x \to 0}(\mathbf{P}(\{\omega\colon\ x \leqslant \xi < x + \Delta x\} \cap A)/(\mathbf{P}(A)\Delta x)) = \\ = \lim_{\Delta x \to 0}(\mathbf{P}(A|x')f(x')\Delta x + o(\Delta x))/(\mathbf{P}(A)\Delta x) = \\ = \mathbf{P}(A|x)f(x)/\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|x)f(x))/\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(A|x)f(x)\,dx.$$

Пример 16.3. Плотность распределения $f(x)$ расстояния ξ, измеряемого в километрах, от станции слежения до подводной лодки равна нулю при $x \notin (500, 1000)$ и равна величине 0,002 при $x \in (500, 1000)$. Если расстояние до лодки равно x, то вероятность ее обнаружения равна $2000/x^2$. Определить условную плотность $f(x|A)$ случайной величины ξ, где случайное событие A означает обнаружение лодки станцией слежения.

Решение. Из условия этого примера $\mathbf{P}(A|\{\omega:\ \xi(\omega) = x\}) = \mathbf{P}(A|x) = 2000/x^2$. Используя формулу полной вероятности для несчетного числа гипотез, подсчитаем вероятность обнаружения станцией слежения подводной лодки:

$$\mathbf{P}(A) = \int\limits_{500}^{1000} \mathbf{P}(A|x)f(x)\,dx = \int\limits_{500}^{1000} (2000/x^2) \times (0{,}002)\,dx = 0{,}004.$$

Отсюда искомую условную плотность вероятностей $f(x|A)$ случайной величины ξ вычисляем по формуле Байеса для несчетного числа гипотез. Итак, плотность вероятностей $f(x|A)$ равна $1000/x^2$ при $x \in (500, 1000)$ и равна нулю при $x \notin (500, 1000)$. Легко получить, что

$$\int\limits_{500}^{1000} (1000/x^2)\,dx = 1,$$

и, следовательно, условие нормировки для условной плотности вероятностей $f(x|A)$ случайной величины ξ выполняется.

Тестовые вопросы к лекции 16

1. Тип — проверка ответов.

Пусть ξ и η являются дискретной и соответственно непрерывной случайными величинами, а также $\mathbf{P}(B) > 0$ для события B. Вычислите для этих случайных величин относительно B следующие условные законы распределения: 1) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}|B)$; 2) $F_\xi(x|B)$; 3) $F_\eta(x|B)$; 4) $f_\eta(x|B)$.

Ответы:

1) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}|B) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i, B\})/\mathbf{P}(B)$;

2) $F_\xi(x|B) = (\mathbf{P}(B))^{-1} \sum\limits_{i\colon x_i < x} \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i, B\})$;

3) $F_\eta(x|B) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < x, B\})/\mathbf{P}(B)$;

4) $f_\eta(x|B) = d(F_\eta(x|B))/dx$.

2. Тип — множественный выбор.

Рассматривается двумерная случайная величина (ξ, η) и вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}) > 0$. Определить верные соотношения.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}) >$
  $> \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}|\{\omega\colon \eta(\omega) < y\})$.
- $F(x, y) = F_\eta(y)F_\xi(x|\{\omega\colon \eta(\omega) < y\})$.
- $F(x, y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}|\{\omega\colon \eta(\omega) < y\})$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}) <$
  $< \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta < y\})F_\xi(x|\{\omega\colon \eta(\omega) < y\})$.

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть двумерная случайная величина (ξ, η) обладает плотностью вероятности $f(x, y)$. Определить ошибочное соотношение.

- $F_\xi(x|y) = \left(\int\limits_{-\infty}^{x} f(u, y)\, du\right)/f_\eta(y)$.
- $F_\xi(x|y) \neq \left(\int\limits_{-\infty}^{x} f(u, y)\, du\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\right)^{-1}$.
- $F_\xi(x|y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(F(x, y))\left(\dfrac{d}{dy}(F_\eta(y))\right)^{-1}$.
- $F_\xi(x|y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(F(x, y))\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\right)^{-1}$.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть двумерная случайная величина (ξ, η) обладает плотностью вероятности $f(x, y)$. Определить верные соотношения.

- $F_\eta(y|x) = \left(\int\limits_{-\infty}^{y} f(x, v)\, dv\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\right)^{-1}.$
- $F_\eta(y|x) = \dfrac{\partial}{\partial x}(F(x, y))\Big(\dfrac{d}{dx}(F_\xi(x))\Big)^{-1}.$
- $F_\eta(y|x) \neq \left(\int\limits_{-\infty}^{y} f(x, v)\, dv\right)(f_\xi(x))^{-1}.$
- $F_\eta(y|x) = \Big(\dfrac{\partial}{\partial x}(F(x, y))\Big)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\right)^{-1}.$

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть двумерная случайная величина (ξ, η) обладает плотностью вероятности $f(x, y)$. Определить неверное соотношение.

- $f_\xi(x|y) = f(x, y)/f_\eta(y).$
- $f_\xi(x|y) = f(x, y) \times \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\right)^{-1}.$
- $f_\eta(y|x) = f(x, y)/f_\xi(x).$
- $f_\eta(y|x) \neq f(x, y) \times \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\right)^{-1}.$

6. Тип — множественный выбор.

Пусть двумерная случайная величина (ξ, η) обладает плотностью вероятности $f(x, y)$. Определить верные соотношения.

- $f(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y|x).$
- $f(x, y) \neq f_\xi(x) f_\eta(y|x).$
- $f(x, y) \neq f_\eta(y) f_\xi(x|y).$
- $f(x, y) = f_\eta(y) f_\xi(x|y).$

7. Тип — одиночный выбор.

Пусть двумерная случайная величина (ξ, η) обладает плотностью вероятности $f(x, y)$. Определить ошибочное соотношение.

- $\mathbf{P}(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(A|x) f(x)\, dx.$

- $f_\xi(x|A) = f_\xi(x)\mathbf{P}(A|x)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(A|x) f_\xi(x)\, dx\right)^{-1},$

если $\mathbf{P}(A) > 0$.

- $f_\eta(y|A) = f_\eta(y)\mathbf{P}(A|y)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(A|y) f_\eta(y)\, dy\right)^{-1},$

если $\mathbf{P}(A) > 0$.

- $\mathbf{P}(A) \neq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(A|x) f(x)\, dx.$

Лекция 17

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ СЛУЧАЙНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

17.1. Постановка задачи на содержательном уровне

Выполняя с помощью различных приборов измерения элементарных исходов некоторого статистически устойчивого эксперимента, исследователь получает набор чисел. Математическим описанием этого набора чисел в простейшем случае является одномерная случайная величина или, в более сложном варианте, упорядоченное семейство одномерных случайных величин. Случайная величина, как и ее различные законы распределения (ряд, функция, плотность и т. д.), является функциональной количественной характеристикой статистически устойчивого эксперимента. Напомним, что случайная величина содержит более богатую информацию о свойствах статистически устойчивого эксперимента, чем ее законы распределения. С другой стороны, законы распределения полностью определяют случайную величину с вероятностной точки зрения. Например, знание одного из указанных законов распределения позволяет находить вероятность того, что показание прибора будет принадлежать некоторому отрезку на действительной прямой. К сожалению, на практике нам чаще всего случайная величина $\xi(\omega)$: $\Omega \to R$ и ее функция распределения $F(x)$: $R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \to [0,1]$ неизвестны. Если пространство Ω из описаний элементарных исходов содержит большое или бесконечное число элементов, то воссоздать случайную величину и ее интегральную функцию $F(x)$ непосредственно из экспериментальных наблюдений удается с большим трудом и далеко не всегда. Более того, эксперимент E может быть настолько сложен, что не ставится даже вопрос о поточечном восстановлении случайной величины и ее интегральной функции распределения.

Далее, случайная величина $\xi(\omega)$ и ее закон распределения $F(x)$ в общем случае представляют собой довольно сложные функциональные характеристики измерителей исходов статистически устойчивого эксперимента. Наконец, в ряде случаев требуется иметь только общее интегральное представление о результатах измерений. Суммируя все вышесказанное, можно утверждать, что при решении многих практических задач очень часто нет возможности или, в более простом случае, нет необходимости исчерпывающим образом характеризовать количественные свойства элементарных исходов статистически устойчивого эксперимента с помощью случайных величин и их законов распределения. Поэтому уже давно стали применять простые и удобные, но вместе с тем и достаточно информативные параметрические характеристики. Эти числовые параметры определенным образом характеризуют специальные и суммарные свойства статистически устойчивого эксперимента E. В информационном отношении числовые характеристики беднее, чем случайная величина и ее интегральная функция распределения, но зато значительно проще. Числовые характеристики случайной величины отражают наиболее важные особенности ее законов распределения [1, 3, 4, 8–11]. К числовым характеристикам случайной величины относятся такие важные константы, как математическое ожидание (среднее значение), дисперсия, среднее квадратическое отклонение (стандарт), моменты, квантили, медиана, мода, коэффициент асимметрии, эксцесс и т. д.

17.2. Математическое ожидание случайной величины

Рассмотрим пример, который поясняет на интуитивном уровне понятие о математическом ожидании или о среднем значении случайных величин с конечным множеством $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ значений. Проведем большое число N независимых испытаний эксперимента E, в каждом из которых случайная величина ξ может принять одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Согласно частотному методу приближенного вычисления вероятности события $A_k = \{\omega\colon \xi(\omega) = x_k\}$ получим, что вероятность p_k равна $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_k\}) \approx \mu(A_k, N)/N$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Здесь $\mu(A_k, N)$ показывает, сколько раз наблюдали при N испытаниях случайное событие A_k или сколько раз случайная величина ξ приняла значение x_k. При этом величина $[\mu(A_1, N)x_1 + \mu(A_2, N)x_2 + \ldots + \mu(A_m, N)x_m]/N$ определяет среднее арифметическое значений, принятых случайной величиной ξ в данной серии из N опытов. Отсюда имеем: $\sum\limits_{k=1}^{m} \mu(A_k, N)x_k/N \approx \sum\limits_{k=1}^{m} Np_k x_k/N = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k p_k$. При увеличении числа N значения среднего арифметического будут группироваться около числа $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k p_k$. Точка $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k p_k$ такова, что значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины ξ располагаются как справа, так и слева от этой точки на числовой оси. Случайная величина ξ, как правило, принимает реже те значения, которые располагаются дальше от точки $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k p_k$, и принимает чаще те значения, которые располагаются ближе к этой точке.

Рассмотрим другую интерпретацию постоянного числа $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k p_k$. Представим, что в m точках на оси абсцисс с координатами $(x_1, 0)$, $(x_2, 0), \ldots, (x_m, 0)$ сосредоточены массы некоторого вещества в количестве $p_1, p_2, \ldots, p_m$. В классической механике координата $x_{\text{ц}}$ центра масс таких материальных точек с учетом равенства $\sum\limits_{k=1}^{m} p_k = 1$ вычисляется с помощью формулы $x_{\text{ц}} = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k p_k / \sum\limits_{k=1}^{m} p_k = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k p_k$. Координата $x_{\text{ц}}$ центра масс является суммарной, или интегральной, характеристикой положения всей системы дискретного размещения материальных точек на прямой. Из этих двух примеров следует, что число $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k p_k$ может служить грубой или ориентировочной оценкой положения значений величины ξ на действительной оси. Все это оправдывает и делает понятным следующее определение.

Определение 17.1. Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число, определяемое по формуле $\mathrm{M}(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k p_k$, если число значений случайной величины конечно, и по формуле $\mathrm{M}(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, если число возможных значений дискретной случайной величины бесконечно и ряд сходится абсолютно. В противном случае считается, что математического ожидания для случайной величины ξ не существует.

Часто в обозначении $\mathrm{M}(\xi)$ опускают скобки и пишут $\mathrm{M}\xi$, если это не приводит к очевидным недоразумениям и ошибкам. Отметим, что случайная величина может и не принимать значения, равного математическому ожиданию. Например, случайная величина $I_A(\omega)$, которая является индикатором некоторого события A, принимает значение нуль с вероятностью $1 - \mathbf{P}(A)$

и единица с вероятностью $\mathbf{P}(A)$. Математическое ожидание или среднее значение $\mathrm{M}(I_A(\omega))$ для такой случайной величины равно $\mathbf{P}(A)$ и $I_A(\omega) \neq \mathbf{P}(A)$ для всех $\omega \in \Omega$ и является центром распределения.

Пример 17.1. Пусть в некотором эксперименте измеритель $\xi(\omega)$ принимает значения из множества $\{(-2)^i/i\colon i = 1, 2, \ldots\}$. Заметим, что для такой случайной величины нельзя указать ее минимальное значение. Определим распределение этой случайной величины равенствами вида

$$p_i = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = (-2)^i/i\}) = 2^{-i}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Так как $p_i > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, то семейство чисел $p_i = 1/2^i$, $i = 1, 2, \ldots$, можно считать вероятностным распределением некоторой случайной величины. Так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(-2)^i/(i2^i)| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 1/i$ является расходящимся, то математического ожидания для этой случайной величины не существует.

Определение 17.2. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины с плотностью $f_\xi(x)$ называется величина $\mathrm{M}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx$ при условии $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)\, dx < +\infty$. Если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx$ не сходится абсолютно, то математического ожидания $\mathrm{M}\xi$ не существует.

Если случайные величины $\eta(\omega)$ и $\xi(\omega)$ связаны функциональной зависимостью $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$, где функция $y = g(x)\colon R \to R$, то математическое ожидание случайной величины $\eta(\omega)$ в общем случае можно определить, используя интеграл Стилтьеса [9], по формуле

$$\mathrm{M}(\eta(\omega)) = \mathrm{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_\xi(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_{a}^{b} g(x) dF_\xi(x) =$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i')[F_\xi(u_i) - F_\xi(u_{i-1})],$$

где $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b$, $u_i' \in [u_{i-1}, u_i)$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (u_i - u_{i-1}) = 0$. При этом математическое ожидание будем определять, если интеграл Стилтьеса абсолютно сходится. В случае дискретной случайной величины ξ из свойств интеграла Стилтьеса для $\mathrm{M}(\eta(\omega))$ получаем, что $\mathrm{M}\eta = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$. Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f_\xi(x)$ имеем: $\mathrm{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_\xi(x)\,dx$. Пусть теперь $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ является двумерной случайной величиной с интегральной функцией $F(x,y)$ и случайная величина $\eta(\omega) = w(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$, где функция $z = w(x,y)$: $R^2 \to R$. Тогда математическое ожидание $\mathrm{M}\eta$ одномерной случайной величины η можно вычислить [9], используя определение и свойства многомерного интеграла Стилтьеса, по формуле $\mathrm{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x,y)dF(x,y)$, если многомерный интеграл Стилтьеса абсолютно сходится. Например, если (ξ_1, ξ_2) является дискретной двумерной случайной величиной с распределением $\{p_{ik}; i,k = 1,2,\ldots\}$, то математическое ожидание $\mathrm{M}\eta = \sum\limits_{i,k=1}^{\infty} w(x_i, y_k)p_{ik}$. Аналогично, в случае многомерной непрерывной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ с плотностью распределения $f(x,y)$ математическое ожидание $\mathrm{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x,y)f(x,y)\,dx\,dy$. В учебнике [9] дано доказательство и объяснение использования всех приведенных здесь формул. Если найдем значения и распределение $F_\eta(x)$ одномерной случайной величины $\eta(\omega)$, то математическое ожидание $\mathrm{M}\eta$ можно вычислять с использованием этой информации и приведенных ранее формул. Рассмотрим утверждения о математическом ожидании.

17.3. Свойства математического ожидания случайной величины

1. Если $\xi(\omega) \equiv \mathrm{const} = c$, то $\mathrm{M}(c) = c$. Так как величину ξ можно рассматривать как вырожденную дискретную случайную величину с распределением $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = c\}) = 1$, то $\mathrm{M}\xi = 1 \times \times c = c$.

2. Если $\mathrm{M}\xi$ существует, то $\mathrm{M}(c\xi) = c\mathrm{M}\xi$ для любой константы c. Введем случайную величину $\eta(\omega) = \psi(\xi(\omega)) = c\xi(\omega)$.

Используя свойства интеграла Стилтьеса, находим: $\mathrm{M}\eta =$ $= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} cx\,dF(x) = c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = c\mathrm{M}\xi.$

3. Если $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ существуют, то $\mathrm{M}(\xi+\eta) = \mathrm{M}\xi + \mathrm{M}\eta$. Рассмотрим двумерную случайную величину (ξ, η) с интегральной функцией $F(x,y)$ и одномерную случайную величину $\theta = \xi + \eta = w(\xi(\omega), \eta(\omega))$, где функция $z = w(x,y) = x + y$. Тогда имеем

$$\mathrm{M}(\theta(\omega)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x,y)\,dF(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x+y)\,dF(x,y) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x,y) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,dF(x,y) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dF(x,y) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dF(x,y) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_\xi(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,dF_\eta(y) = \mathrm{M}\xi + \mathrm{M}\eta.$$

4. Если ξ и η — независимые случайные величины, для которых существуют математические ожидания $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$, то имеет место мультипликативное свойство: $\mathrm{M}(\xi \times \eta) = \mathrm{M}(\xi) \times \mathrm{M}(\eta)$. Введем двумерную случайную величину (ξ, η) с интегральной функцией $F(x,y)$ и случайную величину $\theta = \xi \times \eta =$ $= w(\xi(\omega), \eta(\omega))$, где функция $z = w(x,y) = x \times y$. Тогда, используя равенство $F(x,y) = F_\xi(x) \times F_\eta(y)$ для независимых случайных величин ξ, η и свойства двумерного интеграла Стилтьеса, имеем

$$\mathrm{M}(\theta(\omega)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x,y)\,dF(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x \times y)\,dF(x,y) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x\times y)\,dF_\xi(x)\,dF_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_\xi(x) \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,dF_\eta(y) =$$
$$= \mathrm{M}(\xi) \times \mathrm{M}(\eta).$$

Рассмотрим простой пример на применение свойств математического ожидания.

Пример 17.2. Производится $n = 4$ выстрела по мишени. Вероятности попадания при первом, втором, третьем и четвертом выстрелах соответственно равны: $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}5$ и $p_4 = 0{,}7$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение. Пусть ξ_i считает число попаданий при i-м выстреле, где $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Обозначим через ξ число попаданий при четырех выстрелах, тогда $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$. Применяя свойство математического ожидания для суммы случайных величин, получим

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(\xi) &= \mathrm{M}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4) = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2 + \mathrm{M}\xi_3 + \mathrm{M}\xi_4 = \\ &= 0 \times (1 - p_1) + 1 \times p_1 + 0 \times (1 - p_2) + 1 \times p_2 + 0 \times (1 - p_3) + \\ &\quad + 1 \times p_3 + 0 \times (1 - p_4) + 1 \times p_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \\ &= 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}7 = 2{,}2.\end{aligned}$$

Для решения этой и аналогичных задач можно применять также и другой способ. Сначала необходимо построить для этого опыта вероятностную модель $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$, которая позволяет полностью описать случайную величину ξ поточечно или ее рядом распределения. Затем непосредственно вычислить математическое ожидание для дискретной случайной величины. Но такой прямой способ часто бывает чересчур громоздким при больших значениях n. Поэтому в таких задачах удобнее использовать функциональные зависимости между случайными величинами, свойства распределений случайных величин и свойства математического ожидания количественных характеристик.

Пример 17.3. Два игрока наудачу и независимым образом поочередно подбрасывают несимметричную монету до первого выпадения орла. Вероятность появления орла при одном броске равна p. Вычислить среднее число всех бросков, которое совершают игроки.

Решение. В этой игре ω_j при фиксированном $j \geqslant 1$ представляет собой описание такого элементарного исхода, когда $(j - 1)$ раз выпадает решка, а последний раз выпадает орел. Будем полагать, что в этом эксперименте выпадение только решек есть невозможное событие. Для этого опыта достоверное событие $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, а σ-алгебра $\mathcal{F} = \{A\colon\ A \subset \Omega\}$ — множество всех подмножеств множества Ω. Пусть $\xi(\omega)$ определяет число выпавших в игре решек. Легко видеть, что случайная величина $\xi(\omega_j) = j-1$, а $p_j = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = j-1\}) = pq^{j-1} > 0$ при $j \geqslant 1$ и $q = 1-p$. Так как $p_j > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_j = 1$, то $\xi(\omega)$ является дискретной случайной величиной с так называемым геометрическим распределением. Для ξ имеем

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{j=1}^{\infty}(j-1)pq^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} jpq^{j-1} - \sum_{j=1}^{\infty} pq^{j-1} = \\ = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{j=1}^{\infty} q^j\right) - 1 = p\frac{d}{dq}\Big(\frac{q}{1-q}\Big) - 1 = \\ = p(1-q)^{-1} + pq(1-q)^{-2} - 1 = q/p.$$

Если $\eta(\omega)$ определяет число всех произведенных игроками бросков, то $\eta(\omega) = \xi(\omega) + 1$ и, следовательно, $\mathrm{M}\eta = \mathrm{M}(\xi+1) = qp^{-1} + 1 = p^{-1}$. Отметим забавный факт. Если монета симметричная ($p = 1/2$), то среднее число бросков равно двум.

Тестовые вопросы к лекции 17

1. Тип — проверка ответов.

Пусть множество $\{\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\}) = r_{i,j}\colon i \in \{1,2,\ldots,n\},\ j \in \{1,2,\ldots,m\}\}$ является распределением дискретного случайного вектора $(\xi(\omega), \eta(\omega))$. Вычислить следующие математические ожидания: 1) $\mathrm{M}\xi$; 2) $\mathrm{M}\eta$; 3) $\mathrm{M}(\xi+\eta)$.

Ответы:

1) $\mathrm{M}\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{j} r_{i,j}$;

2) $\mathrm{M}\eta = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j \sum\limits_{i} r_{i,j}$;

3) $\mathrm{M}(\xi+\eta) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{j} r_{i,j} + \sum\limits_{j=1}^{m} y_j \sum\limits_{i} r_{i,j}$.

2. Тип — множественный выбор.

Пусть множество $\{\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}) = p_i\colon i = 1,2,\ldots\}$ является распределением дискретной случайной величины $\xi(\omega)$. Определить ошибочные соотношения.

- $\mathrm{M}\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, если ряд сходится абсолютно.

- $\mathrm{M}\xi < \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, если ряд не сходится абсолютно.
- $\mathrm{M}\xi > \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, если ряд сходится абсолютно.
- $\mathrm{M}\xi \neq \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, если ряд не сходится абсолютно.

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть $f(x)$ является плотностью распределения непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$. Определить верное соотношение для случайной величины ξ.

- $\mathrm{M}\xi \neq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$ при $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)\,dx < +\infty$.
- $\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$ при $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)\,dx < +\infty$.
- $\mathrm{M}\xi > \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$ при $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)\,dx < +\infty$.
- $\mathrm{M}\xi < \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$ при $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)\,dx = +\infty$.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть функция $z = w(x,y)$: $R^2 \to R$ и $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ является дискретной двумерной величиной $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ с распределением p_{ik}, $i,k = 1,2,\ldots$ Определить ошибочные соотношения для $\eta(\omega) = w(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$.

- $\mathrm{M}(\eta(\omega)) > \sum\limits_{i,k=1}^{\infty} w(x_i,y_k)p_{ik}$, если $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} |w(x_i,y_k)|p_{ik} < +\infty$.
- $\mathrm{M}(\eta(\omega)) = \sum\limits_{i,k=1}^{\infty} w(x_i,y_k)p_{ik}$, если $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} |w(x_i,y_k)|p_{ik} < +\infty$.
- $\mathrm{M}(\eta(\omega)) < \sum\limits_{i,k=1}^{\infty} w(x_i,y_k)p_{ik}$, если $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} |w(x_i,y_k)|p_{ik} < +\infty$.
- $\mathrm{M}(\eta(\omega)) \neq \sum\limits_{i,k=1}^{\infty} w(x_i,y_k)p_{ik}$, если $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} |w(x_i,y_k)|p_{ik} < +\infty$.

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть функция $z = w(x,y)$: $R^2 \to R$ и $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ является непрерывной двумерной случайной величиной $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$

с плотностью распределения $f(x, y)$. Определить справедливое соотношение для случайной величины $\eta(\omega) = w(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$.

- $\mathrm{M}(\eta(\omega)) < \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$

  если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |w(x_i, y_k)| f(x, y)\, dx\, dy < +\infty.$
- $\mathrm{M}(\eta(\omega)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$

  если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |w(x_i, y_k)| f(x, y)\, dx\, dy < +\infty.$
- $\mathrm{M}(\eta(\omega)) \neq \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$

  если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |w(x_i, y_k)| f(x, y)\, dx\, dy < +\infty.$
- $\mathrm{M}(\eta(\omega)) > \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$

  если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |w(x_i, y_k)| f(x, y)\, dx\, dy < +\infty.$

6. Тип — многозначный выбор.

Пусть $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ принимают числовые значения. Определить верные соотношения.

- $\mathrm{M}(c\xi) = c\mathrm{M}\xi$.
- $\mathrm{M}(c\xi) = c^2\mathrm{M}\xi$.
- $\mathrm{M}(\xi + \eta) = \mathrm{M}\xi + \mathrm{M}\eta$.
- $\mathrm{M}(\xi - \eta) = \mathrm{M}\xi - \mathrm{M}\eta$.

7. Тип — одиночный выбор.

Пусть ξ и η являются независимыми случайными величинами, для которых $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ принимают числовые значения. Определить верное утверждение.

- $\mathrm{M}(\xi\eta) \neq \mathrm{M}(\xi) \times \mathrm{M}(\eta)$.
- $\mathrm{M}(\xi\eta) > \mathrm{M}(\xi) \times \mathrm{M}(\eta)$.
- $\mathrm{M}(\xi\eta) = \mathrm{M}(\xi) \times \mathrm{M}(\eta)$.
- $\mathrm{M}(\xi\eta) < \mathrm{M}(\xi) \times \mathrm{M}(\eta)$.

Лекция 18

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТЕПЕНИ РАЗБРОСА ОДНОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

18.1. Дисперсия случайной величины и ее свойства

Математическое ожидание представляет собой числовую характеристику положения случайной величины, отвечает за некоторые типичные значения случайной величины и определяет некоторую точку на оси абсцисс, относительно которой происходит ее рассеивание. Однако значение математического ожидания ничего не говорит о величине этого рассеивания. Может оказаться, что случайные величины имеют одинаковое математическое ожидание, но разные законы распределения. Такие случайные величины иногда можно различить по тому, как далеко и с какой вероятностью каждая из них отклоняется от математического ожидания.

Пример 18.1. Имеется два типа акций. Некто имеет возможность купить только одну акцию. Акции первого типа стоят 100 рублей, а второго — 100 000 рублей. По истечении некоторого времени некто с равной вероятностью получает доход в 10 процентов от стоимости акции или стоимость его акции уменьшается на 10 процентов. Необходимо на содержательном уровне выяснить, какой из двух типов акций следует предпочесть в случае покупки таковой. Обозначим через ξ_1 и через ξ_2 случайный доход от покупки акции первого и соответственно второго типа. Из условий задачи вычислим, что $\mathrm{M}\xi_1 = (-10) \times (1/2) + (10) \times (1/2) = 0$ и $\mathrm{M}\xi_2 = (-10\,000) \times \times (1/2) + (10\,000) \times (1/2) = 0$. Итак, математическое ожидание доходности от покупки каждого типа акций одинаковое. Однако не каждый рискнет с вероятностью 0,5 потерять 10 000 рублей из своего актива в результате покупки акции второго типа.

Перейдем к рассмотрению важнейших характеристик рассеивания (или разброса) случайной величины [1, 3, 4, 8–11]. Для характеристики рассеивания рассмотрим разность $\overset{\circ}{\xi} = \xi - \mathrm{M}\xi$, которая называется центрированной случайной величиной.

Так как $\mathrm{M}\overset{\circ}{\xi} = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi) = 0$, то $\mathrm{M}\overset{\circ}{\xi}$ не может служить характеристикой степени рассеивания или разброса.

Определение 18.1. Дисперсией случайной величины ξ или характеристикой степени разброса возможных значений случайной величины около ее математического ожидания называется величина $\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2$, которая обозначается $\mathrm{D}(\xi)$ или, ради простоты, $\mathrm{D}\xi$.

Здесь предполагается, что математическое ожидание $\mathrm{M}\xi$ существует. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Поэтому часто для удобства в качестве меры разброса рассматривают среднее квадратичное отклонение (стандарт) $\sigma(\xi) = (\mathrm{D}\xi)^{1/2}$ случайной величины, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины.

Пример 18.2. Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение числа ξ появлений решки монеты в одном испытании, если вероятность появления решки равна p. Так как случайная величина ξ принимает значение единица с вероятностью p и нуль с вероятностью $q = 1 - p$, то $\mathrm{M}\xi = p$, $\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - p)^2 = \mathrm{M}(\xi^2 - 2p\xi + p^2) = \mathrm{M}\xi^2 - 2p\mathrm{M}\xi + p^2 = \mathrm{M}\xi^2 - p^2 = 0^2(1 - p) + 1^2 p - p^2 = p(1 - p) = pq$. Среднее квадратическое отклонение для рассматриваемой случайной величины ξ равно $\sigma(\xi) = (\mathrm{D}\xi)^{1/2} = (pq)^{1/2}$.

Рассмотрим теперь свойства дисперсии.

1. Дисперсия $\mathrm{D}(c)$ константы равна нулю. Имеем: $\mathrm{D}(c) = \mathrm{M}(c - \mathrm{M}c)^2 = \mathrm{M}(c - c)^2 = 0$.

2. Дисперсия $\mathrm{D}(c\xi) = c^2 D\xi$. В самом деле имеем равенства $\mathrm{D}(c\xi) = \mathrm{M}(c\xi - \mathrm{M}(c\xi))^2 = c^2\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = c^2\mathrm{D}\xi$.

Так как $\sigma(\xi) = (\mathrm{D}\xi)^{1/2}$ и $\mathrm{D}(c\xi) = c^2\mathrm{D}\xi$, то, извлекая арифметический корень из обеих частей последнего равенства, получим: $\sigma(c\xi) = |c|\sigma(\xi)$.

3. Если ξ_1 и ξ_2 независимы и существуют математические ожидания $\mathrm{M}\xi_1$ и $\mathrm{M}\xi_2$, то $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2$. Найдем

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) &= \mathrm{M}\{(\xi_1 + \xi_2) - \mathrm{M}(\xi_1 + \xi_2)\}^2 = \\ &= \mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)^2) + 2\mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)) + \mathrm{M}((\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)^2) = \\ &= \mathrm{D}(\xi_1) + \mathrm{D}(\xi_2) + 2\mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)).\end{aligned}$$

Поскольку случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то центрированные случайные величины $\overset{\circ}{\xi} = \xi_1 - \mathrm{M}\xi_1$ и $\overset{\circ}{\xi} = \xi_2 - \mathrm{M}\xi_2$ тоже независимы. Итак, $\mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)) = \mathrm{M}(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1) \times$

$\times\, \mathrm{M}(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2) = 0$. Поэтому $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}(\xi_1) + \mathrm{D}(\xi_2)$, что и требовалось доказать.

4. Дисперсия $\mathrm{D}(\xi) \geqslant 0$. Так как $(x - \mathrm{M}\xi)^2 \geqslant 0$ и всякое приращение $dF(x) \geqslant 0$, поскольку $F(x)$ — неубывающая функция, то дисперсия $\mathrm{D}(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}(\xi))^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi)^2 dF(x) \geqslant 0$.

5. Математическое ожидание $\mathrm{M}(\overline{\xi}) = 0$ и дисперсия $\mathrm{D}(\overline{\xi}) = 1$, где $\overline{\xi} = (\xi - \mathrm{M}\xi)/\sigma(\xi)$ представляет собой центрированную и нормированную случайную величину, соответствующую величине ξ. Легко находим

$$\mathrm{M}(\overline{\xi}) = (1/\sigma(\xi))\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi) = 0,$$

$$\mathrm{D}(\overline{\xi}) = \mathrm{D}((\xi - \mathrm{M}\xi)/\sigma(\xi)) = (1/\sigma^2(\xi))\mathrm{D}(\xi - \mathrm{M}\xi) = (1/\mathrm{D}\xi)\mathrm{D}(\xi) = 1.$$

18.2. Формулы для вычисления дисперсии случайной величины

Поскольку дисперсия $\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi)^2 dF(x)$ для смешанной случайной величины ξ, то дисперсия $\mathrm{D}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi)^2 f_\xi(x)\, dx$ для непрерывной случайной величины ξ и $\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathrm{M}\xi)^2 p_i$ для дискретной случайной величины ξ. Если интеграл Стилтьеса, или интеграл Римана, или ряд расходятся, то случайная величина ξ не имеет конечной дисперсии. Для примера 18.2, используя последнюю формулу, получим, что $\mathrm{D}\xi = (0 - p)^2(1 - p) + (1 - p)^2 p = pq$.

Установим еще одну формулу для вычисления дисперсии и минимальное свойство математического ожидания. Легко получим, что дисперсия $\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}((\xi - \mathrm{M}\xi)^2) = \mathrm{M}(\xi^2) - 2(\mathrm{M}\xi)^2 + (\mathrm{M}\xi)^2 = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2$. Так как $\mathrm{D}\xi \geqslant 0$, то $\mathrm{M}(\xi^2) \geqslant (\mathrm{M}\xi)^2$. Покажем теперь, что имеет место неравенство $\mathrm{M}((\xi - \mathrm{M}\xi)^2) \leqslant \mathrm{M}((\xi - c)^2)$ для любого числа c. Из равенства $\mathrm{M}(\xi - c)^2 = \mathrm{M}(\xi^2) - 2c\mathrm{M}\xi + c^2$ и цепочки эквивалентных неравенств

$$0 \leqslant (c - \mathrm{M}\xi)^2, \quad 0 \leqslant (\mathrm{M}\xi)^2 - 2c\mathrm{M}\xi + c^2,$$

$$\mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2 \leqslant \mathrm{M}(\xi^2) - 2c\mathrm{M}\xi + c^2$$

выводим неравенство $\mathrm{M}((\xi - \mathrm{M}\xi)^2) \leqslant \mathrm{M}((\xi - c)^2)$. Минимальное свойство математического ожидания позволяет дать следующую рекомендацию. Пусть $\mathrm{M}\xi$ известно и в процессе эксперимента мы не можем определить значения случайной величины ξ. Чтобы совершить минимальную среднеквадратическую ошибку $\mathrm{M}(\xi - c)^2$ при замене или при прогнозе величины ξ на константу c, в качестве константы следует брать $\mathrm{M}\xi$.

Теорема 18.1. *Для любой случайной величины ξ и любого $\varepsilon > 0$ справедливо первое неравенство Чебышева*:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\, |\xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mathrm{M}(\xi^2)/\varepsilon^2.$$

Доказательство. Введем дискретную случайную величину $\eta(\omega)$, которая равна нулю при $\omega \in \{\omega\colon\, |\xi(\omega)| < \varepsilon\}$ и равна ε при $|\xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}$. Тогда $\mathrm{M}(\eta^2) = \varepsilon^2\mathbf{P}(\{\omega\colon\, |\xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\})$. Так как $\xi^2 \geqslant \eta^2$, то $\mathrm{M}(\xi^2) \geqslant \mathrm{M}(\eta^2)$ и $\mathrm{M}(\xi^2) \geqslant \varepsilon^2\mathbf{P}(\{\omega\colon\, |\xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\})$. Теорема 18.1 доказана.

Теорема 18.2. *Если существует конечное математическое ожидание* $\mathrm{M}\xi$, *то для ξ и любого $\varepsilon > 0$ справедливо второе неравенство Чебышева*:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\, |\xi - \mathrm{M}\xi| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mathrm{D}(\xi)/\varepsilon^2.$$

Доказательство. Применяя первое неравенство Чебышева для центрированной случайной величины $\overset{\circ}{\xi} = \xi - \mathrm{M}\xi$, получим: $\mathbf{P}(|\overset{\circ}{\xi}| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mathrm{M}((\overset{\circ}{\xi})^2)/\varepsilon^2$, или, иначе, $\mathbf{P}(|\overset{\circ}{\xi}| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant$ $\leqslant \mathrm{D}(\overset{\circ}{\xi})/\varepsilon^2$. Так как $\mathrm{D}(\overset{\circ}{\xi}) = \mathrm{D}(\xi)$, то $\mathbf{P}(|\xi - \mathrm{M}\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-2}\mathrm{D}(\xi)$, что и требовалось доказать.

Таковы оценки сверху для произвольного закона распределения случайной величины ξ, имеющей конечные математическое ожидание и дисперсию. В теории вероятностей широко используется первое и второе неравенства Чебышева. Однако при $\varepsilon \leqslant \sigma$ получаем $\varepsilon^{-2}\mathrm{D}(\xi) \geqslant 1$ и второе неравенство Чебышева дает тривиальную оценку $\mathbf{P}(|\xi - \mathrm{M}\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant 1$. Поэтому второе неравенство Чебышева применяют при $\varepsilon > \sigma$. Для многих случайных величин оценки, которые получаются с помощью первого и второго неравенств Чебышева, являются грубыми. Например, рассмотрим случайную величину ξ, которая принимает значение -2 с вероятностью 0,5 и значение $+2$ с вероятностью 0,5. Так как $\mathrm{M}\xi = 0$, $\sigma\xi = 2$ и событие $\{\omega\colon\, |\xi| = 2\} = \Omega$, то $\mathbf{P}(\{\omega\colon\, |\xi| \geqslant 3\sigma\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\, |\xi| \geqslant 6\}) = 0$. Второе неравенство Чебышева дает следующую оценку: $\mathbf{P}(|\xi - \mathrm{M}\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant 1/9$, что демонстрирует грубость полученной оценки. С другой стороны, при $\varepsilon = 2$ вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi| \geqslant 2\}) \leqslant \mathrm{D}\xi/\varepsilon^2 = 1$, и эту оценку улучшить нельзя, так как вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi| \geqslant 2\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi| = 2\}) = 1$.

18.3. Начальные и центральные моменты k-го порядка

На практике очень часто вводят числовые характеристики случайной величины, которые учитывают влияние тех ее значений, которые маловероятны, но имеют большую абсолютную величину. Кроме того, с помощью этих характеристик определяют некоторые специфические свойства законов распределения, например асимметрию плотности распределения для непрерывной случайной величины. Эти характеристики называют начальными и центральными моментами случайной величины.

Определение 18.2. Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание k-й степени случайной величины, он обозначается $\alpha_k(\xi)$ или, ради простоты, $\alpha_k\xi$, т. е. $\alpha_k\xi = \mathrm{M}(\xi^k) = \mathrm{M}(g(\xi))$, где $g(\xi) = \xi^k$ и $k = 0, 1, \ldots$

Нетрудно видеть, что $\alpha_0(\xi) = \mathrm{M}(\xi^0) = \mathrm{M}(1) = 1$ и $\alpha_1(\xi) = \mathrm{M}(\xi^1) = \mathrm{M}(\xi)$. При $k \geqslant 2$ получим новые числовые характеристики случайной величины. Для дискретных и непрерывных случайных величин получаем формулы $\alpha_k(\xi) = \mathrm{M}(\xi^k) = \sum\limits_i (x_i)^k p_i$ и $\alpha_k(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx$, $k = 0, 1, \ldots$ В общем случае начальный момент k-го порядка вычисляется при помощи интеграла Стилтьеса, т. е. $\alpha_k\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k\, dF(x)$. При этом приведенные здесь ряд и интегралы должны абсолютно сходиться. В противном случае начальные моменты или не существуют, или не имеют конечного значения.

На примере дискретной случайной величины проиллюстрируем причину введения начальных моментов. Так как $\sum\limits_i p_i = 1$, то $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = 0$. Поэтому при подсчете математического ожидания $\mathrm{M}\xi = \sum\limits_i x_i p_i = \sum\limits_{i\leqslant n} x_i p_i + \sum\limits_{i>n} x_i p_i$ остаток ряда $\sum\limits_{i>n} x_i p_i$ для некоторых случайных величин может принимать маленькое значение за счет небольших значений вероятностей p_i при $i > n$.

Для того чтобы учесть большие по абсолютной величине значения величины ξ, и вводятся начальные моменты, при вычислении которых значения случайной величины возводятся в k-ю степень. При этом число k может быть выбрано достаточно большим. Часто говорят, что начальные моменты учитывают «хвосты» случайных величин ξ.

Если математическое ожидание случайной величины ξ принимает конечное значение, то наряду с начальными моментами рассматривают семейство новых вспомогательных числовых характеристик, которые называются центральными моментами k-го порядка.

Определение 18.3. Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ при $|\mathrm{M}\xi| < \infty$ называется математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины от ее математического ожидания, он обозначается $\beta_k(\xi)$ или $\beta_k\xi$, где $k = 0, 1, \ldots$

Итак, $\beta_k(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^k$. Легко найти, что $\beta_0(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^0 = 1$, $\beta_1(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^1 = 0$ для любой случайной величины и центральный момент второго порядка $\beta_2(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = D\xi$. При $k \geqslant 3$ имеем новые числовые характеристики случайной величины. Эти числовые характеристики ввели для учета «хвостов» отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Начальные моменты выражаются через центральные моменты, и наоборот:

$$\alpha_k\xi = \mathrm{M}(\xi^k) = \mathrm{M}\big[((\xi - \mathrm{M}\xi) + \mathrm{M}\xi)^k\big] = \\ = \mathrm{M}\left[\sum_{r=0}^{k} C_k^r(\xi - \mathrm{M}\xi)^r(\mathrm{M}\xi)^{k-r}\right] = \sum_{r=0}^{k} C_k^r(\mathrm{M}\xi)^{k-r}\mathrm{M}\big[(\xi - \mathrm{M}\xi)^r\big] = \\ = \sum_{r=0}^{k} C_k^r(\alpha_1\xi)^{k-r}\beta_r\xi,$$

$$\beta_k(\xi) = \mathrm{M}\big[(\xi - \mathrm{M}\xi)^k\big] = \mathrm{M}\big[\{\xi + (-\mathrm{M}\xi)\}^k\big] = \\ = \mathrm{M}\left(\sum_{r=0}^{k} C_k^r\xi^r(-\mathrm{M}\xi)^{k-r}\right) = \sum_{r=0}^{k} C_k^r(-1)^{k-r}(\mathrm{M}\xi)^{k-r}\mathrm{M}(\xi^r) = \\ = \sum_{r=0}^{k} C_k^r(-1)^{k-r}(\alpha_1\xi)^{k-r}\alpha_r\xi.$$

Пример 18.3. Для непрерывной случайной величины Лапласа плотность вероятности $f(x) = 2^{-1}\exp\{-|x-a|\}$ для всех $-\infty < x < +\infty$, где a есть постоянная величина и $-\infty < a < < +\infty$. На рис. 18.1 изображена функция $f(x)$. Найти центральные моменты $\beta_{2k}(\xi)$ случайной величины ξ.

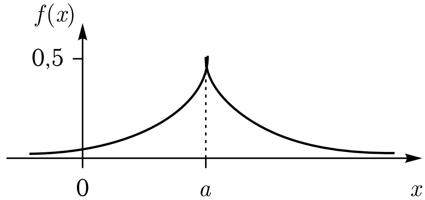


Рис. 18.1

Решение. Математическое ожидание

$$\mathrm{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x2^{-1}\exp\{-|x-a|\}\,dx =$$
$$= 2^{-1}\int_{-\infty}^{0}(t+a)\,\mathrm{e}^t\,dt + 2^{-1}\int_{-\infty}^{0}(a-t)\,\mathrm{e}^t dt = \int_{-\infty}^{0} a\,\mathrm{e}^t\,dt = a.$$

Поэтому центральный момент четного порядка $\beta_{2k}\xi$ равен

$$2^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathrm{M}\xi)^{2k}\,\mathrm{e}^{-|x-a|}\,dx =$$
$$= 2^{-1}\int_{-\infty}^{a}(x-a)^{2k}\,\mathrm{e}^{x-a}\,dx + 2^{-1}\int_{a}^{+\infty}(x-a)^{2k}\,\mathrm{e}^{a-x}\,dx =$$
$$= 2^{-1}\int_{-\infty}^{0} t^{2k}\,\mathrm{e}^t\,dt + 2^{-1}\int_{-\infty}^{0} t^{2k}\,\mathrm{e}^t\,dt = \int_{-\infty}^{0} t^{2k}\,\mathrm{e}^t\,dt =$$
$$= \mathrm{e}^t\big[t^{2k} - 2kt^{2k-1} + 2k(2k-1)t^{2-2} - \ldots + (2k)!\big]_{-\infty}^{0} = (2k)!$$

Отсюда дисперсия $\mathrm{D}\xi$ этой случайной величины равна $\beta_2\xi = = 2$, а стандарт $\sigma\xi = 2^{1/2}$. Будем говорить, что случайная величина ξ распределена по закону Лапласа.

Тестовые вопросы к лекции 18

1. Тип — проверка ответов.

Пусть ξ фиксирует число появлений очков «одноглазковой» грани игральной кости в одном испытании. Вычислить: 1) $\mathrm{M}\xi$; 2) $\mathrm{D}\xi$; 3) $\sigma\xi$.

Ответы:

1) $\mathrm{M}\xi = 1/6$;

2) $\mathrm{D}\xi = 5/36$;

3) $\sigma\xi = \sqrt{5}/6$.

2. Тип — одиночный выбор.

Рассматривается дискретная величина $\xi(\omega)$ с конечным $\mathrm{M}\xi$, для которой $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}) = p_i$: $i = 1, 2, \ldots$ Определить верное соотношение.

- $\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - \mathrm{M}\xi)p_i$.
- $\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - \mathrm{M}\xi)^2 p_i$.
- $\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - \mathrm{M}\xi)^3 p_i$.
- $\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i)^2 p_i$.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является случайной величиной с плотностью вероятностей $f(x)$ и конечным математическим ожиданием. Определить ошибочные соотношения.

- $\mathrm{D}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi)^2 f_\xi(x)\,dx$.
- $\mathrm{D}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi) f_\xi(x)\,dx$.
- $\mathrm{D}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x - \mathrm{M}\xi| f_\xi(x)\,dx$.
- $\mathrm{D}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi)^3 f_\xi(x)\,dx$.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является случайной величиной с конечным математическим ожиданием. Определить верное соотношение.

- $\mathrm{D}(c\xi) = |c|\mathrm{D}\xi$.
- $\mathrm{D}(\xi) \geqslant 0$.
- $\sigma(c\xi) = c\sigma(\xi)$.
- $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2$, если существуют математические ожидания $\mathrm{M}\xi_1$ и $\mathrm{M}\xi_2$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является случайной величиной с конечным математическим ожиданием. Определить верные соотношения.

- $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) = \mathrm{M}(\xi^2)/\varepsilon^2$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi - \mathrm{M}\xi| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mathrm{D}(\xi)/\varepsilon^2$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mathrm{M}(\xi^2)/\varepsilon^2$.
- $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi - \mathrm{M}\xi| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \mathrm{D}(\xi)/\varepsilon^2$.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\alpha_k(\xi)$ является начальным моментом k-го порядка случайной величины $\xi(\omega)$. Определить верное соотношение.

- $\alpha_0(\xi) = 0$.
- $\alpha_1(\xi) = 1$.
- $\alpha_k(\xi) = \sum\limits_i (x_i)^k p_i$ для дискретной случайной величины ξ, если $\sum\limits_i |(x_i)^k| p_i < +\infty$.
- $\alpha_k(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x^k| f(x)\, dx$ для величины ξ.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $\beta_k(\xi)$ является центральным моментом k-го порядка величины $\xi(\omega)$ с конечным математическим ожиданием. Определить верные соотношения.

- $\beta_1(\xi) = 1$.
- $\beta_2(\xi) = \mathrm{D}\xi$.
- $\alpha_k(\xi) = \sum\limits_{r=0}^{k} C_k^r (\alpha_1\xi)^{k-r} \beta_r(\xi)$.
- $\beta_k(\xi) = \sum\limits_{r=0}^{k} C_k^r (-1)^{k-r} (\alpha_1\xi)^{k-r} \times \alpha_r(\xi)$.

Лекция 19

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

19.1. Коэффициент асимметрии, эксцесс

На практике часто вводят так называемые вспомогательные числовые характеристики случайных величин [1, 3, 4, 8–11]. К вспомогательным числовым характеристикам прежде всего относятся начальные и центральные моменты случайной величины. Центральные моменты третьего и четвертого порядка позволяют ввести также такие вспомогательные характеристики, как коэффициент асимметрии и эксцесс случайных величин. Когда распределение случайной величины симметрично относительно ее математического ожидания, то легко видеть, что центральные моменты нечетного порядка (если они конечны) равны нулю. В качестве примера покажем это для непрерывной случайной величины с плотностью $f(x)$. Учитывая равенство $f(\mathrm{M}\xi - x) = f(\mathrm{M}\xi + x)$ при $-\infty < x < +\infty$, легко получим соотношения

$$\beta_{2k+1}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi)^{2k+1} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\mathrm{M}\xi} (x - \mathrm{M}\xi)^{2k+1} f(x)\,dx + \int\limits_{\mathrm{M}\xi}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi)^{2k+1} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} t^{2k+1} f(\mathrm{M}\xi + t)\,dt + \int\limits_{0}^{+\infty} t^{2k+1} f(\mathrm{M}\xi + t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_{0}^{-\infty} t^{2k+1} f(\mathrm{M}\xi + t)\,dt + \int\limits_{0}^{+\infty} t^{2k+1} f(\mathrm{M}\xi + t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} u^{2k+1} f(\mathrm{M}\xi - u)\,du + \int\limits_0^{+\infty} t^{2k+1} f(\mathrm{M}\xi + t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} u^{2k+1} f(\mathrm{M}\xi + u)\,du + \int\limits_0^{+\infty} t^{2k+1} f(\mathrm{M}\xi + t)\,dt = 0.$$

Например, центральные моменты нечетного порядка для случайной величины, распределенной по закону Лапласа, равны нулю. В силу этого на практике вводят характеристику, которая отвечает за симметрию распределения случайной величины ξ.

Определение 19.1. Величина $\mathrm{Ka}(\xi) = \beta_3\xi/(\sigma\xi)^3$ называется коэффициентом асимметрии случайной величины ξ, ради сокращения записи ее часто обозначают $\mathrm{Ka}\xi$.

Выясним смысл коэффициента асимметрии $\mathrm{Ka}\xi$ на содержательном уровне. Если $\mathrm{Ka}\xi = 0$, то распределение случайной величины, как правило, симметрично относительно ее математического ожидания. При $\mathrm{Ka}\xi < 0$ случайная величина чаще принимает значения, расположенные близко от $\mathrm{M}\xi$ справа, нежели близкие к $\mathrm{M}\xi$ слева. Однако ξ чаще принимает значения, близкие к $\mathrm{M}\xi$ слева, нежели справа. Такая асимметрия для непрерывной случайной величины отображена на рис. 19.1, *а* и называется отрицательной. Если $\mathrm{Ka}\xi > 0$, то это означает, что случайная величина реже принимает далекие и расположенные слева от $\mathrm{M}\xi$ значения, чем далекие и расположенные справа от $\mathrm{M}\xi$ значения. С другой стороны, случайная величина ξ чаще принимает близкие слева от $\mathrm{M}\xi$ значения, нежели близкие справа от $\mathrm{M}\xi$ значения. Такая асимметрия для непрерывной случайной величины представлена на рис. 19.1, *б* и называется положительной.

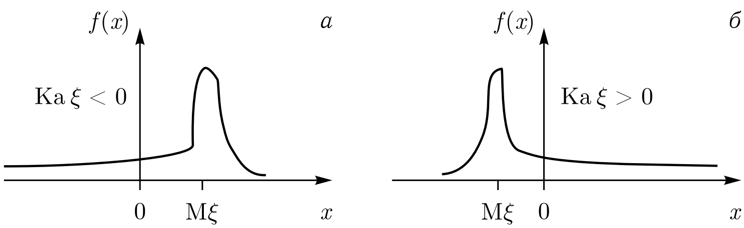


Рис. 19.1

Определение 19.2. Эксцессом случайной величины ξ называют числовую характеристику, равную $(\sigma\xi)^{-4}\beta_4\xi^4 - 3$ и обозначаемую $\text{Э}(\xi)$ или, ради простоты записи, $\text{Э}\xi$.

На содержательном уровне эксцесс характеризует крутизну наклона, или «островершинность», многоугольника распределения для дискретной случайной величины ξ и кривой распределения $f(x)$ для непрерывной случайной величины ξ в окрестности наивероятнейшего значения.

19.2. Квантиль порядка p $(0 < p < 1)$ и медиана

Значение математического ожидания $\mathrm{M}\xi$ и значения случайной величины ξ отмечаются точками на одной и той же действительной оси. При этом точки, которые соответствуют различным значениям случайной величины ξ, расположены как слева, так и справа от точки с абсциссой $\mathrm{M}\xi$. Можно сказать, что математическое ожидание является типичным представителем множества значений случайной величины. Поэтому математическое ожидание называют характеристикой положения случайной величины. Если математического ожидания не существует или $|\mathrm{M}\xi| = \infty$, то рассматривают другие характеристики положения случайной величины ξ. Такими характеристиками, например, являются квантиль порядка p $(0 < p < 1)$, медиана и мода.

Определение 19.3. Квантилем порядка p $(0 < p < 1)$ случайной величины ξ называется такое число $\mathrm{K}_p\xi$, для которого имеет место соотношение $F(\mathrm{K}_p\xi) \leqslant p \leqslant F(\mathrm{K}_p\xi + 0)$.

Интегральная функция $F(x)$ является неубывающей и принимает все значения от нуля до единицы. Поэтому существует по крайней мере одно такое конечное число $\mathrm{K}_p\xi$, для которого $F(\mathrm{K}_p\xi) \leqslant p$ и $F(\mathrm{K}_p\xi + 0) \geqslant p$. На содержательном уровне выполнение этих неравенств означает, что интегральная функция распределения $F(x)$ в точке с абсциссой $\mathrm{K}_p\xi$ скачкообразно или непрерывно переходит от значений, не бо́льших p, к значениям, не меньшим p. Если условия $F(\mathrm{K}_p\xi) \leqslant p$, $F(\mathrm{K}_p\xi + 0) \geqslant p$ записать в виде

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < \mathrm{K}_p\xi\}) \leqslant p, \quad \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) > \mathrm{K}_p\xi\}) \leqslant 1 - p,$$

то число $\mathrm{K}_p\xi$ можно назвать характеристикой положения величины ξ. На рис. 19.2 представлен график $F(x)$ некоторой случайной величины ξ.

Можно сказать, что значения случайной величины ξ располагаются левее точки с абсциссой $\mathrm{K}_p\xi$ с вероятностью не больше p и располагаются правее этой же точки с вероятностью не больше $1 - p$. В точках разрыва $x = 0$ и $x = 2$ функция $F(x)$ принимает значения нуль и q соответственно, а $F(2 + 0) = r$. Решая неравенства $F(\mathrm{K}_p\xi) \leqslant p$, $F(\mathrm{K}_p\xi + 0) \geqslant p$ и используя при этом рис. 19.2, легко получим, что p-квантиль случайной

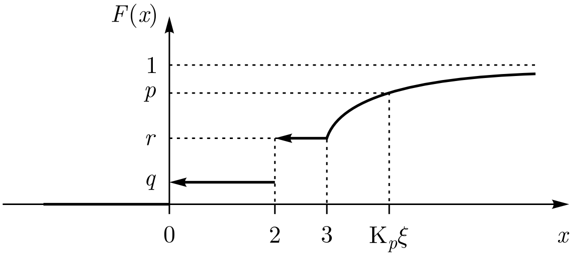


Рис. 19.2

величины ξ: 1) равен нулю при $0 < p < q$; 2) равен любому числу $\mathrm{K}_p\xi$, где $0 \leqslant \mathrm{K}_p\xi \leqslant 2$, при $p = q$; 3) равен двум при $q < p < r$; 4) равен любому числу $\mathrm{K}_p\xi$, где $2 \leqslant \mathrm{K}_p\xi \leqslant 3$, при $p = r$. Наконец, p-квантиль случайной величины ξ при $r < p < 1$ равен $\mathrm{K}_p\xi$, где число $\mathrm{K}_p\xi$ — единственное решение уравнения $F(\mathrm{K}_p\xi) = p$. Итак, квантили существуют для любой случайной величины. При этом некоторые квантили могут совпадать для различных значений p, а некоторые определяются неоднозначно. Если интегральная функция $F(x)$ является непрерывной и строго монотонной, то $\mathrm{K}_p\xi$ есть однозначная функция p, обратная функции $F(x)$. Набор квантилей для семейства $\{0{,}01;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}99\}$ значений p дает наглядное представление об интегральной функции распределения с достаточной степенью точности. Чаще всего используется значение p, равное 0,5. В связи с этим разумно дать следующее определение.

Определение 19.4. Медианой случайной величины ξ, которая обозначается $\mathrm{Me}(\xi)$ или, ради упрощения, $\mathrm{Me}\xi$, называется квантиль порядка $p = 0{,}5$, т. е. $\mathrm{Me}\xi = \mathrm{K}_{1/2}\xi$.

Медиана $\mathrm{Me}\xi$ случайной величины ξ всегда существует, иногда может быть определена неоднозначно. Медиана $\mathrm{Me}\xi$ удовлетворяет неравенствам вида $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < \mathrm{Me}\xi\}) \leqslant 1/2$, $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) > \mathrm{Me}\xi\}) \leqslant 1/2$. Отсюда можно условно сказать, что медиана характеризует некоторое центральное положение случайной величины ξ. Если $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = \mathrm{Me}\xi\}) = 0$, например для непрерывной случайной величины, то $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < \mathrm{Me}\xi\}) + \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) > \mathrm{Me}\xi\}) = 1$ и, следовательно, $F(\mathrm{Me}\xi) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < \mathrm{Me}\xi\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) > \mathrm{Me}\xi\}) = 1/2$.

19.3. Мода и наивероятнейшее значение

Следующая числовая характеристика положения величины ξ называется модой и обозначается $\mathrm{Mo}(\xi)$ или, ради простоты, $\mathrm{Mo}\xi$. Эта характеристика определяется только для непрерывных и дискретных случайных величин.

Определение 19.5. Модой $\mathrm{Mo}\xi$ непрерывной случайной величины ξ называется такое ее значение $x_{\max}$, которое доставляет плотности распределения $f_\xi(x)$ локальный максимум.

Пусть возможные значения дискретной случайной величины ξ занумерованы таким способом, что большему ее значению соответствует больший номер. Обозначим через N_ξ множество номеров k, которые таким способом перечисляют все различные значения дискретной случайной величины ξ.

Определение 19.6. Модой $\mathrm{Mo}\xi$ дискретной случайной величины называется такое ее возможное значение x_i, что $0 < p_{i-1} \leqslant \leqslant p_i$ и $p_i \geqslant p_{i+1} > 0$.

Если мода единственна, то распределение случайной величины называется унимодальным. В противном случае распределение называется мультимодальным. Рассмотрим новую числовую характеристику $\mathrm{Mo}^*(\xi)$ положения, которая называется наивероятнейшим значением случайной величины ξ. Обозначим ее в сокращенной записи через $\mathrm{Mo}^*\xi$. Для непрерывной случайной величины ξ наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi$ по определению удовлетворяет условию $f_\xi(\mathrm{Mo}^*\xi) \geqslant f_\xi(x)$ для всех $x \in R$, т. е. $f_\xi(\mathrm{Mo}^*\xi)$ является наибольшим значением плотности $f_\xi(x)$. Для дискретной величины ξ наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi$ совпадает с ее возможным значением x_r, для которого $p_r = = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_r\}) = \max\{p_k\colon\ k \in N_\xi\}$. На содержательном уровне характеристика $\mathrm{Mo}^*\xi$ означает, что вероятность попадания ξ в некоторую окрестность точки с абсциссой $\mathrm{Mo}^*\xi$, как правило, будет не меньше, чем вероятность ее попадания в любую окрестность той же длины, которая не содержит эту точку.

Пример 19.1. Вычислить числовые характеристики положения дискретной случайной величины ξ, для которой ряд распределения представлен в табл. 19.1.

Таблица 19.1

ξ	$x_1 = -4$	$x_2 = -1$	$x_3 = 0$	$x_4 = 5$
$\mathbf{P}(\cdot)$	$p_1 = 4p$	$p_2 = 2{,}5p$	$p_3 = 8p^2$	$p_4 = 0{,}5p$

Решение. Неизвестное значение параметра p найдем из условия нормировки $4p + 2{,}5p + 8p^2 + 0{,}5p = 1$. Решая уравнение $8p^2 + 7p = 1$ и неравенства $0 < p < 1$, получим единственное значение $p = 1/8$. Ряд распределения окончательно отображен в табл. 19.2.

Таблица 19.2

ξ	$x_1 = -4$	$x_2 = -1$	$x_3 = 0$	$x_4 = 5$
$\mathbf{P}(\cdot)$	$p_1 = 1/2$	$p_2 = 5/16$	$p_3 = 1/8$	$p_4 = 1/16$

Среднее значение $\mathrm{M}\xi = (-4) \times (1/2) + (-1) \times (5/16) + 0 \times \times 1/8 + 5 \times (1/16) = -2$. На рис. 19.3 представлен график интегральной функции распределения. Из этого рисунка получаем, что $\mathrm{Me}\xi$ — любое число $x_{1/2}$, удовлетворяющее неравенствам $-4 \leqslant x_{1/2} \leqslant -1$.

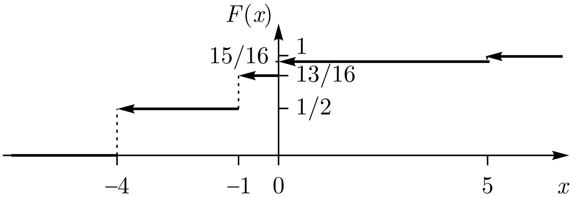


Рис. 19.3

Заметим, что для этой задачи $N_\xi = \{1, 2, 3, 4\}$. Так как неравенства вида $p_{k-1} \leqslant p_k$ и $p_k \geqslant p_{k+1}$ не имеют решения при $k = 2$ и при $k = 3$, то мода для этой случайной величины не существует. Легко проверить, что вероятность $p_1 = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_1\}) = \max\{p_k\colon k \in N_\xi\} = 1/2$. Поэтому наивероятнейшее значение случайной величины ξ равно $\mathrm{Mo}^*\xi = x_1 = -4$.

Рассмотрим снова пример 18.3 из лекции 18 и вычислим вспомогательные числовые характеристики для случайной величины Лапласа. Напомним, что центральные моменты нечетного порядка для случайной величины Лапласа равны нулю и центральные моменты четного порядка равны $(2k)!$ Значит, коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}\xi = \beta_3\xi/(\sigma\xi)^3 = 0$ и эксцесс $\mathrm{Э}\xi = (\sigma\xi)^{-4}\beta_4\xi - 3 = 24/4 - 3 = 3$. Легко вычислить, что для случайной величины Лапласа $\mathrm{Mo}\xi = \mathrm{Mo}^*\xi = \mathrm{Me}\xi = \mathrm{M}\xi = a$. Теперь найдем среднее отклонение случайной величины Лапласа. По определению среднее отклонение случайной величины ξ, обозначаемое через $\mathrm{E}(\xi)$ или через $\mathrm{E}\xi$, равно величине $\mathrm{M}(|\xi - \mathrm{Me}\xi|)$. Отсюда для случайной величины Лапласа получаем

$$\mathrm{E}\xi = 2^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x-a|\, \mathrm{e}^{-|x-a|}\, dx = -2^{-1} \int\limits_{-\infty}^{a} (x-a)\, \mathrm{e}^{x-a}\, dx +$$

$$+\,2^{-1}\int\limits_{a}^{+\infty}(x-a)\,\mathrm{e}^{a-x}\,dx = -2^{-1}\int\limits_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{t}\,dt - 2^{-1}\int\limits_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{t}\,dt = \\ = -\int\limits_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{t}\,dt = 1.$$

При решении этой задачи получили следующий замечательный факт. Случайную величину Лапласа можно приближено заменять математическим ожиданием $\mathrm{M}\xi$ или медианой $\mathrm{Me}\xi$. Однако ошибку такого приближения можно измерять величиной $(\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^2)^{1/2} = \sigma\xi = 2^{1/2}$ или несколько другой величиной $\mathrm{M}(|\xi-\mathrm{Me}\xi|) = \mathrm{E}\xi = 1$. Так как $2^{1/2} > 1$, то имеем вполне естественный результат о том, что величина наименьшей ошибки существенно зависит от выбранного критерия точности приближения. При этом разные критерии дают для случайной величины Лапласа один и тот же прогноз, равный a.

Тестовые вопросы к лекции 19

1. Тип — проверка ответов.

Пусть $\alpha_k(\xi)$ является начальным моментом k-го порядка случайной величины $\xi(\omega)$. Вычислить моменты: 1) $\alpha_0(\xi)$; 2) $\alpha_1(\xi)$; 3) $\beta_0(\xi)$.

Ответы:

1) $\alpha_0(\xi) = 1$;

2) $\alpha_1(\xi) = \mathrm{M}(\xi)$;

3) $\beta_0(\xi) = 1$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\mathrm{Ka}(\xi)$ является коэффициентом асимметрии случайной величины ξ. Определить ошибочное утверждение.

• Центральные моменты нечетного порядка для симметричного распределения относительно математического ожидания равны единице, если они конечны.

• Коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}(\xi)$ случайной величины ξ равен $\beta_3\xi/(\sigma\xi)^3$.

• Если $\mathrm{Ka}(\xi) > 0$, то асимметрия называется положительной.

• Если $\mathrm{Ka}(\xi) < 0$, то асимметрия называется отрицательной.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathrm{Ka}(\xi)$ является коэффициентом асимметрии случайной величины ξ. Определить неверные утверждения.

• Если $\mathrm{Ka}(\xi) < 0$, то асимметрия называется строго отрицательной.

• Центральные моменты нечетного порядка для симметричного распределения относительно математического ожидания равны нулю, если они конечны.

• Коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}(\xi)$ случайной величины ξ равен $\beta_3\xi/(\sigma\xi)^3 - 3$.

• Если $\mathrm{Ka}(\xi) > 0$, то асимметрия называется строго положительной.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\text{Э}(\xi)$ является эксцессом случайной величины ξ. Определить верное соотношение.

• Эксцесс $\text{Э}\xi$ случайной величины ξ равен $(\sigma\xi)^{-4}\beta_4\xi^4 - 4$.
• Эксцесс $\text{Э}\xi$ случайной величины ξ равен $(\sigma\xi)^{-4}\beta_4\xi^4 - 3$.
• Эксцесс $\text{Э}\xi$ случайной величины ξ равен $4(\sigma\xi)^{-4}\beta_4\xi^4$.
• Эксцесс $\text{Э}\xi$ случайной величины ξ равен $3(\sigma\xi)^{-4}\beta_4\xi^4$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathrm{K}_p(\xi)$ является квантилем порядка p случайной величины ξ. Определить ошибочные соотношения.

• $F(\mathrm{K}_p\xi) \leqslant p \leqslant F(\mathrm{K}_p\xi + 0)$ для числа $\mathrm{K}_p\xi$.
• $F(\mathrm{K}_p\xi) \geqslant p \geqslant F(\mathrm{K}_p\xi + 0)$ для числа $\mathrm{K}_p\xi$.
• $F(\mathrm{K}_p\xi) < p < F(\mathrm{K}_p\xi + 0)$ для числа $\mathrm{K}_p\xi$.
• $F(\mathrm{K}_p\xi) > p > F(\mathrm{K}_p\xi + 0)$ для числа $\mathrm{K}_p\xi$.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\mathrm{Me}(\xi)$ является медианой случайной величины ξ. Определить верное равенство.

• $\mathrm{Me}\xi = \mathrm{K}_{1/3}\xi$.
• $\mathrm{Me}\xi = \mathrm{K}_2\xi$.
• $\mathrm{Me}\xi = \mathrm{K}_{1/2}\xi$.
• $\mathrm{Me}\xi = \mathrm{K}_{1/24}\xi$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathrm{Mo}(\xi)$ является модой дискретной случайной величины ξ. Определить ошибочные утверждения.

• Верны неравенства

$$0 < \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_{r-1}\}) \leqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_r\}),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_r\}) \geqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_{r+1}\}) > 0,$$

если величина $x_r = \mathrm{Mo}\xi$ является значением дискретной случайной величины ξ.

• Справедливы неравенства

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_{r-1}\}) \leqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_r\}),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_r\}) \geqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_{r+1}\}) > 0,$$

если величина $x_r = \mathrm{Mo}\xi$ является значением дискретной случайной величины ξ.

• Верны неравенства

$$0 < \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_{r-1}\}) \leqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_r\}),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_r\}) \geqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_{r+1}\}),$$

если величина $x_r = \mathrm{Mo}\xi$ является значением дискретной случайной величины ξ.

• Справедливы неравенства

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_{r-1}\}) \leqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_r\}),$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_r\}) \geqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_{r+1}\}),$$

если величина $x_r = \mathrm{Mo}\xi$ является значением дискретной случайной величины ξ.

Лекция 20

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛОЖЕНИЯ И РАЗБРОСА СЕМЕЙСТВА ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ИСХОДОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

20.1. Математическое ожидание многомерной случайной величины

Напомним, что многомерная случайная величина поточечно определяется на пространстве Ω описаний элементарных событий и является упорядоченной системой из n одномерных случайных величин $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Отображение $(\xi_1(\omega),\ \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))\colon\ \Omega \to R^n$ и совместная интегральная функция распределения

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\})$$

n-мерной случайной величины являются полными и исчерпывающими характеристиками n-мерной случайной величины с функциональной и вероятностной точек зрения. Эти характеристики, как правило, при больших значениях размерности n и статистической зависимости случайных величин $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ являются сложными и громоздкими математическими объектами. В некоторых инженерных приложениях можно обойтись без исчерпывающих характеристик, описав некоторые специальные свойства совокупности измерителей приближенно или в среднем. С этой целью вводят такие числовые характеристики многомерной случайной величины $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n n(\omega))$, как, например, математическое ожидание, дисперсия, корреляционные моменты [1, 3, 4, 8–11].

Определение 20.1. Математическим ожиданием многомерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ называется точка n-мерного пространства R^n вида $\mathrm{M}\boldsymbol{\xi} = (\mathrm{M}\xi_1, \mathrm{M}\xi_2, \ldots, \mathrm{M}\xi_n)$, где $\mathrm{M}\xi_k$ равна математическому ожиданию одномерной случайной величины ξ_k для $k = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, вычисление математического ожидания $\mathrm{M}\boldsymbol{\xi}$ случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$ сводится к вычислению математических ожиданий одномерных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. К сожалению, для вычисления дисперсии случайного вектора или n-мерной случайной величины $\boldsymbol{\xi}$ недостаточно знать дисперсии одномерных случайных величин. Для пояснения этого факта, ради простоты, рассмотрим две первые случайные величины, ξ_1 и ξ_2. В девятой лекции было показано, что $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}(\xi_1) + \mathrm{D}(\xi_2)$, если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины. Если же ξ_1 и ξ_2 — зависимые случайные величины, то указанное соотношения в общем случае не имеет места, так как $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}(\xi_1) + \mathrm{D}(\xi_2) + 2\mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2))$ и величина $\mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2))$ может оказаться отличной от нуля. Значит, для вычисления $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2)$ в общем случае не достаточно знать дисперсии $\mathrm{D}(\xi_1)$ и $\mathrm{D}(\xi_2)$, а необходимо еще знать такую величину, как $\mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2))$. Математический объект (ξ_1, ξ_2) существенно сложнее, чем объект $(\xi_1 + \xi_2)$, так как вектор (ξ_1, ξ_2) однозначно определяет сумму $(\xi_1 + \xi_2)$, а сумма $(\xi_1 + \xi_2)$ не восстанавливает вектор (ξ_1, ξ_2). Более того, даже более информативные математические объекты ξ_1 и ξ_2 по сравнению с объектом $(\xi_1 + \xi_2)$ определяют вероятностные свойства вектора (ξ_1, ξ_2) только при статистической независимости его компонент. Поэтому возникает естественный вопрос о характеристике зависимости величин ξ_1, ξ_2, а также вопрос о свойствах величины $\mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2))$. Итак, для любых случайных величин ξ_k и ξ_s из семейства $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ необходимо изучить свойства характеристики $\mathrm{M}((\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)(\xi_s - \mathrm{M}\xi_s))$ при $|\mathrm{M}\xi_k| < \infty$ и $|\mathrm{M}\xi_s| < \infty$.

20.2. Смешанный центральный момент второго порядка

Определение 20.2. Корреляционным моментом (ковариацией, смешанным центральным моментом второго порядка) величин ξ_k и ξ_s при $|\mathrm{M}\xi_k| < \infty$, $|\mathrm{M}\xi_s| < \infty$ называется математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их математического ожидания, он обозначается $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)$, т. е. $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) = \mathrm{M}\big[(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)(\xi_s - \mathrm{M}\xi_s)\big]$.

Если (ξ_k, ξ_s) — дискретный случайный вектор и вероятности

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_k(\omega) = x_{k,i}, \xi_s(\omega) = x_{s,j}\}) = r_{i,j}(k,s), \quad i,j = 1,2,\ldots,$$

задают его распределение, то корреляционный момент

$$\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) = \sum_{i,j} (x_{k,i} - \mathrm{M}\xi_k)(x_{s,j} - \mathrm{M}\xi_s) r_{i,j}(k,s).$$

Если (ξ_k, ξ_s) — непрерывный вектор и $f(x_k, x_s)$ — его плотность, то

$$\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_k - \mathrm{M}\xi_k)(x_s - \mathrm{M}\xi_s) f(x_k, x_s)\, dx_k\, dx_s.$$

Наконец, если (ξ_k, ξ_s) является произвольной двумерной случайной величиной и $F(x_k, x_s) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_k(\omega) < x_k,\ \xi_s(\omega) < x_s\})$, $x_k \in R$, $x_s \in R$, то

$$\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_k - \mathrm{M}\xi_k)(x_s - \mathrm{M}\xi_s)\, dF(x_k, x_s).$$

Если $\xi_k \equiv \xi_s$, то $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_k) = \mathrm{M}\big[(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)\big] = \mathrm{M}\big[(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)^2\big] = \mathrm{D}\xi_k$. Из этих формул непосредственно следует, что корреляционный момент $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)$ двух случайных величин характеризует так называемый смешанный разброс этих случайных величин или то, каким образом разброс одной случайной величины влияет на разброс другой случайной величины. Если случайная величина ξ_k или ξ_s постоянна, то $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) = 0$. Из определения $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)$ получаем, что $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_k)$. Размерность корреляционного момента равна произведению размерностей случайных величин. Это представляет некоторое неудобство, так как при вычислениях корреляционного момента необходимо проверять его размерность. Поэтому вместо ковариации, если она принимает конечное значение, часто рассматривают следующую безразмерную числовую характеристику взаимного рассеивания двух случайных величин.

Определение 20.3. Коэффициентом корреляции $\operatorname{corr}(\xi_k, \xi_s)$ случайных величин ξ_k и ξ_s при $0 < \sigma\xi_k < \infty$, $0 < \sigma\xi_s < \infty$ называется отношение корреляционного момента к произведению их средних квадратических отклонений, т. е. $\operatorname{corr}(\xi_k, \xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)/(\sigma\xi_k\sigma\xi_s)$.

Для центрированных и нормированных случайных величин

$$\overline{\xi}_k = (\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)/\sigma\xi_k, \quad \overline{\xi}_s = (\xi_s - \mathrm{M}\xi_s)/\sigma\xi_s$$

имеем: $\operatorname{corr}(\overline{\xi}_k,\ \overline{\xi}_s) = \mathrm{M}(\overline{\xi}_k \times \overline{\xi}_s) = \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)/(\sigma\xi_k\sigma\xi_s) = \operatorname{corr}(\xi_k, \xi_s)$.

Лемма 20.1. *Если для произвольных случайных величин* ξ_k *и* ξ_s *существует величина* $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)$, *то* $\mathrm{M}(\xi_k \times \xi_s) = \mathrm{M}\xi_k \times$ $\times\, \mathrm{M}\xi_s + \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)$.

Доказательство. Из существования и определения корреляционного момента и свойств математического ожидания находим

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{M}\big[(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)\big] =$$
$$= \mathrm{M}(\xi_1\xi_2) - 2\mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2 + \mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2 = \mathrm{M}(\xi_1\xi_2) - \mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2.$$

Отсюда $\mathrm{M}(\xi_k\xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) + \mathrm{M}\xi_k\mathrm{M}\xi_s$. Лемма 20.1 доказана.

Лемма 20.2. *Если для произвольных случайных величин* ξ_k *и* ξ_s *существует величина* $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) \neq -\infty$, *то* $\mathrm{D}(\xi_k + \xi_s) =$ $= \mathrm{D}\xi_k + \mathrm{D}\xi_s + 2\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)$.

Доказательство. Из определения дисперсии, свойств математического ожидания и условия $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) \neq -\infty$ имеем

$$\mathrm{D}(\xi_k + \xi_s) =$$
$$= \mathrm{M}\big[\xi_k + \xi_s - \mathrm{M}(\xi_k + \xi_s)\big]^2 = \mathrm{M}\big[(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k) + (\xi_s - \mathrm{M}\xi_s)\big]^2 =$$
$$= \mathrm{M}(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)^2 + \mathrm{M}(\xi_s - \mathrm{M}\xi_s)^2 + 2\mathrm{M}\big[(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)(\xi_s - \mathrm{M}\xi_s)\big] =$$
$$= \mathrm{D}\xi_k + \mathrm{D}\xi_s + 2\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s).$$

Итак, $\mathrm{D}(\xi_k + \xi_s) = \mathrm{D}\xi_k + \mathrm{D}\xi_s + 2\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)$, и лемма 20.2 доказана.

