МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Д. З. Ильязова

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по направлениям
09.03.02, 38.03.01, 23.03.01, 24.03.04
и специальности 24.05.07

Ульяновск
УлГТУ
2018

УДК 519.2(075)
ББК 22.171я73
И49

Рецензенты:
доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного педагогического университета имени И. Н. Ульянова, кандидат физико-математических наук, доцент А. В. Цыганов,
доцент кафедры «Математика и физика» ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ имени П. А. Столыпина, кандидат физико-математических наук, доцент Т. А. Джабраилов

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Ильязова, Дания Зарифовна
И49 Краткий курс теории вероятностей : учебное пособие / Д. З. Ильязова. – Ульяновск : УлГТУ, 2018. – 130 с.

ISBN 978-5-9795-1865-7

Учебно-методическое пособие «Краткий курс теории вероятностей» содержит разделы ФГОС ВО: элементы комбинаторики и теории вероятностей. Каждая глава содержит теорию и примеры, иллюстрирующие теорию; задачи с ответами; тест или текст контрольной работы с образцом решений задач, а затем предлагаются задачи для самостоятельной работы студентов. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 09.03.02, 38.03.01, 23.03.01, 24.03.04 и специальности 24.05.07, а также для студентов технических и экономических вузов.

УДК 519.2(075)
ББК 22.171я73

ISBN 978-5-9795-1865-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие написано в соответствии ФГОС, оно содержит учебно-методические материалы по разделам: элементы комбинаторики и теории вероятностей, которые входят в цикл фундаментальных дисциплин, изучение их является обязательным для инженерных технических и экономических специальностей вузов.

Цель пособия – помочь студентам в приобретении навыков при решении различных задач курса и полагает использование дифференцированного подхода к обучению студентов с различным уровнем математической подготовки.

Структура пособия следующая. Весь материал разбит на главы, параграфы и пункты. Каждая глава содержит необходимый теоретический материал. В каждом пункте приведены иллюстрированные примеры. В конце каждой главы приводятся задачи для решения на аудиторных занятиях и для домашнего задания. Большая часть задач снабжена ответами. В конце каждой главы для самопроверки предлагаются контрольные вопросы, а для оценки уровня знаний студентов каждой главе предлагаются тестовые задания и типовые расчеты с образцами их решения. В приложении содержится презентация учебного пособия, выполненная студентами Зубковым А.А., Коваль Д.А. под руководством автора пособия, и некоторые таблицы.

В данном пособии использованы как задачи, составленные автором, так и задачи, заимствованные из отечественных источников.

Пособие предназначено для студентов, а также может быть полезным и преподавателям.

.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1.1. Правила комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, изучающий вопрос о том, сколько различных комбинаций (выборок), подчинённых определённым условиям, можно составить из заданных объектов (элементов) некоторого конечного множества. Например, о том, сколько различных комбинаций (выборок) при распределении различных видов работ между работниками, при подборе лекарственных средств, при составлении карты посевов сельскохозяйственных культур на нескольких полях и т. д. Такие задачи называются комбинаторными.

Комбинаторные методы играют важную роль как в практической, так и в научной деятельности человека, например, при решении задач теории вероятностей.

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух основных правил (**правила произведения** и **правила суммы**).

Правило произведения: если элемент a из некоторого множества можно выбрать n способами и после каждого такого выбора второй элемент b можно выбрать k способами, то оба элемента (пару) *a и b* в указанном порядке можно выбрать $n \cdot k$ способами.

Правило суммы: если элемент a из некоторого множества можно выбрать n, а элемент b можно выбрать k способами, причём первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных элементов (*a или b)* можно выбрать $n + k$ способами.

Пример 1.1. Сколько различных смешанных пар для игры в теннис можно образовать из семи юношей и четырёх девушек?

Решение. В паре юношу можно выбрать семью способами, а девушку − четырьмя способами. В соответствии с правилом произведения всего можно образовать $7 \cdot 4 = 28$ пар.

Пример 1.2. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 9 роз, 7 гербер, 5 хризантем?

Решение. Розу можно выбрать 9 способами, герберу – 7 способами, а хризантему – 5 способами, причем способы выборов не пересекаются, таким образом любой из указанных цветов можно выбрать $9 + 7 + 5 = 21$ способом.

Замечание. Правила комбинаторики можно распространить на случай любого конечного числа элементов.

1.2. Выборки без повторений

Пусть A – n-элементное множество. Если составлять различные комбинации из различных элементов множества A, то среди них можно выделить три типа выборок (**соединений): перестановки, размещения, сочетания.**

1.2.1. Перестановки

Определение. Всякое упорядочение элементов множества А называется **перестановкой из n элементов**.

В комбинаторных задачах необходимо уметь подсчитывать число всех возможных выборок. Так число всех возможных перестановок из n элементов обозначается символом P_n (читается: «число перестановок из n элементов»; P – первая буква французского слова permutation – перестановка) и вычисляется по формуле

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Пример 1.3. Сколько слов можно образовать из букв слова «учебник», если слова должны состоять из семи букв.

Решение. В слове «учебник» 7 букв. Задача сводится к подсчёту числа перестановок из семи элементов:

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Замечание. Две различные перестановки из n элементов множества A отличаются только порядком следования элементов в этих перестановках.

Пример 1.4. Дано множество $B = \{a, b, c\}$. Составить все перестановки из трёх различных элементов множества B.

Решение. Согласно определению перестановки каждая перестановка содержит все 3 элемента множества B, а различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

В нашем случае имеем следующие перестановки: (a,b,c), (b,c,a), (c,a,b), (b,a,c), (c,b,a), (a,c,b).

1.2.2. Размещения

Из данного множества A выбираются упорядоченные совокупности (наборы) из k ($k \leq n$) различных элементов.

Определение. Размещениями из n элементов по k различных элементов множества A называются упорядоченные совокупности (наборы, выборки) из k элементов.

Число всех возможных размещений из n элементов по k элементов обозначается символом A_n^k (читается: «число размещений из n по k» или «A из n по k»; A – первая буква французского слова arrangement – размещение, приведение в порядок) и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)}.$$

Пример 1.5. Дано множество $B = \{a,b,c\}$.Составить все размещения A_3^2 из трёх по два.

Решение. Так как в каждом размещении на первом месте может быть любой из трёх элементов, на втором – любой из двух оставшихся, на третьем – последний элемент, то искомыми размещениями являются: (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b) .

Замечание. Два различных размещения из n по k имеют равное количество (k) элементов, а отличаются они либо составом элементов, либо порядком их следования.

Пример 1.6. Сколькими способами можно изготовить трёхцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал пяти цветов.

Решение. Различных способов изготовления флагов столько, сколько существует трёхцветных упорядоченных совокупностей у пятиэлементного множества. Следовательно, число способов равно числу размещений из 5 элементов по 3, т. е. равно A_5^3, находим $A_5^3 =$ $= 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

1.2.3. Сочетания

Из n элементного множества A выбираются k элементные подмножества.

Определение. Сочетаниями из n элементов по k различных элементов множества A называются k элементные подмножества множества A.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «число сочетаний из n по k» или «C из n по k»; C – первая буква французского слова combinasion – сочетание) и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

или

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}}.$$

Пример 1.7. Дано множество $B = \{a,b,c\}$.Составить все сочетания C_3^2 из трёх по два.

Решение. Сочетаниями из трёх по два являются все двухэлементные подмножества множества B: $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$.

Замечание. Два различных сочетания из n по k имеют равное количество (k) элементов, а отличаются они только составом элементов.

Пример 1.8. Сколькими способами можно выбрать 4 учебника по математике из 6.

Решение. Искомое число способов равно числу четырёхэлементных подмножеств множества из шести элементов:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15.$$

Следует отметить, что перестановки являются частным случаем размещений, а числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

$$A_n^k = P_n\, C_n^k.$$

1.3. Выборки с повторениями

Выше рассматривались выборки без повторений. Если же некоторые элементы в выборках повторяются, то такие выборки называются выборками с повторениями. Число таких выборок вычисляются по формулам:

$$\overline{P_n} = (n_1, n_2, n_3, .., n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2!, \ldots, n_m!},$$

$$\overline{A_n^k} = n^k, \qquad \overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k.$$

Пример 1.9. Найти число различных слов, которое можно составить, переставляя буквы слова «математика».

Решение. В данном слове 10 букв (2 буквы м, 3 буквы а, 2 буквы т, 1 буква е, 1 буква и, 1 буква к). Искомое число равно:

$$\overline{P_{10}} = (2,\ 3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200.$$

Пример 1.10. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 6?

Решение. Количество всех двузначных чисел, составленных из цифр 2, 4, 6, равно:

$$\overline{A_3^2} = 3^2 = 9.$$

Пример 1.11. Сколько прямоугольных параллелепипедов можно построить, длина каждого ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

Решение. В данном случае речь идёт о числе сочетаний из 10 элементов по 3 с повторениями:

$$\overline{C_{10}^3} = C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!9)!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3} = 220.$$

1.4. Контрольные вопросы и задания

1. Каковы основные правила комбинаторики?
2. Сформулировать правило произведения.
3. Сформулировать правило суммы.
4. Как определяется перестановка (размещение, сочетание) без повторений?
5. По какой формуле вычисляется число перестановок (размещений, сочетаний) без повторений?
6. Охарактеризовать выборку с повторениями.
7. По какой формуле вычисляется число перестановок (размещений, сочетаний) с повторениями?

1.5. Задачи

1.1. Вычислить: 1). $\frac{10!}{8!}$;   2). $\frac{8!+6!}{5!}$;   3). $\frac{8!-4!}{6!}$.

1.2. Упростить: 1). $\frac{(k+1)!}{(k-2)!}$; 2). $\frac{(k+4)!}{(k+6)!}$;   3). $\frac{(k-9)!}{(k-7)!}$.

1.3. Из цифр 1,2,4,6,8 составлены пятизначные числа, которых цифры не повторяются. Сколько среди этих чисел, которые:

1) начинаются с цифры 6;

2) начинаются с 12;

3) не начинаются с цифры 4;

4) не начинаются с 468;

5) четные.

1.4. Для проведения экзамена создаётся комиссия из трёх преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из шести преподавателей?

1.5. Сколько различных смешанных пар для игры в бадминтон можно составить из девяти юношей и пяти девушек?

1.6. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если все они встретились в партиях между собой?

1.7. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 3 и 6?

1.8. Сколько различных слов можно образовать из букв слова «программа»?

1.9. Сколько существует треугольников, длина сторон которых 5,6,7,8,9?

1.10. В почтовом отделении продаются открытки пяти видов. Определить число способов покупки восьми открыток.

1.11. Сколько существует вариантов расселения восьми студентов в общежитии в четырёх - двухместных комнатах?

1.12. Найти число четырёхбуквенных слов, составленных из 33 букв русского алфавита, и таких, что любые две соседние буквы этих слов различны.

1.13. На плоскости проведено 8 прямых, никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

1.14. Сколькими способами можно расставить на 32 чёрных полях шахматной доски 12 белых и 12 чёрных шашек?

1.6. Ответы

1.1). 90; 1.2). 57; 1.3); 1679.

1.2.1). $k\,(k^2 - 1)$; 1.2.2). $\frac{1}{(k+5)(k+6)}$; 1.2.3). $(k-8)(k-9)$.

1.3.1). 24; 1.3.2). 6; 1.3.3). $5! - 4!$; 1.3.4). 2; 1.3.5). $4 \cdot 4!$.

1.4. 20.

1.5. 45 пар.

1.6. 21.

1.7. 16.

1.8. 45360.

1.9. 35.

1.10. 495.

1.11. 2520.

1.12. 1081344.

1.13. 28.

1.14. $\frac{32!}{12!\cdot 12!\cdot 8!}$.

1.7. Тест «Элементы комбинаторики»

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 4 различных пар?

1) 20 2) 80 3) 24 4) 4

2. В группе 24 студента. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в мероприятии?

1) 128 2) 10626 3) 36 4) 46788

3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, если цифры в числе должны быть различными?

1) 10 2) 60 3) 20 4) 42

4. Вычислить: 7! -5!

1) 4920 2) 205 3) 2 4) 2000

5. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых нечётные и различные.

1) 120 2) 30 3) 50 4) 60

6. Сколькими способами можно с помощью букв A, B, C, D обозначить вершины четырёхугольника?

1) 12 2) 20 3) 24 4) 4

7. Упростить выражение: $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$.

8. Сколько существует обыкновенных дробей, числитель и знаменатель которых – простые различные числа не больше 20?

1) 80 2) 56 3) 20 4) 60

9. На плоскости расположены 20 точек так, что три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

1) 60 2) 120 3) 2280 4) 3000

10. Разложите на простые множители число 42. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 42?

1) 6 2) 14 3) 42 4) 3

11. На плоскости даны 10 точек, причём три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует векторов с началом и концом в любых двух из данных точек?

1) 20 2) 45 3) 100 4) 90

12. Сколькими способами можно группу из 16 учащихся разделить на 2 группы так, чтобы в одной группе было 6 человек, а в другой – 10 человек?

1) 60 2) 96 3) 5005 4) 1920

ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Основные понятия теории вероятностей

К основным понятиям теории вероятностей относятся: испытание (опыт, эксперимент), случайное событие, вероятность.

Определение. Испытанием (опытом, экспериментом, наблюдением) называется определённый комплекс условий, при которых наблюдается изучаемое явление.

Определение. Случайным событием (или просто событием) называется исход (результат) испытания, который может произойти или не произойти.

События будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C,…* .

Пример 2.1. Испытание: бросание монеты; событие A – выпадение 3 очков, событие B – выпадение 10 очков, выпадение не менее 6 очков.

Рассмотрим виды событий.

Определение. Событие называется достоверным, если в результате испытания оно обязательно происходит.

Событие называется невозможным событием, которое в результате испытания произойти не может.

Далее будем использовать стандартные обозначения:

Ω – достоверное событие;

$\varnothing$ – невозможное событие.

Определение. Случайные события называются несовместными в данном испытании, если никакие два из них не могут произойти вместе.

Определение. Будем говорить, что совокупность случайных событий образует полную группу для данного испытания, если его исходом обязательно становится хотя бы одно из них (любое), но не появится одновременно два и более событий, т. е. события попарно несовместны.

Рассмотрим полную группу равновозможных несовместных случайных событий. Событие такой группы называется благоприятствующим появлению события A, если появление этого события влечёт появление события A.

Пример 2.2. В урне находится 8 шаров, на каждом из которых поставлено по одной цифре от 1 до 8. Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – чёрные. Появление шара с цифрой 1 (2 или 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара.

2.2. Операции над событиями

Введём основные операции над событиями; они являются аналогами соответствующих операций над множествами.

Определение. Суммой событий A и B называется событие $C = A + B = A \cup B$, которое происходит, если происходит хотя бы одно из событий A или B.

Пример 2.3. Опыт: берут наугад точку в области D (рис. 1).

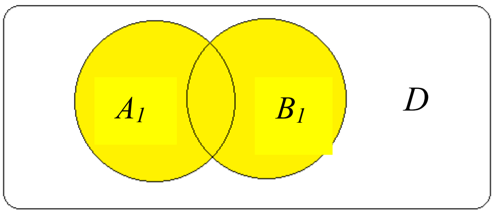


Рис. 1

Рассмотрим события:

A – попадание в область A_1;

B – попадание в область B_1;

C – попадание в заштрихованную область. Тогда $C = A + B$.

Определение. Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, которое происходит, если происходят оба события A и B одновременно.

Пример 2.4. Опыт: берут наугад точку в области D (рис. 2).

C – попадание в общую часть областей A_1 и B_1.

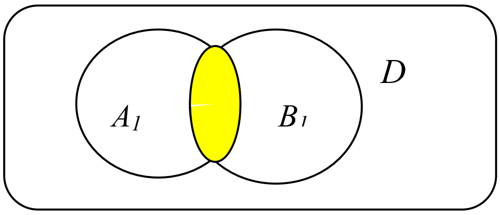


Рис. 2

Рассмотрим события:

A – попадание в область A_1;

B – попадание в область B_1;

Тогда $C = AB$.

Определение. Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит, если не происходит событие A.

Пример 2.5. Опыт: берут наугад точку в области D (рис. 3).

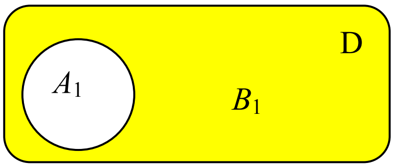


Рис. 3

Рассмотрим события:

A – попадание в область A_1;

$\overline{A}$ – попадание в область B_1.

