ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА

И.Р. Высоцкий

КРУЖОК ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8–11 классы

И. Р. Высоцкий

КРУЖОК
по теории вероятностей

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 372.851
ББК 22.17я72
В93

Высоцкий И. Р.
Кружок по теории вероятностей.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
128 с.
ISBN 978-5-4439-3167-8

Сборник составлен по материалам кружка МЦНМО, который проводился в 2015—2017 годах для школьников 8—9 классов. Задачи сгруппированы по занятиям, а занятия — по темам. Последовательность занятий устроена так, что сборник имеет обучающий характер. Большинство новых терминов и методов вводится через задачи. В конце сборника даны ответы и указания к решению, а также алфавитный справочник. В справочник вошли разъяснения многих терминов, формул и методов с примерами, иногда — с доказательствами. При этом предполагается, что у читателя имеются базовые знания теории вероятностей, хотя бы в объеме школьного учебника 7—8 классов.

Сборник предназначен для мотивированных школьников, интересующихся студентов, а также для руководителей кружков по теории вероятностей. Может быть использован для подготовки к олимпиадам по теории вероятностей и статистике.

Подготовлено на основе книги:
Высоцкий И. Р. Кружок по теории вероятностей. —
М.: МЦНМО, 2017. — 128 с. — ISBN 978-5-4439-1167-0

12+

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3167-8

Предисловие

Книга о кружках по теории вероятностей предназначена для школьников 8—11 классов, студентов, интересующихся теорией вероятностей, а также для преподавателей школьных кружков и факультативов по вероятности. Эту книжку, наряду с другим изданием серии «Задачи заочных интернет-олимпиад по теории вероятностей и статистике», можно использовать для подготовки к олимпиадам.

Первая часть содержит материалы кружка по теории вероятностей, который проходил в Московском центре непрерывного математического образования в 2015—2017 годах. Задачи сгруппированы по занятиям. Каждое из 25 занятий посвящено определённой теме, однако есть задачи, которые в разных формулировках встречаются в разных занятиях. Последнее занятие — мини-олимпиада.

Все занятия, кроме трёх, состоят исключительно из задач. Три занятия построены иначе — это рассказы о роли теории вероятностей и законе больших чисел (занятие 1), о трёх важных распределениях (занятие 17) и о дисперсии (занятие 21).

Кроме того, в первую часть включены задачи конкурса «Задача дня», который проводится для пользователей сайта `http://ptlab.mccme.ru` «Вероятность в школе».

Во второй части содержатся указания к решению и решения (для более сложных задач). К задачам конкурса даны только ответы без решений.

Предполагается, что читатель знаком с базовыми понятиями теории вероятностей, хотя бы в объеме школьного учебника.

Многие новые понятия и методы появляются в ходе решения задач. Такая практика типична для кружка и требует от преподавателя умения организовывать обучение через решение задач, используя их как инструмент мотивации к получению новых знаний.

Значение некоторых терминов и описание применяемых методов можно найти в справочнике в конце книги. Термины, описанные в справочнике, выделены в тексте ***полужирным курсивом***.

Занятие 1

Зачем нужна теория вероятностей?

Перчатки в ящике. «Верю — не верю». Закон больших чисел

Перчатки в ящике

Теория вероятностей важна, поскольку она часто *предлагает разумные решения «практически наверняка» там, где алгебра и арифметика решений не дают вовсе или дают непрактичные решения.*

Возьмём шуточный пример. Известна задача: в ящике 100 левых и 100 правых перчаток. Сколько нужно вынуть перчаток (наугад), чтобы наверняка получилась пара? Ответ получается из принципа Дирихле: нужно достать 101 перчатку.

Если заменить требование «наверняка» требованием «практически наверняка», то оказывается, что достаточно взять всего 6 перчаток и тогда с очень высокой вероятностью (больше 0,96) среди них будет пара. Проверим.

Первая вынутая перчатка будет либо левой, либо правой. Для определённости предположим, что она левая. Какова теперь вероятность того, что следующие пять тоже будут левыми?

$$\frac{99}{199}\cdot\frac{98}{198}\cdot\frac{97}{197}\cdot\frac{96}{196}\cdot\frac{95}{195} < \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

То есть с вероятностью больше, чем

$$1 - 0{,}03125 = 0{,}96875$$

не все перчатки будут левыми, и среди них найдётся пара.

Это нас устраивает, *если мы верим в событие*, имеющее вероятность 0,96 или больше. Считаем его очень *правдоподобным*, т. е. таким, которое случается *практически наверняка*. А событие с вероятностью менее 0,04 считаем *неправдоподобным* и не принимаем его в расчёт. Если кто-то так не считает, пусть возьмёт не шесть перчаток, а семь.

Принцип «верю-не верю» — один из основополагающих в математической статистике. Если теория говорит, что в однократном опыте событие очень маловероятно, то к нему нужно относиться как к невозможному. А если оно всё же происходит, то мы вправе удивиться. Или задать себе вопрос — а верно ли мы оценили вероятность?

В однократном эксперименте к маловероятному событию следует относиться как к практически невозможному, не рассчитывая на его осуществление. Напротив, очень вероятное событие можно считать практически достоверным, полагаясь на то, что такое событие наступит[1].

Где же граница маловероятности, начиная с которой мы не верим в практически невероятное событие? Чему равна эта *решающая вероятность?* Это зависит от того, насколько значительны последствия наступившего события. В примере с перчатками мы решили, что смиримся с малой вероятностью 0,032 события «Все перчатки на одну руку». Но если это всё же случится, большой беды не будет. Цена ошибки невелика.

А в медицине, авиации цена ошибки очень велика, поэтому в этих областях нежелательные события должны иметь крайне низкую вероятность. Чем ответственней эксперимент, тем ниже должна быть вероятность ошибочного решения или вывода.

Вот примеры задач, которые нельзя решить наверняка, зато можно решить практически наверняка:

1. Сколько нужно запасти саженцев, чтобы не менее 100 из них прижилось, если вероятность гибели одного саженца равна 0,05?

2. Сколько нужно иметь в запасе одеял в городском убежище на случай землетрясения или наводнения?

3. Сколько нужно иметь в запасе бумаги, чтобы хватило всем участникам ЕГЭ по математике?

Ни одна из этих задач не может быть решена точно, поскольку число погибших саженцев заранее неизвестно, школьники могут исписать немыслимую гору бумаги и т. п. Но все эти задачи разумно решаются с помощью теории вероятностей.

Попробуйте сами оценить допустимую вероятность ошибки в каждом из этих трёх случаев. Это будет ваше решающее правило.

[1] Обратите внимание: речь идёт об однократном опыте. Если такой опыт проводить множество раз, то рано или поздно случится и самое невероятное. Пословица гласит, что раз в жизни стреляет незаряженное ружьё.

Рыба или курица — статистическая устойчивость на борту самолёта

Пример вероятностной задачи. В самолёте 200 пассажиров, и авиакомпания загрузила на борт 100 порций обедов с курицей и 100 порций с рыбой. Не все любят курицу, не все любят рыбу. Бывает, что некоторые пассажиры недовольны.

Авиакомпания провела исследование и выяснила, что на 100 последних одинаковых рейсах всего оказалось 338 недовольных пассажиров. Значит, среднее число недовольных в расчёте на один рейс равно 3,38.

Можно ли опираться на это среднее значение при дальнейших прогнозах?

Мнения участников кружка разделились. После обсуждения мы пришли к следующим утверждениям.

1. Среднее число недовольных пассажиров 338 — это ***статистика***, которая в дальнейшем может меняться (на других 100 таких же рейсах среднее число недовольных может быть другим). То есть, среднее число — величина случайная и изменчивая.

2. Резкое изменение среднего очень маловероятно. Мы готовы поверить в то, что в среднем будет 2, 3 или 5 недовольных пассажиров, но не готовы поверить в 20 или 50. Нам представляется *неправдоподобным* такое резкое изменение среднего. Почему? Пока мы это просто чувствуем.

3. Если среднее всё же сильно меняется, это значит, что изменились условия эксперимента (например, изменилось число пассажиров на рейсе или вдруг среди них стало много японцев, которые чаще предпочитают рыбу).

Иными словами, если мы наблюдали много значений случайной величины, а условия эксперимента (полёта) не меняются, то можно надеятся, что среднее значение величины «Число недовольных» в дальнейшем значительно меняться не будет — наблюдается статистическая устойчивость. Это — проявление ***закона больших чисел***, который связывает теорию вероятности и статистику. Собственно, закон больших чисел и делает теорию вероятности жизненной наукой.

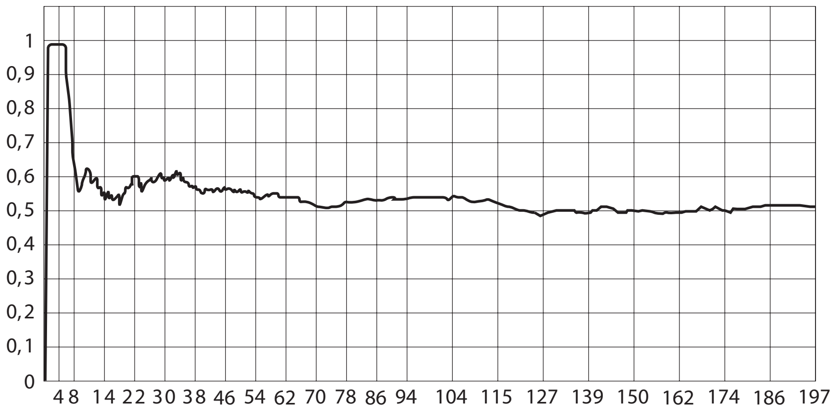
Наблюдение устойчивости с помощью монеты

Монета симметрична, поэтому мы считаем, что при бросании монеты решка и орёл имеют равные шансы. По этой причине мы ждём, что из 10 брошенных монет в среднем 5 выпадет орлом вверх. Попробуйте, опираясь только на опыт и интуицию, оценить, сколько орлов следует ждать в реальности.

Почти все участники кружка согласились, что очень трудно поверить в 0 и в 10 орлов, слабо верится в 1, 2, 8 или 9, но вполне можно допустить, что орлов случится от 3 до 7.

А если бросить монету 20 раз? Примем ли мы за вероятное число орлов от 6 до 14? Или придётся сузить границы? А если 30 раз? 100 раз?

Каждый из участников кружка бросил монету 200 раз. По одной из таких серий был построен график. Он получился примерно таким.



Получившийся график частоты события «Орёл» при 200 бросках монеты. Видно, что колебания частоты постепенно затухают

Можно видеть закономерность: колебания частоты вначале очень большие, а затем наступает стабилизация — колебания всё меньше и меньше, *частота стабилизуется около вероятности* 0,5.

К концу эксперимента с 200 монетами частота выпадения орла, конечно, отличается от 0,5, но чем больше отличие, тем реже оно встречается. Частота может оказаться 0,55 или 0,43, но чаще встречаются значения 0,51 или 0,49.

1. Почему колебания частоты постепенно затухают?

2. Почему частота стабилизируется около вероятности 0,5?

3. Почему вероятности больших отличий частоты от вероятности малы?

4. Можно ли считать правдоподобным, что частота отклонится от вероятности больше чем на 0,01? Больше чем на 0,1? Больше чем на 0,2?

Закон больших чисел проявляется по-разному. Например, так.

При росте числа наблюдаемых значений случайной величины их среднее арифметическое испытывает всё меньшие колебания и постепенно приближается к математическому ожиданию этой величины.

Важный частный случай этого утверждения относится к частотам событий. *При росте числа одинаковых экспериментов частота события испытывает всё меньшие колебания и постепенно приближается к вероятности этого события.*

Закон больших чисел даёт нам в руки мощное оружие.

Во-первых, *зная вероятность события, можно прогнозировать его частоту* и даже правдоподобные отклонения.

Во-вторых, *можно известной частотой события оценивать его вероятность*, полагаясь на то, что большое отклонение частоты от вероятности само по себе — событие маловероятное.

Проведите эксперимент с монетами самостоятельно с помощью программы `coins.exe` (`http://ptlab.mccme.ru/node/187`). Попробуйте определить, когда начинает заметно сказывается закон больших чисел, т. е. оцените на глаз момент (число бросаний), когда с вашей точки зрения, колебания частоты орла перестают быть резкими и график частоты стабилизируется.

А если использовать не монету, а другую модель? Например, фиксировать частоту выпадения шестёрки на игральной кости. Будет ли стабилизация частоты наступать в этом случае раньше или позже? Для бросания кости используйте другую программу dice.exe, которая доступна на той же странице.

Занятие 2

Простые задачи

Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями

2.1. Бросают одну ***правильную кость***. Найдите вероятность того, что:

а) выпадет чётное число очков;

б) выпадет число, не превосходящее четырёх.

2.2. а) На клавиатуре телефона 10 клавиш с цифрами. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

б) Из множества натуральных чисел от 10 до 29 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

2.3. В городе, где живёт Рассеянный Учёный, телефонные номера состоят из 7 цифр. Учёный легко запоминает телефонный номер, если этот номер — палиндром, т. е. он одинаково читается слева направо и справа налево. Например, номер 443 53 44 Учёный запоминает легко, а номер 372 36 27 — с трудом. Найдите вероятность того, что телефонный номер нового случайного знакомого Учёный запомнит легко.

2.4. а) В ящике лежат 4 чёрных шара и 1 белый. Из ящика случайным образом достали один шар. Чему равна вероятность того, что он будет белым? Если первый шар оказался белым, то чему равна вероятность того, что следующий вынутый шар тоже окажется белым?

б) Та же задача, но в начале в ящике лежат 8 чёрных шаров и 2 белых.

2.5. Дима подбросил ***монету*** три раза. Чему равна вероятность того, что:

а) первая монета выпадет орлом вверх;

б) выпадет ровно два орла;

в) выпадет ровно одна решка;

г) выпадет не более двух решек?

2.6. Учитель нарисовал на доске квадрат $ABCD$ и предлагает ученику выбрать две любые вершины. Чему равна вероятность того, что при ***случайном выборе*** ученик выберет вершины A и B?

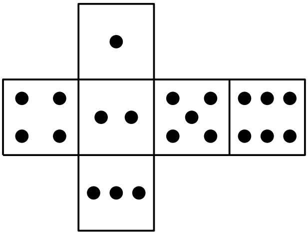
2.7. Три усталых ковбоя зашли в салун и повесили свои шляпы на бизоний рог при входе. Когда глубокой ночью ковбои уходили, они были не в состоянии отличить одну шляпу от другой и поэтому разобрали шляпы наугад. Найдите вероятность того, что никто из них не взял свою собственную шляпу.

2.8. Вася сложил прямоугольный листок бумаги вчетверо и поставил сверху крестик. Затем он развернул листок, после этого снова сложил его по прежним линиям сгиба случайным образом (не обязательно, как раньше) и оставил на столе, положив случайной стороной вверх. Найдите вероятность того, что крестик опять оказался сверху.

2.9. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что на костях выпадет одно и то же число очков?

2.10. Трое друзей хотят пить. Неподалёку — палатка с квасом, но туда лень идти. Тогда решили бросить жребий, кому идти за квасом, но у них нашлась только одна монета. Как им устроить честный жребий так, чтобы у всех получились равные шансы?

2.11. Что странного в развёртке игрального кубика?



Занятие 3

Диаграммы Эйлера

Изображение событий с помощью диаграмм. Решение задач. Формула сложения вероятностей

3.1. Покажите на ***диаграмме Эйлера*** (рис. 3.1) событие:

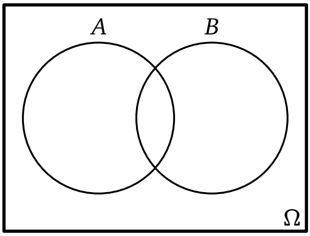


Рис. 3.1

а) ***пересечение*** $A\cap B$; б) ***объединение*** $A\cup B$;

в) событие $\overline{A}$, ***противоположное*** событию A; г) $A\cap\overline{B}$.

3.2. Покажите на диаграмме Эйлера событие:

а) $A\cap B\cap C$; б) $A\cup B\cap C$; в) $A\cap\overline{B\cap C}$; г) $\overline{A}\cap(B\cup\bar{C})$.

3.3. Нарисуйте диаграмму Эйлера для ***несовместных событий*** A и B.

3.4. Нарисуйте диаграмму Эйлера, если событие B целиком содержится в событии A.

3.5. Известно, что событие A имеет вероятность 0,8, событие B — вероятность 0,6. Могут ли они быть несовместными? Изобразите события на диаграмме Эйлера. Найдите наименьшую возможную вероятность события $A\cap B$.

3.6. Известно, что событие A имеет вероятность 0,8, событие B — вероятность 0,6, а их пересечение $A\cap B$ имеет вероятность 0,45. Найдите вероятность объединения событий A и B.

3.7. В классе 30 учеников. Вероятность того, что случайно выбранный ученик — мальчик, равна 0,6, вероятность того, что случайно выбранный ученик имеет тёмные волосы, равна 0,3, а всего в классе 6 темноволосых мальчиков.

Найдите вероятность того, что случайно выбранный ученик:

а) светловолосая девочка; б) светловолосый мальчик.

3.8. В торговом центре установлены два кофейных автомата. Вероятность того, что в первом автомате к концу дня кофе закончится, равна 0,2. То же самое верно и для второго автомата. А вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня:

а) кофе останется в обоих автоматах;

б) кофе закончится ровно в одном автомате;

в) кофе закончится хотя бы в одном автомате.

3.9. Выведите ***формулу сложения вероятностей*** для двух событий:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Занятие 4

Геометрическая вероятность

Случайный выбор точки внутри отрезка или фигуры

4.1. В квадрате выбирается случайная точка. Найдите вероятность того, что выбранная точка принадлежит кругу, вписанному в квадрат.

4.2. Буратино посадил в центре прямоугольного лиса бумаги размером 20 см на 30 см круглую кляксу радиусом 1 см. Сразу после этого Буратино посадил ещё одну такую же кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы не соприкасаются.

4.3. На бесконечную шахматную доску, у которой все поля — квадраты со стороной 4, наудачу бросают монету радиусом 1.

а) Найдите вероятность того, что монета целиком попадёт в один квадрат.

б) Найдите вероятность того, что монета пересечёт не более одной стороны квадрата.

4.4. Стрелок производит выстрел в центр квадратной мишени с диагональю 2 м. Какова вероятность попасть в мишень, если пуля может отклониться от центра в случайном направлении и попасть в случайную точку квадрата или рядом с ним, но не дальше 1 метра от центра мишени?

4.5. Хрупкий карандашный грифель ломают в двух случайных точках. Найдите вероятность того, что из трёх получившихся частей можно составить треугольник.

4.6. Коля и Женя договорились встретиться в метро в первом часу дня. Коля приходит на место встречи между полуднем и часом дня, ждёт 10 минут и уходит. Женя поступает точно так же. Какова вероятность того, что они встретятся?

4.7. На кольцевой линии первый поезд отходит от станции в направлении по часовой стрелке в 6:00. В 6:01 от этой же станции отходит первый поезд в противоположном направлении. Далее поезда в каждую сторону ходят каждые 6 минут. Пассажир спускается на станцию в случайный момент времени, и ему всё равно, в какую сторону ехать, поэтому он уедет первым же поездом. Какова вероятность того, что он поедет в направлении по часовой стрелке?

4.8. Поезда метро в сторону центра и в сторону области идут через равные промежутки в 4 минуты каждый. Участник кружка по теории вероятностей спускается в метро в случайный момент времени и в задумчивости садится в первый приехавший поезд. Вероятность того, что он едет в сторону области, равна 0,25, а в сторону центра — 0,75. Может ли так быть? Если может, то каким образом?

4.9. Перед открытием ярмарки у первого крестьянина было 100 рублей, а у второго крестьянина — 200 рублей. Через некоторое время у каждого из них осталось некоторое количество денег, и тут крестьяне встретили цыгана, который предложил им игру на все деньги: если в этот момент у первого крестьянина больше денег, чем у второго, то первый выигрывает. Если у второго крестьянина денег больше, чем два раза по столько, сколько есть у первого, то выигрывает второй. Во всех иных случаях выигрывает цыган. Какова вероятность выигрыша цыгана? Предполагается, что крестьяне тратят деньги так, что в момент появления цыгана у каждого из них с равными шансами может остаться любая возможная сумма[1].

4.10. Аня, Боря и Вася решили пойти в кино. Они договорились встретиться на остановке. Каждый из них может прийти в случайный момент времени[2] с 15:00 до 16:00. Вася самый терпеливый из всех: если он придёт и на остановке не будет ни Ани, ни Бори, то он будет ждать кого-нибудь из них 15 минут, и если никого не дождётся, пойдёт в кино один. Боря менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Аня самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Боря и Вася встретятся, то они будут ждать Аню до 16:00. Какова вероятность того, что в кино они пойдут все вместе?

---

[1] Более точно: вероятность того, что у первого крестьянина осталось от a до b рублей, пропорциональна $b-a$. Разумеется, $a \geqslant 0$, а b не превосходит суммы, которая была у крестьянина сначала. Такое предположение, надо заметить, весьма искусственное.

[2] Здесь и в задаче 4.6 со временем предполагается примерно то же, что в задаче 4.9 с деньгами. А именно: вероятность прихода каждого в некоторый интервал времени пропорциональна длине этого интервала. И это предположение также искусственное.

Занятие 5

Деревья. Условная вероятность

Вычисление вероятностей вдоль цепочек в деревьях. Правило умножения вероятностей

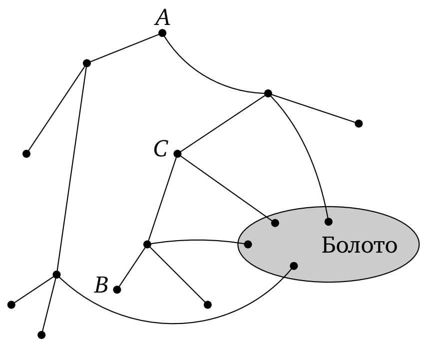
5.1. На рисунке показана схема тропинок в парке. Сергей Анатольевич начинает прогулку из точки A, на каждой развилке выбирает дальнейший путь случайным образом и гуляет до тех пор, пока тропинка не кончится. Ещё известно, что он нигде не поворачивает назад. Найдите вероятность того, что Сергей Анатольевич:

а) придёт в точку B;

б) пройдёт через точку C, но в точку B не попадёт;

в) придёт в болото;

г) пройдёт через точку C, но в болото не придёт.



5.2. 30 % автомобильных фонарей изготавливают на заводе в городе В, а остальные — на заводе в городе К. В городе В в среднем случается 4 % брака, а в городе К — в среднем 2 % брака.

а) Найдите вероятность того, что случайный фонарь в магазине окажется бракованным.

б) Известно, что покупатель Иванов приобрёл бракованный фонарь. Чему теперь равна вероятность того, что этот фонарь изготовлен в городе В?

в) Известно, что покупатель Петров приобрёл хороший фонарь. Чему теперь равна вероятность того, что этот фонарь изготовлен в городе К?

5.3. На фабрике керамической посуды делают тарелки. В среднем 10 % тарелок имеют дефект. Перед упаковкой тарелки проходят контроль качества. Он выявляет в среднем 80 % бракованных тарелок, которые идут в переработку. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что одна случайно выбранная в магазине тарелка окажется:

а) бракованной; б) без дефектов (не бракованная).

5.4. В семье один из двух детей — мальчик. Какова вероятность[1] того, что другой ребёнок — девочка?

5.5. В семье двое детей. Известно, что старший ребёнок — мальчик. Какова вероятность того, что второй ребёнок — девочка?

5.6. В семье двое детей. Известно, что один из детей — мальчик, родившийся в понедельник. Какова вероятность того, что другой ребёнок — тоже мальчик?

[1] В задачах 5.4—5.6 предполагается, что рождение мальчика и рождение девочки равновероятны, хотя на самом деле это не так. Как правило, мальчиков рождается немного больше, чем девочек.

Занятие 6

Деревья (продолжение)

Более сложные задачи с деревьями. Простейшие прогнозы

6.1. В семье Петровых четверо детей. Какова вероятность[1] того, что из них:

а) ровно двое — мальчики? б) ровно трое — мальчики?

6.2. Пусть S — число мальчиков в семье Петровых из задачи 6.1.

а) Какие значения может принимать S?

б) Найдите вероятность каждого из этих значений.

6.3. Предположим, что мы хотим купить подарки каждому ребёнку в семье Петровых из задачи 6.1. Мальчикам — самолётики, девочкам — кукол. К сожалению, мы забыли узнать, сколько мальчиков, а сколько девочек в семье. Каждый подарок стоит 1000 руб. Сделайте наиболее правдоподобный прогноз.

а) Какую сумму нужно затратить, руководствуясь вашим прогнозом?

б) Какова вероятность ошибки вашего прогноза?

в) Какие другие прогнозы возможны?

г) Как меняется достоверность и стоимость прогноза?

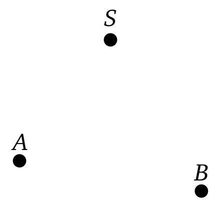
д) Какой прогноз будет наилучшим с вашей точки зрения?

6.4. На графе изображено начало эксперимента S и два события: A и B.

а) Изобразите на графе цепочки, приводящие к тому, что события A и B осуществились вместе (к событию $A \cap B$).

б) Известно, что

$$P(A)=0{,}4, \quad P(B)=0{,}5, \quad P(A|B)=0{,}2.$$



Найдите вероятность события $P(B|A)$.

[1] В задачах 6.1—6.3, как и раньше, считайте, что рождение мальчика и рождение девочки равновероятны и что пол каждого последующего новорожденного не зависит от пола старших детей в семье.

6.5. У собак встречается опасное заболевание — пироплазмоз[1]. При подозрении на пироплазмоз, нужно взять анализ крови. Анализ оказывается положительным (показывает наличие возбудителя пироплазмоза) в 5 % случаев. Но бывает (всего 2 % случаев), что диагноз оказывается положительным у здоровой собаки. Ещё известно, что диагноз «пироплазмоз» в конечном итоге подтверждается всего в 4 % случаев. У такса Робина анализ на пироплазмоз оказался положительным. Найдите вероятность того, что Робин действительно болен пироплазмозом.

6.6. 40 % пакетов с молоком производят на молочном комбинате в Л., а остальные — на молокозаводе в С. Известно, что в среднем 3 % пакетов, поступивших в продажу, протекает, а среди пакетов, изготовленных в Л., протекают в среднем 5 %. Найдите вероятность того, что протекающий пакет изготовлен на заводе в С.

[1] Пироплазмоз переносят клещи, широко распространённые в средней полосе России. Людям это заболевание не грозит (хотя клещи переносят и некоторые человеческие болезни). Если собаку укусил клещ, лучше не откладывая сдать анализ на пироплазмоз.

Занятие 7

Независимые события

Надёжность тормозов. Зачем нужны два платёжных автомата даже там, где мало клиентов. «Парадокс независимости»

7.1. Докажите, что при двукратном бросании игральной кости события «В первый раз выпало 4» и «Во второй раз выпало больше 3» ***независимы***.

7.2. В магазине стоят два платёжных терминала, которые работают независимо друг от друга. Предположим, что вероятность отказа каждого из них в течение дня равна 0,1.

а) Найдите вероятность того, что хотя бы один к вечеру неисправен.

б) Найдите вероятность того, что к вечеру окажутся неисправны оба.

7.3. В автомобиле два независимых тормозных контура. Предположим, что вероятность отказа каждого из них на протяжении межсервисного интервала[1], равна 0,00001.

а) Найдите вероятность отказа одного из контуров.

б) Найдите вероятность полного отказа тормозов.

в) Стоит ли для повышения степени безотказности вводить третий контур?

7.4. Игральная кость имеет форму треугольной пирамиды (правильного тетраэдра). На одной грани нарисован синий кружок, на другой — зелёный, на третьей — красный, а на четвёртой нарисованы кружки всех трёх цветов. Кость бросают и смотрят, какой гранью вниз она упала на стол.

а) Являются ли независимыми события «На выпавшей грани есть синий кружок» и «На выпавшей грани есть красный кружок»?

[1] Интервал между двумя техническими обслуживаниями. Измеряется в месяцах или в километрах пробега. В техпаспорте межсервисный интервал указан заводом. Например, может быть написано, что автомобиль должен проходить обслуживание каждые 15 000 км пробега или не реже раза в 18 месяцев. Техническим обслуживанием нельзя пренебрегать — регулярность обслуживаний позволяет поддерживать тормоза и другие ответственные системы машины в первоначально надёжном состоянии.

б) Являются ли ***независимыми*** три события «На выпавшей грани есть синий кружок», «На выпавшей грани есть зелёный кружок» и «На выпавшей грани есть красный кружок»?