20.3. Дисперсия многомерной случайной величины

Пусть дана n-мерная случайная величина $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Ее рассеивание нельзя охарактеризовать вектором $(\mathrm{D}\xi_1, \mathrm{D}\xi_2, \ldots$ $\ldots, \mathrm{D}\xi_n)$ из дисперсий случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, так как по смыслу разброс должен измеряться неотрицательным числом. Рассмотрим сначала тривиальный случай, когда $n = 2$ и $\xi_2 = \xi_1$. Тогда $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ и точки, координаты которых совпадают со значениями двумерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$, лежат на прямой $\{(x, y)\colon\ y = x\}$ в R^2. Выберем прямую $\{(x, y)\colon$ $y = x\}$ за новую ось абсцисс Ox_0. Так как все двумерные случайные точки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ лежат на оси Ox_0, то их можно считать одномерными случайными точками на оси Ox_0. Легко вычислить, что указанные одномерные точки по отношению к оси Ox_0 имеют координаты $\eta_0 = \sqrt{2}\,\xi_1$. Так как двумерная случайная величина $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ и одномерная случайная величина $\eta_0 = \sqrt{2}\,\xi_1$ геометрически отображаются одними и теми же объектами на плоскости xOy, то разброс двумерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ в направлении оси Ox_0 не может отличаться от дисперсии случайной величины $\eta_0 = \sqrt{2}\,\xi_1$. Отсюда получаем, что дисперсия двумерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ в направлении оси Ox_0 равна $\mathrm{D}\eta_0 = \mathrm{D}(\sqrt{2}\,\xi_1) = 2\mathrm{D}\xi_1$. Далее, двумерную случайную величину $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ можно представить в виде другой одномерной случайной величины η. С этой целью выберем на плоскости xOy произвольный единичный вектор $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, для которого $(b_1)^2 + (b_2)^2 = 1$. Ортогональная проекция случайных точек $\boldsymbol{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_1(\omega))$, $\omega \in \Omega$, на направление, определяемое вектором $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, и есть искомая одномерная случайная величина η. Ясно, что между двумерной случайной величиной $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ и одномерной случайной величиной η установлено взаимно-однозначное соответствие, если только направление, определяемое вектором $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, и прямая вида $\{(x, y)\colon\ y = x\}$ не являются ортогональными. Известно, что ортогональная проекция η равна скалярному произведению векторов $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ и $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$, т. е. в этом случае $\eta = b_1\xi_1 + b_2\xi_1 = (b_1 + b_2)\xi_1$. Таким способом случайный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ представляется одномерной случайной величиной $\eta = (b_1 + b_2)\xi_1$. Поэтому естественно считать, что дисперсии математических объектов $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ и η должны совпадать. В силу этого дисперсия случайного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ равна $\mathrm{D}\eta = (b_1 + b_2)^2\mathrm{D}\xi_1 = (1 + 2b_1b_2)\mathrm{D}\xi_1$. Так как эта дисперсия зависит от выбранного направления, то естественно обозначить ее символом $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi}$. Итак, имеем: $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi} = (1 + 2b_1b_2)\mathrm{D}\xi_1$. Если направление вектора $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ совпадает с прямой $\{(x, y)\colon\ y = x\}$ или с осью Ox_0, т. е. $b_1 = b_2 = 1/\sqrt{2}$, то дисперсия $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi} = (1+2(1/\sqrt{2}\,)^2)\mathrm{D}\xi_1 = 2\mathrm{D}\xi_1$. Следовательно, при $\mathbf{b} = (1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2})$ получаем, что $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi} = \mathrm{D}\eta_0$. Этот замечательный результат обосновывает целесообразность применения такого подхода к решению задачи в общем случае или к определению дисперсии многомерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Поступая аналогичным образом, можно определить дисперсию многомерной случайной величины в направлении произвольного единичного вектора $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, при этом $(b_1)^2 + (b_2)^2 + \ldots + (b_n)^2 = 1$. Координаты единичного вектора $\mathbf{b}$ обычно называют направляющими косинусами. Найдем теперь проекцию $\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b})$ многомерной случайной точки $\boldsymbol{\xi}$ на направление, определяемое вектором $\mathbf{b}$. Эта проекция равна скалярному произведению векторов $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{b}$, т. е. $\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}) = (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\xi_k$, и поэтому является одномерной случайной величиной. Отметим, что значения одномерной случайной величины $\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b})$ зависят от вектора $\mathbf{b}$. Так как $\mathrm{M}[\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b})] = \mathrm{M}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\xi_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \mathrm{M}\xi_k$, то для дисперсии случайной величины $\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b})$ последовательно получаем

$$\mathrm{D}\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}) = \mathrm{M}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\xi_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\mathrm{M}\xi_k\right)^2 = \mathrm{M}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)\right)^2 =$$

$$= \mathrm{M}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)\sum_{s=1}^{n} b_s(\xi_s - \mathrm{M}\xi_s)\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} b_k b_s \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s).$$

Итак, при выбранном направлении единичного вектора $\mathbf{b}$ дисперсия $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi}$ многомерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ равна, по определению, дисперсии $\mathrm{D}\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b})$ одномерной случайной величины $\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{b})$. В частности, если направление вектора $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ совпадает с некоторой координатной осью, например с осью Ox_i, то $b_i = 1$, $b_k = 0$ для всех $k \neq i$. Тогда дисперсия вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в направлении координатной оси Ox_i равна $(b_i)^2 \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = \mathrm{D}\xi_i$. Ортогональная проекция точек $\boldsymbol{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$, в пространстве R^n на координатную ось Ox_i совпадает с одномерной случайной величиной $\xi_i(\omega)$. Поэтому величину $\mathrm{D}\xi_i$ целесообразно интерпретировать как рассеивание n-мерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в направлении оси Ox_i. Таков смысл $\mathrm{D}\xi_i$ по отношению к вектору $\boldsymbol{\xi}$. При этом дисперсия $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi}$ вычисляется через элементы $k_{i,j} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, матрицы

$$\mathrm{K}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) & \ldots & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_2) & \ldots & \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_2) & \ldots & \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathrm{K}(\boldsymbol{\xi})$, которая в силу равенств $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_k)$, $k, s \geqslant 1$, является симметричной, называется ковариационной или корреляционной. Так как матрица $\mathrm{K}(\boldsymbol{\xi})$ является симметричной и для любых вещественных чисел $v_1, v_2, \ldots, v_n$ выполняются очевидные соотношения

$$\mathrm{M}\left[\sum_{k=1}^{n} v_k(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)\right]^2 \geqslant 0,$$

$$\mathrm{M}\left[\sum_{k=1}^{n} v_k(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)\right]^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} v_k\, v_s \mathrm{M}\big[(\xi_k - \mathrm{M}\xi_k)(\xi_s - \mathrm{M}\xi_s)\big] = \\ = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} v_k\, v_s \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) \geqslant 0,$$

то определитель матрицы $\mathrm{K}(\boldsymbol{\xi})$ — неотрицательное число.

Определение 20.4. Две случайные величины называются некоррелированными, если их корреляционный момент равен нулю. Иначе эти величины называются коррелированными.

В том случае когда компоненты n-мерной случайной величины попарно некоррелированы, ковариационная матрица будет диагональной и $k_{i,i} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = \mathrm{D}\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда получаем следующую формулу для дисперсии: $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi} = (b_1)^2\mathrm{D}\xi_1 + (b_2)^2\mathrm{D}\xi_2 + \ldots + (b_n)^2\mathrm{D}\xi_n$.

Пусть каждая компонента направления $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ равна единице. Тогда, учитывая равенства вида $\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{c}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_k) = \mathrm{D}\xi_k$, $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_k)$, $k, s = 1, 2, \ldots, n$, получим обобщение леммы 20.2: $\mathrm{D}\varphi(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{c}) = \mathrm{D}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k + 2\sum_{k<s} \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)$. Отсюда $\mathrm{D}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k + 2\sum\limits_{k<s} \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_s)$. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ являются попарно некоррелированными, то имеет место равенство $\mathrm{D}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{D}\xi_k$.

Тестовые вопросы к лекции 20

1. Тип — проверка ответов.

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1)$ является двумерной случайной величиной и плотность распределения вероятностей случайной величины ξ_1 равна $2^{-1}\exp\{-|x-a|\}$ для всех $-\infty < x < +\infty$, где a — постоянная величина и $-\infty < a < +\infty$. Вычислить математическое ожидание $\mathrm{M}(\boldsymbol{\xi})$ при: 1) $a = 0$; 2) $a = 1$; 3) $a = 30$.

Ответы:

1) $\mathrm{M}(\boldsymbol{\xi}) = (0, 0)$;

2) $\mathrm{M}(\boldsymbol{\xi}) = (1, 1)$;

3) $\mathrm{M}(\boldsymbol{\xi}) = (30, 30)$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\mathrm{M}(\boldsymbol{\xi})$ является математическим ожиданием двумерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$. Определить верное соотношение.

- $\mathrm{M}(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2$.
- $\mathrm{M}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathrm{M}\xi_1, \mathrm{M}\xi_2)$.
- $\mathrm{M}(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{M}\xi_1 \times \mathrm{M}\xi_2$, если случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются независимыми.
- $\mathrm{M}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2)/2$.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathrm{D}\boldsymbol{\xi}$ является дисперсией двумерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ в направлении единичного вектора $(1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2}\,)$. Определить ошибочные утверждения.

- $\mathrm{D}\boldsymbol{\xi} = (\mathrm{D}\xi_1, \mathrm{D}\xi_2)$.
- $\mathrm{D}\boldsymbol{\xi} = (\mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2)/2$, если величины ξ_1 и ξ_2 независимы.
- $\mathrm{D}\boldsymbol{\xi} = \mathrm{D}\xi_1 \times \mathrm{D}\xi_2$.
- $\mathrm{D}\boldsymbol{\xi} = \mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2$.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ является двумерной случайной величиной. Определить верное соотношение.

- $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}(\xi_1) + \mathrm{D}(\xi_2) + \mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2))$.
- $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}(\xi_1) + \mathrm{D}(\xi_2) + 2\mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2))$.
- $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}(\xi_1) + \mathrm{D}(\xi_2)$.
- $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}(\xi_1) + \mathrm{D}(\xi_2) + 2\mathrm{M}(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)\mathrm{M}(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ является двумерной случайной величиной и величина $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1)$ определяет ковариацию или корреляционный момент. Определить ошибочные соотношения.

- $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) = \mathrm{M}(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)\mathrm{M}(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)$.
- $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) = \mathrm{M}\big[(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)\big]$.
- $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) = \mathrm{M}\big[(\xi_1 + \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 + \mathrm{M}\xi_2)\big]$.
- $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, если величины ξ_1 и ξ_2 независимы.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ является двумерной случайной величиной и символ $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1)$ определяет корреляционный момент или ковариацию. Определить верное соотношение.

- $\mathrm{M}(\xi_1 \times \xi_2) = \mathrm{M}\xi_1 \times \mathrm{M}\xi_2 + 2\mathrm{cov}\,(\xi_1, \xi_2)$.
- $\mathrm{M}(\xi_1\xi_2) = \mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2 + \mathrm{cov}\,(\xi_1, \xi_2)$.
- $\mathrm{M}(\xi_1\xi_2) = \mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2 - \mathrm{cov}\,(\xi_1, \xi_2)$.
- $\mathrm{M}(\xi_1\xi_2) = \mathrm{M}\xi_1\mathrm{M}\xi_2 + 3\mathrm{cov}\,(\xi_1, \xi_2)$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi}$ является дисперсией двумерной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ в направлении единичного вектора $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$. Определить ошибочные равенства.

- $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi} = 2\sum\limits_{k=1}^{2}\sum\limits_{s=1}^{2} b_k\, b_s \,\mathrm{cov}\,(\xi_k, \xi_s)$.
- $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi} = \sum\limits_{k=1}^{2}\sum\limits_{s=1}^{2} b_k\, b_s \,\mathrm{cov}\,(\xi_k, \xi_s)$.
- $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi} = 2 + \sum\limits_{k=1}^{2}\sum\limits_{s=1}^{2} b_k\, b_s \,\mathrm{cov}\,(\xi_k, \xi_s)$.
- $\mathrm{D}_{\mathbf{b}}\boldsymbol{\xi} = \sum\limits_{k=1}^{2} (b_k)2\mathrm{cov}\,(\xi_k, \xi_k)$, если величины ξ_1 и ξ_2 независимы.

Лекция 21

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

21.1. Понятие о неслучайных функциях от случайных аргументов

В приложениях часто приходится встречаться с различными случайными величинами, которые связаны функциональной зависимостью с другими случайными величинами [1, 3, 4, 8–11]. Например, на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ могут быть заданы две случайные величины, $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$, для которых справедливо функциональное соотношение вида $\eta = g(\xi)$. Здесь $g(x)$ — некоторая заданная функция на R со значениями в R. При этом случайную величину $\eta = g(\xi)$ называют функцией от случайного аргумента ξ. Для практики наибольший интерес представляют следующие две последовательно решаемые задачи: 1) нахождение функциональной зависимости $g(x)$; 2) вычисление неизвестного закона распределения случайной величины η по информации о функции $g(x)$ и о законе распределения так называемой тестовой случайной величины ξ. В дальнейшем будем считать, что первая задача решена и, значит, функция $g(x)$ априори задана. Перейдем теперь к предварительному и общему решению второй задачи.

Определение 21.1. Отображение $g(x)\colon\ R \to R$ называется измеримым или борелевским, если для любого борелевского множества B_2 из σ-алгебры $\mathcal{B}_{Oy}$ на действительной прямой Oy справедливо соотношение $\{x\colon g(x) \in B_2\} = B_1 \in \mathcal{B}_{Ox}$, где $\mathcal{B}_{Ox}$ — борелевская σ-алгебра на прямой Ox.

Теорема 21.1. *Пусть заданы случайная величина $\xi(\omega)\colon \Omega \to R$ и измеримая функция $y = g(x)\colon\ R \to R$. Тогда объект вида $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ является случайной величиной.*

Доказательство. Для любого $\omega \in \Omega$ случайная величина $\xi(\omega)$ принимает одно и только одно действительное значение x, т. е. имеем: $\xi(\omega) = x \in R$. Функция $g(x)$ также однозначна и принимает некоторое действительное значение y при заданном x. Итак, для любого $\omega \in \Omega$ существует единственное число $y \in R$, такое что $\eta(\omega) = g(\xi(\omega)) = g(x) = y$. Установим теперь измеримость по ω отображения $\eta(\omega)$: $\Omega \to R$. Для этого на оси Oy выберем любое борелевское множество B_2 и составим множество $B_1 = \{x\colon g(x) \in B_2\}$. Так как функция $g(\cdot)$ измерима, то $B_1 \in \mathcal{B}_{0x}$. Теперь рассмотрим множество $\{\omega\colon \eta(\omega) \in B_2\}$ и представим его в виде $\{\omega\colon \eta(\omega) \in B_2\} = \{\omega\colon g(\xi(\omega)) \in B_2\} = \{\omega\colon \xi(\omega) \in B_1\}$. Справедливость последнего равенства вытекает из следующих двух цепочек утверждений:

$$1)\ \forall \omega' \in \{\omega\colon\ g(\xi(\omega)) \in B_2\} \Rightarrow \omega' \in \{\omega\colon\ \xi(\omega) \in B_1\},$$

$$2)\ \forall \omega'' \in \{\omega\colon\ \xi(\omega) \in B_1\} \Rightarrow \omega'' \in \{\omega\colon\ g(\xi(\omega)) \in B_2\}.$$

Далее, так как ξ является случайной величиной и B_1 есть борелевское множество, то множество $\{\omega\colon \xi(\omega) \in B_1\} \in \mathcal{F}$. Отсюда получаем, что множество $\{\omega\colon \xi(\omega) \in B_1\} = \{\omega\colon \eta(\omega) \in B_2\} \in \mathcal{F}$. Теорема доказана.

Замечание 21.1. Аналогичные утверждения можно доказать и в многомерном пространстве. Например, для двумерного случая сначала введем следующие обозначения, математические объекты и определения. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $-\infty < c < d < +\infty$ и $\{(x, y)\colon a \leqslant x < b,\ c \leqslant x < d\}$ есть произвольный прямоугольник на плоскости R^2.

Определение 21.2. Борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}^2$ на плоскости R^2 называется такая σ-алгебра, для которой $\{(x, y)\colon a \leqslant x < b,\ c \leqslant x < d\} \in \mathcal{B}^2$. При этом для любой σ-алгебры $\mathcal{R}^2$ на плоскости R^2 имеем: $\mathcal{B}^2 \subset \mathcal{R}^2$, если только $\{(x, y)\colon a \leqslant x < b$, $c \leqslant x < d\} \in \mathcal{R}^2$.

Определение 21.3. Отображение $g(x_1, x_2)\colon R^2 \to R$ называется измеримым, если для любого борелевского множества B_1 на прямой имеем: $\{(x_1, x_2)\colon g(x_1, x_2) \in B_1\} \in \mathcal{B}^2$, где $\mathcal{B}^2$ — борелевская σ-алгебра на R^2.

Теорема 21.2. *Пусть определены случайные величины $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и измеримое отображение $g(x_1, x_2)\colon R^2 \to R$. Тогда $\eta(\omega) = \psi(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ есть случайная величина.*

В общем случае вычисления законов распределения для случайной величины η очень громоздки. Поэтому рассмотрим конкретные задачи, когда тестовые случайные величины и функциональные зависимости удовлетворяют дополнительным ограничениям, и в этом случае получим законы распределения для случайной величины $\eta(\omega)$.

21.2. Дискретные одномерные случайные величины и их функциональная зависимость

Пусть $\xi(\omega)\colon\ \Omega \to R$ есть дискретная случайная величина и отображение $g(x)\colon\ R \to R$ является однозначным. Функция $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))\colon\ \Omega \to R$ является суперпозицией функций $\xi(\omega)$ и $g(x)$ и не может принимать больше различных значений, чем функция $\xi(\omega)$. Если ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots$, то числа $g(x_1), g(x_2), \ldots$ будут возможными значениями функции η. Так как некоторые из чисел $g(x_1), g(x_2), \ldots$ могут быть равными, то мощность множества различных значений функции η не более мощности множества $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Обозначим теперь символами $y_1, y_2, \ldots$ различные значения функции η. Далее, так как при любом y_j и любом $y \in R$ справедливы соотношения вида

$$\{\omega\colon\ \eta(\omega) = y_j\} = \bigcup_{i\colon g(x_i)=y_j} \{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F},$$

$$\{\omega\colon\ \eta(\omega) < y\} = \bigcup_{j\colon y_j<y} \{\omega\colon\ \eta(\omega) = y_j\} = \\ = \bigcup_{j\colon y_j<y}\ \bigcup_{i\colon g(x_i)=y_j} \{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_i\}) \in \mathcal{F},$$

то η будет дискретной случайной величиной. Итак, в случае дискретной случайной величины ξ на функцию $g(x)$ никаких дополнительных ограничений не накладывается. Теперь легко вычислить законы распределения случайной величины η через законы распределения случайной величины ξ. Действительно, для $\xi(\omega)$ с известной интегральной функцией $F_\xi(x)$ можно задать распределение $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x_i\}) = F_\xi(x_i + 0) - F_\xi(x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Обозначая распределение для случайной величины η с помощью равенств $q_j = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) = y_j\})$, $j = 1, 2, \ldots$, и используя полученные выше соотношения в событиях, найдем ее законы распределения:

$$q_j = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \eta(\omega) = y_j\}) = \sum_{i\colon g(x_i)=y_j} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_i\}) = \sum_{i\colon g(x_i)=y_j} p_i,$$

$$F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \eta(\omega) < y\}) = \sum_{j\colon y_j<y} q_j = \sum_{j\colon y_j<y}\ \sum_{i\colon g(x_i)=y_j} p_i, \quad y \in R.$$

Приведем пример использования этих формул.

Пример 21.1. Пусть закон распределения случайной величины ξ задан в виде таблицы (табл. 21.1).

Таблица 21.1

ξ	$x_1 = -3$	$x_2 = -1$	$x_3 = 0$	$x_4 = 1$	$x_5 = 3$	$x_6 = 10$
$\mathbf{P}(\cdot)$	1/12	1/12	1/6	1/6	1/6	1/3

Предположим, что задано следующее отображение: $y = g(x) = x^2$. Найти закон распределения случайной величины $\eta(\omega) = g(\xi(\omega)) = (\xi(\omega))^2$. Случайная величина $\eta(\omega)$ будет принимать значения 9, 1, 0, 1, 9 и 100, которые соответствуют различным значениям случайной величины ξ. Различных значений для $\eta(\omega)$ только четыре: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 9$, $y_4 = 100$. Вероятности q_i для η легко вычисляются:

$$q_1 = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) = y_1\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) = 0\}) = \sum_{i\colon g(x_i)=0} p_i = p_3 = 1/6,$$

$$q_2 = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) = y_2\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) = 1\}) = \sum_{i\colon g(x_i)=1} p_i = p_2 + p_4 = 1/4,$$

$$q_3 = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) = y_3\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) = 9\}) = \sum_{i\colon g(x_i)=9} p_i = p_1 + p_5 = 1/4,$$

$$q_4 = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) = y_4\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) = 100\}) = \sum_{i\colon g(x_i)=100} p_i = p_6 = 1/3.$$

Ряд распределения для величины $\eta(\omega)$ представлен в табл. 21.2.

Таблица 21.2

$\eta(\omega)$	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 9$	$y_4 = 100$
$\mathbf{P}(\cdot)$	1/6	1/4	1/4	1/3

21.3. Непрерывные одномерные случайные величины и их функциональная зависимость

Для произвольной случайной величины ξ и для измеримой функции $g(x)$ интегральная функция $F_\eta(y)$ для случайной величины $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ при каждом фиксированном $y \in R$ равна вероятности $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \in g^{-1}(B_y)\})$, где $g^{-1}(B_y) = \{x\colon g(x) < y\}$. Указанная вероятность определяется интегральной функцией $F_\xi(x)$ случайной величины ξ. Способы и сложность вычисления интегральной функции $F_\eta(y)$ существенно зависят от типа случайной величины ξ и от свойств функции $g(x)$. Пусть теперь ξ — непрерывная случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$ и ее плотность распределения равна $f_\xi(x) = dF_\xi(x)/dx$. Найдем интегральную функцию $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\})$ и плотность $f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy$ для случайной величины η, если распределение для случайной величины ξ считается известным.

Предположим сначала, что функция $g(x)$ строго возрастает и имеет первую производную. В этом случае для функции $y = g(x)$ существуют обратная функция $x = w(y)$ и производная $w'(y) = dw(y)/dy > 0$. Пусть ради простоты случайная величина $\xi(\omega)$ принимает значения из отрезка $[a, b]$ для любого $\omega \in \Omega$. Значит, плотность вероятности $f_\xi(x)$ равна нулю при $x \notin [a, b]$. Если теперь при $x = a$ функция $g(a) = a_1$ и при $x = b$ функция $g(b) = b_1$, то случайная величина $\eta(\omega)$ принимает значения из отрезка $[a_1, b_1]$. На рис. 21.1 отображена именно такая ситуация.

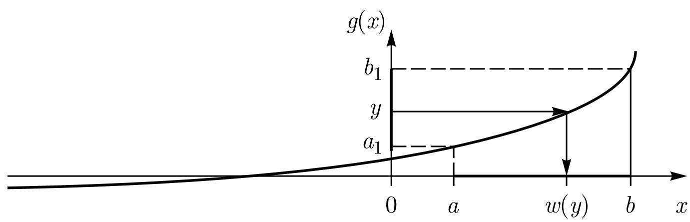


Рис. 21.1

Учитывая график функции $y = g(x)$ и свойства функции $x = w(y)$, найдем значение интегральной функции $F_\eta(y)$ при любом $y \in R$. Ясно, что при $y \leqslant a_1$ интегральная функция распределения $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \eta(\omega) < y\}) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$. Далее, при $a_1 < y \leqslant b_1$ интегральная функция

$$F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x = w(y)\}) = F_\xi(w(y)) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{w(y)} f_\xi(u)\,du = \int\limits_{a}^{w(y)} f_\xi(u)\,du.$$

При $y > b_1$ интегральная функция распределения $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$. Отсюда $f_\eta(y) = 0$ при $y < a_1$, $f_\eta(y) = f_\xi(w(y))w'(y)$ при $a_1 \leqslant y \leqslant b_1$ и, наконец, $f_\eta(y) = 0$ при $y > b_1$.

Рассмотрим несколько иной вариант такого рода задач. Пусть функция $g(x)$ строго убывает и имеет первую производную. Для такой функции $y = g(x)$ существует обратная функция вида $x = w(y)$ и производная $w'(y) < 0$. Пусть опять для простоты случайная величина $\xi(\omega)$ принимает значения из отрезка $[a, b]$ для любого $\omega \in \Omega$. При $x = a$ функция $g(a) = a_1$ и при $x = b$ функция $g(b) = b_1$. Значит, случайная величина $\eta(\omega)$ принимает значения из отрезка $[b_1, a_1]$. Эти свойства функций $g(x)$, $w(y)$, $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ отображены на рис. 21.2.

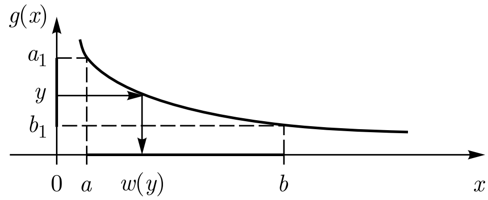


Рис. 21.2

Следуя методике предыдущего абзаца, вычислим значение функции $F_\eta(y)$. При $y \leqslant b_1$ интегральная функция распределения $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$. При $b_1 < y \leqslant a_1$ интегральная функция распределения

$$F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) > w(y)\}) = 1 - \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) \leqslant w(y)\}) = \\ = 1 - \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) < w(y)\}) = 1 - F_\xi(w(y)) = \\ = 1 - \int\limits_{-\infty}^{w(y)} f_\xi(u)\,du = 1 - \int\limits_{a}^{w(y)} f_\xi(u)\,du.$$

Наконец, при $y > a_1$ функция $F_\eta(y)$ равна $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \eta(\omega) < y\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$. Поэтому плотность вероятностей $f_\eta(y) = 0$ при $y < b_1$, $f_\eta(y) = -f_\xi(w(y))w'(y)$ при $b_1 \leqslant y \leqslant a_1$ и $f_\eta(y) = 0$ при $y > a_1$.

Суммируя результаты предыдущих абзацев и учитывая знак производной $w'(y)$, можно записать общую формулу $f_\eta(y) = f_\xi(w(y))|w'(y)|$ для плотности вероятности. Здесь y принимает значения из промежутка значений случайной величины η. В остальной части действительной прямой плотность вероятности $f_\eta(y)$, очевидно, равна нулю. Аналогично можно рассмотреть несколько иной случай. Пусть для области определения дифференцируемой функции $g(x)$ можно выделить как участки монотонного возрастания, так и участки монотонного убывания. Значит, функция $g(x)$ является кусочно-монотонной и дифференцируемой. Выделяя участки монотонного возрастания и участки монотонного убывания и повторяя предыдущие рассуждения с небольшими изменениями, можно найти интегральную функцию распределения и плотность вероятности для случайной величины η. В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим простой пример.

Пример 21.2. Найти закон распределения $\eta(\omega) = (\xi(\omega))^2$, если ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f_\xi(x) = \exp\{-x^2/(2\sigma^2)\}/(\sigma\sqrt{2\pi}), \quad \sigma > 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Для функции $y = x^2$ (рис. 21.3) выделим два полуинтервала $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$ монотонности, на которых найдем обратные функции. Для первого промежутка $(-\infty, 0]$ обратная функция

$$x_1 = w_1(y) = -(y)^{1/2},$$

для второго промежутка обратная функция

$$x_2 = w_2(y) = +(y)^{1/2}.$$

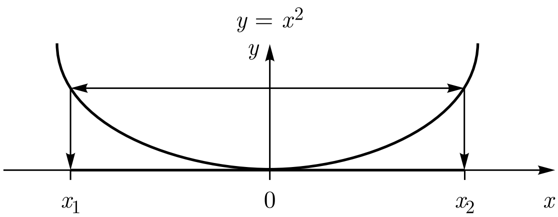


Рис. 21.3

Интегральная функция распределения $F_\eta(y)$ для случайной величины η при $y > 0$ вычисляется следующим образом:

$$F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \eta(\omega) < y\}) =$$
$$= \mathbf{P}(\{\omega\colon\ w_1(y) < \xi < 0\} \cup \{\omega\colon\ 0 \leqslant \xi < w_2(y)\}) =$$
$$= \mathbf{P}(\{\omega\colon\ w_1(y) < \xi(\omega) < 0\}) + \mathbf{P}(\{\omega\colon\ 0 \leqslant \xi(\omega) < w_2(y)\}) =$$

$$= \int\limits_{w_1(y)}^{0} f_\xi(x)\,dx + \int\limits_{0}^{w_2(y)} f_\xi(x)\,dx = (1/(\sigma\sqrt{2\pi}\,)) \times$$

$$\times \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \exp\{-x^2/(2\sigma^2)\}\,dx = 2^{1/2}\sigma^{-1}\pi^{-1/2} \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} \exp\{-x^2/(2\sigma^2)\}\,dx.$$

Так как $\eta(\omega) = (\xi(\omega))^2 \geqslant 0$ для всех $\omega \in \Omega$, то интегральная функция $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \eta(\omega) < y\}) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$ при $y \leqslant 0$. Отсюда находим плотность: $f_\eta(y) = 0$ при $y \leqslant 0$ и $f_\eta(y) = (\sigma\sqrt{2\pi y}\,)^{-1}\exp\{-y/(2\sigma^2)\}$ при $y > 0$.

21.4. Многомерные случайные величины и их функциональные зависимости

Наконец, рассмотрим общий случай, когда дана n-мерная случайная величина $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с интегральной функцией распределения $F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и дано m измеримых отображений: $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\ R^n \to R$, $g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\ R^n \to R, \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\ R^n \to R$. По этим функциям можно составить m следующих одномерных случайных величин: $\eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\colon \Omega \to R$, $\eta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\colon \Omega \to R, \ldots, \eta_m = g_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\colon \Omega \to R$. Если эти новые случайные величины упорядочить, то мы получим m-мерную случайную величину $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ с интегральной функцией $F_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. По определению многомерной интегральной функции имеем

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \ldots, y_m) &= \\ &= \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \eta_1(\omega) < y_1, \eta_2(\omega) < y_2, \ldots, \eta_m(\omega) < y_m\}) = \\ &= \mathbf{P}(\{\omega\colon\ (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in D^n(\mathbf{y})\}), \end{aligned}$$

где область $D^n(\mathbf{y}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) < y_1, g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) < y_2, \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) < y_m\}$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Если $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является n-мерной дискретной случайной величиной с распределением вида $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_k(\omega) = z_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}) = p_{z_1, z_2, \ldots, z_n}$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2, \ldots, z_n \in Z_n$, где z_k принимает счетное число различных значений из множества Z_k значений одномерной случайной величины $\xi_k(\omega)\colon \Omega \to Z_k$, то

$$F_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{B^n} p_{z_1, z_2, \ldots, z_n}, \quad -\infty < y_1 < +\infty,$$

$$-\infty < y_2 < +\infty, \ldots, -\infty < y_m < +\infty,$$

где суммирование ведется по всем наборам $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ из множества

$$B^n(\mathbf{y}) =$$
$$= \{(z_1, z_2, \ldots, z_n)\colon\ z_k \in Z_k, g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) < y_i, k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}\}.$$

Наконец, если $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ есть n-мерная непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то интегральная функция распределения для случайного вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ определяется следующим образом:

$$F_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \int\int\limits_{D^n(\mathbf{y})}\ldots\int f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Пример 21.3. Определить закон распределения суммы случайных величин ξ_1 и ξ_2, если плотность распределения непрерывной случайной величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ равна $f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2)$.

Решение. Обозначим через $F_\eta(y)$ функцию распределения величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Тогда

$$F_\eta(y) = \iint\limits_{D^2(y) = \{(x_1, x_2)\colon\ x_1 + x_2 < y\}} f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{y - x_1} f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2)\, dx_2\right) dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{y - x_2} f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2)\, dx_1\right) dx_2,$$
$$-\infty < y < +\infty.$$

Здесь область $D^2(y)$ плоскости x_1Ox_2 заштрихована на рис. 21.4.

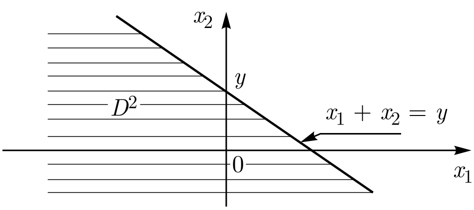


Рис. 21.4

Плотность распределения

$$f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, y - x_1)\, dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\boldsymbol{\xi}}(y - x_2, x_2)\, dx_2,$$
$$-\infty < y < +\infty.$$

Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(y - x_1)\, dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(y - x_2) f_{\xi_2}(x_2)\, dx_2.$$

Каждая из этих формул для $f_\eta(y)$ называется сверткой или композицией функций $f_{\xi_1}(x_1)$ и $f_{\xi_2}(x_2)$. Составление закона распределения суммы независимых случайных величин по законам распределения слагаемых называется композицией законов распределения.

Тестовые вопросы к лекции 21

1. Тип — проверка ответов.

Пусть ξ_1 и ξ_2 являются некоррелированными случайными величинами и $\mathrm{M}\xi_1 = \mathrm{M}\xi_2 = \mathrm{D}\xi_1 = \mathrm{D}\xi_2 = 1$, $\eta_1 = (\xi_1)^2 - 2\xi_1\xi_2$, $\eta_2 = (\xi_2)^2 - \xi_1\xi_2 - 1$, $\eta_3 = (\xi_1)^2 + 3(\xi_2)^2 - 6\xi_1\xi_2 - 2$. Вычислить: 1) $\mathrm{M}\eta_1$; 2) $\mathrm{M}\eta_2$; 3) $\mathrm{M}\eta_3$.

Ответы:

1) $\mathrm{M}\eta_1 = 0$;

2) $\mathrm{M}\eta_2 = 0$;

3) $\mathrm{M}\eta_3 = 0$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть заданы случайная величина $\xi(\omega)\colon \Omega \to R$ и однозначная функция $y = g(x)\colon R \to R$. Определить верное утверждение.

• Объект вида $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ является случайной величиной.

• Объект вида $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ является случайной величиной, если функция $y = g(x)$ является измеримой.

• Объект вида $\eta(\omega) = 3g(\xi(\omega)) + \xi(\omega)$ является случайной величиной.

• Объект вида $\eta(\omega) = g(\xi(\omega)) - \xi(\omega)$ является случайной величиной.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть определены случайные величины $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и однозначное отображение $g(x_1, x_2)\colon R^2 \to R$. Определить верные утверждения.

• Объект $\eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) + \xi_1 + \xi_2$ является случайной величиной.

• Объект вида $\eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ является случайной величиной, если функция $g(x_1, x_2)$ является измеримой.

• Объект $\eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) + \xi_1\xi_2$ является случайной величиной.

• Объект вида $\eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ является случайной величиной, если (ξ_1, ξ_2) является дискретным случайным вектором.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является непрерывной случайной величиной с плотностью распределения $f_\xi(x)$. Пусть функция $g(x)\colon R \to R$ строго возрастает, имеет первую производную и $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$. Определить верное утверждение.

• $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}) = \int\limits_{-\infty}^{w(y)} u f_\xi(u)\,du$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_\xi(u)\,du$.

• $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}) = \int\limits_{0}^{w(y)} f_\xi(u)\,du$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}) = \int\limits_{-\infty}^{w(y)} f_\xi(u)\,du$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является случайной величиной с плотностью распределения $f_\xi(x)$. Пусть функция $g(x)\colon R \to R$ строго возрастает, имеет первую производную и $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$. Определить ошибочные соотношения.

• Рассматривается соотношение вида $f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy = -f_\xi(w(y))w'(y)$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• Рассматривается соотношение вида $f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy = y f_\xi(w(y))w'(y)$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• Рассматривается соотношение вида $f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy = f_\xi(w(y))w'(y)$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• Рассматривается соотношение вида $f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy = f_\xi(w(y))$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является непрерывной случайной величиной с плотностью распределения $f_\xi(x)$. Пусть функция $g(x)$: $R \to R$ строго убывает, имеет первую производную и $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$. Определить верное равенство.

• $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}) = \int\limits_{-\infty}^{w(y)} f_\xi(u)\,du$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{w(y)} f_\xi(u)\,du$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}) = 1 - \int\limits_{0}^{w(y)} f_\xi(u)\,du$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• $F_\eta(y) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{y} f_\xi(u)\,du$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является непрерывной случайной величиной с плотностью распределения $f_\xi(x)$. Пусть функция $g(x)$: $R \to R$ строго убывает, имеет первую производную и $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$. Определить верные соотношения.

• Рассматривается соотношение вида $f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy = -f_\xi(w(y))w'(y)$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• Рассматривается соотношение вида $f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy = f_\xi(w(y))w'(y)$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• Рассматривается соотношение вида $f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy = f_\xi(w(y))|w'(y)|$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

• Рассматривается соотношение вида $f_\eta(y) = dF_\eta(y)/dy = -yf_\xi(w(y))w'(y)$, где $x = w(y)$ является обратной функцией для функции $y = g(x)$.

Лекция 22

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ИЗМЕРИТЕЛЯМИ СЛУЧАЙНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

22.1. Корреляционная зависимость двух случайных величин

Числовая характеристика $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ отвечает не только за смешанный разброс одномерных случайных величин ξ и η, но и в значительной степени дает ответ на вопрос об их статистической зависимости или независимости [1, 3, 4, 8–11]. Для подтверждения этого докажем следующие простые утверждения из элементарной теории корреляцинного анализа.

Лемма 22.1. *Если ξ и η являются независимыми случайными величинами, для которых существуют* $\mathrm{M}\xi$ *и* $\mathrm{M}\eta$, *то числовые характеристики* $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ *и* $\operatorname{corr}(\xi, \eta)$ *равны нулю.*

Доказательство. Из определения корреляционного момента и свойства математического ожидания для независимых величин ξ, η следует, что

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}\xi)(\eta - \mathrm{M}\eta)] = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi) \times \mathrm{M}(\eta - \mathrm{M}\eta) = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\xi, \eta)/(\sigma\xi \times \sigma\eta) = 0.$$

Итак, если случайные величины ξ и η независимы, то их ковариация (или корреляционный момент) равна нулю. Отсюда вытекает, что эти величины обязательно статистически зависимы при $\operatorname{cov}(\xi, \eta) \neq 0$. Можно сказать, что неравенство $\operatorname{cov}(\xi, \eta) \neq 0$ является достаточным условием зависимости случайных величин ξ и η. Значит, ненулевые значения числовых характеристик $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ и $\operatorname{corr}(\xi, \eta)$ характеризуют особый признак линейной статистической зависимости между случайными величинами. К сожалению, некоррелированность в общем случае не влечет независимости случайных величин ξ и η. Если для зависимых случайных величин имеет место равенство $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$, то это обстоятельство объясняется наличием только нелинейной зависимости или отсутствием смешанного разброса между случайными величинами ξ и η. Для подтверждения этого факта рассмотрим следующие примеры.

Пример 22.1. Закон распределения случайного вектора (ξ_1, ξ_2) непрерывного типа определяется плотностью $f(x, y)$. При этом функция $f(x,y) = (6\pi)^{-1}$, если $(x, y) \in D^2 = \{(x, y)\colon 9^{-1}x^2 + 4^{-1}y^2 \leqslant 1\}$, и $f(x, y) = 0$ в остальной части плоскости. Доказать, что ξ_1 и ξ_2 — некоррелированные и зависимые случайные величины.

Решение. Найдем плотности $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(y)$ для величин ξ_1 и ξ_2:

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = (6\pi)^{-1} \int\limits_{-2\sqrt{1-9^{-1}x^2}}^{2\sqrt{1-9^{-1}x^2}} dy = \\ = (9\pi)^{-1} 2\sqrt{9-x^2} \quad \text{при} \quad |x| \leqslant 3,$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = (6\pi)^{-1} \int\limits_{-3\sqrt{1-4^{-1}y^2}}^{3\sqrt{1-4^{-1}y^2}} dx = \\ = (2\pi)^{-1} \sqrt{4-y^2} \quad \text{при} \quad |y| \leqslant 2.$$

Легко видеть, что $f_{\xi_1}(x) = 0$ при $|x| > 3$ и $f_{\xi_2}(y) = 0$ при $|y| > 2$. Отсюда убеждаемся, что $f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) \neq f(x,y)$ при $(x, y) \in D^2$, т. е. случайные величины зависимые. Для вычисления $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ найдем $\mathrm{M}\xi_1$ и $\mathrm{M}\xi_2$:

$$\mathrm{M}\xi_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)\,dx = 2(9\pi)^{-1} \int\limits_{-3}^{+3} x\sqrt{9-x^2}\,dx = \\ = -2(27\pi)^{-1} \sqrt{(9-x^2)^3}\,\Big|_{-3}^{+3} = 0,$$

$$\mathrm{M}\xi_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)\,dy = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-2}^{+2} y\sqrt{4-y^2}\,dy = \\ = -2(12\pi)^{-1} \sqrt{(4-y^2)^3}\,\Big|_{-2}^{+2} = 0.$$

Поэтому имеем

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - \mathrm{M}\xi_1)(y - \mathrm{M}\xi_2) f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= (6\pi)^{-1}\iint\limits_{D^2} xy\,dx\,dy = (6\pi)^{-1}\int\limits_{-3}^{+3} x\left(\int\limits_{-2\sqrt{1-9^{-1}x^2}}^{2\sqrt{1-9^{-1}x^2}} y\,dy\right)dx = 0.$$

Значит, ξ_1 и ξ_2 некоррелированы.

Заметим, что для некоррелированных величин ξ_1 и ξ_2 из утверждений лемм 20.1 и 20.2 следуют равенства $\mathrm{M}(\xi_1 \times \xi_2) = \mathrm{M}\xi_1 \times \mathrm{M}\xi_2$ и $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2$, которые справедливы при независимых случайных величинах. Так как из некоррелированности случайных величин не следует их независимость, то эти равенства справедливы при более слабых условиях. Приведем пример, когда величины связаны друг с другом функциональной или самой жесткой зависимостью и, тем не менее, некоррелированы.

Пример 22.2. Пусть плотность $f_{\xi_1}(x)$ случайной величины ξ_1 является симметричной функцией относительно оси ординат и моменты $\beta_2\xi_1$, $\beta_3\xi_1$ конечны. Определить корреляционный момент $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)$, если $\xi_2 = (\xi_1)^2$. Из условия задачи $\mathrm{M}\xi_1 = 0$ и функциональной зависимости вида $\xi_2 = (\xi_1)^2$ получаем, что

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = \mathrm{M}\big[\xi_1((\xi_1)^2 - \mathrm{M}(\xi_1)^2)\big] =$$
$$= \mathrm{M}\big[(\xi_1)^3 - \xi_1\mathrm{M}(\xi_1)^2\big] = \mathrm{M}(\xi_1)^3 - \mathrm{D}\xi_1\mathrm{M}\xi_1.$$

В силу симметрии распределения случайной величины ξ_1 все ее центральные моменты нечетного порядка будут равны нулю. Отсюда получаем, что $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = 0$. Итак, величины ξ_1 и ξ_2 некоррелированы, хотя между ними имеется функциональная зависимость.

Решения примеров 22.1 и 22.2 показывают, что условие $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = 0$ не является достаточным критерием независимости случайных величин. Выводы из решений этих примеров на содержательном уровне можно пояснить двумя обстоятельствами. Во-первых, корреляционный момент характеризует степень взаимного рассеивания случайных величин, так как $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = \mathrm{M}\big[(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)\big]$. Поэтому рассеивание одной случайной величины может компенсировать разброс другой случайной величины, так что значение корреляционного момента будет равно нулю. Во-вторых, ковариация характеризует лишь один частный случай вероятностной зависимости, так называемую линейную статистическую (корреляционную) зависимость. Более того, рассмотрим линейную функциональную зависимость между случайными величинами, при которой корреляционный момент будет всегда отличен от нуля.

Лемма 22.2. *Пусть случайные величины* ξ_1 *и* ξ_2 *связаны функциональной линейной зависимостью* $\xi_2 = c\xi_1 + b$, *причем* $c \neq 0$. *Тогда корреляционный момент* $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = c(\sigma\xi_1)^2 \neq 0$.

Доказательство. Из линейной зависимости ξ_1 и ξ_2 получим, что $\mathrm{M}\xi_2 = c\mathrm{M}\xi_1 + b$, $\mathrm{D}\xi_2 = c^2\mathrm{D}\xi_1$, $\sigma\xi_2 = |c|\sigma\xi_1$. Для корреляционного момента находим

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{M}\big[(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(c\xi_1 + b - c\mathrm{M}\xi_1 - b)\big] = c\mathrm{M}\big[(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)^2\big] = c(\sigma\xi_1)^2 \neq 0.$$

Лемма доказана. Отсюда также выводим, что коэффициент корреляции $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) = c(\sigma\xi_1)^2(|c|\sigma\xi_1\sigma\xi_1)^{-1} = |c|c^{-1}$. Итак, $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| = 1$. Имеет место и обратное утверждение.

Лемма 22.3. *Если* $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| = 1$, *то между случайными величинами имеется функциональная линейная зависимость.*

Доказательство. Для ξ_1 и ξ_2 получаем, что

$$\mathrm{M}\big[(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\sigma(\xi_1))^{-1} + (\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)(\sigma(\xi_2))^{-1}\big]^2 = \mathrm{D}\xi_1(\sigma\xi_1)^{-2} + \mathrm{D}\xi_2(\sigma\xi_2)^{-2} + 2\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)/(\sigma\xi_1\sigma\xi_2) = 2 + 2\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2).$$

Аналогично выводим, что

$$\mathrm{M}\big[(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\sigma(\xi_1))^{-1} - (\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)(\sigma(\xi_2))^{-1}\big]^2 = 2 - 2\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2).$$

Допустим, что $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) = 1$. Тогда находим

$$\mathrm{M}\big[(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\sigma\xi_1)^{-1} - (\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)(\sigma\xi_2)^{-1}\big]^2 = 2 - 2\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

Отсюда получим, что

$$(\sigma\xi_1)^{-1}(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1) - (\sigma\xi_2)^{-1}(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2) = 0$$

и $\xi_2 = \mathrm{M}\xi_2 + (\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)\sigma(\xi_2)(\sigma\xi_1)^{-1}$. Если теперь $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) = -1$, то выводим, что

$$\mathrm{M}\big[(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)(\sigma\xi_1)^{-1} + (\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2)(\sigma\xi_2)^{-1}\big]^2 = 2 + 2\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

Тогда $(\sigma\xi_1)^{-1}(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1) + (\sigma\xi_2)^{-1}(\xi_2 - \mathrm{M}\xi_2) = 0$ и случайная величина определяется равенством

$$\xi_2 = \mathrm{M}\xi_2 - (\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)\sigma(\xi_2)(\sigma\xi_1)^{-1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 22.4. *Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины и $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)$ — коэффициент корреляции. Тогда имеет место неравенство $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| \leqslant 1$.*

Доказательство. Рассмотрим случайные величины вида $\xi_3 = (\sigma\xi_2)\xi_1 + (\sigma\xi_1)\xi_2$ и $\xi_4 = (\sigma\xi_2)\xi_1 - (\sigma\xi_1)\xi_2$. Тогда

$$\mathrm{D}\xi_3 = (\sigma\xi_2)^2\mathrm{D}\xi_1 + (\sigma\xi_1)^2\mathrm{D}\xi_2 + 2(\sigma\xi_2)(\sigma\xi_1)\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2),$$

$$\mathrm{D}\xi_4 = (\sigma\xi_2)^2\mathrm{D}\xi_1 + (\sigma\xi_1)^2\mathrm{D}\xi_2 - 2(\sigma\xi_2)(\sigma\xi_1)\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2).$$

Учитывая неравенства $\mathrm{D}\xi_3 \geqslant 0$ и $\mathrm{D}\xi_4 \geqslant 0$, преобразуем эти выражения:

$$(\sigma\xi_2)^2(\sigma\xi_1)^2 + (\sigma\xi_1)^2(\sigma\xi_2)^2 + 2(\sigma\xi_2)(\sigma\xi_1)\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0,$$

$$(\sigma\xi_2)^2(\sigma\xi_1)^2 + (\sigma\xi_1)^2(\sigma\xi_2)^2 - 2(\sigma\xi_2)(\sigma\xi_1)\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0,$$

или $(\sigma\xi_2)(\sigma\xi_1) + \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$, $(\sigma\xi_2)(\sigma\xi_1) - \operatorname{cov}(\xi_{1,2}) \geqslant 0$. Отсюда следуют неравенства $1 + \operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$, $1 - \operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$.

Если $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$, то из $1 - \operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$ получаем: $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \leqslant 1$. Если $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \leqslant 0$, то из $1 + \operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$ получаем: $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant -1$. Итак, $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| \leqslant 1$. Лемма 22.4 доказана.

22.2. Условное математическое ожидание

Если числовая характеристика $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)|$ принимает наибольшее значение, то между случайными величинами ξ_1 и ξ_2 существует жесткая линейная зависимость. Пусть $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| \neq 1$. Тогда из вида формул для ковариации случайных величин на содержательном уровне можно сделать такой вывод. Если $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) > 0$, то с ростом одной случайной величины другая случайная величина или точно возрастает, или проявляет тенденцию к возрастанию. Если $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) < 0$, то с ростом одной случайной величины другая случайная величина или точно убывает, или имеет тенденцию к убыванию. Поэтому для коррелированных случайных величин математическое ожидание одной случайной величины меняется с изменением значения другой случайной величины.

Пример 22.2. Пусть ξ_2 — урожай зерна, полученный с каждого из трех одинаковых по площади участков земли, выраженный в некоторых единицах, ξ_1 — количество внесенных удобрений в некоторых единицах на каждый из участков. При $\xi_1 = 1$ случайная величина ξ_2 приняла значения 5 на первом участке, 6 на втором участке и 10 на третьем участке. При $\xi_1 = 2$ случайная величина ξ_2 приняла значения 4, 8 и 11 соответственно на первом, втором и третьем участке. Итак, с одинаковых по площади участков при равных количествах внесенных удобрений снимают различные урожаи, т. е. ξ_2 не является функцией от ξ_1. Это объясняется влиянием таких случайных факторов, как осадки, температура воздуха и др. Вместе с тем, как показывает опыт, средний урожай является функцией от количества внесенных удобрений. Можно сказать, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 скорее всего корреляционно связаны.

С другой стороны, случайные величины могут быть некоррелированными и одновременно статистически зависимыми. В этом случае ковариация теряет смысл количественной меры статистической зависимости. Поэтому возникает задача о другом характере измерения степени статистической зависимости между случайными величинами. Такой мерой статистической зависимости между случайными величинами являются их условные математические ожидания.

Переходим к понятию условного математического ожидания на основе хорошо известных понятий условного эксперимента, условного вероятностного пространства [9] и определений из лекции 16 условных законов распределения одной случайной величины относительно другой случайной величины. Пусть $\mathrm{M}|\xi_1| < +\infty$, $\mathrm{M}|\xi_2| < +\infty$ и случайные величины являются зависимыми. Тогда интеграл Стилтьеса $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_{\xi_1}(x|y)$ как функцию от переменной $y \in R$ называют условным математическим ожиданием случайной величины ξ_1 относительно случайной величины ξ_2 и обозначают $\mathrm{M}(\xi_1|\xi_2)$. Аналогично интеграл Стилтьеса $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,dF_{\xi_2}(y|x)$ как функцию от переменной $x \in R$ называют условным математическим ожиданием случайной величины ξ_2 относительно величины ξ_1 и обозначают $\mathrm{M}(\xi_2|\xi_1)$.

22.3. Регрессия случайных величин

Если $X = \{\xi_1(\omega)\colon\ \omega \in \Omega\} \subset R$, то интеграл Стилтьеса $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,dF_{\xi_2}(y|x)$ как функцию от $x \in X$ называют регрессией ξ_2 по ξ_1 и обозначают $\mathrm{M}(\xi_2|\xi_1 = x)$ или $R_{\xi_2}|\xi_1(x)$. Область определения функции $R_{\xi_2|\xi_1}(x)$ совпадает с множеством X возможных значений величины ξ_1. Функция $R_{\xi_2|\xi_1}(x)$ есть сужение функции $\mathrm{M}(\xi_2|\xi_1)$ на X. Аналогично можно рассмотреть регрессию случайной величины ξ_1 по ξ_2, которая для всех $y \in Y = \{\xi_2(\omega)\colon\ \omega \in \Omega\}$ определяется соотношением $R_{\xi_1|\xi_2}(y) = \mathrm{M}(\xi_1|\xi_2 = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_{\xi_1}(x|y)$. Пусть теперь случайный вектор (ξ_1, ξ_2) является дискретным, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ и $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_i,\ \ \xi_2(\omega) = y_j\}) = r_{i,j}$, то $R_{\xi_2|\xi_1}(x) = \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_{i,j}\right)^{-1} \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j r_{i,j}$ при $x = x_i \in X$. На рис. 22.1 отображен график функции $R_{\xi_2|\xi_1}(x)$ в виде отдельных черных точек регрессии.

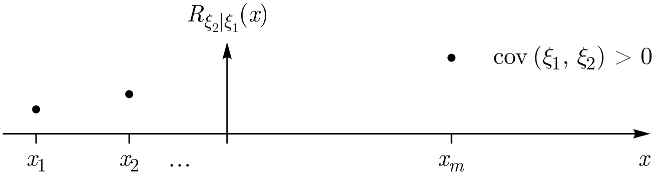


Рис. 22.1

Если случайный вектор (ξ_1, ξ_2) обладает плотностью распределения $f(x, y)$, то

$$R_{\xi_2|\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y|x)\,dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, v)\,dv\right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y)\,dy$$

при $x \in X \cap \{x\colon\ f_{\xi_1}(x) > 0\}$ и $R_{\xi_2|\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)\,dy$ при $x \in$ $\in X \cap \{x\colon\ f_{\xi_1}(x) = 0\}$. Также можно построить регрессию величины ξ_1 по ξ_2, которая для всех $y \in Y = \{\xi_2(\omega)\colon \omega \in \Omega\}$ равна

$$R_{\xi_1|\xi_2}(y) = \mathrm{M}(\xi_1|\xi_2 = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_{\xi_1}(x|y).$$

На рис. 22.2 представлен типичный пример графика функции $R_{\xi_2|\xi_1}(x)$ при $X = [a, b]$. Этот график называется линией регрессии величины ξ_2 по ξ_1.

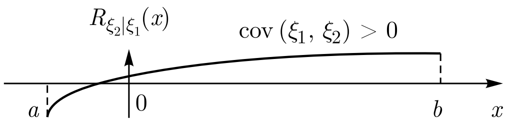


Рис. 22.2

График функции $R_{\xi_2|\xi_1}(x)$ показывает изменение условного математического ожидания $\mathrm{M}(\xi_2|\xi_1 = x)$ случайной величины ξ_2 в зависимости от значения x, принятого другой случайной величиной ξ_1. При этом с ростом значений случайной величины ξ_1 растет значение условного математического ожидания другой случайной величины. Как правило, корреляционный момент в этом случае принимает строго положительное значение. На рис. 22.1 и 22.2 отмечено, что $\mathrm{cov}\,(\xi_1, \xi_2) > 0$. Если случайные величины независимы, то линии регрессии $R_{\xi_2|\xi_1}(x)$ и $R_{\xi_1|\xi_2}(y)$ параллельны соответствующей оси координат (см. рис. 22.3, a, $б$).

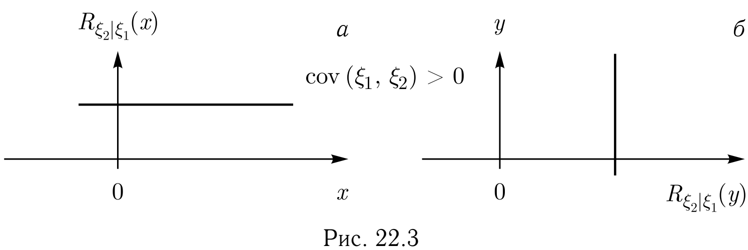


Рис. 22.3

В этом случае условное математическое ожидание одной случайной величины остается неизменным при любых значениях другой случайной величины и всегда выполняется равенство $\mathrm{cov}\,(\xi_1, \xi_2) = 0$. Заметим, что в некоторых случаях даже для зависимых случайных величин значения условного математического ожидания одной случайной величины остаются постоянными при изменении значений другой случайной величины.

Пусть имеет место строго линейная зависимость. Тогда линии регрессии будут прямыми линиями с углом наклона, тангенс которого больше нуля, если величина $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) = 1$, и меньше нуля при $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) = -1$. На рис. 22.4 отображена такая ситуация.

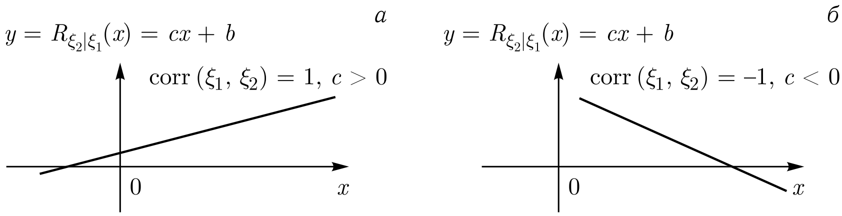


Рис. 22.4

О характере корреляционной зависимости между величинами ξ_1 и ξ_2 можно судить исходя из наблюдений картины рассеивания при проведении эксперимента. Для этого над случайными величинами проделывают большое число измерений, а результаты измерений x и y, отмеченные символом «*» на рис. 22.5, *а*–*г*, фиксируют на плоскости.

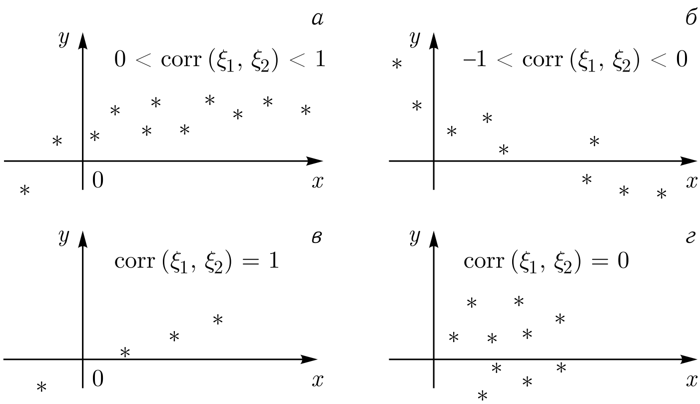


Рис. 22.5

Приведем пример коррелированных случайных величин. Пусть ξ_1 — ошибка прицельного устройства и ξ_2 — отклонение точки падения снаряда от точки цели. Результаты опытов показывают, что с увеличением ошибки прицельного устройства увеличивается условное среднее отклонение точки попадания снаряда от точки цели. Эту ситуацию можно проиллюстрировать рис. 22.5, *а*, для которого имеет место неравенство вида $0 < \operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) < 1$. Рассмотрим другой пример. Пусть ξ_2 — наибольшее ускорение, сообщаемое ракете двигателем, и ξ_1 — время работы двигателя до полного сгорания топлива. В этом эксперименте, наоборот, с уменьшением времени работы двигателя до полного сгорания топлива увеличивается условное среднее ускорение ракеты. Этот эксперимент соответствует рис. 22.5, *б*, когда коэффициент корреляции удовлетворяет соотношению $-1 < \operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) < 0$.

Тестовые вопросы к лекции 22

1. Тип — проверка ответов.

Пусть плотность распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ равна $f_\xi(x_1, x_2)$. Найти законы распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Ответы:

1) $F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1;$

2) $F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{y-x_2} f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2;$

3) $f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, y - x_1)\, dx_1;$

4) $f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\boldsymbol{\xi}}(y - x_2, x_2)\, dx_2.$

2. Тип — множественный выбор.

Пусть ξ и η являются независимыми случайными величинами, для которых числовые характеристики $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ конечны. Определить верные равенства.

- $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 1$.
- $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$.
- $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$.
- $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 1$.

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть ξ и η являются случайными величинами, для которых числовые характеристики $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{M}\eta$ конечны. Определить верное утверждение.

- Если $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, то величины ξ_1 и ξ_2 будут независимыми.
- Если $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \neq 0$, то величины ξ_1 и ξ_2 будут зависимыми.

• Если $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, то величины ξ_1 и ξ_2 будут зависимыми.

• Если $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, то величины ξ_1 и ξ_2 будут независимыми.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть ξ является величиной, для которой математическое ожидание $\mathrm{M}\xi$ конечно, и $\eta = c\xi + b$, причем $c \neq 0$. Определить верные соотношения.

• $\operatorname{cov}(\xi, \eta) > 0$.

• $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = c\mathrm{D}\xi$.

• $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 1$.

• $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = |c|c^{-1}$.

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть ξ_1 и ξ_2 являются случайными величинами, для которых числовые характеристики $\mathrm{M}\xi_1$ и $\mathrm{M}\xi_2$ конечны. Определить верное равенство.

• $\xi_2 = \mathrm{M}\xi_2 + (\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)\sigma(\xi_2)(\sigma\xi_1)^{-1}$, если $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| = 1$.

• $\xi_2 = \mathrm{M}\xi_2 - (\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)\sigma(\xi_2)(\sigma\xi_1)^{-1}$, если $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| = 1$.

• $\xi_2 = \mathrm{M}\xi_2 + (\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)\sigma(\xi_2)(\sigma\xi_1)^{-1}$, если $\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) = 1$.

• $\xi_2 = \mathrm{M}\xi_2 - 2(\xi_1 - \mathrm{M}\xi_1)\sigma(\xi_2)(\sigma\xi_1)^{-1}$, если $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| = 1$.

6. Тип — множественный выбор.

Пусть ξ_1 и ξ_2 являются случайными величинами, для которых характеристики $\mathrm{M}\xi_1$ и $\mathrm{M}\xi_2$ конечны. Определить верные соотношения.

• $1 + \operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$.

• $1 - \operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$.

• $1 - 2\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$.

• $1 + 2\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) \geqslant 0$.

7. Тип — одиночный выбор.

Пусть ξ_1 и ξ_2 являются величинами, для которых числовые характеристики $\mathrm{M}|\xi_1| < +\infty$ и $\mathrm{M}|\xi_2| < +\infty$. Определить верное утверждение.

• $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| < 3$.

• $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| \leqslant 1/3$.

• $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| > 1$.

• $|\operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2)| > 1/3$.

Лекция 23

НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

23.1. Схема испытаний Бернулли

Большое число различных случайных величин широко используется для построения вероятностных моделей измерителей элементарных исходов статистически устойчивых экспериментов. Часто случайные величины, которые имеют определенный закон распределения, связаны с различными экспериментами. Поэтому важно изучать свойства такого рода случайных величин, не указывая на их происхождение. Прежде всего перейдем к изучению различных классов дискретных случайных величин [1, 3, 4, 8–11]. Биномиальное распределение является одним из наиболее распространенных дискретных распределений. Оно возникает при реализации схемы независимых испытаний (схемы Бернулли). Часто на практике приходится встречаться с задачами, в которых один и тот же опыт E повторяется независимым образом n раз. В результате каждого такого опыта может появиться или не появиться некоторое событие A соответственно с вероятностями p и $g = 1 - p$. Причем нас интересует не элементарный исход отдельного опыта, а результат всей серии или последовательности испытаний из n опытов с точки зрения наступления события A или события $\overline{A}$. Рассмотрим примеры независимых испытаний: 1) несколько последовательных бросков монеты, например n раз; 2) многократное бросание игральной кости, например пятикратное; 3) шестикратное извлечение карты из игральной колоды при условии, что вынутая карта каждый раз возвращается в колоду и карты перемешиваются. Приведем примеры последовательности зависимых опытов: 1) четырехкратное извлечение карты из колоды без ее возвращения; 2) проведение нескольких выстрелов из орудия с корректировкой.

Обозначим символом A_i событие, состоящее в том, что в i-м опыте E осуществилось событие A, а символом $\overline{A}_i$ обозначим событие, противоположное A_i. Тогда в результате проведения серии из n последовательных опытов $E_1 = E$, $E_2 = E, \ldots, E_n = E$ мы будем наблюдать 2^n элементарных исходов с описанием вида

$$\omega_1 = (A_1, A_2, \ldots, A_n),$$
$$\omega_2 = (\overline{A}_1, A_2, \ldots, A_n), \ldots, \omega_{2^n} = (\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n).$$

Так как опыт E независимым образом повторяется n раз, то вероятности элементарных исходов для схемы серии будут равны $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = p^n$, $\mathbf{P}(\{\omega_2\}) = qp^{n-1}, \ldots, \mathbf{P}(\{\omega_{2^n}\}) = qn$. Тогда вероятностная модель для схемы Бернулли имеет вид $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2^n}\}$ и $\mathcal{F} = \{B\colon\ B \subset \Omega\}$. Рассмотрим событие $B_m \in \mathcal{F}$, которое заключается в наступлении события A ровно m раз. Поэтому событие $B_m = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \{\omega_{m_j}\}$, где $N = C_n^m$ — число сочетаний из n элементов по m. В описании каждого элементарного исхода $\{\omega_{m_j}\}$ имеется ровно m символов вида A_i и ровно $n-m$ символов вида $\overline{A}_i$. Так как $\mathbf{P}(\{\omega_{m_j}\}) = p^m q^{n-m}$ при $j = 1, 2, \ldots, N$, то имеет место формула Бернулли вида $\mathbf{P}(B_m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Часто биномиальную вероятность $C_n^m p^m q^{n-m}$ обозначают через $P_n(m)$. Для составного эксперимента в схеме Бернулли с параметрами n и p наибольший практический интерес представляют следующие его исходы и соответствующие им вероятности:

1) вероятность события B_0 того, что среди n независимых испытаний событие A не появится ни разу, равна $\mathbf{P}(B_0) = q^n$;

2) вероятность события B_1 того, что среди n независимых испытаний событие A появится ровно один раз, равна $\mathbf{P}(B_1) = npq^{n-1}$;

3) вероятность события $\bigcup\limits_{m=1}^{n} B_m$ того, что среди n независимых испытаний случайное событие A появится, по крайней мере, один раз, равна $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{m=1}^{n} B_m\Big) = \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{m=0}^{n} B_m\Big) - \mathbf{P}(B_0) = 1 - q^n$;

4) при n независимых испытаниях вероятность появления события A не менее двух раз равна $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{m=2}^{n} B_m\Big) = 1 - q^n - npq^{n-1}$;

5) вероятность события $\bigcup\limits_{i=0}^{m} B_i$ того, что среди n независимых испытаний событие A появится не более m раз, равна $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=0}^{m} B_i\Big) = \sum\limits_{i=0}^{m} C_n^i p^i q^{n-i}$;

6) вероятность события $\bigcup\limits_{i=m}^{n} B_i$ того, что среди n независимых испытаний событие A появится не менее m раз, равна $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=m}^{n} B_i\Big) = \sum\limits_{i=m}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}$.

Пример 23.1. Вероятность поражения цели при одиночном выстреле любого из n орудий равна $p = 0{,}01$. Сколько потребуется орудий, чтобы вероятность поражения цели при одном залпе была больше половины? Используя приведенные формулы, найдем вероятность того, что заряд попадет в цель хотя бы из одного орудия: $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{m=1}^{n} B_m\Big) = 1 - q^n = 1 - (0{,}99)^n$. Затем из требования задачи последовательно выводим: $1 - (0{,}99)^n > 2^{-1}$, $n \lg(99/100) < \lg(1/2)$, $\lg 2 < n(2 - \lg 99)$, $n > \lg 2/(2 - \lg 99) \approx$ ≈ 70. Итак, число орудий должно быть более 70.

23.2. Биномиальная случайная величина

Рассмотрим случайную величину ξ, которая подсчитывает число появлений события A в серии из n независимых испытаний. Очевидно, что возможными значениями этой случайной величины будут все целые числа от 0 до n.

Определение 23.1. Дискретная случайная величина ξ называется биномиальной, если ее ряд распределения зависит от параметров p, n и имеет представленный в табл. 23.1 вид.

Таблица 23.1

ξ	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$	n
$\mathbf{P}(\cdot)$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$\cdots$	$P_m(m)$	$\cdots$	$P_n(n)$

Распределение $\{P_n(m); m = 0, 1, \ldots, n\}$ называется биномиальным, потому что разложение бинома $(p+q)^n$ по формуле Ньютона имеет вид $(p+q)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$. Интегральная функция распределения для биномиальной случайной величины равна $F(x) = \sum\limits_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m}$. Введем понятие производящей функции для произвольной неотрицательной целочисленной случайной величины η и ее дискретного распределения. Производящей функцией для случайной величины η называется

ряд вида $\Pi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k p_k$. Так как выполняется условие нормировки $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, то $\Pi(z)$ всегда сходится в области $|z| \leqslant 1$. Перейдем теперь к определению основных характеристик биномиальной случайной величины ξ. Это можно сделать, используя для нее производящую функцию:

$$\Pi(z) = \sum_{m=0}^{n} z^m P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m = (pz+q)^n.$$

Дифференцируя по z соотношение $(pz+q)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m$, получим, что $np(pz+q)^{n-1} = \sum\limits_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m} z^{m-1} = \sum\limits_{m=0}^{n} m P_n(m) z^{m-1}$.

При $z = 1$, учитывая равенство $p + q = 1$, имеем: $np = \sum\limits_{m=0}^{n} m P_n(m) = \mathrm{M}\xi$. Найдем дисперсию биномиальной случайной величины ξ. Дифференцируя дважды равенство $(pz+q)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m$ и полагая затем $z = 1$, последовательно получаем

$$n(n-1)p^2(pz+q)^{n-2} = \sum_{m=0}^{n} m(m-1) P_n(m) z^{m-2},$$

$$n(n-1)p^2 = \sum_{m=0}^{n} m(m-1) P_n(m),$$

$$n(n-1)p^2 = \sum_{m=0}^{n} m^2 P_n(m) - \sum_{m=0}^{n} m P_n(m),$$

$$n(n-1)p^2 = \alpha_2(\xi) - \mathrm{M}(\xi).$$

Итак, $\alpha_2(\xi) = n(n-1)p^2 + \mathrm{M}(\xi)$. Поэтому

$$\mathrm{D}(\xi) = \alpha_2(\xi) - (\mathrm{M}(\xi))^2,$$

$$\mathrm{D}(\xi) = n(n-1)p^2 + \mathrm{M}(\xi) - (\mathrm{M}(\xi))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ для биномиальной случайной величины равно $(npq)^{1/2}$.

Рассмотрим другой способ нахождения характеристик $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{D}\xi$. Пусть ξ_i считает число наступления события A в схеме независимых испытаний в i-м опыте. Случайная величина ξ_i называется бернуллиевской. Отсюда следует, что биномиальная случайная величина $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ и вероятность $\mathbf{P}(\xi_i = 0) = q$, $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathrm{M}\xi_i = p$, $\mathrm{M}\xi = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2 + \ldots + \mathrm{M}\xi_n = np$. Так как случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и $\mathrm{D}\xi_i = pq$, то $\mathrm{D}\xi = \mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2 + \ldots + \mathrm{D}\xi_n = npq$.

Наконец получим формулы для $\mathrm{Mo}(\xi)$ и $\mathrm{Mo}^*(\xi)$. С этой целью преобразуем выражение

$$P_n(m)/P_n(m-1) = C_n^m p^m q^{n-m} / C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1} = \frac{(n-m+1)p}{mq} = 1 + \frac{(1+n)p - m}{mq}.$$

Отсюда выводим, что при значениях $m < (n+1)p$ функция $P_n(m)$ возрастает, а при значениях $m > (n+1)p$ функция $P_n(m)$ убывает. Значит, если число $(n+1)p$ не является целым, то величина $\mathrm{Mo}^*(\xi) = \left[(n+1)p\right]$. Здесь символ $\left[(n+1)p\right]$ обозначает целую часть числа $(n+1)p$. Если же $(n+1)p$ — натуральное число, то $\mathrm{Mo}^*(\xi) \in \{(n+1)p - 1, (n+1)p\}$. Аналогично можно найти $\mathrm{Mo}(\xi)$. Например, пусть $1 < (n+1)p < n$ и число $(n\ +1)p$ не является целым. Тогда мода и наивероятнейшее значение биномиальной случайной величины совпадают, т. е. величина $\mathrm{Mo}^*\xi = \mathrm{Mo}\xi = \left[(n+1)p\right]$. Рассмотрим другой случай. Если $(n+1)p > n \geqslant 1$, то $\mathrm{Mo}^*\xi = n$, и $\mathrm{Mo}\xi$ не существует. В зависимости от значений параметров n и p в учебнике [9] выделяется семь различных вариантов для моды $\mathrm{Mo}\xi$ и наивероятнейшего значения $\mathrm{Mo}^*\xi$ биномиальной случайной величины ξ.

23.3. Пуассоновская случайная величина

Рассмотрим дискретную случайную величину ξ, которая может принимать только целые неотрицательные значения 0, $1, \ldots, m, \ldots$

Определение 23.2. Дискретная случайная величина ξ распределена по закону Пуассона, если $p_m = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = m\}) = (\lambda^m \exp\{-\lambda\})/m!$, где $m = 0, 1, \ldots$ и λ — положительный параметр.

Ряд распределения такой величины представлен в табл. 23.2.

Таблица 23.2

ξ	0	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$
$\mathbf{P}(\cdot)$	p_0	p_1	p_2	$\cdots$	p_m	$\cdots$

Приведем примеры такого рода случайных величин: 1) случайное число ξ частиц, испускаемых радиоактивным изотопом за единицу времени; 2) случайное число ξ вызовов, поступающих на телефонную станцию за единицу времени; 3) случайное число ξ элементов сложного устройства (атомная электростанция, космический корабль и т. д.), отказавших в течение заданного отрезка времени; 4) случайное число ξ электронов, вылетевших с катода электронной лампы за определенный промежуток времени; 5) случайное число ξ автомашин, прибывающих к изолированному перекрестку за единицу времени. Имеет место условие нормировки $\exp\{-\lambda\}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\lambda^m/m! = \exp\{-\lambda\}\exp\{\lambda\} = 1$. Функция распределения для закона Пуассона $F(x) = \sum\limits_{m<x}(\lambda^m \exp\{-\lambda\})/m!$ Например, значение $F(1) = \mathbf{P}(\{\omega:\ \xi(\omega) < 1\}) = \mathbf{P}(\{\omega:\ \xi(\omega) = 0\}) = \exp\{-\lambda\}$ и вероятность вида $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant 1\}) = 1 - \exp\{-\lambda\}$. На рис. 23.1 представлены многоугольники случайных величин с параметрами $\lambda = 0{,}5$; $\lambda = 1$; $\lambda = 3{,}5$.

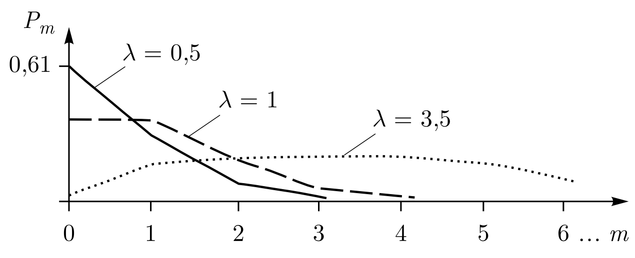


Рис. 23.1

Определим числовые характеристики Mξ, $\alpha_2\xi$, Dξ и $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ, распределенной по закону Пуассона:

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{m=0}^{\infty} m p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m(\lambda^m \exp\{-\lambda\})/m! =$$

$$= \lambda \exp\{-\lambda\} \sum_{m=1}^{\infty} m\lambda^{m-1}/m! = \lambda \exp\{-\lambda\}\exp\{\lambda\} = \lambda,$$

$$\alpha_2\xi = \sum_{m=0}^{\infty} m^2(\lambda^m \exp\{-\lambda\})/m! = \lambda \exp\{-\lambda\}\sum_{m=1}^{\infty} m\lambda^{m-1}/(m-1)! =$$
$$= \lambda \exp\{-\lambda\} \sum_{m=1}^{\infty}(m-1+1)\lambda^{m-1}/(m-1)! =$$
$$= \lambda \exp\{-\lambda\} \sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\lambda^{m-1}/(m-1)! +$$
$$+ \lambda \exp\{-\lambda\} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1}/(m-1)! =$$
$$= \lambda^2 \exp\{-\lambda\} \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-2}/(m-2)! + \lambda \exp\{-\lambda\} \exp\{\lambda\} = \lambda^2 + \lambda,$$
$$\mathrm{D}\xi = \alpha_2\xi - (\mathrm{M}\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda, \quad \sigma(\xi) = \lambda^{1/2}.$$

Значит, $\mathrm{M}\xi = \mathrm{D}\xi$ дискретной случайной величины ξ, распределенной по закону Пуассона.

Найдем наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi$ и значение $\mathrm{Mo}\xi$ моды пуассоновской случайной величины. Нетрудно установить, что $p_m/p_{m-1} = \lambda/m$. Отсюда получаем единственное значение $[\lambda]$ для $\mathrm{Mo}^*\xi$, если λ — дробное число, и два значения вида λ и $\lambda - 1$, если λ — целое. При $\lambda < 1$ сразу имеем: $\mathrm{Mo}^*\xi = [\lambda] = 0$, и, значит, мода $\mathrm{Mo}\xi$ пуассоновской случайной величины не существует. Если параметр $\lambda = 1$, то $\mathrm{Mo}^*\xi \in \{0, 1\}$, и мода $\mathrm{Mo}\xi = 1$. Итак, при $\lambda = 1$ распределение пуассоновской величины является унимодальным. Наконец, при $\lambda > 1$ получаем, что $\mathrm{Mo}^*\xi = \mathrm{Mo}\xi$. Если параметр λ равен трем, то $\mathrm{Mo}^*\xi = \mathrm{Mo}\xi \in \{2, 3\}$ и в этом случае распределение пуассоновской случайной величины является мультимодальным.