Определение. Разностью событий A и B называется событие $C=A-B$, которое происходит, если происходит событие A и не происходит событие B.

Пример 2.6. Опыт: берут наугад точку в области D (рис. 4).

C – попадание в заштрихованную область.

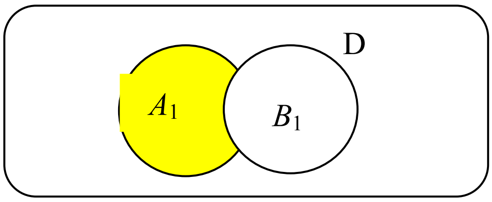


Рис. 4

Рассмотрим события:

A – попадание в область A_1;

B – попадание в область B_1.

Тогда $C = A - B$.

Пример 2.7. Пусть событие A – выпадение чётного числа очков при бросании игральной кости, а событие B – выпадение не более трёх очков. Тогда событие AB состоит в выпадении двух очков.

Пример 2.8. Событие A – студент на экзамене по математике получил оценку «5», B – студент не умеет складывать обыкновенные дроби. Тогда событие AB – невозможное событие, которое обозначается символом $\varnothing$.

Пример 2.9. Пусть событие A – выпадение не менее трёх очков (т. е. 3,4,5, или 6) при бросании игральной кости, событие B – выпадение чётного числа очков при бросании игральной кости. Тогда событие $A - B$ состоит в выпадении трёх или пяти очков, а событие $A + B$ состоит в выпадении хотя бы одного из шести очков.

2.3. Определения вероятности

2.3.1. Классическое определение вероятности

Пусть проводится испытание с n равновозможными исходами (в зависимости от случая), из которых интересующему нас событию A благоприятствуют m исходов.

Определение. Вероятностью события A при данном испытании называется отношение m числа благоприятных исходов этому событию к числу n всех равновозможных исходов:

$$P(A) = p = \frac{m}{n}.$$

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна 1:

$$P(\Omega) = 1.$$

2. Вероятность невозможного события $\varnothing$ равна 0:

$$P(\varnothing) = 0.$$

3. Если A – случайное событие, то $0 < P(A) < 1$.

Пример 2.10. В урне 15 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 15. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превосходит 15?

Решение. Пусть событие A – номер вынутого шара не превосходит 15. Число случаев благоприятствующих появлению события A, равно числу всех возможных случаев $k = n = 15$. Следовательно, $P(A) = 1$.

Пример 2.11. В цехе работают 8 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобрали 6 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц три женщины. Общее число возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 6 человек из 12, т. е. C_{12}^{6}.

Решение. Найдём число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: трёх женщин можно выбрать из четырёх C_4^3 способами; при этом остальные три человека должны быть мужчинами, их можно отобрать C_8^3 способами. Следовательно, благоприятствующих исходов равно $C_4^3 C_8^3$.

Искомая вероятность $p = \frac{C_4^3 C_8^3}{C_{12}^6} = \frac{4 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{8}{33} \approx 0{,}242.$

Пример 2.12. В урне 4 синих и 7 белых шара. Случайным образом вынули сразу два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

Решение. Пусть A – событие того, что оба шара синие. Число случаев благоприятствующих появлению события A, равно $m = C_7^2,$ а число всевозможных исходов равно числу $n = C_{11}^2$.

Следовательно, $P\,(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^2}{C_{11}^2.} = \frac{21}{55} \approx 0.382.$

Пример 2.13. Шесть книг расставляются на полку. Найти вероятность того, что две определённые книги окажутся рядом.

Решение. Число всех способов, которыми можно расставить на полке шесть книг, равно числу перестановок из элементов $n = P_6 = 6!$.

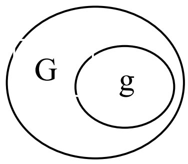
Подсчитаем число благоприятствующих случаев. Две определённые книги можно поставить рядом 2!=2 способами. Оставшиеся книги можно расположить на полке $5 \cdot 4!$ способами. Следовательно, $m = 2 \cdot 5 \cdot 4!$.

Таким образом, $p = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{3}$.

2.3.2. Геометрическое определение вероятности

При классическом определении вероятности не всегда можно определить числа m и n для вычисления вероятности событий. Поэтому непосредственно пользоваться формулой $P(A) = \frac{m}{n}$ не удаётся. В таких случаях вводят понятие геометрической вероятности, т. е. вероятности попадания точки в область (часть тела, часть плоскости, отрезок и др.).

Пусть, например, имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g.

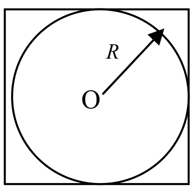


Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу в области G, попадёт в область g. Тогда вероятность попадания точки в какую-либо часть области g пропорциональна мере (mes) этой части (объёму, площади, длине и т. п.) и не зависит от её расположения и формы:

$$P = \frac{\text{mesg}}{\text{mesG}}.$$

Пример 2.14. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу, попадёт в круг, вписанный в квадрат со стороной 4 см.

Решение. Пусть A – событие «попадание точки в круг».



Тогда $P(A) = \frac{S_{кр.}}{S_{квадр.}} = \frac{\pi R^2}{4^2} = \frac{\pi \cdot 16}{16} = \pi \approx 3{,}14.$

2.3.3. Статистическое определение вероятности

Определение. Относительной частотой p^* случайного события A называется отношение числа m^* появления данного события к общему числу n проведённых одинаковых испытаний, в каждом из которых могло появиться или не появиться данное событие:

$$P^*(A) = p^* = \frac{m^*}{n}.$$

Практика показывает, что в тех опытах, для которых применимы методы теории вероятности частота $P^*(A)$ с увеличением числа опытов стабилизируется, т. е. стремится к некоторому пределу.

Определение. Статистической вероятностью события A называется предел, к которому стремится относительная частота $P^*(A)$ события A при неограниченном увеличении числа опытов n , т. е.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P^*(A) = \lim_{n\to\infty} p^* = \lim_{n\to\infty} \frac{m^*}{n}.$$

Пример 2.15. Подбрасывая монету 4040 раз, Бюффон наблюдал выпадение 2048 раз. Частота выпадения герба в данной серии составила $p^* = \frac{2048}{4040} = 0{,}50693$.

При аналогичном опыте Пирсон в серии из 24000 испытаний наблюдал выпадение герба 12012 раз. При этом $p^* = \frac{12012}{24000} = 0{,}5005$.

Очевидно, вероятность выпадения герба равна 0,5, и что при увеличении числа опытов частота стремится к вероятности.

Недостатком статистического определения вероятности заключается в том, что нельзя провести бесконечное число повторений испытания, а при конечном числе повторений испытания наблюдаемая частота будет разной при различном числе повторений.

2.4. Сложение и умножение вероятностей

2.4.1. Сложение вероятностей

Теорема (о сложении вероятностей). Если события A и B являются несовместными событиями, то тогда вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Доказательство. Введём следующие обозначения:
n – общее число возможных исходов;
m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A;
m_2 – число исходов, благоприятствующих событию B.
Число исходов, благоприятствующих наступлению событию A либо B, равно $m_1 + m_2$.
Следовательно, $P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$.
Замечание. Данную теорема можно обобщить на случай любого конечного числа n попарно несовместных событий:
$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$
Следствие 1. Вероятность суммы противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
Следствие 2. Вероятность суммы событий, образующих полную группу несовместных событий, равна единице.
Пример 2.16. В магазине имеется 12 телевизоров, из которых 2 неисправных. Найти вероятность того, что среди наугад взятых трёх телевизоров будет хотя бы один неисправный.
Решение. Пусть событие A – среди взятых телевизоров нет ни одного неисправного и $\bar{A}$ – хотя бы один телевизор неисправный. Общее число способов, которыми можно взять 3 из 12 телевизоров, равно C_{12}^3. Число исправных – равно 10, и число способов выборки трёх изделий из 10 равно C_{10}^3. Поэтому $P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{12}^3}$; а $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 -$
$- \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{12 \cdot 11 \cdot 10} = 1 - \frac{6}{11} \approx 1 - 0{,}55 = 0{,}45$.
Заметим, что задачу можно решить другим способом (каким?).

2.4.2. Умножение вероятностей

Определение. Два события называются <u>независимыми</u>, если вероятность одного из них не зависит от вероятности того, произошло или не произошло другое событие.

Определение. Событие A называется <u>зависимым</u> от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Определение. Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место другое событие B, называется <u>условной вероятностью</u> события A.

Обозначение: $P(A|B)$ или $P_B(A)$.

Заметим, что условие независимости события A от события B можно записать в виде: $P(A|B)=P(A)$, а условие зависимости в виде: $P(A|B) \neq P(A)$.

Пример 2.17. В коробке 4 белых и 6 синих шара. Из коробки вынимают два шара. Пусть событие A – первый вынутый шар – синий, B – второй вынутый шар – синий. Тогда вероятность события B зависит от того, какого цвета был первый вынутый шар. Следовательно, событие B зависит от события A.

Теорема (об умножения вероятностей). Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже имело место:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Отсюда имеем: $P(A|B)=P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Следствие. Если события A и B являются независимыми, то $P(AB)=P(A)P(B)$.

Пример 2.18. В урне находятся 25 шаров:12 белых и 13 чёрных. Последовательно без возвращения извлекают 2 шара. Какова вероятность того, что первым извлечён белый шар (событие A), а вторым – чёрный (событие B)?

Решение. Вероятность извлечения белого шара при первом испытании: $P(A) = \frac{12}{25}$. Вероятность $P_B(A)$ того, что вынутый второй шар чёрный при условии, что первый извлечённый шар белый равна: $P_A(B)=P(B|A) = \frac{13}{24}$.

Таким образом, искомая вероятность: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P_A(B)=\frac{12}{25} \cdot \frac{13}{24}=\frac{13}{50}$.

Пример 2.19. Найти вероятность совместного появления 6 очков при бросании двух игровых костей.

Решение. Вероятность появления 6 очков на первой кости (событие A): $P(A)=\frac{1}{6}$. Вероятность появления 6 очков на второй кости (событие B): $P(B)=\frac{1}{6}$.

Искомая вероятность: $P(AB)=P(A) \cdot P(B)= \frac{1}{36}$.

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности (или независимыми), если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности. В противном случае события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются зависимыми.

Для независимых событий вероятность их совместного наступления: $P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n)$.

Из независимости в совокупности вытекает их попарная независимость.

Пример 2.20. В урне находятся 60 шаров: 40 белых и 20 чёрных. Случайным образом из урны извлекают один шар, не возвращая его обратно. Если появился белый шар (событие A), то вероятность извлечения белого шара при повторном испытании (событие B) равна: $P(B) = \frac{39}{59}$.

Если же в первом испытании вынут чёрный шар (событие A), то вероятность извлечения белого шара при втором испытании (событие B) равна: $P(B) = \frac{40}{59}$.

Вывод: события A и B являются зависимыми.

Теорема (о сложении вероятностей совместных событий). Вероятность суммы двух произвольных событий A и B равна сумме вероятностей событий без вероятности их произведения:

$$P\,(A+B) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(AB).$$

Пример 2.21. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно: $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}5$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение. Пусть событие A – попадание первого орудия, событие B – попадание второго орудия. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из другого орудия, поэтому события A и B независимы.

Вероятность события AB (оба орудия попали в цель):

$P(AB) = P(A)\,P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$.

Тогда искомая вероятность :

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P\,(A \cdot B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8$.

Второй способ решения.

$P(A+B)=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)+P(A)P(B)=0{,}6\cdot 0{,}5+0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}3+$
$+0{,}2+0{,}3=0{,}8$.

Третий способ решения.

Предположим, что оба орудия не попали в цель. Тогда $P(\overline{A}\overline{B})$=$P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$=0,4·0,5=0,2 и искомая вероятность равна: $P(A+B)$ = = 1 – 0,4 · 0,5 = 0,8.

Теорема (о вероятности появления хотя бы одного события). Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2,..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2,\ldots,\overline{A}_n$:

$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots\ P(\overline{A}_n)$.

Пример 2.22. Решить рассмотренный выше пример с помощью последней теоремы.

Решение. Найдём $P(\bar{A})$ и $P(\bar{B})$:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;\ P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(A + B) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

2.5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

2.5.1. Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных равновозможных событий. Тогда событие A можно представить как сумму событий AH_1, $AH_2\ldots$, AH_n:

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Вероятность события A можно определить по формуле:

$P(A)=P(AH_1)+P(AH_2)+\ldots+P(AH_n)=P(H_1)\,P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{Hi}(A)$

или $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{Hi}(A)$ – **формула полной вероятности.**

Пример 2.23. На трёх станках изготавливают соответственно 20%, 35% и 45% всех деталей. Брак составляет соответственно 15%, 10%, 12%. Найти вероятность $P(A)$, что взятая наугад деталь бракованная.

Решение. Введём три предположения (гипотезы):

H_1 – деталь изготовлена на первом станке,

H_2 – деталь изготовлена на втором станке,

H_3 – деталь изготовлена на третьем станке.

Очевидно, что эти гипотезы являются несовместными событиями, одно из которых обязательно произойдёт в результате испытания, т. е. $\sum_{i=1}^{3} P(H\,i)=1$. События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий:

$P(H_1) = 0{,}2$; $P(H_2) = 0{,}35$; $P(H_3) = 0{,}45$.

Условные вероятности: $PH_1(A) = 0{,}15$, $PH_2(A) = 0{,}35$, $PH_3(A) = 0{,}12$.

По формуле полной вероятности: $P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}35 \cdot 0{,}1 + 0{,}45$ x x $0{,}12 = 0{,}03 + 0{,}035 + 0{,}054 = 0{,}065 + 0{,}054 = 0{,}119$.

2.5.2. Формула Байеса

С помощью формулы полной вероятности доказывается формула Байеса – условная вероятность события H_i в предположении, что событие A уже имело место:

$$P_A(H_i)=\frac{AH_i}{P(A)}=\frac{P(H_i)\,P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Пример 2.24. Имеются три одинаковых с виду урны: в первой – 10 белых и 5 чёрных шаров; во второй – 15 белых и в третьей – 15 чёрных шаров. Из выбранной наугад урны вынули белый шар.

Найти вероятность события A, что шар вынут из второй урны.

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле Байеса:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\,P_{H_2(A)}}{P(A)}=\frac{P(H_2)\,P_{H_2(A)}}{P(H_1)\cdot PH_1(\mathrm{A})+\,PH_2(\mathrm{A})+\,PH_3\,(\mathrm{A})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{15}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

2.5.3. Формула Бернулли

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p , то вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях k раз, выражается формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } q=1\text{-}k,\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В частности, отсюда $P_n(0) = q^n$, $P_n(1) = npq^{n\text{-}1}$, … , $P_n(n)=p^n$.

Пример 2.26. В урне 20 белых и 10 чёрных шаров. Вынули 4 шара, причём каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырёх вынутых шаров окажутся 2 белых.

Решение. Событие A – достали белый шар. Тогда вероятности $P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{3}$. По формуле Бернулли искомая вероятность:

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Пример 2.27. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 6 детей, будет не больше трёх девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Решение. Вероятность рождения девочки $p = \dfrac{1}{2}$, тогда $q = \dfrac{1}{2}$.

Найдём вероятности того, что в семье нет девочек, родилась одна, две или три девочки:

$$P_6(0) = q^6 = \frac{1}{64}, \quad P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 = \frac{6}{64},$$

$$P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{15}{64}, \quad P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{20}{64}.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) = \frac{21}{32}.$$

Пример 2.28. В семье шесть детей. Вероятность рождения девочки равна 0,49. Найти вероятность того, что среди этих детей одна девочка.

Решение. Событие A – родилась девочка. По условию

$$P = P(A) = 0{,}49;$$

Тогда $q = 1 - p = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$.

Формула Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \;\; C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Всего шесть детей, значит $n = 6$.

Надо найти вероятность того, что среди них точно одна девочка, значит $k = 1$.

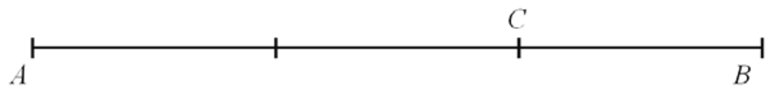
$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^{6-1},$$

$$P_6(1) = \frac{6!}{1!\,(6-1)!} \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51^5 = \frac{6!}{5!} \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51^5 =$$

$$= 6 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51^5 = 2{,}94 \cdot 0{,}0345 = 0{,}1014.$$

Пример 2.29. Отрезок AB разделён точкой C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошено 6 точек. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения. Найти вероятность того, что более одной точки окажется правее точки C.