7.5. Пётр Иванович считает, что события «В огороде бузина» и «В Киеве дядька» независимы. Вероятность первого события равна 0,3, вероятность второго — 0,4. За последние два года ежедневных наблюдений оба события наблюдались совместно 275 раз. Какое предположение напрашивается?

7.6. Придумайте четыре события, которые независимы попарно, но не в совокупности.

7.7. Докажите, что если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$ также независимы.

Занятие 8

Графы с циклами и формула полной вероятности

Граф с циклами приводит к сумме геометрической прогрессии, а формула полной вероятности даёт уравнения. Простейшее случайное блуждание и задача о разорении

8.1. Докажите, что при последовательных бросаниях монеты рано или поздно с вероятностью 1 выпадет орёл.

8.2. Муха двигается из начала координат только вправо или вверх по линиям целочисленной сетки. В каждом узле сетки муха случайным образом выбирает направление дальнейшего движения: вверх или вправо. Докажите, что рано или поздно с вероятностью 1 муха достигнет точки с абсциссой 2017.

8.3. Ковбои Джо и Хью стреляют в тире, но у них есть только один шестизарядный револьвер с одним патроном. Поэтому они договорились по очереди случайным образом крутить барабан и стрелять. Начинает Джо. Найдите вероятность того, что выстрел произойдёт, когда револьвер будет у Хью.

8.4. Кузнечик прыгает по числовой прямой, начиная из точки 0. Каждую секунду он с равными вероятностями прыгает влево или вправо на единицу.

а) Докажите, что с вероятностью 1 рано или поздно он попадёт в точку 1.

б) Докажите, что с вероятностью 1 рано или поздно он вернётся в точку 0.

8.5. а) У Джо есть два доллара, а у Хью только один доллар. Они играют в орлянку. Если выпадает орёл, то Джо отдаёт доллар Хью, а если решка — Хью отдаёт доллар Джо. Игра заканчивается, когда кто-нибудь из них остаётся без денег. Найдите вероятность того, что выиграет Хью.

б) Та же задача, если у Джо три доллара, а у Хью — два.

Занятие 9

Случайный выбор

Одновременный и последовательный случайный выбор дают одинаковые результаты. Иногда удобно считать, что мы выбираем, а иногда — что нас выбирают

9.1. Чему равна вероятность вытянуть туза пик из колоды в 36 карт при: а) одновременном выборе 5 карт; б) последовательном выборе 5 карт?

9.2. На экзамене студенты заходят в аудиторию по очереди и тянут билет. Нерадивый студент Петя успел выучить только один билет из двадцати и теперь не может решить, каким по счёту ему стоит встать в очередь, чтобы с наибольшей вероятностью вытянуть свой счастливый билет. Что бы вы посоветовали Пете?

9.3. В магазине в коробке 9 синих и 15 красных карандашей. По просьбе покупателя продавец не глядя вынимает два карандаша. Найдите вероятность того, что оба карандаша окажутся: а) синими; б) красными.

9.4. В школьном конкурсе короткого рассказа победили 5 человек, из них 2 девочки и 3 мальчика, и нет никакой возможности определить, чей рассказ лучше. Но на районный конкурс принимаются только три рассказа от школы. Было решено выбрать эти три рассказа с помощью честного жребия. Чему равна вероятность того, что авторами всех трёх выбранных рассказов окажутся мальчики?

9.5. Катя, Лена и Маша по очереди покупают себе по одному леденцу в магазине. Продавец не глядя достаёт их из коробки, в которой лежат 10 апельсиновых, 9 лимонных и 6 яблочных леденцов. Найдите вероятность того, что:

а) Катя и Лена получат лимонные леденцы, а Маша — яблочный;

б) все трое получат апельсиновые леденцы.

9.6. Двое друзей — Вася и Петя — случайным образом между собой разделили 100 лотерейных билетов. Известно, что два билета — выигрышные. Чему равна вероятность того, что Пете достанется хотя бы один выигрышный билет?

Занятие 10

Комбинаторика. Правило умножения. Отождествление

Коды и автомобильные номера. Как правильно раскрашивать палочки, карусели и браслеты

10.1. Сколько существует способов поставить в очередь

а) трёх человек; б) пять человек;

в) семь человек; г) n человек?

10.2. Международный код аэропорта состоит из трёх латинских букв[1]. Например, аэропорт Шереметьево имеет код SVO. Сколько различных кодов аэропортов можно составить?

10.3. Из 10 цифр и 12 букв русского алфавита[2] нужно составить автомобильные номера. В номере сначала буква, затем три цифры (кроме 000) и ещё две буквы. Сколько можно составить различных номеров?

10.4. У Тома Сойера имеется забор из 5 досок. Ещё у Тома есть 12 банок с разными красками. Сколько существует раскрасок забора, если никакая доска не должна быть разноцветной и, кроме того:

а) разные доски можно красить одним цветом;

б) каждая доска должна быть своего цвета?

10.5. Сколько существует натуральных чисел-палиндромов (читающихся в обе стороны одинаково), если эти числа:

а) трёхзначные; б) четырёхзначные;

в) 11-значные; г) n-значные?

10.6. Деревянную палочку длиной 70 см, одинаковую с обоих концов, нужно раскрасить поперёк семью разноцветными поясками, каждый по 10 см шириной. Имеется 10 различных красок. Сколько существует вариантов раскраски?

---

[1] В латинском алфавите 26 букв.

[2] В автомобильных номерах используются только те буквы кириллицы, которые по написанию совпадают с какими-то латинскими. Например, буква Х выглядит как латинская X, хотя это совсем разные буквы.

10.7. На карусели семь лошадок, которых нужно раскрасить. Лошадки не пронумерованы. Имеется 10 разных красок, но красить всех лошадок одним цветом нельзя — скучно. Нужно использовать хотя бы два цвета. Сколько всего существует способов раскраски:

а) если каждая лошадка должна быть своего цвета;

б) лошадки могут быть покрашены одинаково (но не все!)?

10.8. Браслет состоит из семи бусин, которые нужно раскрасить так, чтобы каждая бусина была своего цвета. Имеется 10 разных красок. Сколько существует способов раскраски?

Занятие 11

Сочетания

Число сочетаний. Треугольные числа. Свёртка Вандермонда

11.1. Турист хочет купить магниты в магазине сувениров. В продаже есть пять разных магнитов. Сколько существует способов выбрать а) 3 магнита из 5; б) 2 магнита из 5?

11.2. Сколько существует способов выбрать 6 человек из десятка?

11.3. Сколько существует способов поставить ладей на шахматную доску, чтобы никакие две ладьи не били друг друга, если ладей а) восемь; б) семь; в) k штук, $2 \leqslant k \leqslant 8$?

11.4. Из 9 точек никакие три не лежат на одной прямой. Каждые две соединили отрезком. Сколько всего получилось отрезков?

11.5. Из 10 точек никакие четыре не лежат в одной плоскости. Сколько можно сделать треугольников с вершинами в данных точках?

11.6. Продавщица для красоты выстраивает на прилавке банки с тушёнкой треугольником — в каждом ряду на одну банку меньше, чем в предыдущем, а в самом верхнем — только одна банка. Не всякое число банок можно поставить таким образом. Назовём такое число банок треугольным. Найдите общую формулу для треугольных чисел.

11.7. Сколько существует способов разбить число 10 на три натуральных слагаемых с учётом порядка[1] разбиения?

11.8. Миша решил купить на Новый год десяти своим друзьям десять подарков: ёлочных игрушек, свечек и обезьянок. Сколько способов скомпоновать покупку, если в ней должна быть хотя бы одна игрушка, хотя бы одна свечка и хотя бы одна обезьянка?

11.9. Как решить задачу 11.8, если в комплекте не обязательно должны быть подарки всех трёх видов?

---

[1] Слова «с учётом порядка» означают, что если разбиения отличаются порядком слагаемых, то они считаются разными. Например, разбиения $1+2+7$ и $2+7+1$ — два разных разбиения.

11.10. В коробке 4 зелёных шарика и 5 красных шариков. Сколько существует способов выбрать 6 шариков так, чтобы среди них оказалось ровно 2 зелёных?

11.11. В коробке N зелёных шариков и M красных шариков. Сколько существует способов выбрать из этой коробки набор, в котором n зелёных шариков и m красных?

11.12. Докажите формулу ***свёртки Вандермонда***[1]:

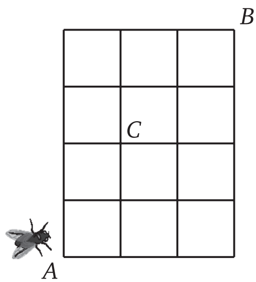
$$C_N^0 C_M^k + C_N^1 C_M^{k-1} + C_N^2 C_M^{k-2} + \ldots + C_N^k C_M^0 = C_{N+M}^k.$$

[1] Александр Теофил Вандермонд — французский математик. Жил в XVIII веке.

Занятие 12

Комбинаторика в вероятностных задачах

Применение комбинаторных формул для перечисления элементарных исходов. Формула Бернулли



12.1. Муха ползёт по решётке 3×4 из точки A в точку B по линиям сетки только вправо или вверх (см. рис.).

а) Сколько существует маршрутов из точки A в точку B?

б) Предположим, что муха равновероятно выбирает один из всех имеющихся маршрутов[1]. Чему равна вероятность того, что муха выберет маршрут, проходящий через точку C?

12.2. В коробке 4 зелёных шарика и 5 красных шариков. Чему равна вероятность того, что при случайном выборе:

а) из 6 выбранных шариков окажется 2 зелёных и 4 красных;

б) 2 выбранных шарика окажутся разного цвета?

12.3. Кандидатами в сборную по игре в крестики-нолики являются 5 девушек и 6 юношей. Команда должна состоять из трёх человек, которых выбирают жеребьёвкой. Чему равна вероятность того, что:

а) команда будет состоять только из девушек;

б) в команде будет хотя бы одна девушка?

12.4. В коробке есть ленты трёх цветов: 9 красных, 8 синих и 7 зелёных.

а) Случайным образом выбирают 3 ленты. Чему равна вероятность того, что среди нет двух одинакового цвета?

б) Случайным образом выбирают 6 лент. Чему равна вероятность того, что их них 3 красных, 2 синих и 1 зелёная?

---

[1] Это не то же самое, как если бы муха в каждом узле сетки выбирала направление дальнейшего движения — вправо или вверх. В этом случае получается другое множество элементарных исходов и другой результат.

12.5. На конкурс юных гениев приехали гении из разных стран: пятеро из Канады, шестеро из России и восемь человек из Австрии. Очерёдность выступлений выбирается жеребьёвкой. Чему равна вероятность того, что первые три выступающих будут из одной страны?

12.6. В тираже лотереи «5 из 36» пять случайных номеров из тридцати шести объявляются выигрышными. Перед тиражом участник в своём лотерейном билете помечает 5 из 36 номеров. Чему равна вероятность того, что:

а) участник угадает все 5 выигрышных номеров;

б) участник угадает 4 из 5 выигрышных номеров;

в) участник угадает 3 из 5 выигрышных номеров?

12.7. Монетку подбрасывают 10 раз. С какой вероятностью найдутся два идущих подряд броска с одинаковым[1] результатом?

12.8. Что вероятнее — выпадение хотя бы одной шестёрки из шести бросков кубика или выпадение хотя бы двух шестёрок при двенадцати бросках[2]?

12.9. Кубик бросили шесть раз. Какова вероятность того, что среди выпавших чисел есть хотя бы два одинаковых?

12.10. Стрелок стреляет по мишени. Известно, что вероятность попадания каждый раз равна $p = 0{,}3$. Какова вероятность того, что стрелок попадёт ровно:

а) два раза из трёх попыток;

б) три раза из четырёх попыток;

в) три раза из семи попыток?

[1] То есть два орла или две решки подряд.

[2] Эта задача не примечательна ничем, кроме того, что её задал сэру Исааку Ньютону чиновник английского Адмиралтейства Сэмюэль Пипс, известный любовью к игре в кости.

Занятие 13

Три эксперимента с успехом и неудачей

Каждая задача в этом занятии сводится к одной из трёх схем, которые часто встречаются в жизни

13.1. Производится стрельба по мишени. Вероятность поразить мишень при каждом одном выстреле равна 0,3. Найдите вероятность того, что первое попадание в мишень случится на:

а) 1-й попытке; б) 2-й попытке; в) 7-й попытке;

г) на k-й попытке; д) никогда не наступит.

13.2. Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Найдите вероятность того, что будет сделано ровно 5 бросков.

13.3. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет 5 или 6 очков. Найдите вероятность того, что будет сделано 8 бросков.

13.4. Обобщите три предыдущие задачи: производится серия одинаковых и независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании. Испытания проводятся до тех пор, пока не наступит первый успех. Запишите формулу для вероятности того, что потребуется ровно k попыток.

13.5. Стрелок делает по одному выстрелу по каждой из 10 мишеней. Вероятность поразить мишень при одном выстреле равна 0,3. Найдите вероятность того, что будут поражены ровно:

а) 1 мишень; б) 2 мишени; в) 7 мишеней;

г) k мишеней, $k \leqslant 10$; д) ни одной мишени.

13.6. Монету бросают 8 раз. Найдите вероятность того, что выпадет ровно:

а) 4 орла; б) 5 орлов; в) 3 орла.

13.7. Игральную кость бросают 9 раз. Успехом считается выпадение 5 или 6 очков. Найдите вероятность, что успех наступит не менее двух раз.

13.8. Обобщив три предыдущие задачи, запишите формулу вероятности числа успехов k в серии из n одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом.

13.9. В ящике 6 красных шаров и 5 белых. Из ящика достают 8 шаров. Найдите вероятность того, что среди них окажется:

а) 4 красных; б) 2 красных; в) 7 красных.

13.10. Обобщим задачу 13.9. Имеется множество из N объектов первого типа и M объектов второго типа. Наудачу выбирают $n+m$ объектов. Какова вероятность того, что среди них окажется ровно n первого типа и m — второго? Разумеется, считаем, что $n \leqslant N$ и $m \leqslant M$.

13.11. Чем принципиально отличаются задачи 13.5—13.8 от задач 13.9 и 13.10? Есть ли что-то общее в формуле биномиальной вероятности $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ (задачи 13.5—13.8) и в ***формуле гипергеометрической вероятности*** $\frac{C_N^n C_M^m}{C_{N+M}^{n+m}}$?

Занятие 14

Бинарная случайная величина

Случайная величина, которая принимает всего два значения 0 и 1, оказывается удивительно полезной при решении разных задач

14.1. Событие A состоит в выпадении двух орлов подряд в опыте с двукратным бросанием монеты. Составьте распределение ***бинарной случайной величины*** I_A — ***индикатора*** события A.

Решение. Величина I_A принимает значение 1, только если подряд два раза выпал орёл. Вероятность этого 0,25. В противном случае $I_A = 0$. Получаем распределение:

$$I_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

14.2. Дважды бросают игральную кость. Рассмотрим два события: A — «Хотя бы один раз выпала шестёрка», и B — «Сумма выпавших очков равна 9».

Составьте распределения индикаторов I_A, I_B, $I_{A\cup B}$ и $I_{A\cap B}$.

14.3. Стрелок стреляет по мишени до тех пор, пока не попадёт в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна p, а вероятность промаха равна $q = 1 - p$. Составьте распределение индикаторов событий:

а) успешным оказался первый же выстрел;

б) успешным оказался второй выстрел;

в) успешным оказался десятый выстрел;

г) успешным оказался k-й выстрел;

д) пятый выстрел неудачный;

е) k-й выстрел неудачный.

14.4. Монету бросают пять раз.

а) Для каждого броска с номером $k = 1, 2, 3, 4, 5$ составьте распределение индикатора события «Выпал орёл».

б) Рассмотрим случайную величину S — «Число выпавших орлов». Как случайная величина S выражается через эти индикаторы?

14.5. Сергей дошёл до 3-го уровня в компьютерной игре. Вероятность пройти этот уровень равна p в каждой попытке, независимо от предыдущих (вероятность не пройти равна $q = 1 - p$).

а) Составьте распределение индикатора события «k-я попытка оказалась неудачной» (ср. с задачей 14.3 е)).

б) Используя результат п. а), выразите через индикаторы случайную величину X «Число потребовавшихся попыток».

14.6. На празднование Нового Года собралось 10 гостей. Каждый принёс подарок (гостинец). Все гостинцы разыгрывались между всеми гостями. Каждый гость получил какой-то случайный гостинец.

а) Напишите распределение индикатора события «k-му гостю достался его же собственный гостинец».

б) Используя результат п. а), выразите через индикаторы случайную величину «Количество гостей, которые получили свой же гостинец».

Занятие 15

Случайные величины и распределения

Знакомство с более сложными случайными величинами и построение их распределений

15.1. Даны две случайные величины и их распределения:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}4 & p \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & q \end{pmatrix}.$$

а) Найдите p и q.

б) Найдите возможные значения[1] случайных величин $Z = X + Y$, $W = XY$ и $T = \frac{Y}{X}$.

15.2. Игральную кость бросают один раз. Напишите распределение случайной величины «Число выпавших очков».

15.3. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет 6 очков. Рассмотрим случайную величину X — «Количество сделанных бросков».

а) Какие значения принимает X?

б) Напишите распределение величины X.

15.4. Монету бросают 8 раз. Напишите распределение случайной величины «Число выпавших орлов».

15.5. Возьмём случайную величину «Рост взрослого мужчины в европейской части России», выраженную в сантиметрах (с округлением до целого).

а) Как вы думаете, какие значения может принимать эта случайная величина?

б) Как примерно должна выглядеть диаграмма распределения этой случайной величины? Нарисуйте эскиз этой диаграммы и попробуйте объяснить, почему, по вашему мнению, она выглядит именно так, а не иначе.

---

[1] Про независимость или зависимость случайных величин X и Y ничего не известно. Подразумевается, что возможна любая пара значений X и Y.

15.6. В Анчурии популярна лотерея «4 из 16». На билете написаны числа от 1 до 16. Цена билета 2 анчурийских доллара. Участник лотереи должен выбрать 4 числа. Потом проводится тираж — выбираются 4 случайных выигрышных номера. Если участник угадал все 4 номера, то получает 100 долларов, если 3 номера — 40 долларов, если 2 номера — 2 доллара, если 1 номер или меньше, то игрок не получает ничего. Составьте распределение случайной величины «Выигрыш на один билет» с учётом цены билета.

Занятие 16

Математическое ожидание

Непосредственное вычисление ожиданий. Математическое ожидание бинарной величины. Что больше — квадрат или прямоугольник?

16.1. Найдите ***математическое ожидание*** бинарной случайной величины

а) $I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; б) $I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; в) $I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$.

16.2. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, б) $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$,

в) $X+Y$; г) X^2; д) $2X^2-3Y$.

16.3. Ася и Вася вырезают из глянцевой бумаги цветные прямоугольники, чтобы украсить класс к Новому Году. Ася бросает две игральные кости и вырезает прямоугольник. Например, если выпало 2 и 3, Ася вырезает прямоугольник 2 см × 3 см. Вася ленив. Он бросает кость один раз и вырезает квадрат, у которого сторона (в см) равна выпавшему числу очков. Найдите:

а) среднюю площадь Асиного прямоугольника;

б) среднюю площадь Васиного квадрата.

16.4. За контрольную работу Вася может получить оценку от 2 до 5. Вероятность двойки равна 0,2. Вероятность того, что оценка будет не больше 3, равна 0,4, не больше 4 — 0,8. Найдите математическое ожидание Васиной оценки за контрольную работу.

16.5. Монету бросают 3 раза. Найдите математическое ожидание числа выпавших орлов.

16.6. Приведите пример случайной величины, для которой математическое ожидание:

а) совпадает с самым вероятным значением;

б) меньше самого вероятного значения.

16.7. В Анчурии популярна лотерея «4 из 16». На билете числа от 1 до 16. Цена билета 2 доллара. Участник лотереи должен выбрать 4 числа. Потом проводится тираж — выбираются 4 случайных выигрышных номера. Если участник угадал все 4 номера, то получает 100 долларов, если 3 номера — 40 долларов, если 2 номера — 2 доллара, если угадал 1 номер или ничего не угадал, то ничего не получает. Найдите математическое ожидание случайной величины «Выигрыш на один билет» с учётом цены билета.

16.8. В колоде 36 игральных карт. Их начинают открывать по одной до тех пор, пока не появится первый туз. Найдите математическое ожидание числа открытых карт.

16.9. Иван Сергеевич обнаружил, что новогодняя гирлянда не горит — перегорела какая-то одна из 10 лампочек. Иван Сергеевич проверяет лампочки по очереди до тех пор, пока не поймёт, какая лампочка перегорела. Считая, что лампочки одинаковы и перегорают независимо друг от друга с равными шансами, найдите математическое ожидание числа лампочек, которые проверит Иван Сергеевич.

Занятие 17

Три важных распределения

Обобщение материала нескольких предыдущих занятий. Геометрическая, биномиальная и гипергеометрическая схемы

Задача 1. Игральную кость бросают 100 раз. Найдите математическое ожидание числа выпавших шестёрок.

Задача 2. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Найдите математическое ожидание числа бросаний.

Задача 3. В отаре 240 овец. Известно, что ровно 40 из них — чёрные. Случайным образом отлавливают 100 овец. Найдите математическое ожидание числа отловленных чёрных овец.

Что общего в этих трёх задачах? Все три эксперимента построены из отдельных испытаний с вероятностью успеха $p=\frac{1}{6}$ в каждом. На этом сходство более-менее заканчивается. Правда, между первой и третьей задачами можно уловить дополнительные общие черты: в обоих случаях речь идёт о выборке объёмом 100. Но есть и серьёзное отличие. В первой задаче вероятность появления шестёрки при каждом броске одна и та же, а в третьей задаче вероятность появления чёрной овцы меняется по мере того, как мы узнаем цвета уже отловленных овец[1]. Вероятность того, что первая выбранная овца будет чёрной, равна $\frac{40}{240}=\frac{1}{6}$, а затем, в зависимости от того, какая овца попалась первой, вероятность того, что вторая овца окажется чёрной, равна либо $\frac{39}{239}$, либо $\frac{40}{239}$.

Ясно, что мы имеем дело с тремя различными случайными величинами.

1. S — «Число успехов в n одинаковых независимых испытаниях с вероятностью успеха p в каждом испытании».

[1] Сравните с задачей 13.11. И там и здесь, в целом, речь идёт об одном и том же.

2. X — «Число попыток до появления первого успеха в серии одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании».

3. S — «Число меченых элементов (успехов) в случайной выборке объёма n из совокупности объёма N, в которой содержится K меченых элементов».

Наша цель — найти распределение каждой из этих величин и её математическое ожидание.

Биномиальное распределение

Пусть n — число испытаний в серии одинаковых независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом. Элементарный исход такого опыта — последовательность вида

$$\underbrace{\text{НУУНННУНУНННУН}}_{n\ \text{букв}}$$

Буква У означает успех, а буква Н — неудачу. Вероятность любой такой последовательности, в которой ровно k успехов и $n-k$ неудач, равна $p^k(1-p)^{n-k}$, а количество таких последовательностей равно C_n^k. Обозначая для краткости вероятность неудачи $1-p$ буквой q, получаем

$$\mathrm{P}(S=k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

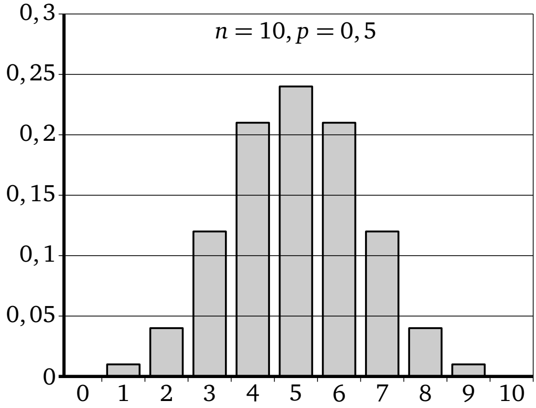
Это ***формула Бернулли***. Она даёт распределение случайной величины S — «Число успехов». Такое распределение называется ***биномиальным***. Числа n и p являются ***параметрами распределения***.

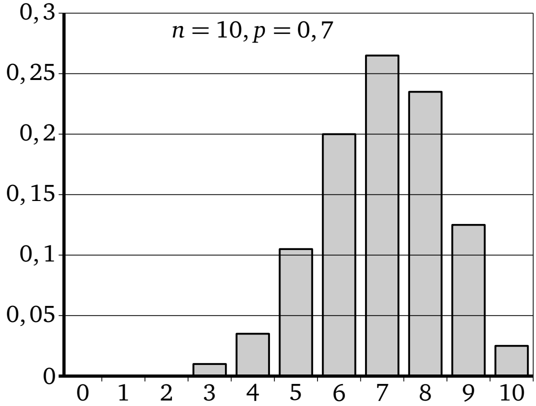
Диаграмма биномиального распределения при $p=\frac{1}{2}$ имеет колоколообразную форму. На рисунке показаны диаграммы биномиальных распределений для $n=10$ и для двух различных значений p.

Перед разговором о математическом ожидании вернёмся к задаче 1. Ясно, что при 100 бросках кости следует ожидать в среднем $100\cdot\frac{1}{6}=16\frac{2}{3}$ шестёрок. Это интуитивное представление о доле успехов справедливо. Тогда в общем случае математическое ожидание равно np. Иными словами, должно быть верно равенство

$$\mathrm{E}S=0\cdot C_n^0p^0q^n+1\cdot C_n^1p^1q^{n-1}+2\cdot C_n^2p^2q^{n-2}+\ldots+n\cdot C_n^np^nq^0=pn. \quad (1)$$

Сразу скажем, что это равенство можно вывести преобразованиями, упрощая левую часть. Но мы применим ***метод индикаторов***. Пусть I_k — индикатор события «В испытании номер k наступил





успех». Распределение всех индикаторов одинаковое:

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\mathrm{E}I_k = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$. Общее число успехов — это сумма числа успехов в каждом отдельном испытании:

$$S = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n.$$

Переходя к ожиданиям, получаем

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \mathrm{E}I_3 + \ldots + \mathrm{E}I_n = np.$$

Геометрическое распределение

Теперь число испытаний не определено. Опыт заканчивается, как только появляется первый успех, а это может случиться как угодно поздно. Вероятность каждого из событий $X=k$ найти несложно:

$$\mathrm{P}(X=1)=p,\quad \mathrm{P}(X=2)=qp,\quad \mathrm{P}(X=3)=q^2p,$$
$$\mathrm{P}(X=4)=q^3p,\quad \ldots,\quad \mathrm{P}(X=k)=q^{k-1}p,\quad \ldots$$

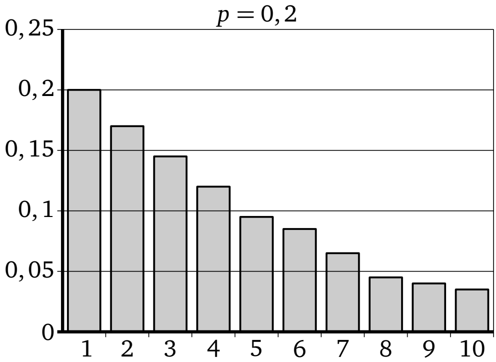
Эти формулы и дают нужное распределение. Вероятности образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q, и сумма всех вероятностей должна равняться единице:

$$p+qp+q^2p+q^3p+\ldots=1,$$

несмотря на то, что слагаемых бесконечно много. Отсюда, кстати, следует важный факт алгебры — ***формула суммы геометрической прогрессии***:

$$1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots=\frac{1}{p}=\frac{1}{1-q}.$$

Отсюда и название распределения случайной величины X — ***геометрическое распределение***. Единственный параметр распределения — вероятность успеха p. Диаграмма геометрического распределения при $p=0{,}2$ показана на рисунке.



А что с математическим ожиданием? Есть ли оно вообще у такого распределения? Поможет ли нам интуиция и в этом случае? Поможет. Вспомним задачу 2. Представим, что мы бросаем игральную кость много-много раз. Вероятность шестёрки равна $\frac{1}{6}$, поэтому шестёрка будет выпадать в среднем каждый шестой раз. Следовательно, среднее число бросков до выпадения шестёрки должно равняться шести.