Так как при фиксированном $m = 0, 1, \ldots$ вероятность p_m равна величине $(\lambda^m \exp\{-\lambda\})/m!$, то производящая функция $\Pi\xi(z) = \exp\{-\lambda\} \sum\limits_{m=0}^{\infty} z^m\lambda^m/m! = \exp\{-\lambda(1-z)\}$. Отсюда для любого $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$(d^k\Pi_\xi(z)/dz^k)\big|_{z=1} = (d^k \exp\{-\lambda(1-z)\}/dz^k)\big|_{z=1} = \lambda^k.$$

Используя это равенство для производных и соотношение (10.1) из учебника [9], получим начальные моменты $\alpha_1\xi$, $\alpha_2\xi$, $\alpha_3\xi$, $\alpha_4\xi$ пуассоновской случайной величины: $\alpha_1\xi = \lambda$, $\alpha_2\xi = \lambda^2 + \lambda$, $\alpha_3\xi = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$, $\alpha_4\xi = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$. Найдем третий центральный момент $\beta_3\xi$, коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}\xi$, четвертый центральный момент $\beta_4\xi$ и эксцесс $\mathrm{Э}\xi$:

$$\beta_3\xi = \sum_{k=0}^{3} C_3^k(-1)^{3-k}(\alpha_1\xi)^{3-k}\alpha_k\xi = \lambda, \quad \mathrm{Ka}\xi = \beta_3\xi/(\sigma\xi)^3 = \lambda^{-1/2},$$

$$\beta_4\xi = \sum_{k=0}^{4} C_4^k(-1)^{4-k}(\alpha_1\xi)^{4-k}\alpha_k\xi = 3\lambda^2 + \lambda,$$

$$\mathrm{Э}\xi = (\sigma\xi)^{-4}\beta_4\xi - 3 = \lambda^{-1}.$$

Пример 23.2. На АТС за одну минуту поступает случайное число ξ вызовов по закону Пуассона. При этом $\mathrm{M}\xi = 10$. Найти вероятность того, что за это время поступит: а) ровно два вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов. Из условия задачи получаем:

а) $\mathbf{P}(\xi = 2) = (10^2\exp\{-10\})/2! \approx 0{,}002270$;

б) $\mathbf{P}(\xi < 2) = \exp\{-10\} + (10^1\exp\{-10\})/1! \approx 0{,}000495$;

в) $\mathbf{P}(\xi \geqslant 2) = 1 - \mathbf{P}(\xi < 2) \approx 1 - 0{,}000495 = 0{,}999505$.

Тестовые вопросы к лекции 23

1. Тип — проверка ответов.

Рассматривается схема Бернулли с параметрами $p = 1/2$ и $n = 3$. Вычислить следующие вероятности: 1) вероятность события B_0 того, что среди n независимых испытаний событие A не появится ни разу; 2) вероятность события B_1 того, что среди n независимых испытаний событие A появится ровно один раз; 3) вероятность события $\bigcup\limits_{m=1}^{n} B_m$ того, что среди n испытаний Бернулли событие A появится по крайней мере один раз.

Ответы:

1) $\mathbf{P}(B_0) = 1/8$;

2) $\mathbf{P}(B_1) = 3/8$;

3) $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{m=1}^{n} B_m\right) = 7/8$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией биномиальной случайной величины с параметрами p и n. Определить верное равенство.

- $F(x) = \sum\limits_{m \leqslant x} C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = (1-p)$.
- $F(x) = \sum\limits_{m < x} C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = (1-p)$.
- $F(x) = 1 - \sum\limits_{m < x} C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = (1-p)$.
- $F(x) = \sum\limits_{m > x} C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = (1-p)$.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть $\Pi(z) = \sum\limits_{m=0}^{n} z^m P_n(m)$ является производящей функцией для биномиального распределения $\{C_n^m p^m q^{n-m}\colon m = 0, 1, \ldots, n\}$ с параметрами n и p. Укажите верные соотношения.

- $\Pi(z) = (pz + q)^n$, где $q = (1-p)$.
- $\Pi(z) = \sum\limits_{m=0}^{n} z^{m+1} C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = (1-p)$.
- $\Pi(z) = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} z^m$, где $q = (1-p)$.
- $\Pi(z) = p(pz + q)^n$, где $q = (1-p)$.

4. Тип — единственный выбор.

Пусть $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{D}\xi$ являются математическим ожиданием и дисперсией биномиальной случайной величины ξ с параметрами p и n. Определить ошибочное равенство.

- $\mathrm{M}\xi = (1+n)p$.
- $\mathrm{D}\xi = np(1-p)$.
- $\mathrm{M}\xi = np$.
- $\mathrm{M}\xi = \sum\limits_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = (1-p)$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathrm{Mo}(\xi)$ является модой биномиальной случайной величины ξ с параметрами p и n. Определить верные утверждения.

- Мода $\mathrm{Mo}\xi = 0$, если $n = 1$ и $(n+1)p = 1$.
- Мода $\mathrm{Mo}\xi$ не существует, если $(n+1)p < 1$ и $n \geqslant 1$.
- Мода $\mathrm{Mo}\xi = 0$, если $(n+1)p = 1$, $n > 1$.
- Мода $\mathrm{Mo}\xi = \big[(n+1)p\big]$, $1 < (n+1)p < n$ и число $(n+1)p$ не является целым.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\mathrm{Mo}(\xi)$ является модой биномиальной случайной величины ξ с параметрами p и n. Определить ошибочное утверждение.

• $\mathrm{Mo}\xi$ принимает значения из множества $\{(n+1)p-1, (n+1)p\}$, если выполняется соотношение $1 < (n+1)p < n$ и число $(n+1)p$ оказывается целым.

• $\mathrm{Mo}\xi = n-1$, если $(n+1)p = n$ и $n > 1$.

• $\mathrm{Mo}\xi$ не существует, если $(n+1)p > n \geqslant 1$.

• $\mathrm{Mo}\xi$ не существует, если $(n+1)p = n$ и $n > 1$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathrm{Mo}^*\xi$ является наивероятнейшим значением биномиальной величины ξ с параметрами p и n. Определить верные утверждения.

• Наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi \in \{0, 1\}$, если $n = 1$ и $(n+1)p = 1$.

• Наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi = 1$, если $(n+1)p < 1$ и $n \geqslant 1$.

• Наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi = \big[(n+1)p\big]$, если $1 < (n+1)p < n$ и число $(n+1)p$ не является целым.

• Наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi = n+1$, если $(n+1)p > n \geqslant 1$.

Лекция 24

НАИБОЛЕЕ ТИПИЧНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН ГАУССА

24.1. Нормальный закон распределения

Известно очень много экспериментов [1, 3, 4, 8–11], в которых этот закон позволяет адекватно описывать вероятностные свойства их измерителей или количественных характеристик. Приведем примеры: 1) ошибки измерений, ошибки стрельбы по мишени — это случайные величины, которые подчинены нормальному или близкому к нему закону; 2) координаты точек попадания при обстреле цели в одинаковых условиях из одного и того же орудия, если прицел постоянен, подчиняются нормальному закону; 3) проекции на оси координат скорости, с которой движется молекула свободного газа, также приближенно подчиняются нормальному закону; 4) сумма достаточно большого числа независимых слагаемых случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых весьма нежестких ограничений), приближенно подчиняется нормальному закону; 5) наиболее существенные количественные характеристики однотипных изделий при их массовом производстве являются случайными величинами, вероятностные свойства которых определяются законом Гаусса. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов непрерывного типа, состоит в том, что он является предельным, к которому приближаются другие законы распределений при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Определение 24.1. Случайная величина ξ подчинена нормальному закону распределения, или закону Гаусса, если ее плотность $f_\xi(x)$ равна $(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp\{-(x-a)^2/(2\sigma^2)\}$, где $-\infty < a < +\infty$ и $0 < \sigma < +\infty$ суть параметры распределения. Будем также говорить, что непрерывная величина ξ является (a,σ)-нормальной или имеет $N(a,\sigma)$ распределение.

Кривая распределения закона Гаусса определяется двумя параметрами, $-\infty < a < +\infty$ и $0 < \sigma < +\infty$, и имеет симметричный относительно прямой $x = a$ холмообразный вид, или вид сечения церковного колокола. График представлен на рис. 24.1.

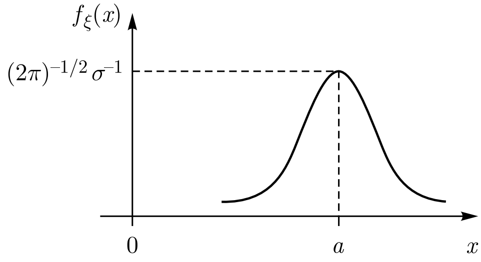


Рис. 24.1

Максимальная ордината $(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}$ этой кривой соответствует такой точке на оси абсцисс, которая удалена на расстояние $x = a$ от начала координат. Ось абсцисс является асимптотой для обеих ветвей кривой $f_\xi(x)$, расположенных справа и слева относительно прямой $x = a$, поскольку $\lim\limits_{|x|\to\infty} f_\xi(x) = 0$.

Выясним смысл параметров a и σ. Найдем последовательно $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{D}\xi$. Используя замену $x = 2^{1/2}\sigma t + a$, $dx = 2^{1/2}\sigma\, dt$, $-\infty < t < +\infty$, получим

$$\mathrm{M}\xi = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\exp\{-(x-a)^2/(2\sigma^2)\}\,dx =$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(2^{1/2}\sigma t + a)\exp\{-t^2\}2^{1/2}\sigma\,dt =$$

$$= 2^{1/2}\sigma\pi^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\exp\{-t^2\}\,dt + a\pi^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-t^2\}\,dt =$$

$$= -\sigma(2\pi)^{-1/2}\exp\{-t^2\}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + a\pi^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-t^2\}\,dt =$$

$$= a\pi^{-1/2}\pi^{1/2} = a,$$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - a)^2 =$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \exp\{-(x-a)^2/(2\sigma^2)\}\, dx =$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2t^2\sigma^2 2^{1/2}\sigma \exp\{-t^2\}\, dt =$$

$$= -2\sigma^2\pi^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t/2) d(\exp\{-t^2\}) =$$

$$= \sigma^2\pi^{-1/2}\left(-t\exp\{-t^2\}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2\}\, dt \right) =$$

$$= \sigma^2\pi^{-1/2}\pi^{1/2} = \sigma^2,$$

$$\sigma(\xi) = \sigma,$$

так как интеграл Эйлера–Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2\}\, dt = \pi^{1/2}$. Значит, $\sigma(\xi) = \sigma$. Параметры a и σ определяют математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi = a$. Так как $\max\limits_{x} f_\xi(x) = f_\xi(a) = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}$ и $F(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f_\xi(x)\, dx = 1/2$, то $\mathrm{Mo}^*\xi = \mathrm{Mo}(\xi) = \mathrm{Me}(\xi) = \mathrm{M}(\xi) = a$. Рассмотрим поведение кривой $f_\xi(x)$ для гауссовской случайной величины в связи с изменением параметров a и σ.

При изменении математического ожидания от a_1 до a_2 кривая распределения сдвигается по оси абсцисс и вид ее сохраняется. Поэтому величина a называется параметром «сдвига» распределения. Эта ситуация приведена на рис. 24.2.

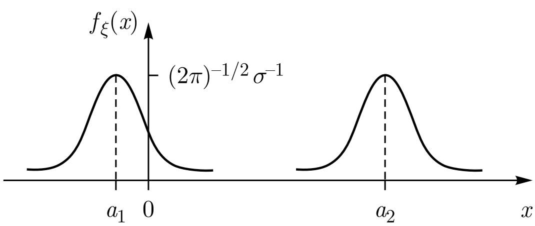


Рис. 24.2

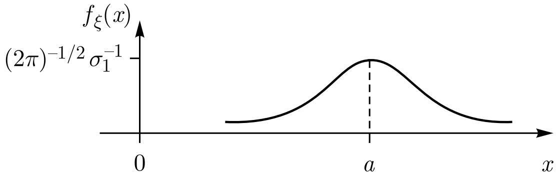


Рис. 24.3

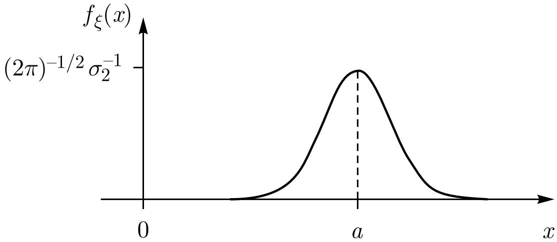


Рис. 24.4

При изменении параметра σ сдвига кривой не происходит. Однако кривая становится либо более пологой при увеличении разброса σ, либо более крутой при уменьшении разброса σ ($\sigma_1 > \sigma_2$). Величина σ называется параметром «масштаба» распределения закона Гаусса. На рис. 24.3 приведен случай для разброса σ_1, и на рис. 24.4 рассмотрен случай, когда второй параметр равен σ_2.

24.2. Свойства вспомогательных числовых характеристик закона Гаусса

Используя определения среднего отклонения $\mathrm{E}\xi$ и центральных моментов при $k \geqslant 2$, найдем

$$\mathrm{E}\xi = \mathrm{M}(|\xi - \mathrm{Me}\xi|) =$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x-a| \exp\{-(x-a)^2(2\sigma^2)^{-1}\}\,dx =$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1} \int\limits_{-\infty}^{a} (a-x)\exp\{-(x-a)^2/2\sigma^2\}\,dx +$$

$$+ (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1} \int\limits_{a}^{+\infty} (x-a)\exp\{-(x-a)^2/2\sigma^2\}\,dx] =$$

$$= 2^{1/2}\pi^{-1/2}\sigma\left[-\int\limits_{-\infty}^{0} t\exp\{-t^2\}\,dt + \int\limits_{0}^{+\infty} t\exp\{-t^2\}\,dt\right] =$$

$$= 2^{3/2}\pi^{-1/2}\sigma\int\limits_{0}^{+\infty} t\exp\{-t^2\}\,dt = 2^{1/2}\pi^{-1/2}\sigma,$$

$$\beta_k(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^k\exp\{-(x-a)^2/(2\sigma^2)\}\,dx =$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(2^{1/2}\sigma t)^k\exp\{-t^2\}2^{1/2}\sigma\,dt =$$

$$= -(2^{1/2}\sigma)^k\pi^{-1/2}2^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{k-1}d(\exp\{-t^2\}) =$$

$$= -(2^{1/2}\sigma)^k t^{k-1}\exp\{-t^2\}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\times\pi^{-1/2}2^{-1} +$$

$$+ (2^{1/2}\sigma)^k\pi^{-1/2}2^{-1}(k-1)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{k-2}\exp\{-t^2\}\,dt =$$

$$= (k-1)(2^{1/2}\sigma)^k\pi^{-1/2}2^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{k-2}\exp\{-t^2\}\,dt.$$

Так как $\beta_{k-2}(\xi) = (2^{1/2}\sigma)^{k-2}\pi^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{k-2}\exp\{-t^2\}\,dt$, то $\beta_k(\xi) = \sigma(k-1)\beta_{k-2}(\xi)$. Отсюда, применяя равенства $\beta_0(\xi) = 1$, $\beta_1(\xi) = 0$, найдем для $\beta_{2k+1}(\xi) = 0$, $\beta_{2k}(\xi) = (2k-1)!!\sigma^{2k}$, $k \geqslant 1$. Здесь символ $(2k-1)!!$ представляет собой нечетный факториал и равен $1 \times 3 \times \ldots \times (2k-1)$. В силу этого коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}(\xi) = \beta_3\xi(\sigma\xi)^{-3} = 0$ и эксцесс $\text{Э}(\xi) = \beta_4\xi(\sigma\xi)^{-4} - 3 = 0$. Последние равенства соответствуют физическому смыслу каждой из этих числовых характеристик. Коэффициент асимметрии равен нулю в силу симметрии кривой распределения относительно математического ожидания. В определении эксцесса используется постоянная величина, равная трем. Поэтому эксцесс нормального распределения равен нулю. Значит, эксцесс случайной величины характеризует крутизну наклона графика ее плотности относительно кривой Гаусса.

24.3. Срединное (вероятное) отклонение

В качестве другой вспомогательной характеристики рассеивания также рассматривается такая числовая характеристика, как срединное или вероятное отклонение, обозначаемое через $\mathrm{C}(\xi)$.

Определение 24.2. Срединным отклонением $\mathrm{C}(\xi)$ называется половина длины интервала с центром в точке с абсциссой $\mathrm{M}\xi$, вероятность попадания в который для ξ равна $1/2$.

Для вычисления $\mathrm{C}(\xi)$ определим вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ |\xi(\omega)-a|<\mathrm{C}(\xi)\}).$$

Вначале для $-\infty<c<d<+\infty$ найдем вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ c\leqslant\xi(\omega)<d\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ (c-a)\sigma^{-1}\leqslant(\xi(\omega)-a)\sigma^{-1}<(d-a)\sigma^{-1}\}).$$

Так как $\eta(\omega)=(\xi(\omega)-a)\sigma^{-1}$ и $\xi(\omega)$ связаны линейной зависимостью, то плотность $f_\eta(y)=(2\pi)^{-1/2}\exp\{-y^2/2\}$. Итак, случайная величина $\eta(\omega)$ распределена по закону Гаусса и является $(0,1)$-нормальной, или ее называют стандартной. Используя это, получим для вероятности

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ c\leqslant\xi(\omega)<d\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ (c-a)\sigma^{-1}\leqslant\eta(\omega)<(d-a)\sigma^{-1}\}) = \\ = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{(c-a)/\sigma}^{(d-a)/\sigma}\exp\{-t^2/2\}\,dt = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_0^{(d-a)/\sigma}\exp\{-t^2/2\}\,dt - \\ - (2\pi)^{-1/2}\int\limits_0^{(c-a)/\sigma}\exp\{-t^2/2\}\,dt.$$

Как правило, приведенные здесь интегралы не вычисляются в элементарных функциях. Поэтому удобно использовать функцию Лапласа $\Phi(x)=\dfrac{\sqrt2}{\sqrt\pi}\int\limits_0^x\exp\{-t^2/2\}\,dt$, для которой составлены таблицы и свойства которой хорошо известны [8]: $\Phi(0)=0$, $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, $\Phi(+\infty)=1$, $\Phi(-\infty)=-1$. Тогда вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ c\leqslant\xi(\omega)<d\}) = 2^{-1}\bigl[\Phi((d-a)\sigma^{-1})-\Phi((c-a)\sigma^{-1})\bigr].$$

Если $b > 0$ и $c = a - b$, $d = a + b$, то вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ a - b \leqslant \xi(\omega) < a + b\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ |\xi(\omega) - a| < b\}) = \\ = 2^{-1}\big[\Phi(b/\sigma) - \Phi(-b/\sigma)\big] = \Phi(b/\sigma).$$

Отсюда $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| < \mathrm{C}(\xi)\}) = \Phi(\mathrm{C}(\xi)/\sigma) = 1/2$. Используя таблицы функции Лапласа, находим связь между $\mathrm{C}(\xi)$ и средним квадратическим отклонением σ: $\mathrm{C}(\xi) \approx 0{,}675\sigma$.

Для нормальной случайной величины ξ справедливо «правило трех сигм», т. е. вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| < 3\sigma\}) = \Phi(3\sigma/\sigma) = \Phi(3)$. По таблицам для функции Лапласа находим, что $\Phi(3) \approx 0{,}9973 \approx 1$. Отсюда имеем: $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| \geqslant 3\sigma\}) \approx \approx 0{,}0027$. Если использовать неравенство Чебышева, то получаем грубую оценку: $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| \geqslant 3\sigma\}) \leqslant \sigma^2/(9\sigma^2) = 1/9$. Итак, используя индивидуальные свойства случайной величины, распределенной по закону Гаусса, мы существенно уточнили значение оценки для этой вероятности. Среднее квадратическое отклонение и математическое ожидание нормальной случайной величины ξ ориентировочно, но все же очень точно, позволяет указать интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ ее практически достоверных значений. И наоборот, если мы знаем из опытов величину практически достоверно возможного отклонения по модулю нормальной случайной величины от ее среднего, то эта величина дает возможность приближенно вычислить значение параметра σ. Таково практическое значение «правила трех сигм».

В заключение, используя равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ c \leqslant \xi(\omega) < d\}) = 2^{-1}\big[\Phi((d - a)\sigma^{-1}) - \Phi((c - a)\sigma^{-1})\big]$$

и $\Phi(-\infty) = -1$, получим:

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}(-\infty < \xi < x) = 2^{-1}\big[\Phi((x-a)/\sigma) - \Phi((-\infty-a)/\sigma)\big] = \\ = 2^{-1}\big[\Phi((x - a)/\sigma) - \Phi(-\infty)\big] = 2^{-1}\big[\Phi((x - a)/\sigma) + 1\big].$$

Значит, с помощью таблицы функции Лапласа можно вычислять значения интегральной функции $F_\xi(x)$ для (a, σ)-нормальной случайной величины. В частном случае, если нормальная случайная величина является стандартной и ее интегральная функция обозначена через $\Phi_0(x)$, то $F_\xi(x) = 2^{-1}(1 + \Phi(x)) = \Phi_0(x)$ и $\Phi(x) = 2\Phi_0(x) - 1$. Рассмотрим тестовый пример, который иллюстрирует свойства нормального закона распределения.

Пример 24.1. Случайная величина ξ представляет собой ошибку измерения диаметра некоторой детали. Предполагается, что ξ распределена по нормальному закону с параметром $\mathrm{M}\xi = 1{,}2$ см. Стандарт ошибки равен 0,8 см. Найти вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon -1{,}6 \leqslant \xi(\omega) < 1{,}6\})$. Ради простоты опускаем размерность заданных в данной задаче величин. Используя формулы для распределения Гаусса и таблицы функции Лапласа, найдем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon -1{,}6 \leqslant \xi(\omega) < 1{,}6\}) = \\ = 2^{-1}\big[\Phi((1{,}6-1{,}2)/0{,}8) - \Phi((-1{,}6-1{,}2)/0{,}8)\big] = \\ = 2^{-1}[\Phi(0{,}5)+\Phi(3{,}5)] \approx 2^{-1}[0{,}3829+0{,}9995] \approx 0{,}7.$$

Решим несколько иную задачу, когда систематической ошибки нет. В этом случае $\mathrm{M}\xi = 0$ и $\mathbf{P}(\{\omega\colon -1{,}6 \leqslant \xi(\omega) < 1{,}6\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega)| < 1{,}6\}) = \Phi(1{,}6/0{,}8) = \Phi(2) = 0{,}9545 \approx 0{,}95$. Результаты этих решений можно прокомментировать следующим образом. Обозначим через b стандартную величину измеряемого параметра выпускаемой продукции, например диаметр детали. Тогда результаты многократного измерения продукции можно считать значениями некоторой случайной величиной η. Известно, что ошибка $\xi = (\eta - b)$ любого измерения равна сумме так называемой случайной ошибки $(\eta - \mathrm{M}\eta)$ и систематической ошибки $(\mathrm{M}\eta - b)$. Пусть теперь контроль выпускаемой промышленной продукции осуществляется путем современной технологии и новейших измерительных приборов. В этом случае, как правило, систематическая ошибка $(\mathrm{M}\eta - b)$ измерения равна или близка к нулю. Поэтому $\mathrm{M}\xi = 0$ и $\mathrm{M}\eta = b$, а вероятность того, что ошибка измерения будет находиться в заданных пределах, практически равна единице. В приведенном примере эта вероятность приблизительно равна 0,95 при допустимом промежутке $[-1{,}6; 1{,}6)$ для ошибки измерения. Если отклонение измеренного значения некоторого параметра продукции от стандартного превзойдет допустимые пределы, то этот факт, скорее всего, можно будет объяснить браком выпускаемой продукции. Наоборот, при контроле выпускаемой продукции с помощью старой технологии и изношенных измерительных приборов вероятность того, что случайная ошибка измерения будет находиться вне допустимых пределов, отлична от нуля. В нашем иллюстративном примере эта вероятность равна приблизительно 0,3. Тогда у руководителей такого предприятия появляется возможность объяснения указанных значительных отклонений некоторой характеристики от стандарта случайными ошибками в измерениях. Этим обстоятельством частично можно объяснить наличие на государственных предприятиях в отсутствие конкуренции устаревшей технологии, изношенных орудий производства и измерительных приборов.

Тестовые вопросы к лекции 24

1. Тип — проверка ответов.

Пусть ξ является пуассоновской случайной величиной с параметром λ. Вычислить наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi$ при следующих значениях параметра λ: 1) $\lambda = 0{,}1$; 2) $\lambda = 3$; 3) $\lambda = 4{,}1$.

Ответы:

1) $\mathrm{Mo}^*\xi = 0$;

2) $\mathrm{Mo}^*\xi \in \{2, 3\}$;

3) $\mathrm{Mo}^*\xi = 4$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть ξ является нормальной случайной величиной с параметром a и σ. Определить ошибочное утверждение.

- Медиана $\mathrm{Me}(\xi)$ нормальной случайной величины равна a.
- Мода $\mathrm{Mo}(\xi)$ нормальной случайной величины равна a.
- Наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi$ этой величины равно $a+1$.
- Дисперсия $\mathrm{D}(\xi)$ нормальной случайной величины равна σ^2.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть ξ является нормальной случайной величиной с параметром a и σ. Определить верные утверждения.

- Среднее отклонение $\mathrm{E}(\xi)$ нормальной случайной величины равно величине $2^{1/2}\pi^{-1/2}\sigma$.
- Центральный момент $\beta_{2k+1}(\xi)$ нечетного порядка равен нулю.
- Центральный момент $\beta_3(\xi)$ равен 3.
- Центральный момент $\beta_{2k}(\xi)$ четного порядка равен $1\times 3 \times \ldots \ldots \times (2k-1)\sigma^{2k}$.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\mathrm{Ka}(\xi)$ и $\mathrm{Э}(\xi)$ — коэффициент асимметрии и эксцесс нормальной случайной величины ξ с параметром a и σ. Определить верное равенство.

- $\mathrm{Ka}(\xi) = 3$.
- $\mathrm{Э}(\xi) = 4$.
- $\mathrm{Ka}(\xi) = 0$.
- $\mathrm{Э}(\xi) = 1$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathrm{C}(\xi)$ является срединным отклонением нормальной случайной величины ξ с параметром a и σ. Определить верные утверждения.

• $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| < \mathrm{C}(\xi)\}) = 1/3$.

• $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| < \mathrm{C}(\xi)\}) = 1/2$.

• $\mathrm{C}(\xi) \approx 0{,}675\sigma$.

• $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| < \mathrm{C}(\xi)\}) < \Phi(\mathrm{C}(\xi)/\sigma)$, где $\Phi(x)$ — функции Лапласа.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $F(x)$ является интегральной функцией распределения нормальной случайной величины ξ с параметром a и σ. Определить ошибочное соотношение.

• $F(x) = 2^{-1}\big[\Phi((x-a)/\sigma)+1\big]$, где $\Phi(x)$ — функции Лапласа.

• $F(x) = 2^{-1}\big[\Phi((x-a)/\sigma)+3\big]$, где $\Phi(x)$ — функции Лапласа.

• $\Phi_0(x) = 2^{-1}\big[\Phi(x) + 1\big]$, где $\Phi(x)$ — функции Лапласа и $\Phi_0(x)$ является интегральной функцией распределения стандартной нормальной случайной величины ξ.

• $F(x) = \Phi_0((x-a)/\sigma)$, где $\Phi_0(x)$ является интегральной функцией распределения стандартной нормальной случайной величины ξ.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $\Phi_0(x)$ является интегральной функцией распределения стандартной случайной величины Гаусса. Определить верные утверждения.

• Для нормальной случайной величины ξ с параметрами a и σ рассматривается соотношение $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| < 3\sigma\}) = 2\Phi(3)$, где $\Phi_0(x)$ есть функции Лапласа.

• Для нормальной случайной величины ξ с параметрами a и σ рассматривается соотношение $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega)-a|<3\sigma\})=2\Phi_0(3)-1$.

• Для нормальной случайной величины ξ с параметрами a и σ рассматривается соотношение $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| < 3\sigma\}) \approx 0{,}9973$.

• Для нормальной случайной величины ξ с параметрами a и σ рассматривается соотношение $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - a| < 3\sigma\}) = \Phi_0(3) - 1/2$.

Лекция 25

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАВНОМЕРНАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ХИ-КВАДРАТ ВЕЛИЧИНЫ

25.1. Равномерный закон распределения

Рассмотрим теперь наиболее простой класс непрерывных случайных величин, который часто используется в практических задачах.

Определение 25.1. Случайная величина ξ называется равномерной, а соответствующее распределение — равномерным на конечном промежутке $[a, b]$, если $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [a, b]$ и $f_\xi(x) = (b-a)^{-1}$ при $x \in [a, b]$.

Приведем примеры равномерно распределенных случайных величин [1, 3, 4, 8–11]: 1) ошибка, вызванная разными способами округления показаний измерительного прибора до целых делений шкалы; 2) расстояние между электростанцией и местом обрыва кабеля, по которому передается электрическая энергия потребителю; 3) время ожидания пассажиром прибытия автобуса при регулярном расписании на маршруте и случайном прибытии пассажира на остановку; 4) ошибка при компьютерных расчетах, когда вычисления проводятся с точностью, например, до второго знака после запятой. Простой аналитический вид плотности $f_\xi(x)$ позволяет определить интегральную функцию распределения для равномерной случайной величины. Итак, функция $F_\xi(x) = 0$ при $x \leqslant a$, $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = (b-a)^{-1}\int\limits_{a}^{x} dt = (x-a)(b-a)^{-1}$ при $a < x \leqslant b$ и $F_\xi(x) = 1$ при $x > b$. Легко видеть, что вероятность $\mathbf{P}\{\omega\colon a_1 < \xi(\omega) < b_1\} = (b-a)^{-1}\int\limits_{a_1}^{b_1} dx = (b_1 - a_1)(b-a)^{-1}$, где $(a_1, b_1) \subset (a, b]$. Эта вероятность не зависит от расположения интервала (a_1, b_1) внутри промежутка $[a, b]$, а зависит только от длины этого интервала. Поэтому такая величина ξ называется равномерной. График плотности распределения $f_\xi(x)$ и график интегральной функции $F_\xi(x)$ величины ξ представлены соответственно на рис. 25.1 и на рис. 25.2.

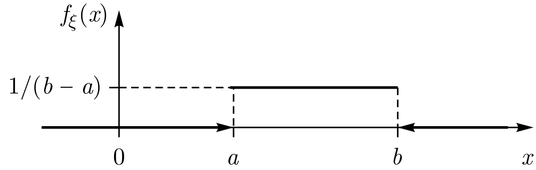


Рис. 25.1

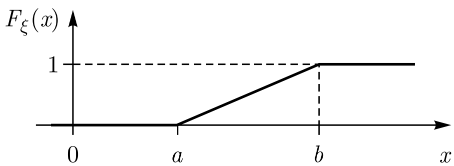


Рис. 25.2

Определим теперь числовые характеристики случайной величины ξ:

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx = (b-a)^{-1}\int\limits_a^b x\,dx = 2^{-1}(b+a),$$

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2 = (b-a)^{-1}\int\limits_a^b x^2\,dx - (a+b)^2 4^{-1} =$$
$$= (a^2+ab+b^2)3^{-1} - (a+b)^2 4^{-1} = (b-a)^2/12,$$
$$\sigma\xi = (b-a)/2\sqrt{3}\,.$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{Me}\xi = (a+b)2^{-1} = \mathrm{M}\xi$. Любое число из промежутка $[a,b]$ является модой $\mathrm{Mo}\xi$ и одновременно наивероятнейшим значением $\mathrm{Mo}^*\xi$. Поэтому величины $\mathrm{Mo}\xi$ и $\mathrm{Mo}^*\xi$ не применяются для характеристики равномерной случайной величины. С помощью формул для среднего отклонения, центральных моментов k-го порядка, коэффициента асимметрии и эксцесса найдем другие числовые характеристики равномерной величины ξ:

$$\mathrm{E}\xi = \mathrm{M}(|\xi - \mathrm{Me}\xi|) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x-(a+b)2^{-1}| f_\xi(x)\,dx =$$

$$= (b-a)^{-1} \int\limits_{a}^{(a+b)/2} (a+b-2x)2^{-1}\,dx +$$

$$+ (b-a)^{-1} \int\limits_{(a+b)/2}^{b} (2x-a-b)2^{-1}\,dx =$$

$$= 2^{-1}(b-a)^{-1} \int\limits_{0}^{b-a} t\,dt = (b-a)/4,$$

$$\beta_k(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}\xi)^k f_\xi(x)\,dx = (b-a)^{-1} \int\limits_{a}^{b} (x-(a+b)2^{-1})^k\,dx =$$

$$= 2^{-1-k}(b-a)^{-1} \int\limits_{a}^{b} (2x-a-b)^k d(2x-a-b) =$$

$$= 2^{-1-k} \times (b-a)^{-1} \int\limits_{a-b}^{b-a} t^k\,dt = 2^{-1-k}(b-a)^{-1}(k+1)^{-1} t^{k+1}\Big|_{a-b}^{b-a}.$$

Отсюда получаем, что центральный момент k-го порядка $\beta_k(\xi)$ равен нулю при нечетном k и равен $2^{-k}(k+1)^{-1}(b-a)^k$ при четном. Следовательно, коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}(\xi) = \beta_3\xi/(\sigma\xi)^3 = 0$ и эксцесс $\mathrm{Э}(\xi) = (\sigma\xi)^{-4}\beta_4\xi - 3 = 2^{-4}5^{-1}(b-a)^4((b-a)/2\sqrt{3}\,)^{-4} = 5^{-1}9 - 3 = -6/5$. На содержательном уровне равенства $\mathrm{Ka}(\xi) = 0$ и $\mathrm{Э}(\xi) = -6/5$ имеют следующий смысл. График плотности равномерного распределения симметричен относительно центра рассеивания, и, значит, коэффициент асимметрии должен быть равен нулю. Далее, так как эксцесс равномерной случайной величины является отрицательным числом, то кривая плотности нормального распределения имеет бо́льшую крутизну наклона по сравнению с кривой плотности равномерного распределения. Рассмотрим решение некоторых задач с применением равномерного распределения.

Пример 25.1. Маршрутные такси прибывают на остановку с интервалом 3 минуты. Пассажир приходит на остановку в случайный и не связанный с расписанием момент времени. Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma\xi$ времени ξ ожидания пассажиром такси. Вычислить вероятность того, что пассажир будет ожидать такси не менее $\mathrm{M}\xi + 1{,}6\sigma\xi$.

Решение. Для упрощения опускаем в записи размерность времени. Элементарное событие, которое заключается в том, что пассажир приходит на остановку в момент t, будем обозначать через $\{t\}$. Так как маршрутные такси прибывают на остановку по жесткому расписанию, то в качестве пространства описаний всех элементарных исходов можно принять множество $\Omega = \{\omega = t\colon 0 \leqslant t \leqslant 3\}$. Случайным событием в этом эксперименте является борелевское множество на отрезке $[0, 3]$. Тогда множество $\mathcal{F}$ всех наблюдаемых исходов совпадает с борелевской σ-алгеброй на $[0, 3]$. Из условия задачи следует, что каждый момент прихода пассажира на остановку одинаково возможен. Поэтому вероятности случайных событий для этого опыта определяются на основании геометрического подхода. Значит, мы построили вероятностную модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ случайного прибытия пассажира на остановку. Если теперь $\eta(\omega) = \omega = t$ — время прихода пассажира на остановку, то множество $\{\omega\colon \eta(\omega) < y\}$ равно $\varnothing \in \mathcal{F}$ при $y \leqslant 0$, равно $[0, y) \in \mathcal{F}$ при $0 < y \leqslant 3$ и, наконец, равно $\Omega \in \mathcal{F}$ при $y > 3$. Отсюда вытекает, что $\eta(\omega)$ является равномерной случайной величиной. Если η — время прихода пассажира на остановку, то время ожидания такси равно $\xi = 3 - \eta(\omega)$. Тогда интегральная функция распределения $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon 3-\eta(\omega) < x\}) = 1 - F_\eta(3 - x)$. Отсюда $F_\xi(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $F_\xi(x) = x/3$ при $0 < x \leqslant 3$ и, наконец, $F_\xi(x) = 1$ при $x > 3$. Итак, время прихода пассажира на остановку и время ожидания им такси являются равномерными случайными величинами на отрезке $[0, 3]$. Отсюда $\mathrm{M}\xi = 1{,}5$ и $\sigma\xi = 2^{-1}3^{1/2}$. Поэтому вероятность того, что пассажир будет ожидать такси не менее $\mathrm{M}\xi + 1{,}6\sigma\xi = 1{,}5 + 0{,}8\sqrt{3}$, равна величине $1 - F_\xi(1{,}5 + 0{,}8\sqrt{3}) = 1 - 3^{-1}(1{,}5 + 0{,}8\sqrt{3}) \approx 0{,}0381$.

25.2. Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Среди непрерывных случайных величин важное место занимают так называемые экспоненциальные случайные величины [1, 3, 4, 8–11]. Будем называть случайную величину ξ распределенной по показательному (или экспоненциальному) закону, если ее плотность $f(x)$ равна нулю при $x < 0$ и равна $\lambda \exp\{-\lambda x\}$ при $x \geqslant 0$, где $\lambda = \mathrm{const} > 0$.

Найдем теперь интегральную функцию для показательной случайной величины: $F(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $F(x) =$

$= \int\limits_0^x \lambda \exp\{-\lambda t\} dt = 1 - \exp\{-\lambda x\}$ при $x > 0$. Отсюда условие нормировки можно проверить следующим образом: $F(+\infty) = 1 = \int\limits_0^{+\infty} \lambda \exp\{-\lambda t\} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$. На рис. 25.3 приведены графики функции плотности $f(x)$ и интегральной функции $F(x)$.

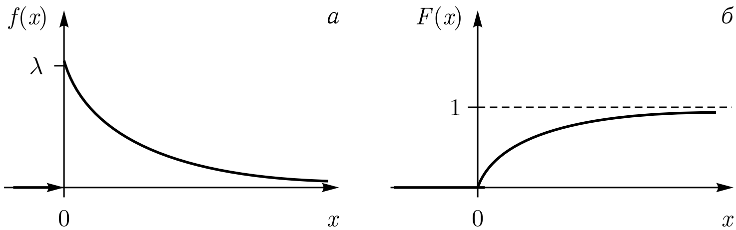


Рис. 25.3

Показательное распределение определяется одним параметром λ. Это важно с вычислительной точки зрения, когда требуется оценить параметр по наблюдениям за экспоненциальной случайной величиной. Приведем примеры экспериментов, в которых встречается экспоненциальная случайная величина:

1) время между соседними отказами в процессе эксплуатации системы, которая состоит из большого числа элементов;

2) промежуток времени между последовательными поступлениями вызовов на телефонную станцию;

3) продолжительность безотказной работы радиоэлементов;

4) промежуток времени между последовательными распадами атомов радиоактивного вещества;

5) время между последовательными прибытиями автомобилей к стоп-линии перекрестка, который расположен на окраине города;

6) время между последовательными падениями метеоритов на территории Нижегородской области;

7) промежуток времени между последовательными катастрофами на угольных шахтах;

8) промежуток времени между последовательными поступлениями вызовов на пункт скорой помощи;

9) время свободного пробега молекул газа.

Для определения числовых характеристик $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{D}\xi$, $\sigma(\xi)$, $\mathrm{Ka}\xi$ и $\text{Э}\xi$ случайной величины, распределенной по показательному закону, сначала вычислим начальные моменты k-го порядка. Так как $\alpha_0\xi = 1$ и $k \geqslant 1$, то

$$\alpha_k\xi = \mathrm{M}\xi^k = \int\limits_0^{+\infty} \lambda x^k \exp\{-\lambda x\}dx =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} x^k d(\exp\{-\lambda x\}) = -x^k \exp\{-\lambda x\}\Big|_0^{\infty} +$$

$$+ k\lambda^{-1} \int\limits_0^{+\infty} xk^{-1}\lambda \exp\{-\lambda x\}dx = k\lambda^{-1}\alpha_{k-1}\xi,$$

$$\alpha_k\xi = k\lambda^{-1}\alpha_{k-1}\xi,$$

то имеет место равенство $\alpha_k\xi = k!\lambda^{-k}$. Теперь последовательно выводим

$$\mathrm{M}\xi = \alpha_1\xi = 1/\lambda, \quad \mathrm{D}\xi = \alpha_2\xi - (\mathrm{M}\xi)^2 = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2,$$

$$\sigma(\xi) = 1/\lambda,$$

$$\beta_3\xi = \sum_{k=0}^{3} C_3^k(-1)^{3-k}(\alpha_1\xi)^{3-k}\alpha_k\xi = 2/\lambda^3,$$

$$\mathrm{Ka}\xi = (\sigma\xi)^{-3}\beta_3\xi = 2,$$

$$\beta_4\xi = \sum_{k=0}^{4} C_4^k(-1)^{4-k}(\alpha_1\xi)^{4-k}\alpha_k\xi = 9/\lambda^4,$$

$$\text{Э}\xi = (\sigma\xi)^{-4}\beta_4\xi - 3 = 6.$$

Из рис. 25.3 непосредственно выводим, что для показательной случайной величины $\mathrm{Mo}^*\xi = \mathrm{Mo}\xi = 0$. Медиана случайной величины ξ вычисляется из следующего равенства: $F(\mathrm{Me}\xi) = 1 - \exp\{-\lambda\mathrm{Me}\xi\} = 2^{-1}$. Решая это простое уравнение, получим, что $\mathrm{Me}\xi = \lambda^{-1}\ln 2$.

Пример 25.2. Время ξ безотказной работы лампочки имеет показательное распределение с параметром λ. Определить вероятность того, что в результате эксперимента время безотказной работы электронной лампы отклонится по абсолютной величине от своего среднего значения $\mathrm{M}\xi$ не меньше чем на $3\sigma(\xi)$.

Решение. Из свойств показательного распределения имеем равенство $\mathrm{M}\xi = \sigma(\xi) = \lambda^{-1}$. Отсюда легко получаем, что вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi(\omega) - \mathrm{M}\xi| \geqslant 3\sigma\xi\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \leqslant -2\sigma(\xi)\}) + \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant 4\sigma(\xi)\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant 4\sigma(\xi)\}) = \exp\{-4\} \approx 0{,}0183.$$

Как правило, в условиях работы лампочки мы можем пренебречь возможностью появления события, вероятность которого меньше величины 0,019. Поэтому на содержательном уровне результат решения этой задачи означает, что практически достоверно лампа выйдет из строя в течение времени $4\mathrm{M}\xi$. Это дает возможность в целях бесперебойного освещения грубо рассчитать количество запасных электрических лампочек на некоторый промежуток времени, например на год.

25.3. Распределение хи-квадрат с r степенями свободы

Сначала рассмотрим задачу, при решении которой возникает непрерывная случайная величина с таким типом распределения [1, 3, 4, 8–11]. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ являются независимыми случайными величинами, каждая из которых распределена по стандартному нормальному закону. Найти плотность распределения случайной величины

$$\chi_r^2 = (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + \ldots + (\xi_r)^2.$$

Из курса анализа известно, что гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty x^{c-1}\exp\{-x\}dx, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2},$$

$$\Gamma(c+1) = c\Gamma(c).$$

Методом индукции по r докажем, что плотность $f_{\chi_r^2}(y)$ величины χ_r^2 равна нулю при $y \leqslant 0$ и имеет вид функции $(2^{r/2}\Gamma(r/2))^{-1}y^{r/2-1}\exp\{-y/2\}$ при $y > 0$. Рассматривая решение примера 21.2 из лекции 12 при $\sigma = 1$ и учитывая равенство $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$, получаем, что формула для $f_{\chi_r^2}(y)$ справедлива при $r = 1$. Пусть формула для плотности $f_{\chi_r^2}(y)$ имеет место для некоторого натурального числа $r > 1$. Используя равенство $\chi_{r+1}^2 = \chi_r^2 + (\xi_{r+1})^2$, независимость величин χ_r^2

и $(\xi_{r+1})^2$, вид распределений для χ_r^2, $(\xi_{r+1})^2$ и замену $xy^{-1} = t$, при $y > 0$ имеем

$$f_{\chi^2_{r+1}}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi_{r+1})^2}(y-x) f_{\chi_r^2}(x)\,dx =$$
$$= (2\pi)^{-1/2}(2^{r/2}\Gamma(r/2))^{-1} \times$$
$$\times \int\limits_0^y (y-x)^{-1/2} x^{(r/2)-1} \exp\{-y/2\}\,dx =$$
$$= (2\pi)^{-1/2}(2^{r/2}\Gamma(r/2))^{-1} y^{[(r+1)/2]-1} \times$$
$$\times \exp\{-y/2\} \int\limits_0^1 (1-t)^{-1/2} t^{(r/2)-1}\,dt.$$

Интеграл Эйлера первого рода $\int\limits_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$ (или бэта-функция) удовлетворяет соотношению $\int\limits_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u+v)$. Поэтому интеграл $\int\limits_0^1 (1-t)^{-1/2}t^{(r/2)-1}\,dt = \Gamma(r/2)\Gamma(1/2)/\Gamma((r+1)2^{-1})$ при $u = r/2$ и $v = 1/2$. Итак, $f_{\chi^2_{r+1}}(y) = (2^{(r+1)/2}\Gamma(2^{-1}(r+1)))^{-1} \times y^{[(r+1)/2]-1}\exp\{-y/2\}$ при $y > 0$. Так как $\chi^2_{r+1} = \chi^2_r + (\xi_{r+1})^2 \geqslant 0$, то $f_{\chi^2_{r+1}}(y) = 0$ при $y \leqslant 0$. Следовательно, формула для плотности $f_{\chi^2_r}(y)$ установлена.

Случайная величина χ^2_r играет большую роль в теории вероятностей и математической статистике. Заметим, что χ^2_r часто называется случайной величиной типа хи-квадрат с r степенями свободы. Поскольку

$$\mathrm{M}(\xi_1)^2 = \mathrm{M}(\xi_2)^2 = \ldots = \mathrm{M}(\xi_r)^2 = \mathrm{D}\xi_1 = 1,$$

$$\mathrm{M}((\xi_1)^2 - 1)^2 = \mathrm{D}(\xi_1)^2 = \mathrm{D}(\xi_2)^2 = \ldots = \mathrm{D}(\xi_r)^2 =$$
$$= \mathrm{M}((\xi_1)^4 - 2(\xi_1)^2 + 1) = \beta_4\xi_1 - 2\beta_2\xi_1 + 1 = 3 - 2 + 1 = 2,$$

то математическое ожидание $\mathrm{M}(\chi^2_r) = r$ и дисперсия $\mathrm{D}(\chi^2_r) = 2r$. Легко видеть, что мода и наивероятнейшее значение для случайной величины типа хи-квадрат с $r = 1$, 2 степенями свободы не существуют. Если $r > 2$ и $x > 0$, то $df_{\chi_r^2}(x)/dx = x^{r/2-2}(2^{r/2}\Gamma(r/2))^{-1}(2^{-1}r - 1 - 2^{-1}x)\exp\{-x/2\}$ равно нулю в точке с абсциссой $x = r - 2$. Итак, для величины χ_r^2 при $r > 2$ наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*(\chi_r^2) = \mathrm{Mo}\chi_r^2 = r - 2$. На рис. 25.4 приведены графики $f_{\chi_r^2}(y)$ для $r = 1$, 2, 6.

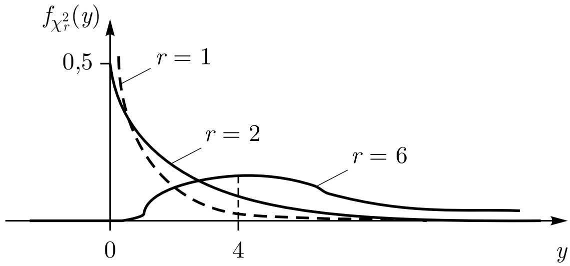


Рис. 25.4

Из равенств $\alpha_1(\chi_r^2) = \mathrm{M}(\chi_r^2) = r$ имеем

$$\alpha_{k+1}(\chi_r^2) = \int\limits_0^{+\infty} x^{k+1}(2^{r/2}\Gamma(r/2))^{-1}x^{r/2-1}\exp\{-x/2\}dx =$$

$$= -2(2^{r/2}\Gamma(r/2))^{-1}\int\limits_0^{+\infty} x^{k+1}x^{r/2-1}d(\exp\{-x/2\}) =$$

$$= -2x^{k+1}(2^{r/2}\Gamma(r/2))^{-1}x^{r/2-1}\exp\{-x/2\}\Big|_0^{\infty} +$$

$$+ 2(k + 2^{-1}r)\int\limits_0^{+\infty} x^k x^{r/2-1}(2^{r/2}\Gamma(r/2))^{-1}\exp\{-x/2\}dx =$$

$$= \alpha_k(\chi_r^2)2(k + 2^{-1}r) = 2^{k+1}\prod_{i=0}^{k}(i + 2^{-1}r).$$

Отсюда для величины χ_r^2 найдем

$$\mathrm{Ka}(\chi_r^2) = (\sigma\chi_r^2)^{-3}\sum_{k=0}^{3} C_3^k(-1)^{3-k}(\alpha_1(\chi_r^2))^{3-k}\alpha_k(\chi_r^2) = 2^{3/2}r^{-1/2},$$

$$\text{Э}(\chi_r^2) = (\sigma\chi_r^2)^{-4}\sum_{k=0}^{4} C_4^k(-1)^{4-k}(\alpha_1(\chi_r^2))^{4-k}\alpha_k(\chi_r^2) - 3 = 12/r.$$

Тестовые вопросы к лекции 25

1. Тип — проверка ответов.

Пусть случайная величина ξ является равномерной на отрезке $[1, 2]$. Вычислить следующие числовые характеристики: 1) $\mathrm{M}(\xi)$; 2) $\mathrm{D}(\xi)$; 3) $\sigma(\xi)$.

Ответы:

1) $\mathrm{M}(\xi) = 3/2$;

2) $\mathrm{D}(\xi) = 1/12$;

3) $\sigma(\xi) = 1/2\sqrt{3}$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть случайная величина ξ является равномерной на интервале (a, b). Определить верное утверждение.

• $f(x) = 2(b-a)^{-1}$ при $\in (a, b)$ и $f(x) = 0$ при $x \notin (a, b)$.

• $F(x) = 0$ при $x < a$, $F(x) = (x-a)(b-a)^{-1}/2$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и $F_\xi(x) = 1$ при $x > b$.

• $f(x) = (b-a)^{-1}$ при $x \in (a, b)$ и $f(x) = 0$ при $x \notin (a, b)$.

• $F(x) = 0$ при $x \leqslant a$, $F(x) = (x-a)(b-a)^{-1}/3$ при $a < x \leqslant b$ и $F_\xi(x) = 1$ при $x > b$.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть ξ является равномерной случайной величиной с параметром a и b. Определить верные утверждения.

• Среднее отклонение $\mathrm{E}(\xi)$ равномерной случайной величины равно $(b-a)/4$.

• Медиана $\mathrm{Me}(\xi)$ равномерной случайной величины равна величине $(a+b)/3$.

• Коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}(\xi)$ равномерной случайной величины равен нулю.

• Эксцесс $\text{Э}\xi$ равномерной случайной величины равен $-4/5$.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть $f(x)$ и $F(x)$ являются законами распределения показательной случайной величины ξ с параметром $\lambda > 0$. Определить верное утверждение.

• Интегральная функция $F(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $F(x) = 1 - 2\exp\{-\lambda x\}$ при $x > 0$.

• Плотность вероятностей $f(x)$ равна нулю при $x < 0$ и равна функции $\lambda \exp\{-\lambda x\}$ при $x \geqslant 0$.

• Интегральная функция распределения $F(x)$ равна нулю при $x \leqslant 0$ и равна $1 - 3\exp\{-\lambda x\}$ при > 0.

• Плотность вероятностей $f(x)$ равна нулю при $x < 0$ и плотность вероятностей $f(x) = 2\lambda \exp\{-\lambda x\}$ при $x \geqslant 0$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть ξ является показательной случайной величиной с параметром $\lambda > 0$. Определить верные утверждения.

• Медиана $\mathrm{Me}(\xi)$ показательной случайной величины равна величине $\lambda^{-1} \ln 2$.

• Дисперсия $\mathrm{D}(\xi)$ экспоненциальной случайной величины равна величине $2/\lambda^2$.

• Коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}(\xi)$ экспоненциальной случайной величины равен 2.

• Эксцесс $\text{Э}\xi$ экспоненциальной случайной величины равен 6.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть χ_r^2 является случайной величиной типа хи-квадрат с r степенями свободы. Определить верное утверждение.

• Случайная величина χ_r^2 равна $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ являются независимыми стандартными нормальными случайными величинами.

• Плотность вероятностей $f_{\chi_r^2}(x)$ случайной величины χ_r^2 равна нулю при $x \leqslant 0$ и равна $(2^{r/2}\Gamma(r/2))^{-1} x^{r/2-1} \exp\{-x/2\}$ при $x > 0$, где $\Gamma(c) = \int\limits_0^\infty x^{c-1} \exp\{-x\} dx$ — гамма-функция Эйлера с параметром $c > 0$.

• Имеет место равенство $\Gamma(1/2) = 2\pi^{1/2}$, где $\Gamma(c) = \int\limits_0^\infty x^{c-1} \exp\{-x\} dx$ — гамма-функция Эйлера с параметром $c > 0$.

• Имеет место соотношение вида $\Gamma(c+1) = (c+1)\Gamma(c)$, где $\Gamma(c) = \int\limits_0^\infty x^{c-1} \exp\{-x\} dx$ — гамма-функция Эйлера с параметром $c > 0$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть χ_r^2 является случайной величиной типа хи-квадрат с r степенями свободы. Определить справедливые утверждения.

• Математическое ожидание $\mathrm{M}(\chi_r^2)$ случайной величиной типа хи-квадрат с r степенями свободы равно r.

• Дисперсия $\mathrm{D}(\chi_r^2)$ случайной величиной типа хи-квадрат с r степенями свободы равна r.

• Коэффициент асимметрии $\mathrm{Ka}(\chi_r^2)$ случайной величиной типа хи-квадрат с r степенями свободы равен $2^{3/2}r^{-1/2}$.

• Эксцесс $\mathrm{Э}(\chi_r^2)$ случайной величиной типа хи-квадрат с r степенями свободы равен $12/r$.

• Наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*(\chi_r^2)$ случайной величиной типа хи-квадрат с r степенями свободы равно $r-2$ при $r>2$.

• Мода $\mathrm{Mo}(\chi_r^2)$ случайной величиной типа хи-квадрат с r степенями свободы равна r.

Лекция 26

РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ СХОДИМОСТЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

26.1. Массовые случайные явления и их предсказание

Главной проблемой теории вероятностей является построение и изучение математических моделей массовых явлений, которые порождаются статистически устойчивыми экспериментами при их многократном проведении или наблюдении [1, 3, 4, 6, 8–11]. При этом законы теории вероятностей базируются на рациональном абстрагировании и адекватном описании реальных статистических закономерностей. Одну из таких групп законов или предельных теорем в форме законов больших чисел на содержательном уровне можно описать следующим образом. Пусть имеется однопараметрическое семейство $\{\xi_n; n = 1, 2, \ldots\}$ случайных величин с неизвестными законами распределения. Каждая случайная величина из этого семейства является количественной характеристикой некоторого реального эксперимента. Оказывается, что при определенных общих условиях и при достаточно большом значении параметра n случайные величины могут вести себя как некоторая хорошо известная случайная величина или, более того, как постоянная величина. Это замечательное свойство дает возможность не только осуществлять научные прогнозы в области массовых случайных явлений, но и оценивать точность этих прогнозов. Поясним эту ситуацию на следующих двух простых примерах.

При каждом единичном проведении или наблюдении статистически устойчивого эксперимента E в общем случае мы не можем утверждать, что будет иметь место некоторый результат. Так, например, при однократном подбрасывании симметричной игральной кости мы не можем утверждать, что выпадет четное число очков. Если у нас имеется возможность повторить этот опыт с игральной костью 1000 раз, то практически можно быть уверенным в том, что четное число очков появится приблизительно в половине случаев. Этот факт давно известен из практики. Рассмотрим несколько иной пример. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ являются независимыми измерениями неизвестного расстояния b между двумя населенными пунктами. В силу разного рода ошибок, которые мы неизбежно допускаем при измерении, величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ будут случайными. На практике за приближенное значение или за оценку расстояния между населенными пунктами принимается среднее арифметическое $n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ результатов n измерений. При этом из большого числа опытов известно, что случайная величина вида $n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ приблизительно равна постоянному числу b.

Другая группа математических законов в виде так называемых центральных предельных теорем теории вероятностей уже позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать как вероятности некоторых случайных событий, так и законы распределения случайных величин. В лекции 23 подробно была рассмотрена схема независимых испытаний Бернулли, для которой при больших значениях n, m, k и s вычисление вероятностей $\mathbf{P}(B_m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ и $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{m=k}^{s} B_m\Big) = \sum\limits_{m=k}^{s} C_n^m p^m q^{n-m}$ представляет непростую задачу. Эта задача впервые была решена Муавром, Лапласом и Пуассоном в результате доказательства центральных предельных теорем в схеме независимых испытаний Бернулли. Далее, существует большое число центральных предельных теорем, которые позволяют в некотором смысле аппроксимировать законы распределения случайных величин. При этом точное определение этих законов практически не представляется возможным. Прежде всего, эти теоремы являются основанием методов суммирования случайных величин и, в частности, решают вопрос о приближенном вычислении закона распределения суммы независимых случайных величин при неограниченном увеличении числа слагаемых. Известно, что распределение суммы $\xi_1 + \xi_2$ двух независимых и непрерывных случайных величин определяется композицией или сверткой плотностей распределения случайной величины ξ_1 и ξ_2. Последовательно применяя это правило, можно в принципе найти распределение суммы $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ из n независимых случайных величин. Однако этот относительно простой и в то же время очень громоздкий алгоритм приводит к непреодолимым вычислительным трудностям. Наиболее эффективный прием определения приближенного закона распределения суммы $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ случайных величин при достаточно большом значении n, или, иначе, при $n \to \infty$, основан на использовании центральных предельных теорем.

Итак, разного рода предельные теоремы позволяют приближенно вычислять или оценивать значения случайных величин и аппроксимировать их законы распределения. Так как мы имеем дело со случайными объектами, то возникает вопрос о математическом смысле приближенного вычисления или оценивания значений случайных величин и приемлемой аппроксимации их законов распределения. Точный смысл того или иного приближения в теории вероятностей основан на понятии и определении различных видов сходимости последовательностей случайных величин.

26.2. Сходимость последовательности случайных величин по вероятности и сходимость с вероятностью единица

Пусть величина ξ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$.

Определение 26.1. Последовательность величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называется сходящейся по вероятности к величине ξ, если для $\varepsilon > 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| < \varepsilon\}) = 1$.

Это означает, что для любых заданных чисел ε, $\delta > 0$ существует такое $N(\varepsilon, \delta)$, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon, \delta)$ имеем: $1 - \delta < \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| < \varepsilon\}) \leqslant 1$. Иначе, можно сказать, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называется сходящейся по вероятности к величине ξ, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}) = 0$. Рассмотрим специальный случай, когда $\xi(\omega) \equiv c$ и $\xi_n(\omega) \equiv u_n$, где c и u_n являются постоянными числами при $n \geqslant 1$. Тогда $\xi(\omega)$ и $\xi_n(\omega)$ имеют вырожденные распределения: $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = c\}) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n(\omega) = u_n\}) = 1$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \equiv \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \xi(\omega) \equiv c$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ справедливо равенство $\{\omega\colon |\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = \Omega$. Отсюда для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ имеет место $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| < \varepsilon\}) = 1$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| < \varepsilon\}) = 1$. Итак, если для детерминированных величин неравенство $|u_n - c| < \varepsilon$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$ удовлетворяется с вероятностью, равной единице, то для случайных величин неравенство $|\xi_n - \xi| < \varepsilon$ удовлетворяется при $n \geqslant N(\varepsilon, \delta)$

с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, т. е. практически достоверно. Поэтому понятие сходимости по вероятности последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ можно считать прямым обобщением сходимости обычного предела числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots$

На основе этого типа сходимости формулируются так называемые законы больших чисел. В ряде задач полезно знать необходимые условия сходимости по вероятности. Одно из таких простейших условий можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Лемма 26.1. *Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к величине ξ, то при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$, $m \to \infty$ имеет место предельное соотношение $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi_m| \geqslant \varepsilon\}) \to 0$.*

Доказательство. Из соотношений

$$\{\omega\colon |\xi_n - \xi_m| \geqslant \varepsilon\} = \{\omega\colon |(\xi_n - \xi) + (\xi - \xi_m)| \geqslant \varepsilon\} \subset \{\omega\colon |\xi_n - \xi| + \\ + |\xi - \xi_m| \geqslant \varepsilon\} \subset \{\omega\colon |\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \{\omega\colon |\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon/2\}$$

получаем неравенство

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n - \xi_m \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n - \xi \geqslant \varepsilon/2\}) + \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_m - \xi \geqslant \varepsilon/2\}).$$

Применяя следующее предельное равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}) = 0,$$

получаем утверждение леммы 26.1.

Сходимость почти наверное (почти всюду, или с вероятностью единица) определяется следующим образом.

Определение 26.2. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называется сходящейся с вероятностью единица к случайной величине ξ, если имеет место равенство $\mathbf{P}(\{\omega\colon \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\}) = 1$.

Другими словами, вероятность появления последовательностей $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega), \ldots$ возможных значений этих случайных величин, не сходящихся к $\xi(\omega)$, равна нулю. Заметим [9], что множество

$$\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\geqslant N} \{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < k^{-1}\} \in \mathcal{F}.$$

На основе этого типа сходимости формулируются так называемые усиленные законы больших чисел.

26.3. Сходимость в среднеквадратическом и сходимость по распределению

Третий тип сходимости последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ к случайной величине ξ называется сходимостью в среднеквадратическом. Предполагается, что $\mathrm{M}(\xi^2) < +\infty$, $\mathrm{M}((\xi_n)^2) < +\infty$ для всех $n \geqslant 1$, величина ξ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$.

Определение 26.3. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин называется сходящейся в среднеквадратическом к величине ξ, если при $n \to \infty$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}(\xi_n - \xi)^2 = 0$.

Наконец, рассмотрим четвертый тип сходимости. Пусть случайные величины $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ заданы необязательно на одном вероятностном пространстве. В этом непростом случае мы можем определить интегральную функцию распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ и интегральную функцию распределения $F_{\xi_n}(x)$ случайной величины ξ_n, где $n \geqslant 1$.

Определение 26.4. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин называется сходящейся по распределению (или слабо) к случайной величине ξ, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ в каждой точке x, являющейся точкой непрерывности функции $F_\xi(x)$.

Если последовательность $(\xi_1 - a_1)/\sigma_1,\ (\xi_2 - a_2)/\sigma_2, \ldots$ сходится слабо к $(0, 1)$-нормальной случайной величине, то последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называется асимптотически нормальной с параметрами (a_n, σ_n). Отметим, что каждая из четырех типов сходимости определяет ту или иную характерную близость последовательности случайных величин к некоторой случайной величине. Существуют последовательности случайных величин, которые на содержательном уровне и с очевидностью близки во всех четырех смыслах к некоторой случайной величине. Например, последовательность $\{\xi_n = \xi - 2^{-n};\ n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к случайной величине ξ при $n \to \infty$ во всех четырех случаях. Из равенства $\xi_n = \xi - 2^{-n}$ легко видеть, что для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ предел вида

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_0) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_n < x_0\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi - 2^{-n} < x_0\}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi < x_0 + 2^{-n}\}) = \lim_{n\to\infty} F_\xi(x_0 + 2^{-n}) = F_\xi(x_0 + 0)$$

не совпадает с $F_\xi(x_0)$, если только функция $F_\xi(x)$ не является непрерывной при $x = x_0$. Этот пример показывает, почему в определении сходимости по распределению вполне разумно требовать выполнения предельного равенства $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ только в точках непрерывности $F_\xi(x)$. Приведем еще пример, когда последовательность $F_{\xi_1}(x), F_{\xi_2}(x), \ldots$ интегральных функций распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится в каждой точке x к некоторой функции $F(x)$. Однако последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ не сходится по распределению, поскольку предельная функция $F(x)$ не является интегральной. Пусть теперь случайная величина $\xi_n(\omega) \equiv 2^n$ при $\omega \in \Omega$, где $n = 1, 2, \ldots$ В этом тривиальном случае имеем предельное равенство $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F(x) \equiv 0$ в каждой точке x. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \neq 1$, то предельная функция $F(x)$ не будет интегральной. Для различных видов сходимости последовательностей случайных величин верны следующие доказанные в работе [9] высказывания: 1) из сходимости с вероятностью единица следует сходимость по вероятности, обратное утверждение неверно; 2) из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению, обратное утверждение неверно; 3) из сходимости в среднеквадратическом следует сходимость по вероятности, обратное утверждение неверно.

Теорема 26.1. *Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится с вероятностью единица к случайной величине ξ, то она сходится по вероятности к величине ξ.*

Доказательство. Так как

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\geqslant N} \{\omega\colon\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < k^{-1}\}\right) = 1,$$

то для $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\geqslant N} \{\omega\colon\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < k^{-1}\}\right) = 1.$$

При $k = 1, 2, \ldots$ верно соотношение вида

$$\bigcap_{n\geqslant 1} \{\omega\colon\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < k^{-1}\} \subset \bigcap_{n\geqslant 2} \{\omega\colon\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < k^{-1}\} \subset \ldots$$

В силу второй аксиомы непрерывности вероятность

$$\mathbf{P}\Bigl(\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n\geqslant N}\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<k^{-1}\}\Bigr)=$$
$$=\mathbf{P}\Bigl(\lim_{N\to\infty}\bigcap_{n\geqslant N}\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<k^{-1}\}\Bigr)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\Bigl(\bigcap_{n\geqslant N}\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<k^{-1}\}\Bigr)=1$$

при любом фиксированном $k=1,2,\ldots$ Из соотношения

$$\{\omega\colon |\xi_N(\omega)-\xi(\omega)|<k^{-1}\}\supset\bigcap_{n\geqslant N}\{\omega\colon |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<k^{-1}\}$$

получаем, что предел $\lim\limits_{N\to\infty}\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_N(\omega)-\xi(\omega)|<k^{-1}\})=1$, т. е. последовательность $\xi_1,\xi_2,\ldots$ сходится по вероятности к величине ξ. Следовательно, теорема 26.1 доказана.

Далее покажем, что из сходимости в среднеквадратическом следует сходимость по вероятности. С этой целью запишем первое неравенство Чебышева для случайной величины вида $\xi_n-\xi$: $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\})\leqslant \mathrm{M}(\xi_n-\xi)^2/\varepsilon^2$, $\varepsilon>0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{M}(\xi_n-\xi)^2=0$, то для заданных чисел $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ можно найти такое $N(\varepsilon,\delta)$, что при $n\geqslant N(\varepsilon,\delta)$ будет выполняться неравенство $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\})<\delta$. Значит, имеет место соотношение $1-\delta<\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n-\xi|<\varepsilon\})\leqslant 1$ при $n\geqslant N(\varepsilon,\delta)$ и последовательность случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ. Однако из сходимости по вероятности в общем случае не следует сходимость в среднеквадратическом. В самом деле, рассмотрим эксперимент, который заключается в непреднамеренном выборе точки на отрезке $[0,1]$. Для этого эксперимента описание ω — абсцисса произвольно поставленной точки на отрезке $[0,1]$ оси Ox, $\Omega=\{\omega\colon 0\leqslant\omega\leqslant 1\}$, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств на $[0,1]$ и вероятность $\mathbf{P}(A)$ любого борелевского подмножества (случайного события) $A\subset\Omega$ равна его длине. Определим поточечно на Ω для каждого натурального значения n случайную величину $\xi_n(\omega)$, которая равна 2^n при $0<\omega<n^{-1}$ и равна нулю в противном случае. Дискретная случайная величина ξ_n имеет следующее распределение: $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n=0\})=n^{-1}(n-1)$, $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n=2^n\})=n^{-1}$. Тогда для случайной величины ξ_n получаем, что при любом $\varepsilon>0$ вероятность вида $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n| < \varepsilon\}) \geqslant \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n| = 0\}) = n^{-1}(n-1)$. Значит, последовательность $\{\xi_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ сходится по вероятности к нулю при $n \to \infty$. В то же время математическое ожидание $\mathrm{M}|\xi_n|^2$, которое равно $n^{-1}2^{2n}$, не стремится к нулю при неограниченном увеличении n. Заметим, что для этой последовательности событие $\{\omega\colon \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = 0\} = \Omega$, т. е. последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится с вероятностью единица к нулю. Этот пример также показывает, что из сходимости с вероятностью единица в общем случае не следует сходимость в среднеквадратическом.

Тестовые вопросы к лекции 26

1. Тип — проверка ответов.

Пусть $n = 1, 2, \ldots$, $\xi_n(\omega) = u_n$, $\xi(\omega) = c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = c$ для всех $\omega \in \Omega$. Вычислить следующие вероятности: 1) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n(\omega) = u_n\})$; 2) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = c\})$; 3) $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| < \varepsilon\})$, где $\varepsilon > 0$ и $c - \varepsilon < u_n < c + \varepsilon$ для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Ответы:

1) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n(\omega) = u_n\}) = 1$.

2) $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) = c\}) = 1$.

3) $\mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| < \varepsilon\}) = 1$.

2. Тип — множественный выбор.

Пусть величина ξ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ заданы на одном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Определить, какие из приведенных высказываний будут верными.

- Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}) = 0$.
- Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}) = 1$.
- Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| < \varepsilon\}) = 1$.
- Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi| < \varepsilon\}) = 0$.

3. Тип — одиночный выбор.

Пусть величина ξ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ заданы на одном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Определить, какое из приведенных высказываний будет верным.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty, m\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi_m| < \varepsilon\}) = 0$.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty, m\to\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon |\xi_n - \xi_m| \geqslant \varepsilon\}) = 1$.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится с вероятностью единица к случайной величине ξ, то имеет место соотношение $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n\geqslant N} \{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < k^{-1}\}\Big) < 1$.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится с вероятностью единица к случайной величине ξ, то имеет место соотношение $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n\geqslant N} \{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < k^{-1}\}\Big) = 1$.

4. Тип — множественный выбор.

Пусть величина ξ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ заданы на одном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Определить, какие из приведенных высказываний будут верными.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится с вероятностью единица к случайной величине ξ, то имеет место соотношение $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n\geqslant N} \{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < k^{-1}\}\Big) = 1/2$.

• Если $\mathrm{M}(\xi^2) < +\infty$, $\mathrm{M}((\xi_n)^2) < +\infty$ для всех $n \geqslant 1$ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится в среднеквадратическом к случайной величине ξ, то имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}(\xi_n - \xi)^2 = 0$.

• Если $\mathrm{M}(\xi^2) < +\infty$, $\mathrm{M}((\xi_n)^2) < +\infty$ для всех $n \geqslant 1$ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится в среднеквадратическом к случайной величине ξ, то имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}(\xi_n - \xi)^2 > 0$.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится с вероятностью единица к случайной величине ξ, то имеет место соотношение $\mathbf{P}(\{\omega\colon \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)\}) = 0$.

5. Тип — одиночный выбор.

Пусть заданы случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и случайная величина ξ. Определить верное утверждение.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по распределению или слабо к случайной величине ξ, то имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ для всех $x \in R$.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по распределению к непрерывной случайной величине ξ, то имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant x\})$ для всех $x \in R$.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по распределению или слабо к дискретной случайной величине ξ, то $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = 1 - \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega) \geqslant x\})$ для всех $x \in R$.

• Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по распределению или слабо к случайной величине ξ, то имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ в каждой точке непрерывности функции $F_\xi(x)$.

6. Тип — множественный выбор.

Пусть $\xi(\omega)$ является одномерной случайной величиной на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Определить, какие из приведенных высказываний будут верными.

• Последовательность $\{\xi_n = \xi - 2^{-n};\ n = 1, 2, \ldots\}$ сходится по распределению к случайной величине ξ при $n \to \infty$.

• Последовательность $\{\xi_n = \xi - 2^{-n};\ n = 1, 2, \ldots\}$ не сходится с вероятностью единица к случайной величине ξ при $n \to \infty$.

• Последовательность $\{\xi_n = \xi - 2^{-n};\ n = 1, 2, \ldots\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ при $n \to \infty$.

• Последовательность $\{\xi_n = \xi - 2^{-n};\ n = 1, 2, \ldots\}$ не сходится в среднеквадратическом к случайной величине ξ при $n \to \infty$.

7. Тип — одиночный выбор.

Пусть величина ξ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ заданы на одном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Определить, какое из приведенных высказываний будет ошибочным.

• Из сходимости с вероятностью единица следует сходимость по вероятности.

• Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению.

• Из сходимости в среднеквадратическом следует сходимость по вероятности.

• Из сходимости по распределению следует сходимость по вероятности.

Лекция 27

АППРОКСИМАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

27.1. Классификация предельных теорем для последовательностей случайных величин. Приближенные формулы в биномиальной схеме

Теоремы, устанавливающие сходимость по вероятности некоторых последовательностей случайных величин к случайным величинам, получили название законов больших чисел. Утверждения, устанавливающие сходимость с вероятностью единица некоторых последовательностей случайных величин к случайным величинам, получили название усиленных законов больших чисел. Теоремы, в которых доказывается, что закон распределения суммы большого числа случайных величин неограниченно приближается к нормальному закону, называются центральными предельными теоремами. Различные формы законов больших чисел вместе с различными формами центральных предельных теорем образуют совокупность предельных теорем теории вероятностей [1, 3, 4, 6, 8–11]. Рассмотрим ряд предельных теорем в схеме испытаний Бернулли.

В прикладных задачах при больших значениях n, m, k, s очень часто приходится вычислять вероятности $\mathbf{P}(B_m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{m=k}^{s} B_m\Big) = \sum\limits_{m=k}^{s} C_n^m p^m q^{n-m}$. Непосредственный подсчет вероятностей по этим формулам представляет значительные трудности даже на современных персональных компьютерах, главным образом из-за больших чисел C_n^m и малых чисел $p^m q^{n-m}$. Пусть требуется решить следующую задачу.

Пример 27.1. По каналу связи независимым образом передано 10 000 знаков. Вероятность искажения любого передаваемого знака равна 0,0008. Вычислить вероятность того, что получится:

1) ровно 14 искажений; 2) число искажений будет не менее 10 и не более 19. В этом примере имеем биномиальную схему с параметрами $n = 10\,000$, $p = 0{,}0008$. Поэтому по формулам Бернулли получим: 1) $\mathbf{P}(B_{14}) = C_{10000}^{14}(0{,}0008)^{14}(0{,}9992)^{9986}$, $m = 14$; 2) $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{m=10}^{19} B_m\Big) = \sum\limits_{m=10}^{19} C_{10000}^{m}(0{,}0008)^{m}(0{,}9992)^{10000-m}$, $k = 10$, $s = 19$.

Эти выражения достаточно просты, но получить их точные числовые значения весьма затруднительно. Поэтому возникает необходимость в получении приближенных формул для вероятностей $\mathbf{P}(B_m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{m=k}^{s} B_m\Big) = \sum\limits_{m=k}^{s} C_n^m p^m q^{n-m}$ при достаточно больших значениях n, m, k, s. Эти формулы впервые были получены Муавром, Лапласом и Пуассоном в результате доказательства простейших предельных теорем в схеме Бернулли. Доказательства этих теорем основываются на комбинаторных методах с применением известной формулы Стирлинга–Муавра вида $n! = (2n\pi)^{1/2} n^n \exp\{-n\}\exp\{\theta_n\}$, $0 < \theta_n < 1/12n$, на теории пределов и на определении интегральных сумм из математического анализа. Другими словами, эти доказательства [9] носят чисто технический характер и, как правило, не связаны с вероятностными методами.

Локальная предельная теорема Муавра–Лапласа. Пусть в схеме независимых испытаний $0 < p$, $q < 1$ и при $n \to \infty$ выполняется соотношение $|(m - np)/(npq)^{1/2}| < c$, где c — любая фиксированная постоянная. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m} (2\pi npq)^{1/2} (\exp\{-(m-np)^2/(2npq)\})^{-1} = 1.$$

Это предельное равенство выполняется равномерно для всех таких m, для которых величина $x = x_m = x_m(n) = (m - np)/(npq)^{1/2}$ принадлежит отрезку $[-c, c]$, и поэтому имеет место приближенная формула вида

$$\mathbf{P}(B_m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2 \right\}.$$

Интегральная предельная теорема Муавра–Лапласа. Пусть для $m = 0, 1, \ldots, n$ величина $x_m = x_m(n) = (m - np)/(npq)^{1/2}$ и $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{m:\, a \leqslant x_m < b\}} B_m\Big) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b \exp\{-x^2/2\}\, dx$ выполняется равномерно по a и b, где объединение распространяется на все такие значения m, для которых $a \leqslant x_m < b$, вероятность p успеха в каждом из n независимых испытаний постоянна и $0 < p < 1$. Поэтому имеет место приближенная формула [9]:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{m=k}^{s} B_m\right) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{s-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)\right],$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Локальная предельная теорема Пуассона. Пусть при $n \to +\infty$ величина $p(n) = \lambda n^{-1} + o(n^{-1})$, где $\lambda = \text{const} > 0$ и $o(n^{-1})$ — бесконечно малая величина по сравнению с n^{-1}. Тогда для каждого $m = 0, 1, 2, \ldots$ имеют место предельное равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m) = (m!)^{-1}\lambda^m \exp\{-\lambda\}$ и формулы $\mathbf{P}(B_m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $\mathbf{P}(B_m) \approx (\lambda^m/m!) \exp\{-\lambda\}$.

Пример 27.2. Какова вероятность того, что в обществе из 500 человек ровно 5 человек родились 1 января?

Решение. Предполагается, что для произвольного человека все дни рождения равновероятны, поэтому вероятность $p = 1/365 \approx 0{,}0027$ мала. Из условия задачи имеем: $m = 5$, $n = 500$, $\lambda = np = 500/365 \approx 1{,}37$. Тогда $P_{500}(5) \approx \exp\{-1{,}37\} \times (1{,}37)^5/5! \approx 0{,}0102$. Отметим, что точный подсчет вероятности $P_{500}(5)$ с указанием только четырех десятичных знаков дает результат 0,0101.