Решение.



Событие A – случайная точка попала на отрезок CB (правее точки C).

Так как C делит AB в отношении 2:1, то:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда имеем: $2CB = AC$ или $2CB + CB = AC + CB$, или $3CB = AB$.

Таким образом, $\frac{CB}{AB} = \frac{1}{3}$.

Опираясь на геометрическое определение вероятности, получаем:

$$p = P(A) = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{3};$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Формула Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \;\; C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Всего на отрезок AB брошено 6 точек, значит $n = 6$.

Событие B – более одной точки окажется правее точки C.

Противоположное событие:

$\overline{B}$ – не более одной точки окажется правее точки C, т. е. ни одной точки или ровно одна точка.

$$P(\overline{B}) = P_6(0) + P_6(1),$$

$$P_6(0) = C_6^0 \cdot p^0 \cdot q^6 = q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729},$$

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot p^1 \cdot q^{6-1} = \frac{6!}{1!\,(6-1)!} \cdot p \cdot q^5 =$$

$$= \frac{6!}{5!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 6 \cdot \frac{2^5}{3^6} = \frac{9 \cdot 32}{729} = \frac{192}{729}.$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{64}{729} + \frac{192}{729}\right) = 1 - \frac{256}{729} =$$

$$= \frac{473}{729} \approx 0{,}6488.$$

Пример 2.30. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что не более 5 раз выпадет герб.

Решение

Событие A – при подбрасывании монеты выпадает герб.

$$p = P(A) = \frac{1}{2}; \;\; q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Монета подбрасывается 6 раз, значит $n = 6$.

Событие B – герб выпадет не более 5 раз.

Противоположное событие:

$\overline{B}$ – герб выпадет более 5 раз, то есть 6 раз.

$$P(\overline{B}) = P_6(6) = C_6^6 \cdot p^6 \cdot q^{6-6} = \frac{6!}{6!\,(6-6)!} \cdot p^6 \cdot q^0 =$$

$$= \frac{1}{0!} \cdot p^6 \cdot 1 = p^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

2.5.4. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона

При большом числе испытаний n и малой вероятности p формулой Бернулли пользоваться неудобно, например, $0{,}95^{1000}$ вычислить трудно. В этом случае для вычисления вероятности того, что в n испытаниях (n – велико) событие произойдёт k раз, используют асимптотические (локальную и интегральную) формулы Муавра - Лапласа и асимптотическую формулу Пуассона.

1. Формула Пуассона: $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$,

где $\lambda = np = \text{const}$ – среднее число появлений события в n испытаниях.

2. Локальная формула Муавра - Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами:

1) функция $\varphi(x)$ является чётной, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2) функции $\varphi(x)$ монотонно убывает при положительных значениях аргумента;

3) $\lim_{n\to\infty} \varphi(x) = 0$;

4) для всех значений $x > 5$ значение функции $\varphi(x) \approx 0$.

3. Интегральная формула Муавра-Лапласа:

$P_n(a \le k \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ обладает следующими свойствами:

1) функция $\Phi(x)$ является нечётной, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2) функция $\Phi(x)$ – монотонно возрастающая;

3) $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0{,}5$;

4) для всех значений $x > 5$ значение функции $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Пример 2.31. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

Решение. $n=1000$, $p=0{,}002$, $\lambda=np=2$, $k=3$.

Искомая вероятность $P_{1000}(3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{2^3}{2e^2} = 0{,}18$.

Пример 2.32. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,004. Найти вероятность того, что в пути повреждено меньше трёх изделий.

Решение. $n=500$, $p=0{,}004$, $\lambda=2$.

По теореме сложения вероятностей имеем:

$$P = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-2} + \frac{2}{1!}e^{-2} + \frac{4}{2!}e^{-2} = 5e^{-2} = 0{,}68.$$

Пример 2.33. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

Решение. $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$.

$$P_{1000}(k > 2) = 1 - P_{1000}(k \le 2) = 1 - \left(P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)\right) =$$
$$= 1 - \left(e^{-3} + 3e^{-3} + 4{,}5e^{-3}\right) = 0{,}5678.$$

2.6. Случайные величины

2.6.1. Виды случайных величин

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное.

В отличие от случайного события, являющегося качественной характеристикой случайного результата испытания, случайная величина характеризует результаты испытания количественно.

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Определение. Случайная величина называется дискретной, если в результате испытания она принимает одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, … с соответствующей вероятностью $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

Определение. Случайная величина называется непрерывной, если она может принимать любое значение из некоторого промежутка.

Например, число студентов на лекции – дискретная случайная величина, продолжительность лекции – непрерывная.

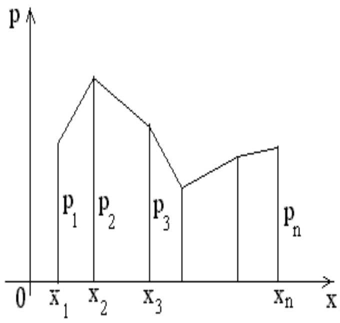
2.6.2. Законы распределения дискретной случайной величины

Определение. Соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется закономраспределения вероятностей.

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается таблицей:

Возможные значения случайной величины X	x_1	x_2	…	x_n
Вероятности этих значений P	p_1	p_2	…	p_n

Поскольку случайная величина X принимает одно из значений x_1, x_2, … , x_n, есть достоверное событие и поэтому должно выполняться в случае бесконечной последовательности значений $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.



Закон распределения может быть задан в виде многоугольника распределения вероятностей, т. е. в графическом виде ломаной, соединяющей точки (x_k, p_k) (см. рис.).

Пример 2.34. Переменная величина X есть число очков, выпадающее на верхней грани игральной кости при ее однократном бросании. Составить закон распределения этой случайной величины.

Решение. Так как любое число очков при однократном бросании кости выпадает с вероятностью $P = \frac{1}{6}$, то закон распределения случайной величины имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Пример 2.35. Вероятность попадания при каждом выстреле p = 0,8. Имеется три снаряда. Определить вероятность того, что будет израсходован один снаряд, два снаряда, три снаряда, если стрельба ведется до первого попадания или промаха всеми тремя снарядами. Составить таблицу распределения случайной величины X – числа израсходованных снарядов.

Решение. Пусть X – число израсходованных снарядов. Обозначим $P(X = x_k)$ – вероятность того, что будет израсходовано x_k снарядов. Тогда

$$P(x{=}1) = 0{,}8, \quad P(x{=}2){=}(1-p)p = 0{,}16, \quad P(x{=}3){=}(1-p)^2{=}0{,}04.$$

Таблица распределения будет иметь вид

X	1	2	3
P	0,8	0,16	0,04

Пример 2.36. Экзаменатор задал студенту 3 дополнительных вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа ответов на заданные вопросы.

Решение. Используем формулу Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Здесь n=3, p=0,8, q=0,2.

$$P(X=0) = q^3 = 0{,}2^3,$$

$$P(X=1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^2,$$

$$P(X=2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot 08^2 \cdot 0{,}2^1,$$

$$P(X=3) = p^3 = 0{,}8^3.$$

X	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

2.6.3. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Основную роль при решении практических задач играют так называемые числовые характеристики: математическое ожидание, задающее «центральное» значение случайной величины, дисперсия, характеризующая разброс значений случайной величины вокруг математического ожидания, и среднеквадратичное отклонение.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Пусть X – дискретная случайная величина с законом распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X=x_k)$	p_1	p_2	…	p_n

Определение. Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k.$$

Для бесконечной случайной величины: $\sum_{k=1}^{\infty} x_kp_k$.

Можно показать, что при большом числе испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений близко к её математическому ожиданию.

Свойства математического ожидания

1. $M(C) = C$, где $C = \text{const}$.
2. $M(CX) = CM(X)$.
3. Для независимых случайных величин X и Y: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

4. Для любых случайных величин *X* и *Y: M (X+Y]=M*(*X*) +*M*(*Y*).

Пример 2.37. Найти математическое ожидание случайной величины *X,* зная её закон распределения

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

Решение. $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 = 2{,}1$.

Пример 2.38. Найти математическое ожидание случайной величины $2X - 5$, если $M(X) = 4$.

Решение. $M(2X - 5) = 2M(X) + (-1)M(9) = 2 \cdot 4 - 9 = -1$.

Дисперсия дискретной случайной величины

Возможные значения случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями могут по-разному рассеиваться вокруг средних значений.

Например, в двух группах средний балл на экзамене по математике оказался равным «4», но в одной группе «хорошистами» оказались все, а в другой только «отличники» и «троечники». Поэтому возникает потребность в числовой характеристике случайной величины, показывающий разброс случайной величины относительно математического ожидания. Такими характеристиками служат дисперсия и среднеквадратичное отклонение.

Определение. Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения значений величины от ее математического ожидания:

$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^2 p_k$.

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами.

1. $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$.

2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$.

3. Для независимых случайных величин X и Y: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

В частности, из свойств дисперсии следует, что

$$D(C+X) = D(X)$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Определение. <u>Средним квадратическим отклонением</u> $\sigma(X)$ случайной величины X называется корень квадратный из её дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,.$$

Пример 2.39. Случайная величина X задана следующим законом распределения:

X	2	4	6
P	0,2	0,6	0,2

Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

<u>Решение.</u> $(X) = 2\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}6 + 6\cdot 0{,}2 = 4$;

$D(X) = (2-4)^2\cdot 0{,}2 + (4-4)^2\cdot 0{,}6 + (6-4)^2\cdot 0{,}2 = 1{,}6$;

$\sigma(X) = \sqrt{1{,}6} \approx 1{,}27$.

Пример 2.40. В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из неё три раза подряд извлекают шар, причём каждый раз вынутый шар возвращают в урну. Пусть X – число извлечённых белых шаров. Составить закон распределения этой величины, определить её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическное отклонение.

Решение. Вероятность вынуть из урны белый шар $p = 0,6$. Чтобы найти закон распределения случайной величины X, воспользуемся формулой Бернулли, для которой $n = 3$.

$P(X=0) = q^3 = 0,064$.

$P(X=1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0,6 \cdot 0,16 = 0,288$.

$P(X=2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0,36 \cdot 0,4 = 0,432$.

$P(X=3) = p^3 = 0,216$.

Итак, закон распределения имеет вид

X	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Определим числовые характеристики случайной величины.

$M(X) = 0,288+0,864+0,648=1,8$

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1\cdot 0,288+4\cdot 0,432+9\cdot 0,216 - 3,24=0,72$.

$\sigma(X) = \sqrt{0,72} = 0,85$.

2.6.4. Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины

Определение. Закон распределения дискретной случайной величины X, которая может принимать $n+1$ значение $0,1,2,\ldots,n$, описываемый формулой Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ называется биномиальным.

Запишем биномиальный закон в виде таблицы

X	0	1	2	…	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Определим числовые характеристики биномиального распределения. Пусть X – число появлений события A в n испытаниях.

Если обозначим через X_k – число появлений события A в k-м испытании, то $X = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Закон распределения случайной величины X_k имеет вид

X	0	1
P	q	P

Легко заметить, что $M(X_k) = p$, $D(X) = pq$.
Тогда для случайной величины X

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k) = np .$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = npq .$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} .$$

2.6.5. Закон распределения Пуассона дискретной случайной величины

Этот закон определяется формулой Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda = np.$$

Случайная величина X – число появлений события A в n испытаниях при большом n и малой вероятности p имеет распределение Пуассона

X	0	1	2	…	n
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

Можно показать, что для распределения Пуассона

$$M(X) = D(X = \lambda = np.$$

2.7. Законы распределения непрерывной случайной величины

2.7.1. Функции распределения и плотности вероятности непрерывной случайной величины

Функция распределения

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, заданную на некотором интервале $(a,\ b)$. Закон распределения вероятностей для такой величины должен позволять находить вероятность попадания её значения в любой интервал (x_1, x_2).

Определение. Функцией распределения непрерывной случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения $x \in (a,b)$ вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т. е. $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Как любая вероятность $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.
3. $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
4. $P(X=x_1)=0$.
5. Если все возможные значения случайной величины X находятся на интервале $(a,\ b)$, то $F(x)=0$ при $x \le a$ и $F(x)=1$ при $x \ge b$.
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Плотность вероятностей

Определение. Плотностью вероятностей непрерывной случайной величины X называется производная от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Плотность вероятностей непрерывной случайной величины X обладает свойствами:

1. $f(x) \geq 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
3. Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения случайной величины: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.
4. $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Пример 2.41. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \leq 1, \\ (x-1)^2 \quad \text{при} \ 1 < x \leq 4, \\ 1 \ \text{при} \ x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения этой случайной величины и вероятность попадания её в интервал (0; 1,5).

<u>Решение.</u> По определению

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < 1, \\ 2(x-1) \quad \text{при} \ 1{,}5 < x \leq 4, \\ 0 \ \text{при} \ x > 4 \end{cases}$$

Требуемая вероятность будет

$$P(0 < X < 1{,}5) = F(1{,}5) - F(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Пример 2.42. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \leq 1, \\ x - \frac{1}{2} \quad \text{при} \ 1 < x \leq 2, \\ 0 \ \text{при} \ x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения этой величины.

Решение. Воспользуемся формулой $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x\le 1$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0$.

Если $1<x\le 2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}t\right)\Bigg|_0^x=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right).$$

Если $x>2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\int\limits_{2}^{x} 0dx=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\Bigg|_0^2=1.$$

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 1, \\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{x}^2-x\right) \text{ при } 1<x\le 2, \\ 1 \text{ при } x>2. \end{cases}$$

Пример 2.43. Составить функцию распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X с законом распределения:

X	2	4	6
P	0,5	0,3	0,2

Решение. Если $x\le 2$, то $F(x)=0$, так как значений, меньших 2, величина X не принимает. Поэтому при $x\le 2$ $F(x)=P(X<x)=0$.

Если $2<x\le 4$, то $F(x)=0{,}5$, так как X может принимать значение 2 с вероятностью 0,5.

Если $4<x\le 6$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=2)+P(X=4)=0{,}5+0{,}3=0{,}8$ (согласно теореме сложения вероятностей несовместных событий).

Если $x>6$, то $F(x)=1$, так как событие $X\le 6$ достоверное.

Итак, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 4 < x \le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

2.7.2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Аналогично тому, как это было сделано для дискретной случайной величины, определим числовые характеристики непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$.

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ называется выражение вида

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx .$$

Если случайная величина X может принимать значения только на конечном отрезке $[a, b]$, то $M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx$.

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины X называется выражение вида

$$D(X)=M(X-M(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx ,$$

или

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2 .$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, указанные для дискретных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется число, равное корню квадратному из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} .$$

Определение. Модой $M_0(X)$ называется значение случайной величины X, при котором плотность распределения $f(x)$ имеет наибольшее значение.

Определение. Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X, называют её значение, определяемой равенством

$$P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X))$$

или

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx = \int_{M_e}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.44. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ x - \frac{1}{3}x^2 \quad \text{при} \ 0 < x < 1, \\ 0 \quad \text{при} \ x \ge 1. \end{cases}$$

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

Решение.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x\left(x - \frac{1}{3}x^2\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2\left(x - \frac{1}{3}x^2\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{15}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{4}{15} - \frac{1}{144} = \frac{571}{225}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{2\sqrt{11}}{15}.$$

2.7.3. Закон равномерного распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение вероятностей, если её плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} c \text{ при } a \le x \le b, \\ 0 \text{ при } x<a,\ x>b. \end{cases}$$

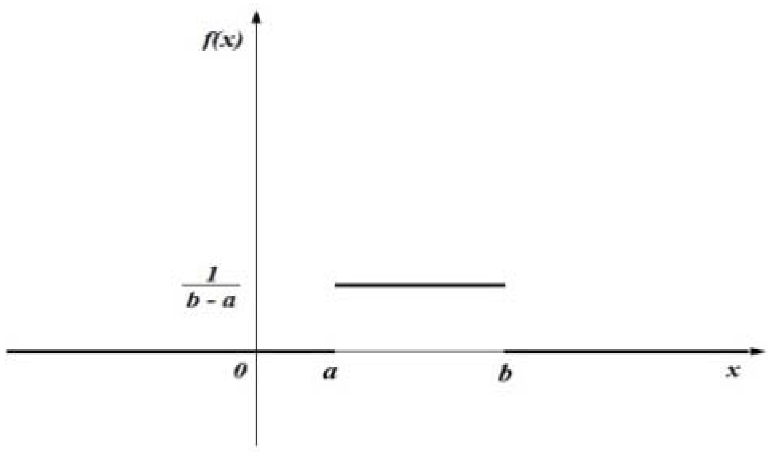
Найдем значение c. По свойству плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{a}^{b} cdx=c(b-a)=1,$$

следовательно, $c=\dfrac{1}{b-a}$ и

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ при } a \le x \le b, \\ 0 \text{ при } x<a, x>b. \end{cases}$$

Так как $b-a=\dfrac{1}{c}$, то промежуток $[a,\ b]$, на котором имеет место равномерное распределение, обязательно конечен. График функции $f(x)$ имеет вид



Нетрудно доказать, что случайная величина X примет значение, заключённое в интервале (α, β) по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a},$$

т. е. вероятность попадания X в интервал зависит только от длины этого интервала и не зависит от значений величины X. При равномерном распределении случайной величины X вероятности попадания X в промежутки равной длины одинаковы.