В общем случае вероятность успеха равна p, поэтому математическое ожидание числа бросков до первого успеха должно равняться $\frac{1}{p}$, то есть должно выполняться равенство

$$\mathrm{E}X = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \ldots = \frac{1}{p}. \qquad (2)$$

Но так ли это на самом деле? Может, мы с нашей интуицией не учли какое-нибудь обстоятельство? В левой части заменим p выражением $1-q$. Получим:

$$(1-q) + 2q(1-q) + 3q^2(1-q) + 4q^3(1-q) + \ldots =$$
$$= 1 - q + 2q - 2q^2 + 3q^2 - 3q^3 + 4q^3 - 4q^4 + \ldots$$

Сгруппируем слагаемые иначе:

$$1 + 2q - q + 3q^2 - 2q^2 + 4q^3 - 3q^3 + \ldots = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

А эту сумму мы уже знаем:

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

В рассуждении мы допустили неаккуратность — переставляли местами слагаемые. Все знают, что от перестановки двух, трёх или даже сотни слагаемых сумма не меняется. Но здесь мы переставляем бесконечное число слагаемых. Вообще говоря, от такого действия сумма может меняться и даже очень сильно (попробуйте самостоятельно придумать пример). Можно ли дать другое доказательство? Попробуем индикаторы. Пусть I_k — индикатор события «k испытаний окончились неудачей»,

$$\mathrm{E}I_k = q^k.$$

Общее число попыток на единицу больше числа неудачных попыток:

$$X = 1 + I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$$

Поэтому $\mathrm{E}X = 1 + \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \mathrm{E}I_3 + \ldots$, откуда сразу получается

$$\mathrm{E}X = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{p}.$$

Гипергеометрическое распределение

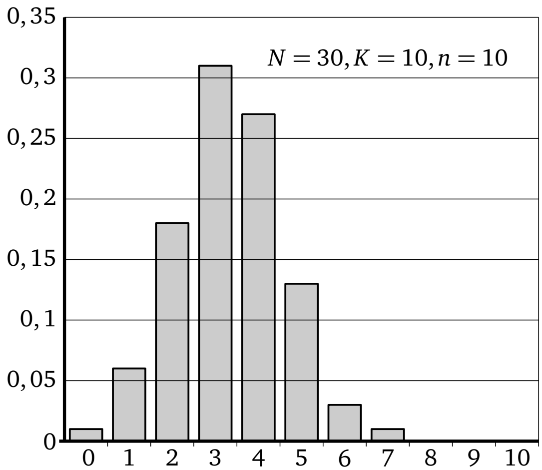
Имеется множество из N объектов, из которых K — меченые (например, чёрные овцы). Выбираем случайным образом n объектов. Какова вероятность того, что среди выбранных объектов (успехов) число S меченых объектов окажется равно k?

Ясно, что выбрать k объектов из K и $n-k$ объектов из оставшихся $N-K$ можно $C_K^k C_{N-K}^{n-k}$ способами, тогда как общее число способов выбрать n объектов равно C_N^n. Используя равновозможность всех комбинаций, получаем искомую вероятность:

$$\mathrm{P}(S=k)=\frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Эта формула даёт ***гипергеометрическое распределение*** случайной величины S.

Диаграмма гипергеометрического распределения для одного конкретного случая (параметры $N=30$, $K=10$, $n=10$) показана на рисунке. Как видим, диаграмма тоже колоколообразная, а при больших N разница между гипергеометрическим распределением и биномиальным распределением с вероятностью успеха $p=\frac{K}{N}$ невелика.



Займёмся математическим ожиданием. Снова попробуем применить интуицию. Кажется очевидным, что доля чёрных овец в выборке из 100 штук в среднем должна быть такой же, как доля чёрных овец во всей отаре. То есть, должно выполняться равенство

$\frac{\mathrm{E}S}{100}=\frac{40}{240}$, откуда $\mathrm{E}S=100\cdot\frac{1}{6}$, а в общем случае $\mathrm{E}S=n\frac{K}{N}$, что очень напоминает формулу математического ожидания биномиального распределения. Иными словами, должно выполняться равенство

$$\mathrm{E}S=0\cdot\frac{C_K^0C_{N-K}^{n-0}}{C_N^n}+1\cdot\frac{C_K^1C_{N-K}^{n-1}}{C_N^n}+2\cdot\frac{C_K^2C_{N-K}^{n-2}}{C_N^n}+\ldots+m\cdot\frac{C_K^mC_{N-K}^{n-m}}{C_N^n}=n\frac{K}{N}. \quad (3)$$

(число m — наибольшее возможное число меченых объектов в выборке, т. е. наименьшее из n и K, ведь число меченых объектов в выборке не может быть больше ни объёма выборки, ни общего числа меченых объектов во всей совокупности).

Пока что это равенство обосновано только нашей интуицией. Можно попытаться доказать его, преобразуя сумму в левой части, что весьма непросто. А индикаторы? Пронумеруем объекты выборки каким-либо образом. Например, в порядке отлова (если это овцы). Пусть I_k — индикатор события «k-й объект в выборке оказался меченым». Очевидно,

$$\mathrm{E}I_k=\frac{K}{N}.$$

Дальше проделайте выкладки сами точно так же, как мы поступили в случае с биномиальным распределением. Убедитесь, что и на сей раз интуиция нас не подвела:

$$\mathrm{E}S=n\frac{K}{N}.$$

Мы познакомились с индикаторами в действии, при этом намеренно использовали индикаторы для подтверждения интуитивно ясных предположений. Однако, согласитесь, если бы вас попросили доказать любое из трёх тождеств (1)—(3), вы вряд ли с лёгкостью сумели бы справиться с этим, используя только алгебраические преобразования.

В других случаях ***метод индикаторов*** даёт гораздо менее очевидные и ожидаемые результаты. На следующем занятии мы решим несколько задач, где индикаторы помогают в совершенно безнадёжной, казалось бы, ситуации.

Занятие 18

Метод индикаторов

Как с помощью индикаторов искать математическое ожидание случайной величины, не зная ее распределение

18.1. Найдите ***математическое ожидание бинарной случайной*** величины

$$I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

18.2. Крейсер стреляет по 6 целям. На каждую цель даётся не более двух выстрелов. Вероятность поражения каждой цели при каждом выстреле равна $p = 0{,}8$. Найдите математическое ожидание числа поражённых целей.

18.3. В коробке 11 красных и 9 зелёных шаров. Из коробки наудачу вынимают 7 шаров. Сколько красных шаров следует ожидать среди вынутых?

18.4. На новогодний вечер по случаю наступающего 1912 года в доме генерал-губернатора собралось n приглашённых детей, и каждый пришёл со своим гостинцем (конфета, пряник, халва, орех в золотистой обёртке и т. п.). По обычаю тех лет все гостинцы были повешены на ёлку, а в конце вечера состоялся розыгрыш — каждому достался случайно выбранный гостинец. Какое следует ожидать число детей, получивших свой собственный гостинец?

18.5. Родители детей из предыдущей задачи тем временем танцевали на новогоднем балу, который также давал генерал-губернатор. Всего собралось n семейных пар, причём в каждой паре муж и жена были совершенно одного роста, но двух пар одного роста не было. Когда заиграл вальс, кавалеры пригласили случайно выбранных дам на танец. Найдите математическое ожидание числа танцующих пар, где кавалер ниже дамы.

18.6. Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Найдите математическое ожидание числа бросков.

18.7. В театре у 20 зрителей билеты на один ряд, в котором 20 кресел. Проблема в том, что проход в этот ряд только с одной стороны. Зрители проходят на свои места в случайном порядке. Если один занял своё место, то, чтобы пропустить другого, он должен встать.

а) Найдите математическое ожидание числа вставаний.

б) Найдите математическое ожидание числа зрителей, которым вставать не придётся ни разу.

18.8. Из Затонска в Пригорск по узкой дороге в случайном порядке выехали 100 автомобилей. Каждый, пока может, едет со своей скоростью, и двух автомобилей с совершенной одинаковыми скоростями нет. Обгонять нельзя, поэтому очень скоро автомобили сбились в группы. Найдите математическое ожидание числа получившихся групп.

Занятие 19

Разные более сложные задачи

Почти все задачи этого занятия решались уже известными нам методами. Некоторые встречались раньше, возможно, в другой формулировке

19.1. В двух одинаковых колодах по 36 карт. Колоды хорошо перетасовали, а затем составили случайные пары. В каждой паре одна карта из первой колоды, а другая — из второй.

а) Найдите вероятность того, что в первой паре окажутся две одинаковые карты.

б) Найдите вероятность того, что в первых двух парах окажутся одинаковые карты.

в) Найдите математическое ожидание числа пар, где карты совпали.

19.2. 10 пар одинаковых носков постирали в стиральной машине, а затем снова собрали в пары случайным образом. Назовём два носка неразлучными, если они были в одной паре и снова оказались вместе.

а) Найдите вероятность того, что в первой паре оказались неразлучные носки.

б) Найдите математическое ожидание числа пар с неразлучными носками.

19.3. На планете Фряксов живут фряксы. У каждого фрякса три ноги, и поэтому каждый фрякс одновременно носит три носка. Однажды один фрякс постирал в стиральной машине 10 троек своих носков, а потом снова собрал их в тройки. Если три носка были и снова оказались в одной тройке, они называются неразлучными. Найдите математическое ожидание числа троек неразлучных носков.

19.4. Из 27 игральных костей сложили куб $3 \times 3 \times 3$, причём положение каждой кости случайное.

а) Найдите математическое ожидание суммы очков, оказавшихся на поверхности куба.

б) Найдите математическое ожидание суммы очков, оказавшихся на поверхности куба, если известно, что никакие две кости не прилегают друг к другу одинаковыми гранями.

19.5. Из отрезка натурального ряда от 1 до n случайным образом по очереди выбрали k чисел. Найдите математическое ожидание суммы выбранных чисел.

19.6. В ящике 30 шаров, из них 12 белых и 18 чёрных. Шары вынимают по одному в случайном порядке и обратно не кладут.

а) Какова вероятность того, что первые 4 шара — чёрные?

б) Найдите математическое ожидание числа шаров одного цвета, которые будут извлечены из ящика к моменту, когда появится первый шар другого цвета.

19.7. Кассир в метро заранее заготавливает стопки из монет, чтобы быстро дать сдачу. Он заготовил две одинаковые стопки по 5 монет в каждой. Какова вероятность того, что в этих стопках орлов поровну?

Занятие 20

Простейшие оценки

В этом занятии после подготовительных задач появляются задачи, в которых нужно оценить какую-нибудь величину. Рассказ о методе моментов

20.1. Игральную кость бросили много раз, и в какой-то момент сумма выпавших очков оказалась равна 2016.

а) Найдите математическое ожидание числа сделанных бросков.

б) Сергей заявил, что он получил сумму 2016, и на это ему потребовалось ровно 554 броска. Николай сказал, что он справился быстрее — потребовалось только 450 бросков. Прокомментируйте эти заявления.

20.2. Игральная кость несимметрична, т. е. значения от 1 до 6 выпадают с разными вероятностями. Эту кость бросили 450 раз, и сумма выпавших очков оказалась равна 2016. Придумайте способ оценить математическое ожидание числа очков при однократном бросании такой кости. Сделайте оценку.

20.3. Биатлонист стреляет по пяти мишеням. На каждую мишень ему даётся не более двух выстрелов. Если случилось два промаха, биатлонист должен перейти к следующей мишени. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна $p = 0{,}4$. Найдите:

а) вероятность того, что будут поражены ровно четыре мишени из пяти;

б) математическое ожидание числа потраченных патронов;

в) математическое ожидание числа потраченных патронов, если известно, что биатлонист поразил ровно три мишени.

20.4. Известно, что биатлонист из задачи 20.3 потратил 8 патронов.

а) Какое наименьшее и наибольшее число мишеней он мог поразить?

б) Найдите вероятность того, что биатлонист поразил k мишеней.

в) Найдите математическое ожидание числа поражённых мишеней.

20.5. Предположим, что в условиях задач 20.3 и 20.4 нам неизвестна вероятность поражения одной мишени, и мы хотим её оценить. Придумайте как оценить неизвестную вероятность p ***методом моментов*** и получите её оценку $\hat{p}$, если известно, что биатлонист:

а) поразил ровно 4 мишени;

б) потратил ровно 8 патронов;

в) поразил ровно 4 мишени и потратил ровно 8 патронов.

20.6. В пакете лежат жёлтые и красные леденцы. Женя вытащила 10 леденцов, из них 4 леденца оказались жёлтыми, а остальные — красными. Нужно оценить число жёлтых леденцов, которые были в пакете сначала.

а) Придумайте способ оценки и найдите оценку, если известно, что в пакете 120 леденцов.

б) Тот же вопрос, если известно, что в пакете 93 леденца.

Занятие 21

Дисперсия случайной величины

Рассказ про дисперсию и стандартное отклонение случайной величины. Немного задач

Недостаточно найти ***математическое ожидание*** случайной величины, чтобы понять, какие её значения следует считать вполне вероятными, а какие — маловероятными. Важно понять, каков типичный разброс значений, т. е. отклонение значений от среднего. Например, можно найти среднее отклонение: $\mathrm{E}|X - \mathrm{E}X|$. Это совсем не плохо, но свойства этой величины оказываются не слишком удобными — во многом мешает модуль.

Зато, если рассматривать не средний модуль, а средний квадрат отклонения, получается ***дисперсия***:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2, \tag{1}$$

которая обладает целым рядом удобных и полезных свойств. Например, есть более простая формула:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X \tag{2}$$

— дисперсия равна среднему квадрата без квадрата среднего. Получается эта формула простыми преобразованиями: нужно возвести в квадрат скобку $(X - \mathrm{E}X)$ и аккуратно привести подобные, ничего не перепутав.

Вторая особенность дисперсии: часто её можно находить по слагаемым. А именно:

$$\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y, \tag{3}$$

если случайные величины X и Y ***независимы***. Это свойство также несложно получить с помощью формулы (2). В ходе выкладок приходится пользоваться равенством $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$, которое верно для независимых величин. Отсюда требование независимости.

Дисперсия биномиального распределения

Проведено n независимых и одинаковых ***испытаний***. Вероятность успеха в каждом равна p. Найти дисперсию числа наступивших успехов.

Пусть S — число успехов, а I_k — ***индикатор*** успеха в испытании номер k:

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$

тогда $\mathrm{E}I_k = p$ для всех индикаторов и, как известно из занятия 17,

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_n = np.$$

Индикаторы независимы, поскольку результаты испытаний по условию не связаны. Следовательно, в силу (3)

$$\mathrm{D}S = \mathrm{D}(I_1 + I_2 + \ldots + I_n) = \mathrm{D}I_1 + \mathrm{D}I_2 + \ldots + \mathrm{D}I_n = n \cdot \mathrm{D}I_1.$$

Чтобы найти дисперсию одного индикатора, воспользуемся формулой (2):

$$\mathrm{D}I_1 = \mathrm{E}I_1^2 - \mathrm{E}^2 I_1 = \mathrm{E}I_1 - \mathrm{E}^2 I_1 = p - p^2 = pq.$$

Здесь буквой q, как обычно, обозначена вероятность неудачи:

$$q = 1 - p.$$

В выкладках использовано, что $I_1^2 = I_1$ (это так, поскольку $0^2 = 0$ и $1^2 = 1$).

Следовательно, $\mathrm{D}S = npq$.

Недостаток дисперсии в том, что она измеряется в квадратных единицах. Например, если X — расстояние в метрах, то X измеряется в квадратных метрах, с чем можно смириться. Но вот если X — угол в градусах, то X выражается в квадратных градусах, что весьма загадочно. Чтобы получить меру рассеивания, выраженную в тех же единицах, что и исходная величина, можно извлечь квадратный корень из дисперсии. Получается так называемое ***стандартное отклонение*** $\sqrt{\mathrm{D}X}$. Стандартное отклонение всегда не меньше, чем средний модуль отклонения:

$$\sqrt{\mathrm{D}X} \geqslant \mathrm{E}|X - \mathrm{E}X|,$$

какова бы ни была случайная величина X. И всё равно стандартное отклонение следует понимать как среднее или типичное отклонение. Часто стандартное отклонение используют в качестве единицы измерения отклонений.

В серии независимых испытаний из примера 1 стандартное отклонение равно[1]

$$\sigma = \sqrt{DS} = \sqrt{npq}.$$

Например, если монету бросают 10 раз, то стандартное отклонение числа орлов равно

$$\sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \approx 1{,}58.$$

Договоримся, что в однократном испытании не будем рассчитывать на отклонения, превышающие 3σ (например), поскольку такие отклонения будем считать маловероятными[2].

Значит, бросая 10 монет, разумно рассчитывать на число орлов

$$\text{от}\ \ \mathrm{E}S - 3\sigma = 5 - 3 \cdot 1{,}58 \approx 0{,}26 \quad \text{до}\ \ \mathrm{E}S + 3\sigma = 5 + 3 \cdot 1{,}58 \approx 9{,}74,$$

т. е. в реальности нужно взять в расчёт значения от 1 до 9, а вот в 0 или в 10 орлов верить не следует (это не удовлетворяет нашему соглашению, т. е. случается слишком редко). Таким образом, имеется большая неопределённость: примерно 82 % всех возможных значений вполне вероятны.

А что если монет 100? Диапазон разумного ожидания, конечно, расширяется, но мало по сравнению с ростом числа бросков. При том же соглашении будем ждать от

$$\mathrm{E}S - 3\sigma = 50 - 3 \cdot 5 = 35 \quad \text{до} \quad \mathrm{E}S + 3\sigma = 50 + 3 \cdot 5 = 65$$

орлов. Длина диапазона теперь $65 - 35 + 1 = 31$, что составляет уже 31 % от всех теоретически возможных значений.

Если монет 1000? Посчитайте самостоятельно: разумно ждать от 453 до 547 орлов, т. е. всего 9,5 % от всего возможного множества значений.

Видим, что доля вероятных значений уменьшается с ростом числа опытов. Долю вероятных значений можно сделать сколь угодно

[1] Мы использовали греческую букву σ «сигма», которой часто обозначают стандартное отклонение в разных задачах, но это всего лишь наше соглашение, а не правило.

[2] Такая договоренность, как правило, оправдана. Можно показать, что для любой случайной величины, у которой есть математическое ожидание и дисперсия, вероятность отклонения значения от ожидания больше чем на 3σ не превосходит одной девятой: $\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{1}{9}$, а для многих полезных случайных величин эта вероятность намного меньше одной девятой.

малой, увеличивая число испытаний, и это — очень важное свойство, которое лежит в основе почти всех статистических измерений. Так происходит оттого, что стандартное отклонение пропорционально не числу испытаний n, а величине $\sqrt{n}$, которая растёт намного медленнее, чем само n.

Дисперсия геометрического распределения

Вычислим дисперсию и стандартное отклонение в другом важном опыте — в стрельбе до первого попадания.

Производятся одинаковые независимые испытания с вероятностью p успеха в каждом до тех пор, пока не наступит первый успех. Задача — найти дисперсию и стандартное отклонение числа испытаний.

Пусть X — число испытаний, а I_k — индикатор неудачи в испытании номер k. Тогда $X = 1 + I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$.

Распределения индикаторов найти легко:

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^k & q^k \end{pmatrix},$$

откуда $\mathrm{E}I_k = q^k$. Следовательно, как мы уже знаем (см. занятие 17), ожидание $\mathrm{E}X$ равно

$$\mathrm{E}X = 1 + \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

Но вот что с дисперсией? Так ли уж хорошо работает тут интуиция?

К сожалению, индикаторы в этой задаче зависимы: если успех не случился в какой-то попытке, то и во всех предыдущих успеха тоже не было. Поэтому воспользоваться формулой (3) суммирования дисперсий нельзя. Придётся идти более сложным путём. Применим формулу 2. Величина X нам известна. Осталось найти X^2:

$$\begin{aligned} X^2 = {} & (1^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots) + (2I_1 + 2I_2 + 2I_3 + \ldots) + \\ & + (2I_1I_2 + 2I_1I_3 + 2I_1I_4 + \ldots) + (2I_2I_3 + 2I_2I_4 + 2I_2I_5 + \ldots) + \ldots \\ & \ldots + 2I_mI_n + \ldots \end{aligned}$$

Получается бесконечная сумма всех квадратов, потом удвоенных индикаторов и, наконец, удвоенных произведений всех пар индикаторов вида $2I_mI_n$, где $m < n$. Заметим, что $I_k^2 = I_k$ и что $I_mI_n = I_n$ при $m < n$ (уже отмечалось, что если в n-м испытании неудача, то во всех предыдущих тоже). Тогда

$$\begin{aligned}X^2 &= (1+I_1+I_2+I_3+\ldots)+(2I_1+2I_2+2I_3+\ldots)+\\&\qquad+(2I_2+2I_3+2I_4+\ldots)+(2I_3+2I_4+2I_5+\ldots)+\ldots=\\&=(1+I_1+I_2+I_3+\ldots)+2(I_1+2I_2+3I_3+\ldots).\end{aligned}$$

Перейдём к ожиданию:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X^2 &= (1+q+q^2+q^3+\ldots)+2(q+2q^2+3q^3+\ldots)=\\&=\frac{1}{p}+2\frac{q}{p}(p+2qp+3q^2p+\ldots).\end{aligned}$$

Выражение в последней скобке равно $\frac{1}{p}$, поскольку это — математическое ожидание X. Поэтому

$$\mathrm{E}X^2=\frac{1}{p}+2\frac{q}{p}\mathrm{E}X=\frac{1}{p}+2\frac{q}{p^2}=\frac{p+2q}{p^2}=\frac{2-p}{p^2}.$$

Тогда

$$\mathrm{D}X=\mathrm{E}X^2-\mathrm{E}^2X=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Стандартное отклонение равно $\sigma=\sqrt{\mathrm{D}X}=\frac{\sqrt{q}}{p}$.

При малых вероятностях успеха p число $\sqrt{q}$ близко к единице. Поэтому вполне вероятно, что ждать первого успеха придётся долго. В такой задаче математическое ожидание — весьма ненадёжный ориентир. Например, если мы захотим узнать, сколько дать патронов стрелку, чтобы он с большой вероятностью поразил цель при вероятности каждого попадания 0,1, нужно вычислить величину $\mathrm{E}X+3\sigma$ (если мы, как прежде, считаем разумно вероятными значения, удалённые от среднего не больше чем на три стандартных отклонения).

Получаем

$$\frac{1}{0{,}1}+3\cdot\frac{\sqrt{0{,}9}}{0{,}1}\approx 10+3\cdot 10\cdot 0{,}95=38{,}5,$$

т. е. стрелка придётся снабдить 39 патронами, не рассчитывая на то, что число выстрелов будет близко к ожидаемым десяти.

Дисперсия гипергеометрического распределения

Из урны, в которой N шаров, из них K чёрных, а остальные — белые, наудачу вынимают n шаров. Найти дисперсию и стандартное отклонение случайной величины X — «Число чёрных шаров среди вынутых».

Если вы разобрались в задаче 2 из занятия 17, то эта не покажется вам сложной. Ожидание известно из занятия 17: $\mathrm{E}X = n\frac{K}{N}$. Индикаторы каждого успеха здесь также зависимы. Нужно только учесть характер зависимости. Скорее, трудности будут с алгебраическими преобразованиями в конце. Результат:

$$\mathrm{D}X = \frac{Kn(N-n)(N-K)}{N^2(N-1)}.$$

Пример. Из стада, в котором 20 белых и 5 чёрных овец, наудачу отлавливают 8. Нужно оценить разумные границы случайной величины «Число пойманных чёрных овец».

Решение. Ожидание искомой величины X равно $\mathrm{E}X = 8\cdot\frac{5}{25} = 1{,}6$. Дисперсия равна $\mathrm{D}X = \frac{5\cdot 8\cdot 20\cdot 17}{25^2\cdot 24} \approx 0{,}91$. Снова считая разумным интервал от $\mathrm{E}X - 3\sqrt{\mathrm{D}X}$ до $\mathrm{E}X + 3\sqrt{\mathrm{D}X}$, получаем, что чёрных овец следует ждать от нуля $(1{,}6 - 3\cdot 0{,}91 < 0)$ до $1{,}6 + 3\cdot 0{,}91 = 4{,}33$, т. е. до 4.

Занятие 22

Метод индикаторов для поиска дисперсии

Сюжеты уже знакомы, но индикаторы используются для поиска не математического ожидания, а дисперсии

22.1. Когда папа в ноябре снял с машины летние колёса и положил их в гараж, он забыл их подписать. И поэтому в апреле, когда он снова менял колёса, он поставил их на машину в случайном порядке. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение числа колёс, которые оказались на своём прежнем месте.

22.2. 10 пар одинаковых носков постирали в стиральной машине, а затем снова собрали в пары случайным образом. Назовём два носка неразлучными, если они были в одной паре и снова оказались вместе.

а) Найдите вероятность того, что в первой и во второй паре оказались неразлучные носки.

б) Найдите дисперсию и стандартное отклонение числа пар с неразлучными носками.

22.3. Сергей и Вася отвечают на пять вопросов теста. В каждом вопросе варианты ответа. Оба ничего не знают, поэтому выбирают ответы наугад, не советуясь друг с другом. В результате Сергей угадал ответы на два вопроса, а Вася — только на один. Найдите

а) математическое ожидание,

б) дисперсию и стандартное отклонение

величины «Число совпадений», т. е. вопросов, на которые оба угадали верный ответ или оба не угадали.

22.4. Из отрезка натурального ряда от 1 до 6 случайным образом выбрали три различных числа. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение суммы выбранных чисел.

22.5. В ящике 30 шаров, из них 12 белых и 18 чёрных. Шары вынимают по одному в случайном порядке и обратно не кладут. Найдите стандартное отклонение числа шаров одного цвета, которые будут извлечены из ящика к моменту, когда появится первый шар другого цвета.

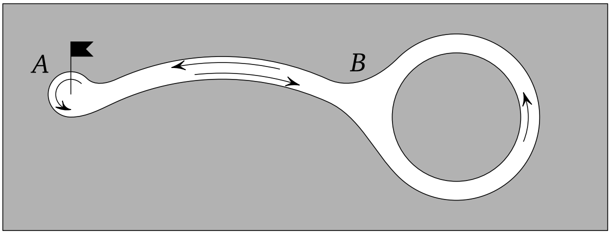
22.6. Из Затонска в Пригорск по узкой дороге в случайном порядке выехали 100 автомобилей. Каждый пока может едет со своей скоростью, и нет двух автомобилей, у которых скорости совершенно одинаковы. Обгонять друг друга нельзя, поэтому очень скоро автомобили сбились в группы. Найдите стандартное отклонение числа получившихся групп.

Занятие 23

Рекурсия

Задачи, где возникают рекуррентные соотношения:
искомая величина выражается через такие же, но найденные ранее

23.1. Трасса для картинга представляет собой кольцо и подходящую к кольцу дорожку AB. По кольцу разрешено ездить только против часовой стрелки (см. рис.). Юный гонщик выезжает из точки A и через 10 минут должен вернуться в точку A, при этом по дороге он может заезжать в точку A произвольное число раз. Проезд по AB в любую сторону занимает минуту. Проезд по кольцу от B до B тоже занимает минуту. Сколько всего существует маршрутов протяжённостью 10 минут?



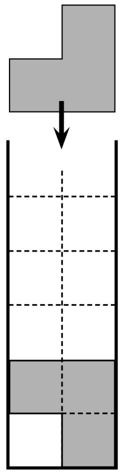
23.2. Монету бросают 10 раз. Найдите вероятность того, что ни разу не случится два орла подряд.

23.3. Прямоугольник $2 \times n$ нужно замостить домино (прямоугольниками 2×1). Сколько существует способов это сделать?

23.4. В детской настольной игре нужно бросать кубик и переставлять фишку на столько полей, сколько очков выпало на кубике. Найдите вероятность того, что в какой-то момент фишка игрока остановится на поле 34.

23.5. В колонну друг другу в затылок построились n солдат. Командир, который стоит перед колонной, видит только тех, кто выше всех впереди стоящих. Найдите математическое ожидание числа тех, кого командир видит.

23.6. Высокий прямоугольник ширины 2 открыт сверху, и в него падают в случайной ориентации Г-тримино (см. рис.). Упало 7 тримино. Найдите вероятность того, что сложенная из тримино фигура будет иметь высоту 12.



Занятие 24

Перестановки и неподвижные точки

Задачи о неподвижных точках — элементах случайных перестановок, которые волею случая оказались на своём месте

24.1. Найдите общее число различных ***перестановок*** порядка n.

24.2. На доске у вахтёра 10 крючков для ключей — 1, 2 и т. д. до 10. На каждом ключе бирка с номером: 1, 2 и т. д. до 10. Однажды ключи рассыпались, вахтёр собрал их и повесил на 10 крючков в случайном порядке. Найдите вероятность того, что ни один из ключей не оказался на своём крючке.

24.3. В условиях задачи 24.2 найдите математическое ожидание числа ключей, у которых номер на бирке больше номера, который на крючке.

24.4. Имеется список из n фамилий в случайном порядке. Компьютерная программ сортирует их по алфавиту, последовательно проходя список и сравнивая соседние фамилии. Если они в неверном порядке, то программа меняет их местами. Затем следующий проход, затем — следующий, и так до тех пор, пока все фамилии не окажутся в алфавитном порядке. Найдите математическое ожидание числа обменов, т. е. событий «Две фамилии поменялись местами».