27.2. Предельные теоремы для последовательности независимых случайных величин

Рассмотрим теперь ряд простейших предельных теорем, которые позволяют приближенно вычислять не только различные законы распределения, но и в ряде случаев аппроксимировать случайные величины. Сначала рассмотрим закон больших чисел в форме Чебышева.

Теорема 27.1. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются попарно независимыми случайными величинами, для которых существуют конечные $\mathrm{M}\xi_i = a$ и $\mathrm{D}\xi_i = \sigma^2$ при всех $i = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\{\eta_n = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i;\ n \geqslant 1\}$ из средних арифметических случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится по вероятности к $\mathrm{M}\xi_i = a$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины η_n соответственно равны $\mathrm{M}\eta_n = \mathrm{M}\left(n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \mathrm{M}\xi_i = a$ и $\mathrm{D}\eta_n = \mathrm{D}\left(n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right) = n^{-2}\mathrm{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right) = n^{-2}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{D}(\xi_i) = n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n$. Отсюда видно, что дисперсия случайной величины η_n равна σ^2/n и убывает с ростом n. На содержательном уровне это означает, что случайная величина η_n с ростом n все в большей степени ведет себя как неслучайная величина, т. е. приближается к некоторой константе. Применяя второе неравенство Чебышева для случайной величины η_n, находим: $\mathbf{P}(\{\omega\colon\ |\eta_n - a| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mathrm{D}\eta_n/\varepsilon^2 = \sigma^2/(n\varepsilon^2) < \delta$, если только $n \geqslant N(\varepsilon,\delta) \geqslant \sigma^2(\delta\varepsilon^2)^{-1} + 1$. Отсюда, переходя к противоположному событию, для величин ε, $\delta > 0$ и $n \geqslant \sigma^2(\delta\varepsilon^2)^{-1} + 1$ получаем соотношение $1 - \delta < \mathbf{P}(\{\omega\colon\ |\eta_n| < \varepsilon\}) < 1 + \delta$. Поэтому при $n \to \infty$ последовательность $\{\eta_n; n \geqslant 1\}$ сходится по вероятности к постоянной величине $\mathrm{M}\xi_i = a$. Теорема Чебышева доказана.

Рассмотрим важные и поучительные примеры применения простейшего варианта закона больших чисел в форме Чебышева.

Пример 27.3 (задача о приближенных измерениях). Пусть случайная величина ξ с интегральной функцией распределения $F(x)$, для которой математическое ожидание $\mathrm{M}\xi$ и дисперсия $\mathrm{D}\xi$ конечны, определяет расстояние между двумя населенными пунктами. Проведем последовательность независимых опытов по измерению этого расстояния.

Обозначим через ξ_1 случайную величину, которая соответствует величине ξ в первом опыте, через ξ_2 — случайную величину, соответствующую величине ξ во втором опыте, и т. д. В работе [9] показано, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и ξ могут быть заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Причем случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются независимыми в совокупности, и каждая случайная величина ξ_i имеет интегральную функцию распределения $F(x)$. На основании закона больших чисел в форме Чебышева можно сказать, что при достаточно большом числе n проведения независимых опытов среднее арифметическое $n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ наблюдаемых значений приблизительно равно $\mathrm{M}\xi$. Этим фактом пользуются на практике при приближенном вычислении некоторой неизвестной величины, например расстояния между заданными населенными пунктами.

Теорема 27.2 (теорема Бернулли). *Если* $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}_0(\cdot))$ *есть вероятностная модель эксперимента* E, *то при неограниченном увеличении числа* n *независимых опытов над этим экспериментом относительная частота* $n^{-1}\mu(A,n)$ *случайного события* $A \in \mathcal{F}_0$ *сходится по вероятности к вероятности* $\mathbf{P}_0(A)$, *или обладает статистической устойчивостью.*

Доказательство. Обозначим вероятность $\mathbf{P}_0(A)$ через p. Пусть ξ_1 — число появлений события A в первом опыте $E_1 = E$, ξ_2 — число появлений события A во втором опыте $E_2 = E$ и т. д. В работе [9] предложен метод построения некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, на котором случайные величины $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega), \ldots$ будут независимыми в совокупности с распределением $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_i(\omega) = 0\}) = 1 - p$, $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_i(\omega) = 1\}) = p$. Легко вычислить, что $\mathrm{M}\xi_i = p$ и $\mathrm{D}\xi_i = p(1-p)$. Относительная частота $n^{-1}\mu(A,n) = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i(\omega)$ или статистическая вероятность события A за n опытов. Итак, все условия закона больших чисел в форме Чебышева выполнены. Поэтому получаем, что $\mathbf{P}(\{\omega\colon |n^{-1}\mu(A,n) - p| < \varepsilon\}) > 1 - \delta$ при ε, $\delta > 0$ и $n \geqslant (\delta\varepsilon^2)^{-1}p(1-p) + 1$, или $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}(\{\omega\colon |n^{-1}\mu(A,n) - p| < \varepsilon\}) = 1$. Теорема Бернулли доказана.

27.3. Центральная предельная теорема Линдеберга–Леви

Нередко случайная величина равна сумме большого числа малых по абсолютной величине и независимых случайных величин, для которых законы распределения неизвестны. Примерами таких случайных величин являются:

1) ошибки измерительного прибора, которые порождаются влиянием механических, температурных или атмосферных факторов;

2) ошибки наблюдателя, вносимые особенностями его зрения, слуха и т. д.

Приведем еще пример. Пусть производится стрельба по мишени. Отклонение точки попадания от центра мишени можно объяснить:

1) ошибкой наводки при стрельбе;

2) ошибкой в определении дальности до цели;

3) непреднамеренной вибрацией орудия и всевозможных установок при стрельбе;

4) ошибкой при изготовлении снаряда;

5) атмосферными условиями и т. д.

В этих примерах суммарная ошибка ξ равна простой сумме элементарных ошибок $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, т. е. $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Ответ на вопрос о поведении интегральной функции распределения суммы случайных величин дают центральные предельные теоремы. Рассмотрим одну из таких теорем, ее доказательство можно найти в учебнике [9].

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием a и конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$, то при $n \to \infty$ распределение суммы $\gamma_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - an\right)\Big/\sigma n^{1/2}$ удовлетворяет следующему равенству:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\omega\colon \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - an\right)\Big/\sigma n^{1/2} < x\right\}\right) = \\ = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\}\, dt,$$

при этом сходимость равномерна по x для $-\infty < x < \infty$.

На практике эту теорему можно применять при $n \geqslant 10$. Тогда случайная величина $\gamma_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - an\right)\Big/\sigma n^{1/2}$ имеет распределение, близкое к нормальному закону. Этот факт можно использовать для приближенного вычисления $\mathbf{P}\left(c \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k < d\right)$, где $-\infty < c < d < +\infty$. Действительно, используя функцию Лапласа $\Phi(x)$, получим, что вероятность

$$\mathbf{P}\left(c \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k < d\right) = \mathbf{P}\left(c - na \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k - na < d - na\right) = \\ = \mathbf{P}\left((c-na)/\sigma n^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - na\right)\Big/\sigma n^{1/2} < (d-na)/\sigma n^{1/2}\right) \approx \\ \approx 2^{-1}\left[\Phi((d-na)/\sigma n^{1/2}) - \Phi((c-na)/\sigma n^{1/2})\right].$$

Решим теперь такую задачу. Найти приближение для плотности вероятности $f_\xi(x)$ величины $\xi = \sum\limits_{k=1}^{24} \xi_k$ и вычислить вероятность $\mathbf{P}(6 \leqslant \xi < 14)$, если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{24}$ — независимые и равномерные случайные величины на отрезке $[0, 1]$. Найдем $\mathrm{M}\xi_k$ и $\mathrm{D}\xi_k$:

$\mathrm{M}\xi_k = 1/2$ и $\mathrm{D}\xi_k = 1/12$. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение для ξ равны: $\mathrm{M}\xi = n\mathrm{M}\xi_k = 12$ и $\sigma(\xi) = \sqrt{2}$. По теореме Линдеберга–Леви распределение случайной величины ξ близко к нормальному закону с параметрами $a = 12$ и $\sigma = \sqrt{2}$. Поэтому плотность распределения $f_\xi(x) \approx 2^{-1}\pi^{-1/2}\exp\{(x-12)^2/4\}$, а искомая вероятность приближенно равна

$$\mathbf{P}(6 \leqslant \xi < 14) \approx 2^{-1}\big[\Phi((14-12)2^{-1/2}) - \Phi((6-12)2^{-1/2})\big] = \\ = 2^{-1}\big[\Phi(\sqrt{2}\,) + \Phi(3\sqrt{2}\,)\big] \approx 0{,}92.$$

Пример 27.4. Используя центральную предельную теорему Линдеберга—Леви, найти предел вида $\lim\limits_{n\to\infty}\exp\{-n\}\sum\limits_{k=1}^{n} n^k/k!$

Решение. Пусть при любом $k = 1, 2, \ldots$ случайная величина ξ_k является пуассоновской с параметром $\lambda = 1$, а последовательность $\{\xi_k; k \geqslant 1\}$ составлена из независимых случайных величин. Тогда $\mathrm{M}\xi_k = 1$, $\mathrm{D}\xi_k = 1$ и по центральной предельной теореме Линдеберга–Леви при $n \to \infty$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left\{\omega\colon \left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k - n\right)n^{-1/2} < x\right\}\right) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp\{-t^2/2\}\,dt.$$

Пусть теперь $x = 0$. Тогда получим

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left\{\omega\colon \left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k - n\right)n^{-1/2} < 0\right\}\right) = \\ = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{0}\exp\{-t^2/2\}\,dt = 0{,}5.$$

Так как сумма $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = n$, то непосредственно отсюда легко выводим:

$$\exp\{-n\}\sum_{k=1}^{n} n^k/k! - \exp\{-n\}n^n/n! = \mathbf{P}\left(\left\{\omega\colon \sum_{k=1}^{n}\xi_k < n\right\}\right) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon \sum_{k=1}^{n}\xi_k - n < 0\}) = \mathbf{P}\left(\left\{\omega\colon \left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k - n\right)n^{-1/2} < 0\right\}\right).$$

В силу равенств

$$\lim_{n\to\infty} n^n (n!)^{-1} \exp\{-n\} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\omega\colon \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - n\right) n^{-1/2} < 0\right\}\right) = 0{,}5$$

получаем предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \exp\{-n\} \sum\limits_{k=0}^{n} n^k (k!)^{-1} = 0{,}5$.

В конце этой лекции сделаем важное для практических задач замечание. Вычисление биномиальной вероятности $P_n(m)$ по формуле $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ при больших значениях n и m представляет значительные трудности. Поэтому приводятся локальные и интегральные предельные теоремы Муавра–Лапласа и Пуассона. Эти теоремы позволяют приближенно и с достаточной степенью точности определять биномиальные вероятности при больших значениях n и m. Вероятности некоторых событий в схеме независимых испытаний Бернулли, вычисленные по соответствующим приближенным формулам, почти не отличаются от единицы. В силу этого можно предсказывать такого рода события в схеме независимых испытаний Бернулли почти с полной определенностью. В общем случае теория вероятностей дает возможность не только осуществлять научные прогнозы случайных явлений, но и оценивать точность этих прогнозов. Математическое обоснование научных прогнозов случайных явлений основано на понятии различных видов сходимостей в теории вероятностей и на утверждениях различных предельных теорем.

На основании материала, изложенного в первой и второй частях курса лекций, мы можем теперь сформулировать основной предмет теории вероятностей. Теория вероятностей, во-первых, предлагает методы построения адекватных моделей реальных статистически устойчивых экспериментов, во-вторых, средствами математики изучает эти модели и тем самым открывает новые фундаментальные закономерности реального мира.

Тестовые вопросы к лекции 27

1. Тип — проверка ответов.

Завод отправил на базу $n = 100$ годных изделий. Вероятность повреждения в пути для изделия $p = 0{,}2$. Используя предельные теоремы, вычислить вероятность того, что годными изделиями прибудут: 1) ровно 16; 2) не менее 75 и не более 90; 3) не менее 75.

Ответы:
1) $\mathbf{P}(B_{16}) \approx 0{,}060$;
2) $\mathbf{P}(B_{75,90}) \approx 0{,}888$;
3) $\mathbf{P}(B_{75,100}) \approx 0{,}894$.

2. Тип — одиночный выбор.

Рассматривается схема испытаний Бернулли с параметрами p и n. Определить, какое из приведенных соотношений будет ошибочным.

- $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m} (2\pi npq)^{1/2} (\exp\{-(m-np)^2/(2npq)\})^{-1} = 1.$
- $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{m=k}^{s} B_m\right) = \sum\limits_{m=k}^{s} C_n^m p^m q^{n-m} \approx \dfrac{1}{2}\left[\Phi\left(\dfrac{s-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)\right],$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа и величина $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{m=k}^{s} B_m\right)$ определяет вероятность того, что среди n независимых испытаний некоторое событие A появится не менее k и не более s раз.

• При $n > 100$, $np(1-p) > 16$ и $p \approx 1/2$ имеет место соотношение

$$C_n^m p^m q^{n-m} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right\}.$$

• $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m} = (m!)^{-1} \lambda^m \exp\{-\lambda\}$, где $\lambda > 0$.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть величина ξ и последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ заданы на одном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Определить, какие из приведенных высказываний будут верными.

• Последовательность $\{\eta_n = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i;\ n \geqslant 1\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ при $n \to \infty$.

• При $n \to \infty$ последовательность $\{\eta_n = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i;\ n \geqslant 1\}$ сходится по вероятности к $\mathrm{M}\xi_i = a$, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются попарно независимыми случайными величинами и $\mathrm{M}\xi_i = a < +\infty$, $\mathrm{D}\xi_i = \sigma^2 < +\infty$ при всех $i \geqslant 1$.

• Последовательность $\{\eta_n = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i;\ n \geqslant 1\}$ сходится при $n \to \infty$ по вероятности к $\mathrm{M}\xi_i = a$.

• При $n \to \infty$ последовательность $\{\eta_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_i;\ n \geqslant 1\}$ сходится с вероятностью единица к $\mathrm{M}\xi_i = a$, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются попарно независимыми величинами и $\mathrm{M}\xi_i = a < +\infty$, $\mathrm{D}\xi_i = \sigma^2 < +\infty$ при всех $i = 1, 2, \ldots$

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Определить, какое из приведенных высказываний будет верным.

• При $n \to \infty$ последовательность $\{\eta_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - a);\ n \geqslant 1\}$ сходится по вероятности к $\mathrm{M}\xi_i = a$, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются попарно независимыми случайными величинами и $\mathrm{M}\xi_i = a < +\infty$ при всех $i = 1, 2, \ldots$

• При $n \to \infty$ последовательность $\{\eta_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - a);\ n \geqslant 1\}$ сходится по вероятности к $\mathrm{M}\xi_i = a$, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются попарно независимыми случайными величинами и $\mathrm{D}\xi_i = \sigma^2 < +\infty$ при всех $i = 1, 2, \ldots$

• При $n \to \infty$ последовательность $\{\eta_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - a);\ n \geqslant 1\}$ сходится по вероятности к нулю, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются попарно независимыми величинами и $\mathrm{M}\xi_i = a < +\infty$, $\mathrm{D}\xi_i = \sigma^2 < +\infty$ при всех $i = 1, 2, \ldots$

• При $n \to \infty$ последовательность $\{\eta_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - a);\ n \geqslant 1\}$ сходится с вероятностью единица к $\mathrm{M}\xi_i = a$, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются попарно независимыми величинами и $\mathrm{M}\xi_i = a < +\infty$, $\mathrm{D}\xi_i = \sigma^2 < +\infty$ при $i = 1, 2, \ldots$

5. Тип — множественный выбор.

Пусть $n^{-1}\mu(A, n)$ — относительная частота появлений исхода A некоторого статистически устойчивого эксперимента при n независимых испытаниях. Определить верные утверждения.

• Относительная частота $n^{-1}\mu(A, n)$ случайного события A сходится по вероятности к вероятности p события A.

• Для относительной частоты $n^{-1}\mu(A, n)$ случайного события A имеет место усиленный закон больших чисел.

• Для относительной частоты $n^{-1}\mu(A,n)$ случайного события A имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\{\omega\colon\ |n^{-1}\mu(A,n)-p|<\varepsilon\})=1.$$

• Для относительной частоты $n^{-1}\mu(A,n)$ случайного события A имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\biggl(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n\geqslant N}\{\omega\colon\ |n^{-1}\mu(A,n)-p|<k^{-1}\}\biggr)<1.$$

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть некоторая случайная величина ξ равна сумме ξ_1+ $+\,\xi_2+\ldots+\xi_n$ малых по абсолютной величине и независимых случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$. Определить, какое из приведенных высказываний будет ложным.

• Ошибка ξ показания измерительного прибора равна сумме ошибок ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4, которые соответственно порождаются влиянием механических, температурных, атмосферных и других суммарных факторов.

• Ошибка ξ наблюдателя за некоторой величиной равна сумме ошибок ξ_1, ξ_2 и ξ_3, вносимых соответственно особенностями его зрения, слуха и других суммарных факторов.

• Отклонение точки попадания от центра мишени при стрельбе не зависит от ошибок наводки и определения дальности цели.

• Вопрос о поведении интегральной функции распределения суммы $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ при изменении n решают различные центральные предельные теоремы.

7. Тип — многозначный выбор.

Пусть случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots$ заданы на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Определить верные высказывания.

• При $n\to\infty$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Biggl(\biggl\{\omega\colon\biggl(\sum_{k=1}^{n}\xi_k-an\biggr)/\sigma n^{1/2}<x\biggr\}\Biggr)=$$
$$=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\{-t^2/2\}\,dt,$$

если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами и $\mathrm{M}\xi_i = a < +\infty$, $0 < \mathrm{D}\xi_i = \sigma^2 < < +\infty$ при $i \geqslant 1$.

• Имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left(c \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k < d\right) = 2^{-1}\left[\Phi((d-na)/\sigma n^{1/2}) - \Phi((c-na)/\sigma n^{1/2})\right],$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа и $-\infty < c < d < +\infty$.

• Равномерно по x выполняется равенство вида

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\omega\colon \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - an\right)/\sigma n^{1/2} < x\right\}\right) = \\ = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\}\, dt,$$

если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами и $\mathrm{M}\xi_i = a < +\infty$, $0 < \mathrm{D}\xi_i = \sigma^2 < < +\infty$ при $i \geqslant 1$.

• Имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\left(c \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k < d\right) \approx 2^{-1}\left[\Phi((d-na)/\sigma n^{1/2}) - \Phi((c-na)/\sigma n^{1/2})\right],$$

где $-\infty < c < d < +\infty$, $n \geqslant 10$, $\mathrm{M}\xi_i = a < +\infty$, $0 < \mathrm{D}\xi_i = \sigma^2 < < +\infty$ при $i \geqslant 1$ и $\Phi(x)$ является функцией Лапласа.

Часть III

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 28

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ, ЕЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЫБОРОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

28.1. Связь теории вероятностей и математической статистики

В предыдущих разделах курса «Вероятностные модели» и курса «Теория вероятностей» мы строили и изучали вероятностные свойства адекватных моделей [8, 9] статистически устойчивых экспериментов. Большое разнообразие реальных статистически устойчивых экспериментов не позволяет дать точное или строго формализованное определение такого рода экспериментов. Поэтому в теории построения вероятностных моделей, в теории вероятностей и в математической статистике, как и в любой науке, имеется ряд основных интуитивных понятий. Эти понятия не имеют формализованного определения и, как правило, поясняются на конкретных примерах. Все основные неопределяемые понятия, которые были введены в теории построения вероятностных моделей и в теории вероятностей, остаются в силе и в математической статистике. Такими интуитивными понятиями являются: эксперимент, исход (или результат) эксперимента, статистически устойчивый эксперимент, элементарный результат, равновозможный элементарный исход и др. При этом предполагается, что любой статистически устойчивых эксперимент E задается некоторым множеством $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots\}$ условий $u_1, u_2, \ldots$ его проведения и множеством $\Im = \{A, B, C, A_1, A_2, \ldots\}$ всех его возможных исходов. Множество Σ содержит s основных условий (элементов) $u_1, u_2, \ldots, u_s$, а остальные условия (случайные факторы), помеченные многоточием после символа u_s, нам точно не известны. Поэтому при многократном проведении статистически устойчивого эксперимента E в одних и тех же условиях наблюдаются различные его исходы или массовые явления, и, следовательно, их предсказать невозможно. Причину такого поведения эксперимента E можно объяснить следующими обстоятельствами. Во-первых, множество Σ условий проведения эксперимента содержит очень большое число разнообразных случайных факторов, каждый из которых в отдельности очень мало влияет на исход эксперимента и может меняться неизвестным образом от опыта к опыту. Однако результат суммарного действия случайных факторов приводит к возможности появления заранее не предсказуемых исходов такого эксперимента. Во-вторых, слишком малые и непреднамеренные изменения основных условий $u_1, u_2, \ldots, u_s$ не могут быть зафиксированы современными средствами. Поэтому очень трудно утверждать, что повторное проведение эксперимента осуществлялось в точно таких же условиях. Вместе с тем появление того или иного исхода случайного эксперимента очень чувствительно к малым изменениям хотя бы одного из основных условий $u_1, u_2, \ldots, u_s$. В-третьих, в природе действует известный принцип неопределенности, согласно которому невозможно абсолютно точное измерение некоторых физических величин. Например, в силу принципа неопределенности в квантовой механике нельзя точно и одновременно знать импульс частицы и ее местонахождение. Или еще аналогичный пример: не существует способа, который определяет момент времени распада данного ядра урана. Проблема многократно усложняется, когда исследователю известны не все основные условия $u_1, u_2, \ldots, u_s$ его проведения или не все возможные результаты $A, B, C, \ldots$ статистически устойчивого эксперимента E. Математическая статистика рассматривает именно такие сложные ситуации для случайных экспериментов.

Приемы и способы научного анализа экспериментальных данных с целью восстановления неизвестных условий проведения или неизвестных исходов статистически устойчивого эксперимента и составляют предмет математической статистики. Ясно, что указанные экспериментальные данные могут быть получены только в результате выборочных наблюдений за статистически устойчивым экспериментом E. Используя методы теории вероятностей, математическая статистика позволяет не только определить значения искомых характеристик эксперимента, но и оценить степень точности выводов, получаемых при обработке выборочных экспериментальных данных. Основным методом изучения свойств статистически устойчивых экспериментов в теории вероятностей является построение и изучение абстрактных вероятностных моделей $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ без обращения к непосредственному проведению эксперимента. В этой модели Ω

есть множество описаний ω элементарных исходов $A' = \{\omega\}$, где $A' \in \Im$, и σ-алгебра $\mathcal{F}$ наблюдаемых случайных событий эксперимента E является подмножеством $\Im$. Вероятность $\mathbf{P}(A)$ определяет шанс наступления исхода $A \in \mathcal{F}$. Наоборот, в математической статистике исследования связаны с конкретными экспериментальными данными, идут от практики к предполагаемой гипотезе и к ее проверке. Так как в рамках математической статистики по меньшей мере не все основные условия проведения статистически устойчивого эксперимента E известны, то априори в лучшем случае можно утверждать, что вероятностная функция $\mathbf{P}(A)$: $\mathcal{F} \to [0,1]$ является элементом некоторого заданного класса (семейства) $\wp$. Семейство $\wp$ может включать в себя все вероятностные функции, которые можно задать на $\mathcal{F}$ (случай полной неопределенности). В других же ситуациях класс $\wp$ представляет собой некоторое более узкое семейство, когда имеется более определенная информация об условиях проведения эксперимента E. Итак, под вероятностно-статистической моделью или структурой в математической статистике понимается семейство вида $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))\colon \mathbf{P}(\cdot) \in \wp\}$ из вероятностных пространств. Рассмотрим иллюстративный пример, который на интуитивном уровне поясняет эту непростую ситуацию.

Пример 28.1. Пусть монета с неизвестной симметрией бросается один раз с помощью некоторого механизма, обеспечивающего произвольное вращение монеты в воздухе и ее непреднамеренное падение на поверхность стола. Для этого эксперимента $\Sigma = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots\}$, где u_1 — монета определенного достоинства с неизвестной симметрией, u_2 — механизм бросания монеты, u_3 — одноразовое подбрасывание монеты, u_4 — поверхность стола, u_5 — достаточная освещенность для определения выпавшей стороны монеты и т. д. Итак, перечислены основные условия u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 проведения данного эксперимента. Допустимыми исходами этого эксперимента могут быть: выпадение орла, выпадение решки, выпадение какой-то стороны монеты, выпадение орла и цифры. Выберем элементарные исходы и математический язык для их описания. Пусть ω_1 означает описание такого элементарного исхода A_1, когда выпадает орел; ω_2 означает описание такого элементарного исхода A_2, когда выпадает решка. Тогда достоверное событие $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ и σ-алгебра $\mathcal{F} = \Im = \{A\colon\ A \subset \Omega\} = \{A_1, A_2, \Omega, \varnothing\}$. Так как симметрия монеты является неизвестным условием проведения этого эксперимента, то $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = p$ и вероятностно-статистическая модель задается с помощью неизвестного параметра p

и имеет вид $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))\colon \mathbf{P}(\cdot) \in \wp\}$, где $\wp = \{\mathbf{P}_p(\cdot)\colon p \in (0,1)\}$. В этом случае вероятностно-статистическую модель целесообразно записать в простом виде $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_p(\cdot)\colon p \in (0,1)\}$. Путем n-кратного подбрасывания такой монеты методы математической статистики позволяют вычислить приближенное значение параметра p с достаточной степенью точности или оценить асимметрию монеты. Если $p \approx 1/2$, то можно считать, что монета является симметричной.

В теории вероятностей все выводы делаются без использования эксперимента, на основе анализа построенной абстрактной математической модели изучаемого случайного явления. В математической статистике наоборот, изучение начинается с некоторого числа независимых повторений эксперимента E. Затем с помощью анализа полученных статистических данных происходит уточнение модели изучаемого явления. Это обстоятельство позволяет строить адекватные вероятностные модели. Прикладные задачи, решаемые статистическими методами, весьма разнообразны. Однако в зависимости от характера наблюдаемых величин и целей наблюдения эти задачи можно объединить в четыре группы:

1) определение статистических (выборочных или эмпирических) законов распределения случайных величин;

2) определение статистических (выборочных или эмпирических) числовых характеристик случайных величин;

3) оценка неизвестных параметров законов распределения случайных величин и оценка неизвестных коэффициентов уравнений, которым удовлетворяют случайные величины;

4) статистическая проверка правильности тех или иных гипотез.

Возникновение и развитие математической статистики продиктовано потребностями практики. Методы математической статистики широко используются в различных технических дисциплинах, в сельском хозяйстве, биологии, медицине, физических науках, геологии, психологии, социологических исследованиях и других науках, долго считавшихся далекими от математики. Одной из важнейших сфер приложения теории вероятностей и математической статистики является экономика. В настоящее время трудно себе представить исследование и прогнозирование экономических явлений без использования эконометрического моделирования, регрессионного анализа, трендовых и сглаживающих моделей и других методов математической статистики.

28.2. Неопределяемые или интуитивные понятия в математической статистике

В предыдущем разделе отмечалось, что в математической статистике рассматриваются эксперименты E, для которых не все основные условия $u_1, u_2, \ldots, u_s$ и не все возможные результаты $A, B, C, \ldots$ известны. В связи с этим в математической статистике рассматриваются такие новые интуитивные понятия, как генеральная совокупность, выборочная совокупность, вариационный ряд, информационно-статистическая таблица и др. В результате многократного и независимого проведения эксперимента E с некоторой неопределенностью в задании вероятностной функции $\mathbf{P}(\cdot)$ наблюдаем K его исходов (случайных событий, элементов, объектов) из множества $\Gamma_0 = \{A_1, A_2, \ldots, A_K\}$. При этом некоторые из событий $A_1, A_2, \ldots, A_K$ могут повторяться. Будем полагать, что каждому или некоторым из этих K объектов присуще определенное значение выбранной числовой характеристики ξ — случайной величины. Отберем теперь только все такие элементы $B_1, B_2, \ldots, B_N$ из множества $\{A_1, A_2, \ldots, A_K\}$, каждый из которых может путем измерений определить значение случайной величины ξ. Причем распределение вероятностей случайной величины ξ хотя бы частично неизвестно. Характеристика эксперимента E может быть и векторной. В этом случае ее будем обозначать полужирной греческой буквой $\boldsymbol{\xi}$. Пространство значений выбранной характеристики эксперимента E будем обозначать в дальнейшем через X. Для простоты изложения в основном будем ограничиваться только скалярным случаем. Совокупность $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots, B_N\}$ объектов одинаковой природы назовем генеральной совокупностью объема $N \leqslant K$, для которых изучается распределение одного или нескольких количественных признаков. При этом любой из признаков является случайной величиной, так как его значения от элемента к элементу меняется случайным образом. Заметим, что множеств $\Gamma \subset \Gamma_0$ и каждое из этих множеств может быть как конечным, так и бесконечным. Приведем примеры генеральных совокупностей.

Пример 28.2. Пусть эксперимент E — отобранная случайным образом деталь в виде шара, изготовленная на токарном станке, и отобранный случайным образом рабочий некоторого автозавода. В результате многократного и независимого проведения эксперимента E ровно 1000 раз отобраны детали $D_1, D_2, \ldots, D_{1000}$ и рабочие $R_1, R_2, \ldots, R_{1000}$. В этом случае

$$\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_K\} = \Gamma_0 = \{D_1, R_1, D_2, R_2, \ldots, D_{1000}, R_{1000}\},$$

$$A_1 = D_1, \quad A_2 = R_1, A_3 = D_2, \quad A_4 = R_2, \ldots, A_{1999} = D_{1000},$$
$$A_{2000} = R_{1000} \quad \text{и} \quad K = 2000.$$

Если характеристика ξ эксперимента E — это диаметр детали, то $\Gamma = \{D_1, D_2, \ldots, D_{1000}\}$ и $N = 1000$. В качестве другой генеральной совокупности объема 1000 можно взять $\Gamma = \{R_1, R_2, \ldots, R_{1000}\}$, когда векторная характеристика эксперимента E имеет вид $\boldsymbol{\xi} = (\eta_1, \eta_2)$, где η_1 и η_2 — вес и рост рабочего автозавода.

Для изучения интересующих нас характеристик генеральной совокупности Γ вовсе не обязательно изучать каждый элемент генеральной совокупности. К примеру, если нас интересует, как будут голосовать на предстоящих выборах жители Нижнего Новгорода, для этого вовсе не обязательно опрашивать каждого из N жителей города. Достаточно провести n опросов или составить выборочную совокупность $\Gamma_{\text{в}}$ объема $n \ll N$ из множества Γ всех жителей. Пусть кандидатов будем различать по их номерам $1, 2, \ldots, k$. Тогда ξ определяет выбор жителем Нижнего Новгорода того или иного кандидата и принимает значение из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. Каждый опрос с номером $i = 1, 2, \ldots, n$ состоит в том, что мы случайным образом выбираем одного жителя Нижнего Новгорода и определяем для него значение ξ_i. Здесь ξ_i — номер кандидата, которому отдаст свой голос на предстоящих выборах житель с номером i.

Сделаем теперь некоторые замечания о составлении выборочной совокупности $\Gamma_{\text{в}} \subset \Gamma$ для произвольного эксперимента E. Считается, что объем N всей генеральной совокупности велик по сравнению с объемом n выборки $\Gamma_{\text{в}}$. Нельзя обследовать всю генеральную совокупность, так как для этого необходимо изучать весьма большое количество объектов, что просто невозможно физически, а иногда испытание сопровождается большими экономическими затратами и разрушением объекта. Следует помнить также, что выборочная совокупность обязательно должна удовлетворять условию репрезентативности, или, говоря более простым языком, давать верное (адекватное) представление обо всей генеральной совокупности. Этого можно достичь за счет увеличения объема выборочной совокупности и осуществления отбора элементов генеральной совокупности случайно и независимым образом. Например, имея номера всех элементов генеральной совокупности, можно использовать датчики случайных чисел для получения n последовательных элементов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ выборочной совокупности $\Gamma_{\text{в}}$. Пусть случайная величина ξ_i определяет количественную характеристику ξ объекта C_i. Тогда случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ являются независимыми, одинаково распределенными и упорядоченными. Они представляют собой n копий (клонов) случайной величины $\xi(\omega) \in X$ с неизвестным распределением. Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ будем называть повторной выборкой. Вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in X^n$ представляет собой реализацию случайной повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Переменные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют также выборочными значениями для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ соответственно.

28.3. Способы представления выборочных значений. Вариационные и статистические ряды

Удобно представить величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в виде неубывающей последовательности $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. При этом величина x_1^* — наименьшая из величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Величина x_2^* — вторая по величине из величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и т. д. Наконец, величина x_n^* должна быть наибольшей из величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Таким способом определенная последовательность величин $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ называется вариационным рядом. Для величин x_1^* и x_n^* естественно употребляют название минимального и максимального членов вариационного ряда. Переход от выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к вариационному ряду $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ играет важную роль в приближенном вычислении функции распределения $F(x)$ для характеристики ξ. Часто среди выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеются одинаковые. Такое происходит при наблюдении дискретной случайной величины, а также довольно часто при наблюдении непрерывной случайной величины с округлением ее значений. В этом случае наряду с вариационным рядом используют так называемый статистический ряд $y_1, y_2, \ldots, y_m$, в котором $y_1, y_2, \ldots, y_m$ представляют собой расположенные в порядке возрастания различные значения выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Статистический ряд удобно представить в виде табл. 28.1, где натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_m$ означают количества выборочных значений, равных соответственно $y_1, y_2, \ldots, y_m$ при $m \leqslant n$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$.

Таблица 28.1

y_j	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m
n_j	n_1	n_2	n_3	$\cdots$	n_m

При большом объеме выборки n запись вариационного ряда и табл. 28.1 оказываются громоздкими. Поэтому весь диапазон измерений случайной величины ξ удобно разбить на $k \leqslant n$ промежутков или разрядов $\Pi_l = [a_{l-1}, a_l)$, $l = 1, 2, \ldots, k-1$, $\Pi_k = [a_{k-1}, a_k]$, где $a_0 \leqslant x_1^*$, $a_k \geqslant x_n^*$, $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Для каждого разряда Π_l необходимо сосчитать количество ν_l значений вариационного ряда, попавших в него. Величина ν_l называется абсолютной частотой разряда с номером l. Далее бывает полезно посчитать относительную частоту попадания наблюдений в каждый l-й разряд по формуле $p_l^* = \nu_l/n$. Ясно, что $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n$ и $p_1^* + p_2^* + \ldots + p_k^* = 1$. Получим информационную статистическую совокупность (или группированный статистический ряд).

Пример 28.3. Предприятие изготовляет на токарном автомате цапфы передней оси автомобилей. Месячная продукция предприятия составляет $N = 15\,000$ цапф. При этом для оценки качества выпускаемой продукции контролировался диаметр цапфы, а точнее — отклонение ξ диаметра цапфы от номинального $d = 30$ мм. Было отобрано $n = 20$ цапф. Измерения для ξ в микрометрах представлены в табл. 28.2.

Таблица 28.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	42	40	42	42	46	43	42	41	41	40
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	41	43	39	41	40	39	42	44	42	40

В первой строчке этой таблицы указаны номера измерений, а во второй — соответствующие этим номерам значения отклонения диаметра.

В табл. 28.3 приведен вид вариационного ряда.

Таблица 28.3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i^*	39	39	40	40	40	40	41	41	41	41
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i^*	42	42	42	42	42	42	43	43	44	46

В табл. 28.4 при $m = 7$ представлен статистический ряд значений отклонений диаметра.

Таблица 28.4

y_j	39	40	41	42	43	44	46
n_j	2	4	4	6	2	1	1

Итак, ξ принимает значения на отрезке $[39, 46]$. Разобьем этот диапазон значений характеристики ξ генеральной совокупности на следующие разряды: $[39, 40)$, $[40, 41)$, $[41, 43)$, $[43, 44)$ и $[44, 46]$. Отсюда получим информационную статистическую совокупность или группированный статистический ряд в виде табл. 28.5.

Таблица 28.5

Π_l	$[39, 40)$	$[40, 41)$	$[41, 43)$	$[43, 44)$	$[44, 46]$
ν_l	2	4	10	2	2
p_l^*	1/10	1/5	1/2	1/10	1/10

Тестовые вопросы к лекции 28

1. Тип — множественный выбор.

Монета наудачу бросается один раз на поверхность пола. Определить правильные утверждения.

• Для симметричной монеты этот эксперимент является предметом математической статистики.

• Для симметричной монеты этот эксперимент является предметом теории построения вероятностных моделей.

• Для несимметричной монеты этот эксперимент является предметом теории построения вероятностных моделей.

• Для несимметричной монеты этот эксперимент является предметом математической статистики.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть известны не все условия проведения статистически устойчивого эксперимента E. Определить правильное утверждение.

• Изучение искомых характеристик эксперимента E не связано с его испытанием.

• Построение адекватной вероятностной модели не требует проведения эксперимента.

• Задание вероятностно-статистической модели эксперимента E не связано с его проведением.

• Определение статистических законов распределения количественных характеристик эксперимента E не требует результатов измерений.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть известны не все условия проведения статистически устойчивого эксперимента E. Определить верные высказывания.

• Определение статистических законов распределения случайных величин не является одной из основных задач статистики.

• Определение выборочных законов распределения случайных величин представляет собой одну из основных задач математической статистики.

• Определение эмпирических законов распределения случайных величин представляет собой одну из основных задач математической статистики.

• Оценка неизвестных параметров законов распределения случайных величин представляет собой одну из основных задач математической статистики.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть известны не все условия проведения статистически устойчивого эксперимента E. Определить верное высказывание.

• Статистическая проверка правильности выдвинутых гипотез — одна из основных задач математической статистики.

• Оценка неизвестных коэффициентов уравнений, которым удовлетворяют количественные характеристики эксперимента E, не является одной из основных задач математической статистики.

• Определение статистических числовых характеристик случайных величин не является одной из основных задач статистики.

• Оценка неизвестных коэффициентов уравнений, которым удовлетворяют случайные величины, не является одной из основных задач математической статистики.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть известны не все условия проведения статистически устойчивого эксперимента E. Определить верные высказывания.

• Определение эмпирических числовых характеристик случайных величин — одна из основных задач математической статистики.

• Определение выборочных числовых характеристик случайных величин — одна из основных задач математической статистики.

• Генеральная совокупность — основное понятие в математической статистике.

• Выборочная совокупность не является основным понятием в математической статистике.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть известны не все условия проведения статистически устойчивого эксперимента E. Определить верное утверждение.

• Генеральная совокупность не является основным понятием в математической статистике.

• Вариационный ряд — основное понятие в статистике.

• Статистический ряд не является основным понятием в математической статистике.

• Информационно-статистическая таблица не является основным понятием в математической статистике.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть известны не все условия проведения статистически устойчивого эксперимента E. Определить ошибочные утверждения.

• Число исходов выборочной совокупности больше числа исходов генеральной совокупности.

• Число наблюдаемых исходов эксперимента меньше числа исходов генеральной совокупности.

• Число элементов вариационного ряда не меньше числа элементов статистического ряда.

• Число элементов группированного статистического ряда не больше числа элементов статистического ряда.

8. Тип — проверка ответов.

В эксперименте наблюдалось случайное число ξ автомобилей, которые поступают к стоп-линии перекрестка в течение одной минуты. Выборочные значения оказались равными: 1, 3, 0, 1, 2, 2, 1, 5, 2, 4. Пусть y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 являются членами статистического ряда этой выборки. Определить количества n_1, n_3 и n_5 выборочных значений для следующих членов статистического ряда: 1) $y_1 = 0$; 2) $y_3 = 2$; 3) $y_5 = 4$.

Ответы:

1) $n_1 = 1$;

2) $n_3 = 3$;

3) $n_5 = 1$.

Лекция 29

ВЫБОРОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

29.1. Вероятностные и статистические (эмпирические) характеристики исходов и измерителей эксперимента

Из курса «Вероятностные модели» и курса «Теория вероятностей» известно [9], что теоретическими вероятностными характеристиками случайного события $A \in \mathcal{F}$ и случайной величины ξ являются: вероятность события $\mathbf{P}(A)$, интегральная функция распределения для произвольной случайной величины, ряд распределения для дискретной случайной величины, плотность распределения для непрерывной случайной величины. Каждая такая характеристика имеет в математической статистике свой аналог [8]. Эти характеристики определяются путем функциональной обработки результатов экспериментов и носят название статистических характеристик. Любую измеримую функцию результатов наблюдения называют статистикой. В дальнейшем статистические характеристики будем обозначать звездочкой вверху. К числу наиболее важных выборочных характеристик эксперимента E относят статистическую вероятность каждого события A из $\mathcal{F}$.

Статистическая вероятность $\mathbf{P}_n^*(A)$ любого события $A \in \mathcal{F}$ определяется через абсолютную частоту $\mu(n, A)$ появления события A в серии из n независимых опытов над экспериментом E по формуле $\mathbf{P}_n^*(A) = \mu(n, A)/n$. Теорема Бернулли (см. лекцию 27) устанавливает сходимость по вероятности относительной частоты $\mu(n, A)/n = \mathbf{P}_n^*(A)$ к вероятности $\mathbf{P}(A)$. Значит, статистическую вероятность $\mathbf{P}_n^*(A)$ можно считать некоторым аналогом теоретической вероятности $p = \mathbf{P}(A)$. Более того, имеет место соотношение $\mathbf{P}(\{\omega\colon |n^{-1}\mu(A, n) - p| < \varepsilon\}) > 1 - \delta$ при ε, $\delta > 0$ и $n \geqslant (\delta\varepsilon^2)^{-1}p(1-p) + 1$. Отсюда следует, что вероятность $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$ может быть приближенно вычислена при достаточно большом значении n независимых опытов. Рассмотрим снова пример 28.3 из лекции 28. Пусть событие $A = \{\omega\colon\ \xi(\omega) = 42\}$ заключается в том, что отклонение ξ диаметра цапфы от номинального равно 42 мкм. Из табл. 28.4 находим, что абсолютная частота появления события A в серии из 20 независимых измерений $\mu(20, A) = 6$. Следовательно, $\mathbf{P}^*_{20}(A) = 3/10$.

Далее, случайная величина ξ для любого действительного числа x порождает событие $A_x = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\}$. Поэтому статистическую интегральную функцию распределения или эмпирическую функцию распределения $F^*_n(x)$ случайной величины ξ целесообразно определить через статистическую вероятность $\mathbf{P}^*_n(A_x) = \mu(n, A_x)/n$, где величина $\mu(n, A_x)$ считает число опытов (испытаний, измерений), в которых наблюдалось значение случайной величины ξ строго меньше действительного числа x.

29.2. Вычисление эмпирической интегральной функции распределения

Статистическая (выборочная) функция распределения $F^*_n(x)$ терпит скачки в точках $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Непосредственной проверкой легко установить, что эмпирическая функция распределения может быть вычислена с применением последовательности $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n$ значений вариационного ряда. Для этого при $k = 0, 1, \ldots, n$ и $x^*_0 = -\infty$, $x^*_{n+1} = +\infty$ достаточно воспользоваться формулой $F^*_n(x) = k/n$ при $x \in (x^*_k, x^*_{k+1}]$. Функция $F^*_n(x)$ обладает всеми основными свойствами интегральной функции распределения $F(x)$. Величина скачка в точке y_j равна n_j/n. График функции $F^*_n(x)$ приведен на рис. 29.1.

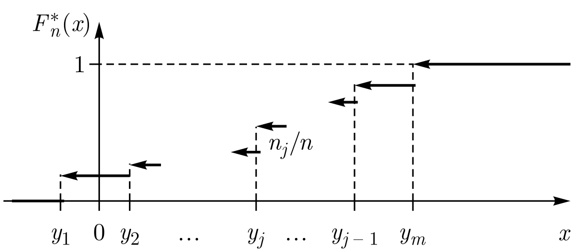


Рис. 29.1

Непосредственной проверкой легко установить, что эмпирическая функция распределения может быть вычислена также с применением последовательности $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n$ значений вариационного ряда. Для этого при $k = 0, 1, \ldots, n$ и $x^*_0 = -\infty$,

$x_{n+1} = +\infty$ достаточно воспользоваться формулой $F_n^*(x) = k/n$ при $x \in (x_k^*, x_{k+1}^*]$.

Пример 29.1. В результате измерения температуры ξ в ноябре была получена реализация $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ для повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{10})$. При этом дни в ноябре выбирались согласно датчику двухзначных псевдослучайных чисел в такой последовательности: 28, 30, 01, 10, 05, 04, 03, 13, 19, 27. Наблюдения представлены в табл. 29.1.

Таблица 29.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	2	-2	-4	-1	1	-3	3	0	2

В этой таблице первая строчка определяет номера измерений, а вторая задает соответствующие этим номерам значения температур. Найти статистическую функцию распределения $F_{10}^*(x)$ для случайной температуры ξ в ноябре. Для вычисления эмпирической функции распределения $F_{10}^*(x)$ построим статистический ряд в виде табл. 29.2, в которой $j = 1, 2, \ldots, 8$.

Таблица 29.2

y_j	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_j	1	1	1	1	1	2	2	1

Используя рис. 29.1 и значения y_j, n_j из табл. 29.2, получим, что выборочная функция распределения $F_{10}^*(x)$ равна нулю при $x \leqslant -4$; равна $j/10$ при $-5 + j < x \leqslant -4 + j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, 5$; равна 0,7 при $1 < x \leqslant 2$; равна 0,9 при $2 < x \leqslant 3$ и, наконец, равна единице при $x > 3$. График функции $F_{10}^*(x)$ отображен на рис. 29.2.

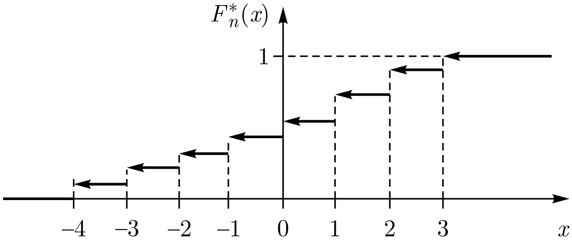


Рис. 29.2

Для решения вопроса о близости последовательности $F_n^*(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, из эмпирических функций распределения к теоретической функции распределения $F(x)$ будем рассматривать выборки неограниченно возрастающего объема n и, более того, выборки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ бесконечного объема. Теперь для положительной оценки утверждения о том, что выборочная функция распределения $F_n^*(x)$ является неплохим аналогом теоретической функция распределения $F(x)$, можно сослаться на замечательные предельные теоремы Гливенко–Кантелли и Колмогорова [8]. Смысл этих предельных теорем заключается в том, что при увеличении объема выборки n у эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ исчезают свойства случайности и она приближается к теоретической функции распределения. Более того, из теоремы Колмогорова следует, что оценка приближенного равенства $F(x) \approx F_n^*(x)$ при больших значениях n является равномерной с точностью до величины порядка $n^{-1/2}$.

29.3. Эмпирические законы распределения для дискретных и непрерывных случайных величин

Если случайная величина ξ является дискретной, например принимающей конечное число s различных значений y_1, $y_2, \ldots, y_s$, то ее вероятностные свойства задаются распределением $p_i = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = y_i\})$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Значит, эмпирическим распределением для ξ, согласно принятой идеологии, будут статистические вероятности $\mathbf{P}_n^*(B_i) = \mu(n, B_i)/n$, $i = 1, 2, \ldots, s$, где $B_i = \{\omega\colon\ \xi(\omega) = y_i\}$.

Известно, что для непрерывной случайной величины рассматривают второй ее закон распределения в виде плотности вероятностей $f(x)$. Аналогами плотности распределения $f(x)$ в математической статистике являются эмпирическая плотность вероятностей $f_n^*(x)$ и гистограмма, которые строятся по группированному статистическому ряду [8]. Для этого весь диапазон измерений случайной величины ξ удобно разбить на $k \leqslant n$ промежутков или разрядов вида: $\Pi_l = [a_{l-1}, a_l)$, $l = 1, 2, \ldots, k-1$, $\Pi_k = [a_{k-1}, a_k]$, где $a_0 \leqslant x_1^*$, $a_k \geqslant x_n^*$, $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Для каждого разряда Π_l необходимо сосчитать количество ν_l значений вариационного ряда $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, попавших в него. Величина ν_l называется абсолютной частотой разряда с номером l. Далее бывает полезно посчитать относительную частоту попадания наблюдений в каждый l-й разряд по формуле $p_l^* = \nu_l/n$. Ясно, что $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n$ и $p_1^* + p_2^* + \ldots + p_k^* = 1$. Получим информационную статистическую совокупность (или группированный статистический ряд) в виде векторной последовательности $\{(\Pi_l, \nu_l, p_l^*),\ l = \overline{1,k}\}$. Тогда эмпирическая плотность вероятностей $f_n^*(x)$ вычисляется с помощью следующей формулы:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x < a_0, \\ \dfrac{\nu_l}{n(a_l - a_{l-1})}, & a_{l-1} \leqslant x < a_l, \quad l = \overline{1,k}, \\ 0, & x \geqslant a_k. \end{cases}$$

Для выборочной плотности вероятностей $f_n^*(x)$ характерны свойства, аналогичные свойству плотности распределения $f(x)$. Пусть n достаточно велико, тогда значение $f_n^*(x)$ в точке $x \in$ $\in [a_{l-1}, a_l)$ приближенно равно значению $(F(a_l) - F(a_l - 1))/\Delta_l$, где $\Delta_l = a_l - a_{l-1}$. Если теоретическая функция распределения $F(x)$ имеет плотность $f(x)$ и, кроме того, длины интервалов Δ_l, $l = 1, 2, \ldots, k$, малы, то $f_n^*(x)$ приемлемо оценивает дифференциальную функцию распределения $f(x)$.

Кроме функции $f_n^*(x)$ в прикладной статистике, а также инженерной практике используют гистограмму, которая также называется специальной диаграммой. Она строится следующим образом. На оси абсцисс откладываем промежутки $\Pi_l = [a_{l-1}, a_l)$, $l = 1, 2, \ldots, k-1$, $\Pi_k = [a_{k-1}, a_k]$. На каждом таком промежутке, как на основании, строим прямоугольник, площадь которого равна относительной частоте попадания наблюдений в l-й разряд. Указанная площадь равна p_l^*. Высота прямоугольника, построенного на l-м разряде Π_l, равна $p_l^*/(a_l - a_{l-1}) = \nu_l/n(a_l - a_{l-1})$, т. е. совпадает со значением функции $f_n^*(x)$ на этом промежутке. Набор полученных прямоугольников называют гистограммой. Рассмотрим пример на построение гистограммы.

Пример 29.2. Пусть интересующая нас величина ξ — время (мин), которое тратит студент первого курса Нижегородского университета ежедневно на самостоятельные учебные занятия. Для изучения этого признака выбираем случайным образом $n = 30$ студентов и с помощью опроса узнаем, сколько времени в день каждый из них тратит на самостоятельные занятия. Обозначим через ξ_i результат опроса i-го студента. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{30}$ независимы и одинаково распределены. Это повторная выборка объема $n = 30$. После того как опыты проведены, получаем значения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{30}$, которые обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$. Эти данные приведены в табл. 29.3, состоящей из трех блоков.

Таблица 29.3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
100	80	240	230	180	160	150	210	250	230
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
260	215	270	175	145	190	320	300	390	235
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}	x_{29}	x_{30}
160	195	180	215	220	210	60	120	130	250

Характеристика ξ принимает значения на отрезке $[60, 390]$. Разобьем этот диапазон на разряды $[27, 93)$, $[93, 159)$, $[159, 225)$, $[225, 291)$ и $[291, 357)$, $[357, 423]$. Получим информационную статистическую совокупность (или группированный статистический ряд) для рассмотренного примера, которая приведена в табл. 29.4.

Таблица 29.4

Π_l	$[27, 93)$	$[93, 159)$	$[159, 225)$	$[225, 291)$	$[291, 357)$	$[357, 423]$
ν_l	2	5	12	8	2	1
p_l^*	1/15	1/6	2/5	4/15	1/15	1/30

На рис. 29.3 приведен пример гистограммы, построенной по группированному статистическому ряду из табл. 29.4.

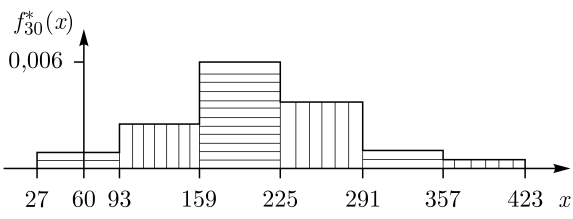


Рис. 29.3

Сделаем следующее важное замечание. Пусть объем n выборки и число k разрядов достаточно велики. Тогда ступенчатая ломаная линия, ограничивающая гистограмму сверху, будет весьма близко приближаться как к теоретической кривой плотности распределения случайной величины ξ, так и к эмпирической плотности вероятностей $f_n^*(x)$. Поэтому график ступенчатой ломаной линии на рис. 29.3 ради простоты обозначен символом $f_{30}^*(x)$.

При наблюдении дискретной случайной величины вместо гистограммы используют полигон частот. Для этого по оси абсцисс откладывают все возможные значения $y_1, y_2, \ldots, y_m$ наблюдаемой величины ξ, а по оси ординат, пользуясь статистическим рядом, либо числа $n_1, n_2, \ldots, n_m$ элементов выборки, принявших значения $y_1, y_2, \ldots, y_m$, либо соответствующие наблюдаемые относительные частоты $n_1/n, n_2/n, \ldots, n_m/n$. Для непрерывной случайной величины полигоном относительных частот иногда называют ломаную линию, соединяющую всевозможные пары точек вида $(b_l, f_n^*(b_l))$ и $(b_{l+1}, f_n^*(b_{l+1}))$, где $l = 1, 2, \ldots, k$ и $b_l = (a_{l-1} + a_l)/2$.

29.4. Статистические (выборочные, эмпирические) числовые характеристики случайной величины

В качестве числовых характеристик случайной величины ξ в теории вероятностей рассматривают математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты, моду и т. д. В математической статистике рассматривают аналогичные характеристики, которые строятся по повторной выборке и являются функциями от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Наиболее распространенной характеристикой является статистическое математическое ожидание $\mathrm{M}^*(\xi) = n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$. Итак, значение $\mathrm{M}^*(\xi)$ — не что иное, как среднее арифметическое для значений выборки, и равно $n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$. Выборочная дисперсия $\mathrm{D}^*(\xi)$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma^*(\xi)$ определяются соответственно формулами

$$\mathrm{D}^*(\xi) = n^{-1}\big((\xi_1 - \mathrm{M}^*\xi)^2 + (\xi_2 - \mathrm{M}^*\xi)^2 + \ldots + (\xi_n - \mathrm{M}^*\xi)^2\big),$$

$$\sigma^*(\xi) = (\mathrm{D}^*\xi)^{1/2}.$$

Используя условия примера 28.3 и табл. 28.2 или табл. 28.3 из лекции 28, получим, что $\mathrm{M}^*(\xi) \approx 41{,}5$ и $D^*(\xi) \approx 2{,}75$.

Заметим, что свойства выборочного математического ожидания и свойства статистической дисперсии аналогичны свойствам математического ожидания $\mathrm{M}\xi$ и дисперсии $\mathrm{D}\xi$. Например, нетрудно видеть, что

$$\mathrm{M}^*(c\xi) = n^{-1}(c\xi_1 + c\xi_2 + \ldots + c\xi_n) = \\ = cn^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = c\mathrm{M}^*(\xi),$$

или

$$\mathrm{D}^*(c\xi) = \\ = n^{-1}\big((c\xi_1 - \mathrm{M}^*(c\xi))^2 + (c\xi_2 - \mathrm{M}^*(c\xi))^2 + \ldots + (c\xi_n - \mathrm{M}^*(c\xi))^2\big) = \\ = c^2\mathrm{D}^*\xi.$$

Другие эмпирические характеристики (выборочные моменты k-го порядка, выборочная мода, выборочная медиана, выборочный эксцесс, выборочный коэффициент асимметрии) величины ξ определяются аналогичным образом. Например, статистический начальный момент k-го порядка

$$\alpha_k^*(\xi) = \mathrm{M}^*(\xi_k) = n^{-1}(\xi_1^k + \xi_2^k + \ldots + \xi_n^k),$$

выборочный центральный момент k-го порядка

$$\beta_k^*(\xi) = \mathrm{M}^*(\xi - \mathrm{M}^*\xi)^k = \\ = n^{-1}\big((\xi_1 - \mathrm{M}^*\xi)^k + (\xi_2 - \mathrm{M}^*\xi)^k + \ldots + (\xi_n - \mathrm{M}^*\xi)^k\big).$$

Пусть $\big((\xi_1, \eta_1),\ (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)\big)$ — повторная выборка объема n случайного вектора (ξ, η). Тогда величина вида

$$\operatorname{cov}^*(\xi, \eta) = \mathrm{M}^*\big((\xi - \mathrm{M}^*\xi)(\eta - \mathrm{M}^*\eta)\big) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)(\eta_i - \mathrm{M}^*\eta)$$

называется выборочным корреляционным моментом случайных величин ξ и η или выборочным смешанным центральным моментом второго порядка повторной выборки

$$\big((\xi_1, \eta_1),\ (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)\big).$$

Тестовые вопросы к лекции 29

1. Тип — множественный выбор.

Пусть над статистически устойчивым экспериментом E проведено n испытаний и $\mu(n, A)$ определяет число наблюдений результата A. Определить верные высказывания.

• Статистическая вероятность $\mathbf{P}_n^*(A)$ любого события A является аналогом теоретической вероятности $\mathbf{P}(A)$.

• Относительная частота $\mu(n, A)/n$ события A не сходится по вероятности к величине $\mathbf{P}(A)$.

• Статистическая вероятность $\mathbf{P}_n^*(A)$ любого события A равна величине $\mu(n, A)/n$.

• При любых значениях ε, $\delta > 0$ и $n \geqslant (\delta\varepsilon^2)^{-1}p(1-p)+1$ имеет место следующее неравенство:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ |n^{-1}\mu(A,n)-p|<\varepsilon\})<1-\delta.$$

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть над статистически устойчивым экспериментом E проведено n испытаний и $F_n^*(x)$ является статистической интегральной функцией распределения случайной величины ξ. Определить верное утверждение.

• Статистическая функция распределения $F_n^*(x) = \mathbf{P}_n^*(A_x)/n$, где случайное событие $A_x = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\}$.

• Выборочная функция распределения $F_n^*(x) = \mu(n, A_x)/n^2$, где событие $A_x = \{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\}$.

• При $k = 0, 1, \ldots, n$ и $x \in (x_k^*, x_{k+1}^*]$ эмпирическая функция распределения $F_n^*(x) = k/n$, где $x_0^* = -\infty$, $x_{n+1}^* = +\infty$ и последовательность $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ является вариационным рядом для величины ξ.

• При $k = 0, 1, \ldots, n$ и $x \in (x_k^*, x_{k+1}^*)$ статистическая функция распределения $F_n^*(x) = k/n$, где $x_0^* = -\infty$, $x_{n+1}^* = +\infty$ и последовательность $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ является вариационным рядом для случайной величины ξ.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть над статистически устойчивым экспериментом E проведено n испытаний и $F_n^*(x)$ является выборочной интегральной функцией распределения случайной величины ξ. Определить верные утверждения.

• Выборочная функция распределения $F_n^*(x)$ является аналогом теоретической функция распределения $F(x)$.

• Выборочная функция распределения $F_n^*(x)$ непрерывна справа для любого действительного числа x.

• Эмпирическая функция $F_n^*(x)$ — неубывающая функция аргумента x.

• Статистическая функция распределения $F_n^*(x)$ определена при $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ и принимает значение из отрезка $[0, 1]$.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть над статистически устойчивым экспериментом E проведено n испытаний и $\mu(n, A)$ определяет число наблюдений результата A. Пусть также вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реализация случайной повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить верное высказывание.

• Статистические вероятности $\mathbf{P}_n^*(B_i) = \mu(n, B_i)/n$, $i = 1, 2, \ldots, s$, определяют эмпирическое распределение дискретной случайной величины ξ, где $B_i = \{\omega\colon \xi(\omega) = y_i\}$ и ξ принимает конечное число s различных значений $y_1, y_2, \ldots, y_s$.

• Для непрерывной случайной величины ξ выборочная плотность вероятностей $f_n^*(x)$ равна $\nu_l/n(a_l - a_{l-1})$ при $x \in [a_{l-1}, a_l)$, $l = 1, 2, \ldots, k$, если векторная последовательность $\{(\Pi_l, \nu_l, p_l^*); l = \overline{1, k}\}$ является группированным статистическим рядом ξ.

• Для непрерывной случайной величины ξ выборочная плотность вероятностей $f_n^*(x)$ равна $\nu_l/n(a_l - a_{l-1})$ при $x \in (a_{l-1}, a_l)$, $l = 1, 2, \ldots, k$, если векторная последовательность $\{(\Pi_l, \nu_l, p_l^*); l = \overline{1, k}\}$ является группированным статистическим рядом для ξ.

• Для непрерывной случайной величины ξ выборочная плотность вероятностей $f_n^*(x)$ равна нулю при $x < 0$ и равна величине $\nu_l/n(a_l - a_{l-1})$ при $x \in [a_{l-1}, a_l)$, $l = 1, 2, \ldots, k$, если векторная последовательность вида $\{(\Pi_l, \nu_l, p_l^*); l = \overline{1, k}\}$ является группированным статистическим рядом ξ.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реализация случайной повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и последовательность $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ является вариационным рядом. Определить верные утверждения.

• Статистическое математическое ожидание определяется по формуле $\mathrm{M}^*(\xi) = n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$.

• Значение выборочного математического ожидания $\mathrm{M}^*(\xi)$ есть $n^{-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.

• Значение эмпирического математического ожидания $\mathrm{M}^*(\xi)$ вычисляется с помощью формулы $n^{-1/2}(x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*)$.

• Значение статистического математического ожидания $\mathrm{M}^*(\xi)$ вычисляется с помощью формулы $n^{-1}(x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*)$.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реализация случайной повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить ошибочное высказывание.

• Статистическое математическое ожидание удовлетворяет условию $\mathrm{M}^*(c\xi) = c\mathrm{M}^*(\xi)$.

• Выборочная дисперсия $\mathrm{D}^*(\xi)$ определяется по следующей формуле: $n^{-1}((\xi_1 - \mathrm{M}^*\xi)^2 + (\xi_2 - \mathrm{M}^*\xi)^2 + \ldots + (\xi_n - \mathrm{M}^*\xi)^2)$.

• Статистическая дисперсия $\mathrm{D}^*(\xi)$ равна $\mathrm{M}^*(\xi - \mathrm{M}^*\xi)^2$.

• Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma^*(\xi)$ равно величине $(\mathrm{D}^*\xi)^{1/3}$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть ξ и η являются случайными величинами. Пусть также вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение случайной повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вектор $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — значение случайной повторной выборки вида $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Определить справедливые утверждения.

• Эмпирическая дисперсия $\mathrm{D}^*(\xi)$ удовлетворяет следующему условию: $\mathrm{D}^*(c\xi) = c^2\mathrm{D}^*\xi$.

• Статистическая дисперсия $\mathrm{D}^*(\xi)$ удовлетворяет следующему условию: $\mathrm{D}^*(\xi + \eta) = \mathrm{D}^*(\xi) + \mathrm{D}(\eta)$.

• Выборочный центральный момент k-го порядка $\beta_k^*(\xi)$ равен величине $\mathrm{M}^*(\xi - \mathrm{M}^*\xi)^k$.

• Статистический начальный момент k-го порядка $\alpha_k^*(\xi)$ равен величине $\mathrm{M}^*(\xi^k)$.

8. Тип — проверка ответов.

В эксперименте наблюдалось случайное число ξ автомобилей, которые поступают к стоп-линии перекрестка в течение одной минуты. Выборочные значения оказались равными: 1, 3, 0, 1, 2, 2, 1, 5, 2, 4. Вычислить эмпирическую интегральную функцию распределения $F_{10}^*(x)$ в следующих точках: 1) $x = 1$; 2) $x = 3$; 3) $x = 4$.

Ответы:

1) $F_{10}^*(1) = 0{,}1$;

2) $F_{10}^*(3) = 0{,}7$;

3) $F_{10}^*(4) = 0{,}8$.

Лекция 30

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ПРОСТЕЙШИЕ КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОЦЕНОК

30.1. Понятие оценки неизвестного параметра и основные требования к оценкам

Пусть величина ξ имеет распределение вероятностей $\mathbf{P}_{\xi;\theta}(\cdot) = \mathbf{P}_\theta(\cdot)$, определяемое некоторым параметром $\theta \in \Theta \subset R$. Другими словами, распределение величины ξ принадлежит параметрическому семейству $\wp = \{\mathbf{P}_\theta(\cdot)\colon\ \theta \in \Theta\}$ вероятностных функций. Если рассматривается векторный параметр $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset R^k$, то будем записывать равенство $\mathbf{P}_{\xi;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k}(\cdot) = \mathbf{P}_{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k}(\cdot)$. Для простоты изложения рассмотрим случай $k = 1$. Вероятность $\mathbf{P}_\theta(\cdot)$ в общем случае может быть задана интегральной функцией $F_\xi(x;\theta) = F(x;\theta)$, определенной для $-\infty < x < +\infty$. Вероятностная функция $\mathbf{P}_\theta(\cdot)$ может быть задана плотностью распределения вероятностей $f_\xi(x;\theta) = f(x;\theta)$ для непрерывных случайных величин или набором $\{p_\xi(y_j;\theta) = p(y_j;\theta)\colon\ j = 1, 2, \ldots, s\}$ из вероятностей, заданных для всех возможных значений y_j дискретной случайной величины ξ. Требуется оценить неизвестный параметр θ по результатам n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина ξ приняла определенное значение. Обозначим результат i-го опыта через ξ_i, получим n копий случайной величины ξ или повторную выборку $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ объема n. После проведения опытов получим некоторое значение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ повторной выборки. По сути, задача заключается в определении вероятностной функции $\mathbf{P}_\theta(\cdot)$ из данного параметрического семейства $\wp$ по наблюдаемым выборочным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вероятностная функция $\mathbf{P}_\theta(\cdot)$ однозначно определяется значением параметра θ. Поэтому необходимо оценить значения неизвестных нам параметров закона распределения случайной величины ξ, наблюдаемой в ходе испытаний. Например, если заранее известно, что величина распределена по закону Пуассона, то подлежит определению только один параметр распределения — математическое ожидание $\mathrm{M}\xi = \theta$. Если же есть основания считать, что признак имеет нормальное распределение, то необходимо оценить векторный параметр $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, где $\theta_1 = \mathrm{M}\xi = a$ и $\theta_2 = \mathrm{D}\xi = \sigma^2$. Измеримую функцию $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ от n случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ будем называть статистикой [8, 9].

Определение 30.1. Оценкой неизвестного параметра θ назовем любую статистику $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, множество значений которой совпадает с множеством значений оцениваемого параметра θ.

Так как оценка представляет собой измеримую функцию случайных величин, то она сама является случайной величиной. Закон распределения θ_n^* зависит, во-первых, от закона распределения случайной величины ξ (и, в частности, от самого неизвестного параметра θ); во-вторых, от числа опытов n. Вообще говоря, этот закон может быть найден известными методами теории вероятностей. Так как оценка $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ зависит от числа проведенных опытов n, то имеет смысл говорить о последовательности вида $\{\theta_n^*;\ n = 1, 2, \ldots\}$. В качестве оценки θ_n^* неизвестного параметра θ может быть выбрано большое число разнообразных функций $\theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ от случайной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Поэтому предъявим к оценке θ_n^* ряд требований, которым она должна удовлетворять, чтобы быть доброкачественной (подходящей) в некотором смысле. Для этого требуются следующие ограничения: несмещенности, состоятельности и эффективности. В следующем разделе мы покажем, что означает каждое из этих трех требований.

30.2. Требование несмещенности

Желательно, чтобы при использовании величины θ_n^* вместо параметра θ не совершались систематические ошибки в сторону завышения или занижения. Это означает, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ требуется выполнение условия $\mathrm{M}_\theta(\theta_n^*) = \theta$ при каждом $\theta \in \Theta$. Оценка, обладающая этим свойством, называется несмещенной [8].

Лемма 30.1. *Статистическое математическое ожидание* $\mathrm{M}^*\xi$ *является несмещенной оценкой* θ_n^* *для неизвестного математического ожидания* $\mathrm{M}\xi = \theta$ *случайной величины* ξ.

Доказательство. Пусть θ означает математическое ожидание случайной величины ξ. Тогда $\mathrm{M}\xi = \mathrm{M}\xi_i = \theta$. Значение θ неизвестно, используем оценку вида $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \mathrm{M}^*\xi = n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$. Теперь для параметра θ вычислим математическое ожидание его оценки θ_n^*:

$$\mathrm{M}(\theta_n^*) = \mathrm{M}(n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)) = \\ = n^{-1}(\mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2 + \ldots + \mathrm{M}\xi_n) = \mathrm{M}\xi = \theta.$$

Так как $\mathrm{M}(\theta_n^*) = \theta$ для всех $\theta \in \Theta$ и $n = 1, 2, \ldots$, то по определению оценка $\theta_n^* = \mathrm{M}^*\xi$ для математического ожидания является несмещенной. Лемма 30.1 доказана.

Лемма 30.2. *Пусть θ_1 — математическое ожидание случайной величины ξ, θ_2 — дисперсия случайной величины ξ, т. е. $\mathrm{M}\xi = \theta_1$, $\mathrm{D}\xi = \theta_2$. Значения параметров θ_1, θ_2 неизвестны. Тогда статистическая дисперсия $\mathrm{D}^*\xi$ является смещенной оценкой дисперсии $\mathrm{D}\xi$ случайной величины ξ или параметра θ_2.*

Доказательство. Итак, используем оценку вида

$$\theta_{2,n}^* = \mathrm{D}^*\xi = n^{-1}\big((\xi_1 - \mathrm{M}^*\xi)^2 + (\xi_2 - \mathrm{M}^*\xi)^2 + \ldots + (\xi_n - \mathrm{M}^*\xi)^2\big)$$

для неизвестного параметра θ_2. Отсюда, учитывая свойства математического ожидания, независимость случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и их одинаковое распределение, легко получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(\theta_{2,n}^*) &= \mathrm{M}(\mathrm{D}^*\xi) = \\
&= n^{-1}\mathrm{M}((\xi_1 - \mathrm{M}^*\xi)^2 + (\xi_2 - \mathrm{M}^*\xi)^2 + \ldots + (\xi_n - \mathrm{M}^*\xi)^2) = \\
&= \mathrm{M}\big((\xi_1 - \mathrm{M}^*\xi)^2\big) = \mathrm{M}\left((\xi_1 - \theta_1) - \left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \theta_1\right)\right)^2 = \\
&= \mathrm{M}\left((\xi_1 - \theta_1) - n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \theta_1)\right)^2 = \\
&= \mathrm{M}(\xi_1 - \theta_1)^2 + \mathrm{M}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \theta_1)\right)^2 - \\
&\quad - 2\mathrm{M}\left((\xi_1 - \theta_1)n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \theta_1)\right) = \\
&= \theta_2 + n^{-2}(n\theta_2) - 2n^{-1}\theta_2 = (n-1)n^{-1}\theta_2 \neq \theta_2 = \mathrm{D}\xi.
\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем: $\mathrm{M}(\theta^*_{2,n}) = n^{-1}(n-1)\theta_2$, $\mathrm{M}(\theta^*_{2,n}) \neq \theta_2$. Следовательно, $\mathrm{M}(\theta^*_n) \neq \mathrm{D}\xi$ и оценка $\theta^*_{2,n}$ является смещенной оценкой дисперсии случайной величины ξ. Лемма 30.2 доказана.

Из доказательства леммы 30.2 следует, что выполняется предельное свойство вида $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}(\theta^*_{2,n}) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}(n-1)\theta_2 = \theta_2 = \mathrm{D}\xi$. Про такую оценку говорят, что она асимптотически несмещенная. От смещения можно легко избавиться. Для этого рассмотрим вместо оценки $\theta^*_{2,n} = \mathrm{D}^*\xi$ несколько иную оценку $n(n-1)^{-1}\mathrm{D}^*\xi$. Тогда будем иметь соотношение $\mathrm{M}(n(n-1)^{-1}\mathrm{D}^*\xi) = \theta_2 = \mathrm{D}\xi$. Значит, новая оценка вида $(n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)^2$ является несмещенной оценкой для дисперсии при неизвестном математическом ожидании случайной величины ξ. Такую несмещенную оценку в дальнейшем будем обозначать через $\mathrm{D}^{\sim}_n(\boldsymbol{\xi})$ или, ради простоты, через $\mathrm{D}^{\sim}\boldsymbol{\xi} = (n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)^2$.

Пример 30.1. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром θ, т. е. случайная величина ξ принимает значение $x = 0, 1, \ldots$ с вероятностью $\mathbf{P}(\xi = x) = \theta^{-x}(x!)^{-1}\exp\{-\theta^{-1}\}$, $\theta \in \Theta = \{\theta\colon\ 0 < \theta < +\infty\}$. Пусть проводится одно наблюдение над случайной величиной ξ. По значению x случайной величины ξ требуется построить несмещенную оценку $\theta^*_1(\xi_1)$, т. е. $\mathrm{M}(\theta^*_1(\xi_1)) = \theta$ для всех $\theta \in \Theta$. Условие несмещенности с использованием вида пуассоновского распределения можно записать следующим образом: $\mathrm{M}\theta^*_1(\xi_1) = \sum\limits_{x=0}^{\infty}\theta^*_1(x)\theta^{-x}(x!)^{-1}\exp\{-\theta^{-1}\} = \theta$, $\theta \in \Theta$, или $\sum\limits_{x=0}^{\infty}\theta^*_1(x)\theta^{-x-1}(x!)^{-1} = \exp\{\theta^{-1}\}$. Отсюда получаем: $\sum\limits_{x=0}^{\infty}\theta^*_1(x)\theta^{-x-1}(x!)^{-1} = \sum\limits_{x=0}^{\infty}\theta^{-x}(x!)^{-1}$ для всех $\theta \in \Theta$. Ясно, что функции $\theta^*_1(x)$, удовлетворяющей последнему условию, как это требуется в соответствии с определением несмещенной оценки, не существует. Следовательно, в данном примере несмещенных оценок для параметра θ нет.

30.3. Требование состоятельности и эффективности

Пример 30.1 показывает, что не всегда надо ограничиваться только рассмотрением несмещенных оценок. Естественно потребовать от оценки $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, чтобы при увеличении числа опытов n она приближалась (сходилась по вероятности [8, 9] относительно распределения $\mathbf{P}_{\xi,\theta}(\cdot)$) к оцениваемому параметру θ. Оценка, обладающая таким свойством, называется состоятельной [8]. Говорят, что оценка θ_n^* сходится по вероятности относительно распределения $\mathbf{P}_{\xi,\theta}(\cdot)$ к значению неизвестного параметра θ, если для любых сколь угодно малых положительных ε и δ можно найти такое натуральное число $N(\varepsilon, \delta)$, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon, \delta)$ будет иметь место соотношение $1 - \delta < \mathbf{P}_{\xi,\theta}(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) < 1 + \delta$. Для установления состоятельности оценки может оказаться полезной следующая теорема.

Теорема 30.1. *Если оценка θ_n^* параметра θ является асимптотически несмещенной и дисперсия оценки стремится к нулю при $n \to \infty$, то оценка θ_n^* является состоятельной.*

Доказательство. По неравенству Чебышева при заданной величине $\varepsilon > 0$ для случайной величины θ_n^* имеем: $\mathbf{P}_{\xi,\theta}(|\theta_n^* - \mathrm{M}(\theta_n^*)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{D}(\theta_n^*)/\varepsilon^2$. Из условия теоремы имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}(\theta_n^*) = \theta$. Тогда существует такое $N(\varepsilon)$, что $|\mathrm{M}(\theta_n^*) - \theta| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$. Используя этот факт и равенство $|\theta_n^* - \theta| = |(\theta_n^* - \mathrm{M}(\theta_n^*)) + (\mathrm{M}(\theta_n^*) - \theta)| \leqslant |\theta_n^* - \mathrm{M}(\theta_n^*)| + |\mathrm{M}(\theta_n^*) - \theta|$, найдем

$$\mathbf{P}_{\xi,\theta}(|\theta_n^* - \theta)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}_\xi^\infty(|\theta_n^* - \mathrm{M}(\theta_n^*)| + |\mathrm{M}(\theta_n^*) - \theta| \geqslant \varepsilon) =$$
$$= \mathbf{P}_{\xi,\theta}(|\theta_n^* - \mathrm{M}(\theta_n^*)| \geqslant \varepsilon - |\mathrm{M}(\theta_n^*) - \theta|) \leqslant \mathrm{D}(\theta_n^*)/(\varepsilon - |\mathrm{M}(\theta_n^*) - \theta|)^2.$$

Используя условие $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}(\theta_n^*) = 0$ из этой теоремы, для любого $\delta > 0$ выбираем такое число $N(\varepsilon, \delta) > N(\varepsilon)$, что $\mathrm{D}(\theta_n^*) < (\varepsilon - |\mathrm{M}(\theta_n^*) - \theta|)^2\delta$ при $n > N(\varepsilon, \delta)$. Отсюда в пределе получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}_{\xi,\theta}(|\theta_n^* - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}_{\xi,\theta}(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) = 1$, и, таким образом, теорема доказана.

Лемма 30.3. *Пусть дисперсия $\mathrm{D}\xi$ случайной величины ξ удовлетворяет условию вида $\mathrm{D}\xi = \sigma^2 < +\infty$. Тогда статистическое математическое ожидание*

$$\mathrm{M}^*(\xi) = n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$$

является состоятельной оценкой математического ожидания $\theta = \mathrm{M}\xi$ случайной величины ξ.