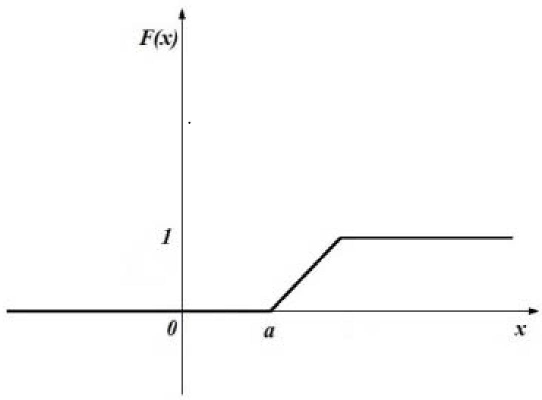
Найдём функцию распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x<a$, то $f(x)=0$ и, следовательно, $F(x) = 0$.

Если $a \le x \le b$, то $f(x) = \frac{1}{b-a}$ и, следовательно,

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Если $x>b$, то $f(x)=0$ и, следовательно,



$$F(x) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx + \int_{b}^{x} 0dx = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{при} \quad a \le x \le b, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Пример 2.45. Интервал движения автобуса равен 10 минутам. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать автобус менее 5 минут. Решение. Пусть случайная величина X – время прихода пассажира на станцию после отправления очередного автобуса $0<X<10$. X имеет равномерное распределение, так как вероятность прихода, например, в пятую минуту, равна вероятности прихода в восьмую. В задаче требуется найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (10, 15).

$$P(5 < X < 10) = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

Числовые характеристики равномерного распределения

Для случайной величины X, имеющей равномерное распределение, плотность распределения определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } \ a \le x \le b, \\ 0 \quad \text{при} & x < a, x > b. \end{cases}$$

Тогда по определению математического ожидания

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Дисперсия равномерно распределенной случайной величины будет

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Итак,

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

2.7.4. Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины

Изучение различных явлений показывает, многие случайные величины, например, погрешности при измерениях, величина износа деталей во многих механизмах и т. д., имеют плотность распределения вероятности, которая вычисляется по формуле

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

И её график имеет вид

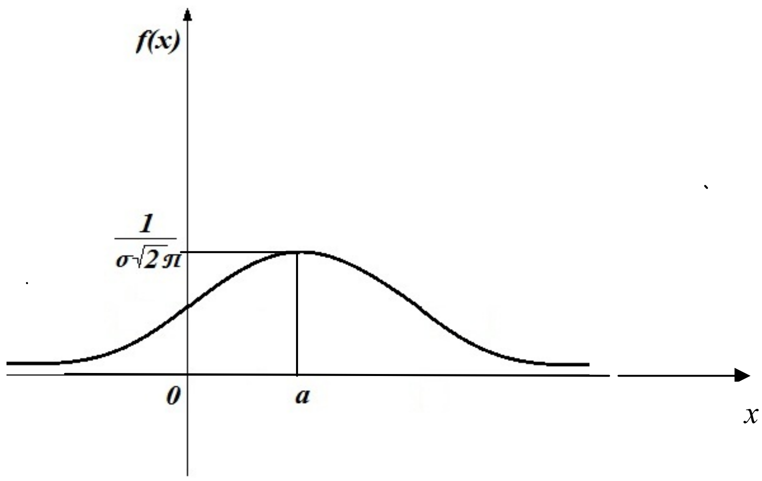


Рис. 5

Определение. Непрерывная случайная величина X называется <u>нормальной</u> с параметрами (a, σ) и пишут $X = N(a, \sigma)$, если её плотность вероятности задаётся формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Кривая нормального распределения изображена на рисунке 5.

В дальнейшем нам потребуется интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Используя этот интеграл, несложно заметить, что функция распределения $f(x)$ удовлетворяет основному соотношению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

2.7.5. Числовые характеристики нормального распределения

Математическое ожидание случайной величины с нормальным законом распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Определяется по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=a.$$

Итак, $M(X) = a$. Значение параметра a в формуле, определяющей плотность распределения вероятности, равно математическому ожиданию рассматриваемой случайной величины. Точка $x=a$ является центром распределения вероятностей, или центром рассеивания.

Можно доказать, что дисперсия и среднее квадратическое отклонение определяются по формулам $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X)=\sigma$ соответственно.

Таким образом, $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$, $\sigma(X)=\sigma$.

Функция Лапласа. Функция распределения случайной величины *X*, имеющей нормальное распределение

В дальнейшем будем использовать функцию Лапласа, определяемую равенством

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Функция Лапласа является табулированной функцией.

Укажем некоторые свойства функции $\Phi(x)$.

1. $\Phi(x)$ определена при всех значениях x.
2. $\Phi(0)=0$.
3. $\Phi(+\infty)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{1}{2}$.

4. $\Phi(-\infty) = -\frac{1}{2}$.

5. $\Phi(x)$ монотонно возрастает при всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

6. $\Phi(x)$ – функция нечётная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Функция распределения случайной величины X, имеющей нормальное распределение, определяется по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

или

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

2.7.6. Вероятность попадания в заданный интервал случайной величины X, имеющей нормальное распределение

Используя функцию распределения случайной величины X, можно доказать, что для нормального распределения случайной величины вероятность попадания её значений в интервал (α,β) определяется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Пример 2.46. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x) = \gamma \cdot e^{-4x^2+6x-1}$. Найти: γ, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P\left(-\frac{3}{4} < X < \frac{5}{4}\right)$.

Решение. Случайная величина X имеет нормальное распределение. Поэтому представим плотность распределения $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для этого выделим в показателе заданной функции полный квадрат:

$$-4x^2+6x-1=-4\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)=-4\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=-4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{4}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\gamma\cdot e^{-4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{4}}=\gamma\cdot e^{\frac{5}{4}}\cdot e^{-\frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}}}.$$

Сравним

$$\gamma\cdot e^{\frac{5}{4}}\cdot e^{-\frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Из последнего равенства имеем:

$$M(X)=a=\frac{3}{4}.$$

$$2\sigma^2=\frac{1}{4},\ \text{т. е. } D(X)=\sigma^2=\frac{1}{8}.$$

$$\gamma\cdot e^{\frac{5}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}},\ \gamma=\frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot e^{\frac{5}{4}}}.$$

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}+\Phi\left(2\sqrt{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$P(-\frac{3}{4}<X<\frac{5}{4})=\Phi\left(\frac{\frac{5}{4}-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\frac{3}{4}-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi(\sqrt{2})+\Phi(3\sqrt{2})=0{,}4207+0{,}499968=0{,}921.$$

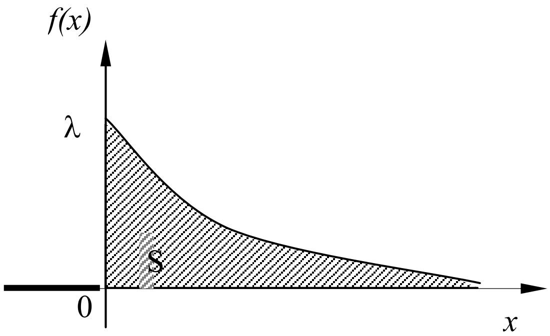
Итак: $\gamma=\frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot e^{\frac{5}{4}}}$, $M(X)=\frac{3}{4}$, $D(X)=\frac{1}{8}$, $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(2\sqrt{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $P(-\frac{3}{4}<X<\frac{5}{4})=0{,}921$.

2.7.7. Показательный закон распределения непрерывной случайной величины

Определение. Непрерывная случайная величина X называется показательной (подчинённой показательному закону распределения), если ее плотность вероятности задаётся формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda\, x}, \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

Число λ называется параметром показательной случайной величины.
График плотности вероятности имеет вид.



Заметим, что площадь бесконечной фигуры S между графиком функции $f(x)$ и осью абсцисс равна 1.
Действительно,

$$S = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Bigg|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1\,.$$

Используя определения числовых характеристик и определение показательного закона распределения можно показать, что

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = \frac{1}{\lambda}\,,$$

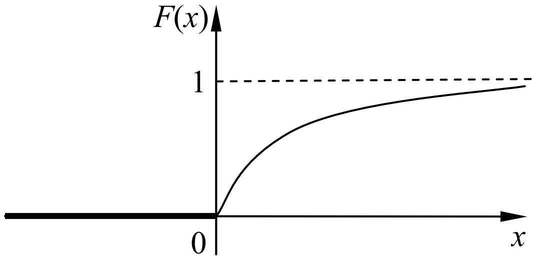
$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X)^2 f(x)dx = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Таким образом, $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Функция распределения F (x) определяется по формуле

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

График $F(x)$:



Примерами показательных случайных величин являются продолжительность телефонного разговора, время безотказной работы автоматической линии.

2.8. Контрольные вопросы

1. Что такое событие?
2. Какое событие называется случайным?
3. Какие события называются совместными и несовместными?
4. Какие события называются достоверными и недостоверными и равновозможными?
5. Какая совокупность случайных образует полную группу событий для данного испытания?
6. В каком случае событие A называют благоприятствующим событию B?
7. Классическое определение вероятности случайного события.
8. Геометрическое определение вероятности случайного события.
9. Частота случайного события. Статистическое определение вероятности случайного события.

10. Какие события называются зависимыми и независимыми?

11. Что называется условной вероятностью?

12. Сформулировать определение суммы случайных событий. Вероятность суммы несовместных и совместных события.

13. Сформулировать определение произведения событий. Вероятность произведения событий.

14. Сформулировать определение противоположных событий. Чему равна сумма противоположных событий?

15. В каких задачах используются формула полной вероятности и формула Байеса?

16. Повторение независимых испытаний Формулы Бернулли и Пуассона. Локальная теорема Муавра-Лапласа. В каких ситуациях применяются эти формулы?

17. Какая величина называется случайной? Виды случайных величин.

18. Понятие дискретной случайной величины. Закон распределения и способы его задания.

19. Понятие непрерывной случайной величины.

20. Функция распределения случайной величины, её свойства.

21. Функция плотность распределения случайной величины, её свойства.

22. Как вычислить вероятность $P(\alpha < X < \beta)$?

23. Какова зависимость между функциями $f(x)$ и $F(x)$?

24. Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение мода.

25. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

26. Законы распределения дискретных случайных величин.

27. Законы распределения непрерывных случайных величин.

2.9. Тест «Теория вероятностей»

1. Возникновение или преднамеренное создание определённого комплекса условий S, результатом которого является тот или иной исход, называется …

1)	Испытанием	4)	Опытом
2)	Событием	5)	Сочетанием
3)	Вероятностью	6)	Экспериментом

2. Испытанием являются…

1) Подбрасывание игральной кости
2) Выпадение орла при подбрасывании монеты
3) Вытаскивание шара из урны, в которой три чёрных и семь белых шаров
4) Выстрел по мишени
5) Увеличение курса доллара в следующем месяце

3. Событием являются…

1) Выигрыш по лотерейному билету
2) Вытаскивание игральной карты из колоды в 36 карт
3) Подбрасывание монеты
4) Выпадение двух очков при подбрасывании игральной кости
5) Промах при выстреле по мишени

4. Рассмотрим испытание: подбрасывается игральная кость.
События: A – выпало 3 очка и B – выпало нечётное число очков являются:

1)	Несовместными	4)	Равновозможными
2)	Совместными	5)	Единственно возможными
3)	Противоположными		

5. Рассмотрим испытание: из урны, содержащей 3 белых и 7 чёрных шаров, достают наугад один шар.
События: А – достали белый шар и В – достали чёрный шар являются:

1) Несовместными
2) Совместными
3) Противоположными
4) Равновозможными
5) Единственно возможными

6. События называются ____________, если в результате испытания по условиям симметрии ни одно из них не является объективно более возможным.

1) Несовместными
2) Совместными
3) Противоположными
4) Равновозможными
5) Единственно возможными

7. События называются ____________, если наступление одного из них исключает появление любого другого.

1) Несовместными
2) Совместными
3) Противоположными
4) Равновозможными
5) Единственно возможными

8. Несколько событий образуют полную группу событий, если они являются _____________ и __________________ исходами испытания.

1) Несовместными
2) Совместными
3) Противоположными
4) Равновозможными
5) Единственно возможными
6) Достоверными

9. Вероятность достоверного события равна …

10. Вероятность невозможного события равна …

11. Известно, что P(A) = 0,65. Вероятность противоположного события равна …

12. В урне 12 белых и 8 чёрных шаров. Вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым равна…

13. В квадрат со стороной наудачу брошена точка. Вероятность того, что эта точка попадёт в круг, вписанный в квадрат, равна …

14. Количество способов, которыми читатель может выбрать 4 книги из 11, равно

1) 353 2) 330 3) 341 4) 326

15. Количество способов, которыми можно выбрать 2 карты из колоды в 36 карт, равно…

16. Количество различных трёхзначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, равно…

17. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу равна …

18. Сумма вероятностей противоположных событий равна …

19. Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,9 и 0,4 соответственно. Вероятность того, что в цель попадут оба стрелка, равна …

1) 0,5 2) 0,4 3) 0,45 4) 0,36

20. Урна содержит 6 белых и 9 чёрных шаров. Вероятность достать первым белый шар, а вторым чёрный, равна (шар в урну не возвращается)

1) 6/25 2) 3/5 3) 9/35 4) 2/5

21. В урне находятся 1 белый и 2 чёрных шара. Из урны поочередно вынимают два шара, но после чего первый вынутый шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются. Тогда вероятность того, что оба шара белые, равна …

1) 2/9 2) 1/6 3) 2/3 4) 1/9

22. В урне 4 белых и 6 чёрных шаров. Из урны достали три шара, не возвращая шары обратно в урну. Вероятность того, что все шары белые, равна…

23. Монета подбрасывается два раза. Событие А – первый раз выпал герб, событие В – хотя бы 1 раз выпала решка. Условная вероятность равна …

24. Бросают две монеты. Событие А – герб выпал на первой монете; событие В – герб выпал на второй монете. Вероятность события А+В равна…

25. Два события А и В называются _________, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого

1) Зависимыми
2) Независимыми
3) Совместными
4) Несовместными
5) Равновозможными
6) Противоположными

26. В первой урне 4 чёрных и 6 белых шаров. Во второй урне 3 белых и 7 чёрных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна…

1) 0,45 2) 0,15 3) 0,4 4) 0,9

27. Событие А может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий и, образующих полную группу событий. Известны вероятность и условные вероятности. Тогда вероятность равна …

1) 3/4 2) 1/2 3) 1/3 4) 2/3

28. В первой урне 4 белых и 6 чёрных шаров, во второй урне 8 белых и 2 чёрных шара. Из наугад выбранной урны достали белый шар. Вероятность того, что белый шар достали из первой урны, равна …

1) 0,4 2) 1/3 3) 0,6 4) 2/3 5) 0,8

29. Если произошло событие А, которое может появиться только с одной из гипотез H1, H2, …, Hn, образующих полную группу событий, то произвести количественную переоценку априорных (известных до испытания) вероятностей гипотез можно по …

1) Формуле полной вероятности
2) Формуле Байеса
3) Формуле Бернулли
4) Формуле Пуассона
5) Формуле Муавра-Лапласа

30. Формулой Пуассона целесообразно пользоваться, если …

1) $n = 500, p = 0{,}4$ *3)* $n = 100, p = 0{,}02$ 5) $n = 3, p = 0{,}5$

2) $n = 500$, p = 0,003 4) $n = 100, p = 0{,}5$ 6) $n = 3, p = 0{,}05$

31. Теоремами Муавра-Лапласа целесообразно пользоваться, если …

1) $n = 500, p = 0{,}4$ 3) $n = 100, p = 0{,}02$ 5) $n = 3, p = 0{,}5$

2) $n = 500, p = 0{,}003$ 4) $n = 100, p = 0{,}5$ 6) $n = 3, p = 0{,}05$

32. Монету подбросили 100 раз. Для определения вероятности того, что событие A – появление герба – наступит ровно 70 раз, целесообразно воспользоваться…