24.5. Пусть дана перестановка порядка n. Пару $\begin{pmatrix} a \\ s(a) \end{pmatrix}$ в перестановке будем называть *избытком*, если $s(a) > a$, *недостатком*, если $s(a) < a$, ***неподвижной точкой***, если $s(a) = a$. Докажите, что:

а) если в перестановке есть хотя бы один недостаток, есть и избыток;

б) перестановок, где избытков больше чем недостатков, столько же, сколько перестановок, где недостатков больше, чем избытков.

24.6. Пусть Q_n — число перестановок порядка n без неподвижных точек.

а) Докажите:

$$Q_n = n! - (1 + C_n^1 Q_1 + C_n^2 Q_2 + \ldots C_n^k Q_k + \ldots C_n^{n-1} Q_{n-1}),$$

б) Пользуясь п. а), получите рекуррентную формулу вероятности $p_{n,0}$ того, что случайно взятая перестановка порядка n не содержит неподвижных точек.

в) Найдите вероятность $p_{n,k}$ того, что в случайной перестановке порядка n ровно k неподвижных точек.

24.7. Было у отца 4 сына. Умирая, он разделил между ними наследство: младшему достался кот, следующему — мерседес, следующему — вилла, а старшему — нефтяная компания. Погоревали братья, а потом решили, что наследство поделено нечестно. И решили поделить его заново честным жребием. Назовём брата довольным, если в результате жребия ему досталась доля дороже, чем была. Назовём брата недовольным, если дешевле, чем была. Найдите вероятность того, что довольных братьев больше, чем недовольных.

Занятие 25

Мини-олимпиада

Мини-олимпиада прошла на последнем занятии кружка

25.1. Две футбольные команды «Ротор» и «Статор» абсолютно равны по силам. Известно, что когда они играли между собой, в каждом из двух периодов было забито ровно по 3 мяча. Найдите вероятность того, что матч закончился вничью.

25.2. Наудачу выбирают пятизначное число. Какова вероятность того, что у этого числа каждая следующая цифра меньше предыдущей (слева направо)?

25.3. Игральную кость бросают 10 раз. Какова вероятность того, что единица и шестёрка выпадут хотя бы по разу?

25.4. В роте 101 солдат, и все немного отличаются по росту друг от друга. По команде они выстроились в одну шеренгу в случайном порядке. Найдите математическое ожидание числа тех:

а) кто выше своего левого соседа.

б) кто ниже обоих своих соседей.

25.5. Два друга пошли на рынок. У первого было 1000 рублей, а у второго — 3000 рублей. Они покупали что-то независимо друг от друга, а в какой-то момент они встретились и решили купить модель вертолёта за 1800 рублей. Найдите вероятность того, что оставшейся у них суммы хватит на это.

25.6. На одной стороне монеты нарисована единица, а на другой — двойка. Витя в задумчивости бросает эту монету, поднимает и опять бросает, и снова бросает. Найдите вероятность того, что в какой-то момент сумма выпавших очков будет равна:

а) 5; б) 2016 (достаточно дать приближённый ответ).

Конкурс «Задача дня»

Задачи публиковались на сайте

http://ptlab.mccme.ru

в 2014—2017 годах. Конкурс продолжается. Все желающие могут принять участие. Многие из этих задач в том или ином виде уже встречались в занятиях кружка.

1. В городском турнире по бадминтону участвуют 8 спортсменов, одинаково хорошо играющих в бадминтон. Ничьих не бывает. В начале турнира позиции игроков определяются жребием. Найдите вероятность того, что спортсмены Петров и Васечкин встретятся в полуфинале.

2. Четыре усталых ковбоя зашли в салун и повесили четыре шляпы на бизоний рог при входе. Когда глубокой ночью ковбои уходили, они были не в состоянии отличить одну шляпу от другой, и поэтому разобрали шляпы наугад. Найдите вероятность того, что хотя бы одному из ковбоев досталась его собственная шляпа.

3. Ася и Вася вырезают прямоугольники из клетчатой бумаги. Вася ленивый; он кидает игральную кость один раз и вырезает квадрат, сторона которого равна выпавшему числу очков. Ася кидает кость дважды и вырезает прямоугольник, у которого длина и ширина равны выпавшим на костях числам. На сколько отличается средняя площадь одного Васиного квадрата от средней площади одного Асиного прямоугольника?

4. В Анчурии в несколько туров проходит чемпионат по шашкам. Каждый тур проходит в один какой-то день в каком-то одном городе. Дни и города проведения туров определяются жеребьёвкой. По правилам чемпионата никакие два тура не могут пройти в одном городе, и никакие два тура не могут пройти в один день. Среди болельщиков устраивается лотерея: главный приз получает тот, кто до начала чемпионата правильно угадает, в каких городах и в какие дни пройдут туры. Если никто не угадает, то главный приз достанется Президенту Анчурийской Лиги Шашек. Всего в Анчурии десять городов, а на чемпионат отведено десять дней. Сколько туров чемпионата должен назначить Президент, чтобы с наибольшей вероятностью получить главный приз самому?

5. В старину в России был новогодний обычай, особенно популярный среди детей: каждый гость приходил на праздничный ужин с подарком (гостинцем); хозяин дома также готовил гостинец. Затем хозяин устраивал розыгрыш, и каждому доставался какой-то из гостинцев. Могло случиться так, что кому-то из присутствующих доставался его же собственный подарок. Предположим, что на ужин пришло 25 гостей, таким образом хозяин разыгрывает случайным образом 26 гостинцев между 26 претендентами. Найдите математическое ожидание числа тех, кому достанется его же собственный гостинец.

6. В ёлочной гирлянде 50 лампочек, но какая-то перегорела, отчего погасла вся гирлянда. Сергей Владимирович последовательно проверяет лампочки. Найдите математическое ожидание числа проверок, которые сделает Сергей Владимирович до того момента, как поймёт какая именно лампочка перегорела.

7. А и Б по очереди случайным образом бросают игральную кость. Победителем считается тот, у кого у первого выпадает шестёрка. Начинает А. Найдите вероятность того, что победит Б.

8. В ящике 289 роз — белых и красных, причём белых больше, чем красных. Сколько в ящике должно быть белых роз, чтобы вероятность вытащить наудачу две розы одного цвета была равно 0,5?

9. 12 рыцарей, 21 прекрасная дама и король Артур (тоже рыцарь), в случайном порядке рассаживаются вокруг круглого стола. Рыцарь ведёт себя прилично, если рядом с ним за столом оказалась хотя бы одна дама. Найдите вероятность того, что Артур ведёт себя прилично.

10. На борту авиалайнера 280 пассажиров, а авиакомпания загрузила для них 140 порций питания с курицей и 140 порций с рыбой. Известно, что каждый пассажир с вероятностью 0,5 предпочитает курицу, и с вероятностью 0,5 — рыбу. Пассажир будет недоволен, если ему осталось не то, что он хотел бы. Найдите наиболее вероятное число недовольных пассажиров.

11. Каждый день кот Базилио и лиса Алиса обходят все 20 дворов столицы Страны Дураков, и в каждом дворе им либо дают, либо не дают один золотой с вероятностью 0,5. Если к концу дня число выпрошенных золотых чётно, то лиса и кот делят их поровну. Если же оно нечётно, то они делят все монеты, кроме одной, поровну, а последнюю кот Базилио забирает себе как коммерческий директор предприятия. Найдите математическое ожидание числа золотых, полученных лисой за день.

12. Каждый день такс Барабек сгрызает одну тапочку из имеющегося дома запаса. Строго с вероятностью 0,5 Барабек хочет левую тапочку, и строго с вероятностью 0,5 — правую. Если желаемой тапочки нет, Барабек расстраивается и без аппетита жуёт ту, что есть. Сколько пар одинаковых тапочек достаточно иметь про запас, чтобы с вероятностью не меньше, чем 0,8 Барабек не расстраивался целую неделю?

13. В ужасную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются 10 гномиков. Если вдруг случится удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью 0,2. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите вероятность того, что в результате удара грома упадёт ровно 7 гномиков.

14. В Анчурии всего 10 законов и 5 министров. Вероятность того, что случайно взятый министр знает случайно выбранный закон, равна 0,2, независимо от того, какие законы знают другие министры. Однажды министры собрались на совет, чтобы написать Концепцию. Если хотя бы один министр знает закон, то этот закон будет учтён в Концепции, в противном случае этот закон учтён не будет. Найдите математическое ожидание числа учтённых в Концепции законов.

15. Будем считать, что рождение девочки и мальчика равновероятны[1]. Известно, что в некоторой семье двое детей, причём один из них — мальчик, родившийся в среду. Какова вероятность того, что второй ребёнок — тоже мальчик?

[1] На самом деле это совсем не так.

16. В пакетике n конфет. Шесть из них оранжевые. Остальные — жёлтые. Аня вынимает случайную конфету из пакетика и съедает её. Затем Аня вынимает вторую конфету — тоже наудачу — и съедает. Вероятность того, что Аня съела две оранжевые конфеты равна $\frac{1}{3}$. Сколько конфет было в пакетике?

Эта задача из GCSE (аналог нашего ОГЭ в Великобритании) вызвала бурное обсуждение. После экзамена многие школьники плакали, считая, что они потеряли шанс продолжить образование. Некоторые считают, что необходимо понизить «проходные баллы». Дети жалуются, родители возмущены. Задача с нашей точки зрения неудачная — нежизненная: точные вероятности в жизни неизвестны. Тем не менее, попробуйте сдать тест GCSE.

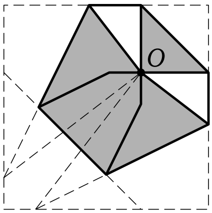
17. Доктор прописал Рассеянному Математику пилюли от рассеянности, которые надо принимать один раз в день после обеда. Математик купил две баночки, в каждой по 10 пилюль. Каждый день, начиная с 1 сентября, Математик берёт с собой на работу одну из баночек (выбирая её случайным образом), после обеда достаёт из кармана баночку и принимает пилюлю. Найдите вероятность того, что 13 сентября Математик впервые обнаружит, что в баночке, лежащей в кармане, нет пилюль.

18. В соревнованиях по пиханию животами шансы противников на победу относятся так же, как и массы их животов. Ничьей быть не может. Живот у Юмбо на 25 % тяжелее, чем у Джумбо, а вот у Пинка живот на 30 кг легче, чем у Бонка. Юмбо и Джумбо по очереди должны пихаться с Пинком и Бонком. На сколько вероятность того, что Юмбо победит только Пинка, а Джумбо — только Бонка больше вероятности того, что Юмбо победит только Бонка, а Джумбо — только Пинка?

19. Игральную кость бросили 6 раз. Найдите математическое ожидание числа граней, которые так ни разу и не выпали.

20. Найдите вероятность того, что при 20 бросаниях монеты самая длинная последовательность выпавших подряд орлов будет иметь длину 10.

21. У Алисы в кармане шесть волшебных пирожков — два увеличивающих (съешь — вырастешь), а остальные уменьшающие (съешь — уменьшишься). Когда Алиса встретила Мэри Энн, она по доброте душевной отдала половину пирожков Мэри. Найдите вероятность того, что у одной из девочек оказались только уменьшающие пирожки.



22. В квадратном листе бумаги выбирается случайная точка O. Затем лист сгибают так, чтобы каждая вершина квадрата наложилась на точку O. На рисунке показан один из возможных вариантов. Найдите математическое ожидание числа сторон получившегося многоугольника. Результат округлите до тысячных.

23. На двери подъезда кодовый замок, на замке 10 кнопок с цифрами. Чтобы открыть дверь, нужно одновременно нажать три правильные кнопки. Петя не помнит код и пробует по очереди комбинации. На каждую попытку Петя тратит 2 секунды. Сколько минут понадобится Пете, чтобы наверняка попасть в подъезд?

24. Команды Знатоков и Телезрителей играют до шести побед — как только команда выигрывает шесть раундов, она побеждает в игре. Вероятность выигрыша Знатоков в каждом отдельном раунде равна 0,5. Ничьих не бывает. Сейчас Знатоки проигрывают со счётом 2 : 4. Найдите вероятность того, что победит команда Телезрителей.

25. Кузнечик спокойно сидел в самом начале прямоугольной системы координат, а потом вдруг начал прыгать. Каждый прыжок с равными вероятностями либо строго в направлении оси абсцисс, либо строго в направлении оси ординат, причём длина каждого прыжка ровно один метр. Найдите вероятность того, что в какой-то момент Кузнечик окажется на расстоянии ровно 5 метров от начала координат.

26. За новогодним столом встретились Рассеянный Учёный, мистер Оушен и восемь его друзей. Они подняли бокалы с шампанским и, как только куранты пробили полночь, все начали хаотично бегать и чокаться друг с другом. Чокаясь и бегая, Учёный по всегдашней привычке всё считать, считал чоки. Мы не знаем, сколько он ожидал насчитать, но всего чоков оказалось 36. Найдите вероятность того, что четвёртый друг мистера Оушена не чокнулся с шестым другом.

27. В преферанс играют вчетвером. Чтобы определить, кому начинать игру, обычно бросают жребий «до первого туза». Всего в колоде 32 карты, от семёрок до тузов. Один из игроков раздаёт всем карты в открытую по очереди по часовой стрелке (себе — последнему) до тех пор, пока не выпадет первый туз. Тот, кому достанется первый туз, должен начинать игру. Найдите вероятность того, что первого туза сдающий сдаст сам себе.

28. Известно, что вероятность рождения двойняшек в Анчурии равна $\frac{1}{19}$, и что тройняшки в Анчурии не рождаются. Найдите вероятность того, что первый встречный анчуриец — один из пары двойняшек.

29. Бывают дни, когда на Рассеянного Учёного находит вдохновение. И тогда ему в голову приходят гениальные мысли. С вероятностью 0,8 гениальная мысль приходит одна, но случается, что и две мысли приходят одновременно (три сразу — никогда!). В прошлую пятницу на Учёного нашло вдохновение и в какой-то момент в его голове образовались ровно три гениальных мысли. Найдите вероятность того, что две их них пришли одновременно.

30. Из 27 правильных костей составлен куб. Известно, положение каждой кости выбиралось случайно, но оказалось так, что никакие две кости не прилегают друг к другу одинаковыми гранями. Найдите математическое ожидание суммы очков, которые оказались на поверхности куба.

31. Ровно в полдень Марья Петровна выглянула в окно и увидела, как продавщица сельпо Зинка уходит на склад. В пять минут первого Петровна снова посмотрела в окно — перед закрытым магазином никого не было. Зинка была на складе ровно 15 минут, а когда вернулась, обнаружила перед дверью магазина Митьку и Витьку, причём Витка норовил залезть вперёд Митьки, а Митька его не пускал, поскольку пришёл первым. Найдите вероятность того, что Витька пришёл к магазину не позже, чем 5 минут после Митьки.

32. Вася и Миша выполняли тест, в котором было 16 вопросов одинаковой сложности и к каждому вопросу даны варианты ответов. Поскольку ни Вася, ни Миша ничего не знали, они только угадывали ответы. Вася угадал верные ответы на 3 вопроса, а Миша — на 4 вопроса, не советуясь с Васей. Найдите математическое ожидание числа совпадений, т. е. вопросов, где Вася и Миша оба угадали верные ответы или не угадали.

33. Сова утверждает, что в среднем три шнурка из четырёх, которые можно найти в лесу, ей не подходят, поскольку они слишком длинные для дверного замка. Ослик Иа утверждает, что в среднем четыре из пяти шнурков из леса ему не подходят, поскольку они слишком короткие, чтобы из них сделать хвост для ослика. Оба правы. Каковы вероятность того, что случайно найденный в лесу шнурок не подходит ни Сове, ни Иа?

34. Ракетный катер стреляет по заданному квадрату. В квадрате две одинаковые цели. Ракета может поразить каждую отдельную цель с вероятностью 0,3, но не может поразить обе цели, поскольку они далеко друг от друга. Катер выпускает 8 ракет. Какова вероятность того, что в результате будут поражены обе цели?

35. В классе 20 человек. Известно, что сегодня один не пришёл в школу по болезни, а другой — по иной уважительной причине. Какова вероятность того, что фамилии этих двух отсутствующих идут в классном журнале подряд?

36. Ракетный катер на учениях производит стрельбы по 10 целям. На каждую цель даётся две попытки (в случае первого промаха система «залп-контроль-залп» выпускает по этой же цели вторую ракету, но третья не выпускается ни в каком случае). Известно, что вероятность поражения цели при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Известно также, что катер израсходовал не все ракеты, а только 14. Найдите математическое ожидание числа поражённых целей.

37. У Федоры Егоровны есть три чайные чашки. Однажды она их вымыла и начала новую жизнь. Каждый раз, чтобы выпить чаю, Федора берёт первую попавшуюся чашку, а потом ставит её к остальным двум, но, правда, не моет. Найдите вероятность того, что Федора Егоровна использует последнюю чистую чашку во время четвертого чаепития с момента начала новой жизни.

38. Имеется последовательность из 2015 случайных букв английского алфавита. Если несколько одинаковых букв идут подряд, то их заменяют одной такой буквой. Например, из фрагмента …ZSCCCIEEKA… получается …ZSCIEKA… Найдите математическое ожидание длины новой последовательности.

39. Ровно половина населения острова Невезения — зайцы, а остальные — кролики. Жители острова Невезения никогда не обманывают, но могут добросовестно заблуждаться. Зайцы добросовестно заблуждаются в среднем два раза их трех, а кролики добросовестно заблуждаются в среднем в половине случаев. Однажды к центральной пальме острова вышел зверь и закричал: «Я не заяц!». Помолчал и печально прошептал: «Я не кролик». Какова вероятность того, что он все же кролик? Результат округлите до тысячных.

40. Светофор на пешеходном переходе одну минуту разрешает переходить улицу, а две минуты — запрещает. Найдите среднее время ожидания зелёного света пешеходом, который подошёл к перекрёстку.

Ответы и указания

Занятие 2

2.1. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$. **2.2.** а) 0,5; б) 0,3.

2.3. 0,001.

Решение. Общее число номеров равно 10^7. Семизначный номер-палиндром однозначно определяется первыми четырьмя цифрами. Значит, семизначных палиндромов всего 10^4. Поэтому вероятность того, что случайно взятый номер окажется лёгким, равна $\frac{10^4}{10^7} = \frac{1}{10^3}$.

2.4. а) $\frac{1}{5}$; 0; б) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{9}$.

2.5. а) 0,5; б) 0,375; в) 0,375; г) 0,875.

Указание. Пункты а)—в) не должны вызывать проблем, а в пункте г) удобно сначала найти вероятность противоположного события: «Выпадет три решки». Эта вероятность равна $\frac{1}{8} = 0{,}125$. Значит, искомая вероятность равна $1 - 0{,}125 = 0{,}875$.

2.6. $\frac{1}{6}$.

Указание. Всего шесть равновозможных вариантов: AB, AC, AD, BC, BD и CD.

2.7. $\frac{1}{3}$.

Указание. Ровно в двух из шести равновозможных вариантов никто не возьмёт свою шляпу.

2.8. $\frac{1}{8}$.

Указание. У листа две стороны, и каждая разделена линиями сгиба на четыре части. Таким образом, всего на двух сторонах 8 частей. Каждая из этих частей с равной вероятностью может оказаться сверху при случайном складывании листа по старым линиям сгиба. Следовательно, вероятность того, что сверху окажется та часть, на которой стоит крестик, равна $\frac{1}{8}$.

2.9. $\frac{1}{6}$.

Указание. Удобно считать, что кости бросают по очереди. Неважно, что выпало на первой кости. Задача сводится к поиску вероятности того, что на второй кости выпадет столько же, сколько выпало на первой.

2.10. *Решение.* Например, можно подкинуть монету два раза. При исходе РР за квасом идёт первый, при исходе ОР — второй, при исходе РО — третий. При исходе ОО наступает ничья, и нужно бросить жребий ещё раз.

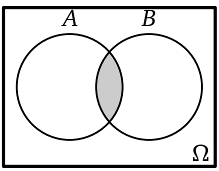
Возникает вопрос: может ли случиться так, что всё время будут выпадать два орла, и поэтому жребий никогда не закончится? Нет, этого не произойдёт — вероятность этого равна нулю. Рано или поздно выпадет что-нибудь отличное от двух орлов.

Такой жребий честный — вероятность оказаться выбранным у каждого из друзей равна $\frac{1}{3}$. Это следует из равновозможности трёх возможных исходов.

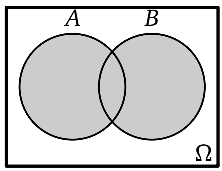
2.11. *Указание.* Обратите внимание на сумму очков на противоположных гранях.

Занятие 3

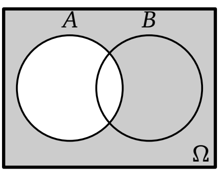
3.1. а)



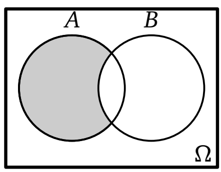
б)



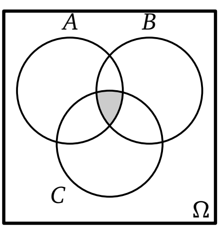
в)



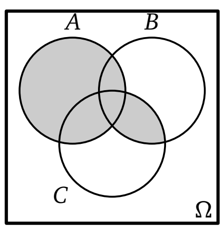
г)



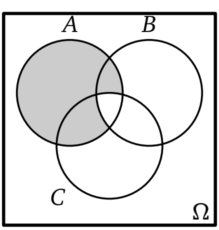
3.2. а)



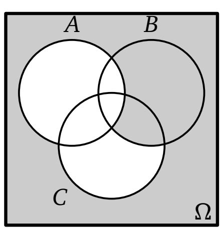
б)

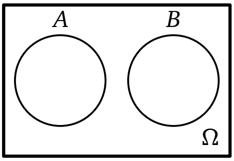


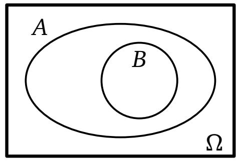
в)



г)



3.3. 

3.4. 

3.5. Не могут; 0,4. **3.6.** 0,95.

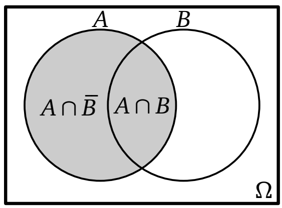
3.7. а) 0,3; б) 0,4.

Указание. Нарисуйте диаграмму Эйлера.

3.8. а) 0,72; б) 0,16; в) 0,28.

Указание. Удобно решить сначала п. в).

3.9. *Решение.* На диаграмме видно, что $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.



При этом события $A \cap \overline{B}$ и $A \cap B$ несовместны, поэтому, складывая их вероятности, получаем:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) + \mathrm{P}(A \cap B).$$

Аналогично,

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\overline{A} \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B).$$

Сложим эти два равенства:

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) + \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B).$$

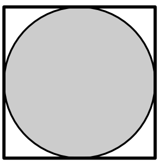
Три первых слагаемых в правой части дают $\mathrm{P}(A \cup B)$, поэтому

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(A \cap B),$$

откуда следует нужная формула.

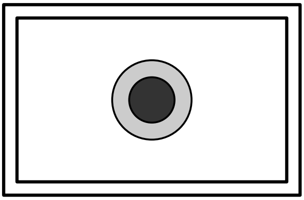
Занятие 4

4.1. $\frac{\pi}{4}$ или прибл. 0,785.



Указание. ***Геометрическая вероятность*** указанного события равна отношению площади круга к площади квадрата (см. рис.). Если радиус круга r, то сторона квадрата равна $2r$.

4.2. Прибл. 0,975.



Решение. По условию центр второй кляксы находится на расстоянии не менее 1 см от края листа, т. е. внутри прямоугольника 18 на 28 см. Рассмотрим событие A «Кляксы соприкасаются». Для этого нужно, чтобы центр второй кляксы попал в круг радиусом 2 см с тем же центром, что и первая клякса (см. рис.). Вероятность этого события:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{прям}}} = \frac{4\pi}{18 \cdot 28} = \frac{\pi}{126}.$$

Осталось найти вероятность противоположного события

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{\pi}{126} \approx 0{,}975.$$

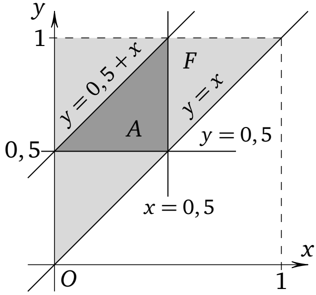
4.3. а) 0,25; б) 0,75.

Указание. Нужно следить за центром монеты и за двумя событиями: A — «Монета не пересекает никакую горизонтальную границу» и B — «Монета не пересекает никакую вертикальную границу». Эти события ***независимы***, поскольку центр монеты смещается по вертикали и горизонтали, а вероятность каждого из этих событий равна 0,5. В пункте а) требуется найти вероятность события $A \cap B$, а в п. б) — вероятность события $A \cup B$. Для вычисления последней вероятности, воспользуйтесь ***формулой сложения вероятностей*** (см. задачу 3.9).

4.4. $\frac{2}{\pi}$ или прибл. 0,637.

Указание. Задача сводится к поиску вероятности попасть в квадрат, стреляя в описанный около него круг.

4.5. 0,25.



Решение. Удобно считать, что грифель — это единичный отрезок. Расстояния от начала до ближайшей точки излома обозначим x, а до дальней — y. Получаем условие $0 < x < y < 1$. Элементарный исход в этом эксперименте — точка $(x; y)$ в треугольнике F (см. рис.).

Составить из обломков треугольник можно (событие A) тогда и только тогда, когда выполняются неравенства треугольника

$$\begin{cases} y-x<x+1-y, \\ x<1-x, \\ 1-y<y, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y<0{,}5+x, \\ x<0{,}5, \\ y>0{,}5. \end{cases}$$

Эта система определяет меньший треугольник A внутри треугольника F. Поэтому $\mathrm{P}(A)=\dfrac{S_A}{S_F}=0{,}25$.

4.6. $\dfrac{11}{36}$.

Указание. Пусть от 12:00 до появления Коли прошло x часов, а до прихода Жени — y часов. Множество элементарных событий — это множество точек в квадрате F, заданном неравенствами $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Событие «Они встретились» соответствует фигуре A, определённой неравенством $|x-y|\leqslant\dfrac{1}{6}$. Эта фигура состоит из двух трапеций. Осталось найти отношение площадей фигуры A и квадрата F.

4.7. $\dfrac{5}{6}$.

Указание. Между поездом «по часовой стрелке» и поездом «против» проходит минута. Между поездом «против» и поездом «по» проходит 5 минут. Поэтому вероятность попасть на поезд «по часовой стрелке» в пять раз выше, чем на поезд «против часовой стрелки».

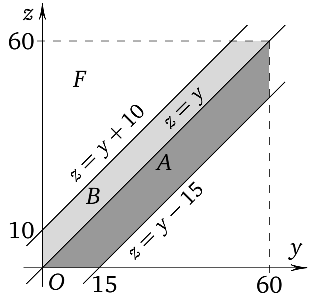
4.8. Да, может, если поезд в центр приходит через 3 минуты после поезда, идущего в область.

4.9. 0,25.

Указание. Будем считать, что к моменту появления цыгана у первого крестьянина x рублей, а у второго — y рублей. Элементарные события — точки в прямоугольнике F, заданном неравенствами $0\leqslant x\leqslant 100$, $0\leqslant y\leqslant 200$. Выигрыш цыгана обеспечивается условиями $x\leqslant y\leqslant 2x$. Эти неравенства определяют треугольник A внутри прямоугольника.

Вероятность находим как отношение площадей треугольника и прямоугольника: $\dfrac{S_A}{S_F}=0{,}25$.

4.10. $\dfrac{107}{864}\approx 0{,}124$.



Указание. Пусть от 15:00 до появления Ани прошло x минут, до прихода Бори — y минут, а до прихода Васи — z минут. В кино пойдут все вместе, только если $y-15\leqslant z\leqslant y$ (Вася дождался Бори) или $y\leqslant z\leqslant y+10$ (Боря дождался Васи) и при этом Аня пришла не раньше обоих мальчиков: $x \geqslant y$ и $x \geqslant z$. Обозначим эти три события соответственно A, B и C. Событие «В кино пошли все вместе» записывается $(A \cup B) \cap C$, а его вероятность равна $(\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)) \cdot \mathrm{P}(C)$, поскольку события A и B несовместны, а Аня приходит независимо от Бори и Васи. В плоскости yOz рассмотрим квадрат $F = \{0 \leqslant y \leqslant 60, 0 \leqslant z \leqslant 60\}$ и найдём в нём фигуры A и B, определяемые условиями $y - 15 \leqslant z \leqslant y$ и $y \leqslant z \leqslant y + 10$ соответственно. Несложный подсчёт показывает, что

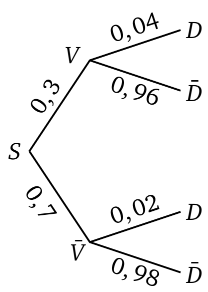
$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{S_A + S_B}{S_F} = \frac{107}{288}.$$

Осталось найти вероятность события C. Аккуратно это также можно сделать геометрически, но проще заметить, что из-за симметрии всех возможных исходов $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{3}$. Теперь можно найти искомую вероятность.