Доказательство. Для установления этого утверждения вычислим дисперсию случайной величины θ_n^*. Из леммы 30.1 следует несмещенность этой оценки. Тогда имеем равенство $\mathrm{M}(\theta_n^*) = \theta$. Дисперсия этой статистики $\mathrm{D}(\theta_n^*) = \mathrm{D}(n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)) = n^{-2}(\mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2 + \ldots + \mathrm{D}\xi_n) = n^{-1}\mathrm{D}\xi$. Поэтому при $n \to \infty$ дисперсия такой оценки стремится к нулю, так как случайная величина ξ по условию этой леммы обладает конечной дисперсией, т. е. $\mathrm{D}\xi = \sigma^2 < +\infty$. Отсюда и в силу теоремы 30.1 статистическое математическое ожидание является состоятельной оценкой математического ожидания $\mathrm{M}\xi$ случайной величины ξ. Лемма 30.3 доказана.

Если несколько различных оценок одного и того же параметра одновременно удовлетворяют требованиям несмещенности и состоятельности, то желательно выбрать среди них такую, которая имела бы наименьший разброс, наименьшую дисперсию. На содержательном уровне оценка должна быть наиболее стабильной. В самом деле, идеальной можно было бы считать несмещенную оценку, характеризуемую нулевой дисперсией. Несмещенная оценка с нулевой дисперсией абсолютно точно, без какой-либо погрешности, давала бы нам значение искомого параметра. Перейдем к определению эффективной оценки неизвестного параметра.

Несмещенная оценка $\theta_э^* = \theta_{э,n}^* = \theta_{э,n}^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ параметра θ называется эффективной [8], если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, вычисленных по выборке одного и того же объема n. Пусть Θ_n^* — множество всех несмещенных оценок параметра θ, построенных по повторной выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Тогда множество $\Theta_n^* = \{\theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\colon \mathrm{M}_\theta(\theta_n^*) = \theta,\ \theta \in \Theta\}$. Эффективной является оценка $\theta_{э,n}^* \in \Theta_n^*$, если $\mathrm{D}_\theta(\theta_{э,n}^*) = \inf\{\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*)\colon \theta_n^* \in \Theta_n^*\}$ для всех $\theta \in \Theta$. Здесь $\mathrm{M}_\theta(\theta_n^*) = \theta$ и $\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*) = \mathrm{M}(\theta_n^* - \theta)^2$. Итак, оценка $\theta_{э,n}^*$ имеет минимальную дисперсию равномерно по параметру θ. Такая оценка существует не всегда. Если существует эффективная оценка $\theta_{э,n}^*$, то эффективность $e(\theta_n^*)$ некоторой оценки θ_n^* в статистике определяется равенством $e(\theta_n^*) = \mathrm{D}_\theta(\theta_{э,n}^*)/\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*)$, где $\mathrm{D}_\theta(\theta_{э,n}^*)$ и $\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*)$ — соответственно дисперсии эффективной и данной оценок. Имеем: $0 \leqslant e(\theta_n^*) \leqslant 1$. Определение эффективности оценки параметра позволяет сравнивать несмещенные оценки. Действительно, если для двух несмещенных оценок $\theta_{1,n}^*$ и $\theta_{2,n}^*$ имеет место неравенство вида $e(\theta_{1,n}^*) > e(\theta_{2,n}^*)$ для любого $\theta \in \Theta$, то оценка $\theta_{1,n}^*$ более эффективна, чем оценка $\theta_{2,n}^*$. Оценка θ_n^* называется асимптотически эффективной, если для любого $\theta \in \Theta$ имеет место предельное равенство $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{D}_\theta(\theta^*_{э,n})/\mathrm{D}_\theta(\theta^*_n)) = 1$.

Закон распределения случайной величины $\theta^*_n = \theta^*_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ зависит от неизвестного закона распределения случайной величины ξ и от числа опытов n. Поэтому вычисление закона распределения оценки θ^*_n вызывает большие трудности или, вообще говоря, этот закон не может быть найден. В связи с этим напомним из [9] понятие асимптотически нормальной последовательности $\{\theta^*_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ случайных величин. Если последовательность вида $(\theta^*_1 - a_1)/\sigma_1$, $(\theta^*_2 - a_2)/\sigma_2, \ldots$ сходится слабо к $(0, 1)$-нормальной случайной величине, то последовательность $\theta_1, \theta_2, \ldots$ называется асимптотически нормальной с параметрами (a_n, σ_n). Это понятие служит основой для приближенного вычисления закона распределения оценки θ^*_n при больших значениях n.

Пусть оценивается некоторая функция $\tau(\theta)$ параметра θ. Обозначим через T^*_n множество всех несмещенных оценок $\tau^*_n = \tau^*_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ величины $\tau(\theta)$. Можно записать, что множество $T^*_n = \{\tau^*_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\colon \mathrm{M}_\theta(\tau^*_n) = \tau(\theta),\ \theta \in \Theta\}$. Эффективной является оценка $\tau^*_{э,n}$, для которой выполняется условие $\mathrm{D}_\theta(\tau^*_{э,n}) = \inf\{\mathrm{D}_\theta(\tau^*_n)\colon\ \tau^*_n \in T^*_n\}$ для всех $\theta \in \Theta$. Мы умеем сравнивать по эффективности две несмещенные оценки. Определим критерий, по которому можно сравнить две произвольные оценки. Назовем среднеквадратической ошибкой произвольной оценки τ^*_n параметра $\tau(\theta)$ величину $\mathrm{M}_\theta(\tau^*_n - \tau(\theta))^2$. Величина $\mathrm{M}_\theta(\tau^*_n - \tau(\theta))^2$ вычисляет среднее значение квадрата разности между оценкой τ^*_n и истинным значением оцениваемой функции $\tau(\theta)$. Ясно, что если для оценки $\tau^*_{1,n}$ среднеквадратическая ошибка меньше, чем для оценки $\tau^*_{2,n}$, для любого $\theta \in \Theta$, то оценка $\tau^*_{1,n}$ предпочтительнее, чем оценка $\tau^*_{2,n}$.

30.4. Простейшие критерии эффективности оценок. Неравенство Рао–Крамера

Пусть распределение вероятностей случайной величины x принадлежит параметрическому семейству распределений вида $\wp_\xi = \{F(x; \theta);\ \theta \in \Theta\}$. Для определенности полагаем, что ξ — непрерывная случайная величина, а $f(x; \theta)$ — ее плотность распределения. Для дискретной случайной величины ξ вместо плотности распределения следует рассматривать ее распределение, т. е. вероятность $\mathbf{P}_{\xi;\theta}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = x\})$ принятия значения x. Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — повторная выборка объема n и вектор вида $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реализация выборки $\boldsymbol{\xi}$. Функция $L(\mathbf{x};\theta) = f(x_1;\theta) \times f(x_2;\theta) \times \ldots \times f(x_n;\theta)$ является плотностью распределения случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$. Функция $L(\mathbf{x};\theta)$, рассматриваемая при фиксированном значении $\mathbf{x}$ как функция параметра $\theta \in \Theta$, называется функцией правдоподобия [8]. В дальнейшем будем полагать, что функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\theta) > 0$ при $\mathbf{x} \in X^n$ и дифференцируема по параметру θ. Пусть теперь θ является скалярным параметром.

Случайная величина $U(\boldsymbol{\xi};\theta) = \dfrac{d\ln L(\boldsymbol{\xi};\theta)}{d\theta} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{d\ln f(\xi_i;\theta)}{d\theta}$ называется функцией вклада выборки $\boldsymbol{\xi}$, i-е слагаемое правой части суммы называется вкладом i-го наблюдения, $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем предполагать выполнение ограничения $0 < \mathrm{M}_\theta\big[(U(\boldsymbol{\xi};\theta))^2\big] < \infty$ для всех $\theta \in \Theta$. Для случая векторного параметра $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ под вкладом выборки понимается случайный вектор $(U_1(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\theta}),\ U_2(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\theta}), \ldots,\ U_k(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\theta}))$, где $U_j(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\theta}) = \partial(\ln L(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\theta}))/\partial\theta_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. В последующем придется неоднократно дифференцировать по θ интегралы от функций на выборочном пространстве, а также предполагать, что при этом можно менять порядок интегрирования и дифференцирования. Модели, для которых все перечисленные условия выполняются, обычно называют регулярными. Для функции правдоподобия имеет место тождество по θ: $\int L(\mathbf{x};\theta)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \equiv 1$. Дифференцируя тождество по скалярному параметру θ, последовательно получаем, что

$$\int \big(d(L(\mathbf{x};\theta))/d\theta\big)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$
$$= \int \big(d(\ln L(\mathbf{x};\theta))/d\theta\big) L(\mathbf{x};\theta)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \mathrm{M}_\theta(U(\boldsymbol{\xi};\theta)) = 0.$$

Для дискретных моделей вместо интегрирования всегда используется суммирование. Величину $I_n(\theta) = \mathrm{D}_\theta(U(\boldsymbol{\xi};\theta)) = \mathrm{M}_\theta(U(\boldsymbol{\xi};\theta))^2$ называют информацией Фишера о параметре θ, содержащейся в выборке $\boldsymbol{\xi}$. Величину $I(\theta) = I_1(\theta) = \mathrm{M}_\theta(d(\ln f(\xi_1;\theta))/d\theta)^2$ называют количеством информации Фишера, содержащейся в одном наблюдении. Легко видеть, что $I_n(\theta) = nI(\theta)$, т. е. количество информации в выборке пропорционально объему выборки. Если функция $f(x;\theta)$ дважды дифференцируема по θ, то в данном случае имеет место эквивалентное представление величины $I(\theta)$:

$$I(\theta) = -\mathrm{M}_\theta(d^2(\ln f(\xi_1;\theta))/d\theta^2).$$

В работе [8] доказывается неравенство *Рао–Крамера*: для любой оценки $\tau_n^* = \tau_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \tau_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in T_n^*$ функции $\tau(\theta)$ от параметра θ справедливо неравенство вида $\mathrm{D}_\theta(\tau_n^*) \geqslant (nI(\theta))^{-1}(d(\tau(\theta))/d\theta)^2$ при каждом $\theta \in \Theta$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\tau_n^* = \tau_n^*(\boldsymbol{\xi})$ — линейная функция вклада выборки, т. е. $\tau_n^*(\boldsymbol{\xi}) - \tau(\theta) = a(\theta)U(\boldsymbol{\xi};\theta)$ при каждом $\theta \in \Theta$, где $a(\theta)$ — некоторая функция от θ. Если оценка τ_n^* достигает нижней границы неравенства Рао–Крамера, то она естественно будет эффективной. Такая оценка (если она существует) является единственной.

Пример 30.2. Рассмотрим семейство нормальных распределений с известной дисперсией σ^2, которое имеет вид $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta) = (2\pi)^{-1/2}(\sigma)^{-1}\exp\{-(x-\theta)^2 2^{-1}(\sigma)^{-2}\}\colon -\infty < \theta < +\infty\}$. Пусть по повторной выборке $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из данного семейства распределений нужно оценить неизвестный параметр θ. С этой целью вычислим вклад одного наблюдения: $U(\xi_1;\theta) = d(\ln f(\xi_1;\theta))/d\theta = (\xi_1 - \theta)\sigma^{-2}$. Отсюда находим, что $d^2(\ln f(\xi_1;\theta))/d\theta^2 = -\sigma^{-2}$ и информация Фишера $I(\theta)$ равна величине $-\mathrm{M}_\theta(d^2(\ln f(\xi_1;\theta))/d\theta^2) = \sigma^{-2}$. Используя результаты доказательств леммы 30.1 и леммы 30.3, выводим, что для несмещенной оценки $\theta_n^* = \mathrm{M}^*\xi$ неизвестного математического ожидания $\mathrm{M}\xi = \theta$ дисперсия $\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*) = n^{-1}\sigma^2$. Поэтому имеем равенство $\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*) = (nI(\theta))^{-1}(d(\tau(\theta))/d\theta)^2 = (n\sigma^{-2})^{-1} = n^{-1}\sigma^2$, и, значит, согласно неравенству *Рао–Крамера* оценка $\theta_n^* = \mathrm{M}^*\xi$ для параметра $\theta = \mathrm{M}\xi$ нормального распределения является эффективной.

Тестовые вопросы к лекции 30

1. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить верные высказывания.

• Статистика представляет собой измеримую функцию $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ от случайной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

• Оценка неизвестного скалярного параметра θ представляет собой статистику $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ от случайной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

• Оценка неизвестного скалярного параметра θ представляет собой статистику $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ от случайной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, множество значений которой совпадает с множеством значений оцениваемого параметра θ.

• Оценка θ_n^* неизвестного скалярного параметра θ является случайной величиной.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить верное утверждение.

• Основными ограничениями оценок неизвестного скалярного параметра являются несмещенность, состоятельность и эффективность.

• Выборочное математическое ожидание $\mathrm{M}^*\xi$ не является несмещенной оценкой для неизвестного математического ожидания $\mathrm{M}\xi$.

• Эмпирическая дисперсия $\mathrm{D}^*\xi$ является несмещенной оценкой дисперсии $\mathrm{D}\xi$ случайной величины ξ при неизвестном математическом ожидании $\mathrm{M}\xi$.

• Статистическая дисперсия $\mathrm{D}^*\xi$ не является несмещенной оценкой дисперсии $\mathrm{D}\xi$ случайной величины ξ при известном математическом ожидании $\mathrm{M}\xi$.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить верные высказывания.

• Эмпирическая дисперсия $\mathrm{D}^*\xi$ является асимптотически несмещенной оценкой дисперсии $\mathrm{D}\xi$ случайной величины ξ при неизвестном математическом ожидании $\mathrm{M}\xi$.

• Оценка вида $\theta_n^* = (n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}\xi)^2$ является несмещенной оценкой для дисперсии $\mathrm{D}\xi$ случайной величины ξ.

• Оценка вида $\theta_n^* = (n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)^2$ является несмещенной оценкой для дисперсии $\mathrm{D}\xi$ случайной величины ξ.

• Имеет место соотношение $\mathrm{M}_\theta((n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)^2) \neq \mathrm{D}\xi$.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить верное утверждение.

• Если оценка θ_n^* сходится с вероятностью единица к значению неизвестного параметра θ, то она состоятельна.

• Если оценка θ_n^* состоятельна, то она сходится с вероятностью единица к значению неизвестного параметра θ.

• Выборочное математическое ожидание, которое определяется по формуле $\mathrm{M}^*(\xi) = n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$, является состоятельной оценкой математического ожидания $\mathrm{M}\xi$ случайной величины.

• Асимптотически несмещенная оценка θ_n^* параметра θ является состоятельной.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить верные высказывания.

• Несмещенная оценка с нулевой дисперсией совпадает с искомым параметром.

• Если Θ_n^* — множество всех несмещенных оценок параметра θ, $\theta_{\text{э},n}^* \in \Theta_n^*$ и дисперсия $\mathrm{D}_\theta(\theta_{\text{э},n}^*) = \inf\{\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*)\colon\ \theta_n^* \in \Theta_n^*\}$, то $\theta_{\text{э},n}^*$ является эффективной.

• Число $e(\theta_n^*) = \mathrm{D}_\theta(\theta_{\text{э},n}^*)/\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*)$, где $\mathrm{D}_\theta(\theta_{\text{э},n}^*)$ и $\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*)$ — соответственно дисперсии эффективной и данной оценок, является эффективностью оценки θ_n^* при заданных $\theta \in \Theta$ и $n = 1, 2, \ldots$

• Если $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\mathrm{D}_\theta(\theta_{\text{э},n}^*)/\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*)\big) = 1$, то оценка θ_n^* является асимптотически эффективной, где $\mathrm{D}_\theta(\theta_{\text{э},n}^*)$ и $\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*)$ — соответственно дисперсии эффективной и данной оценок при заданных $\theta \in \Theta$ и $n = 1, 2, \ldots$

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $f(x;\theta)$ — плотность распределения непрерывной случайной величины ξ, вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить ошибочное утверждение.

• Функция $L(\mathbf{x};\theta) = f(x_1;\theta) \times f(x_2;\theta) \times \ldots \times f(x_n;\theta)$, рассматриваемая при фиксированном значении $\mathbf{x}$ как функция параметра $\theta \in \Theta$, является функцией правдоподобия.

• Функцией вклада $U(\boldsymbol{\xi};\theta) = d\ln L(\boldsymbol{\xi};\theta)/d\theta$ является регулярной, если $L(\mathbf{x};\theta) > 0$ при всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

• Если функция вклада $U(\boldsymbol{\xi};\theta) = d\ln L(\boldsymbol{\xi};\theta)/d\theta$ является регулярной, то $\mathrm{M}_\theta(U(\boldsymbol{\xi};\theta)) = 0$.

• Если функция вклада $U(\boldsymbol{\xi};\theta) = d\ln L(\boldsymbol{\xi};\theta)/d\theta$ является регулярной, то величина $I_n(\theta) = \mathrm{D}_\theta(U(\boldsymbol{\xi};\theta)) = \mathrm{M}_\theta(U(\boldsymbol{\xi};\theta))^2$

является информацией Фишера о параметре θ, содержащейся в повторной выборке $\boldsymbol{\xi}$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $f(x;\theta)$ — плотность распределения непрерывной случайной величины ξ, вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является повторной выборкой и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством вида $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta)\colon\, \theta \in \Theta\}$. Определить справедливые высказывания.

• Если функция вклада $U(\boldsymbol{\xi};\theta) = d\ln L(\boldsymbol{\xi};\theta)/d\theta$ является регулярной, то величина вида $I(\theta) = \mathrm{M}_\theta(d(\ln f(\xi;\theta))/d\theta)^2$ является информацией Фишера о параметре θ, содержащейся в каждом одном испытании.

• Имеет место равенство $I_n(\theta) = nI(\theta)$, где $I_n(\theta)$ — количество информации Фишера в повторной выборке $\boldsymbol{\xi}$.

• Для любой несмещенной оценки $\tau_n^* = \tau_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \tau_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ функции $\tau(\theta)$ от параметра θ справедливо неравенство вида $\mathrm{D}_\theta(\tau_n^*) \geqslant 2(nI(\theta))^{-1}(d(\tau(\theta))/d\theta)^2$.

• Если для несмещенной оценки $\tau_n^* = \tau_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \tau_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ функции $\tau(\theta)$ от параметра θ справедливо равенство вида $\mathrm{D}_\theta(\tau_n^*) = (nI(\theta))^{-1}(d(\tau(\theta))/d\theta)^2$ при некотором θ из множества Θ и $U(\boldsymbol{\xi};\theta)$ — регулярная функция вклада, то $\tau_n^*(\boldsymbol{\xi}) - \tau(\theta) = a(\theta)U(\boldsymbol{\xi};\theta)$ для каждого $\theta \in \Theta$, где $a(\theta)$ — некоторая функция от θ.

8. Тип — проверка ответов.

Пусть вероятностно-статистическая модель равномерной случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством вида $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon\, \theta \in (0,1)\}$. Вычислить математическое ожидание для каждой из трех оценок неизвестного параметра θ: 1) $\theta_{1,n}^* = \theta_{1,n}^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 2\mathrm{M}^*\xi$; 2) $\theta_{2,n}^* = \theta_{2,n}^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 + \xi_2)$; 3) $\theta_{3,n}^* = \theta_{3,n}^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4)/2$.

Ответы:

1) $\mathrm{M}\theta_{1,n}^* = \theta$.

2) $\mathrm{M}\theta_{2,n}^* = \theta$.

3) $\mathrm{M}\theta_{3,n}^* = \theta$.

Лекция 31

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ОСНОВЕ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК

31.1. Достаточные статистики

Использование разного рода статистик является продуктивным способом построения эффективных оценок.

Определение 31.1. Статистика $t_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ называется достаточной [8] для семейства распределений $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$ или достаточной для параметра θ, если распределение вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ при условии $t^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = t$ не зависит от параметра θ.

При этом в дальнейшем ради сокращения записи будем использовать для статистики $t_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ эквивалентные обозначения $t_n^*(\boldsymbol{\xi})$, $t^*(\boldsymbol{\xi})$, t_n^* и t^*. Свойство достаточной статистики $t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ означает, что она содержит всю информацию о параметре θ, имеющуюся в выборке $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. В данном случае все выводы о параметре θ, которые можно сделать по выборочным значениям $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ статистики $t_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, зависят только от $t = t^*(\mathbf{x})$. Или говорят, что все статистические выводы о параметрической модели $\wp_\xi$, обладающей достаточной статистикой, формулируются в терминах этой достаточной статистики. Следует заметить, что при $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$ получаем достаточную векторную статистику размерности n. Действительно, условное распределение $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, при условии что $t^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi}(\omega)) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, становится вырожденным и не зависит от параметра θ. Однако достаточная векторная статистика вида $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$, как правило, требует обработки больших массивов статистической информации. Поэтому на практике стремятся найти достаточную статистику минимальной размерности. В этом смысле говорят о минимальной достаточной статистике. Достаточные статистики небольшой размерности дают возможность представления информации о векторе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

в наиболее сжатом виде. В этом случае обработка сжатой информации значительно упрощается.

Пример 31.1. Найдем достаточную статистику для пуассоновской модели. Рассмотрим повторную выборку $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из пуассоновского семейства распределений. Это семейство при неизвестном параметре $\theta > 0$ задается вероятностями вида

$$\mathbf{P}_{\xi;\theta}\big(\{\omega\colon \xi(\omega) = x\}\big) = \theta^x (x!)^{-1} \exp\{-\theta\}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Здесь $\Theta = \{\theta\colon 0 < \theta < +\infty\}$. Установим, что статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ будет достаточной для параметра θ. Заметим [9], что статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ является пуассоновской случайной величиной с параметром $n\theta$. Легко видеть, что случайное событие $\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_1,\ \xi_2(\omega) = x_2, \ldots, \xi_n(\omega) = x_n,\ t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = t\}$ равно случайному событию $\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_1, \xi_2(\omega) = x_2, \ldots, \xi_n(\omega) = x_n\}$ при $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = t$ и равно $\varnothing$ при $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \neq t$. Отсюда выводим, что условная вероятность

$$\mathbf{P}_{\xi;\theta}\Big(\big\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_1, \xi_2(\omega) = x_2, \ldots, \xi_n(\omega) = x_n, t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = t\big\} \big| \{\omega\colon t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = t\}\Big)$$

вычисляется по формуле

$$\mathbf{P}_{\xi;\theta}\big(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = x_1, \xi_2(\omega) = x_2, \ldots, \xi_n(\omega) = x_n\}\big) / \mathbf{P}_{\xi;\theta}(\{\omega\colon t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = t\}) = t!(n^t x_1! x_2! \times \ldots \times x_n!)^{-1}$$

при $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = t$ и равна нулю при $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \neq t$. Итак, указанная условная вероятность не зависит от параметра θ. Следовательно, статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ будет достаточной. Поэтому необходимо иметь и хранить информацию только о сумме $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. При этом остальная информация в выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является лишней.

31.2. Критерии достаточной статистики

Следующее утверждение, доказательство которого можно найти в [2, 5], позволяет в каждом конкретном случае выяснить, существует ли достаточная статистика, и одновременно определить ее.

Теорема 31.1 (факторизационная теорема Неймана–Фишера). *Для того чтобы статистика $t^*(\boldsymbol{\xi})$ была достаточной для параметра θ, необходимо и достаточно, чтобы функция правдоподобия имела вид $L(\mathbf{x};\theta) = g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x})$. Здесь множитель $g(\cdot)$ может зависеть от параметра θ, а от $\mathbf{x}$ зависит лишь через $t^*(\mathbf{x})$, множитель $h(\cdot)$ не зависит от параметра θ.*

Всякая эффективная оценка $\tau_n^*(\boldsymbol{\xi})$ для функции $\tau(\theta)$, которая достигает нижней границы неравенства Рао–Крамера, является одновременно достаточной статистикой. В самом деле, в лекции 30 было отмечено, что для всякой такой оценки справедливо представление вида $\tau_n^*(\boldsymbol{\xi}) - \tau(\theta) = a(\theta)(d\ln L(\boldsymbol{\xi};\theta)/d\theta)$, из которого следует равенство $L(\mathbf{x};\theta) = g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x})$ для функции правдоподобия.

Если $t^*(\mathbf{x})$ — достаточная статистика для параметра θ, то любая взаимно-однозначная функция от $t^*(\mathbf{x})$ также является достаточной статистикой для параметра θ. Действительно, если $\varphi^* = \varphi(t^*)$ и φ — взаимно-однозначная функция, то существует обратная функция $t^* = \varphi^{-1}(\varphi^*)$. Из представления $L(\mathbf{x};\theta) = g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x})$ получаем, что

$$L(\mathbf{x};\theta) = g(\varphi^{-1}(\varphi^*);\theta)h(\mathbf{x}) = g_1(\varphi^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x}),$$

т. е. $\varphi^* = \varphi(t^*(\mathbf{x}))$ — достаточная статистика. Рассмотрим примеры нахождения достаточных статистик.

Пример 31.2. Вычислим достаточную статистику для экспоненциальной модели. Рассмотрим повторную выборку $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из экспоненциального семейства распределений, заданного плотностями распределений $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta)\colon\ \theta > 0\}$. Здесь $\theta \in \Theta = \{\theta\colon\ \theta > 0\}$ и при фиксированном значении $\theta \in \Theta$ функция $f_\xi(x;\theta) = 0$ при $x < 0$ и $f_\xi(x;\theta) = \theta\exp\{-\theta x\}$ при $x \geqslant 0$. Функция правдоподобия выборки для этого случая имеет вид

$$L(\mathbf{x};\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\times\ldots\times f(x_n;\theta) = \theta^n\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Это выражение можно представить в виде $L(\mathbf{x};\theta) = g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x})$, если положить $t^*(\mathbf{x}) = t^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^n x_i$. Таким образом, делаем вывод, что в этой задаче статистика $t^*(\mathbf{x})$ является достаточной для параметра θ.

Пример 31.3. Определим достаточную статистику для пуассоновской модели, используя факторизационную теорему Неймана–Фишера. Пусть значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из семейства распределений Пуассона равно $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Это семейство задается набором следующих вероятностей:

$$\mathbf{P}_{\xi;\theta}(\{\omega\colon\ \xi(\omega) = x\}) = p(x;\theta) = \theta^x (x!)^{-1} \exp\{-\theta\}$$

при $x = 0, 1, \ldots$ и $\theta > 0$. Здесь $\Theta = \{\theta\colon\ 0 < \theta < +\infty\}$. Запишем функцию правдоподобия повторной выборки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$L(\mathbf{x};\theta) = p(x_1;\theta) \times p(x_2;\theta) \times \ldots \times p(x_n;\theta) = \\ = \exp\left\{n\theta\left[(\theta^{-1}\ln\theta)n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right] - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)\right\}.$$

Если положить $t^*(\mathbf{x}) = t^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, то функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\theta)$ примет вид $g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x})$. Следовательно, по факторизационной теореме Неймана–Фишера статистика $t^*(\mathbf{x})$ является достаточной для параметра θ.

31.3. Использование достаточных статистик для построения эффективных оценок параметров распределений

Рассматривается задача построения эффективной оценки параметрической функции $\tau(\theta)$ по повторной выборке $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, значение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ которой пронаблюдали. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ являются n копиями (клонами) случайной величины ξ с распределением $F(x;\theta)$ из заданного семейства распределений $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Если случайная величина ξ непрерывного типа, то плотность распределения $f(x;\theta)$ соответствует интегральной функции распределения $F(x;\theta)$. Если случайная величина ξ дискретного типа, то вероятности возможных значений x такой случайной величины будем обозначать через $p(x;\theta)$. Сформулируем теоремы 31.2 и 31.3, которые указывают на роль достаточных статистик при оценивании неизвестных параметров распределений случайных величин. Доказательство этих утверждений приведено в работах [2, 5].

Теорема 31.2 (теорема Рао–Блекуэлла–Колмогорова). *Эффективная оценка, если она существует, является однозначной функцией от достаточной статистики.*

При отыскании явного вида эффективных оценок важную роль играет свойство полноты достаточной статистики.

Определение 31.2. Достаточная статистика $t^*(\boldsymbol{\xi}) = t_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ называется полной, если для всякой однозначной функции $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ из того, что $\mathrm{M}_\theta(\varphi(t^*)) = 0$ для всех $\theta \in \Theta$, следует $\varphi(t^*) \equiv 0$.

Теорема 31.3. *Если существует полная достаточная статистика $t^*(\boldsymbol{\xi})$, то всякая однозачная функция $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ от $t^*(\boldsymbol{\xi})$ является эффективной оценкой математического ожидания* $\mathrm{M}_\theta\big(\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))\big)$.

Сделаем несколько замечаний по использованию достаточных статистик. Пусть в рассматриваемой модели $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta \subset R\}$ существует полная достаточная статистика $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ и требуется оценить заданную параметрическую функцию $\tau(\theta)$. Тогда справедливы следующие утверждения [2, 5]:

1) если существует какая-то несмещенная оценка функции $\tau(\theta)$ от параметра θ, то имеется несмещенная оценка $H(t^*)$ для функции $\tau(\theta)$, являющаяся функцией от полной достаточной статистики t^*;

2) эффективная оценка, когда она существует, всегда является функцией $H(t^*)$ от $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ и она однозначно определяется из условия $\mathrm{M}_\theta(H(t^*)) = \tau(\theta)$.

При решении конкретных задач эффективную оценку $\tau^*_{\text{э},n} = H(t^*)$ чаще определяют из условия $\mathrm{M}_\theta(H(t^*)) = \int H(t) g(t;\theta)\, dt = \tau(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta$, где $g(t;\theta)$ — плотность распределения достаточной статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$.

31.4. Примеры построения эффективных оценок с использованием достаточных статистик

Рассмотрим пример оценивания неизвестного параметра распределения в пуассоновской модели. Пусть случайный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка из распределения Пуассона с параметром $\theta \in \Theta = \{\theta\colon\ 0 < \theta < +\infty\}$. Известно, что это распределение задается набором вероятностей $p(x;\theta) = \theta^x (x!)^{-1} \exp\{-\theta\}$, $x = 0, 1, \ldots$ Рассмотрим задачу оценивания неизвестного параметра распределения θ. Определим, имеются ли достаточные статистики для параметра θ. Для ответа на этот вопрос вспомним критерий достаточности — критерий факторизации Неймана–Фишера. Запишем функцию правдоподобия выборки:

$$L(\mathbf{x};\theta) = p(x_1;\theta)p(x_2;\theta)\times\ldots\times p(x_n;\theta) = \\ = \exp\left\{(\ln\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)\right\}.$$

Если положить $t^*(\mathbf{x}) = t^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, то функцию правдоподобия $L(\mathbf{x};\theta)$ можно записать в следующем виде: $g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x})$. Значит, по факторизационной теореме Неймана–Фишера статистика $t^*(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ является достаточной для параметра θ. Проверим ее полноту. Для этого определим закон распределения случайной величины $t^*(\boldsymbol{\xi})$. Известно, что при суммировании независимых пуассоновских случайных величин снова получается пуассоновская величина, параметр распределения которой равен сумме параметров распределений слагаемых. Таким образом, случайная величина $t^*(\boldsymbol{\xi})$ имеет распределение Пуассона с параметром $n\theta$. Найдем математическое ожидание случайной величины $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ и приравняем его к нулю:

$$\mathrm{M}_\theta(\varphi(t^*)) = \sum_{i=0}^{\infty}\varphi(i)(n\theta)^i(i!)^{-1}\exp\{-n\theta\} = 0 \quad \forall\,\theta\in\Theta.$$

Ясно, что данное тождество относительно θ справедливо только для функции $\varphi(t^*)\equiv 0$. Следовательно, достаточная статистика $t^*(\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ является полной. А раз так, то эта статистика является эффективной оценкой своего математического ожидания, т. е. величины $n\theta$. Нам необходимо оценить функцию $\tau(\theta) = \theta$ с помощью статистики $H(t^*)$. Функцию $H(t^*)$ определим из условия $\mathrm{M}_\theta(H(t^*)) = \tau(\theta) = \theta$. Отсюда получаем, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} H(i)(n\theta)^i(i!)^{-1}\exp\{-n\theta\} = \theta \quad \forall\,\theta\in\Theta.$$

Следовательно, имеем: $H(t^*) = n^{-1}t^* = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$.

Пример 31.4. Изучим пример на оценивание параметра равномерного распределения. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из семейства равномерного распределения на интервале $(0, \theta)$, где $\theta \in \Theta = \{\theta\colon\ -\infty < \theta < +\infty,\ \ \theta \neq 0\}$. Это семейство определяется плотностями $f_\xi(x; \theta)$, $\theta \in \Theta$, где $f_\xi(x; \theta) = \theta^{-1}$ при $x \in (0, \theta)$ и $f_\xi(x; \theta) = 0$ при $x \notin (0, \theta)$. Очевидно, что функция правдоподобия выборки $L(\mathbf{x}; \theta)$ имеет следующий вид: $L(\mathbf{x}; \theta) = \theta^{-n}$ при $\max\{x_i\colon\ i = 1, 2, \ldots, n\} \leqslant \theta$ и $L(\mathbf{x}; \theta) = 0$ в противном случае. Если функция $S(x) = 0$ при $x < 0$ и $S(x) = 1$ при $x \geqslant 0$, то функцию правдоподобия можно записать иначе:

$$L(\mathbf{x}; \theta) = \theta^{-n} S(\theta - \max\{x_i\colon\ i = 1, 2, \ldots, n\}).$$

Теперь на основании критерия факторизации заключаем, что функция $t^*(\mathbf{x}) = \max\{x_i\colon\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ является достаточной статистикой для параметра θ. Убедимся в том, что достаточная статистика $t^*(\mathbf{x}) = \max\{x_i\colon\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ является полной. Из общего курса теории вероятностей известно [5], что плотность распределения случайной величины

$$t^*(\boldsymbol{\xi}) = \max\{\xi_i\colon\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

равна функции $g(t; \theta) = nt^{n-1}\theta^{-n}$, $t \in [0, \theta]$. Пусть теперь для функции $\varphi(t)$, $t > 0$, выполняется условие

$$\mathrm{M}_\theta(\varphi(t^*)) = n\theta^{-n} \int\limits_0^\theta \varphi(t) t^{n-1}\, dt = 0 \quad \forall\, \theta \in \Theta.$$

Дифференцируя по θ тождество $\int\limits_0^\theta \varphi(t) t^{n-1}\, dt \equiv 0$, получаем: $\varphi(\theta)\theta^{n-1} \equiv 0$, т. е. $\varphi(\theta) \equiv 0$ для всех $\theta \in \Theta$. Тем самым доказано, что статистика $t^*(\boldsymbol{\xi})$ является полной. Вычисляем ее математическое ожидание:

$$\mathrm{M}_\theta(t^*) = n\theta^{-n} \int\limits_0^\theta t^n\, dt = n(n+1)^{-1}\theta.$$

Так как всякая функция полной достаточной статистики является эффективной оценкой своего математического ожидания, то статистика вида

$$\theta_n^* = n^{-1}(n+1)t^*(\boldsymbol{\xi}) = n^{-1}(n+1)\max\{\xi_i\colon\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

представляет собой эффективную оценку параметра θ. Нетрудно показать, что

$$\mathrm{D}_\theta(\theta_n^*)=\mathrm{D}_\theta(n^{-1}(n+1)\max\{\xi_i\colon\ i=1,2,\ldots,n\})=\theta^2(n(n+2))^{-1}.$$

Тестовые вопросы к лекции 31

1. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ есть значение повторной выборки вида $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается параметрическим семейством $\wp_\xi=\{F_\xi(x;\theta)\colon\ \theta\in\Theta\}$. Определить верные высказывания.

• Статистика $t^*=t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ является достаточной, если условное распределение повторной выборки $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ при $t_n^*(\boldsymbol{\xi})=t$ не зависит от параметра θ.

• Статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi})=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ не является достаточной.

• Статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi})=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ является достаточной для пуассоновского семейства распределений с неизвестным параметром $\theta>0$ вида $\mathbf{P}_{\xi;\theta}(\{\omega\colon\ \xi(\omega)=x\})=\theta^x(x!)^{-1}\exp\{-\theta\}$, $x=0,1,\ldots$

• Если функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\theta)=g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x})$, где $h(\mathbf{x})$ и $g(t^*(\mathbf{x});\theta)$ — некоторые функции, то статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ является достаточной для параметра θ.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается параметрическим семейством $\wp_\xi=\{F_\xi(x;\theta)\colon\ \theta\in\Theta\}$. Определить ошибочное утверждение.

• Если $t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ является достаточной для параметра θ, то функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\theta)=g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x};\theta)$, где $g(t^*(\mathbf{x});\theta)$ и $h(\mathbf{x};\theta)$ — некоторые функции.

• Эффективная оценка $\tau_n^*(\boldsymbol{\xi})$ для функции $\tau(\theta)$, которая достигает нижней границы неравенства Рао–Крамера, является достаточной статистикой.

• При неизвестном параметре $\theta>0$ следующая статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi})=n^{-1}(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)$ является достаточной для показательного семейства распределений вида $\wp_\xi=\{f_\xi(x;\theta)\colon\ \theta>0\}$, где функция $f_\xi(x;\theta)=0$ при $x<0$ и $f_\xi(x;\theta)=\theta\exp\{-\theta x\}$ при $x\geqslant 0$.

• При неизвестном параметре $\theta > 0$ статистика $t_n^*(\mathbf{x}) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$ является достаточной для пуассоновского семейства распределений вида $\mathbf{P}_{\xi;\theta}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x\}) = \theta^x (x!)^{-1}\exp\{-\theta\}$, $x = 0, 1, \ldots$

3. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить верные высказывания.

• Пусть для каждой функции $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ от достаточной статистики $t^*(\boldsymbol{\xi})$ из того, что $\mathrm{M}_\theta(\varphi(t^*)) = 0$ для всех $\theta \in \Theta$, следует $\varphi(t^*) \equiv 0$. Тогда статистика $t^*(\boldsymbol{\xi}) = t_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ будет полной.

• Пусть $t^*(\boldsymbol{\xi})$ — полная достаточная статистика и $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ является некоторой функцией от такой статистики. Тогда $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ не всегда является эффективной оценкой для $\mathrm{M}_\theta(\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi})))$.

• Пусть $t^*(\boldsymbol{\xi})$ — полная достаточная статистика и $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ является некоторой функцией от такой статистики. Тогда $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ всегда является эффективной оценкой для $\mathrm{M}_\theta(\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi})))$.

• Статистика $t^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ является достаточной, если условное распределение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ при $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = t$ зависит от параметра θ.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$Ё— реализация повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить верное утверждение.

• Статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является достаточной.

• Статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ не является достаточной для пуассоновского семейства распределений с неизвестным параметром $\theta > 0$ вида $\mathbf{P}_{\xi;\theta}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x\}) = \theta^x (x!)^{-1}\exp\{-\theta\}$, $x = 0, 1, \ldots$

• Если функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\theta) = g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x})$, где $h(\mathbf{x})$ и $g(t^*(\mathbf{x};\theta)$ — некоторые функции, то статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ не является достаточной для параметра θ.

• Если $t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ не является достаточной для параметра θ, то функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\theta) = 2g(t^*(\mathbf{x});\theta)h(\mathbf{x})$, где $g(t^*(\mathbf{x});\theta)$ и $h(\mathbf{x})$ — некоторые функции.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реализация повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить ошибочные высказывания.

• Пусть статистика $t^*(\boldsymbol{\xi}) = t_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является полной. Тогда для всякой функции $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ от достаточной статистики $t^*(\boldsymbol{\xi})$ из того, что $\mathrm{M}_\theta(\varphi(t^*)) = 0$ для всех $\theta \in \Theta$, следует $\varphi(t^*) \equiv 0$.

• При неизвестном параметре $\theta > 0$ следующая статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ не является достаточной для экспоненциального семейства распределений $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta)\colon \theta > 0\}$, где функция $f_\xi(x;\theta) = 0$ при $x < 0$ и $f_\xi(x;\theta) = \theta\exp\{-\theta x\}$ при $x \geqslant 0$.

• При неизвестном параметре $\theta > 0$ статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ не является достаточной для семейства распределений $\mathbf{P}_{\xi;\theta}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x\}) = \theta^x (x!)^{-1}\exp\{-\theta\}$, $x = 0, 1, \ldots$

• Эффективная оценка $\tau_n^*(\boldsymbol{\xi})$ для функции $\tau(\theta)$, которая достигает нижней границы неравенства Рао–Крамера, не является достаточной статистикой.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки вида $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить ошибочное утверждение.

• Пусть $t^*(\boldsymbol{\xi})$ — достаточная статистика и $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ является произвольной функцией от такой статистики. Тогда $\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi}))$ не всегда является эффективной оценкой для $\mathrm{M}_\theta(\varphi(t^*(\boldsymbol{\xi})))$.

• Эффективная оценка, если она существует, является функцией от достаточной статистики.

• Эффективная оценка, если она существует, не является функцией от достаточной статистики.

• Пусть существует некоторая несмещенная оценка функции $\tau(\theta)$ от параметра θ. Тогда найдется несмещенная оценка $H(t^*)$ для функции $\tau(\theta)$, где t^* является полной достаточной статистикой.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реализация повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить справедливые высказывания.

• Статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ не является эффективной оценкой неизвестного параметра $\theta > 0$ для пуассоновского семейства распределений $\mathbf{P}_{\xi;\theta}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x\}) = \theta^x (x!)^{-1}\exp\{-\theta\}$, $x = 0, 1, \ldots$

• Пусть имеется эффективная оценка функции $\tau(\theta)$ от параметра θ. Тогда такая оценка является функцией $H(t^*)$ от полной достаточной статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$.

• Пусть существует эффективная оценка функции $\tau(\theta)$ от параметра θ. Тогда эта оценка однозначно определяется из уравнения $\mathrm{M}_\theta(H(t^*)) = \tau(\theta)$, где $H(t^*)$ — функция от полной достаточной статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$.

• При неизвестном параметре $\theta > 0$ достаточная статистика $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ является полной для пуассоновского семейства распределений вида $\mathbf{P}_{\xi;\theta}(\{\omega\colon \xi(\omega) = x\}) = \theta^x (x!)^{-1}\exp\{-\theta\}$, $x = 0, 1, \ldots$

8. Тип — проверка ответов.

Пусть вероятностно-статистическая модель пуассоновской случайной величины ξ задается параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta > 0\}$ и статистика вида $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ приняла значение $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Вычислить условные вероятности:

1) $\mathbf{P}_{\xi;\theta}\big(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = 0\} | \{\omega\colon t_n^*(\xi) = e\}\big)$;

2) $\mathbf{P}_{\xi;\theta}\big(\{\omega\colon \xi_2(\omega) = 1\} | \{\omega\colon t_n^*(\xi) = e\}\big)$;

3) $\mathbf{P}_{\xi;\theta}\big(\{\omega\colon \xi_n(\omega) = 2\} | \{\omega\colon t_n^*(\xi) = e\}\big)$.

Ответы:

1) $\mathbf{P}_{\xi;\theta}\big(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = 0\} | \{\omega\colon t_n^*(\xi) = e\}\big) = 0$;

2) $\mathbf{P}_{\xi;\theta}\big(\{\omega\colon \xi_2(\omega) = 1\} | \{\omega\colon t_n^*(\xi) = e\}\big) = 1$;

3) $\mathbf{P}_{\xi;\theta}\big(\{\omega\colon \xi_n(\omega) = 2\} | \{\omega\colon t_n^*(\xi) = e\}\big) = 0$.

Лекция 32

МЕТОДЫ ТОЧЕЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

32.1. Оценивание неизвестных параметров методом максимального правдоподобия

Рассматривается задача оценивания векторного параметра вида $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset R^k$ по повторной выборке $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, значение которой равно $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ являются n копиями случайной величины ξ с распределением $F_\xi(x; \theta)$ из заданного семейства $\wp_\xi = \{F_\xi(x; \theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$ распределений. Одним из наиболее универсальных методов оценивания параметров распределений является метод максимального правдоподобия [2, 5, 8]. Пусть теперь $L(\mathbf{x}; \theta)$ — функция правдоподобия значения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выборки $\boldsymbol{\xi}$. Рассмотрим случай, когда функция $L(\mathbf{x}; \theta)$ является регулярной и, ради простоты, $k = 1$. Перейдем теперь к определению понятия оценки максимального правдоподобия при заданной реализации $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Определение 32.1. Значением $\theta^*(\mathbf{x})$ оценки $\theta^*(\boldsymbol{\xi}) = \theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ максимального правдоподобия параметра θ называется такая точка параметрического множества Θ, в которой функция правдоподобия $L(\mathbf{x}; \theta)$ при заданном значении $\mathbf{x}$ достигает максимума.

Таким образом, имеем: $L(\mathbf{x}; \theta^*(\mathbf{x})) \geqslant L(\mathbf{x}; \theta)$ для всех $\theta \in \Theta$, или $L(\mathbf{x}; \theta^*(\mathbf{x})) = \sup\{L(\mathbf{x}; \theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$. Если для каждого $\mathbf{x}$ из выборочного пространства X^n максимум функции $L(\mathbf{x}; \theta)$ достигается во внутренней точке параметрического множества Θ и функция $L(\mathbf{x}; \theta)$ дифференцируема по θ, то оценка максимального правдоподобия θ^* удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Если $\boldsymbol{\theta}$ — векторный параметр, т. е. $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, то эти уравнения заменяются системой уравнений:

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Все эти уравнения называются уравнениями правдоподобия. Приведем свойства оценок максимального правдоподобия.

Первое свойство. Пусть $t^*(\boldsymbol{\xi})$ — эффективная оценка для скалярного параметра θ, для которой нижняя граница неравенства Рао–Крамера достигается. Тогда оценка максимального правдоподобия $\theta^*(\boldsymbol{\xi}) = t^*(\boldsymbol{\xi})$. Действительно, для оценки $t^*(\boldsymbol{\xi})$ имеет место равенство

$$\partial(\ln L(\mathbf{x}; \theta))/\partial\theta = (a(\theta))^{-1}(t^*(\mathbf{x}) - \theta),$$

которое получается непосредственно из равенства $t^*(\mathbf{x}) - \theta = a(\theta)U(\mathbf{x}; \theta)$, так как функция вклада $U(\mathbf{x}; \theta) = \dfrac{\partial \ln L(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta}$. Если теперь в уравнении $\partial(\ln L(\mathbf{x}; \theta))/\partial\theta = (a(\theta))^{-1}(t^*(\mathbf{x}) - \theta)$ положить $\theta = t^*(\mathbf{x})$, то получим

$$\big(\partial(\ln L(\mathbf{x}; \theta))/\partial\theta\big)\Big|_{\theta = t^*(\mathbf{x})} = (a(t^*(\mathbf{x})))^{-1}(t^*(\mathbf{x}) - t^*(\mathbf{x})) = 0.$$

Поэтому случайная величина $\theta^*(\boldsymbol{\xi}) = t^*(\boldsymbol{\xi})$ является оценкой максимального правдоподобия параметра θ.

Второе свойство. Пусть имеется достаточная статистика $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ и существует единственная оценка θ^* максимального правдоподобия. Тогда оценка θ^* является функцией от t^*. Действительно, по критерию факторизации для функции $L(\mathbf{x}; \theta)$ имеет место следующее представление: $L(\mathbf{x}; \theta) = g(t^*(\mathbf{x}); \theta)h(\mathbf{x})$. Задача определения оценки θ^* максимального правдоподобия сводится к максимизации функции $g(t^*(\mathbf{x}); \theta)$ по параметру θ. Следовательно, θ^* зависит от выборочных значений $\mathbf{x}$ только через функцию от $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$.

Третье свойство. Другим полезным свойством оценок максимального правдоподобия является их инвариантность относительно преобразований параметра. Это означает, что если $q = q(\theta)$ — произвольная взаимно-однозначная функция от θ, и статистика θ^* — оценка максимального правдоподобия для параметра θ, то $q^* = q(\theta^*)$ является оценкой максимального правдоподобия параметрической функции $q = q(\theta)$. В самом деле, пусть функция $q = q(\theta)$ — взаимно-однозначная функция от параметра θ, отображающая множество Θ во множество $Q = \{q(\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$.

Тогда существует обратная функция $\theta = q^{-1}(q)$. Непосредственно отсюда получаем, что максимум функции $L(\mathbf{x};\theta)$ по параметру θ равен максимуму функции $L(\mathbf{x};q^{-1}(q))$ по параметру q. Другими словами, имеем соотношение вида

$$\sup\left\{L(\mathbf{x};\theta)\colon\ \theta\in\Theta\right\} = \sup\left\{L(\mathbf{x};q^{-1}(q))\colon\ q\in Q\right\}.$$

Можно сказать, что максимум функции $L(\mathbf{x};\theta)$ по параметру θ в точке $\theta^*\in Q$ соответствует максимуму функции $L(\mathbf{x};q^{-1}(q))$ по параметру q в точке $q^* = q(\theta^*)$.

Для широкого класса моделей оценки максимального правдоподобия являются состоятельными, асимптотически нормальными и асимптотически эффективными [2, 5, 8].

32.2. Способы построения оценок максимального правдоподобия

Рассмотрим стандартные приемы построения оценок максимального правдоподобия.

Пример 32.1. Изучим пример оценивания параметров нормального распределения методом максимального правдоподобия. Пусть имеется реализация $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из нормального распределения с параметрами $\mathrm{M}\xi = \theta_1$ и $\mathrm{D}\xi = {\theta_2}^2$. Запишем функцию правдоподобия вида $L(\mathbf{x};\theta_1,{\theta_2}^2)$ и ее логарифм:

$$L(\mathbf{x};\theta_1,{\theta_2}^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\theta_2)^n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2(\theta_2)^2}\right\},$$

$$\ln L(\mathbf{x};\theta_1,{\theta_2}^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}n\ln(\theta_2)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2(\theta_2)^2}.$$

Далее записываем систему уравнений правдоподобия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\ln L(\mathbf{x};\theta_1,{\theta_2}^2)}{\partial({\theta_2}^2)} = -\dfrac{n}{2{\theta_2}^2} + \dfrac{1}{2{\theta_2}^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2 = 0,\\[2mm] \dfrac{\partial\ln L(\mathbf{x};\theta_1,{\theta_2}^2)}{\partial\theta_1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i-\theta_1)}{{\theta_2}^2} = 0. \end{cases}$$

Решение $\theta_1^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, $({\theta_2}^2)^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1^*)^2$ этой системы является оценками максимального правдоподобия. Таким образом, в качестве оценок максимального правдоподобия неизвестных математического ожидания и дисперсии нормальной модели получили статистическое математическое ожидание и статистическую дисперсию.

Пример 32.2. Рассмотрим пример оценивания параметра распределения Рэлея методом максимального правдоподобия. Пусть имеется реализация $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из распределения Рэлея с параметром $\theta \in \Theta = \{\theta\colon 0 < \theta < +\infty\}$. Плотность распределения вероятностей такой случайной величины ξ имеет вид

$$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\} \text{ при } x > 0 \text{ и } f(x;\theta) = 0, \text{ если } x \leqslant 0.$$

Функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\theta) = \theta^{-2n} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right\} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ достигает своего максимума в тех же точках, что и ее логарифм

$$\ln L(\mathbf{x};\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - 2n \ln\theta - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Запишем уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{x};\theta)}{\partial\theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

Решая данное уравнение относительно параметра θ, получим значение оценки максимального правдоподобия $\theta^*(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{2n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$.

Пример 32.3. Проведем исследование примера на построение оценки максимального правдоподобия параметра равномерного распределения. Предположим, что $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является реализацией повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из равномерного распределения на интервале вида $(0, \theta)$, где $\theta \in \Theta = \{\theta\colon 0 < \theta < +\infty\}$. Требуется построить оценку максимального правдоподобия неизвестного параметра θ. В этом случае функция правдоподобия

$$L(\mathbf{x};\theta) = \theta^{-n} S\Big(\theta - \max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\Big), \quad \text{где} \quad S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

монотонно убывает по θ для $\theta \geqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$. При $\theta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ функция правдоподобия достигает максимума. Итак, оценка максимального правдоподобия $\theta^*(\boldsymbol{\xi}) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \xi_i$ совпадает с достаточной статистикой. В точке $\theta^*(\mathbf{x}) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ функция правдоподобия является разрывной. Поэтому ее производная не существует и уравнение правдоподобия записать нельзя. Это характерно для ситуаций, когда выборочное пространство X зависит от неизвестного параметра.

32.3. Метод моментов оценивания неизвестных параметров распределений случайных величин

Рассматривается следующая задача оценивания неизвестного параметра. Пусть требуется по повторной выборке $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, значение которой $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определить значение неизвестного параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset R^k$ для семейства распределений $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Метод моментов заключается в приравнивании определенного количества выборочных моментов к соответствующим теоретическим моментам распределения, являющимся функциями от неизвестных параметров. Предполагается, что такого рода теоретические моменты распределения существуют и конечны. Как правило, рассматривается количество моментов, равное числу подлежащих оценке параметров. Решая полученные уравнения относительно этих параметров, мы получаем искомые оценки. Выборочные начальные моменты равны $\alpha_j^* = \alpha_j^*(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^j$. Напомним, что для непрерывного распределения теоретические начальные моменты случайной величины вычисляются по формуле

$$\alpha_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^j f(x;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)\,dx$$

и являются функциями неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Приравнивая ровно k теоретических моментов к соответствующим выборочным моментам, получаем систему k уравнений вида

$$\begin{cases} \alpha_j(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \alpha_j^*, \\ j = \overline{1, k} \end{cases}$$

относительно неизвестных $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

Предположим теперь, что соответствие между $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ и начальными моментами $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*$ взаимно-однозначное и непрерывное. Тогда существуют взаимно-однозначные и непрерывные функции вида $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$, такие что

$$\theta_j^* = \theta_j^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*), \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Пусть определено множество

$$M^{(k)} = \big\{(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*) = \\ = (\alpha_1^*(\mathbf{x}), \alpha_2^*(\mathbf{x}), \ldots, \alpha_k^*(\mathbf{x}))\colon\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n\big\}$$

всех значений выборочных начальных моментов, а функции

$$\theta_j^* = \theta_j^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*), \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

считаем определенными для $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*) \in M^{(k)}$. Далее, будем предполагать, что $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*) \in M^{(k)}$ и вектор вида

$$\big(\theta_1^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*), \theta_2^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*), \ldots, \theta_k^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*)\big) \in \Theta.$$

Тогда статистика $\theta_j^*(\alpha_1^*(\boldsymbol{\xi}),\ \alpha_2^*(\boldsymbol{\xi}), \ldots, \alpha_k^*(\boldsymbol{\xi}))$ является состоятельной оценкой [5] неизвестного параметра θ_j, где $j = 1, 2, \ldots, k$. Используя метод моментов, можно находить различные оценки неизвестных параметров, так как в точности k моментов могут выбираться любого порядка.

32.4. Способы построения оценок с использованием моментов

Рассмотрим типичные способы на построение оценок методом моментов на простейших примерах.

Пример 32.4. Получим методом моментов оценки двух неизвестных параметров b и c для широко применяемого на практике распределения типа гамма-распределение. Предположим, что по повторной выборке $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, значение которой $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, требуется определить неизвестный параметр $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta$ для семейства $\wp_\xi = \{f_\xi(x; \theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$ из гамма-распределений, заданного плотностями следующего вида:

$$f(x; b, c) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{b}\right)^{c-1} \dfrac{\mathrm{e}^{-x/b}}{b\Gamma(c)}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(c)$ — гамма-функция, $\theta_1 = b$, $\theta_2 = c$ суть неизвестные параметры распределения и $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2)\colon$

$\theta_1 > 0,\ \theta_2 > 0\}$. Начальный момент первого порядка равен $\alpha_1 = \int\limits_0^\infty x f(x; b, c)\,dx = bc$, а центральный момент второго порядка равен $\beta_2 = \int\limits_0^\infty (x-\alpha_1)^2 f(x; b, c)\,dx = b^2 c$. Выборочный начальный момент первого порядка α_1^* и выборочный центральный момент второго порядка β_2^* соответственно равны величинам

$$\alpha_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \quad \beta_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha_1^*)^2.$$

Приравняем соответствующие выборочные и теоретические моменты друг другу, получим систему уравнений относительно неизвестных параметров b и c. Решая ее, находим оценки метода моментов для неизвестных параметров распределения:

$$b^* = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha_1^*)^2,$$

$$c^* = \left(n\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha_1^*)^2\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2.$$

Пример 32.5. Получим теперь оценку параметра распределения Рэлея методом моментов. Рассмотрим плотность распределения Рэлея, которая имеет следующий вид:

$$f_\xi(x;\sigma) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-(x^2/2\sigma^2)}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где параметр распределения $\theta_1 = \sigma > 0$. Для оценивания параметра $\theta_1 = \sigma$ используем момент второго порядка $\alpha_2 = \int\limits_0^\infty x^2 f(x;\sigma)\,dx = 2\sigma^2$. Приравнивая теоретический начальный момент α_2 соответствующему выборочному моменту $\alpha_2^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$, получаем значение $\sigma^* = \left[\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right]^{1/2}$ оценки неизвестного параметра $\theta_1 = \sigma$. Статистика $\sigma^*(\boldsymbol{\xi}) = \left[\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n \xi_i^2\right]^{1/2}$ является состоятельной оценкой параметра распределения $\theta_1 = \sigma$.

Тестовые вопросы к лекции 32

1. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$. Определить верные высказывания.

• Если функция правдоподобия удовлетворяет следующему условию: $L(\mathbf{x};\theta^*(\mathbf{x})) = \inf\{L(\mathbf{x};\theta)\colon\ \theta\in\Theta\}$, то значение $\theta^*(\mathbf{x})$ оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ будет оценкой правдоподобия для параметра θ.

• Пусть функция правдоподобия удовлетворяет следующему условию: $L(\mathbf{x};\theta^*(\mathbf{x})) = \sup\{L(\mathbf{x};\theta)\colon\ \theta\in\Theta\}$. Тогда значение $\theta^*(\mathbf{x})$ оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ будет оценкой максимального правдоподобия для параметра θ.

• Если функция правдоподобия удовлетворяет следующему условию: $L(\mathbf{x};\theta^*(\mathbf{x})) \geqslant L(\mathbf{x};\theta)$ для всех $\theta\in\Theta$, то значение $\theta^*(\mathbf{x})$ оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ является оценкой максимального правдоподобия для параметра θ.

• Значение оценки максимального правдоподобия $\theta^*(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению вида $\partial L(\mathbf{x};\theta)/\partial\theta = 0$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$. Определить ошибочное утверждение.

• Значение оценки максимального правдоподобия $\theta^*(\mathbf{x})$ для скалярного параметра θ удовлетворяет следующему уравнению правдоподобия $\partial(\ln L(\mathbf{x};\theta))/\partial\theta = 0$.

• Если функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ является регулярной и $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, то значение векторной оценки максимального правдоподобия $\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{x})$ удовлетворяет системе уравнений: $\partial(\ln L(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}))/\partial\theta_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

• Пусть функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ является регулярной, $t^*(\boldsymbol{\xi})$ — оценка для скалярного параметра θ и $\mathrm{D}_\theta(t_n^*(\boldsymbol{\xi})) = 1/\mathrm{M}_\theta\big(d(\ln L(\boldsymbol{\xi};\theta))/d\theta\big)^2$. Тогда оценка максимального правдоподобия $\theta^*(\boldsymbol{\xi}) = t^*(\boldsymbol{\xi})$.

• Пусть функция правдоподобия $L(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ является регулярной, $t^*(\boldsymbol{\xi})$ — оценка для скалярного параметра θ и $\mathrm{D}_\theta(t_n^*(\boldsymbol{\xi})) = (\mathrm{D}_\theta(U(\boldsymbol{\xi};\theta)))^{-1}$, где $U(\boldsymbol{\xi};\theta)$ — функция вклада повторной выборки $\boldsymbol{\xi}$. Тогда оценка максимального правдоподобия $\theta^*(\boldsymbol{\xi}) = t^*(\boldsymbol{\xi})$.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить верные высказывания.

• Если $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ — достаточная статистика и существует единственная оценка θ^* максимального правдоподобия, то оценка θ^* не является функцией от t^*.

• Если $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ является достаточной статистикой и имеется единственная оценка θ^* максимального правдоподобия, то оценка θ^* является функцией от t^*.

• Пусть $q = q(\theta)$ — взаимно-однозначная функция от θ и статистика θ^* — оценка максимального правдоподобия для параметра θ. Тогда $q^* = q(\theta^*)$ является оценкой максимального правдоподобия функции $q = q(\theta)$.

• Если θ^* — оценка максимального правдоподобия для параметра θ и $q = q(\theta)$ — взаимно-однозначная функция от θ и статистика, то $q^* = q(\theta^*)$ не является оценкой максимального правдоподобия функции $q = q(\theta)$.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$ и вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реализация повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить верное утверждение.

• Если рассматривается семейство нормальных случайных величин, то оценки максимального правдоподобия для неизвестного математического ожидания и для неизвестной дисперсии совпадают с выборочным математическим ожиданием и с выборочной дисперсией.

• Статистическое математическое ожидание и эмпирическая дисперсия не будут оценками максимального правдоподобия для неизвестного математического ожидания и соответственно неизвестной дисперсии семейства нормальных случайных величин.

• Пусть для семейства распределений Релея с параметром θ плотность вероятностей $f_\xi(x;\theta) = x\theta^{-2}\exp\{-x^2 2^{-1}\theta^{-2}\}$ при $x > 0$ и $f_\xi(x;\theta) = 0$ при $x \leqslant 0$. Тогда значение оценки максимального правдоподобия $\theta^*(\mathbf{x}) = (2n)^{1/2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$.

• Если для семейства распределений Релея с параметром θ плотность вероятностей $f_\xi(x;\theta) = x\theta^{-2}\exp\{-x^2 2^{-1}\theta^{-2}\}$ при $x > 0$ и $f_\xi(x;\theta) = 0$ при $x \leqslant 0$, то значение оценки максимального правдоподобия $\theta^*(\mathbf{x}) \neq (2n)^{-1/2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реализация повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить верные высказывания.

• Пусть для семейства распределений Релея с параметром θ плотность вероятностей $f_\xi(x;\theta) = x\theta^{-2}\exp\{-x^2 2^{-1}\theta^{-2}\}$ при $x > 0$ и $f_\xi(x;\theta) = 0$ при $x \leqslant 0$. Тогда значение оценки максимального правдоподобия $\theta^* = (2n)^{-1/2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$.

• При неизвестном параметре $\theta > 0$ существует уравнение правдоподобия для равномерного распределения на интервале вида $(0, \theta)$.

• При неизвестном параметре $\theta > 0$ не существует уравнения правдоподобия для равномерного распределения на интервале вида $(0, \theta)$.

• При неизвестном параметре $\theta > 0$ для равномерного распределения на интервале $(0, \theta)$ значение оценки максимального правдоподобия имеет вид: $\theta^*(\mathbf{x}) = \max\{x_i\colon i = 1, 2, \ldots, n\}$.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается векторным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить верное утверждение.

• Пусть для семейства типа гамма-распределение с параметрами θ_1 и θ_2 плотность вероятностей определяется по формуле $f_\xi(x;\theta_1,\theta_2) = (x/\theta_1)^{\theta_2-1}(\theta_1\Gamma(\theta_2)^{-1}\exp\{-x/\theta_1\}$ при $x \geqslant 0$ и $f_\xi(x;\theta_1,\theta_2) = 0$ при $x < 0$. Тогда метод моментов дает оценки: $\theta_1^*(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_2^*(\mathbf{x}))^2 \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $\theta_2^*(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Big/ n\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_2^*(\mathbf{x}))^2$, где $\alpha_2^*(\mathbf{x})$ — выборочный начальный момент второго порядка.

• Пусть для семейства типа гамма-распределение с параметрами θ_1 и θ_2 плотность вероятностей определяется формулой $f_\xi(x;\theta_1,\theta_2) = (x/\theta_1)^{\theta_2-1}(\theta_1\Gamma(\theta_2)^{-1}\exp\{-x/\theta_1\}$ при $x \geqslant 0$ и $f_\xi(x;\theta_1,\theta_2) = 0$ при $x < 0$. Тогда метод моментов дает оценки: $\theta_1^*(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_1^*(\mathbf{x}))^2 \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $\theta_2^*(\mathbf{x}) =$

$= \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Big/ n \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_1^*(\mathbf{x}))^2$, где $\alpha_1^*(\mathbf{x})$ — выборочный начальный момент первого порядка.

• Пусть для семейства типа гамма-распределение с параметрами θ_1 и θ_2 плотность вероятностей определяется формулой $f_\xi(x; \theta_1, \theta_2) = (x/\theta_1)^{\theta_2 - 1}(\theta_1 \Gamma(\theta_2)^{-1} \exp\{-x/\theta_1\}$ при $x \geqslant 0$ и $f_\xi(x; \theta_1, \theta_2) = 0$ при $x < 0$. Тогда метод моментов дает оценки вида: $\theta_1^*(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_1^*(\mathbf{x}))^2 \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $\theta_2^*(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_1^*(\mathbf{x}))^2$, где $\alpha_1^*(\mathbf{x})$ — выборочный начальный момент первого порядка.

• Пусть для семейства типа гамма-распределение с параметрами θ_1 и θ_2 плотность вероятностей определяется по формуле $f_\xi(x; \theta_1, \theta_2) = (x/\theta_1)^{\theta_2 - 1}(\theta_1 \Gamma(\theta_2)^{-1} \exp\{-x/\theta_1\}$ при $x \geqslant 0$ и $f_\xi(x; \theta_1, \theta_2) = 0$ при $x < 0$. Тогда метод моментов дает оценки: $\theta_1^*(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_1^*(\mathbf{x}))^2 \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $\theta_2^*(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Big/ n^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_1^*(\mathbf{x}))^2$, где $\alpha_1^*(\mathbf{x})$ — выборочный начальный момент первого порядка.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{f_\xi(x; \theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$. Определить справедливые высказывания.

• Пусть для семейства распределений Релея с параметром θ плотность вероятностей $f_\xi(x; \theta) = x\theta^{-2} \exp\{-x^2 2^{-1} \theta^{-2}\}$ при $x > 0$ и $f_\xi(x; \theta) = 0$ при $x \leqslant 0$. Тогда метод моментов дает оценку вида $\theta^*(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2/n\right)^{1/2}$.

• Пусть для семейства распределений Релея с параметром θ плотность вероятностей $f_\xi(x; \theta) = x\theta^{-2} \exp\{-x^2 2^{-1} \theta^{-2}\}$ при $x > 0$ и $f_\xi(x; \theta) = 0$ при $x \leqslant 0$. Тогда метод моментов дает оценку вида $\theta^*(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2/2n\right)^{1/2}$.

• Пусть для семейства распределений Релея с параметром θ плотность вероятностей $f_\xi(x;\theta) = x\theta^{-2}\exp\{-x^2 2^{-1}\theta^{-2}\}$ при $x > 0$ и $f_\xi(x;\theta) = 0$ при $x \leqslant 0$. Тогда метод моментов дает оценку вида $\theta^*(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2/2n\right)^{1/3}$.

• Статистика $\theta^*(\boldsymbol{\xi}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{\xi}_i^2/2n\right)^{1/2}$ является состоятельной оценкой параметра распределения θ.

8, Тип —проверка ответов.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины Бернулли задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in (0, 1/2)\}$. Методом максимального правдоподобия определить оценки $\theta^*_{1,n} = \theta^*_{1,n}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\theta^*_{2,n} = \theta^*_{2,n}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\theta^*_{3,n} = \theta^*_{3,n}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ соответственно для: 1) $\mathrm{M}(\xi)$; 2) $\mathrm{D}(\xi)$; 3) $\sigma(\xi)$.

Ответы:

1) $\theta^*_{1,n} = \mathrm{M}^*(\xi)$;

2) $\theta^*_{2,n} = \mathrm{M}^*(\xi)(1 - \mathrm{M}^*(\xi))$;

3) $\theta^*_{3,n} = (\mathrm{M}^*(\xi)(1 - \mathrm{M}^*(\xi)))^{1/2}$.

Лекция 33

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ С ПОМОЩЬЮ СТАЦИОНАРНОЙ СТАТИСТИКИ

33.1. Определение доверительного интервала, надежности и точности интервального оценивания

В предыдущих лекциях были изучены так называемые точечные оценки. Такие оценки оценивают неизвестный скалярный параметр θ случайной величиной $\theta_n^* = \theta_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ или случайным вектором $\boldsymbol{\theta}_n^* = \boldsymbol{\theta}_n^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в некотором пространстве при оценивании векторного параметра $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Однако, как известно, при таком оценивании возможны ошибки. Поэтому бывает целесообразно указать те возможные границы, в которых может находиться неизвестный и оцениваемый параметр θ при наблюдаемом значении $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. При этом повторная выборка $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ имеет распределение, которое определяется распределением $F_\xi(x;\theta)$, принадлежащим семейству $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Для этой цели используется понятие доверительных интервалов. Доверительные интервалы являются случайными интервалами, внутри которых с заданной вероятностью γ, близкой к единице, содержится точное значение оцениваемого параметра. Сама величина γ называется доверительной вероятностью или надежностью. При заданном значении γ длина доверительного интервала характеризует точность локализации значения неизвестного параметра θ. Понятно, что желательно выбирать доверительный интервал наименьшей длины. Пусть теперь для определенности $\theta \in \Theta \subseteq R$. Для построения доверительного интервала заданного уровня вероятности $\gamma \in (0,1)$ указывают две статистики, $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$, $\overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$, такие что $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ и выполнено условие вида

$$\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big) \geqslant \gamma \quad \forall\, \theta \in \Theta. \tag{33.1}$$

В формуле (33.1) величину γ надо трактовать как вероятность того, что случайный интервал вида $(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi}))$ накроет неизвестную до опыта точку θ. Статистики $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ и $\overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ называют нижней и верхней доверительными границами соответственно. Таким образом, доверительный интервал — это зависящий от выборки случайный интервал, который содержит истинное значение θ с вероятностью, не меньшей γ. Иногда на практике рассматриваются односторонние доверительные интервалы, соответственно верхний вида $\theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ или нижний вида $\theta > \underline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$, каждый из которых определяется условием типа (33.1).

Аналогичным образом определяется доверительный интервал для отдельной компоненты векторного параметра $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset R^k$. Например, доверительный интервал $(\underline{\theta}_1(\boldsymbol{\xi}), \overline{\theta}_1(\boldsymbol{\xi}))$ для компоненты θ_1 удовлетворяет условию $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\underline{\theta}_1(\boldsymbol{\xi}) < \theta_1 < \overline{\theta}_1(\boldsymbol{\xi})) \geqslant \gamma \ \ \forall \theta \in \Theta$. Для скалярной параметрической функции вида $\tau(\boldsymbol{\theta})$ доверительный интервал $(\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}), \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi}))$ задается условием $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) < \tau(\boldsymbol{\theta}) < \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})) \geqslant \gamma$ для всех $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.

33.2. Интервальное оценивание с помощью стационарной статистики

Перейдем к построению доверительного интервала с помощью так называемой стационарной статистики. Пусть модель $\wp_\xi$ абсолютно непрерывна и существует случайная величина $T^*(\boldsymbol{\xi}; \theta)$, зависящая от $\theta \in \Theta \subseteq R$ и такая, что:

1) распределение вероятностей статистики $T^*(\boldsymbol{\xi}; \theta)$ не зависит от θ;

2) при любом значении вектора $\mathbf{x} = (x_1 x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ функция $T^*(\mathbf{x}; \theta)$ непрерывна и строго монотонна по параметру θ.

Такую случайную величину $T^*(\boldsymbol{\xi}; \theta)$ в силу ограничения (1) удобно назвать стационарной статистикой относительно параметра θ. Иногда такую статистику называют центральной [5, 8]. Аналогично определяется стационарная статистика $T^*(\boldsymbol{\xi}; \theta_1)$ для отдельной компоненты, например параметра θ_1, векторного параметра $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, и стационарная статистика $T^*(\boldsymbol{\xi}; \tau)$ — для скалярной параметрической функции $\tau(\theta)$.

Далее для простоты изложения ограничимся только случаем скалярного параметра θ. Пусть для модели $\wp_\xi$ построена стационарная статистика $T^*(\boldsymbol{\xi}; \theta)$ и удалось определить ее плотность распределения вероятностей $f_{T^*}(t)$. По условию (1) функция $f_{T^*}(t)$ не зависит от неизвестного параметра θ. Можно, хотя и неоднозначно, выбрать величины t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ так, чтобы для любого $\theta \in \Theta$ выполнялось условие

$$\mathbf{P}_\theta(t_1 < T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) < t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f_{T^*}(t)\,dt = \gamma. \tag{33.2}$$

Определим теперь при каждом $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ числа $\underline{\theta}(\mathbf{x})$, $\overline{\theta}(\mathbf{x})$ как решения относительно θ уравнений: $T^*(\mathbf{x};\theta) = t_1$, $T^*(\mathbf{x};\theta) = t_2$. Тогда $T^*(\mathbf{x};\underline{\theta}(\mathbf{x})) = t_1$ и $T^*(\mathbf{x};\overline{\theta}(\mathbf{x})) = t_2$. В силу наложенных ограничений на функцию $T^*(\mathbf{x};\theta)$ числа $\underline{\theta}(\mathbf{x})$, $\overline{\theta}(\mathbf{x})$ определяются однозначно и выполняется условие $\underline{\theta}(\mathbf{x}) < \overline{\theta}(\mathbf{x})$, если $T^*(\mathbf{x};\theta)$ монотонно возрастает по θ. Тогда неравенства $t_1 < T^*(\mathbf{x};\theta) < t_2$ эквивалентны неравенствам $\underline{\theta}(\mathbf{x}) < \theta < \overline{\theta}(\mathbf{x})$, а условие (33.2) можно переписать в эквивалентном виде $\mathbf{P}_\theta(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})) = \gamma$ для любого параметра $\theta \in \Theta$. Таким образом, построенный интервал $(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi}))$ называется доверительным центральным интервалом уровня доверия γ для параметра θ. Если функция $T^*(\mathbf{x};\theta)$ монотонно убывает по θ, то поступаем аналогичным образом. При этом учитываем, что выполняется следующее противоположное неравенство: $\underline{\theta}(\mathbf{x}) > \overline{\theta}(\mathbf{x})$.

Следует заметить, что стационарная статистика строится исходя из специфики рассматриваемой модели $\wp_\xi$. Однако можно выделить широкий класс моделей, для которых стационарная статистика всегда существует и имеет простой вид. В случае если интегральная функция распределения $F_\xi(x;\theta)$ абсолютно непрерывна и строго монотонна по параметру θ, можно положить $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F_\xi(\xi_i;\theta)$. В данном случае требование (1) к функции $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ автоматически выполняется. Действительно, распределение вероятностей случайной величины $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ не зависит от параметра θ. Это получается потому, что распределение вероятностей случайной величины $\eta = F_\xi(\xi_i;\theta)$ при любом $\theta \in \Theta$ является равномерным [9] на интервале $(0, 1)$. Если η распределена равномерно на интервале $(0, 1)$ при любом значении $\theta \in \Theta$, то случайная величина $g = -\ln(\eta)$ при любом $\theta \in \Theta$ имеет плотность распределения вероятностей $f_g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ при $x > 0$ и $f_g(x) = 0$ при $x \leqslant 0$. Имеем гамма-распределение [8, 9] с параметрами $(1, 1)$. Это распределение будем обозначать через $\Gamma(1; 1)$. Статистика $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$

представляет собой сумму n независимых слагаемых, каждое из которых имеет распределение $\Gamma(1;1)$. Следовательно, и сама статистика $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ имеет гамма-распределение при любом $\theta\in\Theta$ с параметрами $(1,n)$. Такое распределение естественно обозначить символом $\Gamma(1;n)$. Плотность распределения этой статистики равна $f_{T^*}(t)=\dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\mathrm{e}^{-t}$, $t>0$, и равна нулю при $t\leqslant 0$. Ограничение (2) для функции $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$, очевидно, имеет место. В результате получаем, что границы $\underline{\theta}(\mathbf{x}),\overline{\theta}(\mathbf{x})$ доверительного интервала для параметра θ определяются по следующему алгоритму:

1) определяем значения $t_1<t_2$ из условия

$$\mathbf{P}_\theta\big(t_1<T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)<t_2\big)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_{t_1}^{t_2}t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt=\gamma;$$

2) находим корни $\underline{\theta}(\mathbf{x})<\overline{\theta}(\mathbf{x})$ из решения относительно θ уравнений

$$-\sum_{i=1}^{n}\ln F(x_i;\theta)=t_1,\qquad -\sum_{i=1}^{n}\ln F(x_i;\theta)=t_2. \tag{33.3}$$

Тогда $(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}),\overline{\theta}(\boldsymbol{\xi}))$ будет доверительным искомым интервалом уровня доверия γ для θ. Заметим, что при использовании данного алгоритма на практике наибольшие проблемы возникают с решением нелинейных уравнений (33.3).

33.3. Примеры построения доверительных интервалов методом стационарных статистик

Сначала рассмотрим построение доверительного интервала для неизвестного математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известной дисперсии.