1) Формулой полной вероятности
2) Формулой Байеса
3) Формулой Пуассона
4) Локальной теоремой Муавра-Лапласа
5) Интегральной теоремой Муавра-Лапласа

33. Укажите дискретные случайные величины

1) Число очков, выпавшее при подбрасывании игральной кости
2) Дальность полёта артиллерийского снаряда
3) Количество произведённых выстрелов до первого попадания
4) Расход электроэнергии на предприятии за месяц
5) Рост студента
6) Оценка, полученная студентом на экзамене по теории вероятностей

34. Укажите непрерывные случайные величины

1) Число детей, родившихся в течение суток
2) Температура воздуха
3) Количество произведенных выстрелов до первого попадания
4) Расход электроэнергии на предприятии за месяц
5) Рост студента
6) Оценка, полученная студентом на экзамене по теории вероятностей

35. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрываются пять выигрышей по 500 рублей, пять выигрышей по 400 рублей и десять выигрышей по 100 рублей. Если X – сумма выигрыша владельца одного лотерейного билета, то вероятность события равна …

36. Задан ряд распределения случайной величины X:

X	-1	0	1
P	0,1	?	0,3

Значение равно …

37. Из урны достают два шара. Случайная величина X – количество белых шаров, которые достали из урны. Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

X	0	1	2
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

Укажите условия, соответствующие ряду распределения случайной величины

1) В урне 5 белых и 5 чёрных шаров, шары доставали без возвращений

2) В урне 5 белых и 5 чёрных шаров, шары доставали с возвращением

3 В урне 1 белый и 9 чёрных шаров, шары доставали без возвращений

4) В урне 1 белый и 9 чёрных шаров, шары доставали с возвращением

5) В урне 2 белых и 8 чёрных шаров, шары доставали без возвращений

6) В урне 2 белых и 8 чёрных шаров, шары доставали с возвращением

38. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	–2	0	5
P	0,2	0,3	0,5

Математическое ожидание $M(X)$ равно…

39. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	–1	5
P	0,4	0,6

Тогда дисперсия этой случайной величины равна …

1) 15,4 2) 8,64 3) 2,6 4) 2,93

40. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	–1	5
P	0,4	0,6

Тогда среднее квадратическое отклонение этой случайной величины примерно равно …

1) 15,4 2) 8,64 3) 2,6 4) 2,93

41. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрываются пять выигрышей по 500 рублей, пять выигрышей по 400 рублей и десять выигрышей по 100 рублей. Математическое ожидание выигрыша по одному лотерейному билету равно…

42. Стрелок стреляет по мишени 5 раз. Случайная величина X – количество попаданий в мишень. Значение $F(6)$ равно …

43. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид…

Плотность вероятности этой случайной величины на промежутке $1 <$ $< x \leq 2$ равна …

44. Случайная величина задана плотностью распределения в интервале (0; 1); вне этого интервала. Вероятность равна …

45. Случайная величина задана плотностью распределения в интервале (0; 1); вне этого интервала. Математическое ожидание величины X равно …
1) 1/2 2) 1 3) 4/3 4) 2/3

46. Непрерывная случайная величина равномерно распределена на отрезке. Вероятность равна …
1) 11/322) 5/16 3) 10/314) 11/31

2.10. Задачи
Непосредственный подсчёт вероятностей

2.1. В группе 25 студентов, среди которых 5 отличников. Произвольно выбрали 15 студентов. Найти вероятность следующего события A: среди выбранных студентов ровно 3 отличника.
2.2. Автомат, изготавливающий однотипные детали, даёт в среднем 5% брака. Из большой партии взята наудачу одна деталь для контроля. Найти вероятность того, что она бракованная.

2.3**.** В магазин поступило 15 компьютеров, среди которых три имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что выбранный наудачу компьютер не имеет скрытых дефектов.

2.4. В урне 6 белых и 5 чёрных шара. Из урны вынимают одновременно 5 шаров. Найти вероятность, что среди них имеется:

а) P =3 белых шаров;

б) меньше, чем P = 3, белых шаров.

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

2.5. Устройство состоит из 3 независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно соответственно с вероятностями p_1=0,88, p_2=0,78, p_3=0,73. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя:

а) только 1 элемент;

б) хотя бы один элемент.

Формула полной вероятности и формула Бейеса

2.6. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев, ненормальный – в 20%. Вероятность выхода из строя прибора в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном режиме – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя.

2.7. В партии n = 4 бракованных изделий. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание n = 6 раз изделий:

а) не окажется ни одного бракованного;

б) будет m = 3 бракованных;

в) не более $m \leq 3$ бракованных изделий?

2.8. На заводе рабочий за смену изготовляет n = 400 деталей. Вероятность того, что деталь окажется 1-го сорта равна p = 0,9. Какова вероятность того, что рабочий за смену изготовит:

а) не менее k_1 = 345, но не более k_2 = 372 деталей 1-го сорта;

б) k = 350 деталей 1-го сорта?

2.9. Дан закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$

X	24	26	28	30
P	0,2	0,2	0,5	0,1

2.10. Дан закон распределения дискретной случайной величины X. Найти интегральную функцию.

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,25	0,3	0,25	0,1

2.11. Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A проявляется с постоянной вероятностью $P(0 \leq P \leq 1)$. Написать для числа появления события A в этих испытаниях:

а) биномиальный закон распределения (n = 4, p = 0.7);

б) распределение Пуассона (n = 300, p = 0.02).

2.12. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(X)$.

Требуется :

а) найти функцию плотности f(X);

б) найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение;

в) найти вероятность того, что X примет значение, заключённое в интервале (a,b); построить графики функций $F(X)$, $f(X)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{4}(x+1), & -1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

$a = -1$; $b = 2$.

2.13**.** Случайная величина X распределена по нормальному закону $M(X) = a = 40$, $\sigma(X) = \sigma = 15$.

Найти вероятность того, что

а) X примет значение, принадлежащее интервалу (c;d)=(20;60);

б) отклонение по абсолютной величине будет меньше $\alpha=2$.

2.11. Ответы

2.1. $\approx 0{,}0296$

2.2. 0,05

2.3. 0,8

2.4. а) $p_1 = \frac{100}{231}$; б) $p_2 = \frac{181}{462}$; в) $p_3 = \frac{461}{462}$.

2.5. а) $p_1 = 0{,}414311$; б) $p_2 = 0{,}992872$.

2.6. $P(A) = 0{,}22$.

2.7. а) $P_6(0) \approx 0{,}78$; б) $P_6(3) \approx 0{,}001$; в) $P_6(\le 3) = 0{,}996$.

2.8. а) $P(345{,}372) = 0{,}971$; б) $P(350) = 0{,}016$.

2.9. $M(X) = 27$; $D(X) = 3{,}4$; $\sigma(X) = 1{,}8$.

$$2.10.\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0{,}1, & 1 < x \le 3, \\ 0{,}35, & 3 < x \le 5, \\ 0{,}65, & 5 < x \le 7, \\ 0{,}9, & 7 < x \le 9, \\ 1, & x \ge 9. \end{cases}$$

2.11. а)

X	0	1	2	3	4
p	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

б)

X	0	1	2	…	300
P	$\frac{1}{e^6}$	$\frac{6}{e^6}$	$\frac{36}{2e^6}$		$\frac{6^{300}}{300!\,e^6}$

2.12. а) $f(X) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3, \end{cases}$

б) $M(X) = 1$; $D(X) = \frac{4}{3}$, $\sigma(X) \approx 1{,}15$,

в) $P(-1 < x < 2) = 0{,}75$.

2.13. а) $P(20 < x < 60) = 0{,}8164$;

б) $P(|X - 40| < 2) \approx 0{,}1034$.

.

2.12. Задания для контрольной работы

1. Решить задачу, используя классическое определение вероятности

1.1. Студенческая группа из 12 девушек и 8 юношей выбирает старосту и профорга. Какова вероятность выбрать двух юношей?

1.2. Из колоды в 36 карт берут наугад 2 карты. Какова вероятность, что они окажутся одинакового цвета?

1.3. В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наугад отобраны 3 человека. Какова вероятность, что они мужчины?

1.4. В магазин поступило 30 холодильников, пять из них имеют заводской дефект. Случайным образом выбирается один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

1.5. Комиссия по качеству раз в месяц проверяет качество продуктов в двух из 30 магазинов, среди которых находятся и два известных вам магазина. Какова вероятность того, что в течение месяца они оба будут проверены?

1.6. Изготовлена партия из 200 изделий, в которой оказалось три бракованных. Произведена выборка из пяти изделий. Найти вероятность того, что в выборке не будет ни одного бракованного изделия.

1.7. Из 20 акционерных обществ (АО) четыре являются банкротами. Гражданин приобрёл по одной акции шести АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротов?

1.8. Из 100 изготовленных деталей 10 имеют дефект. Для проверки были отобраны пять деталей. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей две окажутся бракованными?

1.9. На склад привезли 50 ящиков комплектующих изделий для одного из видов ЭВМ, но среди них оказалось четыре ящика комплектующих для другого вида ЭВМ. Наудачу взяли шесть ящиков. Найти вероятность того, что в одном из этих шести ящиков окажутся некомплектные детали.

1.10. В партии из 15 однотипных стиральных машин пять машин изготовлены на заводе А, а 10 – на заводе В. Случайным образом отобрано 5 машин. Найти вероятность того, что две из них изготовлены на заводе А.

2. Решить задачу, используя теоремы сложения и умножения вероятностей

2.1. Вероятность правильного оформления счёта на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счёта. Какова вероятность того, что только один из них оформлен правильно?

2.2. Вероятность для компании, занимающейся строительством терминалов для аэропортов, получить контракт в стране А равна 0,4, вероятность выиграть его в стране В равна 0,3. Чему равна вероятность того, что компания получит контракт хотя бы в одной стране?

2.3. Покупатель может приобрести акции 2 компаний А и В. Надежность 1-й оценивается экспертами на уровне 90%, а 2-й – 80%. Чему равна вероятность того, что обе компании в течение года не станут банкротами?

2.4. Покупатель может приобрести акции 2 компаний А и В. Надежность 1-й оценивается экспертами на уровне 90%, а 2-й – 80%. Чему равна вероятность того, что в течение года наступит хоть одно банкротство?

2.5. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найти вероятность того, что из трёх накладных только две оформлены правильно.

2.6. На сахарном заводе один из цехов производит рафинад. Контроль качества обнаружил, что 1 из 100 кусочков сахара разбит. Если вы случайным образом извлекаете 2 кусочка сахара, чему равна вероятность того, что, по крайней мере, 1 из них будет разбит? Предполагаем независимость событий, это предположение справедливо вследствие случайности отбора.

2.7. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05, от второго – 0,08. Найти вероятность сбоя в работе предприятия.
2.8. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.
2.9. Вероятность того, что книга имеется в 1-й библиотеке, равна 0,5, во второй – 0,7, в 3-й – 0,4. Какова вероятность наличия книги хотя бы в одной библиотеке?
2.10. Контролёр проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,9. Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

3. Решить задачу, используя формулы полной вероятности и Байеса

3.1. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,67. Вероятность того, что товар будет пользоваться спросом при наличии на рынке конкурирующего товара, равна 0,42. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит аналогичный товар на рынок в течение интересующего нас периода, равна 0,35. Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех?
3.2. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары

обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это туфли?

3.3. Вероятность того, что клиент банка не вернёт заём в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?

3.4. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.

3.5. Эксперт по туризму, нанятый компанией, организующей круизы, предсказывает, что вероятность того, что корабль будет полон в течение сезона, равна 0,92, если доллар не подорожает по отношению к рублю, и с вероятностью – 0,75, если доллар подорожает. По оценкам экономистов, вероятность того, что в течение сезона доллар подорожает по отношению к рублю, равна 0,23. Чему равна вероятность того, что билеты на все круизы будут проданы?

3.6. Таможенный досмотр автомашин осуществляют два инспектора. В среднем из каждых 100 машин 45 проходит через первого инспектора. Вероятность того, что при досмотре машина, соответствующая таможенным правилам, не будет задержана, составляет 0,95 у первого инспектора и 0,85 у второго. Машина, соответствующая таможенным правилам, не была задержана. Найти вероятность того, что она прошла досмотр у первого инспектора.

3.7. Результаты исследований показали, что 70% женщин позитивно реагируют на изучаемый круг ситуаций, в то время как 40% мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили своё отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлечённая анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность того, что её заполнял мужчина?

3.8. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем ¾ продукции с процентом брака 4%, вторая ¼ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие:

а) окажется бракованным;

б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

3.9. Экономист полагает, что в течение периода активного экономического роста американский доллар будет расти в цене с вероятностью 0,7, в период умеренного экономического роста он подорожает с вероятностью 0,4 и при низких темпах экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0,2. В течение любого периода времени вероятность активного экономического роста – 0,3; умеренного – 0,5 и низкого – 0,2. Предположим, что доллар дорожает в течение текущего периода. Чему равна вероятность того, что анализируемый период совпал с периодом активного экономического роста?

3.10. 80% находящихся на складе пистолетов имеют точность 0,9, остальные – 0,7. Какова вероятность попадания в цель из наугад взятого на складе пистолета ?

4. Решить задачу, используя формулу Бернулли, формулы Муавра-Лапласа, Пуассона

4.1. Найти вероятность поражения цели при залповой стрельбе отделением из 5 солдат, если вероятность попадания в цель каждым солдатом составляет 0,5.

4.2. Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент товара в каждом магазине формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ в двух магазинах.

4.3. Вероятность обращения в банк клиента за возвращением депозита равна 0,3. Найти вероятность того, что из 100 клиентов, посетивших банк, ровно 30 потребуют возврата депозита.

4.4. Обувной магазин продал 200 пар обуви. Вероятность того, что в магазин будет возвращена бракованная пара, равна 0,01. Найти вероятность того, что из проданных пар обуви будет возвращено 4 пары.

4.5. Производится 100 независимых выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле 0,8. Какова вероятность, что будет не менее 90 попаданий?

4.6. Вероятность промаха при одном выстреле 0,1. Какова вероятность , что из 50 выстрелов будет не более пяти промахов?

4.7. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажут три замка.

4.8. На станциях отправления поездов находится 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,004. Какова вероятность, того, что в течение часа из строя выйдут два автомата?

4.9. Тираж календаря 50 тыс. экземпляров. Вероятность брака в одном календаре равна 0,0003. Найти вероятность содержания в тираже 10 бракованных календарей.

4.10. Вероятность того, что каждому из четырёх покупателей потребуется холодильник марки «А», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется всем четырём покупателям.

5. Случайные величины

5.1. В коробке 20 одинаковых катушек ниток, из них – 4 катушки с белыми нитками. Наудачу вынимают 2 катушки. Найти закон распределения и числовые характеристики числа катушек с белыми нитками среди вынутых.
5.2. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Найти закон распределения и числовые характеристики числа попаданий мяча в корзину.
5.3. Устройство состоит их трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента 0,1. Найти закон распределения и числовые характеристики числа отказавших элементов.
5.4. Вероятность сбоя в работе АТС равна 0,1. Найти закон распределения и числовые характеристики числа сбоев, если в данный момент поступило 3 вызова.
5.5. Вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение представлены 3 баланса предприятия. Найти закон распределения и числовые характеристики числа положительных заключений на проверяемые балансы.
5.6. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 выигрышных. Наудачу покупают 2 билета. Найти закон распределения и числовые характеристики числа выигрышных билетов среди купленных.
5.7. Вероятность брака при изготовлении детали данного вида 2%. Найти закон распределения и числовые характеристики числа бракованных деталей из трёх наугад взятых.

5.8. Вероятность успеха при одном испытании равна 0,8. Найти закон распределения и числовые характеристики числа успехов в серии из трёх независимых испытаний.
5.9. Считая равновероятным рождение мальчика и девочки, найти закон распределения и числовые характеристики числа мальчиков в семье, имеющей 3 детей.
5.10. В городе 3 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10%. Найти закон распределения и числовые характеристики числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года.

6. Законы распределения

6.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [1,6]. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию.
6.2. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса – распределена равномерно, найти среднее время ожидания и среднее квадратичное отклонение случайной величины.
6.3. Паром для перевозки автомашин через залив подходит к причалу через каждые два часа. Считая, что время прибытия автомашин – случайная величина X – распределена равномерно, определить среднее время ожидания автомашиной прихода парома и дисперсию времени ожидания.
6.4. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашни составляет 80 кг, а среднее квадратичное отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределённой случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98.