Занятие 5

5.1. а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{5}{36}$; в) $\frac{13}{36}$; г) $\frac{1}{18}$.

5.2. а) 0,026; б) прибл. 0,462;
в) прибл. 0,704.



Решение. Построим ***дерево вероятностей*** для этого эксперимента. Событие «Фонарь бракованный» обозначим D, событие «Фонарь сделан в городе В» обозначим V. Около рёбер подпишем соответствующие вероятности, которые легко найти из условия. Элементарными событиями являются цепочки в дереве, идущие от вершины S вправо. Например, SVD.

а) Событие D состоит из двух элементарных событий SVD и $S\bar{V}D$. Вероятности этих событий находятся ***умножением вероятностей*** вдоль рёбер:

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(SVD) + \mathrm{P}(S\bar{V}D) = 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}7 \cdot 0{,}02 = \\ = 0{,}012 + 0{,}014 = 0{,}026.$$

б) Мы встречаемся с ***условной вероятностью***. Найдём вероятность события V при условии D — «Фонарь бракованный»:

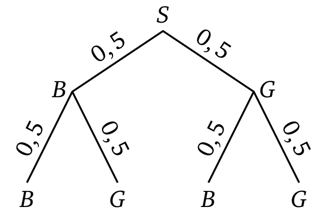
$$\mathrm{P}(V|D) = \frac{\mathrm{P}(V \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{\mathrm{P}(SVD)}{\mathrm{P}(SVD) + \mathrm{P}(S\bar{V}D)} = \frac{0{,}012}{0{,}026} = \frac{6}{13} \approx 0{,}462.$$

в) $\mathrm{P}(\bar{V}|\bar{D}) = \frac{\mathrm{P}(\bar{V} \cap \bar{D})}{\mathrm{P}(\bar{D})} = \frac{\mathrm{P}(S\bar{V}\bar{D})}{1 - \mathrm{P}(D)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}98}{0{,}974} = \frac{686}{974} \approx 0{,}704.$

5.3. а) $\frac{1}{46} \approx 0{,}022$; б) $\frac{45}{46} \approx 0{,}978$.

Указание. Здесь также возникает ***условная вероятность*** того, что тарелка бракованная при условии, что она поступила в продажу. Значит, нужно найти долю, которую занимают бракованные тарелки среди всех тарелок, поступивших в продажу. Для этого нужно найти отношение вероятности события «Бракованная тарелка в продаже» к вероятности события «Тарелка поступила в продажу». Обе эти вероятность легко вычислить с помощью дерева, которое получается даже проще, чем в предыдущей задаче. Задачу в п. б) легко решить, зная решение п. а).

5.4. $\frac{2}{3}$.



Решение. Построим дерево. События «Мальчик» и «Девочка» обозначаем буквами B и G соответственно. Вероятности рождения мальчика и девочки будем считать одинаковыми — по 0,5. Событию A «Один из детей мальчик» благоприятствуют цепочки SBB, SBG и SGB. Событию C «Мальчик и девочка» благоприятствуют цепочки SBG и SGB. Поэтому вероятность события «Другой ребёнок — девочка» при условии, что один из детей мальчик, равна

$$\mathrm{P}(C|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap C)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(SBG) + \mathrm{P}(SGB)}{\mathrm{P}(SBB) + P(SBG) + \mathrm{P}(SGB)} = \frac{0{,}25 \cdot 2}{0{,}25 \cdot 3} = \frac{2}{3},$$

что на первый взгляд кажется неправдоподобным, но на самом деле так и есть.

5.5. 0,5.

5.6. Прибл. 0,481.

Указание. Совершенно непонятно, как день рождения мальчика в понедельник влияет на вероятность другого ребёнка оказаться девочкой. Хочется дать ответ 0,5, но задача 5.4 уже показала нам, что всё не так просто. Рассуждайте так же, как и в задаче 5.4. Дерево будет сложнее, поскольку возникает три вида событий: «Мальчик, родившийся в понедельник», «Мальчик, родившийся не в понедельник» и «Девочка».

Занятие 6

6.1. а) 0,375; б) 0,25.

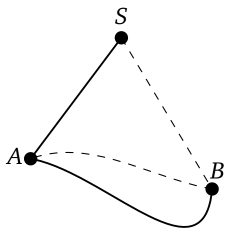
Указание. Дерево эксперимента здесь имеет высоту 4, т. е. каждая цепочка имеет четыре ребра. Всего цепочек получается $2^4 = 16$, и пересчитать цепочки, благоприятствующие нужным событиям, не представляет труда.

6.2. $S \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

6.3. Если принять прогноз «Два мальчика и две девочки», то нужно 4 подарка. Цена 4000 рублей, а вероятность ошибки 0,625. Если принять прогноз «Мальчиков от 1 до 3», это увеличивает цену до 6 тысяч, но в пять раз понижает вероятность ошибки — до 0,125.

Комментарий. Участники кружка сообразили, что выбор зависит от того, насколько мы боимся ошибиться. Если очень боимся, придётся покупать 4 самолёта и 4 куклы, т. е. потратить 8 000 рублей, зато вероятность ошибки равно 0. О значимости ошибки при выборе решающей вероятности мы говорили в занятии 1.

6.4. а) цепочки SAB и SBA. Обе разными способами дают одно и то же событие $A \cap B$; б) 0,25.



Решение. б) Умножая вероятности вдоль цепочки SAB, получаем:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Умножая вероятности вдоль цепочки SBA, находим: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Приравнивая правые части, получаем ***формулу Байеса***

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Подставим значения и получим: $0{,}2 \cdot 0{,}5 = P(B|A) \cdot 0{,}4$, откуда

$$P(B|A) = 0{,}25.$$

6.5. 0,616.

Решение. Обозначим событие «Робин здоров»[1] буквой A, а событие «Анализ положительный» — буквой B. Тогда можно применить ***формулу Байеса***. Для наглядности полезно сделать рисунок, такой же, как в задаче 6.4, и подписать на нём нужные вероятности.

Получаем $P(A|B) = 0{,}384$. Это вероятность того, что, несмотря на положительный анализ, Робин здоров. Осталось найти вероятность того, что Робин всё же болен.

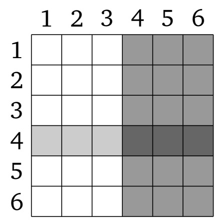
Комментарий. Результат показывает, что даже положительный анализ не является бесспорным указанием на заболевание. Вероятность 0,616 не так уж велика. Лучше провести ещё одно исследование, независимо от первого.

[1] Возможно, болен чем-то еще, но не пироплазмозом.

6.6. $\frac{1}{3}$.

Указание. Формула Байеса даёт возможность легко найти вероятность того, что протекающий пакет изготовлен в Л. Получается $\frac{2}{3}$. Теперь не составит труда найти нужную вероятность.

Занятие 7



7.1. *Указание.* Изобразим нужные события в таблице эксперимента (результат первого броска — номер строки, результат второго — номер столбца). Вероятность первого события $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{6}$, вероятность второго события $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, а вероятность их пересечения равна

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \text{ (см. рис.).}$$

Осталось проверить, выполняется ли равенство

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

7.2. а) 0,99; б) 0,01.

7.3. а) 0,0000019999; б) 0,0000000001;

в) в п. б) показано, что событие «Полный отказ тормозов» настолько маловероятно, что добавление дополнительных контуров практически ничего не улучшит. Но оно значительно усложнит конструкцию и сделает автомобиль дороже.

7.4. а) да; б) нет.

Замечание. Решение задачи показывает, что если есть несколько событий, и любые два из них независимы, то все вместе они могут оказаться зависимыми. Довольно странно, но это так.

7.5. *Указание.* Если события B (бузина) и D (дядька) независимы, то вероятность их совместного наступления должна быть

$$\mathrm{P}(B \cap D) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D) = 0{,}12.$$

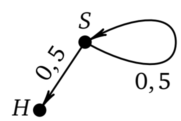
А на практике частота их совместного наступления оказалась $\frac{275}{730} \approx 0{,}38$. Частота далека от вероятности при значительном числе испытаний. Даже без количественных оценок ясно, что это крайне маловероятно. В такие маловероятные события мы не верим (см. занятие 1). Скорее всего, Пётр Иванович ошибается, и события не являются независимыми. Возможно, появление бузины в огороде каким-то образом стимулирует дядьку приехать в Киев?

7.6. *Указание.* Попробуйте придумать что-то похожее на конструкцию из задачи 7.4.

7.7. *Указание.* $\mathrm{P}(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - P(B) = P(\overline{B})$. Другой способ опирается на формулу произведения вероятностей независимых событий:

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot (1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(\overline{B}). \qquad \square$$

Занятие 8



8.1. *Решение.* Покажем решение с помощью ***графа с циклом***. Пусть вероятность рано или поздно получить орла равна p. Изобразим граф с началом в точке S. Первый раз с вероятностью 0,5 выпадает орёл (H) и тогда всё заканчивается. С вероятностью 0,5 первый бросок даёт решку, и тем самым всё начинается заново (стрелка в графе превратилась в петлю, которая ведёт снова к S). Событие A — «Рано или поздно выпадет орёл» получается как объединение несовместых элементарных событий — цепочек:

$$A = SH \cup SSH \cup SSSH \cup \ldots$$

Вероятность p равна бесконечной сумме вероятностей, образующих геометрическую прогрессию. Применим ***формулу суммы геометрической прогрессии***:

$$p = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 + \ldots = \frac{0{,}5}{1 - 0{,}5} = 1.$$

Второй способ. Применим ***формулу полной вероятности***. Если в первый раз выпал орёл (событие B), то событие A тем самым наступило: $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$, $\mathrm{P}(A|B) = 1$.

Если же в первый раз выпала решка (событие $\overline{B}$), то эксперимент начинается заново, вероятность получить орла прежняя: $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}5$, $\mathrm{P}(A|\overline{B}) = \mathrm{P}(A) = p$. Формула полной вероятности принимает такой вид:

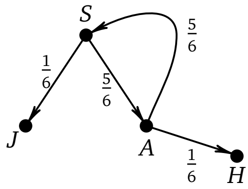
$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A|\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B}),$$

т. е. $p = 1 \cdot 0{,}5 + p \cdot 0{,}5$, откуда $p = 1$.

Третий способ немного жульнический. Решая задачу вторым способом, мы видели, что $\mathrm{P}(A|\overline{B}) = \mathrm{P}(A)$. Это значит, что события A и $\overline{B}$ ***независимы***. Но тогда события A и B также независимы (см. задачу 7.7). Тогда $P(A) = \mathrm{P}(A|B) = 1$.

8.2. *Указание.* Сначала нужно показать, что муха рано или поздно с вероятностью 1 достигнет точки с абсциссой 1. Это похоже на задачу 8.1.

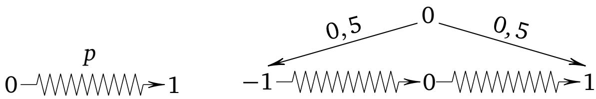
8.3. $\frac{5}{11}$.



Указание. Пусть p — искомая вероятность. Изобразим граф. Он сложнее, чем в задаче 8.1. Сначала с вероятностью $\frac{1}{6}$ выстрел случается у Джо (J) или с вероятностью $\frac{5}{6}$ револьвер у него не стреляет (A). Тогда очередь Хью. Выстрел либо случается (H), либо всё возвращается в исходное состояние S. Событие H получается как объединение цепочек SAH, $SASAH$, $SASASAH$ и т. д. А вероятность $p = \mathrm{P}(H)$ находится по ***формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии***.

Можно ещё использовать ***формулу полной вероятности***, которая приведёт к несложному уравнению на p.

8.4. *Решение.* а) Применим хитрый способ, а именно — нарисуем два графа одного и того же перехода. Первый граф (рис. *а*) показывает цепочку перехода из точки 0 в точку 1 каким-либо образом, пусть не самым простым. Эта цепочка может иметь много звеньев, поэтому изобразим её зигзагообразной линией, а вероятность этого перехода обозначим p.



а) б)

Граф на рис. *б*) показывает тот же переход $0 \to 1$ более подробно. Из точки 0 с вероятностью 0,5 можно сразу попасть в точку 1, а можно попасть с вероятностью 0,5 в точку -1, откуда придётся сделать уже два одинаковых перехода: $-1 \to 0 \to 1$, причём каждый с вероятностью p.

Используя ***формулу полной вероятности***, получаем уравнение:

$$p = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot p \cdot p, \quad \text{т. е.} \quad p^2 - 2p + 1 = 0, \quad \text{откуда } p = 1.$$

б) Если кузнечик с вероятностью 1 прискачет из точки 0 в точку 1, то верно и обратное: с вероятностью 1 кузнечик из точки 1 вернётся в точку 0.

8.5. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5}$.

Указание. а) Рассмотрите граф эксперимента и составьте сумму геометрической прогрессии. Опять же есть другой путь: если выпадет решка, то Хью сразу проигрывает. А если первый бросок даст орла, то Джо и Хью «меняются местами» — теперь у Джо доллар, а у Хью — два. Отсюда легко получить уравнение на искомую вероятность.

Занятие 9

9.1. $\frac{5}{36}$ независимо от способа выбора.

Комментарий. В обоих случаях ответ одинаковый — $\frac{5}{36}$. Это можно объяснить так: представим, что один человек последовательно вытягивает из колоды 5 карт, а затем передаёт второму человеку эти 5 карт одновременно. Для первого выбор карт был последовательным, а для второго — одновременным. А вероятность обнаружить среди выбранных карт туза одна и та же.

9.2. Делай, Петя, что хочешь, поскольку на вероятность это не влияет.

Комментарий. Можно честно посчитать вероятность удачного выбора билета при любом выборе места в очереди. Если Петя идёт первым, то вероятность взять известный билет равна $\frac{1}{20}$. Если Петя идёт вторым, то эта вероятность равна $\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}=\frac{1}{20}$. Если Петя идёт третьим, то она равна $\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18}=\frac{1}{20}$. Так же получаем вероятность $\frac{1}{20}$ для всех остальных случаев.

Можно поступить проще. Заменим последовательный выбор билетов одновременным: представим, что все студенты заходят в аудиторию сразу. В этом случае вероятность, что Петя возьмёт счастливый билет, очевидно, равна $\frac{1}{20}$, а как известно, способ случайного выбора на результат не влияет.

9.3. а) $\frac{3}{23}$; б) $\frac{35}{69}$.

Указание. Здесь удобнее считать, что продавец вынимает карандаши по очереди. Легче вычислять.

9.4. 0,1. **9.5.** а) $\frac{18}{575}$; б) $\frac{6}{115}$.

9.6. 0,75.

Указание. Представим себе, что это не Петя и Вася выбирают билеты, а билеты «выбирают» Петю или Васю. Тогда всё становится ясно.

Комментарий. Если бы было известно, что Петя и Вася взяли ровно по 50 билетов каждый, результат был бы другим. Подумайте почему.

Занятие 10

10.1. а) 6; б) 120; в) 5040; г) $n!$.

Указание. Все эти задачи на прямое применение ***комбинаторного правила умножения***.

10.2. $26^3 = 17576$. **10.3.** $1\,726\,272$.

10.4. а) $12^5 = 248832$; б) $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$.

10.5. а) 90; б) 90; в) 90000; г) $9 \cdot 10^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$.

Комментарий. Квадратные скобки означают ***целую часть числа***. Чтобы разобраться, зачем здесь целая часть, подумайте, почему ответы в п. а) и б) одинаковые, и решите задачу, например, для 12-значных чисел.

10.6. $5\,005\,000$.

Указание. Обратите внимание на то, что палочка одинакова с обоих концов. Её можно перевернуть. Поэтому две раскраски совпадают, если они симметричны (ср. с задачей 10.5).

10.7. а) $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7} = 86400$; б) $\dfrac{10^7 - 10}{7} = 1428570$.

Указание. Очень важно, что лошадки не пронумерованы. Это значит, что две раскраски, которые совмещаются поворотом, нужно отождествить (считать за одну).

Комментарий. Как мы видели, в задаче б) существует $n^p - n$ способов покрасить p лошадок, используя n цветов, так, что не все лошадки одного цвета. Если число p — простое, то отождествляются ровно p покрасок, полученных друг из друга поворотом. Это означает, что $n^p - n$ делится на p, если p — простое число. Это утверждение — одна из интереснейших теорем теории чисел (***малая теорема Ферма***).

10.8. $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 7} = \dfrac{10!}{3! \cdot 14} = 43\,200$.

Указание. Сравните с задачей 10.7 а): браслет тоже можно поворачивать, как карусель. Но его ещё можно и переворачивать. Здесь нужно учесть отождествления поворотом (как в задаче 10.7) и отождествления изменением порядка (как в задаче 10.6). Пометим какие-нибудь две соседние бусины номерами 1 и 2 и посчитаем раскраски, начиная с этих бусин в указанном порядке:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

Теперь учтём, что первой может стать любая бусина. Значит, нужно поделить на 7.

Кроме того, учтём, что нумеровать можно и в противоположную сторону. Значит, нужно поделить ещё на 2.

Занятие 11

11.1. а) $C_5^3=10$; б) $C_5^2=10$.

Указание. Что такое ***число сочетаний*** C_n^k и как эти числа находить, написано в справочнике.

11.2. $C_{10}^6=210$.

11.3. а) 40 320; б) 322 560; в) $k!\cdot(C_8^k)^2$.

Указание. Нужно выбрать k столбцов и k рядов, получив тем самым доску размера $k\times k$, и уже на этой меньшей доске расставить k ладей.

11.4. $C_9^2=36$. **11.5.** $C_{10}^3=120$.

11.6. $\dfrac{n(n+1)}{2}$ или C_{n+1}^2.

Комментарий: по причине, ясной из условия задачи, числа C_n^2 (1, 3, 6, 10, 15, …) называются ***треугольными***.

11.7. C_9^2.

Указание. Задача сводится к вопросу: сколькими способами два разделителя (например, используем в качестве разделителей нули) можно поставить в ряду из десяти единиц, так чтобы в каждой из трёх получившихся частей была хотя бы одна единица. Например, разбиение $4+3+4$ кодируется так:

$$1111011101111.$$

11.8. 36. *Указание*. См. предыдущую задачу.

11.9. $C_{12}^2=66$.

Указание. По сравнению с задачей 11.8 ситуация усложняется тем, что может не быть подарков одного или даже двух видов. Добавим к Мишиной покупке одну игрушку, одну свечку и одну обезьянку. Всего получается 13 подарков, но теперь каждый вид присутствует. Задача свелась к предыдущей: сколько есть способов разбить число 13 на три упорядоченных слагаемых. Эту задачу мы уже умеем решать.

11.10. 30.

Решение. Выбрать 2 зелёных шарика из 4 можно C_4^2 способами. Выбрать 4 шарика из 5 красных можно C_5^4 способами. Все эти способы комбинируются между собой. Получаем: $C_4^2\cdot C_5^4=6\cdot 5=30$.

11.11. $C_N^n C_M^m$.

11.12. *Указание.* Каждое слагаемое в левой части — число способов выбрать определённое число зелёных и определённое число красных шаров из коробки, в которой N зелёных и M красных шаров так, что общее число выбранных шаров равно k (см. задачу 11.11). Поскольку эти слагаемые в сумме исчерпывают все возможные способы, сумма равна C_{N+M}^k.

Занятие 12

12.1. а) $C_7^3=35$; б) $\dfrac{C_3^1\cdot C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$.

Указание. Чтобы попасть из A в B, муха должна всего сделать 7 шагов, из них 3 вправо. Шаги вправо и вверх могут чередоваться в любом порядке. Значит, всего маршрутов из A в B ровно $C_7^3=35$. Отсюда следует решение п. а). Чтобы решить задачу б), нужно отдельно найти число маршрутов из A в C и число маршрутов из C в B. И тогда уже воспользоваться правилом умножения.

12.2. а) $\dfrac{C_4^2\cdot C_5^4}{C_9^6}=\dfrac{5}{14}$; б) $\dfrac{C_4^1\cdot C_5^1}{C_9^2}=\dfrac{5}{9}$.

12.3. а) $\dfrac{C_5^3}{C_{11}^3}=\dfrac{2}{33}$; б) $1-\dfrac{C_6^3}{C_{11}^3}=\dfrac{87}{99}$.

12.4. а) $\dfrac{C_9^1\cdot C_8^1\cdot C_7^1}{C_{24}^3}\approx 0{,}249$; б) $\dfrac{C_9^3\cdot C_8^2\cdot C_7^1}{C_{24}^6}=\dfrac{8\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 3}{23\cdot 11\cdot 19}\approx 0{,}733$.

12.5. $\dfrac{C_5^3+C_6^3+C_8^3}{C_{19}^3}\approx 0{,}089$.

12.6. а) $\dfrac{1}{C_{36}^5}\approx 0{,}00000265$; б) $\dfrac{C_5^4\cdot C_{31}^1}{C_{36}^5}\approx 0{,}000411$;

в) $\dfrac{C_5^3\cdot C_{31}^2}{C_{36}^5}\approx 0{,}123$.

Комментарий. Обратите внимание — в п. а) и б), т. е. там, где речь идёт о действительно приличных выигрышах, вероятности настолько малы, что их можно смело считать равными нулю. Не следует играть в лотерею, всерьёз рассчитывая на выигрыш.

12.7. $\dfrac{511}{512}$.

Решение. Найдём вероятность противоположного события $\bar{A}$ — «Результаты чередуются», которому благоприятствуют ровно две последовательности: ОРОРОРОРОР и РОРОРОРОРО. Вероятность каждой из них равна $\dfrac{1}{2^{10}}=\dfrac{1}{1024}$. Теперь легко найти $\mathrm{P}(\bar{A})$ и $\mathrm{P}(A)$:

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\bar{A})=1-\frac{2}{1024}=\frac{511}{512}.$$

12.8. Первое более вероятно.

Решение. Шестёрка не выпадет ни разу в шести попытках с вероятностью $\frac{5^6}{6^6} \approx 0335$. В двенадцати попытках вероятность получить менее двух шестёрок равна

$$\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + C_{12}^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0{,}381.$$

Переходя к противоположным событиям, получаем, что вероятность хотя бы двух шестёрок при двенадцати бросках ниже, чем хотя бы одной при шести бросках.

12.9. $1 - \frac{6!}{6^6} \approx 0{,}985$.

Указание. Удобно найти вероятность того, что среди выпавших чисел нет двух одинаковых.

12.10. а) $3p^2(1-p) = 0{,}189$; б) $4p^3(1-p) \approx 0{,}076$;
в) $35p^3(1-p)^4 \approx 0{,}227$.

Решение. а) Попадание будем отмечать буквой П, а промах — буквой Н. Событию «Попал два раза из трёх» благоприятствуют элементарные исходы ППН, ПНП и НПП. Вероятность каждого из них равна $p^2(1-p)$. А всего таких исходов три. Получается

$$3p^2(1-p) = 3 \cdot 009 \cdot 07 = 0{,}189.$$

Аналогично решаются задачи б) и в). При решении п. в) выписывать всевозможные подходящие последовательности из трёх букв П и четырёх букв Н утомительно (но возможно). Гораздо проще воспользоваться комбинаторными сведениями. Таких последовательностей ровно $C_7^3 = 35$. Получается

$$C_7^3 p^3(1-p)^4 \approx 0{,}227.$$

В общем случае: вероятность того, что в n независимых испытаниях с вероятностью успеха p в каждом наступит ровно k успехов, равна

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Эту формулу часто называют ***формулой Бернулли***[1].

Занятие 13

13.1. а) 0,3; б) 0,21; в) $0{,}7^6 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}035$; г) $0{,}7^{k-1} \cdot 0{,}3$; д) 0.

Комментарий. Сравните задачу д) с задачей 8.1.

[1] По имени Якоба Бернулли — швейцарского математика, по-видимому, первым давшего решение этой задачи в общем виде.

13.2. $\frac{1}{32}$. **13.3.** $\left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot\frac{1}{3}\approx 0{,}0195$. **13.4.** $(1-p)^{k-1}p$.

13.5. а) Прибл. 0,121; б) прибл. 0,233; в) прибл. 0,009; г) $C_{10}^k\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{10-k}$; д) $0{,}7^{10}$.

Решение. а) Будем помечать попадание в мишень буквой У (успех), а промах — Н (неудача). Событию «Поражена ровно одна мишень» благоприятствуют последовательности из 10 букв, в каждой из которых ровно одна буква У. Например,

УННННННННН, ННУННННННН или НННННННННУ.

Вероятность каждой такой последовательности равна

$$p\cdot q^9 = 0{,}3\cdot 0{,}7^9\approx 0{,}0121,$$

а всего таких последовательностей $C_{10}^1=10$. Следовательно, искомая вероятность приближённо равна

$$10\cdot 0{,}0121 = 0{,}121.$$

Задачи б)—д) решаются аналогично.

13.6. а) $\frac{35}{128}$; б) $\frac{7}{32}$; в) $\frac{7}{32}$.

13.7. Прибл. 0,857.

Указание. Сначала найдём вероятность того, что успех наступит менее двух раз, т. е. один раз или ни разу. Эти вероятности вычисляются отдельно, а затем складываются. Остаётся перейти к вероятности противоположного события.

13.8. $C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$. Эту формулу называют формулой ***биномиальной вероятности или формулой Бернулли***.

13.9. а) $\frac{5}{11}$; б) 0; в) 0.

Решение. Извлечь 4 красных шара из 6 можно C_6^4 способами. Всего же шаров достали 8, значит, ещё 4 шара — белые. Взять эти 4 шара из 5 имеющихся можно C_5^4 способами. Значит, нужный набор можно получить $C_6^4C_5^4$ равновозможными способами из общего числа C_{11}^8 способов взять 8 шаров из 11. Искомая вероятность равна

$$\frac{C_6^4C_5^4}{C_{11}^8}=\frac{15\cdot 5}{165}=\frac{5}{11}.$$

Решая п. б), можем рассуждать так же. При этом получится выражение $\frac{C_6^2C_5^6}{C_{11}^8}$, которое не имеет смысла, если мы считаем, что не имеет смысла выражение C_5^6. Разумно положить его равным нулю: $C_5^6=0$. Тогда вероятность равна нулю, что совершенно естественно:

шансы достать 6 белых шаров, когда всего их пять, равны нулю. Такая же ситуация в п. в).

13.10. $\dfrac{C_N^n C_M^m}{C_{N+M}^{n+m}}$.

13.11. Принципиальное отличие состоит в том, что вероятность успеха в задачах 13.5—13.8 не меняется по мере развития эксперимента, а в задачах 13.9 и 13.10 извлечение каждого объекта меняет вероятность успеха и неудачи (извлечения объекта того или иного типа). Других отличий нет.

Комментарий. Если учесть это изменение вероятностей, то формула Бернулли $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ превращается в формулу $\dfrac{C_N^n C_M^m}{C_{N+M}^{n+m}}$. Покажем, как это происходит.

Будем считать успехом извлечение объекта первого типа. Нас интересует вероятность того, что в серии из $n+m$ испытаний успех наступит ровно n раз. Вероятность успеха вначале равна $\dfrac{N}{N+M}$, а вероятность неудачи — $\dfrac{M}{N+M}$. Если один успех случился, то вероятность второго успеха другая:

$$\frac{N-1}{M+N-k},$$

где k — число сделанных попыток. То же верно для неудач. И так далее. Поэтому вероятность получить ровно n успехов и m неудач равна

$$C_{n+m}^n \cdot \frac{N\cdot(N-1)(N-2)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)\cdot M\cdot(M-1)\cdot\ldots\cdot(M-m+1)}{(N+M)(N+M-1)\cdot\ldots\cdot(N+M-m-n+1)}.$$

Это произведение составлено в точности по тому же правилу, по которому составлена формула Бернулли: учтены всевозможные цепочки вида УНУННУУ...НУ, в которых ровно $n+m$ букв, и ровно n из них — буквы У.