Пример 33.1. Пусть по выборке $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, значение которой равно $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, требуется построить доверительный интервал для неизвестного среднего θ в модели $\wp_\xi=\{N(\theta;\sigma^2)\colon\ \theta\in R\}$. Здесь $\wp_\xi$ есть семейство нормальных распределений с известной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием $\theta\in(-\infty,+\infty)$. В данном случае при $\overline{\xi}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ будет полезной статистика

$$T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)=\frac{\sqrt{n}\,(\overline{\xi}-\theta)}{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\theta),$$

которая имеет стандартное нормальное распределение вида $N(0;1)$ и не зависит от параметра θ. Более того, статистика $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ непрерывна и строго убывает по θ. Следовательно, статистика $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ является стационарной для параметра θ. Пусть значения t_1, t_2 удовлетворяют условию $\mathbf{P}_\theta(t_1 < T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) < t_2) = \gamma$. Решаем относительно θ два уравнения:

$$T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{\xi} - \theta)}{\sigma} = t_1, \quad T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{\xi} - \theta)}{\sigma} = t_2.$$

Решения этих уравнений имеют следующий вид: $\underline{\theta} = \underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\xi} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_2$, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\xi} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_1$. Поэтому γ-доверительным интервалом для параметра θ является любой интервал вида $I_\gamma(\boldsymbol{\xi}) = \left(\overline{\xi} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_2,\ \overline{\xi} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_1\right)$, где $t_1 < t_2$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию

$$\mathbf{P}_\theta\big(t_1 < T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) < t_2\big) = \gamma = \Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1),$$

$$\Phi_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Легко видеть, что, хотя интервал $I_\gamma(\boldsymbol{\xi})$ случаен, длина его случайной не является, она равна $l(t_1, t_2;\gamma) = \frac{\sigma(t_2 - t_1)}{\sqrt{n}}$, где $\Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1) - \gamma = 0$. Для того чтобы определить интервал наименьшей длины, необходимо минимизировать функцию $l(t_1, t_2;\gamma)$ при заданном условии на переменные t_1, t_2. Применим метод Лагранжа для нахождения условного экстремума. Записываем необходимое требование условного экстремума:

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\sigma(t_2 - t_1)}{\sqrt{n}} + \lambda\big[\Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1) - \gamma\big]\right) = \\ = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t_1^2}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\sigma(t_2 - t_1)}{\sqrt{n}} + \lambda\big[\Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1) - \gamma\big]\right) = \\ = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t_2^2}{2}\right) = 0.$$

В результате имеем

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \widetilde{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t_2^2}{2}\right) = \widetilde{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t_1^2}{2}\right),$$
$$t_1 < t_2, \quad \Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1) = \gamma.$$

Из этих равенств получаем, что $t_1 = -t_2$, $t_2 > 0$, $\Phi_0(t_2) - \Phi_0(-t_2) = \gamma$ и $\Phi_0(t_2) = \dfrac{1+\gamma}{2}$. Следовательно, $t_2 = \Phi_0^{-1}\Big(\dfrac{1+\gamma}{2}\Big)$, т. е. значение t_2 определяется как квантиль уровня $\dfrac{1+\gamma}{2}$ стандартного нормального закона. Итак, получили, что в модели $\wp_\xi = \{N(\theta;\sigma^2)\colon \theta \in R\}$ оптимальным γ-доверительным интервалом для неизвестного математического ожидания θ является интервал вида

$$I_\gamma^*(\boldsymbol{\xi}) = \Big(\overline{\xi} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}c_\gamma, \overline{\xi} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}c_\gamma\Big), \quad \text{где} \quad c_\gamma = \Phi_0^{-1}\Big(\frac{1+\gamma}{2}\Big).$$

Этот интервал симметричен относительно случайной точки $\overline{\xi}$ и имеет длину $l = \dfrac{2\sigma c_\gamma}{\sqrt{n}}$. Например, для $\gamma = 0{,}99$ значение $c_\gamma \approx 2{,}58$. Симметрия доверительного интервала, который имеет наименьшую длину, отражает тот факт, что в этом примере распределение вероятностей стационарной статистики симметрично относительно математического ожидания вида $\mathrm{M}(T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)) = 0$.

Пример 33.2. Теперь рассмотрим построение доверительного интервала неизвестной дисперсии нормально распределенной случайной величины при известном математическом ожидании. Пусть имеется значение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Требуется построить доверительный интервал для неизвестной дисперсии $\theta^2 = \sigma^2$ в модели вида $\wp_\xi = \{N(a;\theta^2)\colon \theta^2 > 0\}$. Здесь $\wp_\xi$ является семейством нормальных распределений с известным математическим ожиданием $\mathrm{M}\xi = a$ и неизвестной дисперсией $\theta^2 = \sigma^2$. В данном случае имеется стационарной статистика вида $T^*(\boldsymbol{\xi};\tau) = \dfrac{1}{\tau}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - a)^2$, зависящая от параметра $\tau = \tau(\theta) = \theta^2$. Распределение вероятностей такой статистики не зависит от неизвестного параметра τ. Действительно, случайная величина $\dfrac{\xi_i - a}{\theta}$ имеет стандартное нормальное распределение вида $N(0;1)$. Значит [9], случайная величина $\dfrac{(\xi_i - a)^2}{\theta^2}$ имеет распределение хи-квадрат с одной степенью свободы и случайная величина $T^*(\boldsymbol{\xi};\tau)$ имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы. Плотность распределения вероятностей такой случайной величины имеет вид [9]

$$f_{\chi^2_n}(t) = f_{T^*}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \exp\Big(-\dfrac{t}{2}\Big), & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Пусть t_1, t_2 удовлетворяют условию $\mathbf{P}_\tau(t_1 < T^*(\boldsymbol{\xi};\tau) < t_2) = \gamma$. Решаем относительно τ два уравнения:

$$T^*(\boldsymbol{\xi};\tau) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2 = t_1, \quad T^*(\boldsymbol{\xi};\tau) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2 = t_2.$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\underline{\tau} = \underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{t_2}\sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2, \quad \overline{\tau} = \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{t_1}\sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2.$$

Поэтому γ-доверительным интервалом для параметра τ является любой интервал вида

$$I_\gamma(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{1}{t_2}\sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2, \quad \frac{1}{t_1}\sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2\right), \tag{33.4}$$

где $t_1 < t_2$ — любые числа, удовлетворяющие условию

$$\mathbf{P}_\tau(t_1 < T^*(\boldsymbol{\xi};\tau) < t_2) = \gamma = F_{\chi^2_n}(t_2) - F_{\chi^2_n}(t_1).$$

Рекомендуется выбирать числа t_1 и t_2 таким образом, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\int_0^{t_1} f_{\chi^2_n}(x)\,dx = \frac{1-\gamma}{2}, \quad \int_{t_2}^{\infty} f_{\chi^2_n}(x)\,dx = \frac{1-\gamma}{2}.$$

В этом случае t_1 представляет собой квантиль распределения хи-квадрат с n степенями свободы уровня величины $(1-\gamma)/2$, а t_2 — квантиль распределения хи-квадрат с n степенями свободы уровня величины $(1+\gamma)/2$. Полученный доверительный интервал называют центральным.

Рассмотрим теперь задачу определения интервала наименьшей длины среди интервалов вида (33.4). Длина таких интервалов определяется следующим выражением:

$$l(\boldsymbol{\xi}; t_1, t_2) = \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - a)^2.$$

Задача сводится к определению условного минимума функции $g(t_1, t_2) = \dfrac{t_2 - t_1}{t_1 t_2}$ по t_1, t_2 при ограничении $\int\limits_{t_1}^{t_2} f_{\chi^2_n}(x)\,dx = \gamma$. Метод неопределенных множителей Лагранжа приводит в данном случае к уравнениям, решение которых в явном виде записать не удается. Центральный интервал в данном случае уже не является наикратчайшим.

Тестовые вопросы к лекции 33

1. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством вида $\wp_\xi = \{F_\xi(x; \theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить верные высказывания.

• Если $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$, $\overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ суть две статистики, $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ и вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big) \geqslant \gamma$ для некоторого параметра $\theta \in \Theta$, то величина γ является надежностью интервального оценивания.

• Пусть $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$, $\overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ суть две статистики, $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ и вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big) \geqslant \gamma$ для любого параметра $\theta \in \Theta$. Тогда γ является доверительной вероятностью.

• Если $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$, $\overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ суть две статистики, $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ и вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big) \geqslant \gamma$ для некоторого значения $\theta \in \Theta$, то $\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big)$ является доверительным интервалом оценки неизвестного параметра.

• Пусть $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$, $\overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ суть две статистики, $\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ и вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big) \geqslant \gamma$ для всех значений параметра $\theta \in \Theta$. Тогда $\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big)$ является доверительным интервалом оценки неизвестного параметра.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x; \theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить ошибочное утверждение.

• Пусть $\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$, $\overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ суть две статистики, $\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) < \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ и вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) < \tau(\theta) < \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})\big) \geqslant \gamma$ для любого $\theta \in \Theta$. Тогда γ

является надежностью при интервальном оценивании скалярной функции $\tau(\theta)$ от θ.

• Если $\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$, $\overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ суть две статистики, $\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) < \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ и вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) < \tau(\theta) < \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})\big) \geqslant \gamma$ для каждого значения $\theta \in \Theta$, то γ является доверительной вероятностью интервального оценивания скалярной функции $\tau(\theta)$ от параметра θ.

• Пусть $\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$, $\overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ суть две статистики, $\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) < \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ и вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) < \tau(\theta) < \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})\big) \geqslant \gamma$ для любого $\theta \in \Theta$. Тогда $(\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}),\ \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi}))$ является доверительным интервалом оценивания скалярной функции $\tau(\theta)$ от параметра θ.

• Если $\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$, $\overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ суть две статистики, $\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) < \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ и вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}) < \tau(\theta) < \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi})\big) \geqslant \gamma$ для некоторого $\theta \in \Theta$. Тогда $(\underline{\tau}(\boldsymbol{\xi}),\ \overline{\tau}(\boldsymbol{\xi}))$ является доверительным интервалом оценивания скалярной функции $\tau(\theta)$ от параметра θ.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$ и вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить верные высказывания.

• Пусть распределение статистики $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ не зависит от θ и при любом значении $\boldsymbol{\xi}$ функция $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ непрерывна и строго монотонна по параметру θ. Тогда статистика $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ является стационарной.

• Если распределение статистики $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ не зависит от θ и при некотором значении $\boldsymbol{\xi}$ функция $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ непрерывна и строго монотонна по параметру θ, то $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta)$ является стационарной.

• Пусть стационарная статистика $T^*(\mathbf{x};\theta)$ монотонно возрастает по параметру θ, при некоторых значениях $t_1 < t_2$ и заданной вероятности $\gamma \in (0,1)$ выполняется условие $\mathbf{P}_\theta(t_1 < T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) < t_2) = \gamma$ для любого параметра $\theta \in \Theta$. Тогда вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big) = \gamma$ для всех $\theta \in \Theta$, где $T^*(\mathbf{x};\underline{\theta}(\mathbf{x})) = t_1,\ T^*(\mathbf{x};\overline{\theta}(\mathbf{x})) = t_2$.

• Если стационарная статистика $T^*(\mathbf{x};\theta)$ монотонно убывает по θ, при некоторых числах $t_1 < t_2$ и заданной вероятности $\gamma \in (0,1)$ выполняется условие $\mathbf{P}_\theta(t_1 < T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) < t_2) = \gamma$ для любого параметра $\theta \in \Theta$, то вероятность $\mathbf{P}_\theta(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})) = \gamma$ для всех $\theta \in \Theta$, где $T^*(\mathbf{x};\underline{\theta}(\mathbf{x})) = t_1,\ T^*(\mathbf{x};\overline{\theta}(\mathbf{x})) = t_2$.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi =$

$= \{f_\xi(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$ и вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить ошибочное утверждение.

• Если стационарная статистика $T^*(\mathbf{x};\theta)$ монотонно убывает по θ, при некоторых значениях $t_1 < t_2$ и заданной вероятности $\gamma \in (0,1)$ выполняется условие $\mathbf{P}_\theta(t_1 < T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) < t_2) = \gamma$ для любого параметра $\theta \in \Theta$, то для всех $\theta \in \Theta$ вероятность $\mathbf{P}_\theta(\overline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \underline{\theta}(\boldsymbol{\xi})) = \gamma$, где $T^*(\mathbf{x};\underline{\theta}(\mathbf{x})) = t_1$, $T^*(\mathbf{x};\overline{\theta}(\mathbf{x})) = t_2$.

• Пусть стационарная статистика $T^*(\mathbf{x};\theta)$ монотонно возрастает по θ, при некоторых значениях $t_1 < t_2$ и заданной вероятности $\gamma \in (0,1)$ выполняется условие $\mathbf{P}_\theta\big(t_1 < T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) < t_2\big) = \gamma$ для любого параметра $\theta \in \Theta$. Тогда для всех $\theta \in \Theta$ вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\overline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \underline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big) = \gamma$, где $T^*\big(\mathbf{x};\underline{\theta}(\mathbf{x})\big) = t_1$, $T^*(\mathbf{x};\overline{\theta}(\mathbf{x})) = t_2$.

• Если интегральная функция распределения $F_\xi(x;\theta)$ строго монотонна по параметру θ, то статистика $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F_\xi(\xi_i;\theta)$ является стационарной.

• Если $F_\xi(x;\theta)$ является интегральной функцией распределения, то распределение вероятностей случайной величины $\eta = F_\xi(\xi;\theta)$ при любом $\theta \in \Theta$ является равномерным на интервале $(0,1)$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$ и вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Определить верные высказывания.

• Если $F_\xi(x;\theta)$ является интегральной функцией распределения, то случайная величина $\eta = -\ln\big(F_\xi(\xi;\theta)\big)$ при любом $\theta \in \Theta$ имеет плотность распределения $f_\eta(t) = \exp\{-t\}$ при $t > 0$ и $f_\eta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$.

• Если $F_\xi(x;\theta)$ является интегральной функцией распределения, то случайная величина $-\ln\big(F_\xi(\xi;\theta)\big)$ при любом $\theta \in \Theta$ имеет гамма-распределение с параметрами $(1,2)$.

• Пусть $F_\xi(x;\theta)$ является интегральной функцией распределения. Тогда статистика $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F_\xi(\xi_i;\theta)$ имеет гамма-распределение с параметрами $(1,n)$ при любом $\theta \in \Theta$.

• Плотность распределения вероятностей $f_{T^*}(t)$ статистики вида $T^*(\boldsymbol{\xi};\theta) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F_\xi(\xi_i;\theta)$ равна нулю при $t \leqslant 0$ и равна $t^{n-1}\exp\{-t\}/\Gamma(\mathrm{n})$ при $t > 0$, где $F_\xi(x;\theta)$ является интегральной функцией распределения и $\Gamma(n)$ — гамма-функция.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается параметрическим семейством $\wp_\xi = \{f_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Определить ошибочное утверждение.

• Пусть интегральная функция распределения $F_\xi(x;\theta)$ строго монотонна по параметру θ, при некоторых значениях $t_1 < t_2$ и данной вероятности $\gamma \in (0,1)$ справедливо условие $\mathbf{P}_\theta\left(t_1 < -\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F_\xi(\xi_i;\theta) < t_2\right) = \gamma$. Тогда для любого $\theta \in \Theta$ вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\xi)\big) = \gamma$, где $-\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F_\xi(x_i;\underline{\theta}(\mathbf{x})) = t_1$, $-\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F(x_i;\overline{\theta}(\mathbf{x})) = t_2$.

• Пусть интегральная функция распределения $F_\xi(x;\theta)$ строго монотонна по параметру θ, при некоторых значениях $t_1 < t_2$ и заданной вероятности $\gamma \in (0,1)$ справедливо условие $\dfrac{1}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{t}\,dt = \gamma$. Тогда для $\theta \in \Theta$ вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big) = \gamma$, где $-\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F_\xi(x_i;\underline{\theta}(\mathbf{x})) = t_1$, $-\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F(x_i;\overline{\theta}(\mathbf{x})) = t_2$.

• Пусть интегральная функция распределения $F_\xi(x;\theta)$ строго монотонна по параметру θ, при некоторых значениях $t_1 < t_2$ и заданной вероятности $\gamma \in (0,1)$ справедливо условие $\dfrac{1}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = \gamma$. Тогда для $\theta \in \Theta$ вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}) < \theta < \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big) = \gamma$, где $-\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F_\xi(x_i;\underline{\theta}(\mathbf{x})) = t_1$, $-\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F(x_i;\overline{\theta}(\mathbf{x})) = t_2$.

• Пусть интегральная функция распределения $F_\xi(x;\theta)$ строго монотонна по параметру θ, при некоторых значениях $t_1 < t_2$ и заданной вероятности $\gamma \in (0, 1)$ справедливо условие $\frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_{t_1}^{t_2} t^{n-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt = \gamma$ и, наконец, $-\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F_\xi(x_i; \underline{\theta}(\mathbf{x})) = t_1$, $-\sum\limits_{i=1}^{n} \ln F(x_i; \overline{\theta}(\mathbf{x})) = t_2$. Тогда $\big(\underline{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \overline{\theta}(\boldsymbol{\xi})\big)$ есть доверительный искомый интервал уровня доверия γ для параметра θ.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается семейством нормальных распределений с известной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием θ. Определить справедливые высказывания.

• Статистика $\sqrt{n}\,(\mathrm{M}^*\xi - \theta)/\sigma$ не является стационарной для неизвестного параметра θ, где $\mathrm{M}^*(\xi) = n^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ есть выборочное математическое ожидание.

• Статистика $\sqrt{n}\,(\mathrm{M}^*\xi - \theta)/\sigma$ имеет стандартное нормальное распределение.

• Если $t_1 < t_2$ суть числа, удовлетворяющие следующему условию: $\mathbf{P}_\theta(t_1 < \sqrt{n}\,(\mathrm{M}^*\xi - \theta)/\sigma < t_2) = \gamma$, то доверительный интервал надежности γ равен $(\mathrm{M}^*\xi - \sigma n^{-1/2}\, t_2, \mathrm{M}^*\xi - \sigma n^{-1/2} t_1)$.

• Наименьшей длины доверительный интервал надежности γ имеет следующий вид: $(\mathrm{M}^*\xi - \sigma n^{-1/2} c_\gamma, \mathrm{M}^*\xi + \sigma n^{-1/2} c_\gamma)$, где значение c_γ определяется как квантиль уровня $(1 + \gamma)/2$ стандартного нормального распределения.

8. Тип —проверка ответов.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается семейством нормальных распределений с известной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием θ. Пусть также стационарная статистика $\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - \theta)$ используется при построении доверительного интервала для параметра θ. Вычислить длину l оптимального доверительного интервала для параметра θ при $\sigma = 1/2$, $n = 100$ и следующих уровнях доверия γ: 1) $\gamma = 0{,}9$; 2) $\gamma = 0{,}95$; 3) $\gamma = 0{,}99$.

Ответы:

1) $l = 0{,}1645$;

2) $l = 0{,}196$;

3) $l = 0{,}2576$.

Лекция 34

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК И ИХ СВОЙСТВ

34.1. Точечная оценка параметра с известным законом распределения и центральные доверительные интервалы

Пусть теперь вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представляет собой значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $F_\xi(x;\theta)$ — интегральная функция распределения случайной величины ξ. Полагаем, что $F_\xi(x;\theta)$ принадлежит семейству $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\}$. Пусть также найдена некоторая точечная оценка $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ для параметра θ, для которой известна интегральная функция распределения $F_{\theta^*}(t;\theta)$. Тогда доверительный интервал для неизвестного параметра θ можно строить на основе этой функции, если функция $F_{\theta^*}(t;\theta)$ непрерывна и монотонна по параметру $\theta \in \Theta$ и $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ — непрерывная случайная величина. Построим доверительный интервал заданного уровня доверия γ для параметра θ. При каждом фиксированном значении параметра θ определим числа $t_1(\theta) < t_2(\theta)$, такие что

$$\mathbf{P}_\theta\big(\{t_1 < \theta^*(\boldsymbol{\xi}) < t_2\}\big) = F_{\theta^*}(t_2;\theta) - F_{\theta^*}(t_1;\theta) = \gamma.$$

Ясно, что такие значения $t_1(\theta)$, $t_2(\theta)$ можно выбрать не одним способом. Для однозначности такого выбора рекомендуется выбирать их так, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$F_{\theta^*}(t_1;\theta) = \frac{1-\gamma}{2}, \quad 1 - F_{\theta^*}(t_2;\theta) = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Из первого условия определяем функцию $t_1(\theta)$, а из второго условия находим функцию $t_2(\theta)$. Таким образом, при заданном значении параметра θ оценка $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ будет с вероятностью γ заключена в интервале $(t_1(\theta), t_2(\theta))$, причем вероятность попадания $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ как левее, так и правее этого интервала равна $(1-\gamma)/2$. Поэтому такой доверительный интервал называется центральным. Для завершения построения доверительного интервала остается заметить, что, получив по выборочным значениям $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значение оценки $\theta^*(\mathbf{x})$, мы вправе сделать вывод: неизвестный параметр θ обязан лежать внутри интервала (θ', θ''), где $t_2(\theta') = \theta^*(\mathbf{x})$, $t_1(\theta'') = \theta^*(\mathbf{x})$. Откладывая на рис. 34.1 по оси абсцисс значение параметра θ, а по оси ординат — соответствующие ему значения $t_1(\theta)$, $t_2(\theta)$, получим две кривые линии.

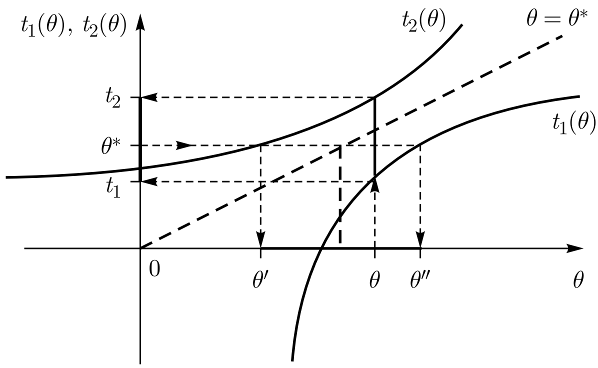


Рис. 34.1

В силу практической невозможности события, вероятность которого равна $(1-\gamma)$ и, значит, мала, заключаем, что все возможные пары (θ, θ^*) могут находиться только между построенными кривыми $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$. Отметим, что, выбирая различные оценки $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$, мы будем получать различные доверительные интервалы. Но конечная цель — получить как можно более короткий интервал при фиксированном уровне доверия γ. Пусть используются несмещенные и приблизительно нормальные оценки, тогда интервалы получаются тем короче, чем меньше дисперсия оценки. Итак, эффективные и асимптотически эффективные оценки приводят к кратчайшим или асимптотически кратчайшим интервалам.

Пример 34.1. Приведем теперь пример на построение доверительного интервала с помощью точечной оценки для неизвестного среднего нормального распределения при известной дисперсии $\mathrm{D}\xi = \sigma^2$. Пусть по выборке $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, значение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ которой было зафиксировано измерительным устройством, требуется построить доверительный интервал для неизвестного среднего θ в модели $\wp_\xi = N(\theta; \sigma^2)$. Семейство $\wp_\xi$ нормальных распределений с неизвестным математическим ожиданием $\theta \in (-\infty, +\infty)$ и известной дисперсией σ^2 обозначено через $\{N(\theta; \sigma^2)\colon\ \theta \in R\}$. Как известно, выборочное среднее $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i = \mathrm{M}^*\xi$ является эффективной оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ параметра θ. Случайная величина $\theta^*(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ имеет нормальное распределение типа $N(\theta; \sigma/n)$. Определяем числа t_1, t_2 из условия

$$F_{\theta^*}(t_1; \theta) = 1 - \gamma/2, \quad 1 - F_{\theta^*}(t_2; \theta) = 1 - \gamma/2, \tag{34.1}$$

где γ — заданный уровень доверия. Получаем из (34.1) равенства

$$t_1 = t_1(\theta) = \theta + \sigma n^{-1/2}\,\Phi_0^{-1}\big((1-\gamma)2^{-1}\big),$$
$$t_2 = t_2(\theta) = \theta + \sigma n^{-1/2}\,\Phi_0^{-1}\big((1+\gamma)2^{-1}\big),$$

где $\Phi_0(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона и $\Phi_0^{-1}(\cdot)$ — обратная ей функция. Получили, что соотношения $t_1 = t_1(\theta)$, $t_2 = t_2(\theta)$ являются уравнениями двух прямых линий.

Проиллюстрируем и поясним далее вычисление границ доверительного интервала с помошью рис. 34.2.

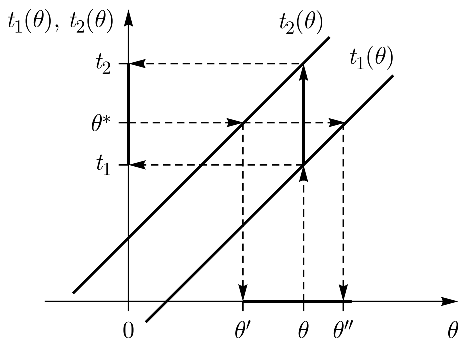


Рис. 34.2

Решая уравнения $\theta^* = t_2(\theta')$ и $\theta^* = t_1(\theta'')$ относительно θ' и θ'', получаем границы доверительного интервала

$$\theta' = \theta^*(\mathbf{x}) - \sigma n^{-1/2} c_{(1+\gamma)/2}, \quad \theta'' = \theta^*(\mathbf{x}) - \sigma n^{-1/2} c_{(1-\gamma)/2},$$

или, учитывая, что $c_{(1+\gamma)/2} = -c_{(1-\gamma)/2}$, непосредственно и окончательно находим: $\theta', \theta'' = \theta^* \mp \sigma n^{-1/2} c_{(1+\gamma)/2}$. Здесь величины $c_{(1+\gamma)/2}$ и $c_{(1-\gamma)/2}$ суть квантили стандартного нормального распределения уровней $(1+\gamma)/2$ и $(1-\gamma)/2$ соответственно.

34.2. Основное соотношение между надежностью, точностью и объемом повторной выборки при использовании асимптотических свойств точечных оценок

Пусть для некоторого неизвестного параметра θ закона распределения случайной величины ξ получена подходящая оценка $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$. На практике мы всегда имеем дело с ограниченным числом наблюдений, т. е. с выборкой довольно ограниченного объема n. Поэтому всегда после замены параметра θ значением $\theta_n^*(\mathbf{x})$ случайной величины $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ возникает задача исследования точности или ошибки вида $|\theta - \theta_n^*(\boldsymbol{\xi})|$. Нас интересует вероятность γ того, что абсолютная величина ошибки вида $|\theta - \theta_n^*(\boldsymbol{\xi})|$, вызванной указанной заменой, не превзойдет некоторого положительного числа ε. Итак, в случае подходящей оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ имеем основное соотношение:

$$\gamma = \mathbf{P}_\theta\big(|\theta - \theta_n^*(\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon\big) = \mathbf{P}_\theta(\theta - \varepsilon < \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) < \theta + \varepsilon) = \\ = \mathbf{P}_\theta(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon < \theta < \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon).$$

В этой формуле θ есть постоянная величина, неизвестная до опыта. Поэтому вероятность $\mathbf{P}_\theta(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon < \theta < \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon)$ надо трактовать как вероятность того, что случайный интервал $\big(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon,\ \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon\big)$ накроет точку θ с вероятностью γ. Величина ε также называется точностью оценки. Доверительный интервал $\big(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon, \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon\big)$ является случайным, так как его положение и границы случайны. Рассмотрим примеры на определение функциональной зависимости между надежностью γ, точностью ε, доверительным интервалом $\big(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon,\ \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon\big)$ и объемом n повторной выборки. При этом для эффективного использования асимптотических свойств оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ при неизвестном ее законе распределения естественно будем рассматривать повторную выборку $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ достаточного большого объема n. Проиллюстрируем теперь этот подход на трех важных для практики задачах: 1) на задаче оценки математического ожидания; 2) на задаче оценки дисперсии; 3) на задаче оценки неизвестной вероятности.

34.3. Приближенное вычисление доверительной вероятности, точности и объема повторной выборки при оценке математического ожидания

Продемонстрируем этот подход на следующей задаче. Пусть над случайной величиной ξ проводятся n независимых наблюдений, что порождает n независимых и одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Необходимо при известной дисперсии σ^2 по наблюдениям за случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$ оценить значение математического ожидания $\mathrm{M}\xi$. Возьмем в качестве оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ для математического ожидания $\mathrm{M}\xi$ среднее арифметическое $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Согласно лемме 30.1 и лемме 30.3 из лекции 30 оценка $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ является несмещенной, состоятельной и дисперсия $\mathrm{D}(\theta_n^*) = n^{-1}\mathrm{D}\xi = n^{-1}\sigma^2$. Поэтому $\sigma(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})) = n^{-1}/2\sigma$. Можно доказать, хотя это несколько сложнее, что для широкого класса распределений случайной величины ξ, например для нормального распределения случайной величины ξ, оценка $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ для $\mathrm{M}\xi$ будет эффективной. Последнее утверждение проиллюстрировано в примере 30.2. Заметим, что в этой задаче мы не знаем закон распределения вероятностей для оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$. Перейдем к определению границ объема n повторной выборки, характеристик точности и надежности оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$. При этом определяем одну из трех указанных характеристик при заданных двух остальных.

Используя из [8, 9] центральные предельные теоремы, метод приближенного вычисления вероятности $\mathbf{P}\Big(c \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k < d\Big)$, где $c = (\theta - \varepsilon)n$ и $d = (\theta + \varepsilon)n$, и функцию Лапласа $\Phi(x)$, легко найдем приближенную функциональную зависимость между надежностью γ, точностью ε, и объемом n повторной выборки:

$$\gamma = \mathbf{P}_\theta(\theta - \varepsilon < \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) < \theta + \varepsilon) \approx \Phi(\varepsilon/\sigma(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}))) = \Phi(\varepsilon\sigma^{-1}n^{1/2}). \tag{34.2}$$

Используя функцию Лапласа $y = \Phi(x)$ и обратную ей функцию $\Phi^{-1}(y)$, можно с помощью приведенной функциональной зависимости (34.2) решать следующие практические задачи:

1) приближенное вычисление доверительной вероятности по формуле $\gamma \approx \Phi(\varepsilon\sigma^{-1}n^{1/2})$, если заданы точность ε и объем n повторной выборки;

2) приближенное вычисление точности $\varepsilon \approx \Phi^{-1}(\gamma)\sigma/n^{1/2}$ и доверительного интервала $\big(\theta_n^*(\mathbf{x}) - \varepsilon,\ \theta_n^*(\mathbf{x}) + \varepsilon\big)$, если заданы доверительная вероятность γ и объем n выборки;

3) приближенное назначение границ для объема n повторной выборки в виде неравенства $n \geqslant (\Phi^{-1}(\gamma))^2\sigma^2/\varepsilon^2$, если заданы надежность γ и точность ε.

Пример 34.2. Среднее значение расстояния до ориентира, полученное по результатам 100 независимых измерений, равно 3020 м. Среднеквадратическое отклонение ошибки измерительного прибора равно 6 м. Найти доверительный интервал для истинной дальности до ориентира, отвечающей доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$. Такой интервал в прикладной статистике называют 95-процентным доверительным интервалом. Здесь и далее в примерах, ради простоты, размерность физических величин будем опускать. Итак, в этом примере $n = 100$, $\sigma = 6$, $\theta_n^*(\mathbf{x}) = 3020$ и $\gamma = 0{,}95$. Отсюда непосредственно получаем, что $\varepsilon \approx \Phi^{-1}(\gamma)\sigma/n^{1/2} \approx 1{,}176$ и 95-процентный доверительный интервал $(\theta_n^*(\mathbf{x}) - \varepsilon,\ \theta_n^*(\mathbf{x}) + \varepsilon) \approx (3018{,}82, 3021{,}18)$. Заметим, что по таблице для функции $\Phi^{-1}(\gamma)$ имеем: $\Phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}96$.

Пример 34.3. Средняя квадратическая ошибка измерения угла теодолитом равна $10''$, причем в качестве значения измеряемого угла принимается среднее арифметическое результатов измерений. Сколько независимых измерений нужно провести, чтобы с вероятностью $\gamma = 0{,}9$ гарантировать измерение угла с ошибкой, абсолютное значение которой не превышает $2''$? Исходные данные в этом примере: $\sigma = 10$, $\varepsilon = 2''$ и $\gamma = 0{,}95$. Для объема n повторной выборки легко находим: $n \geqslant (\Phi^{-1}(\gamma))^2\sigma^2/\varepsilon^2 \approx (1{,}64)^2 \times 100/4 \approx 67$.

34.4. Приближенное вычисление надежности, доверительного интервала и объема повторной выборки при оценке дисперсии

Рассмотрим теперь применение асимптотических свойств точечных оценок дисперсии случайной величины ξ с неизвестным законом распределения. В лекции 30 была доказана лемма 30.2. Из доказательства этой леммы непосредственно следует, что несмещенная оценка $\theta_n^* = \mathrm{D}_n^{\sim}(\boldsymbol{\xi})$ для дисперсии $\theta = \mathrm{D}\xi$ определяется формулой $\theta_n^* = (n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)^2$. В работе [3] указаны условия, при которых дисперсия $\mathrm{D}(\theta_n^*)$ и дисперсия $\mathrm{D}\xi$ связаны следующим соотношением: $\mathrm{D}(\theta_n^*) \approx 2(\mathrm{D}\xi)^2/(n-1)$. Более того, для нормальной случайной величины ξ в работе [3] установлено, что $\mathrm{D}(\theta_n^*) = 2(\mathrm{D}\xi)^2/(n-1)$. Поэтому в общем случае для определения в первом приближении доверительного интервала, характеристик точности и надежности оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ все же будем пользоваться соотношением $\mathrm{D}(\theta_n^*) \approx 2(\mathrm{D}\xi)^2/(n-1)$.

Так как оценка $\theta_n^* = (n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)^2$ является асимптотически нормальной [2, 3, 5], то при повторных выборках большого объема n выводим

$$\begin{aligned}\gamma = \mathbf{P}_\theta(\theta - \varepsilon < \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) < \theta + \varepsilon) = \\ = \mathbf{P}_\theta(\mathrm{M}(\theta_n^*) - \varepsilon < \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) < \mathrm{M}(\theta_n^*) + \varepsilon) \approx \\ \approx \Phi(\varepsilon/\sigma(\theta_n^*)) \approx \Phi(2^{-1/2}(n-1)^{1/2}\varepsilon/\mathrm{D}\xi). \quad (34.3)\end{aligned}$$

Заменяя в (34.3) неизвестную дисперсию $\mathrm{D}\xi$ на значение $\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x})$ оценки $\mathrm{D}_n^{\sim}(\xi)$, получим приближенную функциональную зависимость вида

$$\gamma \approx \Phi\big(2^{-1/2}(n-1)^{1/2}\varepsilon/\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x})\big) \qquad (34.4)$$

между надежностью γ, точностью ε и объемом n повторной выборки для решения задачи интервальной оценки неизвестной дисперсии. Функциональная зависимость (34.4) при достаточно большом объеме повторной выборки позволяет найти:

1) приближенное значение доверительной вероятности по формуле $\gamma \approx \Phi\big(2^{-1/2}(n-1)^{1/2}\varepsilon/\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x})\big)$, если заданы точность ε и объем n повторной выборки;

2) приближенное значение точности

$$\varepsilon \approx 2^{1/2}\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x})\Phi^{-1}(\gamma)/(n-1)^{1/2}$$

и положение доверительного интервала

$$\Big(\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x}) - 2^{1/2}\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x})\Phi^{-1}(\gamma)/(n-1)^{1/2},\ \mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x}) + 2^{1/2}\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x})\Phi^{-1}(\gamma)/(n-1)^{1/2}\Big),$$

если заданы надежность γ и объем n выборки;

3) приближенное назначение границ для объема n повторной выборки в виде неравенства $n \geqslant 1 + 2(\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x})\Phi^{-1}(\gamma))^2/\varepsilon^2$, если заданы доверительная вероятность γ и точность ε.

Пример 34.4. Значение оценки $\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x})$, полученное по данным обработки результатов 100 независимых наблюдений случайной величины ξ, равно 20. Найти доверительный интервал $\big(\theta_n^*(\mathbf{x}) - \varepsilon,\ \theta_n^*(\mathbf{x}) + \varepsilon\big)$ для истинной дисперсии, отвечающей доверительной вероятности, равной 0,9. Из условий $\mathrm{D}_n^{\sim}(\mathbf{x}) = 20$, $n = 100$ и $\gamma = 0{,}9$ этого примера найдем: $\varepsilon \approx 4{,}66$. Отсюда получаем, что

$$\big(\theta_n^*(\mathbf{x}) - \varepsilon, \theta_n^*(\mathbf{x}) + \varepsilon\big) \approx (20 - 4{,}66, 20 + 4{,}66) = (15{,}34, 24{,}66).$$

34.5. Приближенное вычисление надежности, доверительного интервала и объема повторной выборки при оценке вероятности

Наконец, изучим асимптотические свойства точечной оценки $\mathbf{P}_n^*(A)$ неизвестной вероятности $p = \mathbf{P}(A) = \theta$ некоторого события A. Пусть над случайным экспериментом E проведено n независимых испытаний и случайная величина ξ_i подсчитывает число появлений события A в i-м опыте. При этом случайная величина ξ подсчитывает число появлений события A в каждом отдельном опыте. Очевидно, что случайная величина ξ принимает значение единица с вероятностью p и принимает значение нуль с вероятностью $q = 1 - p$. Поэтому $\mathrm{M}(\xi) = p$ и $\mathrm{D}(\xi) = p(1-p)$. Итак, закон распределения для дискретной случайной величины ξ зависит от одного неизвестного параметра p или от $\mathrm{M}(\xi)$. Поэтому задача о построении доверительных интервалов для неизвестной вероятности события является частным случаем рассмотренной задачи о построении доверительных интервалов для неизвестного математического ожидания. Так как точечная оценка $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{P}_n^*(A)$ для неизвестной вероятности p равна среднему арифметическому $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, то $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{P}_n^*(A) = \mathrm{M}^*(\xi)$. Отсюда получаем, что $\mathrm{M}(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})) = \mathrm{M}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \mathrm{M}(\xi) = p$, $\mathrm{D}(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})) = \mathrm{D}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right) = p(1-p)/n$ и $\sigma(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})) = (p(1-p)/n)^{1/2}$. Принимая во внимание в соотношении (34.2) равенство $\sigma(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})) = (p(1-p)/n)^{1/2}$ и заменяя неизвестную вероятность p на значение $p^* = \theta_n^*(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ оценки $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{P}_n^*(A)$, получим функциональную зависимость вида

$$\gamma = \mathbf{P}_\theta\big(p - \varepsilon < \mathbf{P}_n^*(A) < p + \varepsilon\big) \approx \Phi\big(\varepsilon/\sigma(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}))\big) \approx \\ \approx \Phi\big(\varepsilon n^{1/2}(p^*(1-p^*))^{-1/2}\big). \quad (34.5)$$

С помощью соотношения (34.5) можно решать следующие задачи прикладной статистики:

1) приближенное вычисление доверительной вероятности по формуле $\gamma \approx \Phi\big(\varepsilon n^{1/2}(p^*(1-p^*))^{-1/2}\big)$, если заданы точность ε и объем n повторной выборки при интервальной оценке вероятности p;

2) приближенное вычисление точности

$$\varepsilon \approx \Phi^{-1}(\gamma) n^{-1/2}\big(p^*(1-p^*)^{1/2}\big)$$

и доверительного интервала $(p^* - \varepsilon,\ p^* + \varepsilon)$ для неизвестной вероятности $\mathbf{P}(A)$, если заданы доверительная вероятность γ и объем n выборки;

3) приближенное назначение границ для объема n повторной выборки в виде неравенства $n \geqslant (\Phi^{-1}(\gamma))^2 p^*(1-p^*)/\varepsilon^2$, если заданы надежность γ и точность ε при интервальной оценке неизвестной вероятности $\mathbf{P}(A)$.

Пример 34.5. Проведено 500 независимых испытаний некоторого случайного эксперимента E, в ходе которых некоторое событие A появилось 350 раз. Построить 95-процентный доверительный интервал для неизвестной вероятности этого события. Исходные условия этой задачи можно записать в таком виде: абсолютная частота $\mu(500, A)$ события A равна 350 при значении $n = 500$. Отсюда значение p^* оценки для неизвестной вероятности равно 0,7. Тогда для $\gamma = 0{,}95$ получаем, что точность оценки $\varepsilon \approx \Phi^{-1}\big(\gamma n^{-1/2}(p^*(1-p^*))^{1/2}\big) \approx (500)^{-1/2} \times \times (0{,}7 \times 0{,}3)^{1/2} \times 1{,}96 \approx 0{,}04$ и 95-процентный доверительный интервал $(p^* - \varepsilon, p^* + \varepsilon)$ для неизвестной $\mathbf{P}(A)$ имеет следующий приближенный вид: $(0{,}7 - 0{,}04, 0{,}7 + 0{,}04) = (0{,}66, 0{,}74)$.

Тестовые вопросы к лекции 34

1. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$, и пусть $F_{\theta^*}(t;\theta)$ является непрерывной и монотонной по скалярному параметру $\theta \in \Theta$ функцией распределения точечной оценки $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ непрерывного типа. Определить верные высказывания.

• Пусть $F_{\theta^*}(t_1(\theta);\theta) = (1-\gamma)/2$ и $F_{\theta^*}(t_2(\theta);\theta) = (1+\gamma)/2$ при заданной надежности γ интервального оценивания определяют функции $t_1 = t_1(\theta)$ и $t_2 = t_2(\theta)$. Тогда $\mathbf{P}_\theta(\{t_1 < \theta^*(\boldsymbol{\xi}) < t_2\}) = = \gamma$ при всех $\theta \in \Theta$, где $t_1 = t_1(\theta)$ и $t_2 = t_2(\theta)$.

• Если равенства $F_{\theta^*}(t_1(\theta);\theta) = (1-\gamma)/2$ и $F_{\theta^*}(t_2(\theta);\theta) = = (1+\gamma)/2$ при заданной надежности γ интервального оценивания определяют функции $t_1 = t_1(\theta)$ и $t_2 = t_2(\theta)$, то $\mathbf{P}_\theta(\{t_1 < \theta^*(\boldsymbol{\xi}) < t_2\}) = \gamma$ только при некотором значении параметра $\theta \in \Theta$, где $t_1 = t_1(\theta)$ и $t_2 = t_2(\theta)$.

• Доверительный интервал заданной надежности γ для неизвестного параметра θ можно строить на основе функции $F_{\theta^*}(t;\theta)$.

• Не существует алгоритма, который позволяет строить доверительный интервал заданной надежности γ для неизвестного параметра θ на основе функции $F_{\theta^*}(t;\theta)$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$, и пусть $F_{\theta^*}(t;\theta)$ является непрерывной и монотонной по скалярному параметру $\theta \in \Theta$ функцией распределения точечной оценки $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ непрерывного типа. Определить ошибочное утверждение.

• Пусть равенства $F_{\theta^*}(t_1(\theta);\theta) = (1-\gamma)/2$ и $F_{\theta^*}(t_2(\theta);\theta) = (1+\gamma)/2$ при заданной надежности γ интервального оценивания определяют две функции: $t_1 = t_1(\theta)$, $t_2 = t_2(\theta)$ и $t_1(\theta'') = \theta^*(\mathbf{x})$, $t_2(\theta') = \theta^*(\mathbf{x})$. Тогда $\mathbf{P}_\theta\bigl(\{t_2^{-1}(\theta^*(\boldsymbol{\xi})) < \theta < t_1^{-1}(\theta^*(\boldsymbol{\xi}))\}\bigr) = \gamma$ при всех $\theta \in \Theta$.

• Если равенства $F_{\theta^*}(t_1(\theta);\theta) = (1-\gamma)/2$, $F_{\theta^*}(t_2(\theta);\theta) = (1+\gamma)/2$ определяют функции $t_1 = t_1(\theta)$ и $t_2 = t_2(\theta)$, то γ является доверительной вероятностью при интервальном оценивании скалярного параметра θ.

• Пусть равенства $F_{\theta^*}(t_1(\theta);\theta) = (1-\gamma)/2$, $F_{\theta^*}(t_2(\theta);\theta) = (1+\gamma)/2$ определяют функции $t_1 = t_1(\theta)$ и $t_2 = t_2(\theta)$ при всех $\theta \in \Theta$. Тогда $\bigl(t_2^{-1}(\theta^*(\mathbf{x})),\ \mathbf{t}_\mathbf{1}^{-1}(\theta^*(\mathbf{x}))\bigr)$ является доверительным интервалом оценивания скалярного параметра θ с надежностью γ.

• Если система $F_{\theta^*}(t_1(\theta);\theta) = (1-\gamma)/2$, $F_{\theta^*}(t_2(\theta);\theta) = (1+\gamma)/2$ определяет функции $t_1 = t_1(\theta)$ и $t_2 = t_2(\theta)$ от аргумента $\theta \in \Theta$, то выражение $\bigl(t_2^{-1}(\theta^*(\mathbf{x})), t_1^{-1}(\theta^*(\mathbf{x}))\bigr)$ является доверительным интервалом оценивания скалярного параметра θ с надежностью $(1-\gamma)$.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается семейством нормальных распределений с известной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием θ. Определить верные высказывания.

• Если выборочное среднее $\mathrm{M}^*\xi$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ параметра θ, то случайная величина $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ имеет нормальное распределение типа $N(\theta;\sigma/n)$.

• Пусть эмпирическое математическое ожидание $M^*\xi$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ для θ и $F_{\theta^*}(t_1(\theta);\theta) = (1-\gamma)/2$, $F_{\theta^*}(t_2(\theta);\theta) = (1+\gamma)/2$. Тогда выполняются соотношения

$$t_1 = t_1(\theta) = \theta + \sigma n^{-1/2}\,\Phi_0^{-1}((1-\gamma)2^{-1}),$$
$$t_2 = t_2(\theta) = \theta + \sigma n^{-1/2}\,\Phi_0^{-1}((1+\gamma)2^{-1}),$$

где $\Phi_0(x)$ — интегральная функция распределения стандартного нормального закона и $\Phi_0^{-1}(\cdot)$ — обратная ей функция.

• Если выборочное среднее $M^*\xi$ и оценка $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ параметра $\theta \in \Theta$ совпадают и $F_{\theta^*}(t_1(\theta);\theta) = (1-\gamma)/2$, $F_{\theta^*}(t_2(\theta);\theta) = (1+\gamma)/2$, то величины $\theta^*(\mathbf{x}) - \sigma n^{-1/2}c_{(1+\gamma)/2}$, $\theta^*(\mathbf{x}) + \sigma n^{-1/2}c_{(1-\gamma)/2}$ определяют границы доверительного интервала, где $c_{(1+\gamma)/2}$ и $c_{(1-\gamma)/2}$ суть квантили стандартного нормального распределения уровней $(1+\gamma)/2$ и $(1-\gamma)/2$ соответственно.

• Если статистическое среднее $M^*\xi$ и оценка $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ параметра $\theta \in \Theta$ совпадают и $F_{\theta^*}(t_1(\theta);\theta) = (1-\gamma)/2$, $F_{\theta^*}(t_2(\theta);\theta) = (1+\gamma)/2$, то величины $\theta^*(\mathbf{x}) - \sigma n^{-1/2}c_{(1+\gamma)/2}$, $\theta^*(\mathbf{x}) - \sigma n^{-1/2}c_{(1-\gamma)/2}$ определяют границы доверительного интервала, где $c_{(1+\gamma)/2}$ и $c_{(1-\gamma)/2}$ суть квантили стандартного нормального распределения уровней $(1+\gamma)/2$ и $(1-\gamma)/2$ соответственно.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$ и статистика $\theta_n^*(\xi)$ является оценкой неизвестного параметра θ. Определить ошибочное утверждение.

• Случайная величина $|\theta - \theta_n^*(\boldsymbol{\xi})|$ определяет ошибку оценивания неизвестного параметра θ.

• Вероятность $\mathbf{P}_\theta\big(|\theta - \theta_n^*(\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon\big)$ представляет собой надежность γ оценивания параметра θ при заданной точности $\varepsilon > 0$.

• Доверительный интервал $\big(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) - \varepsilon,\ \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon\big)$ является случайным, так как его положение и границы случайны при заданной точности $\varepsilon > 0$.

• Величина $\mathbf{P}_\theta\big(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) - 2\varepsilon < \theta < \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) + 2\varepsilon\big)$ при заданной точности $\varepsilon > 0$ и надежности γ представляет собой вероятность того, что случайный интервал $\big(\theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) - 2\varepsilon,\ \theta_n^*(\boldsymbol{\xi}) + 2\varepsilon\big)$ накроет точку θ с вероятностью γ.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x;\theta)\colon \theta\in\Theta\}$, вектор $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — значение выборки $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ и статистика $\theta_n^*(\xi)$ является оценкой неизвестного параметра θ. Определить верные высказывания.

• Если выборочное среднее $\mathrm{M}^*\xi$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ параметра $\mathrm{M}\xi=\theta$ при известной дисперсии σ^2, то

$$\mathbf{P}_\theta\big(\theta-\varepsilon<\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})<\theta+\varepsilon\big)\approx\Phi(\varepsilon\sigma^{-1}n^{1/2})$$

приближенно определяет функциональную зависимость между надежностью γ, точностью $\varepsilon>0$ и объемом n повторной выборки $\boldsymbol{\xi}$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

• Пусть при известной дисперсии σ^2 статистическое среднее $\mathrm{M}^*\xi$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ параметра $\mathrm{M}\xi=\theta$. Тогда соотношение вида $\gamma\approx\Phi(\varepsilon\sigma^{-1}n^{1/2})$ приближенно вычисляет доверительную вероятность γ при заданной точности $\varepsilon>0$ и заданном объеме n повторной выборки, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

• Если при известной дисперсии σ^2 статистическое среднее $\mathrm{M}^*\xi$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ для $\mathrm{M}\xi=\theta$, то соотношение вида $\varepsilon\approx\Phi^{-1}(\gamma)\sigma/n^{1/2}$ приближенно вычисляет точность ε при заданной надежности $\gamma\in(0,1)$ и заданном объеме n повторной выборки, где $\Phi(x)$ есть функция Лапласа и $\Phi^{-1}(\cdot)$ — обратная ей функция.

• Пусть при известной дисперсии σ^2 статистическое среднее $\mathrm{M}^*\xi$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ параметра $\mathrm{M}\xi=\theta$, то при заданной надежности $\gamma\in(0,1)$ и точности $\varepsilon>0$ неравенство $n<(\Phi^{-1}(\gamma))^2\sigma^2/\varepsilon^2$ определяет достаточный объем n повторной выборки, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа и $\Phi^{-1}(\cdot)$ — обратная ей функция.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ есть значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается скалярным параметрическим семейством $\wp_\xi=\{F_\xi(x;\theta)\colon \theta\in\Theta\}$ и статистика $\theta_n^*(\xi)$ является оценкой неизвестного параметра θ. Определить ошибочное утверждение.

• Если статистика $(n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-\mathrm{M}^*\xi)^2$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ неизвестного параметра $\mathrm{D}\xi=\theta$, то

$$\gamma\approx\Phi\big(2^{-1/2}(n-1)^{1/2}\varepsilon/\theta^*(\mathbf{x})\big)$$

приближенно определяет функциональную зависимость между надежностью γ, точностью $\varepsilon > 0$ и объемом n повторной выборки $\boldsymbol{\xi}$ такой оценки, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

• Пусть статистика $(n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)^2$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ неизвестного параметра $\mathrm{D}\xi = \theta$. Тогда

$$\gamma = \Phi\big(2^{-1/2}(n-1)^{1/2}\varepsilon/\theta^*(\mathbf{x})\big)$$

определяет доверительную вероятность γ при заданной точности $\varepsilon > 0$ и заданном объеме n повторной выборки такой оценки, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

• Если статистика $(n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)^2$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ неизвестного параметра $\mathrm{D}\xi = \theta$, то $\varepsilon \approx 2^{1/2}\theta^*(\mathbf{x})\Phi^{-1}(\gamma)/(n-1)^{1/2}$ приближенно вычисляет точность ε при заданной надежности $\gamma \in (0,1)$ и заданном объеме n повторной выборки такой оценки, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа и $\Phi^{-1}(\cdot)$ — обратная ей функция.

• Пусть статистика $(n-1)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mathrm{M}^*\xi)^2$ является оценкой $\theta^*(\boldsymbol{\xi})$ неизвестного параметра $\mathrm{D}\xi = \theta$, тогда при заданной надежности $\gamma \in (0,1)$ и точности $\varepsilon > 0$ неравенство $n \geqslant 1 + 2(\theta^*(\mathbf{x})\Phi^{-1}(\gamma))^2/\varepsilon^2$ определяет достаточный объем n повторной выборки этой оценки, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа и $\Phi^{-1}(\cdot)$ — обратная ей функция.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть над случайным экспериментом E проведено n независимых испытаний, случайная величина ξ_i подсчитывает число появлений события A в i-м опыте и вероятность $p = \mathbf{P}(A)$ является неизвестным параметром $\theta \in (0,1)$. Пусть также $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является повторной выборкой, значение которой — вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Определить верные высказывания.

• Если $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ является оценкой $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ параметра $\theta = p$, то соотношение $\gamma \approx \Phi(\varepsilon n^{1/2}(p^*(1-p^*))^{-1/2})$ приближенно определяет функциональную зависимость между надежностью γ, точностью $\varepsilon > 0$ и объемом n повторной выборки $\boldsymbol{\xi}$, где $p^* = \theta_n^*(\mathbf{x})$ и $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

• Пусть $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ является оценкой $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ неизвестного параметра $\theta = p$. Тогда соотношение $\gamma \approx \Phi(\varepsilon n^{1/2}(p^*(1-p^*))^{-1/2})$ приближенно вычисляет доверительную вероятность γ при заданной точности $\varepsilon > 0$ и заданном объеме n повторной выборки, где $p^* = \theta_n^*(\mathbf{x})$ и $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

• Если статистика $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ является оценкой $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ неизвестного параметра $\theta = p$, то соотношение

$$\varepsilon \approx \Phi^{-1}(\gamma)n^{-1/2}(p^*(1-p^*))^{1/2}$$

приближенно вычисляет точность ε при заданной надежности $\gamma \in (0,1)$ и заданном объеме n повторной выборки, где $p^* = \theta_n^*(\mathbf{x})$, $\Phi(x)$ — функция Лапласа и $\Phi^{-1}(\cdot)$ — обратная ей функция.

• Пусть $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ является оценкой $\theta_n^*(\boldsymbol{\xi})$ неизвестного параметра $\theta = p$, тогда при заданной надежности $\gamma \in (0,1)$ и точности $\varepsilon > 0$ неравенство $n < (\Phi^{-1}(\gamma))^2 p^*(1-p^*)/\varepsilon^2$ определяет достаточный объем n повторной выборки, где $p^* = \theta_n^*(\mathbf{x})$, $\Phi(x)$ — функция Лапласа и $\Phi^{-1}(\cdot)$ — обратная ей функция.

8. Тип — проверка ответов.

Проведено 500 независимых испытаний над случайным экспериментом E, в ходе которых исходное событие A появилось 350 раз. Вычислить приближенное значение точности ε для неизвестной вероятности $\mathbf{P}(A)$, если даны следующие значения доверительной вероятности γ: 1) $\gamma = 0{,}9$; 2) $\gamma = 0{,}95$; 3) $\gamma = 0{,}99$.

Ответы:

1) $\varepsilon \approx 0{,}03$;

2) $\varepsilon \approx 0{,}04$;

3) $\varepsilon \approx 0{,}05$.

Лекция 35

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ И КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ. ПРОСТЫЕ ГИПОТЕЗЫ

35.1. Понятие статистической гипотезы

Статистической гипотезой называют любое утверждение о виде или свойствах распределения вероятностей наблюдаемых в эксперименте случайных величин. Пусть, например, эксперимент состоит в многократном измерении некоторой физической величины, точное значение θ которой неизвестно и на протяжении всех замеров остается постоянным. На результат измерения оказывают влияние многие случайные факторы. Это и точность настройки измерительного прибора, и результат округления, и влажность воздуха, и атмосферное давление и т. д. Таким образом, получается, что ошибка измерения складывается из большого числа самых разных ошибок. На основании центральной предельной теоремы можно сделать предположение о том, что результаты каждого из случайных замеров $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют нормальное распределение. Такое предположение является классическим примером статистической гипотезы о виде распределения вероятностей случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Пусть теперь сформулирована та или иная гипотеза H_0. Тогда задача состоит в том, чтобы предложить такое правило, которое позволяло бы по результатам наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принять или отклонить эту гипотезу. Правило, согласно которому проверяемая гипотеза H_0 принимается или отвергается, называется статистическим критерием (или просто критерием, или решающей функцией) проверки гипотезы H_0. Разработка таких правил и их обоснование с точки зрения требований оптимальности и составляет предмет теории проверки статистических гипотез.

Пусть теперь вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. При этом вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается некоторым семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x)\colon\ F_\xi(x)$ — интегральная функция распределения$\}$ из всех ее допустимых интегральных функций распределения $F_\xi(x)$. Гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для величины ξ позволяет выделить из семейства $\wp_\xi$ некоторое его подмножество, которое целесообразно обозначить символом $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\}$. Здесь $\{F_\xi(x|H_0)\}$ — множество всех таких интегральных функций распределения для случайной величины ξ, каждая из которых удовлетворяет требованиям гипотезы H_0. Итак, имеем: $\wp_\xi(H_0) \subset \wp_\xi$. Приведем примеры математических формулировок разного рода статистических гипотез.

Пример гипотезы о виде распределения. Пусть изучается некоторый случайный признак ξ с неизвестной интегральной функцией распределения $F_\xi(x)$. Гипотезой, подлежащей проверке, может быть утверждение H_0, которое состоит в том, что $F_\xi(x)$ совпадает с некоторой известной функцией $F(x)$. В этом случае множество $\wp_\xi(H_0)$ содержит только единственный элемент $F(x)$ и этот факт записывают следующим образом: $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\colon\ F_\xi(x|H_0) = F(x)\}$. Другой вариант гипотезы H_0 может заключаться в том, что интегральная функция распределения $F_\xi(x)$ принадлежит классу $\{F(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$. В этом случае получаем, что множество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\colon$ $F_\xi(x|H_0) = F(x;\theta),\ \theta \in \Theta\} = \{F(x;\theta)\colon\ \theta \in \Theta\}$. Иногда в гипотезе фиксируются какие-то частные свойства функции $F_\xi(x)$. Например, можно сформулировать гипотезу H_0 о том, что интегральная функция $F_\xi(x)$ имеет заданные квантили x_i для заданных уровней вероятностей p_i, т. е. $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\colon\ F_\xi(x_i|H_0) = p_i,$ $i = 1, 2, \ldots, k\}$.

Пример гипотезы об однородности. Проведено k серий независимых наблюдений, результаты которых представляют собой набор $(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,n})$, $i = \overline{1,k}$, из векторов. Можно сформулировать гипотезу H_0 о том, что результаты измерений однородны, т. е. их можно считать значениями одной и той же случайной величины ξ. Для гипотезы однородности множество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\colon\ F_\xi(x|H_0) = F_1(x) = F_2(x) = \ldots$ $\ldots = F_k(x)\}$. Здесь $F_i(x)$ — функция распределения, которая соответствует i-й серии наблюдений. При этом функция $F_i(x)$ в общем случае может быть неизвестной.

Пример гипотезы о независимости. Пусть изучается векторный случайный признак (ξ, η) с неизвестной двухмерной интегральной функцией распределения $F_{\xi,\eta}(x, y)$ и есть основания полагать, что ξ и η независимы. Тогда можно сформулировать задачу проверки статистической гипотезы. По наблюдаемой реализации $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ повторной выборки $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ требуется проверить гипотезу H_0 о независимости компонент ξ и η. В этом случае будем писать, что $\wp_{\xi,\eta}(H_0) = \{F_{\xi,\eta}((x, y)|H_0)\colon F_{\xi,\eta}((x, y)|H_0) = F_\xi(x)F_\eta(y)$, где $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ — одномерные интегральные функции распределения для случайных величин ξ и соответственно η.

Представленные примеры не исчерпывают всех встречающихся на практике ситуаций. Типичным для рассмотренных примеров является то обстоятельство, что формулируется только одна гипотеза H_0 и требуется проверить, согласуются имеющиеся статистические данные с этой гипотезой или же они ее опровергают. Поэтому соответствующие критерии называют критериями согласия. В первом примере гипотеза H_0 однозначно фиксировала распределение вероятностей. Такая гипотеза называется простой. В противном случае гипотеза объявляется сложной. Во всех примерах, кроме первого, рассматривались сложные гипотезы.

35.2. Основные принципы построения критериев согласия

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — реализация повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ представляют собой n независимых копий (клонов) случайной величины ξ. Пусть о распределении вероятностей случайной величины ξ сформулирована некоторая гипотеза H_0. Для построения критерия проверки этой гипотезы поступают следующим образом. Пытаются найти статистику $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$, характеризующую отклонение эмпирических данных от соответствующих гипотезе H_0 гипотетических значений. Пусть найдены такая статистика и ее распределение вероятностей при гипотезе H_0. Пусть $T = \{t\colon t = t^*(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X^n\}$ — множество всех возможных значений статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$. Зафиксируем достаточно малое значение $\alpha > 0$. Определим для выбранного числа α такое множество $T_{\text{кр},\alpha}(H_0) = T_{\text{кр},\alpha} \subset T$, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{P}\big(\{\omega\colon t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T_{\text{кр},\alpha}\}|H_0\big) \leqslant \alpha. \tag{35.1}$$

Тогда правило проверки гипотезы H_0 можно сформулировать следующим образом. Если окажется, что значение статистики $t^*(\mathbf{x}) \in T_{\text{кр},\alpha}$, то делается вывод о том, что в предположении справедливости гипотезы H_0 произошло маловероятное событие. Следовательно, эта гипотеза должна быть отвергнута как противоречащая следующим статистическим данным: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полученным в результате эксперимента. При выполнении противоположного соотношения $t^*(\mathbf{x}) \notin T_{\text{кр},\alpha}$ нет оснований отказываться от принятой гипотезы H_0. В этом случае следует считать, что наблюдения не противоречат гипотезе и согласуются с ней.

Итак, критерий проверки гипотезы H_0 может быть устроен следующим образом. Наблюдаются выборочные значения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и по ним вычисляется значение статистики $t^*(\mathbf{x})$. Если $t^*(\mathbf{x}) \in T_{\text{кр},\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается. При $t^*(\mathbf{x}) \notin T_{\text{кр},\alpha}$ наблюдаемые выборочные значения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не противоречат гипотезе H_0. Заметим, что если данные не противоречат выдвинутой гипотезе, то это не является доказательством истинности этой гипотезы. Данный факт свидетельствует лишь о том, что опытные данные достаточно хорошо согласуются с теоретическими предположениями. При решении подобных задач используется специальная терминология. Статистику $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ называют статистикой критерия. Множество $T_{\text{кр},\alpha} \subset T$ называют критическим множеством или критической областью для гипотезы H_0. Число α в соотношении (35.1) называют вероятностным уровнем значимости критерия, его можно трактовать как вероятность отвержения гипотезы H_0, в случае если она на самом деле верна. Число α также называют ошибкой первого рода. В практических задачах значение вероятностного уровня значимости α выбирают, как правило, равным 0,1, 0,05, 0,01. Итак, получается, что статистический критерий определяется заданием критической области $T_{\text{кр},\alpha} \subset T$, где T — множество всех возможных значений статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$. По своему смыслу критическая область должна включать в себя все маловероятные значения статистики критерия, при условии что гипотеза справедлива. Часто используются области $\{t\colon t = t^*(\mathbf{x}) \geqslant t_\alpha\}$, $\{t\colon t = t^*(\mathbf{x}) \leqslant t_\alpha\}$ или $\{t\colon |t = t^*(\mathbf{x})| \leqslant t_\alpha\}$. Здесь число t_α определяется некоторым образом по заданному вероятностному уровню значимости α. Критическая область во многом определяется целью, для которой строится критерий.

Для проверки одной и той же гипотезы H_0 можно строить различные критерии, используя для этого разные статистики $t^*(\mathbf{x})$. Чтобы выбрать «лучший» критерий, необходим принцип сравнения критериев. Для задания принципа сравнения критериев введем понятие альтернативной гипотезы (или просто альтернативы) и понятие мощности критерия. Любое распределение вероятностей $F_\xi(x)$ наблюдаемой случайной величины ξ, допустимое в данной ситуации, но отличающееся от гипотетического (т. е. распределения, соответствующего основной гипотезе H_0), называют альтернативным распределением. Совокупность всех альтернативных распределений будем обозначать символом $\wp_\xi(H_1) = \{F_\xi(x|H_1)\}$. Множеству $\wp_\xi(H_1) = = \wp_\xi \backslash \wp_\xi(H_0)$ соответствует так называемая альтернативная гипотеза, которая обозначена символом H_1. Предположим, что для проверяемой гипотезы H_0 построен некоторый критерий уровня значимости α, основанный на статистике $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$. Пусть также $T_{\text{кр},\alpha}$ — соответствующая проверяемой гипотезе H_0 критическая область. Величину $W(F_\xi(\cdot)) = W(T_{\text{кр},\alpha}; F_\xi(\cdot))$, обозначающую вероятность попадания значения статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ в критическую область, при условии что истинным распределением наблюдаемой случайной величины ξ является распределение, заданное функцией $F_\xi(x)$, называют функцией мощности критерия. В дальнейшем будем обозначать эту вероятность символом $\mathbf{P}(t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T_{\text{кр},\alpha}|F_\xi(\cdot))$. Таким образом, функция мощности представляет собой некоторый функционал на множестве $\wp_\xi = \{F_\xi(x)\colon F_\xi(x)$ — интегральная функция распределения$\}$ всех допустимых распределений для ξ. Для распределений, соответствующих нулевой гипотезе H_0, значения функции мощности критерия удовлетворяют условию (35.1), которое в новых обозначениях выглядит следующим образом: $W(F_\xi(x)) \leqslant \alpha$ для каждой интегральной функции распределения $F_\xi(x) \in \wp_\xi(H_0)$. В терминах функции мощности можно сказать, что критерий тем лучше, чем больше его мощность при альтернативе. Функция мощности при альтернативе характеризует вероятность принятия верного решения (т. е. это вероятность отвержения гипотезы H_0, если она на самом деле неверна, а верна альтернатива H_1). Другими словами, при альтернативе H_1 вероятность того, что статистика примет значения из множества $T_{\text{кр},\alpha}(H_0)$, должна быть на содержательном уровне большой. Желательным свойством критерия является свойство несмещенности, которое означает, что при заданном уровне значимости α критерия выполняется естественное условие: $W(F_\xi(x)) > \alpha$ для каждой интегральной функции распределения $F_\xi(x) \in \wp_\xi(H_1)$. Иначе говоря, свойство несмещенности критерия означает, что вероятность отвергнуть нулевую гипотезу H_0, когда она истинна, не превышает заданного уровня значимости α. Если гипотеза H_0 ложна, то она отвергается с вероятностью, большей, чем уровень значимости α. Вероятность $\mathbf{P}(t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T_{\text{кр},\alpha}|F_\xi(\cdot)) = 1 - \beta$ при $F_\xi(x)) \in \wp_\xi(H_1)$. Здесь число β называют ошибкой второго рода, т. е. $\beta = \mathbf{P}(t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T\backslash T_{\text{кр},\alpha}|F_\xi(\cdot))$ при каждой интегральной функции $F_\xi(x)) \in \wp_\xi(H_1)$. Итак, величина β представляет собой вероятность отвергнуть гипотезу H_1, когда она верна. Можно также сказать, что ошибкой второго рода является вероятность принять гипотезу H_0, если она неверна.

35.3. Проверка простых гипотез о виде распределения с помощью критерия согласия Колмогорова

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — повторная выборка с неизвестной функцией распределения $F_\xi(x) \in \wp_\xi$ для случайной величины ξ. Пусть выдвинута простая гипотеза H_0, которая состоит в том, что $F_\xi(x)$ совпадает с некоторой известной функцией $F_0(x)$. Тогда множество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\colon F_\xi(x|H_0) = F_0(x)\}$. Критерий согласия Колмогорова применяют только в том случае, когда функция $F_0(x)$ непрерывна. Статистикой критерия согласия является величина $t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} \left|F_n^*(x) - F_0(x)\right|$, которая представляет собой максимальное отклонение эмпирической функции распределения $F_n^*(x)$ от гипотетической $F_0(x)$. Известно, что при каждом значении x значение статистической функции распределения $F_n^*(x)$ является эффективной оценкой соответствующего значения теоретической функции распределения. При увеличении объема выборки n происходит сближение значений статистической и соответствующей теоретической функции распределения. Если выдвинутая гипотеза H_0 справедлива, то теоретической функцией распределения наблюдаемой случайной величины ξ является функция $F_0(x)$. При справедливости выдвинутой гипотезы при достаточно больших значениях n, в силу близости функций $F_0(x)$ и $F_n^*(x)$, значения статистики критерия будут маленькими. Вероятность появления больших значений статистики невелика. Эта вероятность тем меньше, чем больше объем выборки n. Так что если значение статистики $t_n^*(\mathbf{x})$ получилось большим, гипотезу H_0 следует отвергнуть. Поэтому критическую область целесообразно задавать в следующем простом виде: $T_{\text{кр},\alpha} = \{t\colon t = t_n^*(\mathbf{x}) \geqslant t_\alpha\}$. Если гипотеза H_0 верна, то распределение вероятностей статистики $t_n^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ не зависит от функции $F_0(x)$. Порог t_α, с которым сравнивается полученное значение $t_n^*(\mathbf{x})$, определяется уровнем значимости α и распределением статистики критерия, для которого существуют таблицы. Это распределение и критерий носят имя Колмогорова. Вторым замечательным свойством статистики вида $t_n^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ является то, что при больших значениях $n(n \geqslant 20)$ ее распределение практически не зависит также и от n. При $n \geqslant 20$ пороговое значение берут равным $t_\alpha = \lambda_\alpha n^{-1/2}$, где $\mathrm{K}(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-)^k \exp\{-2k^2t^2\}$ и λ_α определяется из условия $\mathrm{K}(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$. На практике вычисление статистики критерия Колмогорова является трудоемкой задачей. Поэтому чаще применяют другой критерий, а именно критерий согласия хи-квадрат К. Пирсона.

35.4. Проверка простых гипотез о виде распределения с помощью критерия согласия хи-квадрат Пирсона

Для использования критерия согласия типа хи-квадрат К. Пирсона множество значений изучаемой случайной величины разбиваем на конечное число r непересекающихся частей $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Выдвигаем гипотезу H_0 о том, что $F_0(x)$ — функция распределения для случайной величины ξ. Затем вычисляем теоретические вероятности $p_j = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x)\big)$, $j = \overline{1,r}$, для элементов $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Далее находим абсолютные частоты $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ попадания выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в каждый из выбранных интервалов $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Каждому B_j принадлежит $\nu_j(\boldsymbol{\xi})$ выборочных значений. При этом имеем равенство $\sum\limits_{j=1}^{r} \nu_j = n$. Если выдвигаемая гипотеза H_0 верна и случайная величина ξ действительно имеет функцию распределения $F_0(x)$, то величины p_j и ν_j/n при больших значениях n получаются, как правило, близкими. Это обусловлено тем, что имеет место сходимость по вероятности относительных частот ν_j/n к вероятностям p_j. А раз так, то величины $|\nu_j/n - p_j|$ при $j = \overline{1,r}$ и достаточно большом значении n будут маленькими с вероятностью, близкой к единице. В случае справедливости выдвигаемой гипотезы H_0 значение суммы $\sum\limits_{j=1}^{r} (\nu_j/n - p_j)^2$ также будет мало.

Для того чтобы было легко определить, какие значения считать маленькими, а какие — большими, К. Пирсон предложил немного видоизменить последнюю статистику, с тем чтобы она имела простое распределение вероятностей, не зависящее от вида функции $F_0(x)$. Он предложил использовать статистику $t_n^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{j=1}^{r} np_j^{-1}(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j)^2$. Для больших объемов n

выборок статистика $t_n^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ в случае справедливости выдвигаемой гипотезы H_0 имеет известное центральное распределение хи-квадрат с $(r-1)$ степенями свободы [5].

При справедливости гипотезы значения статистики $t_n^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ получаются маленькими. Если гипотеза H_0 неверна, то ничего нельзя сказать о близости величин p_j и ν_j/n. Поэтому значения статистики $t_n^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi})$ могут быть и большими. Осталось только определить, какие значения следует считать маленькими, а какие — большими. Для этого выбираем удовлетворяющее нас значение уровня значимости α. Используя математико-статистические таблицы из учебника [9] для функции распределения случайной величины χ^2_{r-1} с $(r-1)$ степенями свободы, находим такое число t_α, что $\mathbf{P}(\chi^2_{r-1}(\boldsymbol{\xi}) < t_\alpha | H_0) = 1-\alpha$. Пусть значение статистики $t_n^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi})$, вычисленное по выборочным значениям $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, получается маленьким, т. е. меньшим, чем пороговое значение t_α. Тогда делаем вывод о том, что экспериментальные данные не противоречат выдвинутой гипотезе. Если значение $t_n^* = t_n^*(\mathbf{x})$ получилось больше, чем порог t_α, то это означает, что наступило событие, вероятность которого при гипотезе H_0 мала и не превосходит α. Значит, скорее всего, выдвинутая гипотеза неверна. Так делаются выводы о согласии наблюдаемых выборочных значений вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с гипотетическим распределением $F_0(x)$.

В заключение дадим некоторые рекомендации по поводу выбора объема выборки и числа интервалов группировки $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Когда критерий хи-квадрат применяется на практике и все ожидаемые частоты $\nu_j \approx np_j \geqslant 10$, то предельное распределение статистики критерия дает пороговое значение t_α с достаточным приближением. Если некоторые из значений $\nu_j \approx \approx np_j < 10$, то обычно бывает целесообразно перед применением критерия объединить маленькие группы, чтобы каждая группа содержала по крайней мере 10 значений выборки. Если наблюдений так мало, что этого сделать нельзя, то пользоваться таблицами распределения хи-квадрат для определения порога t_α не рекомендуется, не рекомендуется также использовать и сам критерий.

Таблицы распределения хи-квадрат приводятся обычно для числа степеней свободы не более 30. Если количество степеней свободы превышает 30, то используют теорему Фишера [8] о том, что случайная величина $\sqrt{2\chi^2_s}$ распределена приблизительно нормально со средним значением $\sqrt{2s-1}$ и дисперсией, равной 1.

Пример 35.1. При $n = 4040$ бросаниях монеты Бюффон получил $\nu_1 = 2048$ выпадений орла и $\nu_2 = n - \nu_1 = 1992$ выпадений решки. Проверим, используя критерий хи-квадрат, совместимы ли эти данные с гипотезой H_0. Здесь гипотеза H_0 состоит в том, что монета была симметричной, т. е. вероятность выпадения орла равна $p_1 = 1/2$ и вероятность выпадения решки равна $p_2 = 1/2$. В данном простом примере $r = 2$. Итак, статистика критерия хи-квадрат примет вид

$$t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{r} np_j^{-1}(\nu_j/n - p_j)^2 = \\ = (np_1)^{-1}(\nu_1 - np_1)^2 + (np_2)^{-1}(\nu_2 - np_2)^2.$$

Теперь легко вычислить ее значение, которое будет равно 0,776. Пусть уровень значимости был выбран $\alpha = 0{,}0652$. По таблицам распределения хи-квадрат с одной степенью свободы находим число $t_\alpha = 3{,}40$ из условия $\mathbf{P}\left(\chi_1^2 \geqslant t_\alpha\right) = \alpha = 0{,}0652$. Согласно критерию хи-квадрат гипотезу о симметричности монеты следует отвергать, если полученное значение статистики критерия 0,776 превышает найденный порог $t_\alpha = 3{,}40$. В нашем случае имеем неравенство $0{,}776 < 3{,}40$. Поэтому выдвинутую гипотезу не отвергаем.

Тестовые вопросы к лекции 35

1. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x)\}$ из всех ее допустимых интегральных функций распределения $F_\xi(x)$. Гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для величины ξ определяет подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\}$ множества $\wp_\xi$. Определить верные высказывания.

• Пусть эксперимент состоит в независимом измерении с ошибкой n раз некоторой физической величины, точное значение которой неизвестно. Тогда предположение о нормальном законе распределения измерения ξ является сложной гипотезой H_0.

• Если изучается некоторый случайный признак ξ с неизвестной интегральной функцией распределения $F_\xi(x)$, то утверждение H_0 о том, что $F_\xi(x)$ совпадает с некоторой известной функцией $F(x)$, является простой гипотезой.

• Пусть изучается некоторый случайный признак ξ с неизвестной интегральной функцией $F_\xi(x)$. Тогда высказывание H_0 о том, что функция распределения $F_\xi(x)$ принадлежит параметрическому классу вида $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\colon F_\xi(x|H_0) = F(x;\theta), \theta \in \Theta\} = \{F(x;\theta)\colon \theta \in \Theta\} \subset \wp_\xi$, является сложной гипотезой.

• Пусть величина ξ_i означает i-е измерение количественного признака эксперимента и проведено независимым образом n наблюдений. Тогда утверждение H_0 о том, что дисперсия суммы случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ равна сумме дисперсий $\mathrm{D}\xi_1$, $\mathrm{D}\xi_2, \ldots, \mathrm{D}\xi_n$, является гипотезой.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x)\}$ из всех ее интегральных функций $F_\xi(x)$. Гипотеза H_0 о свойствах законов распределения для случайной величины ξ определяет подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\}$ множества $\wp_\xi$. Определить ошибочное утверждение.

• Если ξ является случайной величиной, то высказывание H_0 о том, что интегральная функция распределения $F_\xi(x)$ имеет заданные квантили $x_1, x_2, \ldots, x_l$ соответственно для заданных уровней вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_l$, является сложной гипотезой.

• Пусть имеется k независимых серий из независимых повторных случайных выборок $(\xi_{1,m}, \xi_{2,m}, \ldots, \xi_{n,m})$, $m = 1, 2, \ldots, k$, и последовательность $(x_{1,m}, x_{2,m}, \ldots, x_{n,m})$, $m = 1, 2, \ldots, k$, является значением этих выборок. Тогда утверждение H_0 о том, что все наблюдаемые значения порождаются одной случайной величиной ξ, является сложной гипотезой.

• Если векторная последовательность (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$ $\ldots, (x_n, y_n)$ является реализацией повторной случайной векторной выборки вида $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$, то высказывание H_0 о том, что случайные величины ξ и η независимы, будет сложной гипотезой.