6.5. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 48 у.е., и средним квадратичным отклонением, равным 6. Определите вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена за акцию была: а) между 40 и 50 у.е. за акцию; б) более 60 у.е. за акцию.

6.6. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметр X. Считая, что X распределена нормально, $M(X)$ = 10 мм, $\sigma(X)$ = 0,1 мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

6.7. Отклонение стрелки компаса из-за влияния магнитного поля в определенной области Заполярья есть нормальная случайная величина с параметрами (0,1). Чему равна вероятность того, что абсолютная величина отклонения в определённый момент времени будет больше, чем 2,4 ?

6.8. Математическое ожидание нормально распределённой случайной величины – количества сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, – равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратическое отклонение расхода сыра на 100 бутербродов.

6.9. Размер серийно изготавливаемой детали – нормальная случайная величина с параметрами a = 40 мм (ГОСТ), σ = 0,04 мм. Какова вероятность, что размер детали лежит в пределах 39,94 – 40,06?

6.10. Размер серийно изготавливаемой детали – нормальная случайная величина с параметрами a = 60 микрон (ГОСТ), σ = 1 микрон. Какова вероятность, что размер детали лежит в пределах 58 – 62 микронов?

2.13. Образцы решения контрольных заданий

Непосредственное вычисление вероятностей

Для непосредственного вычисления вероятности используются её классическое определение и формулы комбинаторики.

Пример 1. Автомат, изготавливающий однотипные детали, даёт в среднем 6% брака. Из большой партии взята наудачу одна деталь для контроля. Найти вероятность того, что она бракованная.

Решение**.** Пусть событие A – деталь бракованная. В этом испытании числом всех равновозможных исходов является число всех деталей, изготовляемых автоматом, то есть 100%. Благоприятствовать интересующему нас событию A будут бракованные детали, то есть m = 6%. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6\%}{100\%} = 0{,}06\,.$$

Пример 2. В группе 20 студентов, среди которых 5 отличников. Произвольно выбрали 10 студентов. Найти вероятность следующего события A: среди выбранных студентов ровно 2 отличника.

Решение. Возможными исходами нашего испытания являются комбинации из 20 студентов по 10, отличающиеся лишь составом, то есть являются сочетаниями, и их число $n = C_{20}^{10}$. Интересующему нас событию A будут благоприятствовать только те комбинации, в которых ровно 2 отличника. Поэтому $m = C_5^2 \cdot C_{15}^8$. Откуда получаем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^8}{C_{20}^{10}} =$$

$$= \frac{\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{15!}{8!\cdot 7!}}{\frac{20!}{10!\cdot 10!}} = \frac{10!\cdot 15!\cdot 10!\cdot 10}{8!\cdot 7!\cdot 20!} = \frac{10\cdot 9\cdot 10\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20} = \frac{225}{646} \approx 0{,}34\,.$$

Пример 3. По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник лотереи, угадавший 4,5,6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает денежный приз. Найдите вероятность того, что будут угаданы: а) все 6 цифр; б) 4 цифры.

Решение**.** а) Пусть событие A – угадывание всех 6 видов спорта из 45. Возможными исходами нашего испытания являются комбинации из 45 цифр по 6, отличающиеся составом, то есть являются сочетаниями и их число $n = C_{45}^{6}$. Интересующему нас событию A благоприятствовать, очевидно, будет одна комбинация, то есть $m = 1$. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{C_{45}^{6}} = \frac{6!\cdot 39!}{45!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{40\cdot 41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45} \approx 0{,}0000001.$$

б) Пусть событие B – угадывание 4 видов спорта из 6, выигравших из 45. Очевидно, число всевозможных исходов нашего эксперимента, как и в случае а) равно $n = C_{45}^{6}$. Благоприятствовать событию B будут комбинации, в которых 4 цифры будут из 6 выигравших, а 2 цифры из не выигравших 45 – 6 = 39. Таких комбинаций будет $m = C_6^4 \cdot C_{39}^2$. Итак

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^4 \cdot C_{39}^2}{C_{45}^6} = \frac{6!\cdot 39!\cdot 6!\cdot 39!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 37!\cdot 45!} =$$

$$= \frac{5\cdot 6\cdot 38\cdot 39\cdot 6!}{4\cdot 40\cdot 41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45} = \frac{5\cdot 3\cdot 38\cdot 39}{7\cdot 15\cdot 41\cdot 43\cdot 44} = \frac{19\cdot 39}{44\cdot 41\cdot 43\cdot 7} \approx 0{,}00136.$$

Действия над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Пример 4. Среди 15 лампочек 4 стандартных. Одновременно берут наудачу 2 лампочки. Найти вероятность того, что: а) обе лампочки нестандартные; б) хотя бы одна из них нестандартная.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что обе вынутые лампочки нестандартные. Обозначим через B_1 событие, состоящее в том, что первая извлечённая лампа нестандартная, через B_2 – вторая извлечённая лампа нестандартная. Тогда,

$$P(A) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1)P(B_2 / B_1) = \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{21}.$$

Пусть событие C – хотя бы одна из взятых ламп нестандартная. Тогда противоположное событие $\overline{C}$ означает, что обе взятые лампы стандартные, следовательно,

$C = (\overline{B_1} \cdot \overline{B_2})$, откуда получаем

$$\cdot P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{B_1} \cdot \overline{B_2}) =$$

$$= 1 - P(\overline{B_1})\, P(\overline{B_1} / \overline{B_2}) = 1 - \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} = 1 - \frac{2}{35} = \frac{33}{35}.$$

Пример 5. Диспетчер принимает вызовы с трёх объектов, функционирующих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены придёт вызов с первого объекта, равна 0,6; со второго – 0,5; с третьего – 0,2. Найти вероятность того, что в течение смены придёт вызов: а) со всех объектов; б) хотя бы с одного объекта.

Решение**.** а) Пусть событие A – в течение смены придёт вызов со всех объектов. Обозначим через B_1 – придёт вызов с первого объекта, B_2 – со второго, B_3 – с третьего. Тогда, очевидно, имеем с учётом независимости событий B_1, B_2 и B_3:

$$P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3) =$$

$$= P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

б) Пусть событие C – хотя бы с одного объекта в течение смены придёт вызов. Тогда противоположное событие $\overline{C}$ означает, что в течение смены ни с одного объекта вызова не поступит, следовательно

$\overline{C} = \overline{B_1}\ \overline{B_2}\,\overline{B_3}$, причём $P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $P(\overline{B_2}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$,

$P(\overline{B_3}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Тогда, получим $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}) =$

$$= 1 - P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})P(\overline{B_3}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 1 - 0{,}16 = 0{,}84.$$

Пример 6. Пакеты акций, имеющихся на рынке ценных бумаг, могут дать доход владельцу с вероятностью 0,5 (для каждого пакета). Сколько пакетов акций различных фирм нужно приобрести, чтобы с вероятностью, не меньше 0,96875, можно было бы ожидать доход хотя бы по одному пакету акций?

Решение. Обозначим через n – количество пакетов акций различных фирм, которое рекомендуется приобрести, через событие A_i – получение дохода от i-й фирмы (i = 1, 2, …, n). Тогда вероятность события B, состоящего в получении дохода хотя бы по одному пакету акций, может быть найдена следующим образом:

$$P(B) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) = 1 - (1-p)\ldots(1-p) = 1-(1-p)^n,$$

где $p = p\ (A_i) = 0{,}5$,

и, следовательно,

$$P\ (B) = 1 - (1 - 0{,}5)^n = 1 - 0{,}5^n.$$

С другой стороны, согласно условию $P\ (B) \geq 0{,}96875$, откуда

$1 - 0{,}5^n \geq 0{,}96875$ или

$1 - 0{,}96875 \geq 0{,}5^n$

$0{,}5^n \leq 0{,}03125$.

Подбором находим, что минимальное целое число, удовлетворяющее этому неравенству равно 5, то есть $n \geq 5$. Следовательно, нужно приобрести не менее 5 пакетов акций.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пример 7. В торговую фирму поступили телевизоры от трёх поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры, поступившие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98%, 88% и 92% случаев.

1. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

2. Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

Решение. 1. Обозначим: событие A – телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока. Введём три гипотезы: H_i – телевизор поступил в торговую фирму от i-го поставщика (i = 1,2,3).

По условию

$$P(H_1) = \frac{1}{1+4+5} = 0{,}1; \qquad P(A/H_1) = 0{,}98;$$

$$P(H_2) = \frac{4}{1+4+5} = 0{,}4; \qquad P(A/H_1) = 0{,}88;$$

$$P(H_3) = \frac{5}{1+4+5} = 0{,}5; \qquad P(A/H_1) = 0{,}92.$$

Тогда по формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 + 0{,}4 \cdot 0{,}88 + 0{,}5 \cdot 0{,}92 = 0{,}91.$$

2. Известна дополнительная информация: наступило событие $\overline{A}$ – телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. Требуется найти вероятности гипотез, причём по условию:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}91 = 0{,}09.$$

$$P(\overline{A}/H_1) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02;$$

$$P(\overline{A}/H_2) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12;$$

$$P(\overline{A}/H_3) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08.$$

Следовательно, по формуле Байеса имеем

$$P(H_1/\overline{A}) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}02}{0{,}09} = 0{,}022;$$

$$P(H_2/\overline{A}) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}12}{0{,}09} = 0{,}533;$$

$$P(H_3/\overline{A}) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}08}{0{,}09} = 0{,}444.$$

Таким образом, после наступления события $\overline{A}$ вероятность гипотезы H_2 увеличивается с $P(H_2)$ = 0,4 до максимальной $P(H_2/\overline{A})=0{,}533$, а гипотеза H_3 – уменьшается от максимальной $P(H_3)$ = 0,5 до $P(H_3/\overline{A})=0{,}444$; если ранее (до наступления события $\overline{A}$) наиболее вероятной была гипотеза H_3, то теперь, в свете новой информации, наиболее вероятна гипотеза H_2 – поступления телевизора от 2-го поставщика.

Схема с повторением испытаний

Пример 8. В среднем каждый десятый договор страховой компании завершается выплатой по страховому случаю. Компания заключила 5 договоров. Найти вероятность того, что страховой случай наступит:
а) один раз; б) хотя бы один раз.

Решение. Здесь успех – событие A: наступление страхового случая. Независимыми испытаниями являются заключение договоров, их $n = 5$. k – число успехов, тогда, очевидно,

$$p=P(A)=\frac{1}{10},\ q=1-p=\frac{9}{10},\ n=5.$$

а) По формуле Бернулли имеем

$$P(X=1)=C_5^1\left(\frac{1}{10}\right)^1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^4=\frac{5!\cdot 9^4}{1!\cdot 4!\cdot 10^5}=\frac{5\cdot 9^4}{10^5}=\frac{32805}{10^5}=0{,}32805,$$

б) $P(X\geq 1)=1-P(\overline{X\geq 1})=1-P(X<1)=1-P(X=0)=$

$$=1-C_5^0\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^5=1-\frac{9^5}{10^5}=1-\frac{59049}{10^5}=1-0{,}059049=0{,}41951.$$

Пример 9. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушение финансовой дисциплины: а) не менее 480; б) от 480 до 520; в) 480 предприятий.

Решение. Здесь успех – нарушение финансовой дисциплины, X – число успехов. По условию p = 0,5. Так как n = 1000 достаточно велико, то применяем интегральную форму Муавра-Лапласа :

а) $P(X \geq 480) = P(480 \leq X \leq 1000) = \Phi\left(\frac{1000 - 1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) -$

$$-\Phi\left(\frac{480 - 1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) = \Phi(31{,}6) - \Phi(-1{,}265) = \Phi(31{,}6) + \Phi(1{,}265) =$$

$$= 0{,}5 + 0{,}3962 = 0.8962.$$

б) $P(480 \leq X \leq 520) = \Phi\left(\frac{520 - 1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) - \Phi\left(\frac{480 - 1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)$

$= \Phi(\frac{20}{\sqrt{250}}) - \Phi(\frac{-20}{\sqrt{250}})$ $=2\ \Phi(\frac{20}{\sqrt{250}})$ $=2\ \Phi(1{,}265) = 2\cdot 0{,}3962 = =0{,}7924.$

в) Применим локальную формулу Муавра-Лапласа

$$P(X = 480) = \frac{1}{\sqrt{1000\,0{,}5\cdot 0{,}5}}\varphi\left(\frac{480 - 1000\,0{,}5}{\sqrt{1000\,0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{250}}\varphi\left(-\frac{20}{\sqrt{250}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{250}}\varphi\left(\frac{20}{\sqrt{250}}\right) = \frac{1}{\sqrt{250}}\varphi(1{,}265) = \frac{0{,}1792}{\sqrt{250}} = 0{,}0113\ .$$

Случайные величины

Пример 10. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «LG». Наудачу для осмотра выбраны 3. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «LG» среди 3 отобранных.

Решение. Пусть случайная величина X – число телевизоров фирмы «LG». Составим закон распределения этой случайной величины.

X	0	1	2	3
P	p_0	p_1	p_2	p_3

Для удобства введем следующие события: A_i – i-й отобранный телевизор фирмы «LG» (i = 1,2,3). Тогда

$$p_0 = P(X=0) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2 / \overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_3 / \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}.$$

$$p_1 = P(X=1) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) =$$
$$= P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2 / A_1) \cdot P(\overline{A}_3 / A_1 \cdot \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2 / \overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_3 / \overline{A}_1 \cdot A_2) +$$
$$+ P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2 / \overline{A}_1) \cdot P(A_3 / \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$p_2 = P(X=2) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(\overline{A}_3 / A_1 \cdot A_2) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot \overline{A}_2) +$$
$$+ P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2 / \overline{A}_1) \cdot P(A_3 / \overline{A}_1 \cdot A_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{10}.$$

$$p_3 = P(\xi = 3) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) =$$
$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}.$$

Окончательно имеем:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Проверим, что $\sum_{i=0}^{3} p_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 1$.

Пример 11. Имеются 4 ключа, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа попыток открывания замка. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение. Обозначим через X случайную величину, равную числу попыток открывания замка. Найдём её закон распределения.

X	1	2	3	4
P	p_1	p_2	p_3	p_4

Введём следующие события: A_i – замок открыт с i-й попытки ($i = 1,2,3,4$).
Тогда имеем:

$$p_1 = P(X=1) = P(A_1) = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = P(X=2) = P(\overline{A}_1 \cdot A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 / \overline{A}_1) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4};$$

$$p_3 = P(X=3) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)P(A_3/\overline{A}_2\cdot\overline{A}_1) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$p_4 = P(X=4) = P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot A_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)P(\overline{A}_3/\overline{A}_2\cdot\overline{A}_1)\times$$

$$\times P(A_4 / \overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Окончательно, имеем

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое найдем согласно определениям

$$M(X) = x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2 + x_3\cdot p_3 + x_4\cdot p_4 = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$D(X) = (x_1 - M(X)^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + (x_3 - M(X))^2 p_3 + (x_4 - M(X))^2 p_4 =$$

$$= \frac{(1{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (1{,}5)^2}{4} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25.$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}1.$$

Пример 12. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le \ 0; \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при} \quad 0 < x \le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) вероятности $P\ (X = 1)$, $P\ (X < 1)$, $P\ (1 \le X < 2)$; в) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

а) Плотность вероятности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0 \text{ и } \quad \text{при } x > 2; \\ \dfrac{x}{2} & \text{при} \quad\quad 0 < x \le 2. \end{cases}$$

б) $P\ (X = 1) = 0$ как вероятность отдельно взятого значения непрерывной случайной величины.

$P\ (X < 1)$ можно найти по определению функции распределения $F\ (x)$:

$$P\ (X < 1) = F\ (1) = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

$P\ (1 \le X \le 2)$ можно найти как приращение функции распределения по свойству функции $F\ (x)$:

$$P\ (1 \le X \le 2) = F(2) - F\ (1) = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = \frac{3}{4}.$$

в) Математическое ожидание находим по формуле

$$a = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{2} x\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 + 0 = \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}.$$

Дисперсию найдём, учитывая формулу

$$D(X) = M(X^2) \ - a^2.$$

Вначале найдём

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = 0 + \int_{0}^{2} x^2\left(\frac{x}{2}\right)dx + 0 = 2.$$

Теперь $D(X)=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$.