Упростим это выражение:

$$C_{n+m}^n \cdot \frac{(N+M-n-m)!N!M!}{(N+M)!(N-n)!(M-m)!} = \frac{(n+m)!(N+M-n-m)!N!M!}{n!m!(N+M)!(N-n)!(M-m)!} =$$
$$= \frac{(n+m)!(N+M-n-m)!}{(N+M)!}\cdot\frac{N!}{n!(N-n)!}\cdot\frac{M!}{m!(M-m)!} = \frac{C_N^n C_M^m}{C_{N+M}^{n+m}}.$$

Занятие 14

14.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

14.2. $I_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{25}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$, $I_B \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$,

$$I_{A\cup B} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{23}{36} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}, \; I_{A\cap B} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{17}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Указание. Удобно изобразить таблицу эксперимента, заштриховать события A, B, $A\cup B$ и $A\cap B$ и найти их вероятности. Тогда легко выписать распределения.

14.3. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-qp & qp \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^9p & q^9p \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^{k-1}p & q^{k-1}p \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^5 & q^5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^k & q^k \end{pmatrix}$.

14.4. а) Все индикаторы распределены одинаково: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
б) $S = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$.

14.5. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-q^k & q^k \end{pmatrix}$; б) $X = 1 + I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_k + \ldots$.

Указание. а) Задача ничем не отличается от задачи 14.3 е).
б) Подумайте, зачем в этой сумме нужна единица.

14.6. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, независимо от k; б) $X = I_1 + I_2 + \ldots + I_{10}$.

Указание. Предположим (см. занятие 9), что все гости выбирают все гостинцы одновременно. Это не влияет на вероятность того, что гость получит свой же гостинец. Но в этом случае ясно, что для любого гостя вероятность получить свой же подарок, равна 0,1.

Занятие 15

15.1. а) $p = 0{,}6$, $q = 0{,}5$; б) Z принимает значения 0, 1, 2, 3 и 4. Величина W принимает значения -2, -1, 0, 2 и 4. Величина T принимает значения -1; $-0{,}5$; 0; 1 и 2.

Решение. а) Сумма вероятностей в каждом распределении равна 1. Отсюда получим ответ: $p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

б) Найдём значения Z, т. е. все возможные суммы значений X и Y. Выпишем их:

$$1-1=0, \quad 1+0=1, \quad 1+2=3, \quad 2-1=1, \quad 2+0=2, \quad 2+2=4.$$

Некоторые из них совпадают. Осталось записать все полученные значения по разу в порядке возрастания. Аналогично находятся возможные значения W и T.

Комментарий. Мы нашли возможные значения величин Z, W и T, но не вероятности этих значений. Вероятности, вообще говоря, найти нельзя, если мы не знаем ничего больше о величинах X и Y.

15.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

15.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{25}{216} & \ldots & \frac{5^{k-1}}{6^k} & \ldots \end{pmatrix}$.

Решение. а) Теоретически может случиться так, что шестёрка не выпадет ни за какое конечное число бросков. Это, конечно, крайне маловероятно. Но всё же приходится считать, что возможное количество бросков нельзя ограничить сверху. Значения — множество всех натуральных чисел, поскольку бросков может оказаться как угодно много.

б) Если шестёрка выпала сразу же, то $X=1$. Таким образом, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{6}$. Если первый бросок шестёрку не дал, зато во второй раз шестёрка выпала, то $X=2$. Поэтому $\mathrm{P}(X=2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$. Рассуждая так и далее, получаем:

$$\mathrm{P}(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5^{k-1}}{6^k}.$$

15.4. $\mathrm{P}(S=k)=C_8^k\frac{1}{2^8}$, где $k=0,1,\ldots,8$.

15.5. *Указание.* а) Оценивая минимальный возможный рост, главное не ошибиться в большую сторону. Примем во внимание, что бывают карлики — люди с патологически малым ростом. Тогда можно, например, ограничить рост снизу значением 60 см. Если сомневаетесь, возьмите 50 см. Точно так же, оценивая возможные значения сверху, можно взять с запасом, скажем, 300 см.

б) Поскольку рост большинства мужчин колеблется около среднего значения (примерно 174 см), столбики диаграммы около этого значения будут высокими. По мере увеличения и уменьшения роста, частота будет уменьшаться. Мы не знаем точно рост самого рослого и самого малорослого мужчины, но можно быть уверенным в том, что частоты левее 150 см и правее 200 см будут практически незаметны. Внешне диаграмма получается похожей на колокол.

15.6. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 38 & 98 \\ 0{,}7555 & 0{,}2176 & 0{,}0264 & 0{,}0005 \end{pmatrix}$.

Занятие 16

16.1. а) $\frac{2}{3}$; б) 0,4; в) p.

Решение. Решим п. в), а из этого получится решение п. а) и б):

$$\mathrm{E}I = 0\cdot q + 1\cdot p = p.$$

16.2. а) 1,6; б) 0,7; в) 2,3; г) 2,8; д) 3,5.

16.3. а) 12,25 см^2; б) прибл. 15,17 см^2.

Решение. Найдём ожидание площади S Асиного прямоугольника. Обе стороны X и Y — случайные величины, имеющие одно и то же распределение[1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Тогда, поскольку величины X и Y независимы,

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\cdot \mathrm{E}Y = 3{,}5\cdot 3{,}5 = 12{,}25.$$

С Васей ситуация другая. Сторона его квадрата Z имеет такое же распределение, как и стороны Асиного прямоугольника, но площадь равна Z^2. Величина Z^2 имеет распределение

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\mathrm{E}Z^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15{,}17$. Мало того, что Вася ленив, он ещё и бумаги больше тратит.

16.4. 3,6.

Решение. Можно найти вероятности каждой оценки:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix},$$

а уже отсюда вывести ожидание:

$$\mathrm{E}X = 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}4 + 5\cdot 0{,}2 = 3{,}6.$$

Можно поступить иначе:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X &= 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = \\ &= 2p_2 + 3(p_{\leqslant 3} - p_2) + 4(p_{\leqslant 4} - p_{\leqslant 3}) + 5(p_{\leqslant 5} - p_{\leqslant 4}) = \\ &= 5p_{\leqslant 5} - p_{\leqslant 4} - p_{\leqslant 3} - p_2 = 5 - 0{,}8 - 0{,}4 - 0{,}2 = 3{,}6.\end{aligned}$$

[1] Заметьте, это не означает, что стороны одинаковы. Они как раз разные. Одна сторона X, а другая Y. То, что у них одинаковое распределение, не делает их совпадающими или равными. Они случайно могут совпасть по значению, но не более того.

16.5. 1,5.

Решение. С помощью ***формулы Бернулли*** несложно составить распределение случайной величины S — «Число выпавших орлов»:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Теперь можно непосредственно вычислить $\mathrm{E}S$. А можно заметить, что в силу симметричности распределения, ожидание должно быть точно посередине между числами 1 и 2, то есть 1,5.

Другой способ (***метод индикаторов***). Возьмём бинарную величину $I_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, которая равна единице, только если первый раз выпал орёл. Очевидно (см. задачу 16.1), $\mathrm{E}I_1 = 0{,}5$. Аналогично введём индикаторы I_1 и I_2 выпадения орла во второй и третий раз. Точно так же $\mathrm{E}I_2 = \mathrm{E}I_3 = 0{,}5$. Тогда общее число орлов равно сумме всех трёх индикаторов: $S = I_1 + I_2 + I_3$. Воспользуемся свойством математического ожидания:

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \mathrm{E}I_3 = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5.$$

16.6. *Указание.* Можно подобрать несложное распределение, а можно попытаться найти несложные примеры с помощью монет или кубиков. Например, а) число орлов при бросании 2 монет; б) наибольшее из очков, выпавших при двукратном бросании правильной кости.

16.7. −0,455.

Указание. Распределение случайной величины «выигрыш» известно (см. задачу 15.6):

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 38 & 98 \\ 0{,}7555 & 0{,}2176 & 0{,}0264 & 0{,}0005 \end{pmatrix}.$$

Осталось вычислить ожидание.

16.8. 7,4.

Решение. Добавим к колоде снизу ещё одного туза (фальшивого). Колода разбивается на пять частей, каждая из которых заканчивается тузом: четыре туза настоящих, а пятый — фальшивый. Пусть случайная величина X_k — «Число карт в k-й части». Тогда

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 37.$$

В силу симметрии всех возможных раскладов, величины X_k распределены одинаково. Следовательно, все математические ожидания $\mathrm{E}X_k$ равны между собой: $5\mathrm{E}X_1 = 37$, откуда $\mathrm{E}X_1 = 7{,}4$. Это и есть искомая величина.

Другой способ (***метод индикаторов***). Пронумеруем как-нибудь числами от 1 до 32 карты, не являющиеся тузами. Пусть I_k — индикатор события «Карта номер k находится прежде всех тузов». Рассмотрим только взаимное расположение четырёх тузов и этой карты и видим, что вероятность этой карты оказаться прежде всех тузов равна $p_k = \frac{1}{5}$, т. е. $\mathrm{E}I_k = p_k = 0{,}2$.

Случайная величина X — «Число карт до первого туза» равна

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_{32} + 1$$

(единица нужна, так как кроме не тузов открывают ещё одну карту — туза). Перейдём к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X = 32 \cdot 0{,}2 + 1 = 7{,}4.$$

16.9. 5,4.

Решение. Нужно учесть, что если проверено 9 лампочек, и все они исправны, то 10-ю лампочку проверять не нужно — она заведомо перегоревшая. Поэтому ожидание равно

$$1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + \ldots + 9 \cdot \frac{2}{10} = \frac{9 \cdot 10}{2 \cdot 10} + \frac{9}{10} = 5{,}4.$$

Занятие 18

18.1. 0,6. *Указание.* См. задачу 16.1.

18.2. 5,76.

Решение. Пусть I_k — ***индикатор*** события «k-я цель поражена». Вероятность этого события равна

$$p + (1-p)p = 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96.$$

Поэтому $\mathrm{E}I_k = 0{,}96$ для всех k от 1 до 6.

Общее число поражённых целей X равно $I_1 + I_2 + \ldots + I_6$. Следовательно,

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_6 = 6 \cdot 0{,}96 = 5{,}76.$$

18.3. 3,85.

Решение. Пусть I_k — индикатор события «k-й вынутый шар красного цвета». Вероятность этого события $\frac{11}{20} = 0{,}55$ (если это не очевидно, считайте, что шары вынимают одновременно). Поэтому $\mathrm{E}I_k = 0{,}55$ для всех $k = 1, 2, \ldots, 7$.

Общее число вынутых красных шаров X равно $I_1+I_2+\ldots+I_7$. Следовательно,

$$\mathrm{E}X=\mathrm{E}I_1+\mathrm{E}I_2+\ldots+\mathrm{E}I_7=7\cdot 0{,}55=3{,}85.$$

18.4. 1.

Решение. Пусть I_k — индикатор события «k-й гость получил свой собственный подарок». Вероятность этого события равна $\frac{1}{n}$. Поэтому $\mathrm{E}I_k=\frac{1}{n}$ для всех $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда общее число гостей, получивших свой собственный гостинец, равно

$$X=I_1+I_2+I_3+\ldots+I_n.$$

Перейдём к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X=\mathrm{E}I_1+\mathrm{E}I_2+\ldots+\mathrm{E}I_n=n\mathrm{E}I_k=n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

18.5. $\frac{n-1}{2}$.

Указание. Задачу можно решить аналогично задаче 18.4, но лучше использовать уже готовый ответ к задаче 18.4. Пусть Z — число кавалеров, танцующих с дамой выше себя, Y — число кавалеров, танцующих с дамой ниже себя, а X — число кавалеров, танцующих со своими жёнами. Тогда

$$\mathrm{E}X+\mathrm{E}Y+\mathrm{E}Z=n,$$

при этом в силу симметрии $\mathrm{E}Y=\mathrm{E}Z$, а $\mathrm{E}X=1$ (наверно, это папы тех детей, кому достался свой же подарок: см. задачу 18.4). Теперь

$$2\mathrm{E}Z=n-1,\quad \text{откуда } Z=\frac{n-1}{2}.$$

18.6. 2.

Решение. Пусть I_k индикатор события «k первых бросков окончились решкой». Вероятность этого равна $0{,}5^k$. Поэтому $\mathrm{E}I_k=0{,}5^k$.

Число бросков, потребовавшихся для выпадения первого орла, равно

$$X=1+I_1+I_2+I_3+\ldots$$

Единица отвечает последнему успешному броску. Тогда

$$\mathrm{E}X=1+\mathrm{E}I_1+\mathrm{E}I_2+\mathrm{E}I_3+\ldots=1+0{,}5+0{,}5^2+0{,}5^3+\ldots=\frac{1}{1-0{,}5}=2.$$

18.7. а) 9,5; б) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{20}\approx 3{,}598$.

Решение. а) Пусть всего кресел и зрителей n, и пусть I_{jk} — индикатор события «Один из пары зрителей с билетами на места j

и k должен встать, чтобы пропустить другого», причём $j<k$. Тогда $I_{jk}=1$, только если эти двое идут в неправильном порядке, т. е. первым идёт зритель j, у кого кресло ближе к центральному проходу. Вероятность этого 0,5 (нас интересует только порядок этих двоих). Следовательно, $\mathrm{E}I_{jk}=0{,}5$ для любой пары j и k. Тогда случайная величина «Число вставаний», равная сумме всех индикаторов:

$$X=I_{1,2}+I_{1,3}+\ldots+I_{j,k}+\ldots+I_{n-1,n},$$

имеет математическое ожидание

$$\mathrm{E}X=C_n^2\cdot 0{,}5=\frac{n(n-1)}{4}.$$

При $n=20$ получаем $\mathrm{E}X=9{,}5$.

б) Пусть I_k — индикатор события «Зрителю с билетом на место k не придётся вставать». $\mathrm{E}I_n=\mathrm{P}(I_n=1)=1$, поскольку дальше последнего кресла идти уже некому. $\mathrm{E}I_{n-1}=\mathrm{P}(I_{n-1}=1)=\frac{1}{2}$, поскольку $(n-1)$-й зритель не будет вставать, только если n-й зритель прошёл раньше, а вероятность этого $\frac{1}{2}$. Аналогично,

$$\mathrm{E}I_{n-2}=\mathrm{P}(I_{n-2}=1)=\frac{1}{3},$$

поскольку $(n-2)$-й зритель не будет вставать, только если он идёт после n-го и $(n-1)$-го зрителей (неважно, в каком порядке идут эти двое и неважно, идут ли эти трое подряд). И так далее:

$$\mathrm{E}I_{n-k}=\mathrm{P}(I_{n-k}=1)=\frac{1}{k+1},\quad \text{где } 0\leqslant k\leqslant n-1.$$

Общее число зрителей, которым не придётся вставать, равно

$$X=I_n+I_{n-1}+\ldots+I_1.$$

Переходя к ожиданиям, получаем: $\mathrm{E}X=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Это число называют n-м ***гармоническим числом*** и часто обозначают H_n. Положив $n=20$, получаем: $\mathrm{E}X\approx 3{,}598$.

В общем случае удобно использовать приближённую формулу

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx\ln n+\gamma,$$

где $\gamma=0{,}5772\ldots$ — ***константа Эйлера—Маскерони***.

18.8. Прибл. 5,19.

Решение. Пусть I_k — индикатор события «k-й автомобиль идёт первым в группе». Это происходит тогда и только тогда, когда его скорость ниже, чем у всех $k-1$ автомобилей, что перед ним. Вероятность этого равна $\frac{1}{k}$, поэтому $\mathrm{E}I_k = \frac{1}{k}$. Число групп равно числу лидеров, поэтому математическое ожидание числа групп равно

$$H_{100} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100} \approx \ln 100 + \gamma$$

(ср. с задачей 18.7). Число $\gamma = 0{,}5772\ldots$ — ***константа Эйлера—Маскерони***. Вычисление даёт $H_{100} \approx 5{,}19$.

Занятие 19

19.1. а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{1260}$; в) 1.

Указание. Пункты а) и б) очевидны. Пункт в) по сути совпадает с задачей 18.4.

19.2. а) $\frac{1}{19}$; б) $\frac{10}{19}$.

Решение. Пункт а) очевиден.

б) Введём ***индикаторы*** I_k событий «В k-й паре носки неразлучны». $\mathrm{E}I_k = \frac{1}{19}$. Случайная величина X — «Число пар, где носки совпали» равна сумме всех 10 индикаторов. Поэтому $\mathrm{E}X = 10 \cdot I_k = \frac{10}{19}$.

19.3. $\frac{5}{203}$.

Указание. Задача решается аналогично предыдущей. Чтобы легче понять, как посчитать вероятность образования одной неразлучной тройки, представьте, что в каждой тройке один носок (на среднюю ногу, например) помечен.

19.4. а), б) 189.

Указание. Рассмотрите случайные величины «Число очков» отдельно для каждой из 54 граней, оказавшейся на поверхности куба.

19.5. $\frac{k(n+1)}{2}$.

Решение. Пусть $X_1, \ldots, X_k$ — выбранные числа. $\mathrm{E}X_j = \frac{1+n}{2}$ для каждого j от 1 до k. Остаётся сложить математические ожидания для всех k чисел. Заметьте, что результат не зависит от того, могут ли выбранные числа повторяться или нет.

19.6. а) Прибл. 0,112; б) прибл. 2,016.

Решение. Пункт а) не должен вызвать проблем. Решим п. б). Присвоим всем белым шарам номера от 1 до 12, а всем чёрным — номера от 1 до 18. Пусть I_k — индикатор события «k-й белый шар появился раньше всех чёрных» (вероятность этого $\frac{1}{19}$), а J_m — индикатор события «m-й чёрный шар появился раньше всех белых» (вероятность $\frac{1}{12}$). Чтобы понять, как получились эти вероятности, вспомните решение задачи 16.8: там карты двух типов, а здесь шары двух цветов.

Искомая величина X — «Число шаров одного цвета, извлечённых до появления первого шара другого цвета» представляется в виде суммы:

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_{12} + J_1 + J_2 + \ldots + J_{18}.$$

Перейдём к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X = 12 \cdot \frac{1}{19} + 18 \cdot \frac{1}{13} = \frac{12 \cdot 13 + 18 \cdot 19}{13 \cdot 19} \approx 2{,}016.$$

19.7. $\frac{63}{256}$.

Указание. Мысленно (или не мысленно) переверните вторую стопку и положите на первую. Рассмотрите полученную стопку из 10 монет. Каким свойством обладает эта стопка, если в первых двух орлов было поровну?

Другой способ. Отдельно найдите вероятность того, что орлов в обеих стопках нет, отдельно — того, что их по одному, по два и т. д. Затем полученные вероятности сложите.

Комментарий. Если приравнять выражения, полученные первым и вторым способом, получится частный случай ***свёртки Вандермонда***.

Занятие 20

20.1. а) 576; б) заявление Сергея довольно правдоподобно. Результат Николая очень далеко от среднего, что подозрительно. Либо Николай ошибся, либо привирает, либо что-то не так с его костью.

Решение. а) Пусть I_k — индикатор события «Состоялся бросок номер k», а X_k — число очков, выпавших при этом k-м броске. Можно считать, что $k \leqslant 2016$, поскольку больше 2016 бросков точно не потребуется. Выразим через I_k и X_k сумму выпавших очков и случайную величину Y — «Число сделанных бросков»:

$$I_1X_1 + I_2X_2 + I_3X_3 + \ldots + I_{2016}X_{2016} = 2016,$$

$$Y = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_{2016}.$$

Наша задача — найти $\mathrm{E}Y$. Перейдём в первом равенстве к ожиданиям:

$$\mathrm{E}(I_1X_1) + \mathrm{E}(I_2X_2) + \mathrm{E}(I_3X_3) + \ldots + \mathrm{E}(I_{2016}X_{2016}) = 2016.$$

Случайная величина I_k зависит от величин I_j и X_j при $j<k$, но I_k не зависит от X_k. Поэтому $\mathrm{E}(I_kX_k)=\mathrm{E}I_k\cdot\mathrm{E}X_k=3{,}5\cdot\mathrm{E}I_k$. Получаем

$$3{,}5\mathrm{E}I_1+3{,}5\mathrm{E}I_2+3{,}5\mathrm{E}I_3+\ldots+3{,}5\mathrm{E}I_{2016}=2016,$$

откуда

$$\mathrm{E}Y=\mathrm{E}I_1+\mathrm{E}I_2+\mathrm{E}I_3+\ldots+\mathrm{E}I_{2016}=\frac{2016}{3{,}5}=576.$$

20.2. ***Метод моментов*** даёт оценку 4,48.

Указание. Пусть математическое ожидание числа очков при одном броске равно X. В эксперименте среднее число очков вышло $\frac{2016}{450}=4{,}48$. Это и есть оценка: $\hat{x}=4{,}48$.

Комментарий. Мы приравняли математическое ожидание величины к осуществившемуся её среднему значению. Поэтому такой метод оценивания можно было бы назвать методом «математического ожидания». Но по некоторой причине он называется более общо — ***методом моментов***[1].

20.3. а) Прибл. 0,302; б) 8; в) 8,8.

Решение. Пусть вероятность промаха при каждом выстреле $q=1-p$.

а) Вероятность того, что каждая конкретная мишень поражена, равна $\mathrm{P}=p+qp=p(2-p)$. Поэтому искомая вероятность равна

$$C_5^4\mathrm{P}^4(1-\mathrm{P})=5p^4(2-p)^4(1-p)^2.$$

б) Пусть число потраченных патронов — S. Очевидно, $S=10-X$, где X — число мишеней, поражённых с первого выстрела. Поэтому $\mathrm{E}S=10-\mathrm{E}X=10-5p$.

в) Требуется найти условное математическое ожидание

$$\mathrm{E}(S|\text{поражено 3 мишени}).$$

Как и прежде, $S=10-X$, где X — число мишеней, поражённых первым же выстрелом. Но их число теперь колеблется от 0 до 3, и поэтому $\mathrm{E}(S|\text{поражено 3 мишени})=10-3p$.

Чтобы получить числовые значения, осталось подставить $p=0{,}4$.

20.4. а) от 2 до 5; б) $C_3^{k-2}0{,}4^{k-2}0{,}6^{5-k}$; в) 3,2.

Решение. Ответ на вопрос п. а) очевиден.

[1] Название происходит от того, что математическое ожидание называют ещё первым моментом распределения. Часто метод применяют, используя не только первый момент, но и второй (дисперсию), а иногда и более высокого порядка. Поэтому метод называется методом моментов (во множественном числе), а не методом момента.

б) По трём мишеням из пяти биатлонист стрелял дважды. Значит, он поразил две мишени первым выстрелом, а судьба трёх оставшихся мишеней зависит от успешности вторых выстрелов. Получаем:

$$\mathrm{P}(X=k)=C_3^{k-2}p^{k-2}(1-p)^{5-k}.$$

в) Рассуждая, как в п. б), получаем $2+3p$.

20.5. а) 0,55; б) 0,4; в) 0,5.

Решение. а) Используя вероятность поражения мишени, найденную в задаче 20.3 а), видим, что математическое ожидание числа поражённых мишеней равно $5p(2-p)$. Известно, что в действительности эта величина равна 4. Приравнивая эту величину к её ожидаемому значению, получим $5p(2-p)=4$, откуда отбрасывая лишний корень, находим:

$$\hat{p}=1-\sqrt{0{,}2}\approx 0{,}55.$$

б) Из решения задачи 20.3 п. б) известно, что математическое ожидание числа потраченных патронов равно $10-5p$. Снова применим метод моментов: $10-5p=8$, откуда $\hat{p}=0{,}4$.

в) Рассуждая так же, как в задаче 20.2 в), найдём, что теперь математическое ожидание числа потраченных патронов равно $10-4p$. Метод моментов даёт $10-4p=8$, откуда $\hat{p}=0{,}5$.

Комментарий. Мы получили три разные оценки меткости стрелка, хотя вроде бы действовали мы одним методом. Почему оценки разные? Говорит ли это о том, что мы допустили ошибку или впали в парадокс? Нет. Дело в том, что эти оценки получены на основе различной информации. Первая оценка 0,55 использовала информацию только о числе поражённых мишеней. Вторая оценка 0,4 использовала информацию только о числе потраченных патронов, а третья оценка 0,5 использует и то, и другое. Возможно (у нас нет уверенности), что третья оценка меткости в каком-то смысле наилучшая (с большей вероятностью ближе к истинной неизвестный нам вероятности p, чем предыдущие оценки).

20.6. Оценки ***методом моментов***: а) 48; б) 37,2.

Решение. а) Обозначим число жёлтых леденцов x и с помощью индикаторов получим математическое ожидание числа извлечённых жёлтых леденцов: $\mathrm{E}(X)=10\cdot\dfrac{x}{120}=\dfrac{x}{12}$. Применим метод моментов (см. решение задачи 20.4): $\dfrac{x}{12}=4$, откуда $\hat{x}=48$.

б) Аналогично найдём оценку методом моментов: $\dfrac{10x}{93}=4$, откуда $\hat{x}=37{,}2$. Оценка здесь получилась дробная. Её можно попытаться уточнить, выяснив, например, что более вероятно: 37 жёлтых леденцов или 38 при условии, что Женя вытащила 4 жёлтых из 10, как нам известно. Разумеется, если вы попытаетесь уточнить оценку таким образом, вы примените уже другой метод и даже комбинацию двух методов. Но математика хороша тем, что в ней нет запретов на самые смелые эксперименты.

Занятие 22

22.1. Оба числа равны 1.

Решение. Применим ***метод индикаторов***. Пусть I_k — индикатор события «k-е колесо оказалось на прежнем месте». Случайная величина X «Число колёс, оказавшихся на прежнем месте», равна сумме индикаторов:

$$X = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Ожидание найдем так же, как в задачах 18.4 и 19.1 в). Получается, что $\mathrm{E}X = 1$.

Для вычисления дисперсии применим похожий фокус с индикаторами:

$$X^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + 2I_1I_2 + 2I_1I_3 + 2I_1I_4 + 2I_2I_3 + 2I_2I_4 + 2I_3I_4.$$

Используем равенство $I_k^2 = I_k$:

$$X^2 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + 2I_1I_2 + 2I_1I_3 + 2I_1I_4 + 2I_2I_3 + 2I_2I_4 + 2I_3I_4.$$

Вероятность события «k-е колесо на прежнем месте» равна $\frac{1}{4}$. Поэтому $\mathrm{E}I_k = \frac{1}{4}$. Но для вычислений нам ещё потребуется $\mathrm{E}(I_jI_k)$, где $j < k$. Возьмём для примера I_1I_2 — индикатор события «Первое и второе колесо оказались на своих местах», вероятность которого равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$. Это верно для любой пары колёс. Поэтому $\mathrm{E}(I_jI_k) = \frac{1}{12}$. Перейдём к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{12} = 2.$$

Тогда

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - E^2X = 2 - 1^2 = 1.$$

Стандартное отклонение также равно 1.

22.2. а) $\frac{1}{323}$; б) прибл. 0,528 и 0,727.

Решение. а) Мысленно пометим один из носков в каждой паре. Возьмём меченый носок в первой паре. Вероятность того, что второй носок из первой пары снова попадёт в пару к меченому, равна $\frac{1}{19}$. Осталось 18 носков. Рассуждая так же, получим, что вторая пара окажется неразлучной с вероятностью $\frac{1}{17}$. Отсюда находим искомую вероятность.

б) Математическое ожидание числа пар неразлучных носков X найдено в задаче 19.2: $\mathrm{E}X = \frac{10}{19}$. Для поиска дисперсии применим ***метод индикаторов***, как в задаче 22.1. Используя индикаторы I_k событий «В k-й паре носки неразлучны», получаем:

$$X^2 = I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_{10}^2 + 2I_1I_2 + 2I_1I_3 + \ldots + 2I_9I_{10},$$
$$\mathrm{E}X^2 = EI_1 + EI_2 + \ldots + EI_{10} + 2E(I_1I_2) + 2\mathrm{E}(I_1I_3) + \ldots + 2E(I_9I_{10}).$$

Нужно найти ожидание смешанного произведения индикаторов $\mathrm{E}(I_kI_j)$, т. е. вероятность события $I_kI_j = 1$, где $k < j$. В пункте а) найдено, что она равна $\frac{1}{323}$.

Следовательно,

$$\mathrm{E}X^2 = \frac{10}{19} + 2 \cdot C_{10}^2 \cdot \frac{1}{323} = \frac{10}{19} + \frac{90}{323} = \frac{260}{323}.$$

Тогда

$$DX = \mathrm{E}X^2 - E^2X = \frac{260}{323} - \left(\frac{10}{19}\right)^2 \approx 0{,}528,$$

а стандартное отклонение $\sqrt{0{,}528} \approx 0{,}727$.

22.3. а) 2,8; б) 0,96 и прибл. 0,98.