• Алгоритм, согласно которому проверяемая гипотеза H_0 принимается или отвергается, не является решающей функцией проверки этой гипотезы.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель величины ξ задается семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x)\}$ из всех ее допустимых интегральных функций $F_\xi(x)$. Гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для ξ определяет подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\}$ множества $\wp_\xi$. Пусть также $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ является статистикой критерия согласия проверки гипотезы H_0. Определить верные высказывания.

• Правило, согласно которому проверяемая гипотеза H_0 принимается или отвергается, является решающей функцией проверки гипотезы.

• Алгоритм, согласно которому проверяемая гипотеза H_0 принимается или отвергается, является статистическим критерием согласия проверки этой гипотезы.

• Способ, согласно которому проверяемая гипотеза H_0 принимается или отвергается, не является статистическим критерием согласия проверки этой гипотезы.

• Пусть $T = \{t\colon\ t = t^*(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X^n\}$ — множество всех возможных значений статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ и критическое множество $T_{\text{кр},\alpha}(H_0) = T_{\text{кр},\alpha} \subset T$ маловероятных значений статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ таково, что для выбранного достаточно малого $\alpha > 0$ условная вероятность $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon\ t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T_{\text{кр},\alpha}|H_0\}\big) \leqslant \alpha$. Тогда при $t^*(\mathbf{x}) \in T_{\text{кр},\alpha}$ выдвинутая гипотеза H_0 отклоняется.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель величины ξ задается семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x)\}$ из всех ее допустимых интегральных функций $F_\xi(x)$. Гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для ξ определяет подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\}$ множества $\wp_\xi$. Пусть также $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ является статистикой критерия согласия проверки гипотезы H_0. Определить ошибочное утверждение.

• Пусть $T = \{t\colon\ t = t^*(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X^n\}$ — множество всех возможных значений статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ и критическое множество $T_{\text{кр},\alpha}(H_0) = T_{\text{кр},\alpha} \subset T$ маловероятных значений статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ таково, что для выбранного достаточно малого числа $\alpha > 0$ условная вероятность $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon\ t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T_{\text{кр},\alpha}|H_0\}\big) \leqslant \alpha$. Тогда при $t^*(\mathbf{x}) \notin T_{\text{кр},\alpha}$ выдвинутая гипотеза H_0 принимается.

• Пусть $T = \{t\colon\ t = t^*(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X^n\}$ — множество всех возможных значений статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ и критическое множество $T_{\text{кр},\alpha}(H_0) = T_{\text{кр},\alpha} \subset T$ маловероятных значений статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ таково, что для выбранной достаточно малой величины $\alpha > 0$ условная вероятность $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon\ t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T_{\text{кр},\alpha}|H_0\}\big) \leqslant \alpha$. Тогда при $t^*(\mathbf{x}) \notin T_{\text{кр},\alpha}$ выдвинутая гипотеза H_0 отклоняется.

• Число α в соотношении $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon\ t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T_{\text{кр},\alpha}|H_0\}\big) \leqslant \alpha$ является вероятностным уровнем значимости критерия.

• Число α в неравенстве $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon\ t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T_{\text{кр},\alpha}|H_0\}\big) \leqslant \alpha$ представляет собой вероятность отвержения гипотезы H_0, в случае если она верна.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x)\}$ из всех ее допустимых интегральных функций $F_\xi(x)$. Гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для ξ определяет подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\}$ множества $\wp_\xi$. Пусть также $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ является статистикой критерия согласия проверки гипотезы H_0. Определить верные высказывания.

• Статистический критерий согласия для гипотезы H_0 определяется заданием статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$, вероятностным уровнем значимости α и критической областью $T_{\text{кр},\alpha} \subset T$, где и $T = \{t\colon\ t = t^*(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X^n\}$.

• Критическая область $T_{\text{кр},\alpha}$ должна включать в себя все маловероятные значения статистики $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ при условии, что гипотеза H_0 справедлива.

• Критическая область должна включать в себя все маловероятные значения статистики критерия согласия при условии, что альтернативная гипотеза H_1 справедлива.

• Область $T \backslash T_{\text{кр},\alpha}$ должна включать в себя все маловероятные значения статистики критерия согласия при условии, что альтернативная гипотеза H_1 справедлива.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель величины ξ задается семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x)\}$ из всех ее допустимых интегральных функций $F_\xi(x)$. Гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для ξ определяет подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\}$ множества $\wp_\xi$. Пусть также $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ является статистикой критерия согласия проверки гипотезы H_0. Определить ошибочное утверждение.

• Условные вероятности $\mathbf{P}(t^*(\boldsymbol{\xi}) \in T_{\text{кр},\alpha}|F_\xi(\cdot))$, $F_\xi(\cdot) \in \wp_\xi$, являются мощностью критерия согласия.

• Мощность критерия согласия — это функционал $W(F_\xi(\cdot)) = W(T_{\text{кр},\alpha}; F_\xi(\cdot))$ на множестве $\wp_\xi$ всех допустимых распределений для случайной величины ξ.

• Если $W(F_\xi(\cdot)) = W(T_{\text{кр},\alpha}; F_\xi(\cdot))$ является мощностью критерия согласия, то имеет место соотношение $W(F_\xi(\cdot)) > \alpha$ для всех $F_\xi(\cdot) \in \wp_\xi(H_0)$.

• Пусть множество $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\colon F_\xi(x|H_0) = F_0(x)\}$, $F_n^*(x)$ — эмпирическая функции распределения для ξ и статистика $t^*(\boldsymbol{\xi}) = t_n^*(\xi) = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |F_n^*(x) - F_0(x)|$. Тогда критическая область $T_{\text{кр},\alpha} = \{t\colon t = t_n^*(\mathbf{x}) \geqslant t_\alpha\}$, где α является вероятностным уровнем значимости критерия, порог $t_\alpha = \lambda_\alpha n^{-1/2}$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-)^k \exp\{-2k^2(\lambda_\alpha)^2\} = 1 - \alpha$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель величины ξ задается семейством $\wp_\xi = \{F_\xi(x)\}$ из всех ее допустимых интегральных функций $F_\xi(x)$. Предположим, что проведено разбиение множества значений величины ξ на r непересекающихся промежутков $B_1, B_2, \ldots, B_r$ и для $j = 1, 2, \ldots, r$ случайная величина $\nu_j(\boldsymbol{\xi})$ подсчитывает число величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые попадают в промежуток с номером j. Гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для ξ определяет подмножество вида $\wp_\xi(H_0) = \{F_\xi(x|H_0)\colon F_\xi(x|H_0) = F_0(x)\} = \{F_0(x)\}$ множества $\wp_\xi$. Пусть также $t^* = t^*(\boldsymbol{\xi})$ является статистикой критерия согласия проверки гипотезы H_0. Определить верные высказывания.

• Имеет место равенство $\sum\limits_{j=1}^{r} \nu_j(\mathbf{x}) = n$.

• Гипотетическая вероятность попадания случайной величины ξ в множество B_j равна условной вероятности $p_j = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x))$, где $j = 1, 2, \ldots, r$.

• Пусть вероятность $p_j = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi} \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x))$, где $j = 1, 2, \ldots, r$ и статистика $t_n^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{j=1}^{r} np_j^{-1}(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j)^2$. Тогда последовательность $t_n^*(\boldsymbol{\xi})$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится слабо к случайной величине типа хи-квадрат с $(r+1)$ степенями свободы.

• Если вероятность $p_j = \mathbf{P}(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x))$, где $j = 1, 2, \ldots, r$, и статистика $t_n^* = t_n^*(\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{j=1}^{r} np_j^{-1}(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j)^2$, то последовательность $t_n^*(\boldsymbol{\xi})$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится по распределению к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-1)$ степенями свободы.

8. Тип — проверка ответов.

Проведено 24 000 независимых испытаний над монетой, в ходе которых орел появился 12012 раз, и проверяется гипотеза о симметрии монеты. Вычислить приближенное значение порога t_α для статистики критерия согласия хи-квадрат, если выбраны следующие значения α ошибок первого рода: 1) $\alpha = 0{,}05$; 2) $\alpha = 0{,}025$; 3) $\alpha = 0{,}01$.

Ответы:

1) $t_\alpha \approx 3{,}8414$;

2) $t_\alpha \approx 5{,}0238$;

3) $t_\alpha \approx 6{,}6349$.

Лекция 36

ПРОВЕРКА СЛОЖНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ И КРИТЕРИИ ЗНАЧИМОСТИ

36.1. Проверка сложных гипотез о виде распределения методом критерия хи-квадрат Пирсона–Фишера

Случай полностью определенного гипотетического распределения встречается на практике крайне редко. Чаще встречаются случаи, когда гипотетическая функция распределения содержит некоторое количество неизвестных параметров. Пусть по повторной выборке $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, значение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ которой пронаблюдали, требуется проверить сложную гипотезу H_0, состоящую в том, что $F_0(x; \boldsymbol{\theta})$ представляет собой функцию распределения наблюдаемых величин ξ и значение параметра $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ неизвестно. Отсюда получаем, что множество $\wp_\xi(H_0) = \{F_0(x; \theta)\colon\ \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k) \in \Theta \subseteq R^k\}$. Как и в предыдущей лекции, разбиваем выборку на конечное число r непересекающихся групп $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Исходя из выдвигаемой гипотезы H_0, состоящей в том, что функция распределения вероятностей полученной выборки есть $F_0(x; \boldsymbol{\theta})$, непосредственно вычисляем гипотетические вероятности $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$, $j = \overline{1, r}$, для элементов разбиения $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Далее вычисляем абсолютные частоты попадания выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в каждый из выделенных промежутков $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Получаем значения $\nu_1(\mathbf{x}), \nu_2(\mathbf{x}), \ldots, \nu_r(\mathbf{x})$ абсолютных частот. Каждому B_j соответствует ν_j выборочных значений. Если бы истинное значение параметра $\boldsymbol{\theta}$ было известно, оставалось бы лишь вычислить

$$t_n^*(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{n}{p_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)} \left(\frac{\nu_j(\boldsymbol{\xi})}{n} - p_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \right)^2$$

и применить критерий, подробно описанный в предыдущей лекции. Однако в нашем случае значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ неизвестны и их нужно оценивать по наблюдаемым выборочным значениям случайной величины ξ с неизвестным законом распределения.

Проблема нахождения предельного распределения для статистики $t_n^*(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\theta})$ при этих усложнениях впервые была рассмотрена Р. Фишером. Он показал, что в этом случае необходимо видоизменить предложенное Пирсоном предельное распределение. Для одного важного класса методов оценивания параметров изменение распределения статистики $t_n^*(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\theta})$ имеет очень простой вид. Необходимо лишь уменьшить число степеней свободы предельного распределения на число параметров, оцениваемых по выборке, т. е. на величину k. Таким образом, получаем, что предельное распределение статистики $t_n^*(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\theta})$ опять же совпадает с распределением хи-квадрат. Однако число степеней свободы уже будет равно $(r-k-1)$. Фишер предлагал использовать оценки по методу минимума хи-квадрат. Такой же результат получается, если используются оценки, полученные методом максимального правдоподобия.

В случае если объем наблюдений достаточно велик, можно поступить иначе. Можно разделить выборку на две части и по одной, большего размера, построить состоятельные оценки неизвестных параметров $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$. Пусть оценочные значения этих параметров, полученные по выборке, равны $\theta_1^0,\theta_2^0,\ldots,\theta_k^0$. Далее по другой части выборки методом хи-квадрат проверяем простую гипотезу о том, что данная выборка принадлежит совокупности с распределением $F_0(x;\theta_1^0,\theta_2^0,\ldots,\theta_k^0)$. При построении оценок методом минимума хи-квадрат вычисляют величины $\theta_1^*(\mathbf{x})$, $\theta_2^*(\mathbf{x}),\ldots,\theta_k^*(\mathbf{x})$, доставляющие минимум по параметрам $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ функции вида

$$t_n^*(\boldsymbol{\theta})=t_n^*(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})=\sum_{j=1}^{r}\frac{n}{p_j(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_\mathrm{k})}\left(\frac{\nu_j(\mathbf{x})}{n}-p_j(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)^2.$$

При этом следует решить относительно $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ систему уравнений:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial t_n^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}=\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\nu_j-np_j}{p_j}+\frac{(\nu_j-np_j)^2}{2np_j^2}\right)\frac{\partial p_j}{\partial\theta_i}=0,\quad i=\overline{1,k}.$$

Данную систему уравнений очень сложно решать даже в простейших случаях. Оценки параметров $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ можно находить [8] как решения более простой системы

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{\nu_j}{p_j}\frac{\partial p_j}{\partial\theta_i}=0,\quad i=\overline{1,k}. \tag{36.1}$$

36.2. Применение метода Пирсона–Фишера для решения задачи Хольмберга

Рассмотрим численный пример с измерениями красных кровяных шариков в 169 отделениях гемацитометра, которые выполнил Н. Хольмберг [8]. Нужно проверить гипотезу о том, что случайное количество ξ красных кровяных шариков в отделении гемацитометра подчиняется распределению Пуассона. Проведено $n = 169$ опытов над случайной величиной ξ, и получена реализация $x_1, x_2, \ldots, x_n$, по которой построена статистическая табл. 36.1.

Таблица 36.1

B_j	Количество ν_j отделений, содержащих число кровяных частиц из группы B_j	np_j	$\dfrac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}$
0–7	17	15,7955	0,0919
8	13	11,4043	0,2233
9	14	15,0930	0,0792
10	15	17,9773	0,4931
11	15	19,4661	1,0247
12	21	19,3217	0,1458
13	18	17,7032	0,0050
14	17	15,0616	0,2495
15	16	11,9599	1,3648
16	9	8,9034	0,0010
17	6	16,3140	0,3282
18–21	8	—	—

В соответствии с описанными правилами группы 17 и 18–21 объединяем таким образом, чтобы каждая группа содержала по крайней мере 9 наблюдений. В результате получим $r = 11$ групп с номерами $1, 2, \ldots, 11$. Группа 11 содержит $6 + 8 = 14$ наблюдений. Вычислим теоретические вероятности для групп $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$. С этой целью для распределения Пуассона и для теоретических вероятностей попадания случайной величины ξ в заданные разряды $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$ введем обозначения

$$p(x;\theta) = \frac{\theta^x}{x!}\,\mathrm{e}^{-\theta}, \quad x = 0, 1, \ldots ;$$

$$p_1 = \sum_{x=0}^{7} \frac{\theta^x}{x!}\,\mathrm{e}^{-\theta}, \quad p_j = \frac{\theta^{j+6}}{(j+6)!}\,\mathrm{e}^{-\theta}, \quad j = 2, 3, \ldots, 10,$$

$$p_{11} = \sum_{x=17}^{\infty} \frac{\theta^x}{x!}\,\mathrm{e}^{-\theta}.$$

Запишем уравнение $\sum\limits_{j=1}^{11} \frac{\nu_j}{p_j}\frac{dp_j}{d\theta} = 0$ для определения значения оценки параметра θ видоизмененным методом минимума хи-квадрат. В результате получаем следующее уравнение:

$$\nu_1 \frac{\sum\limits_{x=0}^{7}\Big(\frac{x}{\theta}-1\Big)p(x;\theta)}{\sum\limits_{x=0}^{7} p(x;\theta)} + \sum_{j=2}^{10}\Big(\frac{j+6}{\theta}-1\Big)\nu_j + {}$$

$$+ \nu_{11}\frac{\sum\limits_{x=17}^{\infty}\Big(\frac{x}{\theta}-1\Big)p(x;\theta)}{\sum\limits_{x=17}^{\infty} p(x;\theta)} = 0.$$

Данное уравнение имеет единственный корень вида

$$\theta^* = \frac{1}{n}\left[\nu_1\frac{\sum\limits_{x=0}^{7} xp(x;\theta)}{\sum\limits_{x=0}^{7} p(x;\theta)} + \sum_{j=2}^{10}(j+6)\nu_j + \nu_{11}\frac{\sum\limits_{x=17}^{\infty} xp(x;\theta)}{\sum\limits_{x=17}^{\infty} p(x;\theta)}\right].$$

В последнем равенстве второй член в квадратных скобках равен сумме всех таких измерений над случайной величиной ξ, каждое из которых принадлежит множеству $\{8, 9, \ldots, 16\}$. Первый член в квадратных скобках приблизительно равен сумме всех таких измерений над случайной величиной ξ, каждое из которых меньше восьми. Наконец, третий член в квадратных скобках приблизительно равен сумме всех таких измерений над случайной величиной ξ, каждое из которых больше шестнадцати. В результате находим $\theta^* = \theta^*(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 11{,}911$. Отсюда значение статистики критерия равно $t_n^*(\mathbf{x};\theta^*) = \sum\limits_{j=1}^{11} \frac{n}{p_j^*}\Big(\frac{\nu_j}{n} - p_j\Big)^2 = 4{,}006$, где

$$p_1^* = \sum_{x=0}^{7} \frac{(\theta^*)^x}{x!}\, \mathrm{e}^{-\theta^*}, \quad p_j^* = \frac{(\theta^*)^{j+6}}{(j+6)!}\, \mathrm{e}^{-\theta^*}, \quad j = 2, 3, \ldots, 10,$$

$$p_{11} = \sum_{x=17}^{\infty} \frac{(\theta^*)^x}{x!}\, \mathrm{e}^{-\theta^*}.$$

Статистика критерия имеет приблизительно χ^2-распределение с девятью степенями свободы. При $\alpha = 0{,}1$ порог $t_\alpha = 14{,}684 > > 4{,}006$. Итак, получаем, что нет оснований для отвержения гипотезы о пуассоновском распределении числа красных кровяных шариков в отделениях гемацитометра.

36.3. Гипотеза независимости двух случайных величин и таблица сопряженности признаков

Пусть реализация случайной выборки

$$\boldsymbol{\xi} = \big((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)\big)$$

равна $\mathbf{x} = \big((x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\big)$. В данном случае повторную выборку $\big((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)\big)$ можно трактовать как n копий двумерной случайной величины (ξ, η). Пусть требуется проверить гипотезу о том, что случайные признаки ξ и η являются независимыми. Для решения этой задачи строим так называемую таблицу сопряженности признаков. Множество наблюдаемых значений случайной величины ξ, т. е. множество вида $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, разбиваем на r групп $B_1, B_2, \ldots, B_r$, где $r < n$. Для этого целесообразно сначала построить по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так называемый статистический ряд, который соответствует случайной величине ξ и приведен в табл. 36.2.

Таблица 36.2

x_1^*	x_2^*	x_3^*	$\cdots$	x_m^*
n_1	n_2	n_3	$\cdots$	n_m

Величины $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$ представляют собой различные значения наблюдаемых элементов выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расположенные в порядке возрастания. Здесь $m \leqslant n$ и при каждом значении $k = 1, 2, \ldots, m$ числа n_k означают количество случаев, когда наблюдалось выборочное значение x_k^*. Для этих чисел выполняется соотношение вида $\sum\limits_{k=1}^{m} n_k = n$. В качестве разрядов $B_1, B_2, \ldots, B_r$ можно выбрать, например, одноточечные разряды, т. е. $r = m$ и $B_1 = \{x_1^*\}$, $B_2 = \{x_2^*\}, \ldots, B_r = \{x_r^*\}$, или можно взять $r < m$, т. е. какие-то одноточечные разряды объединить. Аналогично для наблюдаемых значений случайной величины η, т. е. для множества $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, построим статистический ряд в виде табл. 36.3.

Таблица 36.3

y_1^*	y_2^*	y_3^*	$\cdots$	y_s^*
u_1	u_2	u_3	$\cdots$	u_s

В табл. 36.3 $s \leqslant n$ и при каждом значении $j = 1, 2, \ldots, s$ число u_j означает количество случаев, когда наблюдалось выборочное значение y_j^*. При этом $\sum\limits_{j=1}^{s} u_j = n$. Также выделяем s одноточечных разрядов $C_1 = \{y_1^*\}$, $C_2 = \{y_2^*\}, \ldots, C_s = \{y_s^*\}$. После того как разряды $B_1, B_2, \ldots, B_r$ и $C_1, C_2, \ldots, C_s$ выбраны, возвращаемся к выборочным значениям $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. По этим значениям строим так называемую таблицу сопряженности признаков (табл. 36.4).

Таблица 36.4

Признаки	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	s	Сумма
1	$\nu_{1,1}$	$\nu_{1,2}$	$\cdots$	$\nu_{1,j}$	$\cdots$	$\nu_{1,s}$	$\nu_{1,\cdot}$
2	$\nu_{2,1}$	$\nu_{2,2}$	$\cdots$	$\nu_{2,j}$	$\cdots$	$\nu_{2,s}$	$\nu_{2,\cdot}$
$\cdots$			$\cdots$				$\cdots$
k	$\nu_{k,1}$	$\nu_{k,2}$	$\cdots$	$\nu_{k,j}$	$\cdots$	$\nu_{k,s}$	$\nu_{k,\cdot}$
$\cdots$			$\cdots$				$\cdots$
r	$\nu_{r,1}$	$\nu_{r,2}$	$\cdots$	$\nu_{r,j}$	$\cdots$	$\nu_{r,s}$	$\nu_{r,\cdot}$
Сумма	$\nu_{\cdot,1}$	$\nu_{\cdot,2}$	$\cdots$	$\nu_{\cdot,j}$	$\cdots$	$\nu_{\cdot,s}$	n

С этой целью вычисляем величину $\nu_{k,j}$. Величина $\nu_{k,j}$ означает количество таких элементов (x_i, y_i) из выборки, для которых $x_i \in B_k$, $y_i \in C_j$. Пусть при каждом значении $k = 1, 2, \ldots, r$ величина $\nu_{k,\cdot} = \sum\limits_{j=1}^{s} v_{k,j}$ и при каждом $j = 1, 2, \ldots, s$ величина $\nu_{\cdot,j} = \sum\limits_{k=1}^{r} v_{k,j}$. Далее заносим значения всех величин $\nu_{k,j}$, $\nu_{k,\cdot}$, $\nu_{\cdot,j}$ в приведенную выше табл. 36.4.

36.4. Проверка независимости двух случайных величин с использованием метода критерия хи-квадрат Пирсона–Фишера

Обозначим через $p_{k,j} = \mathbf{P}(\xi \in B_k, \eta \in C_j)$ вероятность того, что значение признака ξ принадлежит k-му разряду B_k и значение признака η принадлежит j-му разряду C_j. Тогда гипотеза о независимости эквивалентна тому, что

$$p_{k,j} = \mathbf{P}(\xi \in B_k, \eta \in C_j) = \mathbf{P}(\xi \in B_k)P(\eta \in C_j)$$

для любых значений $k = 1, 2, \ldots, r$ и $j = 1, 2, \ldots, s$. Введем теперь обозначения $p_{k,\cdot} = \mathbf{P}(\xi \in B_k)$, $p_{\cdot,j} = \mathbf{P}(\eta \in C_j)$, причем для неизвестных вероятностей $p_{k,\cdot}$, $p_{\cdot,j}$ справедливо равенство $\sum\limits_k p_{k,\cdot} = \sum\limits_j p_{\cdot,j} = 1$. Запишем гипотезу о независимости в принятых обозначениях: $p_{k,j} = p_{k,\cdot}p_{\cdot,j}$. В соответствии с принятой гипотезой совместное распределение двух случайных признаков ξ и η содержит $r + s - 2$ неизвестных параметров. Для применения критерия хи-квадрат Пирсона–Фишера составляем статистику

$$t_n^* = t_n^*\big(\boldsymbol{\xi}; p_{1,\cdot}, p_{2,\cdot}, \ldots, p_{(r-1),\cdot}, p_{\cdot,1}, p_{\cdot,2}, \ldots, p_{\cdot,(s-1)}\big) = \\ = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(\nu_{k,j} - np_{k,\cdot}p_{\cdot,j})^2}{np_{k,\cdot}p_{\cdot,j}}.$$

Далее для неизвестных параметров строим оценки методом минимума хи-квадрат. Напомним, что при построении оценок методом минимума хи-квадрат вычисляют числа $p^*_{1,\cdot}$, $p^*_{2,\cdot}, \ldots, p^*_{(r-1),\cdot}$, $p^*_{\cdot,1}$, $p^*_{\cdot,2}, \ldots, p^*_{\cdot,(s-1)}$, которые доставляют минимум функции

$$t_n^* = t_n^*\big(\mathbf{x}; p_{1,\cdot}, p_{2,\cdot}, \ldots, p_{(r-1),\cdot}, p_{\cdot,1}, p_{\cdot,2}, \ldots, p_{\cdot,(s-1)}\big)$$

по $p_{1,\cdot}$, $p_{2,\cdot}, \ldots, p_{(r-1),\cdot}$, $p_{\cdot,1}$, $p_{\cdot,2}, \ldots, p_{\cdot,(s-1)}$. Затем следует решить относительно неизвестных $p_{1,\cdot}$, $p_{2,\cdot}, \ldots, p_{(r-1),\cdot}$, $p_{\cdot,1}$, $p_{\cdot,2}, \ldots, p_{\cdot,(s-1)}$ систему уравнений (36.1), которая в нашем случае примет вид

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\nu_{k,j}}{p_{k,\cdot}} - \frac{\nu_{r,j}}{p_{r,\cdot}}\right) = 0, \quad k = \overline{1, r-1}; \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\nu_{k,j}}{p_{\cdot,j}} - \frac{\nu_{k,s}}{p_{\cdot,s}}\right) = 0, \quad j = \overline{1, s-1}. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид: $p^*_{k,\cdot} = \dfrac{\nu_{k,\cdot}}{n}$, $p^*_{\cdot,j} = \dfrac{\nu_{\cdot,j}}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, s$.

Таким образом, оценками метода минимума хи-квадрат вероятностей $p_{k,\cdot}$, $p_{\cdot,j}$ являются относительные частоты соответствующих случайных событий в серии n независимых испытаний. После подстановки оценок для вероятностей $p_{k,\cdot}$, $p_{\cdot,j}$ выражение t^*_n принимает вид

$$t^*_n = n\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(\nu_{k,j} - n^{-1}\nu_{k,\cdot}\nu_{\cdot,j})^2}{\nu_{k,\cdot}\nu_{\cdot,j}} = n\left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(\nu_{k,j})^2}{\nu_{k,\cdot}\nu_{\cdot,j}} - 1\right). \tag{36.2}$$

Поскольку мы имеем $r \times s$ разрядов и $(r + s - 2)$ параметров, оцениваемых по выборке, предельное распределение для статистики t^*_n имеет количество степеней свободы, равное

$$rs - (r + s - 2) - 1 = (r - 1)(s - 1).$$

Известно, что математическое ожидание случайной величины, имеющей χ^2-распределение, равно количеству степеней свободы данного распределения. В нашем примере статистика критерия t^*_n имеет асимптотическое χ^2-распределение. Известно (Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. С. 480), что математическое ожидание статистики t^*_n при условии справедливости выдвинутой гипотезы равно величине $\mathrm{M}(t^*_n) = \dfrac{n}{n-1}(r - 1)(s - 1)$. Большое значение статистики критерия будет означать, что отклонение от гипотезы о независимости значимо. При заданном уровне значимости α большими значениями считаются такие, которые превысили порог t_α, определяемый из условия вида $\mathbf{P}\left(\chi^2_{(r-1)(s-1)} \geqslant t_\alpha\right) = \alpha$. Если значение статистики t^*_n превысило порог t_α, то гипотезу H_0 о независимости признаков отвергаем. Однако в этом случае ничего нельзя сказать о степени этой зависимости. С другой стороны, величина

$$f^2 = n^{-1}t^*_n = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n^{-1}\nu_{kj} - (n^{-1}\nu_{k\cdot})(n^{-1}\nu_{\cdot j})\right)^2}{(n^{-1}\nu_{k\cdot})(n^{-1}\nu_{\cdot j})}$$

является выборочной характеристикой, соответствующей средней квадратической сопряженности φ^2, определяемой формулой

$$\varphi^2 = \sum_{k=1}^{\mathrm{r}}\sum_{j=1}^{s}\frac{(p_{kj} - p_{k\cdot}p_{\cdot j})^2}{p_{k\cdot}p_{\cdot j}}.$$

Величина φ^2 равна нулю тогда и только тогда, когда изучаемые случайные признаки ξ и η являются независимыми. Кроме того, величина $\varphi^2 \leqslant \min\{r,s\} - 1$. Знак равенства в последнем соотношении достигается тогда и только тогда, когда одна из величин ξ, η есть однозначно определенная функция другой. Таким образом, $0 \leqslant (\min\{r,s\} - 1)^{-1}\varphi^2 \leqslant 1$ и величина $(\min\{r,s\} - 1)^{-1}\varphi^2$ может быть использована как мера зависимости между величинами ξ и η. В частном случае при $r = s = 2$ величина φ^2 есть квадрат коэффициента корреляции. Для статистического аналога данной характеристики получаем

$$0 \leqslant \frac{f^2}{\min\{r,s\} - 1} = \frac{t_n^*}{n(\min\{r,s\} - 1)} \leqslant 1.$$

Верхний предел достигается тогда и только тогда, когда каждая строка или каждый столбец в табл. 10.3 содержат только по одному ненулевому элементу. Следовательно, величину $t_n^*(n\min\{r,s\} - n)^{-1}$ можно считать мерой связности признаков. Рассмотрим теперь пример.

Пример 36.1. По переписи населения 1936 г. из совокупности всех супружеских пар Швеции была изъята выборка в $n = 25263$ пары, вступивших в семейный союз в течение последних пяти лет. В табл. 36.5 приведено распределение годовых доходов и количества детей у супружеских пар в этой выборке. Заметим, что за единицу годового дохода каждой супружеской пары было принято 1000 крон. По формуле (36.2) получаем для статистики $t_n^* = n\sum\limits_{k=0}^{4}\sum\limits_{j=0}^{3}\dfrac{(\nu_{k,j} - n^{-1}\nu_{k,\cdot}\nu_{\cdot,j})^2}{\nu_{k,\cdot}\nu_{\cdot,j}}$ значение 568,5. Эта статистика имеет $(5-1)(4-1) = 12$ степеней свободы. Используя таблицы распределения из [5, 8, 9] для случайной величины χ^2_{12}, находим пороговое значение t_α

Таблица 36.5

Количество детей	Доходы				Сумма
	0–1	1–2	2–3	>3	
0	2 161	3 577	2 184	1 636	9 558
1	2 755	5 081	2 222	1 052	11 110
2	936	1 753	640	306	3 635
3	225	419	96	38	778
$\geqslant 4$	39	98	31	14	182
Сумма	6 116	10 928	5 173	3 016	25 263

из условия $\mathbf{P}(\chi^2_{12} \geqslant t_\alpha) = \alpha$. При $\alpha = 0{,}1$ пороговое значение t_α равно 18,549, при $\alpha = 0{,}05$ пороговое значение t_α равно 21,026, наконец, при $\alpha = 0{,}01$ имеем $t_\alpha = 26{,}217$. Получаем, что отклонение от гипотезы о независимости высоко значимо и изучаемые случайные признаки следует считать зависимыми.

Тестовые вопросы к лекции 36

1. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается некоторым семейством $\wp_\xi = \{F(x)\}$ изо всех ее допустимых функций распределения $F(x)$. Предположим также, что проведено разбиение множества значений случайной величины ξ на r непересекающихся промежутков $B_1, B_2, \ldots, B_r$ и для каждого $j = 1, 2, \ldots, r$ случайная величина $\nu_j(\boldsymbol{\xi})$ подсчитывает число случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые попадают в промежуток с номером j. Сложная гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для случайной величины ξ определяет параметрическое подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_0(x;\theta)\colon\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subseteq R^k\}$ множества $\wp_\xi$. Определить верные высказывания.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная интегральная функция распределения для случайной величины ξ. Тогда при гипотезе H_0 вероятности попадания величины ξ в каждое из выделенных множеств $B_1, B_2, \ldots, B_r$ равны условным вероятностям $\mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$, $j = \overline{1, r}$.

• Если $F_\xi(x)$ — известная интегральная функция распределения для случайной величины ξ, то вероятности попадания случайной величины ξ в каждый из промежутков $B_1, B_2, \ldots, B_r$ соответственно равны вероятностям $\mathbf{P}_\xi(\xi \in B_j)$, $j = \overline{1, r}$.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{r} \nu_j(\mathbf{x}) = n$.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{r} \nu_j(\mathbf{x}) = nr$.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается некоторым семейством $\wp_\xi =$

$= \{F(x)\}$ изо всех ее допустимых функций распределения $F(x)$. Предположим также, что проведено разбиение множества значений случайной величины ξ на r непересекающихся промежутков $B_1, B_2, \ldots, B_r$ и для каждого $j = 1, 2, \ldots, r$ случайная величина $\nu_j(\boldsymbol{\xi})$ подсчитывает число случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые попадают в промежуток с номером j. Сложная гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для случайной величины ξ определяет параметрическое подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_0(x; \boldsymbol{\theta})\colon\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subseteq R^k\}$ множества $\wp_\xi$. Определить ошибочное утверждение.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ. Тогда случайная величина $t_n^*(\boldsymbol{\theta}) = t_n^*(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\theta}) = \sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$ является статистикой критерия согласия проверки гипотезы H_0, где для каждого $j = \overline{1, r}$ условная вероятность $\mathbf{P}\big(\boldsymbol{\xi} \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$ обозначена символом $p_j(\boldsymbol{\theta})$.

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1, r}$, то значения оценок неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ можно находить как решения следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\nu_j(\mathbf{x}) - np_j(\boldsymbol{\theta})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} + \frac{(\nu_j(\mathbf{x}) - np_j(\boldsymbol{\theta}))^2}{2n(p_j(\boldsymbol{\theta}))^2} \right) \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$ для $j = \overline{1, r}$. Тогда значения оценок неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ можно находить как решения следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j(\mathbf{x})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1, r}$, то значения оценок неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ можно находить как решения следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\nu_j(\mathbf{x})-np_j(\boldsymbol{\theta})}{p_j(\boldsymbol{\theta})}+\frac{(\nu_j(\mathbf{x})-np_j(\boldsymbol{\theta}))}{2n(p_j(\boldsymbol{\theta}))}\right)\frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}=0, \quad i=\overline{1,k}.$$

3. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается некоторым семейством $\wp_\xi = \{F(x)\}$ изо всех ее допустимых функций распределения $F(x)$. Предположим также, что проведено разбиение множества значений случайной величины ξ на r непересекающихся промежутков $B_1,B_2,\ldots,B_r$ и для каждого $j=1,2,\ldots,r$ случайная величина $\nu_j(\boldsymbol{\xi})$ подсчитывает число случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, которые попадают в промежуток с номером j. Сложная гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для случайной величины ξ определяет параметрическое подмножество $\wp_\xi(H_0)=\{F_0(x;\boldsymbol{\theta})\colon\ \theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)\in\Theta\subseteq R^k\}$ множества $\wp_\xi$. Определить верные высказывания.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{P}\big(\xi\in B_j|F_\xi(x)=F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j=\overline{1,r}$. Тогда последовательность

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n-p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta}), \quad n=1,2,\ldots,$$

сходится по распределению к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы, где значения оценок неизвестных параметров $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ определяются из решения системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\nu_j(\mathbf{x})-np_j(\boldsymbol{\theta})}{p_j(\boldsymbol{\theta})}+\frac{(\nu_j(\mathbf{x})-np_j(\boldsymbol{\theta}))^2}{2n(p_j(\boldsymbol{\theta}))^2}\right)\frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}=0, \quad i=\overline{1,k}.$$

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{P}\big(\xi\in B_j|F_\xi(x)=F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j=\overline{1,r}$, то последовательность $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n-p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$, $n=1,2,\ldots$, сходится слабо к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенью свободы. При этом значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются из решения системы

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\nu_j(\mathbf{x}) - np_j(\boldsymbol{\theta})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} + \frac{(\nu_j(\mathbf{x}) - np_j(\boldsymbol{\theta}))^2}{2n(p_j(\boldsymbol{\theta}))^2} \right) \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1, r}$ и значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия. Тогда последовательность $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2 / p_j(\boldsymbol{\theta})$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится по распределению к случайной величине типа хи-квадрат с $(r - k - 2)$ степенями свободы.

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$ для $j = \overline{1, r}$ и значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия, то последовательность

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2 / p_j(\boldsymbol{\theta}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

не сходится слабо к случайной величине типа хи-квадрат с $(r - k - 1)$ степенями свободы.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается некоторым семейством $\wp_\xi = \{F(x)\}$ изо всех ее допустимых функций распределения $F(x)$. Предположим также, что проведено разбиение множества значений случайной величины ξ на r непересекающихся промежутков $B_1, B_2, \ldots, B_r$ и для каждого $j = 1, 2, \ldots, r$ случайная величина $\nu_j(\boldsymbol{\xi})$ подсчитывает число случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые попадают в промежуток с номером j. Сложная гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для случайной величины ξ определяет параметрическое подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_0(x; \boldsymbol{\theta})\colon\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subseteq R^k\}$ множества $\wp_\xi$. Определить ошибочное утверждение.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$. Тогда последовательность

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходится по распределению к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы, где значения оценок неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются из решения следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j(\mathbf{x})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$, то последовательность

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходится слабо к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы. При этом значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются из решения

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j(\mathbf{x})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$ и значения неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия. Тогда последовательность вида $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится по распределению к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы.

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$ и значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия, то последовательность $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$, $n = 1, 2, \ldots$, не сходится по распределению к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается некоторым семейством $\wp_\xi = \{F(x)\}$ изо всех ее допустимых функций распределения $F(x)$. Предположим также, что проведено разбиение множества значений случайной величины ξ на r непересекающихся промежутков $B_1, B_2, \ldots, B_r$ и для каждого $j = 1, 2, \ldots, r$ случайная величина $\nu_j(\boldsymbol{\xi})$ подсчитывает число случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые попадают в промежуток с номером j. Сложная гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для случайной величины ξ определяет параметрическое подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_0(x; \boldsymbol{\theta})\colon\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subseteq R^k\}$ множества $\wp_\xi$. Определить верные утверждения.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1, r}$ и значения оценок неизвестных параметров вида $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются из решения системы конечного числа уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\nu_j(\mathbf{x}) - np_j(\boldsymbol{\theta})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} + \frac{(\nu_j(\mathbf{x}) - np_j(\boldsymbol{\theta}))^2}{2n(p_j(\boldsymbol{\theta}))^2} \right) \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Тогда предельное распределение статистики

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2 / p_j(\boldsymbol{\theta})$$

совпадает с распределением хи-квадрат с $(r - k - 1)$ степенями свободы.

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x; \boldsymbol{\theta})\big)$ для $j = \overline{1, r}$, то предельное распределение статистики

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2 / p_j(\boldsymbol{\theta})$$

совпадает с распределением хи-квадрат с $(r - k)$ степенями свободы. При этом значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются из решения системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\nu_j(\mathbf{x}) - np_j(\boldsymbol{\theta})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} + \frac{(\nu_j(\mathbf{x}) - np_j(\boldsymbol{\theta}))^2}{2n(p_j(\boldsymbol{\theta}))^2} \right) \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$ и значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия. Тогда предельное распределение статистики $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с распределением хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы.

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$ и значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия, то предельное распределение статистики $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с распределением хи-квадрат с $(r-k)$ степенями свободы.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается некоторым семейством $\wp_\xi = \{F(x)\}$ изо всех ее допустимых функций распределения $F(x)$. Предположим также, что проведено разбиение множества значений случайной величины ξ на r непересекающихся промежутков $B_1, B_2, \ldots, B_r$ и для каждого $j = 1, 2, \ldots, r$ случайная величина $\nu_j(\boldsymbol{\xi})$ подсчитывает число случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые попадают в промежуток с номером j. Сложная гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для случайной величины ξ определяет параметрическое подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_0(x;\boldsymbol{\theta})\colon\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subseteq R^k\}$ множества $\wp_\xi$. Определить верное высказывание.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$. Тогда предельное распределение статистики $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с распределением хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы, где значения оценок параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются из решения системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j(\mathbf{x})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$, то предельное распределение статистики $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$ не совпадает с распределением хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы. При этом значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются из решения

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j(\mathbf{x})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$ и значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия. Тогда предельное распределение статистики $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с распределением хи-квадрат с $(r-k-2)$ степенями свободы.

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\big(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta})\big)$ для каждого $j = \overline{1,r}$ и значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия, то предельное распределение статистики $\sum\limits_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с распределением хи-квадрат с $(r-1)$ степенями свободы.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение повторной выборки $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и вероятностно-статистическая модель случайной величины ξ задается некоторым семейством $\wp_\xi = \{F(x)\}$ изо всех ее допустимых функций распределения $F(x)$. Предположим также, что проведено разбиение множества значений случайной величины ξ на r непересекающихся промежутков $B_1, B_2, \ldots, B_r$ и для каждого $j = 1, 2, \ldots, r$ случайная величина $\nu_j(\boldsymbol{\xi})$ подсчитывает число случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые попадают в промежуток с номером j. Сложная гипотеза H_0 о предполагаемых свойствах законов распределения для случайной величины ξ определяет параметрическое подмножество $\wp_\xi(H_0) = \{F_0(x;\boldsymbol{\theta})\colon\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subseteq R^k\}$ множества $\wp_\xi$. Определить ошибочные высказывания.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta}))$ для $j = \overline{1,r}$ и значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия. Тогда последовательность

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходится слабо к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы.

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta}))$ для каждого $j = \overline{1,r}$. Тогда последовательность

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

не сходится по распределению к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы, где значения оценок неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются из решения следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j(\mathbf{x})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

• Если $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для случайной величины ξ и $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta}))$ для каждого $j = \overline{1,r}$, то последовательность

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

не сходится слабо к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы. При этом значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются из решения

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j(\mathbf{x})}{p_j(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial p_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

• Пусть $F_\xi(x)$ — неизвестная функция распределения для величины ξ, $p_j(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\xi \in B_j | F_\xi(x) = F_0(x;\boldsymbol{\theta}))$ для $j = \overline{1,r}$ и значения параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ определяются методом максимального правдоподобия. Тогда последовательность

$$\sum_{j=1}^{r} n(\nu_j(\boldsymbol{\xi})/n - p_j(\boldsymbol{\theta}))^2/p_j(\boldsymbol{\theta}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

не сходится по распределению к случайной величине типа хи-квадрат с $(r-k-1)$ степенями свободы.

8. Тип — проверка ответов.

Проведено $n = 61$ независимых наблюдений над случайной величиной ξ, которая определяет число автомобилей в произвольной транспортной пробке на магистрали. При этом зарегистрировано 30 пробок из одной машины, 14 пробок из двух машин, 12 пробок из трех или четырех машин и 5 пробок из пяти или более машин. Проверяется гипотеза о распределении Бартлетта [9] вида $P(\xi = 1) = 1 - \theta_1$, $P(\xi = x) = \theta_1(1-\theta_2)\theta_2^{x-2}$, $x \geqslant 2$. Вычислить методом минимума хи-квадрат приближенные значения параметров θ_1, θ_2 и статистики $t_{61}^*(\xi; \theta^*(\xi))$ критерия согласия хи-квадрат.

Ответы:

1) $\theta_1 \approx 0{,}508$;

2) $\theta_2 \approx 0{,}546$;

3) $t_{61}^*(\mathbf{x}; \theta^*(\mathbf{x})) \approx 0{,}002$.

Часть IV

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Лекция 37

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

37.1. Основные понятия

До этой лекции мы рассматривали статистически устойчивый эксперимент E и его вероятностную модель $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ в случае полностью известных условий проведения эксперимента или семейство $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))\colon\ \mathbf{P}(\cdot) \in \wp\}$ из вероятностно-статистических моделей в случае, когда по меньшей мере не все основные условия проведения статистически устойчивого эксперимента известны. При этом особая роль отводилась изучению свойств случайной величины ξ или свойства случайного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, которые определяли некоторый скалярный количественный признак или соответственно векторный количественный признак эксперимента E. В некоторых случаях, например в схеме независимых испытаний [8, 9], проведение так называемого составного эксперимента E представлялось в виде последовательного выполнения определенного числа n более простых экспериментов $E_0, E_1, \ldots, E_n$. Этот факт условно записываем в виде равенства $E = E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_n$. Однако исследователи таких экспериментов не накладывали ограничений как на время проведения каждого из экспериментов $E_0, E_1, \ldots, E_n$, так и на моменты начала их проведения. Более того, не играл роли также момент повторения составного эксперимента E. Тем самым мы решали проблемы, в которых фактор времени или не играл никакой роли или просто игнорировался. Будем говорить, что такого рода проблемы носят статический характер. В этом случае эксперимент E называется статическим. В 30-е годы двадцатого столетия трудами А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина были заложены математические основы рассмотрения сложнейших эволюционных [8, 9] экспериментов E, каждый из которых представляется в виде произведения $E = E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_i \times E_{i+1} \times \ldots = \prod\limits_{i=0}^{\infty} E_i$ бесконечного числа других экспериментов. При этом важен как момент t_i начала проведения эксперимента E_i с номером i, так и его продолжительность $\Delta_i \leqslant t_{i+1} - t_i$. Можно остановить проведение очередного эксперимента E_i и повторить снова эксперимент E начиная с проведения эксперимента E_0. Здесь важно изучить свойства количественных и других характеристик эксперимента E с течением времени. При этом мы можем интересоваться свойствами характеристик эксперимента E в некоторые выбранные моменты времени, например в моменты t_2, t_3, t_5. Другими словами, мы рассматриваем свойства характеристик как каждого из экспериментов E_2, E_3, E_5, так и составного эксперимента вида $E_2 \times E_3 \times E_5$. Отметим, что условия проведения каждого конкретного эксперимента из последовательности $E_0, E_1, \ldots$ могут совпадать, незначительно отличаться и, наконец, изначально полностью отличаться от условий проведения других экспериментов. На рис. 37.1 на оси времени $0t$ отображены последовательные моменты $t_0, t_1, \ldots$ начала проведения каждого из экспериментов $E_0, E_1, \ldots$

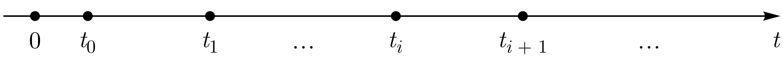


Рис. 37.1

Рассмотрим теперь ряд конкретных примеров реальных эволюционных экспериментов подобного рода.

1. Пусть эксперимент заключается в наполнении определенными порциями водохранилища и в потреблении воды для технических нужд в течение суток в моменты 0, 30, 60 мин, … Пусть величина $\xi(t)$ определяет уровень воды в водохранилище в момент $t = 0, 30, 60, \ldots$ Ясно, что предсказать точное значение $\xi(t)$ не удается, и нам интересно изучить свойства этой величины при изменении $t = 0, 30, 60, \ldots$

2. Мы рассматривали случай, когда моменты начала проведения экспериментов $E_{t_0}, E_{t_1}, \ldots$ совпадали с дискретными моментами времени $t_0, t_1, \ldots$ Не представляет трудности мыслить проведение каждого из экспериментов в некоторый момент времени t из заданного промежутка $[T_0, T_1]$, в этом случае будем такой эволюционный эксперимент E обозначать символом $\prod\limits_{t \in [T_0, T_1]} E_t$.

Итак, пусть эксперимент E заключается в проведении полета самолета по определенному курсу на определенной высоте. Обозначим через $\xi(t)$ отклонение курса полета самолета от заданной высоты в момент $t \in [T_0, T_1]$. Нам интересно знать поведение $\xi(t)$ со временем. До проведения эксперимента точно указать вид отклонения $\xi(t)$ при $t \in [T_0, T_1]$ не удается не только из-за порывов ветра, но и из-за других случайных факторов.

3. Пусть в стеклянной трубке, толщиной которой можно пренебречь, находится питательная среда для размножения бактерий, и первая бактерия появилась в момент T_0. Обозначим через $\boldsymbol{\xi}(t)$ характеристику, которая определяет как количество и тип бактерий, так и положение всех бактерий в трубке относительно левого конца в момент $t \in [T_0, T_1]$.

4. Рассмотрим работу космической станции, в которой нерегулярно выходят из строя элементы и заменяются мгновенно. Пусть $\xi(t)$ фиксирует число замен за время $[0, t]$. Определить точно значения $\xi(t)$ при каждом $t \geqslant 0$ не представляется возможным, так как нельзя предвидеть выход (отказ) каждого из элементов космической станции.

5. Пусть мы наблюдаем погодные явления за окном некоторой фиксированной квартиры с 1 января по 31 декабря ежегодно. Имеется возможность измерять значение $\xi(t)$ температуры в этом временном промежутке. Ясно, что значение $\xi(t)$ температуры за окном не может быть точно предсказано. Нас интересует изменение значения температуры со временем.

37.2. Определение случайного процесса

Предположим, что для некоторого эволюционного эксперимента E построена его вероятностная модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ с описанием $\omega \in \Omega$ элементарных исходов. Если T — некоторое подмножество оси времени $\{t\colon\ -\infty < t < +\infty\}$, то случайным процессом будем называть семейство $\{\xi(t)\colon\ t \in T\}$ случайных элементов, заданных на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, и это семейство зависит от одного параметра $t \in T$. Итак, функциональная зависимость $\xi(\omega, t)$ зависит от двух аргументов: ω и t. Аргумент ω выбирается с помощью случайного механизма $\mathbf{P}(\cdot)$, а аргумент t является неслучайным параметром, который может меняться непрерывно или дискретно и выбирается исследователем. Если фиксируем параметр $t = t_0$ и, например, $\xi(\omega, t_0)$ — случайная величина, то можно определить интегральный закон распределения вида $F(x, t) = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(\omega, t) < x\})$. Если фиксируем $\omega = \omega_0 \in \Omega$, то математический объект $\xi(\omega_0, t)$, $t \in T$, будет заданным отображением, которое называется выборочной функцией или траекторией (реализацией) случайного процесса. Итак, значение случайного процесса $\{\xi(t)\colon\ t \in T\}$ — это функция вида $\xi(\omega_0, t)\colon$ $T \to R$ или, в общем случае, это отображение вида $\xi(\omega_0, t)\colon$

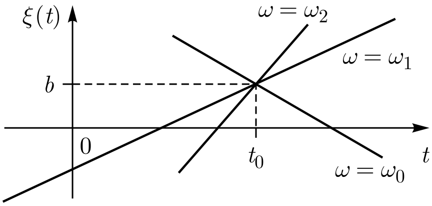


Рис. 37.2

$T \to X$, где X — некоторое заданное пространство. Элементы пространства X называются состояниями случайного процесса или эволюционного эксперимента. Приведем один из простейших примеров так называемого веерного случайного процесса.

Пусть $\xi(\omega, t) = \eta(\omega)(t - t_0) + b$, где $-\infty < t < +\infty$, $t_0 = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$ и $\eta(\omega)$ является одномерной случайной величиной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, которая принимает значение из $R = \{x\colon\ -\infty < x < \infty\}$. Покажем, что $\xi(\omega, t)$ является случайной величиной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ при любом фиксированном $t \in T$. Для этого представим множество $\{\omega\colon\ \eta(\omega)(t - t_0) + b < x\}$ в виде множества $\{\omega\colon \eta(\omega)(t-t_0)<x-b\}$. Отсюда множество $\{\omega\colon \eta(\omega)(t-t_0)+b<x\}$ равно множеству $\{\omega\colon\ \eta(\omega) < (x - b)(t - t_0)^{-1}\} \in \mathcal{F}$ при $t > t_0$, равно множеству $\{\omega\colon\ \eta(\omega) > (x - b)(t - t_0)^{-1}\} \in \mathcal{F}$ при $t < t_0$, равно $\varnothing \in \mathcal{F}$ при $t = t_0$ и $b \geqslant x$ и, наконец, равно $\Omega \in \mathcal{F}$ при $t = t_0$ и $b < x$. Итак, измеримость для отображения $\xi(\omega, t)$ доказана и поэтому $\xi(\omega, t)$ является случайной величиной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ при каждом $-\infty < t < +\infty$. Поэтому семейство $\{\eta(\omega)(t - t_0) + b\colon\ -\infty < t < +\infty\}$ является случайным процессом. Такой случайный процесс и называется веерным случайным процессом. Множеством состояний этого процесса является R. На рис. 37.2 отображены различные траектории этого случайного процесса, которые соответствуют различным значениям $\omega = \omega_0$, ω_1, ω_2.

37.3. Задание случайных процессов и их возможная классификация

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ — основное вероятностное пространство и при каждом $\omega \in \Omega$ и $t \in T$ значение $\xi(\omega, t) \in X$. Здесь X — некоторое множество элементов x, $(X, \Re)$ является измеримым пространством, элементы $\Re$ суть подмножества множества X и $\Re$ является σ-алгеброй. Итак, первый способ задания любого случайного процесса заключается в построении основного вероятностного пространства $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ и в определении при каждом $\omega \in \Omega$ и $t \in T$ отображения $\xi(\omega, t)$: $\Omega \times T \to X$. Более того, при каждом фиксированном значении $t \in T$ имеет место свойство измеримости вида $\{\omega\colon\ \xi(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{F}$ для всех $B \in \in \Re$. Такой способ задания случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ называется поточечным. Будем говорить, что значение $\xi(\omega, t) \in \in X$ — состояние составного эксперимента E в момент t, или состояние эксперимента E_t.

Рассмотрим теперь второй способ задания случайных процессов. Пусть при каждом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$ моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ и множества $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Re$. Тогда можно рассмотреть случайный вектор $\big(\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)\big)$, для которого множество $\{\omega\colon\ \xi(t_1) \in B_1,\ \xi(t_2) \in B_2, \ldots, \xi(t_n) \in \in B_n\} \in \mathcal{F}$. Следовательно, можно определить вероятность вида $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon\ \xi(t_1) \in B_1,\ \xi(t_2) \in B_2, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\}\big)$ для всех $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Re$. В частности, при $X \subset R$ для $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ можно определить многомерную интегральную функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = = \mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \ldots, \xi(t_n) < x_n\})$ для случайного вектора вида $\big(\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)\big)$. Отсюда возникает второй способ задания случайного процесса $\{\xi(t)\colon\ t \in T\}$ с помощью семейства

$$\Big\{\mathbf{P}\big(\{\omega\colon\ \xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\}\big)\colon \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in T; B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Re\Big\}$$

из конечномерных распределений.

Перейдем теперь к возможной классификации случайных процессов. Классификация случайных процессов относится к структуре пространства состояний X, к природе временного пространства T и к различным типам зависимостей между случайными величинами $\xi(t)$, $t \in T$. Если X содержит счетное множество элементов (состояний), например $X = \{0, 1, \ldots\}$ или $X = \{0, 1, \ldots, N\}$, то говорят, что имеем случайный процесс $\{\xi(t)\colon\ t \in T\}$ с дискретным пространством состояний. Если X содержит несчетное множество элементов (состояний), например $X \subset R = \{x\colon\ -\infty < x < +\infty\}$, то имеем процесс с непрерывным пространством состояний. Если T содержит счетное множество элементов (моментов), например $T = \{0, 1, \ldots\}$, то имеем процесс с дискретным временем. Если T содержит несчетное множество элементов (моментов), например $T = = \{t\colon t \geqslant 0\}$, то имеем процесс с непрерывным временем.

Рассмотрим некоторые типы случайных процессов, классифицируя их по признаку зависимости между случайными величинами $\xi(t)$, $t \in T$.

Если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и любых моментов $t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_n$ случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ независимы в совокупности, то процесс называется процессом с независимыми сечениями. В этом случае имеем

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \\
&= \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \ldots, \xi(t_n) < x_n\}) = \\
&= \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(t_1)<x_1\})\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(t_2)<x_2\})\times\ldots\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(t_n)<x_n\}) = \\
&= F_{\xi(t_1)}(x_1) \times F_{\xi(t_2)}(x_2) \times \ldots \times F_{\xi(t_n)}(x_n).
\end{aligned}
$$

Если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и для любых $t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_n$ случайные величины $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, $\xi(t_2) -$ $- \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1}) - \xi(t_n)$ независимы в совокупности, то процесс называется процессом с независимыми приращениями. Отсюда следует соотношение вида

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi(t_0)\in B_0, \xi(t_1)-\xi(t_0)\in B_1, \xi(t_2)-\xi(t_1)\in B_2, \ldots, \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})\in B_n\}\big) &= \\
= \mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi(t_0) \in B_0\}\big) \times \mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi(t_1) - \xi(t_0) \in B_1\}\big) \times& \\
\times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(t_2) - \xi(t_1) \in B_2\}) \times \ldots \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(t_{n-1}) - \xi(t_n) \in B_n\}),&
\end{aligned}
$$

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Re.$$

Если для каждого фиксированного $n = 1, 2, \ldots$, для любого набора моментов времени $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ и любых элементов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ из пространства X имеет место так называемое условие Маркова:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi(t_{n+1}) \in B_n\}|\{\omega\colon \xi(t_0) = a_0, \xi(t_1) = a_1, \ldots, \xi(t_n) = a_n\}\big) &= \\
= \mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi(t_{n+1}) \in B_n\}|\{\omega\colon \xi(t_n) = a_n\}\big),& \\
B_n \in \Re,&
\end{aligned}
$$

то процесс $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ называется марковским.

Тестовые вопросы к лекции 37

1. Тип — множественный выбор.

Пусть E — статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Определить верные высказывания.

• Случайная величина ξ является математической моделью скалярного количественного признака статического эксперимента E.

• Случайная величина ξ не является математической моделью измерителя исходов статического эксперимента E.

• Случайный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является математической моделью системы измерителей исходов статического эксперимента E.

• Упорядочная система $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из случайных величин не является математической моделью векторного количественного признака статического эксперимента E.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть E — статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Определить ошибочное утверждение.

• Схема независимых испытаний Бернулли является статическим экспериментом.

• Общая схема независимых испытаний над некоторым заданным экспериментом не является эволюционным экспериментом.

• Схема независимых испытаний Бернулли является эволюционным экспериментом.

• Пусть составной эксперимент E заключается в последовательном выполнении определенного числа n более простых экспериментов $E_0, E_1, \ldots, E_n$, не накладывая ограничений ни на время проведения каждого из экспериментов $E_0, E_1, \ldots, E_n$, ни на моменты начала их проведения. Тогда E является статическим экспериментом.

3. Тип — множественный выбор.

Пусть E — статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Определить верные высказывания.

• Пусть составной эксперимент E заключается в последовательном выполнении определенного числа n более простых экспериментов $E_0, E_1, \ldots, E_n$ и имеются ограничения как на время проведения каждого из экспериментов $E_0, E_1, \ldots, E_n$, так и на моменты начала их проведения. Тогда E является статическим экспериментом.

• Пусть составной эксперимент E заключается в последовательном выполнении определенного числа n более простых экспериментов $E_0, E_1, \ldots, E_n$ и имеются ограничения как на время проведения каждого из экспериментов $E_0, E_1, \ldots, E_n$, так и на моменты начала их проведения. Тогда E является эволюционным экспериментом.

• Пусть составной эксперимент E заключается в последовательном выполнении бесконечного числа экспериментов $E_0, E_1, \ldots$ и имеются ограничения как на время проведения каждого из экспериментов $E_0, E_1, \ldots$, так и на моменты начала их проведения. Тогда E не является эволюционным экспериментом.

• Пусть составной эксперимент E заключается в последовательном выполнении бесконечного числа экспериментов $E_0, E_1, \ldots$ и имеются ограничения как на время проведения каждого из экспериментов $E_0, E_1, \ldots$, так и на моменты начала их проведения. Тогда E является эволюционным экспериментом.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть E — статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Определить ошибочное утверждение.

• Пусть составной эксперимент E заключается в последовательном выполнении бесконечного числа одного и того же эксперимента E_0 и имеются ограничения на моменты начала его проведения. Тогда E является эволюционным экспериментом.

• Пусть составной эксперимент E заключается в последовательном выполнении бесконечного числа одного и того же эксперимента E_0 и имеются ограничения каждый раз на моменты начала его проведения. Тогда E не является эволюционным экспериментом.

• Пусть составной эксперимент E заключается в последовательном выполнении бесконечного числа экспериментов $E_0, E_1, \ldots$ и имеются ограничения как на время проведения каждого из экспериментов $E_0, E_1, \ldots$, так и на моменты начала их проведения. Можно рассматривать свойства характеристик каждого из экспериментов E_2, E_3, E_5 в отдельности.

• Пусть составной эксперимент E заключается в последовательном выполнении бесконечного числа экспериментов $E_0, E_1, \ldots$ и имеются ограничения как на время проведения каждого из экспериментов $E_0, E_1, \ldots$, так и на моменты начала их проведения. Можно рассматривать свойства характеристик составного эксперимента $E_2 \times E_3 \times E_5$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть E — статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Определить верные утверждения.

• Случайный процесс представляет собой однопараметрическое семейство $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ случайных элементов, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$.

• Случайный процесс представляет собой однопараметрическое семейство $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ случайных элементов, заданных на разных вероятностных пространствах $(\Omega_t,\ \mathcal{F}_t,\ \mathbf{P}_t(\cdot))$, $t \in T$.

• Параметр t для случайного процесса $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ может меняться непрерывно.

• Параметр t для случайного процесса $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ может меняться дискретно.

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть E — статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Определить ложное высказывание.

• Поточечное задание случайного процесса $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ заключается в определении при $\omega \in \Omega$ и $t \in T$ отображения $\xi(\omega, t)\colon \Omega \times T \to X$, где X — пространство состояний составного эксперимента E.

• Если $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ является случайным процессом, то при каждом $t \in T$ имеет место свойство измеримости вида $\{\omega\colon \xi(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{F}$ для всех $B \in \Re$, где σ-алгебра $\Re$ — множество подмножеств множества X.

• Если $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ является случайным процессом, то значение $\xi(\omega, t) \in X$ — состояние составного эксперимента E в момент t или состояние эксперимента E_t.

• Пусть $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ является случайным процессом и $(X, \Re)$ — измеримое пространство его состояний. Тогда семейство $\{\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\})\colon t_1, t_2, \ldots, t_n \in T;\ B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Re\}$, где $n = 1, 2, \ldots$, не является его конечномерным распределением.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть E — статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Определить верные высказывания.

• Случайный процесс $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ может быть дискретным по времени и по пространству.

• Если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и любых моментов $t_1 < t_2 < \ldots \ldots < t_n$ случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ для случайного процесса $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ независимы в совокупности, то процесс называется процессом с независимыми приращениями.

• Случайный процесс $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ может быть дискретным по времени и непрерывным по пространству.

• Если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и для любых $t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_n$ случайные величины $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, $\xi(t_2) -$ $- \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1}) - \xi(t_n)$ для случайного процесса $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ независимы в совокупности, то процесс называется процессом с независимыми сечениями.

8. Тип — проверка ответов.

Пусть случайный процесс $\{\xi(t)\colon -\infty < t < +\infty\}$ задается соотношением $\xi(\omega, t) = \eta(\omega) \sin(bt)$, где $\eta(\omega)$ является одномерной случайной величиной, $\mathrm{M}\eta = a$, $\mathrm{D}\eta = \sigma^2$ и b, a, σ являются постоянными величинами. Вычислить при $-\infty < t,\ t_1,\ t_2 < +\infty$ следующие характеристики этого процесса: 1) $\mathrm{M}(\xi(t))$; 2) $\mathrm{D}(\xi(t))$; 3) $\operatorname{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2))$.

Ответы:

1) $\mathrm{M}(\xi(t)) = a \sin(bt)$;

2) $\mathrm{D}(\xi(t)) = \sigma^2 \sin^2(bt)$;

3) $\operatorname{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = \sigma^2 \sin(bt_1) \sin(bt_2)$.

Лекция 38

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ СОСТОЯНИЙ И С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

38.1. Марковская цепь и ее конструктивное задание

Рассмотрим случайный процесс $\{\xi(t)\colon t \in T\}$ с дискретным пространством состояний и с дискретным временем. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что пространство состояний и пространство из времен начал проведения экспериментов $E_0, E_1, \ldots$ имеют соответственно вид $X = \{0, 1, \ldots\}$ и $T = \{0, 1, \ldots\}$. Для такого случайного процесса целесообразно обозначение символа времени t заменить на n. Более того, случайные величины $\xi(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, являются дискретными. Поэтому будем обозначать каждую случайную величину $\xi(n)$ через ξ_n, а ее значения из множества $X = \{0, 1, \ldots\}$ — символами i, j, a_0, $a_1, \ldots$ Тогда этот случайный процесс можно представить в виде случайной последовательности $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$, а условие марковости можно записать в простом виде

$$\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\} | \{\omega\colon \xi_0 = a_0, \xi_1 = a_1, \ldots, \xi_{n-1} = a_{n-1}, \xi_n = i\}\big) = \\ = \mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\} | \{\omega\colon \xi_n = i\}\big), \quad (38.1)$$

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, i, j \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Такой случайный процесс, для которого выполняется условие марковости (38.1), в дальнейшем будем называть цепью Маркова или схемой Маркова. Если условные вероятности $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\} | \{\omega\colon \xi_n = i\}\big)$ не зависят от n, то схема Маркова называется однородной, а в противном случае — неоднородной. Здесь следует отметить, что схема Маркова является простейшим и вместе с тем очень важным для практики обобщением схемы независимых испытаний [8, 9] на случай, когда условная вероятность $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\} | \{\omega\colon \xi_n = i\}\big) \neq \mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\}\big)$, а значит, эксперименты $E_0, E_1, \ldots$ будут зависимыми. Для однородной схемы Маркова условные вероятности

$$\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\} | \{\omega\colon \xi_n = i\}\big)$$

при $n \geqslant 0$ называются вероятностями перехода от состояния с номером i в n-м испытании в состояние с номером j в $(n+1)$-м испытании. Эти условные вероятности обозначаются через $p_{i,j}$, где $i, j = 0, 1, \ldots$ В дальнейшем вероятности так называемого начального распределения $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_0 = i\})$, $i \geqslant 0$, схемы Маркова будем обозначать символом p_i. Предыдущие рассуждения показывают, что начальные и переходные вероятности схемы Маркова при любых $i, j = 0, 1, \ldots$ удовлетворяют очевидным соотношениям

$$p_i \geqslant 0, \quad p_{i,j} \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1. \tag{38.2}$$

Покажем, что множества $\{p_i\colon i = 0, 1, \ldots\}$, $\{p_{i,j}\colon i, j = 0, 1, \ldots\}$, элементы которых удовлетворяют условиям (38.1) и (38.2), могут быть использованы для определения конечномерных распределений

$$\{\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_0 = i, \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2 \ldots, \xi_n = i_n\})\colon i, i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, \ldots\}$$

схемы Маркова. По теореме умножения, используя соотношения (38.1) и (38.2), при $n \geqslant 1$ получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_0 = i, \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2 \ldots, \xi_n = i_n\}\big) = \\
&\quad = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_0 = i\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1 = i_1\}|\{\omega\colon \xi_0 = i\}) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2 = i_2\}|\{\omega\colon \xi_0 = i, \xi_1 = i_1\}) \times \ldots \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = i_n\}|\{\omega\colon \xi_0 = i, \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2 \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\}) = \\
&\quad = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_0 = i\})\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1 = i_1\}|\{\omega\colon \xi_0 = i\}) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_2 = i_2\}|\{\omega\colon \xi_1 = i_1\}) \times \ldots \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = i_n\}|\{\omega\colon \xi_{n-1} = i_{n-1}\}) = \\
&\quad = p_i \times p_{i,i_1} \times p_{i_1,i_2} \times \ldots \times p_{i_{n-1},i_n}.
\end{aligned}$$

Итак, получаем удобный конструктивный способ определения схемы Маркова с помощью множеств $X = \{0, 1, \ldots\}$, $T = \{0, 1, \ldots\}$, начального распределения $\{p_i\colon\ i = 0, 1, \ldots\}$ и матрицы $\Pi = \|p_{i,j}\|_{i,j=0,1,\ldots}$ из вероятностей перехода за одно испытание. Матрица перехода Π, элементы которой удовлетворяют неравенству $p_{i,j} \geqslant 0$ при каждом $i, j = 0, 1, \ldots$ и равенству $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$ при любом $i = 0, 1, \ldots$ называется стохастической.

38.2. Абсолютные вероятности и уравнение Колмогорова–Чепмена для цепи Маркова

Вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = j\})$ того, что в n-м испытании схемы Маркова наступит состояние с номером j, будем обозначать символом $p_j^{(n)}$. В этом случае полагаем $p_j^{(0)} = p_j$ для всех $j = 0, 1, \ldots$ По формуле полной вероятности имеем

$$p_j^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(0)} p_{i,j},$$
$$p_j^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(1)} p_{i,j}, \ldots, p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(n-1)} p_{i,j}. \tag{38.3}$$

В дальнейшем будем считать известными из курса алгебры основные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матриц, умножение матрицы на число, транспонирование матрицы и взятие предела последовательности матриц. Пусть вектор $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots)$ для каждого $n = 0, 1, \ldots$ Тогда равенства (38.3) можно записать в матричной форме $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi$, $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)} \times \Pi, \ldots, \mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n-1)} \times \Pi$. Выражая эти равенства через начальное распределение $\mathbf{p}^{(0)} = (p_0, p_1, \ldots) = \mathbf{p}$ и матрицу Π, окончательно находим вектор $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi^n = \mathbf{p}\Pi^n$, который называется абсолютным распределением вероятностей схемы Маркова в момент $n = 0, 1, \ldots$ Выясним теперь вероятностный смысл элементов матрицы Π^n при $n = 2, 3, \ldots$

С этой целью при $n = k + r$ рассмотрим условную вероятность вида $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{k+r} = j\} | \{\omega\colon \xi_k = i\}\big)$. Эту вероятность будем называть переходной вероятностью схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании к состоянию с номером j в $(k + r)$-м испытании и обозначать через $p_{i,j}(k, r)$, где $i, j = 0, 1, \ldots$ Методом индукции по r докажем, что для однородной схемы Маркова $p_{i,j}(k, r)$ не зависит от k и является элементом в i-й строчке и j-м столбце r-й степени матрицы Π. Поэтому данную вероятность целесообразно в дальнейшем обозначать через $p_{i,j}(r)$, которая естественно равна $p_{i,j}$ при $r = 1$. Итак, при $r = 2$ по формуле полной вероятности, используя свойства марковости и однородности схемы Маркова, для условной вероятности $p_{i,j}(k, 2) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{k+2} = j\} | \{\omega\colon \xi_k = i\})$ находим

$$\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{k+2} = j\} | \{\omega\colon \xi_k = i\}\big) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{k+1} = m\} | \{\omega\colon \xi_k = i\}\big) \times$$

$$\times \mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+2} = j\}|\{\omega\colon \xi_k = i, \xi_{k+1} = m\}\bigr) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+1} = m\}|\{\omega\colon \xi_k = i\}\bigr) \times$$
$$\times \mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+2} = j\}|\{\omega\colon \xi_{k+1} = m\}\bigr) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{i,m}p_{m,j}.$$

Следовательно, условная вероятность $p_{i,j}(k,2)$ за два шага не зависит от k и равна $p_{i,j}(2)$. Если учесть правило умножения матриц, то легко видеть, что $\|p_{i,j}(2)\|_{i,j=0,1,\dots} = \Pi^2$. Пусть $\|p_{i,j}(r-1)\|_{i,j=0,1,\dots} = \Pi^{r-1}$ — переходная матрица схемы Маркова за $r-1$ шагов. Отсюда с помощью тех же рассуждений для $p_{i,j}(k,r) = \mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+r} = j\}|\{\omega\colon \xi_k = i\}\bigr)$ имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_{k+r} = j\}|\{\omega\colon \xi_k = i\}) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+1} = m\}|\{\omega\colon \xi_k = i\}\bigr) \times$$
$$\times \mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+r} = j\}|\{\omega\colon \xi_k = i, \xi_{k+1} = m\}\bigr) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+1} = m\}|\{\omega\colon \xi_k = i\}\bigr) \times$$
$$\times \mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+r} = j\}|\{\omega\colon \xi_{k+1} = m\}\bigr) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} p_{i,m}\mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+r} = j\}|\{\omega\colon \xi_{k+1} = m\}\bigr) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} p_{i,m}p_{m,j}(r-1) = p_{i,j}(r).$$

Снова получили величину, которая не зависит от k и равна элементу в i-й строчке и j-м столбце матрицы $\Pi \times \Pi^{r-1} = \Pi^r$. Итак, элементы матрицы Π^n совпадают с вероятностями перехода схемы Маркова за n испытаний. Отсюда при $n = k + r$, снова используя правило перемножения матриц, находим: $\Pi^n = \Pi^{k+r} = \Pi^k \times \Pi^r$, или $\|p_{i,j}(k+r)\|_{i,j=0,1,\dots} = \|p_{i,j}(k)\|_{i,j=0,1,\dots} \times \|p_{i,j}(r)\|_{i,j=0,1,\dots}$. Матричная форма последнего равенства позволяет написать для переходных вероятностей $p_{i,j}(n)$ схемы Маркова знаменитое уравнение Колмогорова–Чепмена:

$$p_{i,j}(k+r) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{i,m}(k)p_{m,j}(r).$$

Так как $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}\Pi^n$, то теперь для вероятности $\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = j\})$ того, что в n-м испытании схемы Маркова наступит состояние с номером j, можно записать простую формулу

$$p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n), \quad j = 0, 1, \ldots \tag{38.4}$$

38.3. Эргодическое распределение и стационарные распределения схем Маркова

Вычисление по формуле (38.4) абсолютных вероятностей $p_j^{(n)}$ при любых $j = 0, 1, \ldots$ и больших значениях числа n вызывает значительные трудности. Поэтому важной задачей является исследование поведения вероятностей $p_j^{(n)}$ при неограниченном увеличении n. Для того чтобы глубже и точнее разобраться в асимптотическом поведении вероятностей $p_j^{(n)}$, введем классификацию ее состояний цепи Маркова. В качестве признака классификации выберем возможность перехода системы из состояния в состояние за конечное число шагов.

Назовем любые состояния с номером i и с номером j сообщающимися, если существуют такие целые числа $n_1 \geqslant 0$ и $n_2 \geqslant 0$, что одновременно $p_{i,j}(n_1) > 0$ и $p_{j,i}(n_2) > 0$. Этот факт обозначают символом $i \leftrightarrow j$. По определению полагаем, что $p_{i,j}(0) = 1$ при $i = j$ и $p_{i,j}(0) = 0$ при $i \neq j$, следовательно, всегда имеем $i \leftrightarrow i$. Если два разных состояния с номером i и с номером j не сообщаются, то или $p_{i,j}(n) = 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, или $p_{j,i}(n) = 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, или эти условия выполняются вместе. На содержательном уровне можно утверждать следующее. При сообщаемости состояний с номером i и с номером j цепь Маркова (марковская система) за конечное число шагов попадает из состояния с номером i в состояние с номером j и одновременно состояние с номером i достижимо системой из состояния с номером j также за конечное число шагов.

Состояние с номером i назовем несущественным, если существуют такое состояние с номером j и натуральное число r, что $p_{i,j}(r) > 0$, однако $p_{j,i}(n) = 0$ для каждого $n \geqslant 1$. В этом случае возможен переход (необязательно за один шаг) из состояния с номером i в некоторое состояние с номером j. При этом не допускается возвращение в состояние с номером i. В противном случае состояние назовем существенным.

Периодом $d(i)$ состояния с номером i называется наибольший общий делитель всех натуральных чисел r, для которых $p_{i,i}(r) > 0$. Если $p_{j,j}(r) = 0$ при всех $r \geqslant 1$, то по определению полагаем $d(j) = 0$. Состояние с номером i называется периодическим при $d(i) > 1$ и апериодическим при $d(i) \leqslant 1$.

Пусть любое состояние цепи Маркова может быть достигнуто из любого другого ее состояния и является апериодическим, тогда [1, 11] либо имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = 0$ для каждой упорядочной пары (i, j), либо $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = p_j^* > 0$ для всех $j = 0, 1, \ldots$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j^* = 1$. В этом случае семейство $\{p_j^*;\ j = 0, 1, \ldots\}$ называется эргодическим распределением схемы Маркова. При этом система уравнений вида

$$x_j = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_{i,j}, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{38.5}$$

имеет единственное решение $x_j = p_j^*$, $j = 0, 1, \ldots$

Рассмотрим теперь однородную схему Маркова произвольного типа, для которой система уравнений (38.5) имеет неотрицательное решение $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ и $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i = 1$. Выберем эти числа в качестве начального распределения схемы Маркова, т. е. $p_i = \lambda_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots$ Тогда для всех $j = 0, 1, \ldots$ имеем соотношения

$$p_j^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j} = p_j, \quad p_j^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(1)} p_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j} = p_j, \ldots,$$

$$p_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(n)} p_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j} = p_j.$$

Эти соотношения показывают, что абсолютная вероятность $p_j^{(n)}$ не зависит от номера n испытания. В этом случае схема Маркова называется стационарной. Всякое неотрицательное решение системы (38.5) определяет так называемое стационарное распределение вероятностей цепи Маркова. Если $\lim\limits_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = p_j^* \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j^* = 1$, то семейство $\{p_j^*;$ $j = 0, 1, \ldots\}$ называется предельным распределением схемы Маркова. Так как предельное распределение $\{p_j^*;\ j = 0, 1, \ldots\}$ удовлетворяет системе (38.5), то оно естественно является стационарным. Однако обратное утверждение не всегда имеет место.

Также заметим, что эргодическое распределение $\{p_j^*;\ j = 0, 1, \ldots\}$ всегда является предельным, а обратное утверждение не всегда имеет место. Отметим, что подробное исследование свойств однородных схем Маркова с конечным множеством состояний проведено в учебнике [9]. В частности, было доказано, что однородная цепь Маркова с конечным множеством состояний всегда имеет хотя бы одно стационарное распределение цепей Маркова и сходимость абсолютной вероятности $p_j^{(n)}$ или переходной вероятности $p_{i,j}(n)$ к предельному значению p_j^* происходит с геометрической скоростью. Поэтому приближенное вычисление абсолютных вероятностей $p_j^{(n)}$ и переходной вероятности $p_{i,j}(n)$ при больших значениях числа n может быть найдено на основе различных предельных теорем для схемы Маркова [9].