Пример 13. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ Cxe^{-x} & \text{при } x\geq 0.\end{cases}$$

При каком значении параметра C эта функция является плотностью распределения некоторой непрерывной случайной величины X? Для неё найти: а) функцию распределения $F(x)$; б) $P(|X|\leq 2)$.

Решение. Данная функция может являться плотностью распределения некоторой случайной величины, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

Из этого условия найдём константу C. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{\infty}Cxe^{-x}dx=0+C\int_{0}^{\infty}xe^{-x}dx=1.$$

Отсюда $C=\dfrac{1}{\int_{0}^{\infty}xe^{-x}dx}$.

Вычислим

$$\int_{0}^{\infty}xe^{-x}dx=\begin{vmatrix}x=u & e^{-x}dx=d\mathrm{v}\\ dx=du & \mathrm{v}=-e^{-x}\end{vmatrix}=$$

$$=-xe^{-x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-x}dx=-\frac{x}{e^x}\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{e^x}\Big|_0^{\infty}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}+1=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=1.$$

Следовательно, $C=1$.

а) функция распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt.$$

При $x\leq 0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0.$$

При $x > 0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}te^{-t}dt=-\frac{t}{e^t}\Big|_0^x-\frac{1}{e^t}\Big|_0^x=-xe^{-x}-e^{-x}+1=1-e^{-x}(x+1).$$

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\ \le 0;\\ 1-e^{-x}(x+1) & \text{при } x>0.\end{cases}$$

$$\text{б) } P(|X|\le 2)=P(-2\le X\le 2)=F(2)-F(-2)=$$
$$=1-e^{-2}(2+1)=1-\frac{3}{e^2}\approx\frac{2}{3}.$$

Основные законы распределения

Пример 14. Торговый агент связывается с пятью потенциальными покупателями, предлагая им товар своей фирмы. Опыт показывает, что вероятность заключения сделки – 0,15. Составить закон распределения случайной величины – количество сделок, которые удаётся заключить этому агенту, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Случайная величина X – число сделок, которые удаётся заключить агенту, имеет биноминальный закон распределения с параметрами $n = 5$, $p = 0{,}15$. Закон распределения X имеет вид

X	0	1	2	3	4	5
P	0,444	0,393	0,138	0,023	0,002	0,0001

Значения $p_к = P\ (X = k)$, (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) вычислены по формуле Бернулли $P(X_k)=\mathrm{C}_5^{\mathrm{k}}0{,}15^k0{,}85^{5-k}$.

Найдём математическое ожидание и дисперсию величины X по формулам:

$$M(X) = np = 5\cdot 0{,}15 = 0{,}75,$$

$$D(X) = npq = 5 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85 = 0{,}6375.$$

Пример 15. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за пять минут поступит: а) два вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов.

Решение. Случайная X – число вызовов, поступающих на АТС за пять минут, имеет пуассоновское распределение с параметром $a = \lambda\tau$, где λ – среднее число вызовов, поступающих на АТС за одну минуту, $\tau = 5$, следовательно, $a = 2 \cdot 5 = 10$.

Тогда по формуле Пуассона

$P(\mathrm{X} = k) = \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, имеем:

а) $P(\mathrm{X} = 2) = \dfrac{10^2}{2!}e^{-10} = 0{,}0023$;

б) $P(X < 2) = P(X = 0 \text{ или } X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1) =$

$$= \frac{10^0}{0!}e^{-10} + \frac{10}{1!}e^{-10} = e^{-10} + 10e^{-10} = 0{,}0001 + 0{,}0005 = 0{,}0006;$$

в) $P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0{,}0006 = 0{,}9994$.

Пример 16. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 минуты. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придётся не больше полминуты. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины k – времени ожидания поезда.

Решение. Случайная величина X – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке [0,2] имеет равномерный закон распределения, плотность вероятности которой равна:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x \in [0,2]; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Поэтому вероятность того, что пассажиру придётся ждать не более полминуты, равна:

$$P(X \le 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{0{,}5} = \frac{1}{4}.$$

Далее находим

$$M(X) = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ мин}, \quad D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3},$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58 \text{ мин.}$$

Пример 17. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X*, распределённая по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

Решение. По условию математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{\lambda} = 15$, откуда параметр $\lambda = \frac{1}{15}$. Следовательно, плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x}; \; F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{15}x} \quad (x \ge 0).$$

Искомую вероятность найдём, используя функцию распределения:

$$P(X \ge 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - F(20) = 1 - (1 - e^{-\frac{20}{15}} = e^{-\frac{20}{15}} \approx 0{,}264.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = 15 \text{ дней.}$$

Пример 18. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0{,}01t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 50$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение. Обозначим через T непрерывную случайную величину – длительность времени безотказной работы элемента. Функция распределения

$$F(t) = P(T < t)$$

определяет вероятность отказа элемента за время t, тогда вероятность безотказной работы элемента за время t

$$P\,(T > t) = 1 - F\,(t).$$

Отсюда получаем:

а) $P\,(T < 50) = F\,(50) = 1 - e^{-0{,}01 \cdot 50} = 1 - e^{-0{,}5} = 1 - 0{,}606 = 0{,}394$;

б) $P\,(T > 50) = 1 - F\,(50) = e^{-0{,}5} = 0{,}606$.

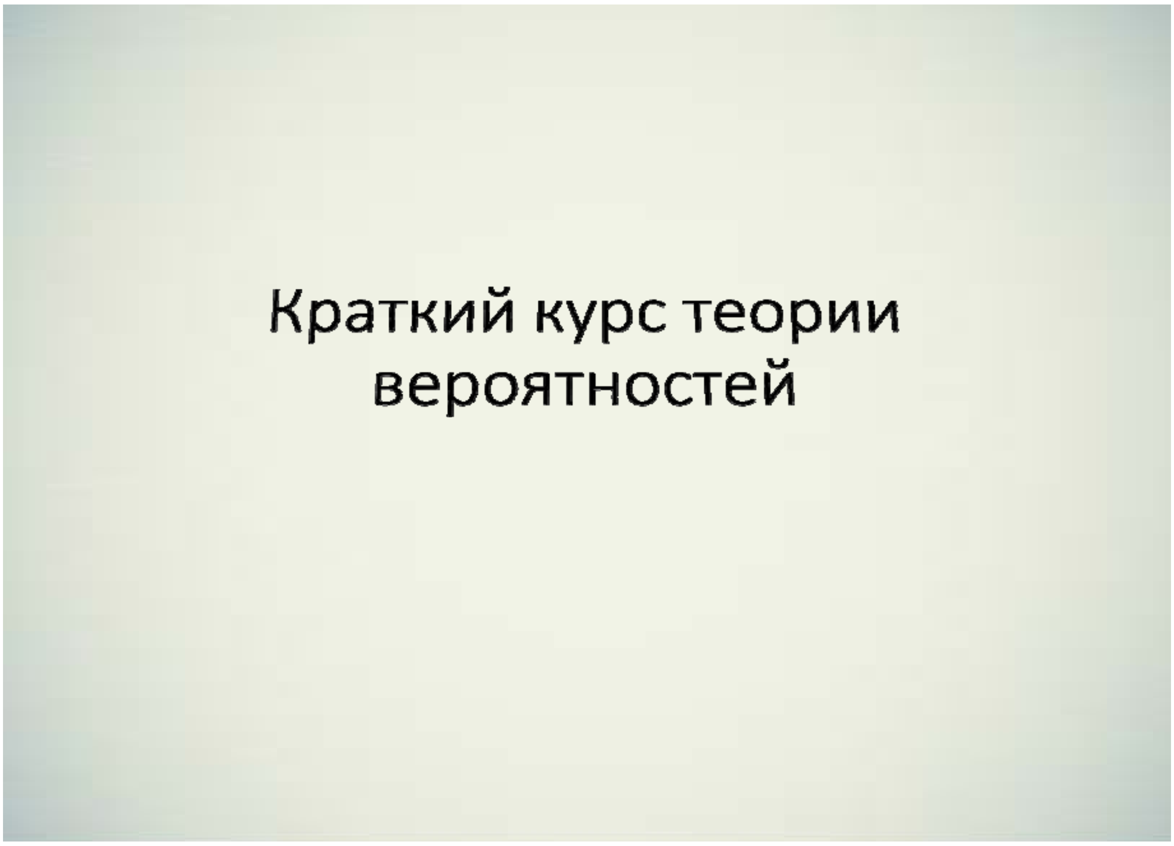
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

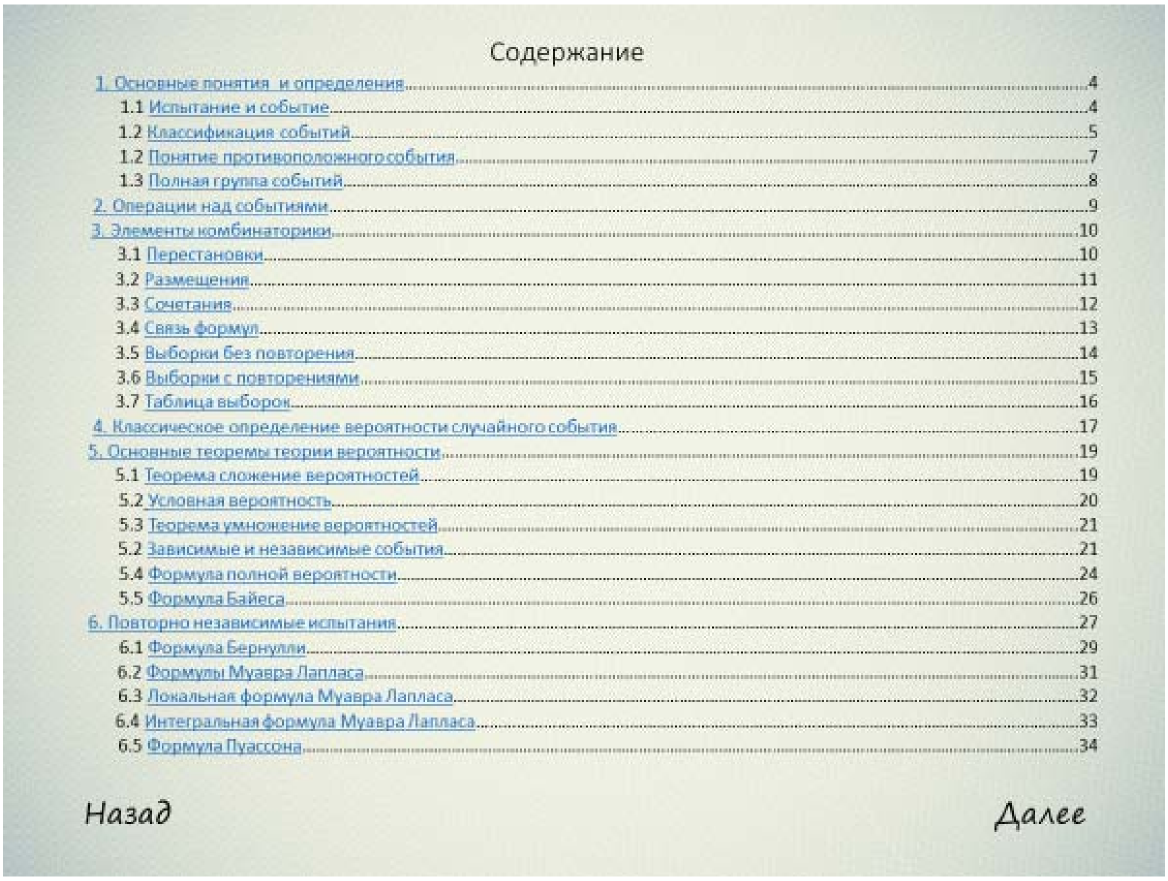
1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2016. – 479 с.
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман – 11-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2016. – 409 с.
3. Романовский, Р. К. Элементы теории вероятностей и математической статистики (теория и задачи) / Р. К. Романовский, А. М. Романовская – Омск : Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2003. – 172 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

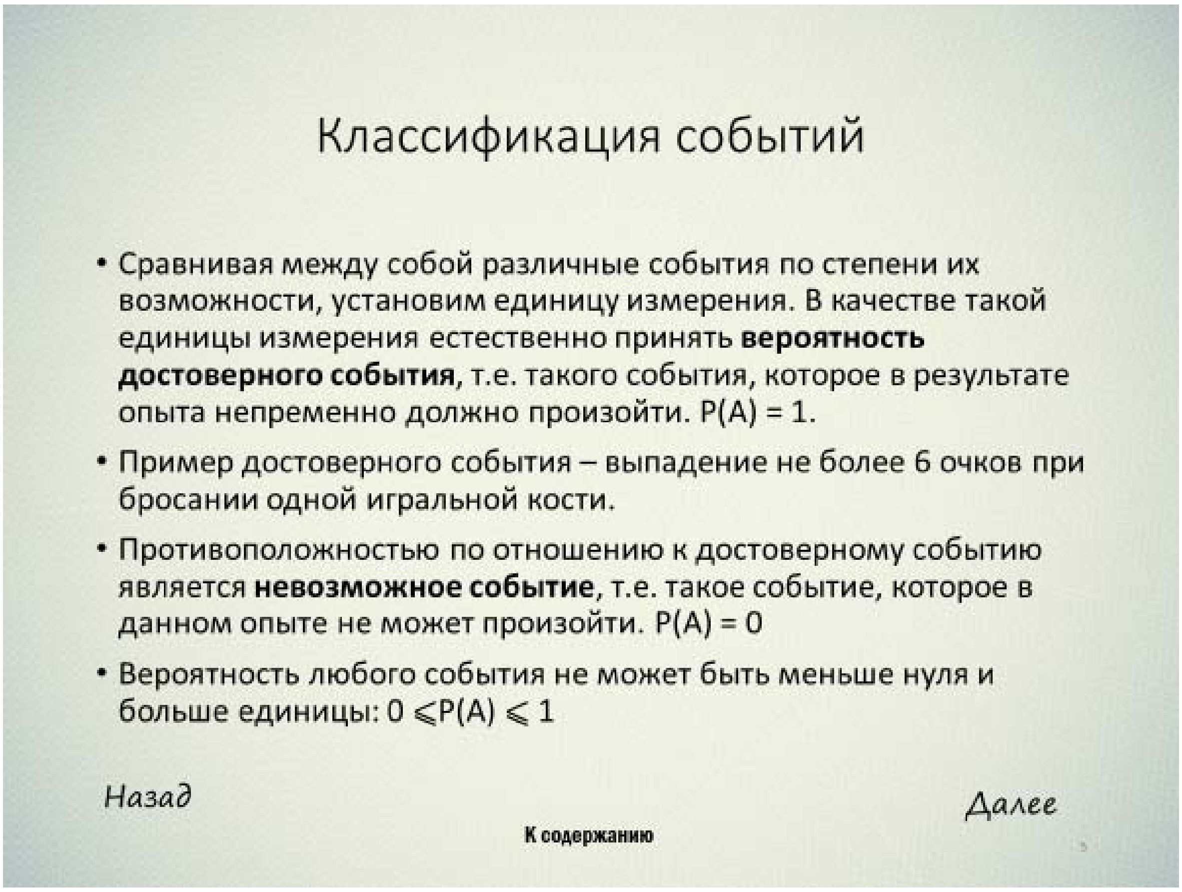
Приложение 1

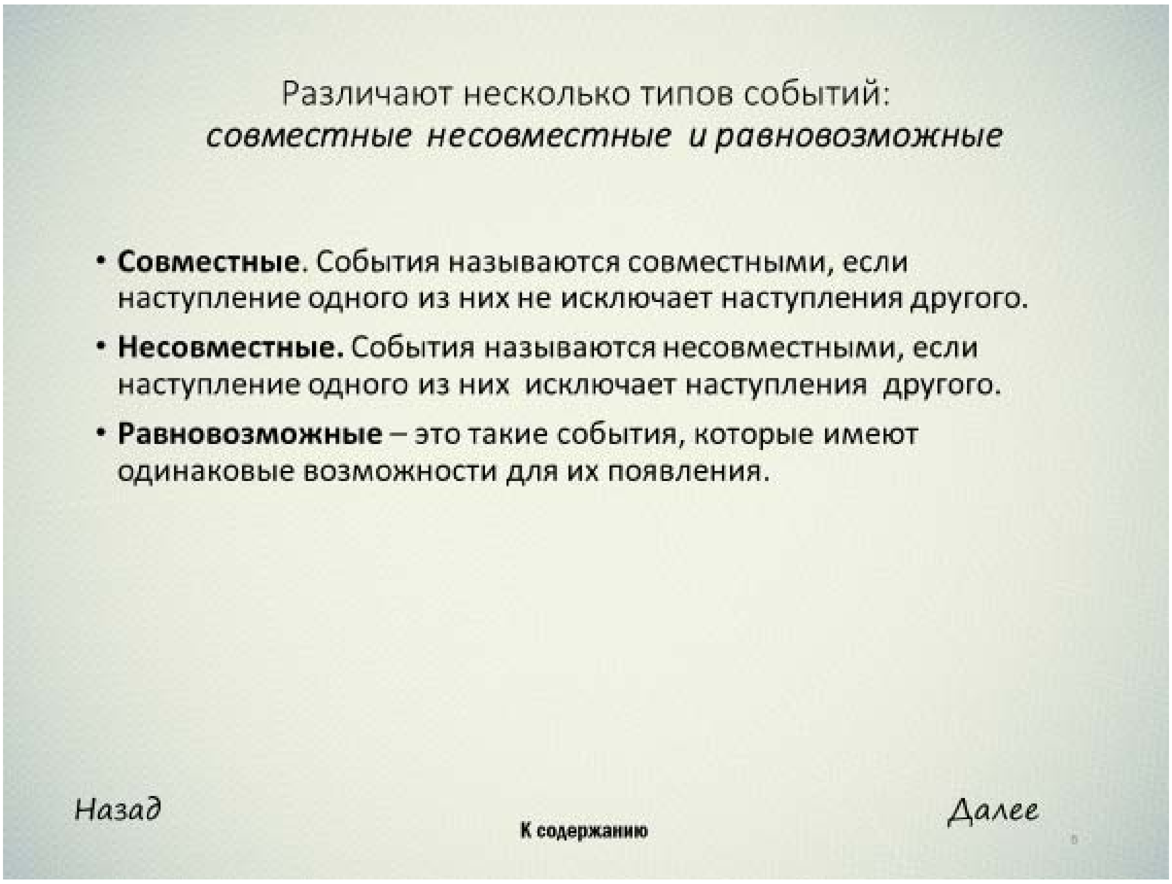
Презентация: «Краткий курс теории вероятностей»