Решение. Пусть I_j — индикатор события «На j-й вопрос оба ответили верно или неверно». Вероятность этого события равна

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{14}{25} = 0{,}56,$$

т. е. $\mathrm{E}I_j = 0{,}56$. Суммируя ожидания всех индикаторов, найдём искомое ожидание величины X — «Число совпадений»:

$$\mathrm{E}X = 5 \cdot 0{,}56 = 2{,}8.$$

Чтобы найти дисперсию, найдём $\mathrm{E}X^2$:

$$X^2 = I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_5^2 + 2I_1I_2 + 2I_1I_3 + \ldots + 2I_4I_5,$$
$$\mathrm{E}X^2 = EI_1 + EI_2 + \ldots + EI_5 + 2E(I_1I_2) + 2E(I_1I_3) + \ldots + 2E(I_4I_5).$$

Нужно найти ожидание смешанного произведения индикаторов $\mathrm{E}(I_kI_j)$, т. е. вероятность события $I_kI_j = 1$, где $j > k$. Это событие является объединением четырёх событий «Вася и Сергей угадали в обоих заданиях», «Вася и Сергей не угадали в обоих заданиях», «Вася и Сергей оба угадали только в задании k» и «Вася и Сергей оба угадали только в задании j».

Поэтому

$$E(I_kI_j) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{0}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = 0{,}3.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}X^2 = 2{,}8+2C_5^2\cdot 0{,}3 = 2{,}8+20\cdot 0{,}3 = 8{,}8.$$

Тогда дисперсия равна $DX = \mathrm{E}X^2 - E^2X = 8{,}8 - 2{,}8^2 = 0{,}96$, а стандартное отклонение $\sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$.

22.4. Математическое ожидание 10,5; стандартное отклонение прибл. 2,3.

Решение. Чтобы найти математическое ожидание, можно воспользоваться результатом задачи 19.5. Получается $\dfrac{3\cdot(6+1)}{2} = 10{,}5$. Но этот метод не очень удобен для поиска дисперсии. Попробуем ***метод индикаторов***. Пусть I_k — индикатор события «Число k выбрано». Тогда сумма выбранных чисел равна

$$X = I_1+2I_2+3I_3+\ldots+6I_6.$$

Очевидно, $\mathrm{E}X = 1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}5+\ldots+6\cdot 0{,}5 = 10{,}5$, поскольку вероятность каждого числа быть выбранным равна в точности 0,5.

Чтобы найти дисперсию, вычислим $\mathrm{E}X^2$:

$$X^2 = I_1^2+4I_2^2+\ldots+36I_6^2+2(I_1\cdot 2I_2+\ldots+mI_m\cdot kI_k+\ldots+5I_5\cdot 6I_6),$$

где $1 \leqslant m < k \leqslant 6$.

Событие $I_mI_k = 1$ состоит в том, что в число выбранных попали оба числа — и m, и k. Вероятность этого $\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{5} = 0{,}2$. Поэтому $\mathrm{E}I_mI_k = 0{,}2$ для любой пары индикаторов. Получаем:

$$\mathrm{E}X^2 = 0{,}5(1+4+9+\ldots+36)+0{,}2\cdot 2(1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+mk+\ldots+5\cdot 6).$$

Осталось найти значение выражения $2\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+mk+\ldots$ $\ldots+5\cdot 6)$. Добавив к нему сумму квадратов $1+4+\ldots+36$, получим квадрат суммы

$$(1+2+3+4+5+6)^2 = 21^2 = 441.$$

Значит, $2\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+mk+\ldots+5\cdot 6) = 441-91 = 350$.

Тогда

$$\mathrm{E}X^2 = 0{,}5\cdot 91 + 0{,}2\cdot 350 = 45{,}5 + 70 = 115{,}5.$$

Следовательно, $\mathrm{E}X = 115{,}5 - 10{,}5^2 = 5{,}25$, а стандартное отклонение равно $\sqrt{5{,}25} \approx 2{,}3$.

22.5. Прибл. 5,33.

Решение. Пронумеруем белые шары числами от 1 до 12, а чёрные — числами от 1 до 18. Рассмотрите ***индикаторы*** I_k событий «k-й белый шар извлечён прежде всех чёрных» (вероятность этого $\frac{1}{19}$) и индикаторы J_m событий «m-й чёрный шар извлечён прежде всех белых» (вероятность этого $\frac{1}{13}$).

Пусть X — число шаров одного цвета, появившихся до появления шара другого цвета. Очевидно,

$$X = I_1 + \ldots + I_{12} + J_1 + \ldots + J_{18}.$$

Ожидание найдено в задаче 19.6:

$$\mathrm{E}X = \frac{12}{19} + \frac{18}{13}.$$

Найдём $\mathrm{E}X^2$:

$$\begin{aligned}X^2 = I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_{12}^2 + 2(I_1I_2 + I_1I_3 + \ldots + I_{11}I_{12}) +\\ + J_1^2 + J_2^2 + \ldots + J_{18}^2 + 2(J_1J_2 + J_1J_3 + \ldots + J_{17}J_{18}) +\\ + 2(I_1J_1 + I_1J_2 + \ldots + I_jJ_k + \ldots + I_{12}J_{18}).\end{aligned}$$

Воспользуемся равенствами $I_jI_k = I_k$, $J_jJ_k = J_k$ при $j \leqslant k$ и равенством $I_kJ_j = 0$ при любых k и j. Получаем:

$$\begin{aligned}X^2 = I_1 + I_2 + \ldots + I_{12} + 2(I_2 + 2I_3 + 3I_4 + \ldots + 11I_{12}) +\\ + J_1 + J_2 + \ldots + J_{18} + 2(J_2 + 2J_3 + \ldots + 17J_{18}) =\\ = I_1 + 3I_2 + 5I_3 + \ldots + 23I_{12} + J_1 + 3J_2 + 5J_3 + \ldots + 35J_{18}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathrm{E}I_k = \frac{1}{19}$ и $\mathrm{E}J_m = \frac{1}{13}$ для всех допустимых k и m, находим:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X^2 = \frac{1}{19}(1+3+\ldots+23) + \frac{1}{13}(1+3+\ldots+35) =\\ = \frac{(1+23)\cdot 12}{2\cdot 19} + \frac{(1+35)\cdot 18}{2\cdot 13} = \frac{12^2}{19} + \frac{18^2}{13}.\end{aligned}$$

Стандартное отклонение равно

$$\sqrt{\frac{12^2}{19} + \frac{18^2}{13} - \left(\frac{12}{19} + \frac{18}{13}\right)^2} \approx 5{,}33.$$

22.6. Прибл. 1,88.

Указание. Как обычно, вводим ***индикаторы*** I_k событий «k-й по счёту автомобиль — лидер группы». Тогда число групп X равно

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_{100}.$$

Ожидание найти несложно. Это сделано в задаче 18.8:

$$\mathrm{E}X = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{100}.$$

Дисперсию найти тоже легко, если заметить, что любые два индикатора независимы: $\mathrm{D}X = (1-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{100^2}\right)$. Тогда стандартное отклонение равно

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{100} - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{100^2}\right)} = \sqrt{H_{100} - H_{100}^2} \approx 1{,}88.$$

Комментарий. ***Гармоническое число*** $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ нам уже встречалось. Число

$$H_n^2 = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

называют ***n-м гармоническим числом второго порядка***.

Занятие 23

23.1. 34.

Решение. Проезд по кольцу обозначим b, а проезд по пути AB в ту или другу сторону обозначим a. Например, пятиминутный маршрут может выглядеть так:

$$abbba, \quad aaaba \quad \text{или} \quad abaaa.$$

n-минутный маршрут может оканчиваться на «ba» или на «aaa». При этом маршрутов вида $\ldots ba$ столько же, сколько маршрутов длины $n-1$ (чтобы это увидеть, достаточно заменить сочетание ba в конце буквой a). Маршрутов вида $\ldots aaa$ столько же, сколько маршрутов длины $n-2$ (достаточно удалить две последние буквы a).

Если обозначить M_n число маршрутов длины n, получаем:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}.$$

При этом $M_2 = 1$, $M_3 = 1$. Следовательно, M_n равно $n-1$-му числу ***последовательности Фибоначчи***

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots$$

В частности, $M_{10} = f_9 = 34$.

23.2. $\frac{9}{64}$.

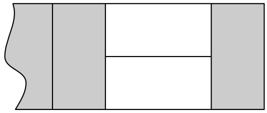
Указание. Последовательность из n бросаний без двух орлов подряд может оканчиваться либо Р, либо РО.

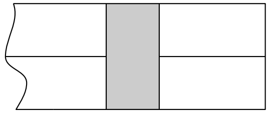
Последовательностей вида ...Р ровно столько, сколько последовательностей длины $n-1$ без двух орлов подряд (достаточно к любой из них справа приписать букву Р).

Последовательностей вида ...РО ровно столько, сколько последовательностей длины $n-2$ без двух орлов подряд (достаточно приписать в конец РО). Как в задаче 23.1, получаем, что число последовательностей длины n без двух орлов подряд равно некоторому числу Фибоначчи. Отсюда находим искомую вероятность, зная общее число двоичных равновозможных последовательностей длины 10.

23.3. f_{n+1} ($(n+1)$-е число Фибоначчи).

Указание. Рассмотрите возможные положения домино в правой части прямоугольника. Самая правая доминошка может стоять вертикально (как на рисунке слева), а может быть, что две лежат друг на друге (как на рисунке справа). Появляется ***рекурсия***.





23.4. Прибл. 0,285.

Решение. Обозначим Q_n вероятность того, что сумма очков при последовательных бросаниях кости в какой-то момент станет равна n. Нужно найти Q_{34}. Рассмотрим p_k — вероятность события «Первый бросок дал k очков». По ***формуле полной вероятности*** получаем:

$$Q_n = p_1Q_{n-1} + p_2Q_{n-2} + \ldots + p_6Q_{n-6}.$$

Осталось заметить, что все p_k равны $\frac{1}{6}$. Получаем:

$$Q_n = \frac{Q_{n-6} + Q_{n-5} + \ldots + Q_{n-1}}{6}$$

Начать рекурсию удобно с условий $Q_0 = 1$, $Q_{-1} = Q_{-2} = \ldots = Q_{-5} = 0$ (вначале сумма достоверно равна нулю, а отрицательных сумм не бывает). Подсчёт с помощью Excel даёт: $Q_{34} \approx 0{,}285$.

Комментарий. Можно (но не очень просто) доказать, что $Q_n \to \frac{2}{7}$. Начиная с не очень больших n, вероятности Q_n колеблются очень близко к этому числу.

23.5. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \approx \ln n + 0{,}577.$

Решение. Эта задача в других формулировках уже встречалась (см. задачи 18.7 и 18.8, а также задачу 22.6). Решим её с помощью рекурсивного представления.

Если X_n — число тех, кого командир видит в шеренге из n солдат, то $X_n = X_{n-1} + 1$, если стоящий последним — самый высокий из всех, и $X_n = X_{n-1}$, если он не самый высокий. Отсюда получается рекуррентное соотношение $\mathrm{E}X_n = \mathrm{E}X_{n-1} + \frac{1}{n}$. Очевидно, что $\mathrm{E}X_1 = 1$, поэтому

$$\mathrm{E}X_n = H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \approx \ln n + 0{,}577.$$

(0,577 — округлённая округленная до тысячных ***константа Эйлера—Маскерони***).

23.6. Прибл. 0,133.

Решение. Обозначим $u_{k,n}$ и $d_{k,n}$ вероятности того, что фигура из k упавших тримино достигнет высоты n, и при этом верхнее тримино будет расположено выступом вверх (вниз). Сумму этих вероятностей, т. е. вероятность того, что высота многоугольника из k тримино равна n, обозначим $p_{k,n}$. Тогда

$$u_{k,n} = \frac{1}{2}p_{k-1,n-2}, \quad d_{k,n} = \frac{1}{4}u_{k-1,n-1} + \frac{1}{4}u_{k-1,n-2} + \frac{1}{2}d_{k-1,n-2}.$$

Полная вероятность равна

$$p_{k,n} = u_{k,n} + d_{k,n} = \frac{1}{2}p_{k-1,n-2} + \frac{1}{2}d_{k-1,n-2} + \frac{1}{4}u_{k-1,n-2} + \frac{1}{4}u_{k-1,n-1} =$$
$$= p_{k-1,n-2} - \frac{1}{4}u_{k-1,n-2} + \frac{1}{4}u_{k-1,n-1},$$

откуда

$$p_{k,n} = p_{k-1,n-2} + \frac{1}{8}p_{k-2,n-3} - \frac{1}{8}p_{k-2,n-4}.$$

Для начала рекурсии положим $p_{0,0} = p_{1,2} = 1$, кроме того $p_{k,n} = 0$ при $n > 2k$. Получаем:

$$p_{2,3} = p_{1,1} + \frac{1}{8}p_{0,0} - \frac{1}{8}p_{0,-1} = 0 + \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8},$$
$$p_{2,4} = p_{1,2} + \frac{1}{8}p_{0,1} - \frac{1}{8}p_{0,0} = 1 + 0 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

И так далее. Для удобства можно ввести $n = -1$, положив соответствующие вероятности равными нулю. С помощью Excel последовательно вычисляем вероятности вплоть до $p_{7,12}$, которая получается около 0,133.

Занятие 24

24.1. $n!$.

24.2. Прибл. e^{-1}, т. е. около 0,368.

Решение. Обозначим событие «Хотя бы один ключ на своём крючке» буквой A. Пусть A_k — событие «k-й ключ на своём крючке». Тогда

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k.$$

Воспользуемся ***формулой сложения вероятностей***:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{10}) = \\ &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_{10}) - (\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_3) + \ldots \\ &\quad \ldots + \mathrm{P}(A_9 \cap A_{10})) + (\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots \\ &\quad - \mathrm{P}(A_8 \cap A_9 \cap A_{10})) - \ldots - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_9 \cap A_{10}). \end{aligned}$$

Вероятность каждого события A_k равна $\frac{1}{10}$. Вероятность пересечения двух любых событий $A_j \cap A_k$ равна $\frac{1}{10 \cdot 9}$. Вероятность пересечения трёх любых событий равна $\frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8}$, и так далее: вероятность пересечения любых m событий ($m = 1, \ldots, n$) равна

$$\frac{1}{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (11-m)} = \frac{(10-m)!}{10!}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= 10 \cdot \frac{1}{10} - C_{10}^2 \cdot \frac{8!}{10!} + C_{10}^3 \frac{7!}{10!} - C_{10}^4 \frac{6!}{10!} + \ldots - C_{10}^{10} \frac{0!}{10!} = \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots - \frac{1}{10!}. \end{aligned}$$

Поэтому противоположное событие «Совпадений нет» имеет вероятность

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{1}{10!} \approx e^{-1} \approx 0{,}368,$$

где $e = 2{,}71828\ldots$ — ***основание натурального логарифма***. Это приближённое равенство получается из ***степенного ряда функции*** $y = e^x$ при $x = -1$.

24.3. 4,5.

Указание. Как мы видели в задаче 24.2, найти вероятность отсутствия совпадений оказалось не очень просто. Зато найти математическое ожидание числа совпадений несложно. В общем виде это сделано в задаче 18.5.

24.4. $\frac{1}{2}C_n^2 = \frac{n(n-1)}{4}$.

Решение. В частном виде эта задача решена (задача 18.7 про 20 зрителей в театре) с помощью индикаторов. Используем другой подход. Рассмотрим перестановки: номер фамилии по порядку — номер фамилии по алфавиту. Задача сводится к вопросу о математическом ожидании числа ***беспорядков***, т. е. комбинаций

$$\begin{pmatrix} \ldots & a & \ldots & b & \ldots \\ \ldots & s(a) & \ldots & s(b) & \ldots \end{pmatrix},$$

где $a < b$, а $s(a) > s(b)$ (или наоборот). Нужно рассмотреть случайную величину X «Число беспорядков». Распределение X симметрично, поскольку каждой перестановке с k беспорядками можно поставить в соответствие другую перестановку, в которой $C_n^2 - k$ беспорядков: достаточно заменить во второй строке каждое число $s(a)$ числом $n+1-s(a)$. Например, в перестановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ровно 6 беспорядков:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заменим во второй строке каждое число x числом $6-x$. Получается перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Каждый беспорядок превратился в порядок и наоборот. Таким образом, из $C_5^2 = 10$ пар было 6 беспорядков, а в новой перестановке их 4: подсчитайте сами.

Из-за симметрии распределения его математическое ожидание находится ровно посередине между наименьшим возможным значением 0 (для тождественной перестановки) и наибольшим значением C_n^2, т. е.

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{2}(0 + C_n^2) = \frac{n(n-1)}{4}.$$

24.5. *Указание.* а) Рассмотрите сумму всех чисел второй строки перестановки.

б) Постройте взаимно однозначное соответствие: разбейте все перестановки на пары так, чтобы в в каждой паре одна перестановка имела больше избытков, а вторая — больше недостатков.

24.6. б) $p_{n,0}=1-\frac{p_{n-1,0}}{1!}-\frac{p_{n-2,0}}{2!}-\ldots-\frac{p_{1,0}}{n-1!}-\frac{p_{0,0}}{n!}$, где $p_{0,0}=1$. Более простое рекуррентное представление получается из результата задачи 24.1: $p_{n,0}=p_{n-1,0}+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

в) $p_{n,k}=\frac{p_{n-k,0}}{k!}$ или приближённо $\frac{1}{k!\cdot e}$.

Решение. а) Выделим в перестановке k неподвижных точек (C_n^k способами) и временно удалим их. Останется перестановка $n-k$ элементов, среди которых неподвижных быть не должно. Таких перестановок Q_{n-k}. Следовательно, всего существует $C_n^k Q_{n-k}=C_n^{n-k}Q_{n-k}$ перестановок порядка n с ровно k неподвижными точками для $k=$ $=1,2,\ldots,n-1$. Для $k=n$ (т. е. для тождественной перестановки) можно положить $Q_0=1$. Удаляя все такие перестановки из множества всех перестановок, получим искомую формулу в п. а).

Чтобы получить рекурсию в п. б), разделим обе части формулы из п. а) на $n!$.

Пункт (в) решается непосредственным подсчётом: Всего существует $C_n^k Q_{n-k}$ перестановок порядка n с k неподвижными точками. Следовательно,

$$p_{n,k}=\frac{C_n^k Q_{n-k}}{n!}=\frac{n!\cdot Q_{n-k}}{k!(n-k)!\cdot n!}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{Q_{n-k}}{(n-k)!}=\frac{p_{n-k,0}}{k!}.$$

В задаче 24.2 найдено, что $p_{n-k,0}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{1}{(n-k)!}$. Получается явная формула

$$p_{n,k}=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{1}{(n-k)!}\right).$$

Даже если разность $n-k$ не очень велика, можно смело пользоваться приближением $p_{n,k}=\frac{1}{k!\cdot e}$, где e — ***основание натурального логарифма***. Не будет преувеличением сказать, что вероятность наличия в перестановке ровно k неподвижных точек практически не зависит от порядка (длины) перестановки.

24.7. $\frac{5}{24}$.

Решение. Будем рассматривать перестановки порядка 4.

Перестановок, где все братья остались при своём, т. е. нет ни избытков, ни недостатков, — только одна, тождественная.

Перестановок, где три точки неподвижны, нет ($C_4^1 Q_1=0$).

Перестановок, где ровно две неподвижные точки, $C_4^2\cdot Q_2=6$, и в каждой из них избытков и недостатков поровну — по одному.

Перестановок, где только одна точка неподвижна, ровно $C_4^3 Q_3 = 4 \cdot 2 = 8$, причём в них избытков и недостатков поровну быть не может.

Из оставшихся $Q_4 = 9$ перестановок без неподвижных точек ровно две имеют три избытка или три недостатка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, из 24 вариантов всего 10, где довольных и недовольных не поровну. В силу симметрии существует ровно 5 вариантов перераспределения наследства, где довольных больше, чем недовольных.

Занятие 25

25.1. $\frac{5}{16}$.

Указание. Эксперимент сводится к серии из шести испытаний Бернулли с вероятностью успеха 0,5 в каждом испытании. Требуется найти вероятность того, что наступит ровно три успеха и три неудачи.

25.2. 0,0028.

Решение. Каждое такое число однозначно определяется пятью своими цифрами. Вопрос сводится к числу способов выбрать 5 цифр из 10. Искомая вероятность равна $\frac{C_{10}^5}{90\,000}$. Осталось сократить эту дробь.

25.3. 0,694.

Решение. Обозначим A_1 и A_6 события «Единица выпала хоть раз» и «Шестёрка выпала хоть раз» соответственно.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_1 \cap A_6) &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_6) - \mathrm{P}(A_1 \cup A_6) = \\ &= 1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^{10} + 1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^{10} - \left(1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10}\right) = \\ &= 1 - 2 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{10} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}694. \end{aligned}$$

25.4. а) 50; б) 33.

Указание. Примените метод индикаторов.

25.5. $\frac{17}{30}$.

Указание. Рассмотрите фигуру $x + y \geqslant 1800$ внутри прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant 1000$, $0 \leqslant y \leqslant 3000$.

25.6. а) 0,65625; б) прибл. $\frac{2}{3}$.

Решение. а) Обозначим p_n вероятность события «В какой-то момент сумма равнялась n». Покажите, что $p_n = \frac{p_{n-1}+p_{n-2}}{2}$ для $n \geqslant 2$. Очевидно, $p_0 = 1$, $p_1 = 0{,}5$. Тогда

$$p_2 = 0{,}75, \quad p_3 = 0{,}625, \quad p_4 = 0{,}6875, \quad p_5 = 0{,}65625.$$

б) Можно продолжить рекурсию и получить точное значение. Это требует вычислений на компьютере или очень много времени. Гораздо эффективнее простое рассуждение: представим себе числовую прямую, по которой двигается фишка. Каждый раз фишка двигается на столько единиц, сколько выпало на монете. В среднем при двух бросках фишка сдвигается вправо на 3. Рассмотрим какой-нибудь большой отрезок натуральных чисел. В среднем фишка остановится на двух из трёх любых последовательных натуральных чисел этого отрезка. Поэтому вероятность p_{2016} приближённо равна $\frac{2}{3}$.

Конкурс «Задача дня»

1. $\frac{1}{14}$. **2.** 0,625. **3.** $\frac{35}{12}$. **4.** 8. **5.** 1. **6.** 25,48. **7.** $\frac{6}{11}$. **8.** 153. **9.** 0,875. **10.** 1. **11.** 4,75. **12.** 5. **13.** 0,1024. **14.** Прибл. 6,72. **15.** Прибл. 0,481. **16.** 10. **17.** 0,0161. **18.** 0. **19.** Прибл. 2,009. **20.** 0,0032. **21.** 0,4. **22.** Прибл. 5,571. **23.** 4. **24.** 0,8125. **25.** Прибл. 0,6093. **26.** 0,2. **27.** Прибл. 0,202. **28.** 0,1. **29.** $\frac{5}{13}$. **30.** 189. **31.** 0,75. **32.** 10,5. **33.** 0,55. **34.** Прибл. 0,885. **35.** 0,1. **36.** 8,8. **37.** $\frac{2}{9}$. **38.** 1937,5. **39.** $\frac{9}{17}$. **40.** 40 секунд.

Справочник

В справочнике в алфавитном порядке даны разъяснения некоторых терминов, встречающихся в книжке. Не всех. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями, поэтому такие термины как «вероятность», «случайная величина», «случайное событие», «среднее арифметическое» и т. п. здесь не разъясняются. Не разъясняются также термины, встречающиеся в самом справочнике, если они отсутствуют в задачах. Например, понятия непрерывной и дискретной случайной величины, плотности распределения не разъясняются.

В случае необходимости приводятся примеры, а в отдельных случаях — решения задач с помощью описанных методов.

Беспорядок в перестановке. Беспорядком в перестановке называют комбинацию двух элементов $\begin{pmatrix} a & b \\ s(a) & s(b) \end{pmatrix}$ в этой перестановке, где $a < b$, а $s(a) > s(b)$ или наоборот. Например, в перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ два беспорядка: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Бинарная случайная величина — случайная величина, которая принимает только два значения 0 и 1.

Если вероятность единицы равна p, а вероятность нуля равна $q = 1 - p$, то распределение такой величины можно записать в виде $I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$. Такое распределение называют распределением Бернулли.

Математическое ожидание и дисперсия: $\mathrm{E}I = p$, $\mathrm{D}I = qp$.

Биномиальное распределение вероятностей. Пусть проводится n одинаковых и независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом отдельном испытании. Случайная величина S — «Число наступивших успехов» имеет биномиальное распределение:

$$\mathrm{P}(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$ — вероятность неудачи.

Число испытаний n и вероятность p, от которых зависит распределение, называются параметрами биномиального распределения.

Математическое ожидание: $ES = np$. Дисперсия: $DS = npq$.

Гармоническое число H_n — сумма всех чисел, обратных натуральным от 1 до n:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Последовательность гармонических чисел расходится, т. е. гармонические числа возрастают до бесконечности с ростом n. Правда, возрастание медленное: H_n растёт приблизительно как $\ln n$. Более точно можно утверждать:

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma = 0{,}5772\ldots$$

Число γ называется константой Эйлера или ***константой Эйлера—Маскерони***. Это равенство даёт практический способ приблизительного вычисления H_n: уже при не очень больших n число H_n можно заменять числом $\ln n + 0{,}577$.

Гармоническое число второго порядка H_n^2 — сумма всех чисел, обратных натуральным квадратам от 1 до n^2:

$$H_n^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Последовательность гармонических чисел второго порядка сходится к $\frac{\pi^2}{6}$.

Геометрическая вероятность. Иногда ***случайный выбор*** рассматривается для непрерывных совокупностей. Например, можно случайно выбирать точку x из отрезка $[a; b]$ прямой или кривой линии. Случайность при этом значит, что вероятность выбранной точки попасть в меньший отрезок $[c; d]$ внутри $[a; b]$ пропорциональна длине $[c; d]$. При этом сам отрезок $[c; d]$ рассматривается как событие «Точка попала в $[c; d]$». Вместо $\mathrm{P}(c \leqslant x \leqslant d)$ можно кратко записать $\mathrm{P}([c; d])$:

$$\mathrm{P}([c; d]) = \frac{d-c}{b-a}.$$

Аналогично, при случайном выборе точки из некоторой фигуры F иногда разумно считать, что вероятность того, что выбранная точка попадёт в фигуру A внутри F, пропорциональна площади фигуры A. В этом случае обычно отождествляют фигуру A и событие «Выбранная точка попала в A»:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{S_A}{S_F}.$$

Так же можно определить вероятность отношением объёмов, если точка выбирается из трёхмерной фигуры.

Такой подход к определению вероятности событий называют геометрическим. Проще говорят о геометрической вероятности (не следует путать с ***геометрическим распределением***).

Геометрическое распределение. Пусть одинаковые и независимые ***испытания*** с вероятностью успеха p в каждом проводятся до наступления первого успеха. Тогда случайная величина X — «Число проведённых испытаний» имеет геометрическое распределение

$$\mathrm{P}(X=k)=q^{k-1}p,$$

где $q=1-p$ — вероятность неудачи.

Математическое ожидание: $\mathrm{E}X=\dfrac{1}{p}$.

Дисперсия: $DX=\dfrac{q}{p^2}$.

Гипергеометрическое распределение. Предположим, что имеется множество из N объектов, из которых K — особые (например, чёрные). Выбираем случайным образом n объектов (без возвращения). Успехом будем считать извлечение особого объекта. Случайная величина S — «Число успехов» имеет гипергеометрическое распределение:

$$\mathrm{P}(S=k)=\frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Математическое ожидание: $\mathrm{E}S=n\dfrac{K}{N}$.

Дисперсия: $\mathrm{D}S=\dfrac{Kn(N-n)(N-K)}{N^2(N-1)}$.

Графы с циклами. Иногда в эксперименте одно и то же событие может наступать несколько раз и даже неопределённо много раз. Например, при стрельбе можно много раз промахнуться, прежде чем попасть в цель. В таких случаях вместо ***дерева эксперимента*** часто удобно нарисовать граф с циклом. Принцип тот же. Направление переходов можно изображать стрелками.

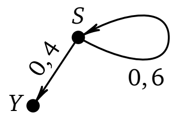
Пример. Андрей пытается сдать тест по английскому языку и оценивает свои шансы каждый раз как 0,4.

а) Найдите вероятность того, что он сдаст свой тест, если число попыток не ограничено.

б) Какова вероятность, что Андрей сдаст не позже, чем с третьей попытки?

б) Сколько попыток разрешить Андрею, чтобы он сдал тест с вероятностью не менее чем 0,8?

Решение. Граф в этом случае выглядит так: от начальной точки S ведут две стрелки — первая к событию Y (сдал) и вторая — снова к началу S, образуя петлю.



а) Событию Y благоприятствуют все цепочки, начинающиеся в S и заканчивающиеся в Y: SY, SSY, $SSSY$, $SSSSY$ и т. д.