38.4. Схемы Маркова с точки зрения эволюции реальных систем. Геометрическая интерпретация схемы Маркова

Схема Маркова является хорошей вероятностной моделью многих реальных эволюционных экспериментов $E = \{E_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$. Для этих экспериментов условная вероятность $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\} | \{\omega\colon \xi_n = i\}\big)$ состояния с номером j в $(n+1)$-м испытании однозначно определяется состоянием в n-м испытании и не изменяется от добавочной информации о состояниях в более ранних испытаниях. В этом случае часто используют следующую удобную интерпретацию схемы Маркова. Будем говорить о некоторой физической, технической, биологической, экологической или экономической системе $E = \{E_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$. Система E функционирует во времени и, ради простоты, может находиться в каждый момент времени $t = n$ в одном и только одном из конечного числа состояний с номерами $0, 1, \ldots, N$. Теперь последовательность зависимых испытаний в схеме Маркова можно наглядно представить на плоскости следующим образом. Каждому состоянию с номером i схемы Маркова (системы) поставим во взаимно-однозначное соответствие точку на плоскости с тем же обозначением i. Любой упорядочной паре (i, j) таких точек на плоскости, для которых имеет место неравенство $p_{i,j} > 0$, ставится в соответствие направленная дуга. Эта дуга на плоскости изображается стрелкой, идущей в направлении от точки с меткой i к точке с меткой j. Итак, схема Маркова представляется в виде ориентированного графа на плоскости. Вершинами такого графа являются помеченные точки на плоскости, а ребрами — направленные дуги. Этапы построения ориентированного графа на плоскости продемонстрируем на примере из [9].

Задача о сборе грибов. Пусть имеется большой массив леса, который разбит на участки — кварталы. Всего выделено пять участков. Первый и пятый участки имеют общие границы. Через первый и пятый участки проложена автомобильная дорога. Четвертый участок занимает незначительную по размерам площадь и имеет общие границы с пятым, вторым и третьим. Второй и третий участки составляют большую часть лесного массива, имеют очень непротяженные проходимые границы с четвертым, отделены от первого и пятого непроходимым болотом и расположены внутри этого массива. Представим человека, который был доставлен вертолетом в случайно выбранное место массива леса для сбора грибов. Каждые десять минут, например, по виду деревьев или по шуму автомобилей грибник может определить только номер участка, а не свое точное местонахождение. С помощью исследования некоторой схемы Маркова, адекватно описывающей хождение грибника по лесу, можно предсказать его положение в конце сбора грибов и тем самым решить вопрос о его возвращении домой с помощью вертолета или рейсового автобуса.

Для этой системы в качестве вероятностной модели можно предложить однородную схему Маркова с пятью состояниями, которым удобно приписать номера $1, 2, \ldots, 5$. Пусть для этой модельной задачи матрица вероятностей перехода за один шаг имеет следующий вид:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/18 & 1/18 & 0 & 8/9 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

При этом состояние с номером i схемы Маркова означает, что в конце некоторого десятиминутного промежутка времени грибник проводил сборы на i-м участке. Сделаем несколько пояснений относительно нулевых и ненулевых значений вероятностей перехода за один шаг. Элементы первой и пятой строк матрицы Π показывают, что грибник, попав на первый или пятый участок, перемещается совершенно случайным образом только по этим участкам. Если грибник попал на четвертый участок, то он, скорее всего, перейдет на пятый участок, а не на второй или третий. Такое естественное поведение можно объяснить тем, что грибник желает вернуться домой автобусом и не заблудиться, ориентируясь постоянно по шуму автомобилей на трассе. Первый квартал и незначительный по размерам четвертый участок не имеют общей границы. Поэтому $p_{1,4} = p_{4,1} = p_{4,4} = 0$. Так как второй и третий участки занимают большую площадь, практически не имеют проходимых границ с четвертым и отделены от первого и пятого, то естественно принять

$$p_{1,2} = p_{1,3} = p_{2,1} = p_{2,4} = p_{2,5} = p_{3,1} = p_{3,4} = p_{3,5} = 0.$$

Числовые значения ненулевых элементов матрицы вероятностей перехода за один шаг естественно носят условно-иллюстративный характер и в действительности могут быть найдены только экспериментальным путем. Перейдем теперь непосредственно к построению ориентированного графа, соответствующего рассматриваемой схеме Маркова. Для этого совершенно произвольно выберем пять разных точек на плоскости и пометим их цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Далее согласно всем ненулевым элементам матрицы П проведем направленные дуги, которые соединяют некоторые из помеченных точек. В результате получим ориентированный граф, который изображен на рис. 38.1.

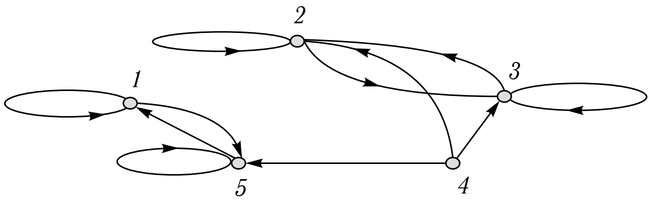


Рис. 38.1

На рисунке имеется особая дуга (петля), которая начинается и заканчивается в точке с меткой единица, так как $p_{1,1} = 1/2 > > 0$. Каждая из точек с метками 2, 3, 5 также по этой причине имеет петлю. Точка с меткой 4 петли не имеет, так как $p_{4,4} = 0$. Естественно, нет направленных дуг, которые соединяют точки с метками 1 и 4, так как $p_{1,4} = p_{4,1} = 0$. Аналогичная ситуация имеет место для остальных нулевых элементов матрицы П. Число ненулевых элементов всегда совпадает с количеством направленных дуг. В нашем случае это число равно 11. Легко проверить выполнение следующих равенств:

$$(1/2, 0, 0, 0, 1/2) \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/18 & 1/18 & 0 & 8/9 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (1/2, 0, 0, 0, 1/2),$$

$$(0, 4/5, 1/5, 0, 0) \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/18 & 1/18 & 0 & 8/9 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (0, 4/5, 1/5, 0, 0),$$

т. е. распределения $(1/2, 0, 0, 0, 1/2)$, $(0, 4/5, 1/5, 0, 0)$ будут стационарными для этой схемы Маркова. Тогда для любого $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\big(\lambda/2, 4(1-\lambda)/5, (1-\lambda)/5, 0, \lambda/2\big) \times \Pi = \\ &= \big\{\lambda \times (1/2, 0, 0, 0, 1/2) + (1-\lambda) \times (0, 4/5, 1/5, 0, 0)\big\} \times \Pi = \\ &= \lambda \times (1/2, 0, 0, 0, 1/2) \times \Pi + (1-\lambda) \times (0, 4/5, 1/5, 0, 0) \times \Pi = \\ &= \lambda \times (1/2, 0, 0, 0, 1/2) + (1-\lambda) \times (0, 4/5, 1/5, 0, 0) = \\ &= \big(\lambda/2, 4(1-\lambda)/5, (1-\lambda)/5, 0, \lambda/2\big). \end{aligned}$$

Поэтому для этой схемы Маркова существует континуум стационарных распределений вида $\big(\lambda/2, 4(1-\lambda)/5,\ (1-\lambda)/5, 0, \lambda/2\big)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Тестовые вопросы к лекции 38

1. Тип — множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ из состояний. Определить верные высказывания.

• Схема независимых испытаний Бернулли является цепью Маркова.

• Схема независимых испытаний Бернулли не является однородной цепью Маркова.

• Если условные вероятности $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1}=j\}|\{\omega\colon \xi_n=i\}\big)$ не зависят от n, то схема Маркова называется однородной.

• Пусть вероятности

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi_{n+1}=j\}|\{\omega\colon\ \xi_0=a_0,\xi_1=a_1,\ldots,\xi_{n-1}=a_{n-1},\xi_n=a_n\})=p_j$$

для всех $n,a_0,a_1,\ldots,a_n,j\in\{0,1,\ldots\}$. Тогда схема Маркова является однородной.

2. Тип — одиночный выбор.

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n;\ n=0,1,\ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X=\{0,1,\ldots\}$ ее состояний. Определить ошибочное утверждение.

• Если дополнительно $\{\xi_n;n=0,1,\ldots\}$ есть последовательность независимых случайных величин и при $n=0,1,\ldots$ случайная величина $\eta_n=\xi_0+\xi_1+\ldots+\xi_n$, то последовательность $\{\eta_n;n=0,1,\ldots\}$ является неоднородной марковской цепью.

• Если дополнительно $\{\xi_n;n=0,1,\ldots\}$ есть последовательность независимых случайных величин и при $n=0,1,\ldots$ случайная величина $\eta_n=\xi_0+\xi_1+\ldots+\xi_n$, то последовательность $\{\eta_n;n=0,1,\ldots\}$ является однородной марковской цепью.

• Пусть условные вероятности $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1}=j\}|\{\omega\colon \xi_n=i\}\big)=$ $=p_{i,j}$ и $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_0=i\}\big)=p_i$ для любых $i,j=0,1,\ldots$ Тогда $p_i\geqslant 0$, $p_{i,j}\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}p_i=1$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_{i,j}=1$.

• Однородная цепь Маркова может быть задана множествами $X=\{0,1,\ldots\}$, $T=\{0,1,\ldots\}$, начальным распределением $\{p_i\colon i=0,1,\ldots\}$ и условными вероятностями перехода за одно испытание следующего вида: $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1}=j\}|\{\omega\colon \xi_n=i\}\big)=p_{i,j}$, $i,j=0,1,\ldots$

3. Тип — множественный выбор.

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n;n=0,1,\ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X=\{0,1,\ldots\}$ состояний. Определить верные высказывания.

• Пусть $p_j^{(n)}=\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n=j\})$ и $\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \xi_{n+1}=j\}|\{\omega\colon \xi_n=i\}\big)=$ $=p_{i,j}$ для всех $n,j,i=0,1,\ldots$ Тогда $p_j^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}p_i^{(n-1)}p_{i,j}$.

• Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = j\})$ и $\mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\}|\{\omega\colon \xi_n = i\}\bigr) = p_{i,j}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $j, i = 0, 1, \ldots$, то $p_j^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i^{(n-1)} p_{i,j}$.

• Пусть $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = j\})$, $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots)$ и условная вероятность $\mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\}|\{\omega\colon \xi_n = i\}\bigr) = p_{i,j}$ для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$ Тогда $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi^n$, где Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова.

• Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = j\})$, $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots)$ и условная вероятность $\mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{n+1} = j\}|\{\omega\colon \xi_n = i\}\bigr) = p_{i,j}$ для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$ Тогда $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi^n$, где Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова.

4. Тип — одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ есть однородная цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ ее состояний. Определить ошибочное утверждение.

• Пусть условная вероятность $\mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+r} = j\}|\{\omega\colon \xi_k = i\}\bigr) = p_{i,j}(k, r)$ при $r = 1, 2, \ldots$, где $k, i, j = 0, 1, \ldots$ Тогда переходная вероятность $p_{i,j}(k, r)$ схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании к состоянию с номером j в $(k + r)$-м испытании не зависит от k и обозначается через $p_{i,j}(r)$.

• Если условная вероятность $\mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+r} = j\}|\{\omega\colon \xi_k = i\}\bigr) = p_{i,j}(k, r)$, где $k, r, i, j = 0, 1, \ldots$, то переходная вероятность $p_{i,j}(k, r)$ схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании к состоянию с номером j в $(k + r)$-м испытании не зависит от k и обозначается через $p_{i,j}(r)$.

• Если условная вероятность $\mathbf{P}\bigl(\{\omega\colon \xi_{k+r} = j\}|\{\omega\colon \xi_k = i\}\bigr) = p_{i,j}(r)$, то имеет место равенство $p_{i,j}(k + r) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} p_{i,m}(k) p_{m,j}(r)$, где $r = 1, 2, \ldots$ и $k, i, j = 0, 1, \ldots$

• Пусть Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова и $p_{i,j}(r)$ — переходная вероятность однородной схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании к состоянию с номером j в $(k + r)$-м испытании. Тогда имеет место соотношение $\Pi^n = \|p_{i,j}(n)\|_{i,j=0,1,\ldots}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

5. Тип — множественный выбор.

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ представляет собой однородную цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ ее состояний. Определить верные утверждения.

• Пусть $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = j\})$, $p_i = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_0 = i\})$ и $p_{i,j}(n)$ — переходная вероятность однородной схемы Маркова за $n \geqslant 1$ шагов от состояния с номером i к состоянию с номером j для всех $i, j = 0, 1, \ldots$ Тогда $p_j^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n)$, $j = 0, 1, \ldots$

• Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = j\})$, $p_i = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_0 = i\})$ и $p_{i,j}(n)$ — переходная вероятность однородной схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i к состоянию с номером j для всех $n, i, j = 0, 1, \ldots$, то $p_j^{(n+1)} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n)$, $j = 0, 1, \ldots$

• Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = j\})$, $p_i = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_0 = i\})$ и $p_{i,j}(n)$ — переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i к состоянию с номером j, то $p_j^{(n+1)} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n+1)$, где для всех $n, i, j = 0, 1, \ldots$

• Пусть выполняются равенства $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_n = j\})$, $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)},\ p_1^{(n)}, \ldots)$, $p_i = \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_0 = i\})$, $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots)$ и $p_{i,j}(n)$ — переходная вероятность схемы Маркова за $n = 1, 2, \ldots$ шагов от состояния с номером i к состоянию с номером j для всех $i, j = 0, 1, \ldots$ Тогда $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}\|p_{i,j}(n)\|_{i,j=0,1,\ldots}$

6. Тип — одиночный выбор.

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ — цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний, для которой $p_{i,j}(n)$ — переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i к состоянию с номером j. Определить справедливое высказывание.

• Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существует такое целое число $n_1 \geqslant 0$, что $p_{i,j}(n_1) > 0$.

• Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существует такое целое число $n_1 \geqslant 0$, что $p_{j,i}(n_1) > 0$.

• Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такие целые числа $n_1 \geqslant 0$ и $n_2 \geqslant 0$, что одновременно $p_{i,j}(n_1) > 0$ и $p_{j,i}(n_2) > 0$.

• Состояние с номером i назовем несущественным, если существуют такое состояние с номером j и натуральное число r, что $p_{i,j}(r) > 0$.

7. Тип — множественный выбор.

Пусть $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ представляет собой цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний, для которой $p_{i,j}(n)$ — переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j. Определить верные утверждения.

• Состояние с номером i назовем несущественным, если существует такое состояние с номером j и натуральное число r, что $p_{i,j}(r) > 0$, однако $p_{j,i}(n) = 0$ для всех $n \geqslant 1$.

• Период $d(i)$ состояния с номером i — наименьшее общее кратное всех натуральных чисел r, для которых $p_{i,i}(r) > 0$.

• Период $d(i)$ состояния с номером i — наибольший общий делитель всех натуральных чисел r, для которых $p_{i,i}(r) > 0$.

• Пусть период $d(i)$ любого состояния с номером i меньше двух и каждое состояние цепи Маркова может быть достигнуто из любого другого ее состояния. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n)$ существует для каждой упорядочной пары (i, j) и не зависит от i.

8. Тип — проверка ответов.

Пусть семейство $\{\xi_n\colon\ n = 0, 1, \ldots\}$ является цепью Маркова, для которой пространство состояний имеет вид $X = \{0, 1, 2\}$ и вероятности перехода за одно испытание равны: $p_{0,0} = p_{0,1} = p_{1,0} = p_{1,1} = 1/2$, $p_{2,0} = 1$, $p_{0,2} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = 0$. Вычислить следующие предельные вероятности: 1) p_0^*; 2) p_1^*; 3) p_2^*.

Ответы:

1) $p_0^* = 1/2$;
2) $p_1^* = 1/2$;
3) $p_2^* = 0$.

Заключение

1. О вероятностно-статистических методах. Большая часть математических представлений о мире и экспериментах носит детерминированный и полудетерминированный характер. В этом случае при проведении эксперимента практически в одних и тех же условиях можно точно предсказать его исход. Так, например, функциональная зависимость $U = a + bP$ температуры U идеального газа от давления P представляет собой суммарный результат соударений всех частиц о стенки резервуара. Здесь a и b — некоторые постоянные, зависящие от вида газа. При этом число таких частиц и их скорости, очевидно, носят стохастический характер. Это приводит к очень малым отклонениям приведенной функциональной зависимости. Эти отклонения пока не регистрируются современными приборами, которыми измеряют давление и температуру. Однако природа в большей степени является стохастической, когда при каждом повторении эксперимента в одних и тех же условиях он может давать различные, но вполне определенные результаты. Такой эксперимент (испытание, система, наблюдение, процесс) называется случайным или стохастическим. Исход случайного эксперимента предсказать невозможно. Например, результатом непреднамеренного подбрасывания симметричной монеты над гладкой поверхностью стола может быть орел или решка. Детерминированные модели полезны. Однако вероятностные модели больше подходят для случайных экспериментов. Можно сказать, что вероятностные модели дают более ясную картину причинных связей между реальными процессами, позволяют найти закономерности природы там, где детерминированный подход оказывается бессильным. Возросший за последнее десятилетие интерес к прикладной теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики объясняется двумя причинами.

1. Увеличением чувствительности современных измерительных, приемных и управляющих устройств, вследствие чего случайные отклонения количественных характеристик таких устройств от их средних значений играют все более существенную роль. Отказ от изучения роли стохастических отклонений

и случайных механизмов часто приводит к авариям атомных реакторов, разрушению мостов, плотин, промышленных сооружений и гражданских зданий, поломкам самолетов и кораблей, транспортным катастрофам, выпуску некачественной и ненадежной продукции, экономическим и природным катаклизмам и т. п.

2. Развитием современных средств микропроцессорной техники, когда появилась реальная возможность хранения, поиска и обработки больших массивов вероятностно-статистической информации о реальных объектах. Например, в теории ошибок разного рода измерений, в молекулярной и статистической физике, в биологии, в рыночной экономике, в телетрафике и системах обслуживания, в процессах адаптивного управления и принятия статистических решений, в управлении конфликтными транспортными потоками на магистралях городов и т. д.

При изложении основ вероятностно-статистических методов прежде всего необходимо сформулировать основной предмет вероятностного моделирования, теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. Перечисленные математические дисциплины, во-первых, предлагают методы построения адекватных моделей реальных статистически устойчивых экспериментов, во-вторых, средствами математики изучают эти модели и тем самым открывают новые фундаментальные закономерности реального мира. Методы построения и изучения вероятностных моделей реальных процессов должны быть отнесены к числу основных общеобразовательных дисциплин, которые определяют современный профессиональный уровень выпускников вузов по различным специальностям. В настоящее время условно можно выделить три общепринятых подхода при подготовке авторами общих курсов, учебников и задачников по указанным дисциплинам.

Первый подход [3, 4] основан на интуитивных представлениях о случайном эксперименте и на интерпретации основных положений теории вероятностей. При таком подходе используется большое число простых модельных экспериментов: бросание монет и игральных костей, игры в карты, выборки шаров из урн, схема независимых испытаний, бросание точек на отрезок, задачи лотерей и рулеток, задачи стрельб и т. д. В этом случае часто полагаются на интуицию, которая сильно зависит от исследователя и может быть неодинаковой. На этом строятся различные парадоксы в теории вероятностей, порождающие сомнения в объективности и полезности результатов этой теории.

Второй и наиболее распространенный подход [1, 6, 7, 11], который называется теоретико-множественным, заключается в широком использовании абстрактной теории вероятностей, теории меры и функционального анализа. При таком подходе формулируются и решаются в основном только такие проблемы, в которых имеется строгая и неоправданная с точки зрения практических задач математическая формализация и почти отсутствуют способы построения вероятностных моделей. Студенты, усвоившие такой курс, как правило, совершенно беспомощны в решении конкретных практических задач.

На кафедре прикладной теории вероятностей Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского накоплен богатый опыт апробирования третьего подхода в преподавании трехсеместрового общего курса по основам вероятностного моделирования, а также по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов [8, 9]. Для построения и изучения свойств вероятностных моделей реальных процессов и явлений стохастического характера в этом подходе минимально и по необходимости используются результаты и приемы абстрактной теории вероятностей, теории меры и функционального анализа. Наряду с вынужденной математической строгостью в программе первой части трехсеместрового курса предусмотрено решение значительного числа прикладных задач на непосредственное построение и изучение вероятностных моделей, которые пробуждают и развивают интуицию вероятностно-статистичекого мировоззрения. Особенно этот подход становится актуальным в наше время, когда эффективное планирование деятельности государственных предприятий, прогнозирование ситуаций частных компаний на финансовых и товарных рынках, проведение избирательных компаний в условиях жесткой конкуренции требуют вероятностно-статистического анализа данных, надежных и обоснованных выводов и прогнозов. Все это предъявляет новые требования к методам и уровню подготовки специалистов в области вероятностного моделирования, прикладной теории вероятностей и математической статистики. При этом основное внимание уделяется проблеме задания и классификации реальных экспериментов, интуитивным понятиям допустимых, элементарных и наблюдаемых исходов, качественным и количественным признакам статистически устойчивых экспериментов, вопросу статистической зависимости и ее математической формализации, методам построения и анализа адекватных стохастических моделей реальных процессов и явлений в условиях неопределенностей.

2. Классический подход к обучению основам теории вероятностей. При классическом подходе большое внимание уделяется примерам, в которых на содержательном уровне можно легко выделить такие объекты и понятия, как: 1) случайное событие, достоверное событие, невозможное событие; 2) противоположные случайные события, несовместные случайные события, благоприятные события по отношению к данному событию, полная группа событий; 3) частота случайного события, равновозможные события, вероятность события, практически достоверное случайное событие, практически невозможное случайное событие, независимые случайные события. К сожалению, при таком подходе список интуитивных понятий непосредственно связан с некоторым множеством традиционно конкретных случайных экспериментов. Однако распространение этого списка понятий на другой класс случайных экспериментов приводит к различным парадоксам. Такая ситуация значительно тормозила дальнейшее развитие и применение теории вероятностей. Чтобы избежать такого рода парадоксов, последователи предлагаемого подхода начинают вводить разного рода аксиомы, определения и доказывают различные утверждения. Приведем примеры такого рода определений: 1) случайным событием называется факт, который может произойти, либо не произойти; 2) два события называются несовместимыми, если они не могут произойти оба вместе; 3) случайное событие A называется независимым от события B, если появление события A не зависит от того, произошло событие B или нет; 4) случайной величиной называется величина, которая может принять то или иное значение.

В связи с такого рода определениями рассмотрим решение следующей задачи. Будет ли дождь 9 мая 2020 года в Нижнем Новгороде? С точки зрения определения (1) такой факт является случайным событием. Однако решение этой задачи не является предметом изучения современной теории вероятностей, так как этот опыт является единичным и его нельзя многократно наблюдать или повторить.

Приведем парадокс Мизеса, который использует определение (2). Некий теннисист может поехать на турнир либо в Москву, либо в Лондон. Причем турниры там происходят одновременно. Вероятность того, что он займет первое место в Москве, равна $p = 1/2$, а в Лондоне — $q = 0{,}3$. Вычислить вероятность того, что он займет где-то первое место. По условию эксперимента событие, которое заключается в том, что теннисист будет играть в Москве, и событие, которое состоит в том, что теннисист поедет в Лондон, являются несовместимыми. По теореме сложения искомая вероятность равна $0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$. Абсурдность такого решения становится очевидной, если взять численные значения для $p = 0{,}75$ и $q = 0{,}85$. Тогда имеем: $p + q = 1{,}6 > 1$. В этом и заключается парадокс Мизеса. Решение этого забавного парадокса дано в [9, с. 162].

При классическом подходе часто полагаются на интуицию. Однако интуиция сильно зависит от субъекта. Приведем для пояснения этого утверждения несколько примеров. На одной карточке с обеих сторон написана буква A. На второй карточке с обеих сторон написана буква B. На третьей карточке с одной стороны написана буква A, а с другой — B. Выбирается наудачу карточка и кладется на стол. На видимой стороне выбранной карточки нарисована буква A. Найти вероятность того, что на другой стороне будет тоже написана буква A. Интуиция почти всегда голосует за вероятность, которая ошибочно считается равной 1/2. Однако эта вероятность равна 2/3, так как случайно выбирается как карточка, так и ее сторона. Поэтому получаем четыре не равновозможных простейших исхода.

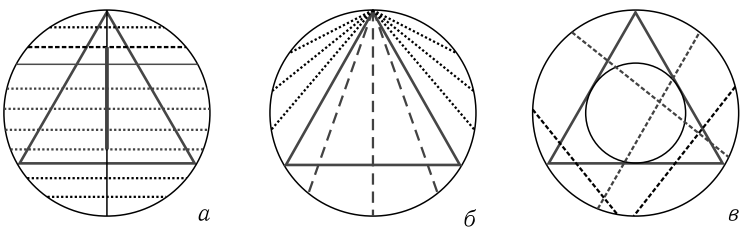
Парадокс любовницы. Некоторый мужчина приходит на остановку такси и бросает симметричную монету. Если к моменту чисто случайного прибытия такси впервые появляются последовательно два орла (комбинация (O, O)), то он навещает мать. Если впервые выпадут последовательно орел и решка (комбинация (O, P)), то он навещает любовницу. Если к моменту прибытия такси указанные комбинации не появляются, то он едет домой. Интуиция говорит о том, что он одинаково часто будет навещать мать и любовницу. На самом деле он существенно чаще навещает любовницу.

Задача Де Мере (1607–1648). Наудачу два раза бросается игральная кость. Найти вероятность появления: 1) суммы очков 9; 2) суммы очков 10. Сумма очков девять может быть получена двумя различными способами: 1) при первом броске выпадает четыре очка, а при втором — пять очков; 2) при первом броске выпадает три очка, а при втором — шесть очков. Сумма очков десять может быть получена также двумя различными способами: 1) при первом броске выпадает четыре очка, а при втором — шесть очков; 2) при первом и втором бросках выпадает пять очков. Равенство числа указанных способов, при которых выпадает сумма очков девять или сумма очков десять, для многих игроков на интуитивном уровне означает, что шансы выигрыша игроков одинаковы. В этой задаче интуиция снова ошибается. В учебнике [9, с. 89] приводится подробное решение как указанных, так и большого числа аналогичных задач.

Парадокс независимости. Бросаются две монеты. Обозначим через A и B выпадение орла на первой и на второй монете соответственно. Пусть C означает появление только одного орла. Независимость A и B интуиция принимает, но независимость A и C, B и C отвергает. Однако в случае симметричных монет интуиция грубо ошибается.

Исследователи при классическом подходе, имея одни и те же данные, приходят к совершенно разным результатам. Типичным примером такой ситуации является следующая задача Бертрана.

Парадокс Бертрана. Наудачу выбирается хорда в круге радиуса R. Найти вероятность того, что ее длина превосходит длину стороны вписанного в этот круг равностороннего треугольника. В этом примере для разных исследователей искомая вероятность равна: или 1/2 (рис. *а*), или 1/3 (рис. *б*), или 1/4 (рис. *в*).



а *б* *в*

В данной задаче интуиция различных исследователей может по-разному реагировать на слова «взятая наудачу хорда». В случае, показанном на рис. *а*, считаем, что хорды, взятые наудачу, всегда параллельны. В этом случае искомая вероятность равна 1/2. В случае, изображенном на рис. *б*, все хорды имеют одну общую точку, лежащую на окружности. Тогда искомая вероятность будет равна 1/3. Если же точки пересечения каждой хорды с окружностью выбираются непреднамеренно, как в случае на рис. *в*, т. е. середина хорды будет произвольной точкой внутри окружности, то в этом случае искомая вероятность равна 1/4. Подробное исследование парадокса Бертрана приведено в учебнике [9, с. 106] при решении задачи о гончарном круге.

Классический подход развивает интуицию при рассмотрении проблем вероятностно-статистического мировоззрения. Однако требуется большая осторожность при изложении основ теории вероятностей. Нельзя допускать преподавателя к чтению лекций по теории вероятностей и математической статистике, если он использует только классический способ, но не освоил аксиоматический подход Колмогорова.

3. Аксиоматический подход Колмогорова к обучению основам теории вероятностей и математической статистики. Существенные недостатки классического подхода привели к созданию в первой половине двадцатого столетия совершенно нового фундаментального подхода, при котором свойства вероятности событий и даже ее вычисление должны определяться исключительно с помощью аксиом и теорем независимо от того, проводится или не проводится так называемый априорный эксперимент. Таким образом, мы приходим к построению абстрактной теории вероятностей, которая должна быть адекватной произвольным изучаемым реальным явлениям случайного типа. Приводится небольшое число аксиом, определений и все утверждения доказываются.

Основным математическим объектом является упорядоченная тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, которая называется основным вероятностным пространством. Здесь Ω — некоторое множество элементов ω, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств из Ω и, наконец, неотрицательная, нормированная и счетно-аддитивная функция $\mathbf{P}(\cdot)$ определена на $\mathcal{F}$. Далее рассматриваются произвольное измеримое пространство $(X, \Re)$ и измеримое отображение $\xi(\omega)$: $\Omega \to X$. Функция $\xi(\omega)$ называется случайным элементом. Рассматривают такие случайные элементы, как случайная величина, случайный вектор, случайный процесс и т. д. Проблемами теории вероятностей являются: 1) изучение фундаментальных свойств функции $\mathbf{P}(\cdot)$: $\mathcal{F} \to [0, \infty)$; 2) вычисление неизвестных вероятностей некоторых событий через известные вероятности других событий; 3) формализация независимости событий и случайных элементов; 4) вычисление распределения случайных элементов и изучение свойств их распределений; 5) изучение таких зависимостей между случайными элементами, как статистическая, корреляционная и функциональная; 6) предельные теоремы и аппроксимация случайных элементов; 7) изучение свойств семейств вероятностных пространств и семейств случайных элементов; 9) задачи математической статистики, теории случайных процессов, теории информации и т. д.

Аксиоматический подход к обучению основам теории вероятностей и математической статистики позволяет понять и разрешить парадоксы, которые часто возникают при решении конкретных задач классическим подходом. Проиллюстрируем этот факт на следующем примере.

Задача Мостеллера. Чтобы подбодрить сына, делающего успехи в теннисе, отец обещает ему приз, если сын выиграет подряд по крайней мере две теннисные партии против своего отца и клубного чемпиона. Чемпион играет лучше отца. Сын выигрывает у чемпиона с вероятностью p и у отца с вероятностью $q > p$. Предполагается, что выигрыши сына независимы в совокупности. Сын имеет право выбрать один из двух вариантов очередности игры: 1) чемпион, затем отец и снова чемпион; 2) отец, затем чемпион и снова отец. Здесь требуется ответить на следующие два вопроса. Во-первых, как вычислить вероятность получения сыном приза? Во-вторых, какой вариант поведения следует выбрать сыну с точки зрения наиболее вероятного получения приза?

Попробуем ответить на первый вопрос, используя классический подход. Пусть случайное событие A заключается в том, что сын получит приз при первом варианте его поведения. Обозначим через A_1, A_2 и A_3 случайные события, которые соответственно означают выигрыш сына сначала у чемпиона, затем выигрыш у отца и, наконец, выигрыш снова у чемпиона. Если теперь случайное событие B означает, что сын получит приз при втором варианте его поведения, то случайные события B_1, B_2 и B_3 состоят в том, что сын выиграл у отца, затем выиграл у чемпиона и в завершение снова выиграл у отца. Тогда для введенных событий имеем соотношения:

$$A = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3), \quad \mathbf{P}(A) = pq + qp - pqp,$$
$$B = (B_1 \cap B_2) \cup (B_2 \cap B_3), \quad \mathbf{P}(B) = qp + pq - qpq.$$

Так как $A \cup B = \varnothing$, то вероятность $\mathbf{P}(A \cup B)$ события $A \cup B$, которое означает получение приза сыном, по теореме сложения равна $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 4pq - pq(p + q)$. Однако при $p = 2/5$, $q = 19/20$ искомая вероятность равна $1{,}007 > 1$. Итак, классический подход, который не учитывает рассмотрение всех событий и вероятностной функции $\mathbf{P}(\cdot)$ на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$, может давать неверные результаты. Здесь при выборе сыном первого варианта необходимо события A, A_1, A_2 и A_3 рассматривать на вероятностном пространстве $(\Omega_1,\ \mathcal{F}_1,\ \mathbf{P}_1(\cdot))$. При выборе сыном второго варианта естественно события B, B_1, B_2 и B_3 рассматривать уже на другом вероятностном пространстве, $(\Omega_2,\ \mathcal{F}_2,\ \mathbf{P}_2(\cdot))$. Так как вероятностные функции $\mathbf{P}_1(\cdot)$, $\mathbf{P}_2(\cdot)$ разные, то аксиоматический подход запрещает использовать теорему сложения. Аналогичным образом можно объяснить известный парадокс Мизеса.

При аксиоматическом подходе получаем, что $\mathbf{P}_1(A) = pq + qp - pqp$ и $\mathbf{P}_2(B) = qp + pq - qpq$. Отсюда имеем: $\mathbf{P}_1(A) > \mathbf{P}_2(B)$ при $q > p$. Значит, для сына оптимальным является первый вариант поведения. С точки зрения интуиции первый вариант представляется ошибочным, так как сыну приходится дважды играть с клубным чемпионом. Далее, для правильного ответа на первый вопрос, который означает определение вероятности получения сыном приза, требуется уточнить эксперимент Мостеллера. Эту задачу мы рассмотрим в четвертом разделе заключения.

Основными недостатками аксиоматического подхода являются: 1) потеря интуитивного представления о шансах наступления событий; 2) невозможность вычисления значений вероятностей событий конкретного случайного эксперимента, так как задается только вероятность $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ достоверного события Ω и вероятность $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$ невозможного события $\varnothing$; 3) применение этого подхода главным образом связано с интерпретацией фундаментальных свойств пространства $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$.

4. Подход на основе построения и изучения адекватных вероятностных моделей реальных случайных экспериментов и явлений. Подход на основе фундаментального понятия статистически устойчивого эксперимента E включает следующие этапы: 1) построение теоретико-множественной модели статистически устойчивых экспериментов; 2) построение общей вероятностной модели; 3) строгое изложение математических основ курса с минимальным использованием аксиоматического подхода Колмогорова, теории меры и функционального анализа; 4) содержательная интерпретация основных положений с целью развития вероятностной интуиции у слушателей на основе подробного решения большого числа конкретных задач. Основными интуитивными понятиями при построении теоретико-множественной модели статистически устойчивых экспериментов являются: 1) эксперимент E, множество $\Sigma = \{u_1, u_2, \ldots\}$ условий $u_1, u_2, \ldots$ его проведения и множество $\Im = \{A, B, C, A_1, A_2, \ldots\}$ всех его исходов $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$; 2) статистически устойчивый эксперимент; 3) элементарный (тестовый, атомарный) исход; 4) пространство $\Im'$ всех элементарных исходов A'.

При построении теоретико-множественной модели статистически устойчивых экспериментов принимаются три аксиомы выбора элементарных исходов и дается описание результатов статистически устойчивого эксперимента. На основе этого строго определяются следующие математические объекты: 1) элементарное случайное событие $\{\omega\}$, для которого выбрано описание или кодировка в виде символа ω; 2) пространство Ω описаний или кодировок всех элементарных исходов; 3) случайное событие $A \subset \Omega$, невозможное событие $\varnothing$ и достоверное событие Ω.

Между этими математическими объектами введены логические и функциональные связи, для которых приведена соответствующая интерпретация в терминах допустимых исходов эксперимента. Функциональные связи реализованы в виде теоретико-множественных операций над случайными событиями, которые удовлетворяют переместительному (коммутативному), сочетательному (ассоциативному), распределительному (дистрибутивному) законам и закону де Моргана. Среди множества $\Im$ допустимых событий выделяется замкнутый относительно теоретико-множественных операций класс, или σ-алгебра, $\mathcal{F} \subset \Im$ так называемых наблюдаемых исходов или случайных событий. Каждому статистически устойчивому эксперименту E поставлена в соответствие упорядоченная пара $(\Omega, \mathcal{F})$ или теоретико-множественная модель. Эта модель изучает свойства эксперимента E с качественной точки зрения и позволяет 1) указать допустимые исходы эксперимента E; 2) выбрать элементарные исходы и определить пространство Ω описаний каждого элементарного исхода; 3) представить каждый допустимый исход A в виде множества из описаний $\omega \in \Omega$ и тем самым называть A случайным событием; 4) определять равные события, соотношения между событиями и находить их интерпретацию через известные исходы эксперимента E; 5) выполнять теоретико-множественные операции над случайными событиями из множества $\Im$, порождать новые события и выяснять, как одни исходы с помощью теоретико-множественных операций выражаются через другие; 6) выделить множество $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов эксперимента E, замкнутое относительно теоретико-множественных операций над случайными событиями A.

Представленная методика построения теоретико-множественной модели $(\Omega, \mathcal{F})$ для статистически устойчивого эксперимента E позволяет количественно измерить интуитивное представление субъекта о возможном наступлении некоторого случайного события A. В подобных случаях вероятности наблюдаемых случайных событий вычисляются исключительно из структуры самого априори заданного эксперимента E и с помощью аксиом и математических утверждений. Как правило, методика вычисления вероятностей рассматривает различные классы экспериментов, которые выделяются с помощью тех или иных ограничений. Итак, вероятность любого события $A \in \mathcal{F}$ и ее общие свойства вводятся с помощью следующего определения.

Определение 1. Вероятностью любого события $A \in \mathcal{F}$ называется некоторое *неотрицательное число* $\mathbf{P}(A)$, которое для любой последовательности $A_1, A_2, \ldots$ попарно непересекающихся случайных событий из $\mathcal{F}$ удовлетворяет *аксиоме счетной аддитивности* вида $\mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$ и *аксиоме нормировки* $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

В этом определении указаны две аксиомы Колмогорова, и приводится также его первая аксиома неотрицательности вероятностной функции $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$. Основным математическим объектом, как и при втором подходе, является упорядоченная тройка $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Однако при третьем подходе обязательно требуется построение адекватной теоретико-множественной модели $(\Omega, \mathcal{F})$. При этом элементарный результат $\{\omega\}$ характеризует эксперимент E с качественной точки зрения. Вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\})$ определяет шанс наступления элементарного исхода $\{\omega\}$. Целесообразность третьего подхода продемонстрируем на задаче Мостеллера.

Чтобы проверить адекватность основных выводов решения задачи Мостеллера с помощью аксиоматического подхода, необходимо практически большое число раз реализовать теннисную игру сына с отцом и чемпионом. Очевидно, что этот эксперимент не представляется легко осуществимым. Поэтому вместо теннисной игры далее рассмотрим совершенно аналогичный эксперимент, который автор этой работы имел возможность многократно проводить при приеме экзаменов по теории вероятностей и математической статистике на различных факультетах Нижегородского университета.

Задача об экзаменах. Студенты сдают экзамен по теории вероятностей и математической статистике, каждый из них должен обязательно ответить по билету только на три вопроса раздельно профессору и ассистенту. Студенты заранее знают, что вопросы первый и третий являются теоретическими, а второй вопрос заключается в решении практической задачи. Студент сдает экзамен, если он два раза подряд положительно отвечает на вопросы. Профессору студент отвечает положительно на любой вопрос с вероятностью p, а ассистенту с вероятностью q. При этом естественно предположить, что студенту легче ответить на вопрос ассистенту, т. е. имеет место неравенство $p < q$. Студенту предлагается выбрать один из двух вариантов поведения в последовательности ответов. Первый вариант поведения заключается в том, что сначала студент отвечает профессору, затем ассистенту и, наконец, снова профессору. При втором варианте поведения на первый вопрос студент отвечает ассистенту, на второй вопрос профессору и на последний вопрос ассистенту. Рассмотрим неформальное решение этой удивительной и поучительной задачи, которое было предложено в работах [9].

На основании решения задачи Мостеллера студентам целесообразно пользоваться первым вариантом поведения. Этот вывод объясняет тем, что если студент не решил практическую задачу, то он в любом случае не сдает экзамен, тем самым подчеркивается важность умения решать практические задачи. Другими словами, соотношение $\mathbf{P}_1(A_2) = q > \mathbf{P}_2(B_2) = p$ имеет большее значение для сдачи экзамена, чем трудности два раза отвечать профессору при первом варианте поведения студента. Более того, полученное решение этой задачи и выводы существенно опирались на факт независимости в совокупности событий A_1, A_2 и A_3 относительно вероятности $\mathbf{P}_1(\cdot)$ и на факт независимости в совокупности событий B_1, B_2 и B_3 относительно вероятности $\mathbf{P}_2(\cdot)$. Однако статистические наблюдения автора этой работы показывают, что студенты, которые в течение 1967–1992 гг. сдавали экзамены, в основном выбирали первый вариант поведения. После 1992 г. студенты все чаще выбирают более разумный на их взгляд второй вариант поведения, так как в этом случае приходится отвечать два раза ассистенту и один раз профессору. Чтобы объяснить такое поведение студентов, необходимо составить адекватную теоретико-множественную модель этого эксперимента.

Обозначим символом $\omega = (v, u_1, u_2, u_3)$, где $v, u_1, u_2, u_3 \in \in \{0, 1\}$, описание произвольного элементарного события $A' = = \{\omega'\}$. Если студент выбрал первый вариант поведения, то $v = 0$, $v = 1$ при втором варианте его поведения. При каждом $i = 1, 2, 3$ равенство $u_i = 0$ означает, что студент положительно отвечает на i-й вопрос, равенство $u_i = 1$ соответствует отрицательному ответу на этот вопрос. Например, $\omega_1 = (0, 0, 0, 0)$ представляет собой описание такого элементарного исхода A_1', когда студент при первом варианте поведения отвечает на все три вопроса. Аналогично, $\omega_{16} = (1, 1, 1, 1)$ — описание такого элементарного исхода A_{16}', когда студент при втором варианте поведения не отвечает на все три вопроса. Итак, в этой задаче $\Omega = \{\omega = (v, u_1, u_2, u_3)\colon v, u_1, u_2, u_3 = 0, 1\} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{16}\}$ и σ-алгебра $\mathcal{F} = \Im = \{A\colon A \subset \Omega\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{65536}\}$, и, тем самым, теоретико-множественная модель этого эксперимента построена. Перейдем теперь к построению вероятностной модели.

Подготовка студента к экзамену и обстановка перед экзаменом навязывают ему на интуитивном уровне случайный выбор первого варианта с вероятностью $r \in [0, 1]$ либо второго варианта с вероятностью $1 - r$. Обозначим через C случайное событие, которое означает выбор студентом первого варианта поведения. Тогда вероятность $\mathbf{P}(C) = r$. При заданном значении $i = 1, 2, 3$ случайное событие C_i наступает, если студент положительно ответил на i-й вопрос. Многочисленные наблюдения показали следующий тип статистической зависимости событий C, C_1, C_2 и C_3:

$$\mathbf{P}(C_1|C) = p, \quad \mathbf{P}(C_1|\overline{C}) = \mathbf{P}(C_3|\overline{C}, C_1, C_2) = q, \tag{1}$$

$$\mathbf{P}(C_2|C, C_1) = q + \varepsilon - \varepsilon/p \geqslant p, \tag{2}$$

$$\mathbf{P}(C_2|C, \overline{C_1}) = \mathbf{P}(C_3|\overline{C}, C_1, \overline{C_2}) = \\ = \mathbf{P}(C_3|\overline{C}, \overline{C_1}, C_2) = \mathbf{P}(C_3|\overline{C}, \overline{C_1}, \overline{C_2}) = q + \varepsilon < 1, \tag{3}$$

$$\mathbf{P}(C_2|\overline{C}, C_1) = \mathbf{P}(C_2|\overline{C}, \overline{C_1}) = \\ = \mathbf{P}(C_3|C, C_1, C_2) = \mathbf{P}(C_3|C, C_1, \overline{C_2}) = \\ = \mathbf{P}(C_3|C, \overline{C_1}, C_2) = \mathbf{P}(C_3|C, \overline{C_1}, \overline{C_2}) = p. \tag{4}$$

Поясним на содержательном уровне ограничения (1)–(4) на условные вероятности, которые формализуют зависимость последовательных ответов студента. Ограничение (1) непосредственно следует из условий задачи Мостеллера. Более того, последнее равенство в соотношении (1) соответствует вполне естественной ситуации, когда ответ студента на третий вопрос не зависит от его положительных ответов на первые два вопроса. Условие (2) показывает, что произошло уменьшение вероятности следующего ответа плохо подготовленного студента ассистенту после удачного предыдущего ответа профессору. Это обстоятельство можно проинтерпретировать тем, что у студента часто появляется некоторое психологическое самомнение после удачного ответа профессору. Соотношение (3) означает увеличение на ε вероятности следующего ответа плохо подготовленного студента ассистенту после неудачного его предыдущего ответа. Этот факт подтверждается большим числом наблюдений, когда слабо подготовленные студенты стараются более внимательно и ответственно отвечать на очередной вопрос при неудовлетворительном предыдущем ответе. С другой стороны, очень часто на экзаменах преподаватели высокой квалификации используют последнюю возможность обучения плохо подготовленных студентов при их неудачных ответах. Таким способом происходит дополнительное обучение студента высококвалифицированным и опытным преподавателем. Наконец, группа ограничений (4) свидетельствует о том, что профессор оценивает студента более строго и в то же время более объективно по сравнению с ассистентом. Другими словами, оценка студента профессором не зависит от удачных или неудачных его предыдущих ответов. С помощью такого простого алгоритма здесь заложена линейная модель обучения плохо подготовленных студентов на экзаменах.

Используя соотношения (1)–(4) легко найти вероятность $\mathbf{P}(A')$ произвольного элементарного события A' и, значит, построить вероятностную модель $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ для данного эксперимента. Например, вероятность $\mathbf{P}(A') = \mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \mathbf{P}(\{(0,0,0,0)\}) = rp(q+\varepsilon-\varepsilon/p)p$ и вероятность $\mathbf{P}(A'_{16}) = \mathbf{P}(\{\omega_{16}\}) = \mathbf{P}(\{(1,1,1,1)\}) = (1-r)(1-q)(1-p)(1-q-\varepsilon)$. Пусть теперь случайное событие $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{13}\}$ из $\mathcal{F}$ означает, что студент сдал экзамен. Напомним, что $\omega_1 = (0,0,0,0)$, $\omega_2 = (0,0,0,1)$, $\omega_5 = (0,1,0,0)$, $\omega_9 = (1,0,0,0)$, $\omega_{10} = (1,0,0,1)$, $\omega_{13} = (1,1,0,0)$. Тогда вероятность $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{\omega_1) + \mathbf{P}(\{\omega_2\}) + \mathbf{P}(\{\omega_5\}) + \mathbf{P}(\{\omega_9\}) + \mathbf{P}(\{\omega_{10}\}) + \mathbf{P}(\{\omega_{13}\}) = r\big[pq(q-p) - \varepsilon(1+p_2-p-pq)\big] + qp(2-q) + p\varepsilon(1-q)$. Математическая формулировка задачи оптимизации для этого эксперимента заключается в определении такого значения $r = r' \in [0,1]$, для которого вероятность $\mathbf{P}(A)$ принимает наибольшее значение.

При определении оптимальной стратегии выбора последовательности ответов в задаче об экзаменах с обучением необходимо прежде всего учитывать естественные ограничения $0 < p$, $q < 1$, $q > p$, $\varepsilon \geqslant 0$, $q+\varepsilon < 1$, $q+\varepsilon-\varepsilon/p \geqslant p$ на параметры p и q, которые определяют уровень подготовки студента, и на параметр обучения ε. Рассмотрим всевозможные случаи изменения параметров p, q и ε в пределах указанных ограничений.

1. Пусть выполняется соотношение $q \geqslant (p-0{,}5)^2 + 0{,}75$. Тогда имеем

$$1-q \leqslant p(q-p)(1-p)^{-1} \leqslant pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1}.$$

Если $0 \leqslant \varepsilon < 1-q$, то

$$q+\varepsilon-\varepsilon/p > p \quad \text{и} \quad pq(q-p) - \varepsilon(1+p^2-p-pq) > 0.$$

Так как вероятность $\mathbf{P}(A) = r\big[pq(q-p) - \varepsilon(1+p^2-p-pq)\big] + qp(2-q) + p\varepsilon(1-q)$, то $r' = 1$.

2. Если $q<(p-0{,}5)^2+0{,}75$, то $pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1} < p(q-p)(1-p)^{-1} < 1-q$. Здесь следует выделить три возможности, которые определяются значениями параметра обучения ε.

— Пусть $0 \leqslant \varepsilon < pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1}$, тогда выполняются неравенства $pq(q-p)-\varepsilon(1+p^2-p-pq)>0$ и $q+\varepsilon<1$, $q+\varepsilon-\varepsilon/p>p$. Следовательно, оптимальная стратегия $r'=1$.

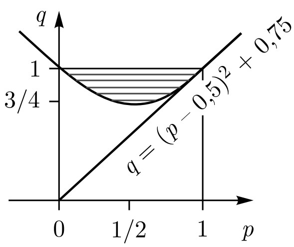
— При $\varepsilon = pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1}$ выполняются следующие соотношения: $pq(q-p)-\varepsilon(1+p^2-p-pq)=0$, $q+\varepsilon<1$, $q+\varepsilon-\varepsilon/p>p$ и, значит, оптимальный порядок r' можно выбрать в промежутке $0 \leqslant r' \leqslant 1$.

— Наконец, если $pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1} < \varepsilon \leqslant p(q-p)(1-p)^{-1}$, то справедливы неравенства $pq(q-p) - \varepsilon(1+p^2-p-pq)<0$, $q+\varepsilon-\varepsilon/p \geqslant p$, $q+\varepsilon<1$. Значит, оптимальный план $r'=0$, и студент выбирает второй порядок ответов.

На следующих рисунках приведены заштрихованные области значений параметров p, q и промежутки изменения параметра ε, в которых следует применять оптимальный план последовательности ответов студента на экзамене.

$q \geqslant (p-0{,}5)^2+0{,}75$

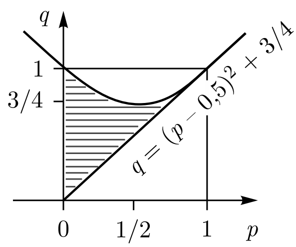
$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1-q$; $r'=1$



$q < (p-0{,}5)^2+0{,}75$

$0 \leqslant \varepsilon < pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1}$;

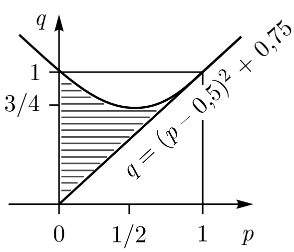
$r'=1$



$q < (p-0{,}5)^2+0{,}75$

$\varepsilon = pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1}$;

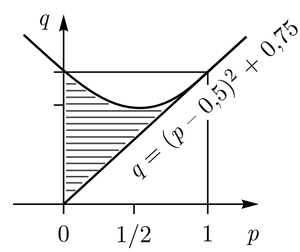
$0 \leqslant r' \leqslant 1$



$q < (p-0{,}5)^2+0{,}75$

$pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1} <$

$< \varepsilon \leqslant p(q-p)(1-p)^{-1}$; $r'=0$



Эти области соответствует тому случаю, когда слабо подготовленным студентам при их ответах преподавателям целесообразно пользоваться первым или вторым вариантом поведения в зависимости от значений параметров p и q, отвечающих за подготовку к экзаменам, и параметра обучения ε. Как следствие из предыдущих рассуждений получаем, что при $\varepsilon = 0$ следует применять только первый вариант поведения при $(p, q) \in \{(p, q)\colon 0 < p,\ q < 1,\ q > p\}$.

Итак, совет использовать только первый вариант поведения не всегда является верным. Однако исследования этой задачи, многочисленные опросы студентов и сами экзамены показывают, что применение первого или второго варианта поведения существенно зависит от подготовки и обучаемости студентов на экзаменах. Так, отлично подготовленным студентам, правильные ответы которых, скорее всего, будут независимыми случайными событиями ($\varepsilon = 0$) или удовлетворяют условию вида $q \geqslant (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$, целесообразно руководствоваться первым вариантом поведения. Напротив, плохо подготовленным студентам при хорошей их обучаемости, когда одновременно $0 < p,\ q < 1,\ q > p,\ q < p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$ и $pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1} < \varepsilon \leqslant p(q-p)(1-p)^{-1}$, целесообразно применять второй вариант поведения. Такая ситуация, по-видимому, сложилась после 1992 г. не только в Нижегородском университете.

При анализе того или иного случайного явления перед исследователем возникает трудный вопрос: как на возможность осуществления события A влияет дополнительное условие о том, что произошло некоторое событие $B \in \mathcal{F}$? Другими словами, очень важно установить связь между случайными наблюдаемыми исходами эксперимента E. В простейшем варианте между двумя событиями может быть причинно-следственная связь, когда наступление одного из событий ведет к обязательному наблюдению другого или же, наоборот, когда наступление одного события исключает осуществление другого. В более сложном случае, когда такая причинно-следственная зависимость отсутствует, некоторая связь между событиями все же имеется. Чтобы пояснить сказанное, приведем такой пример. Наудачу выбирается одна из двух урн, а затем из выбранной урны вытаскивается непреднамеренно один шар. В первой урне содержится 100 черных и 2 белых шара. Во второй урне имеется 100 белых и 2 черных шара. Пусть событие A означает выбор второй урны, а событие B состоит в том, что вынут белый шар. В этом примере было бы неверно утверждать, что одно из этих событий влечет за собой другое или что, наоборот, одно из них исключает другое. С другой стороны, почти для всех очевидно, что между событиями A и B имеется какая-то зависимость. В самом деле, при отсутствии предварительной информации о цвете выбранного шара шанс наступления события A оценивается числом $1/2$. Если же считать наступившим событие B, то вероятнее всего шар вынут из второй урны, т. е. шанс наступления события A при этом условии значительно повышается.

Итак, возникает проблема определения характеристики зависимости одних случайных событий от других. Дадим следующее определение.

Определение 2. Условной (апостериорной, послеопытной) вероятностью осуществления события $A \in \mathcal{F}$ при наблюдении события B, для которого $\mathbf{P}(B) \neq 0$, называется число $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$, которое будем обозначать символом $\mathbf{P}(A|B)$.

При вычислении условной вероятности случайного события $A \in \mathcal{F}$ по формуле $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$ необходимо, во-первых, очень четко на содержательном уровне представлять событие B, во-вторых, уметь выражать событие B через множество описаний ω всех тех элементарных исходов из $\Im'$, которые одновременно могут происходить с B. Далее, нельзя заменять событие B некоторым событием $C \supset B$, хотя в этом случае событие C также произошло. В противном случае могут возникать ошибки и парадоксы. Приведем пример.

Пример 1. Для социологического исследования наудачу выбирается семья. В семье имеется двое детей. Когда социолог позвонил, к телефону случайно подошел мальчик. Найти вероятность того, что в семье оба ребенка — мальчики.

Очень часто (см., например, Lipschuz S. Theory and Problems of Probability. New York: McGraw-Hill Book Corp. 1968) эту задачу решают следующим образом. В качестве пространства Ω описаний всех элементарных исходов выбирают множество $\{(\text{м}, \text{м}), (\text{м}, \text{д}), (\text{д}, \text{м}), (\text{д}, \text{д})\}$. Здесь одноточечные множества $\{(\text{м}, \text{м})\}$, $\{(\text{м}, \text{д})\}$, $\{(\text{д}, \text{м})\}$ и, наконец, множество $\{(\text{д}, \text{д})\}$ соответственно означают, что в семье старший ребенок и младший мальчики, старший мальчик и младшая девочка, старшая девочка и младший мальчик и, наконец, старшая и младшая девочки. Пусть событие B состоит в том, что к телефону подошел мальчик. Обозначим через A событие вида $\{(\text{м}, \text{м})\}$ и через C событие, которое заключается в том, что в семье есть мальчик, т. е. $C = \{(\text{м}, \text{м}), (\text{м}, \text{д}), (\text{д}, \text{м})\}$. Ясно, что $C \supset B$, более того, многие ошибочно считают эти события равными. Тогда, по их мнению, условная вероятность вида $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A|C) = \mathbf{P}(A \cap C)/\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(C) = (1/4) : (3/4) = 1/3$. Этот ответ противоречит нашей интуиции, которая подсказывает, что появление мальчика или девочки в качестве другого ребенка, который не подходил к телефону, имеет одну и ту же вероятность, равную 1/2.

Правильное решение этой задачи можно дать, если использовать третий подход к обучению основам теории вероятностей и математической статистики. Прежде всего необходимо понимать все условия проведения этого эксперимента, а именно что в нашем эксперименте действуют два случайных механизма. Первый состоит в том, что некто случайным образом выбирает семью из двух детей, а второй — в том, что один из детей (старший или младший) случайно взял трубку телефона. В качестве пространства описаний всех элементарных исходов из $\Im'$ выберем множество $\Omega = \{(\text{м}, \text{м}, 1),\ (\text{м}, \text{м}, 2),\ (\text{м}, \text{д}, 1),\ (\text{м}, \text{д}, 2),\ (\text{д}, \text{м}, 1),\ (\text{д}, \text{м}, 2),\ (\text{д}, \text{д}, 1),\ (\text{д}, \text{д}, 2)\}$. Здесь первые два элемента в каждой упорядочной тройке обозначают пол детей в последовательности их рождения, а третий элемент характеризует старшинство ребенка, взявшего телефонную трубку. Третий элемент равен единице, если телефонную трубку снял старший ребенок, и равен двойке в противном случае. При таком подходе событие $A = \{(\text{м}, \text{м}, 1),\ (\text{м}, \text{м}, 2)\}$, $B = \{(\text{м}, \text{м}, 1),\ (\text{м}, \text{м}, 2),\ (\text{м}, \text{д}, 1),\ (\text{д}, \text{м}, 2)\}$, событие $C = \{(\text{м}, \text{м}, 1),\ (\text{м}, \text{м}, 2),\ (\text{м}, \text{д}, 1),\ (\text{м}, \text{д}, 2),\ (\text{д}, \text{м}, 1),\ (\text{д}, \text{м}, 2)\}$ и, значит, $C \supset B$, $C \neq B$, $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(B) = (2/8) : (4/8) = 1/2$, условная вероятность $\mathbf{P}(A|C) = \mathbf{P}(A \cap C)/\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(C) = (2/8) : (6/8) = 1/3$, что согласуется с нашей интуицией. Заметим, что при первом решении не удается представить событие B через элементы множества $\Omega = \{(\text{м}, \text{м}),\ (\text{м}, \text{д}),\ (\text{д}, \text{м}),\ (\text{д}, \text{д})\}$.

Очень важно знать, какие случайные события и с какой вероятностью порождают статистически устойчивый эксперимента E. В этом случае такой эксперимент изучается с качественной точки зрения. Однако в результате проведения статистически устойчивого эксперимента E очень часто над элементарными исходами эксперимента с помощью некоторых инструментов (приборов) проводят различные измерения. В результате этих измерений получают число, упорядочный конечный или даже бесконечный набор чисел. В простейшем случае с помощью конкретного измерителя получают некоторую количественную характеристику статистически устойчивого эксперимента E, которую будем обозначать символом $\xi(\omega)$. При аксиоматическом подходе математический объект $\xi(\omega)$ в простейшем случае представляет собой измеримое отображение $\xi(\omega)$: $\Omega \to X$. В простейшем варианте при $X \subset R$ математический объект $\xi(\omega)$ является случайной величиной. В более сложных вариантах $\xi(\omega)$ может быть многомерной случайной величиной, случайным элементом, случайным процессом, случайной функцией и т. д. В основном изучаются фундаментальные свойства законов распределения этих математических объектов средствами теории меры и функционального анализа. По необходимости эти свойства интерпретируются на конкретных примерах. При третьем подходе объект $\xi(\omega)$ рассматривается как математическая модель измерителя (прибора, инструмента). Поэтому основная проблема здесь заключается как в построении вероятностных моделей количественных характеристик эксперимента, так и в изучении свойств этих моделей средствами класического и аксиоматического подходов. Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий простой эксперимент.

Пример 2. Преподаватель и студент условились для консультаций встречаться на кафедре по понедельникам. При этом преподаватель и студент из-за транспортных задержек приходят на кафедру независимо и наудачу в промежутке с восьми до девяти часов. Обозначим через t_1 и t_2 моменты прихода на кафедру преподавателя и студента соответственно. Для этой задачи достоверное событие $\Omega = \{\omega = (t_1, t_2)\colon 8 \leqslant t_1 \leqslant 9,\ 8 \leqslant t_2 \leqslant 9\}$ представляет квадрат на плоскости $t_1 0 t_2$ с единицей масштаба в один час. Выберем в качестве σ-алгебры $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов данного эксперимента множество всех подмножеств квадрата Ω, имеющих площадь. Так как площадь квадрата Ω равна единице, то каждому наблюдаемому событию A из $\mathcal{F}$ можно приписать геометрическую вероятность $\mathbf{P}(A) = \operatorname{mes} A / \operatorname{mes} \Omega = \operatorname{mes} A$, которая совпадает с площадью множества A. Таким образом, для этого эксперимента построена вероятностная модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Пусть теперь имеется прибор, который каждый раз фиксирует момент начала проведения консультации в следующих предположениях. Если студент пришел раньше преподавателя, то консультация начинается в девять часов шесть минут. Если преподаватель появился раньше студента, то консультация начинается в девять часов три минуты. Наконец, если студент и преподаватель пришли на кафедру одновременно, то немедленно начинается консультация. Вероятностной моделью такого прибора является случайная величина $\xi(\omega)$ на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Из условия эксперимента случайная величина $\xi(\omega)$ принимает значение 9,05 при $\omega \in \{\omega = (t_1, t_2)\colon t_1 > t_2,\ (t_1, t_2) \in \Omega\}$, значение 9,1 при $\omega \in \{\omega = (t_1, t_2)\colon t_2 > t_1,\ (t_1, t_2) \in \Omega\}$ и, наконец, значение t при $\omega \in \{\omega = (t_1, t_2)\colon t_1 = t_2,\ (t_1, t_2) \in \Omega\}$. Найдем теперь вероятности:

$$\mathbf{P}(\{\omega = (t_1, t_2)\colon \xi(\omega) = 9{,}05\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega = (t_1, t_2)\colon t_1 > t_2,\ (t_1, t_2) \in \Omega\}) = p_1 = 1/2,$$

$$\mathbf{P}(\{\omega = (t_1, t_2)\colon \xi(\omega) = 9{,}1\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega = (t_1, t_2)\colon t_1 < t_2,\ (t_1, t_2) \in \Omega\}) = p_2 = 1/2.$$

Так как $p_1 + p_2 = 1$ и $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, то $X_1 = \{9{,}05, 9{,}1\}$, $X_2 = \{x\colon\ 8 \leqslant t \leqslant 9\}$ и $X = \{\xi(\omega)\colon\ \omega \in \Omega\} = X_1 \cup X_2$. Ясно, что вероятность $\mathbf{P}(\{\omega = (t_1, t_2)\colon\ \xi(\omega) = t\}) = \mathbf{P}(\{\omega = (t, t)\}) = 0$ при $8 \leqslant t \leqslant 9$ и

$$\mathbf{P}(\{\omega = (t_1, t_2)\colon\ 8 \leqslant \xi(\omega) \leqslant 9\}) = \mathbf{P}(\{\omega = (t_1, t_2) \in \Omega\colon\ t_1 = t_2\}) = 0.$$

Итак, здесь на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ рассмотрена дискретная случайная величина $\xi(\omega)$, которая принимает значение x из несчетного множества X.

Построение и изучение адекватной вероятностной модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ для статистически устойчивого эксперимента E удается осуществить, как правило, в простых случаях. Эта задача сильно усложняется, когда известны не все основные условия $u_1, u_2, \ldots, u_s$ проведения эксперимента E или не все возможные его исходы $A, B, C, \ldots$ Решение этого вопроса является предметом математической статистики и основано на рассмотрении некоторого параметрического множества U из элементов u и семейства из вероятностных моделей вида $\{(\Omega_u, \mathcal{F}_u, \mathbf{P}_u(\cdot))\colon u \in U\}$. При этом возникает трудноразрешимая проблема выбора из семейства $\{(\Omega_u, \mathcal{F}_u, \mathbf{P}_u(\cdot))\colon\ u \in U\}$ адекватной вероятностной модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ на основе наблюдений за статистически устойчивым экспериментом E с учетом параметра $u \in U$. Если для эксперимента E известны все его допустимые исходы, то естественно рассматривают более простое семейство $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot))\colon\ u \in U\}$. Заметим, что при аксиоматическом подходе априори задается не семейство $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot))\colon\ u \in U\}$ вероятностных моделей статистически устойчивого эксперимента E, а семейство $\{(X, \mathcal{B}, P_u(\cdot))\colon\ u \in U\}$ из выборочных вероятностных пространств для случайного элемента ξ. Каждое выборочное вероятностное пространство из этого семейства объявляется моделью прибора или измерителя. При этом адекватная модель $(X, \mathcal{B}, P(\cdot))$ из выборочного семейства $\{(X, \mathcal{B}, P_u(\cdot))\colon u \in U\}$ определяется только на основе n показаний прибора, или, другими словами, только на основе n наблюдаемых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайного элемента ξ. В этом случае упорядоченная пара $(X, \mathcal{B})$ содержит всю информацию об измерителе и вполне естественно считать, что правило выбора адекватной модели $(X, \mathcal{B}, P(\cdot))$ из семейства $\{(X, \mathcal{B}, P_u(\cdot))\colon\ u \in U\}$ не зависит от параметра $u \in U$. Для статистически устойчивого эксперимента E сложной структуры практически трудно назначить различные измерители $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, совместное наблюдение которых однозначно определяло бы его элементарный исход $\{\omega\}$. Поэтому легко понять, почему правило выбора модели $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$ из семейства $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot))\colon\ u \in U\}$ зависит не только от наблюдения за случайным элементом ξ, но и от параметра u. Подробно такая ситуация рассмотрена в работах М.А. Федоткина в журнале «Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского» за 2012 и 2014 гг.

При аксиоматическом подходе в теории случайных процессов априори предполагается, что задано вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$. Тогда случайным процессом называют семейство $\{\xi(t)\colon\ t \in T\}$ случайных элементов, заданных на одном вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}(\cdot))$, и это семейство зависит от одного параметра $t \in T$. Как правило, T представляет собой некоторое подмножество оси времени $\{t\colon\ -\infty < t < +\infty\}$. При таком подходе основная проблема теории случайных процессов сводится к построению и изучению свойств семейства

$$\Big\{\mathbf{P}(\{\omega\colon\ \xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\})\colon\ t_1, t_2, \ldots, t_n \in T;\\ B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Re\Big\}$$

из так называемых конечномерных распределений.

В последнее время теория случайных процессов предполагает построение и изучение вероятностных моделей эволюционных экспериментов $E = \prod\limits_{t \in T} E_t$. В этом случае при каждом фиксированном значении $t \in \mathrm{T}$ случайный элемент $\xi(t)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью обобщенной количественной характеристики статического эксперимента E_t, или, другими словами, вероятностной моделью обобщенной количественной характеристики эволюционного эксперимента E в момент времени t. Такая идеология связана с применением теории вероятностей для изучения реальных процессов. Результаты в этом направлении были получены А.А. Ляпуновым, С.В. Яблонским, М.А. Федоткиным и др. при изучении управляющих кибернетических систем:

— *Ляпунов А.А.*, *Яблонский С.В.* Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. — М.: Физматгиз, 1963. № 9. С. 5–22.

— *Федоткин М.А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. — М: Наука-Физматлит, 1998. № 7. С. 333–344.

— *Федоткин М.А.*, *Федоткин А.М.*, *Кудрявцев Е.В.* Построение и анализ математической модели пространственной и временной характеристик входных потоков // Автоматика и вычислительная техника. 2014. № 6. С. 62–74.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1а. Значения функции $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x^2/2\}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29202
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178

Таблица П.1а (*окончание*)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

Таблица П.1б. Значения функции $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp\{-x^2/2\}$

x	0	2	4	6	8
4,	0,0001338	0,0000589	0,0000249	0,0000101	0,0000040
5,	0,0000015	—	—	—	—

Таблица П.2а. Значения функции $2^{-1}\Phi(x) =$

$$= (2\pi)^{-1/2}\int_0^x \exp\{-x^2/2\}\,dx$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36550	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42992	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169

Таблица П.2а (*окончание*)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

Таблица П.2б. Значения функции $2^{-1}\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_0^x \exp\{-x^2/2\}\,dx$

x	0	2	4	6	8
4,	0,4999683	0,4999867	0,4999946	0,4999979	0,4999992
5,	0,4999997	—	—	—	—

Таблица П.3а. Значения функции $\pi(m;\lambda) = \lambda^m (m!)^{-1}\exp\{-\lambda\}$

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4965	4493	4065	3678
1	0904	1637	2222	2681	3032	3292	3476	3594	3659	3678
2	0045	0163	0333	0536	0758	0987	1216	1437	1646	1839
3	0001	0010	0033	0071	0126	0197	0283	0383	0493	0613
4	—	0000	0002	0007	0015	0029	0049	0076	0111	0153

Таблица П.3б. Значения функции $\pi(m;\lambda) = \lambda^m (m!)^{-1} \exp\{-\lambda\}$

m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,2231	1353	0820	0497	0301	0183	0111	0067	0040	0024
1	3346	2706	2052	1493	1056	0732	0499	0336	0224	0148
2	2510	2706	2565	2240	1849	1465	1124	0842	0618	0446
3	1255	1804	2137	2240	2157	1953	1687	1403	1133	0892
4	0470	0902	1336	1680	1888	1953	1898	1754	1558	1338
5	0141	0360	0668	1008	1321	1562	1708	1754	1714	1606
6	0035	0120	0278	0504	0770	1041	1281	1462	1571	1606
7	0007	0034	0099	0216	0385	0595	0823	1044	1234	1376
8	0001	0008	0031	0081	0168	0297	0463	0652	0848	1032
9	0000	0001	0008	0027	0065	0132	0231	0362	0518	0688

Таблица П.4а. Значения функции $\sum\limits_{m=s}^{\infty} \pi(m;\lambda)$

s	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0951	1812	2591	3296	3934	4511	5034	5506	5934	6321
2	0046	0175	0369	0615	0902	1219	1558	1912	2275	2642
3	0001	0011	0036	0079	0143	0231	0341	0474	0628	0803
4	—	0000	0002	0007	0017	0033	0057	0090	0134	0189

Таблица П.4б. Значения функции $\sum\limits_{m=s}^{\infty} \pi(m;\lambda)$

s	λ				s	λ			
	2	4	6	8		2	4	6	8
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	5	0,0526	0,3711	0,7149	0,9003
1	8646	9816	9975	9996	6	0165	2148	5543	8087
2	5939	9084	9826	9969	7	0045	1106	3937	6866
3	3233	7619	9380	9862	8	0011	0511	2560	5470
4	1428	5665	8488	9576	9	0002	0213	1527	4074

Таблица П.5. Значения 100α-процентных точек $c_{1-\alpha;r}$ для распределения хи-квадрат с r степенями свободы ($\mathbf{P}(\chi_r^2 \geqslant c_{1-\alpha;r}) = \alpha$)

r	α									
	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,1	0,050	0,025	0,010	0,005
1	0,0000	0,0001	0,0009	0,0039	0,0157	2,7055	3,8414	5,0238	6,6349	7,8794
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1025	0,2107	4,6051	5,9914	7,3777	9,2103	10,5966
3	0,0717	0,1148	0,2157	0,3518	0,5843	6,2513	7,8147	9,3484	11,3449	12,8381
4	0,2069	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767	14,8602
5	0,4117	0,5543	0,8312	1,1454	1,6103	9,2363	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496
6	0,6757	0,8720	1,2373	1,6353	2,2041	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476
7	0,9892	1,2390	1,6898	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777
8	1,3444	1,6464	2,1797	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	17,5346	20,0902	21,9550
9	1,7349	2,0879	2,7003	3,3251	4,1681	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5893
10	2,1558	2,5582	3,2469	3,9403	4,8651	15,9871	18,3070	20,4831	23,2093	25,1882
11	2,6032	3,0534	3,8157	4,5748	5,5777	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	26,7569
12	3,0738	3,5705	4,4037	5,2260	6,3038	18,5494	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995
13	3,5650	4,1069	5,0087	5,8918	7,0415	19,8119	22,3621	24,7356	27,6883	29,8194
14	4,0746	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	21,0642	23,6848	26,1190	29,1413	31,3193
15	4,6009	5,2293	6,2621	7,2609	8,5467	22,3072	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013
16	5,1422	5,8122	6,9076	7,9616	9,3122	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672
17	5,6972	6,4077	7,5641	8,6717	10,0852	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185
18	6,2648	7,0149	8,2307	9,3904	10,8649	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	37,1564
19	6,8439	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	27,2036	30,1435	32,8523	36,1908	38,5822
20	7,4338	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968

Т а б л и ц а П.5. (*окончание*)

r	α									
	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,1	0,050	0,025	0,010	0,005
21	8,0336	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	29,6151	32,6705	35,4789	38,9321	41,4010
22	8,6427	9,5424	10,9823	12,3380	14,0415	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	42,7956
23	9,2604	10,1956	11,6885	13,0905	14,8479	32,0069	35,1725	38,0757	41,6384	44,1813
24	9,8862	10,8564	12,4011	13,8484	15,6587	33,1963	36,4151	39,3641	42,9798	45,5585
25	10,5197	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	46,9278
26	11,1603	12,1981	13,8439	15,3791	17,2919	35,5631	38,8852	41,9232	45,6417	48,2899
27	11,8076	12,8786	14,5733	16,1513	18,1138	36,7412	40,1133	43,1944	46,9630	49,6449
28	12,4613	13,5648	15,3079	16,9279	18,9392	37,9159	41,3372	44,4607	48,2782	50,9933
29	13,1211	14,2565	16,0471	17,7083	19,7677	39,0875	42,5569	45,7222	49,5879	52,3356
30	13,7867	14,9535	16,7908	18,4926	20,5992	40,2560	43,7729	46,9792	50,8922	53,6720
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648
34	16,501	17,789	19,086	21,664	23,952	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
36	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581
37	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	48,363	52,192	55,668	59,892	62,882
38	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	49,513	53,384	56,895	61,162	64,181
39	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766

Т а б л и ц а П.6. Значения 100α-процентных точек $z_{1-\alpha}(m,n)$ для случайной величины Фишера–Снедекора $\chi_{m,n}$ с m, n степенями свободы и плотностью вероятностей $f_{\chi_{u,v}}(x) = (u/v)^{u/2}(\Gamma(u/2)\Gamma(v/2))^{-1}\Gamma((u+v)/2)x^{(u-2)/2} \times$ $\times (1+v^{-1}ux)^{-(u+v)/2}$, $x>0$, где $m,n = 1,2,\ldots$ и $\mathbf{P}\big(\chi_{m,n} \geqslant z_{1-\alpha}(m,n)\big) = \alpha$

$\alpha = 0{,}1$															
n	m														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	60	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,21	59,44	59,86	60,19	61,74	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,44	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,84	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,21	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,84	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	3,72	2,70	2,59	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,42	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,30	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,20	2,16	2,13	2,11	2,08
$\alpha = 0{,}05$															
n	m														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	60	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	248,0	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,66	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,50	4,46	4,43	4,40

Таблица П.6. (*окончание*)

n	$\alpha = 0{,}05$														
	m														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	60	120
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,44	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,94	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58
	$\alpha = 0{,}01$														
n	m														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	60	120
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6209	6261	6287	6313	6339
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,45	99,47	99,47	99,48	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	26,69	26,50	26,41	26,32	26,22
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,02	13,84	13,75	13,65	13,56
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,55	9,38	9,29	9,20	9,11
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,40	7,23	7,14	7,06	6,97
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,16	5,99	5,91	5,82	5,74
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,36	5,20	5,12	5,03	4,95
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	4,81	4,65	4,57	4,48	4,40
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,41	4,25	4,17	4,08	4,00

Таблица П.7. Значения 100α-процентных точек $t_{1-\alpha;r}$ для случайной величины Стьюдента St_r с $r = 1, 2, \ldots$ степенями свободы и плотностью вероятностей $f_{\mathrm{St}_r}(x) = (\pi r)^{-1/2}\Gamma((r+1)/2)(\Gamma(r/2))^{-1} \times \times (1 + x^2 r^{-1})^{-(r+1)/2}$, где $\mathbf{P}(\mathrm{St}_r \geqslant t_{1-\alpha;r}) = \alpha$

r	α							
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,321
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833
9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690
10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497
12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428
13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,694	2,977	3,326
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286
16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252
17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222
18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197
19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153
21	0,267	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135
22	0,256	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119
23	0,256	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104
24	0,256	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091
25	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078
26	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067
27	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057
28	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047
29	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038

Таблица П.7. (*окончание*)

r	α							
	0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025
30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030
32	0,255	0,682	1,310	1,694	2,037	2,450	2,740	3,015
34	0,255	0,682	1,310	1,691	2,032	2,441	2,728	3,002
36	0,255	0,681	1,310	1,688	2,028	2,434	2,720	2,990
38	0,255	0,681	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	2,980
40	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971
42	0,255	0,680	1,302	1,682	2,020	2,418	2,698	2,963
44	0,255	0,680	1,301	1,680	2,020	2,414	2,692	2,956
46	0,255	0,680	1,300	1,680	2,013	2,410	2,690	2,949
48	0,255	0,680	1,300	1,680	2,011	2,407	2,682	2,943
50	0,255	0,679	1,299	1,680	2,009	2,403	2,678	2,937

Список литературы

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
2. *Боровков А. А.* Математическая статистика. — Новосибирск: Наука, 1997.
3. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М.: Академия, 2003.
4. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Эдиториал УРСС, 2005.
5. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1992.
6. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. — М.: ФАЗИС, 1998.
7. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2003.
8. *Федоткин М. А.* Основы прикладной теории вероятностей и статистики. Учебник. — М.: Высшая школа, 2006.
9. *Федоткин М. А.* Модели в теории вероятностей. Учебник. — М.: Наука–ФИЗМАТЛИТ, 2012.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.
11. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Т. 1, 2. — М.: МЦНМО, 2004.

Предметный указатель