Вероятность события Y находится как сумма вероятностей этих цепочек, которые образуют геометрическую прогрессию:

$$\mathrm{P}(Y) = \mathrm{P}(SY) + \mathrm{P}(SSY) + \mathrm{P}(SSSY) + \ldots =$$
$$= 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 + \ldots = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}6} = 1.$$

б) Событию A «Сдаст не позже, чем с третьей попытки» благоприятствуют такие же цепочки, но в них не более трёх переходов: SY, SSY, $SSSY$. Вероятность — сумма конечной геометрической прогрессии:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(SY) + \mathrm{P}(SSY) + \mathrm{P}(SSSY) = 0{,}4 \cdot \frac{1 - 0{,}6^3}{1 - 0{,}6} = 0{,}784.$$

в) Чтобы ответить на этот вопрос, нужно подобрать такое число попыток, чтобы вероятность сдать превзошла 0,8. Трёх попыток, как мы видели, недостаточно. Добавим четвёртую. Вероятность сдать не позже, чем с четвёртой попытки равна

$$0{,}784 + \mathrm{P}(SSSSY) = 0{,}784 + 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}784 + 0{,}0864 > 0{,}8.$$

Ответ: а) 1; б) 0,784; в) 4.

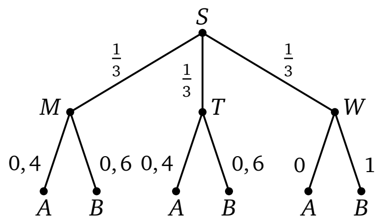
Дерево вероятностей или дерево эксперимента. Очень многие эксперименты, где возникает несколько взаимосвязанных событий, удобно представить в виде ветвящегося процесса. Изображать это лучше всего с помощью графа — дерева, растущего из вершины S (начало). От этой вершины направляются рёбра к возможным событиям. Дальше — к следующим и т. д. Около каждого ребра можно подписать условную вероятность соответствующего события.

Поясним на примере, как строится дерево эксперимента и как с помощью деревьев решаются задачи.

Пример. Учёный приехал в Гамбург на конференцию. Доклады проводятся в двух корпусах университета A и B в течение трёх дней с понедельника по среду. Доклад нашего учёного с равными вероятностями может быть назначен на любой из трёх дней. 40 % всех докладов в понедельник и 40 % всех докладов во вторник проводятся в корпусе A. В среду все доклады проходят в корпусе B, поскольку в A готовится церемония закрытия конференции. Найдите:

а) вероятность того, что доклад нашего учёного назначен в корпусе В;

б) вероятность того, что доклад нашего учёного назначен на вторник, если известно, что он пройдёт в корпусе В.

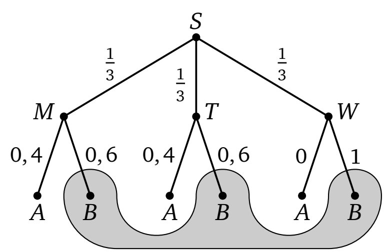


Построение дерева видно из рисунка. Мы не рисуем стрелки, считая, что все рёбра направлены вниз. Элементарными событиями в этом эксперименте являются цепочки рёбер, ведущие от начала S к конечным точкам A и B. Например, элементарное событие SMA состоит в том, что доклад назначен на понедельник (Monday) и проходит в корпусе А.

Вероятности, надписанные около рёбер — условные. Например, вероятность 0,4 у ребра — это вероятность того, что доклад будет в корпусе А при условии, что он во вторник (Tuesday). Поэтому сумма вероятностей в каждой точке ветвления равна 1.

Решение. а) Событию B благоприятствуют три элементарных события — это цепочки SMB, STM и SWB. Вероятность каждой легко найти, пользуясь правилом умножения:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(SMB) + \mathrm{P}(STB) + \mathrm{P}(SWB) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{11}{15}.$$



б) Теперь нам известно, что доклад будет в корпусе В. Покажем это событие на рисунке закрашенной областью.

Цепочки, не приводящие к В, нам теперь не нужны. Вероятность того, что доклад назначен на вторник при условии, что он в корпусе В — условная. Она равна

$$\mathrm{P}(T|B) = \frac{\mathrm{P}(T\cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Вероятность $\mathrm{P}(B)$ мы уже нашли. А вероятность $\mathrm{P}(T\cap B)$ в числителе — это вероятность цепочки STB:

$$\mathrm{P}(T\cap B) = \mathrm{P}(STB) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}6 = \frac{1}{5}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}(T|B) = \frac{\mathrm{P}(STB)}{\mathrm{P}(SMB)+\mathrm{P}(STB)+\mathrm{P}(SWB)} = \frac{1\cdot 15}{5\cdot 11} = \frac{3}{11}.$$

Более сложные эксперименты требуют более сложных деревьев, но суть остаётся той же самой. Надеемся, приведённого примера достаточно для понимания метода.

Дисперсия случайной величины — математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от её математического ожидания (средний квадрат отклонения):

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2.$$

Чаще всего для вычислений применяется формула

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X,$$

которая получается из определения непосредственными преобразованиями.

Для дисперсии верны свойства:

1. $\mathrm{D}a = 0$ (a — произвольное число).
2. $\mathrm{D}(aX + b) = a^2\mathrm{D}X$ (a и b — произвольные числа).
3. Для ***независимых случайных величин*** $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

Не все случайные величины имеют дисперсию (например, не имеют дисперсии те величины, которые не имеют математического ожидания).

Часто в литературе употребляется обозначение σ^2 — обычно для нормального распределения, но иногда и более широко. Квадрат подчёркивает квадратичную природу дисперсии.

Закон больших чисел — теоремы, утверждающие разные виды ***статистической устойчивости***. Наиболее простая и исторически первая из них — теорема Бернулли: с ростом числа одинаковых ***испытаний*** вероятность малого различия между частотой успеха и его вероятностью стремится к единице. Иными словами, частота успеха статистически устойчива и с ростом числа испытаний приближается к вероятности этого события.

Индикатор события A — ***бинарная случайная величина***, которая принимает значение 1, если событие A произошло, и значение 0, если событие A не произошло. Часто используется обозначение I_A. Если вероятность события A равна $\mathrm{P}(A)$, то распределение I_A выглядит так:

$$I_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \mathrm{P}(A) & \mathrm{P}(A) \end{pmatrix},$$

а поэтому математическое ожидание равно вероятности: $\mathrm{E}I_A = \mathrm{P}(A)$. Это равенство связывает математическое ожидание случайной величины и вероятность события. Индикаторы обладают полезными свойствами.

1. Индикатор ***противоположного*** события: $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$.

2. Индикатор ***пересечения*** двух событий равен произведению их индикаторов: $I_{A\cap B} = I_A I_B$. То же верно для любого числа событий.

3. Индикатор ***объединения*** двух событий: $I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_A I_B$. Это равенство не случайно напоминает ***формулу сложения вероятностей***. Они тесно связаны.

Индикаторы широко применяются при решении задач (см. ***метод индикаторов***).

Испытание (испытание Бернулли) — случайный опыт, в котором может наступить один из двух элементарных исходов. Эти исходы условно называют успехом и неудачей. Пример испытания Бернулли — бросание одной монеты.

Очень многие эксперименты можно свести к последовательности независимых и одинаковых испытаний.

Комбинаторное правило умножения гласит, что если есть n предметов первого вида и m предметов второго вида, то из них можно составить ровно nm упорядоченных пар: на первом месте предмет первого вида, на втором — второго. Например, с помощью четырёх цифр 1, 2, 3, 4 и трёх букв А, Б и В можно пронумеровать $4 \cdot 3 = 12$ классов начальной школы: от 1А до 4В.

Константа Эйлера—Маскерони $\boldsymbol{\gamma}$ — это предел, к которому с ростом n стремится разность между ***гармоническим числом*** H_n и логарифмом $\ln n$. Неизвестно, рационально это число или нет, но если рационально, то период его десятичной записи очень велик. Десятичная запись γ начинается так:

$$\gamma = 0{,}5772156649015328606065120900824024310421593359\ldots$$

Малая теорема Ферма. Если n — произвольное натуральное число, а p — простое, то $n^p - n$ делится на p. Теорема в сюжете о покраске каруселей присутствует в задаче 10.7.

Математическое ожидание случайной величины. Если дискретная случайная величина X имеет распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

то математическое ожидание $\mathrm{E}X$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

Аналогичная сумма, но бесконечная, получается, если количество значений случайной величины бесконечно:

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n + \ldots$$

Бывают случайные величины, у которых математическое ожидание не существует (придумайте пример).

Для случайных величин, имеющих математическое ожидание, выполняются следующие свойства.

1. $\mathrm{E}a = a$ (a — произвольное число).
2. $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}X + b$ (a и b — произвольные числа).
3. $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$.
4. Для ***независимых случайных величин*** $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$.

Если случайная величина непрерывна и распределена на интервале $(a; b)$ с плотностью распределения $y = p(x)$, то

$$\mathrm{E}X = \int\limits_a^b xp(x)dx.$$

Этот интеграл может иметь бесконечные пределы (несобственный интеграл), если случайная величина не ограничена. Если интеграл не существует, то математического ожидания у такой случайной величины нет.

Метод индикаторов — общее название для способа решения разных задач с применением ***индикаторов*** событий. Покажем, как работает метод для вычисления вероятностей, математического ожидания и дисперсии.

1. Докажем ***формулу сложения вероятностей*** для трёх событий A, B и C. Пусть I_A, I_B и I_C — индикаторы этих событий. Тогда событие $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ имеет индикатор

$$\begin{aligned} I_{\overline{A\cup B\cup C}} &= I_{\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}} = (1 - I_A)(1 - I_B)(1 - I_C) = \\ &= 1 - I_A - I_B - I_C + I_AI_B + I_AI_C + I_BI_C - I_AI_BI_C = \\ &= 1 - I_A - I_B - I_C + I_{A\cap B} + I_{A\cap C} + I_{B\cap C} - I_{A\cap B\cap C}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $I_{\overline{A\cup B\cup C}} = 1 - I_{A\cup B\cup C}$, получаем:

$$I_{A\cup B\cup C} = I_A + I_B + I_C - I_{A\cap B} - I_{A\cap C} - I_{B\cap C} + I_{A\cap B\cap C}.$$

Перейдём в этом равенстве к математическим ожиданиям:

$$EI_{A\cup B\cup C} = EI_A + EI_B + EI_C - EI_{A\cap B} - EI_{A\cap C} - EI_{B\cap C} + EI_{A\cap B\cap C}.$$

Осталось вспомнить, что ожидание индикатора события равно вероятности этого события:

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A\cap B) - \mathrm{P}(A\cap C) - \\ - \mathrm{P}(B\cap C) + \mathrm{P}(A\cap B\cap C).$$

2. Если случайную величину можно представить в виде суммы индикаторов нескольких событий, то её ***математическое ожидание*** можно найти с помощью математических ожиданий индикаторов (см. занятия 16—22, где этот метод широко применяется).

Пусть в опыте возможны события A_k (конечное или бесконечное число) с вероятностями $p_k = \mathrm{P}(A_k)$. Тогда для индикаторов I_k этих событий $\mathrm{E}I_k = p_k$. Пусть некоторая случайная величина X равна сумме этих индикаторов: $X = I_1 + I_2 + \ldots + I_k$ (сумма может быть бесконечной). Тогда

$$\mathrm{E}X = p_1 + p_2 + \ldots + p_k. \qquad (1)$$

3. ***Дисперсию*** величины X тоже можно найти похожим способом. Нужно сначала найти $\mathrm{E}X^2$:

$$X^2 = (I_1 + I_2 + \ldots + I_k)^2 = I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_k^2 + 2(I_1I_2 + I_1I_3 + \ldots + I_{k-1}I_k).$$

Скобка справа содержит все возможные попарные произведения индикаторов. Заметим, что $I_k^2 = I_k$ для любого k. Поэтому

$$X^2 = I_1 + I_2 + \ldots + I_k + 2(I_1I_2 + I_1I_3 + \ldots + I_{k-1}I_k) = \\ = X + 2(I_1I_2 + I_1I_3 + \ldots + I_{k-1}I_k).$$

Остаётся перейти к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X^2 = \mathrm{E}X + 2(E(I_1I_2) + E(I_1I_3)\ldots + E(I_{k-1}I_k)). \qquad (2)$$

Всё складывается совсем хорошо, если события A_k попарно ***независимы***. Тогда любые два индикатора тоже независимы и поэтому $\mathrm{E}(I_jI_k) = \mathrm{E}I_j \cdot \mathrm{E}I_k = p_jp_k$ (см., например, задачу 20.1 или задачу 22.6). Если же независимости нет, то, чтобы воспользоваться формулой (2), сначала придётся найти все ожидания $\mathrm{E}(I_jI_k) = \mathrm{P}(A_j \cap A_k)$.

Формулы (1) и (2) дают метод индикаторов для вычисления математического ожидания и дисперсии. Этими формулами метод не ограничивается. Его можно использовать в различных модификациях (см., например, решение задачи 20.1 б) на с. 96 или решение задачи 22.4 на с. 101).

Метод моментов — метод статистической оценки параметров распределения или каких-либо других параметров, в котором наблюдаемое среднее значение случайной величины приравнивается к её математическому ожиданию, дисперсия наблюдений — к дисперсии случайной величины и т. п. Простейшее применение метода моментов — неизвестную вероятность события оценивать его частотой.

Монета **(*математическая, симметричная*)** в теории вероятностей — это генератор двух равновероятных несовместных событий. В России, следуя давней традиции, эти события называют орёл и решка. Вероятность каждого 0,5. Металлическая монета служит физической моделью математической монеты. Металлическая монета может закатиться под шкаф или даже встать на ребро. Математическая монета ничего такого не может: либо орёл, либо решка.

Независимые случайные величины. Проводится эксперимент, в котором наблюдаются две случайные величины X и Y. Если никакое значение одной из величин не влияет на вероятности значений другой, то такие величины называют независимыми.

Независимость случайных величин можно определить или хотя бы пояснить с помощью независимых событий. Например: две случайные величины независимы, если события, связанные со значением одной из них, и события, связанные со значениями другой, независимы.

Однако в большинстве случаев независимость (или зависимость) случайных величин определяется тем, как устроен эксперимент. Например, при бросании двух игральных костей два выпавших числа независимы (потому что кости бросаются независимо друг от друга). А вот сумма выпавших очков и число очков на первой кости уже не являются независимыми, ведь если на первой кости выпало 5 очков, то сумма уже не может быть меньше 6 или больше 11.

Независимые события. События A и B независимы, если наступление одного из них не влияет на вероятность другого. Иными словами, условная вероятность одного события при условии, что случилось второе, равна вероятности первого без этого условия:

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B).$$

Если вероятности $\mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(B)$ ненулевые, то эти два равенства выполняются одновременно (докажите), поэтому можно говорить о взаимной независимости двух событий.

Для независимых событий

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Иногда это равенство принимают за определение. Чтобы убедиться в том, что два события независимы, достаточно проверить хотя бы одно из трёх этих равенств.

Для трёх или более событий независимость определяется похожим образом: наступление любого количества событий в любых комбинациях не влияет на вероятности остальных событий.

Например, если любые два из трёх событий A, B и C независимы и ещё выполняется равенство

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C),$$

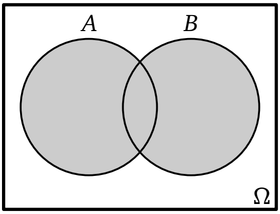
то независимы в совокупности все три события A, B и C.

Неподвижная точка в перестановке — элемент вида $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, т. е. элемент, для которого $s(a) = a$.

Несовместные события — события, пересечение которых пусто. Несовместные события не имеют общих элементарных исходов. Если события несовместны, то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей (формула сложения для несовместных событий):

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Объединением событий A и B называется событие, которое происходит, когда наступило хотя бы одно из событий A и B. Удобно показать объединение двух событий на диаграмме Эйлера (см. рис.). Аналогично определяется объединение трёх или более событий.



Основание натурального логарифма $e = 2{,}718281828459\ldots$ — иррациональное число. Его называют ещё числом Эйлера. Пишут кратко $\ln x$ вместо $\log_e x$. Среди прочих логарифмов натуральный выделяется тем, что график функции $y = \ln x$ пересекает ось абсцисс под углом 45° в точке $(1; 0)$. Стало быть, и график показательной функции $y = e^x$ пересекает под углом 45° ось ординат в точке $(0; 1)$. Известно множество последовательностей, сходящихся к e. Чаще всего используются следующие факты:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$ или, в более простой записи,

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e;$$

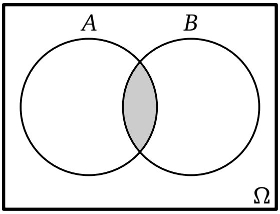
это следует из разложения функции $y = e^x$ в ***степенной ряд***;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Параметры распределения — величины, от которых зависит распределение вероятностей. Часто по ошибке к параметрам причисляют и значения самой случайной величины. Делать этого не нужно.

Например, ***биномиальное распределение*** зависит от числа испытаний n и вероятности успеха p в каждом отдельном испытании. ***Геометрическое распределение*** зависит от одного параметра p. ***Гипергеометрическое распределение*** имеет три параметра: общее число объектов в совокупности N, число объектов первого типа K и количество извлечённых объектов n.

Пересечением событий A и B называется событие, которое происходит, когда наступают оба события A и B. Диаграмма Эйлера для пересечения изображена на рисунке. Аналогично определяется пересечение трёх или более событий.



Перестановкой порядка n называется таблица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ s(a_1) & s(a_2) & \ldots & s(a_n) \end{pmatrix},$$

где $s(a_k)$ — это те же элементы a_k первой строки, взятые в каком-то порядке. Чаще всего говорят о перестановках чисел. Например $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ — одна из шести перестановок чисел 1, 2 и 3.

Случайная перестановка — это перестановка, где элементы второй строки берутся в случайном порядке.

Последовательность Фибоначчи — числовая последовательность, которая начинается с двух единиц. Каждое последующее число получено сложением двух предыдущих:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots$$

Названа по имени итальянского математика Фибоначчи (Леонарда Пизанского), который, по-видимому, первым исследовал её свойства, главное из которых — отношение последующего члена к предыдущему постепенно приближается к «золотому сечению» $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Правило умножения вероятностей. Если имеются два события A и B, то вероятность их пересечения можно найти умножением:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A).$$

Это напрямую следует из формулы условной вероятности. Смысл простой — сначала наступает A, затем B при условии A. На самом деле слово «сначала» — лишь условность; чаще всего мы сами мысленно разбиваем эксперимент во времени, поскольку нам так удобно мыслить.

Если событий больше, скажем, три, то смысл прежний:

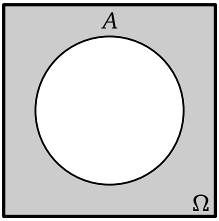
$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(C|A \cap B) \quad \text{и так далее.}$$

Правило умножения легко видеть и удобно применять, умножая вероятности событий вдоль цепочек в ***дереве вероятностей***.

***Правильная кость* (*честная, симметричная, игральная*).** В теории вероятностей правильная кость — генератор шести равновероятных несовместных событий. Обычно[1], когда говорят о кости и о бросании кости, представляют себе игральный кубик, на шести гранях которого нанесены точками или цифрами числа от 1 до 6.

Традиционно игральные кубики делают так, чтобы было невозможно нарушить равновероятность выпавших граней умелым броском. Поэтому сумма очков на противоположных гранях у правильного игрального кубика равна 7. Напротив единицы — шестёрка, напротив двойки — пятёрка, напротив тройки — четвёрка.

Противоположное событие. Пусть в эксперименте существует событие A. Если оно не случилось, то случилось противоположное событие $\overline{A}$. Строго говоря, событию $\overline{A}$ благоприятствуют те и только те элементарные исходы эксперимента, которые не благоприятствуют событию A. Диаграмма для противоположного события изображена на рисунке.



Распределение вероятностей случайной величины — заданное каким-либо образом соответствие между значениями случайной величины и вероятностями этих значений. Иногда распределение можно задать таблицей, иногда — формулой. Для описания распределений непрерывных случайных величин обычно используют специальные функции распределений и функции плотности вероятности.

[1] Обычно, но не всегда. Например, в задаче 7.4 правильная кость имеет четыре грани — она тетраэдральная, а не кубическая.

Если случайная величина X дискретна, то часто распределение вероятностей можно записать двумя строками. В верхней строке — значения, в нижней — их вероятности. Например, так:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

В этом примере случайная величина X принимает всего три значения 2, 3 и 4 с указанными вероятностями.

***Рекурсия* (*рекуррентная или рекурсивная последовательность*)** — процесс или последовательность, где последующие состояния или члены выражаются через предыдущие. Иногда можно дать рекуррентное решение задачи, когда невозможно или очень трудно найти решение с помощью явной формулы.

Пример: арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и с разностью d может быть задана рекуррентно: $a_n = a_{n-1} + d$.

Ещё один пример даёт ***последовательность Фибоначчи***: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $a_1 = a_2 = 1$.

Третий пример — рекуррентное соотношение для чисел сочетаний: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, при $C_n^0 = C_n^n = 1$ для любого n; это простейший случай ***свёртки Вандермонда***.

Свёртка Вандермонда — комбинаторное тождество

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k.$$

См. задачу 11.12.

Случайный выбор. Под случайным выбором подразумевается выбор без предпочтений. Если есть какой-то набор (совокупность) предметов, то при случайном выборе каждый предмет может быть выбран с равной вероятностью. Для бесконечных совокупностей труднее сказать, что такое случайный выбор, но иногда удаётся (см. определение ***геометрической вероятности***, например).

Стандартное отклонение случайной величины — арифметический квадратный корень из ***дисперсии случайной величины*** $\sqrt{\mathrm{D}X}$. Иногда обозначают SD (от Standard Deviation). Если дисперсия обозначена σ^2, то стандартное отклонение разумно обозначить σ.

Статистика — не только название науки. Статистика — общее название данных или результатов эксперимента. Например, наблюдаемые величины, их среднее арифметическое, медиана, наименьшее значение — разные статистики.

Степенной ряд функции $y = e^x$. Для любого x верно равенство

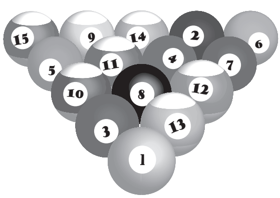
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Треугольник Паскаля. Числовая таблица, дающая ***числа сочетаний***.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

На рисунке изображён треугольник Паскаля до строки 7. Например, $C_6^4 = 15$ — это число на пересечении шестой строки и четвёртого столбца (строки и столбцы в треугольнике нумеруются с нуля). Каждое число в треугольнике (кроме крайних единиц в строке) равно сумме двух чисел предыдущей строки, стоящих в том же столбце, что и предыдущем, поскольку $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Треугольное число — число из последовательности 1, 3, 6, 10, 15, 21, … Разница между соседними числами каждый раз увеличивается на 1. Эти числа образуют второй столбец ***треугольника Паскаля***: n-е треугольное число равно $\frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$. Название «треугольное число» пошло от того, что именно столько шариков можно «выстроить треугольником». Например, 15 шаров образуют треугольник перед началом игры в биллиард (см. рис.).



Условная вероятность события A при условии, что событие B наступило, равна

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Формула утверждает, что вероятность события A рассматривается по отношению к вероятности события B, которое теперь (поскольку случилось) представляет собой новый эксперимент. В частности, $\mathrm{P}(B|B) = 1$.

Пример 1. При двукратном бросании монеты вероятность двух орлов ($O_1 \cap O_2$), как мы знаем, равна 0,25. Но если первый орёл уже выпал (O_1), то вероятность двух орлов изменилась: она теперь равна вероятности выпадения одного орла (O_2), т. е. 0,5:

$$P(O_2|O_1) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_1)} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5.$$

Формула Байеса связывает условные вероятности двух событий: вероятность A при условии B и вероятность B при условии A.

$$\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A).$$

Справедливость этой формулы следует из того, что и правая, и левая часть дают $\mathrm{P}(A \cap B)$ (см. ***правило умножения***). Часто эту формулу записывают иначе:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Формула Бернулли (формула биномиальной вероятности) — формула, по которой вычисляется вероятность ровно k успехов в n одинаковых и независимых ***испытаниях Бернулли***:

$$\mathrm{P} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность успеха в каждом испытании, а $q = 1 - p$ — вероятность неудачи.

Формула сложения вероятностей (формула включений и исключений, формула Пуанкаре). Для двух событий формула имеет вид (см. задачу 3.9)

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Для трёх событий:

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \\ - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C).$$

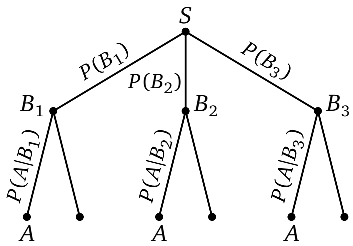
И так далее — можно написать формулу для любого числа событий. Из суммы вероятностей событий вычитается сумма вероятностей всевозможных попарных пересечений, затем прибавляется сумма вероятностей пересечений по три, затем вычитается сумма пересечений по четыре и т. д. Последнее слагаемое — вероятность пересечения всех событий, а знак зависит от того, сколько всего событий.

Для ***пересечения событий*** формула устроена так же: нужно все знаки $\cup$ и $\cap$ поменять местами. Например, для трёх событий получаем:

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A \cup C) - \\ - \mathrm{P}(B \cup C) + \mathrm{P}(A \cup B \cup C).$$

Доказать формулы можно разными способами. Удобно использовать ***метод индикаторов*** (см. с. 118).

Формула полной вероятности легче всего поясняется с помощью графа. Пусть в эксперименте наблюдается несколько несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n, и событие A может рассматриваться отдельно при наступлении каждого из этих событий.



Тогда вероятность события A равна сумме вероятностей цепочек SB_1A, SB_2A, ..., SB_nA в дереве эксперимента (на рисунке $n=3$). Вероятность цепочки SB_kA равна $\mathrm{P}(B_k)\cdot\mathrm{P}(A|B_k)$. Обычно записывают в другом порядке: $P(A|B_k)\cdot P(B_k)$. Тогда

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B_1)\cdot\mathrm{P}(B_1)+\mathrm{P}(A|B_2)\cdot\mathrm{P}(B_2)+\ldots+\mathrm{P}(A|B_n)\cdot\mathrm{P}(B_n).$$

Это и есть формула полной вероятности.

Формула суммы геометрической прогрессии. Для конечной геометрической прогрессии из n членов с первым членом b и знаменателем q

$$b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1}=\frac{b(1-q^n)}{1-q}.$$

Для бесконечной прогрессии с первым членом b и знаменателем q $(-1<q<1)$:

$$b+bq+bq^2+\ldots=\frac{b}{1-q}.$$

Число сочетаний C_n^k — количество способов выбрать k предметов из множества, в котором n предметов. Например, нужно выбрать две буквы из букв А, Б и В. Существует три варианта: АБ, АВ и БВ. Поэтому $C_3^2=3$. Формула для числа сочетаний:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},$$

где $n!$ — факториал числа n, т. е. произведение натуральных чисел от 1 до n. Факториал нуля определяется отдельно: $0!=1$.

Чтобы найти число сочетаний, можно воспользоваться специальной таблицей — ***треугольником Паскаля***.

Основное ***рекуррентное*** соотношение:

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k \quad \text{при } C_n^0=C_n^n=1 \text{ для любого } n.$$

Целая часть числа — наибольшее целое число, не превосходящее данное число. Целая часть числа x обозначается $[x]$. Например, $[3{,}4]=3$, $[2]=2$, $[-3{,}45]=-4$.

Оглавление

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: http://biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru

На передней стороне обложки изображены:

слева
Симеон Дени Пуассон (1781—1840) — французский математик, механик и физик. Работа Пуассона «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах» опубликована в 1837 году. В этой работе Пуассон применил распределение вероятностей, которое сейчас называется его именем. Примеры явлений, в которых возникает распределение Пуассона, многочисленны: поломки оборудования, длительность ремонтных работ, число покупателей в магазине, число опечаток в книге, импульсы счетчика радиоактивного излучения. Работы Пуассона дали начало современной теории массового обслуживания.

справа
Агнер Краруп Эрланг (1878—1929) — датский математик, статистик и инженер, основатель научной теории массового обслуживания. Эрланг нашел формулу для расчета доли телефонных вызовов, получающих отказ из-за перегрузки телефонной станции. В 1909 году Эрланг опубликовал свою первую работу «Теория вероятностей и телефонные разговоры». Формула Эрланга была принята для использования на главном почтамте Великобритании. В 40-х годах в честь Эрланга была названа единица измерения телефонного трафика. Теория Эрланга применяется не только в телефонии, но и в других системах массового обслуживания – например, в крупных аэропортах мира.