Содержание
1. Основные понятия и определения 4
1.1 Испытание и событие 4
1.2 Классификация событий 5
1.2 Понятие противоположного события 7
1.3 Полная группа событий 8
2. Операции над событиями 9
3. Элементы комбинаторики 10
3.1 Перестановки 10
3.2 Размещения 11
3.3 Сочетания 12
3.4 Связь формул 13
3.5 Выборки без повторения 14
3.6 Выборки с повторениями 15
3.7 Таблица выборок 16
4. Классическое определение вероятности случайного события 17
5. Основные теоремы теории вероятности 19
5.1 Теорема сложение вероятностей 19
5.2 Условная вероятность 20
5.3 Теорема умножение вероятностей 21
5.2 Зависимые и независимые события 21
5.4 Формула полной вероятности 24
5.5 Формула Байеса 26
6. Повторно независимые испытания 27
6.1 Формула Бернулли 29
6.2 Формулы Муавра Лапласа 31
6.3 Локальная формула Муавра Лапласа 32
6.4 Интегральная формула Муавра Лапласа 33
6.5 Формула Пуассона 34
Назад
Далее


Основные понятия и определения
• Испытание - это осуществление определенных действий или условий, которые можно восстановить произвольное число раз
• Событие - явление в отношении которого имеет смысл говорить наступило оно или не наступило в результате определенного комплекса условий.
Приведем несколько примеров событий:
А – появление герба при бросании монеты;
В – попадание в цель при выстреле;
Назад
К содержанию
Далее


Классификация событий
• Сравнивая между собой различные события по степени их возможности, установим единицу измерения. В качестве такой единицы измерения естественно принять **вероятность достоверного события**, т.е. такого события, которое в результате опыта непременно должно произойти. $P(A) = 1$.
• Пример достоверного события – выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости.
• Противоположностью по отношению к достоверному событию является **невозможное событие**, т.е. такое событие, которое в данном опыте не может произойти. $P(A) = 0$
• Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
Назад
Далее
К содержанию


Различают несколько типов событий:
совместные несовместные и равновозможные
• **Совместные**. События называются совместными, если наступление одного из них не исключает наступления другого.
• **Несовместные.** События называются несовместными, если наступление одного из них исключает наступления другого.
• **Равновозможные** – это такие события, которые имеют одинаковые возможности для их появления.
Назад
Далее
К содержанию

понятие противоположного события

Под ***противоположным*** событием ¬А понимается событие, которое обязательно должно произойти, если не наступило некоторое событие А. Противоположные события несовместны и единственно возможны. Они образуют полную группу событий.

Пример противоположного события

Назад **К содержанию** *Далее*

Полная группа событий

Важным понятием является ***полная группа событий***.

- Несколько событий в данном опыте образуют **полную группу**, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них.

Примеры событий, образующих полную группу:

1) выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты;

2) попадание и промах при выстреле;

Назад **К содержанию** *Далее*

Операции над событиями

- ***Суммой, или объединением,*** нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.
- ***Произведением, или пересечением,*** нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

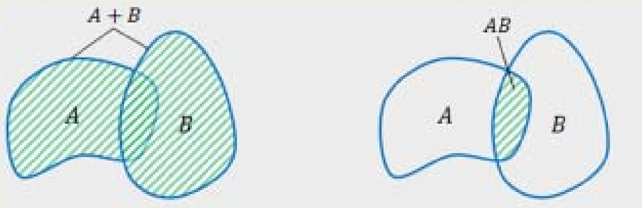


Рис. 1. Сумма событий

Рис. 2. Произведение событий

Назад **К содержанию** *Далее*

Элементы комбинаторики

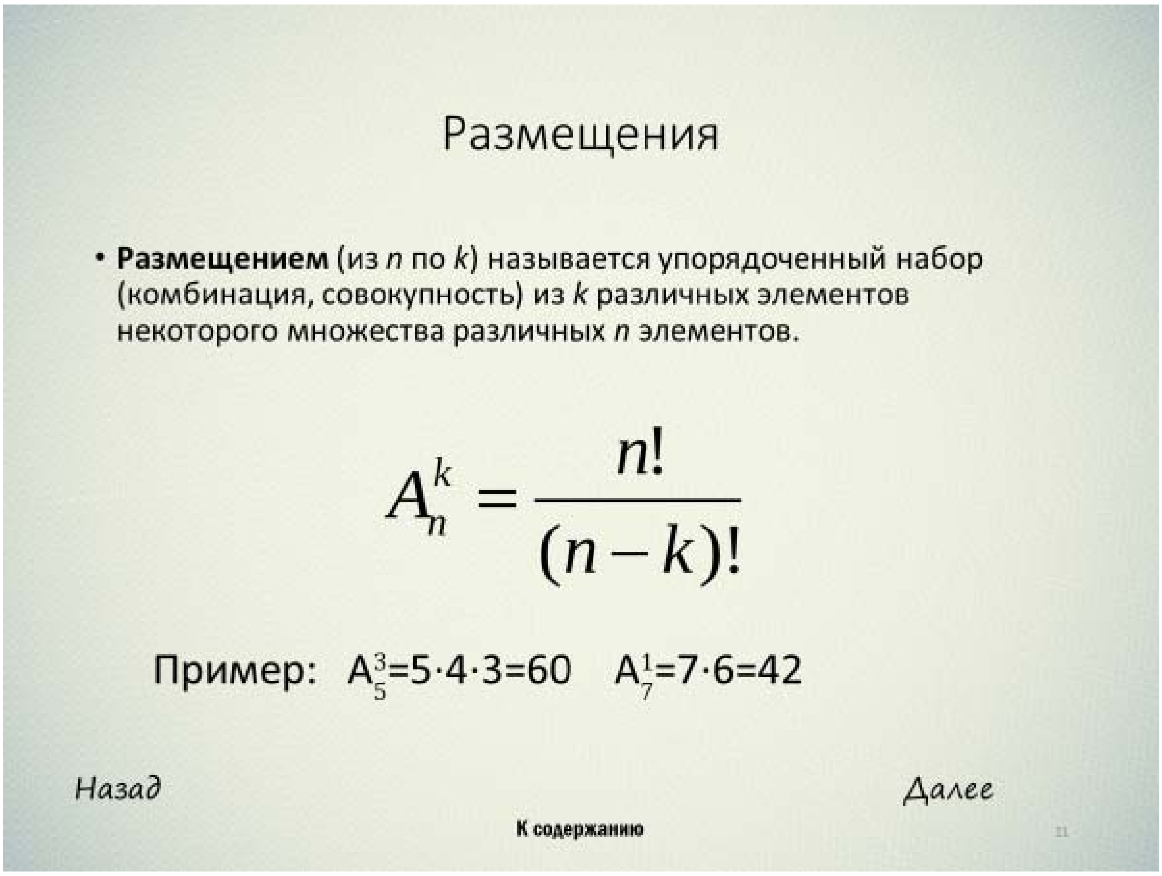
- **Перестановкой –** называют упорядоченные множества, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

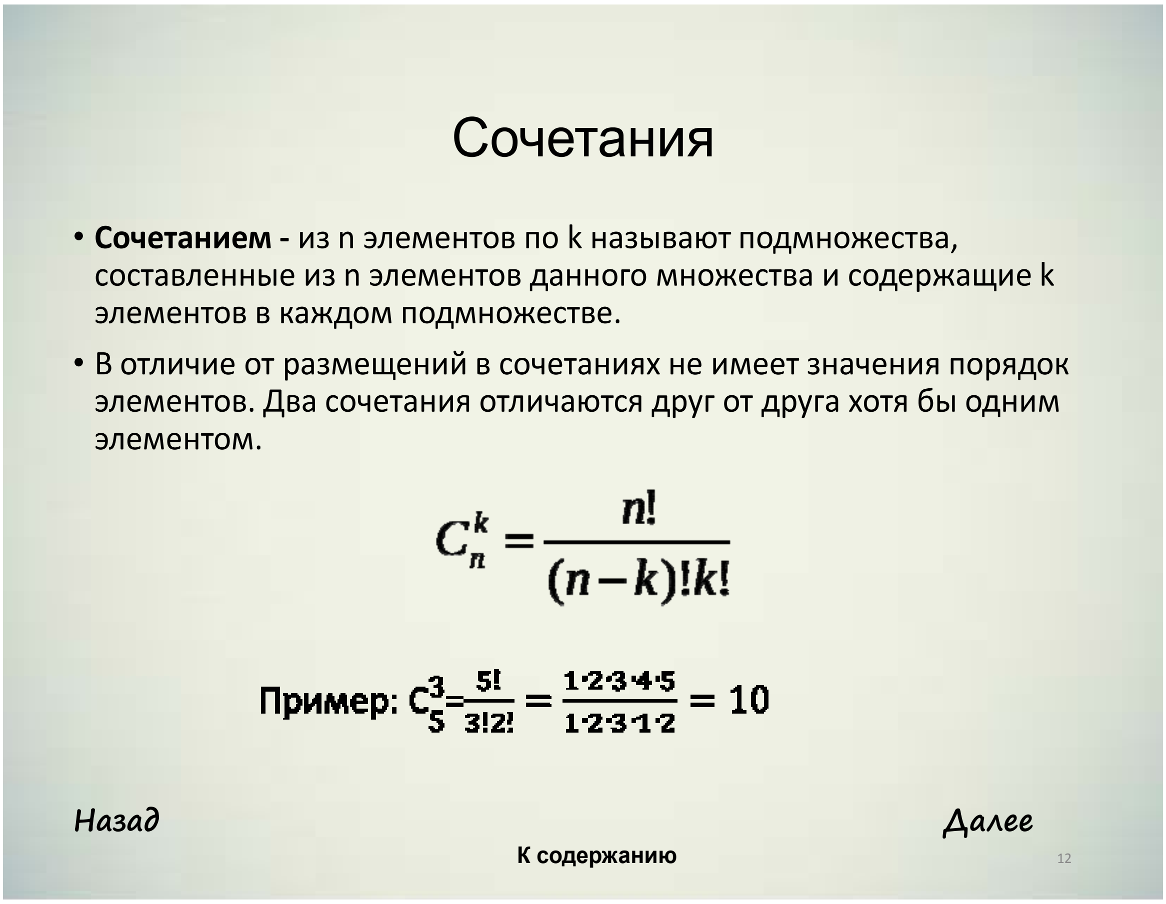
$$P_n = n!$$

Пример: $P_4=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$

$P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$

Назад **К содержанию** *Далее*


Размещения
• **Размещением** (из *n* по *k*) называется упорядоченный набор (комбинация, совокупность) из *k* различных элементов некоторого множества различных *n* элементов.
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
Пример: $A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$ $A_7^1=7\cdot6=42$
Назад
Далее
К содержанию
11


Сочетания
• **Сочетанием -** из n элементов по k называют подмножества, составленные из n элементов данного множества и содержащие k элементов в каждом подмножестве.
• В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения порядок элементов. Два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
Пример: $C_5^3=\frac{5!}{3!2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}=10$
Назад
Далее
К содержанию
12

Число размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^m = P_m C_n^m$$

Назад

К содержанию

Далее

Название	Свойства	Формула
Перестановки	Важен порядок.	$P_n = n!$
Сочетания	Важен состав.	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
Размещения	Важен и состав и порядок.	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Рассмотренные выше выборки называются выборками без повторений.

Назад

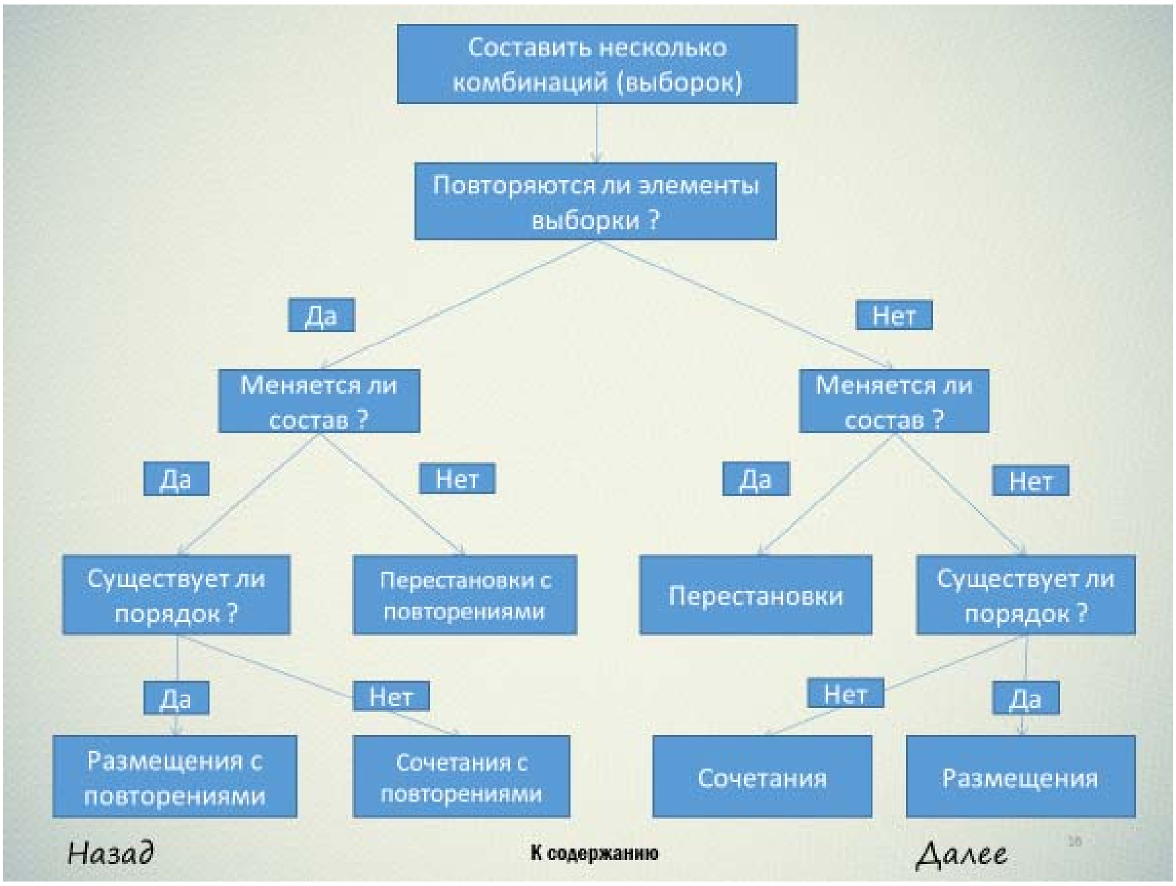
К содержанию

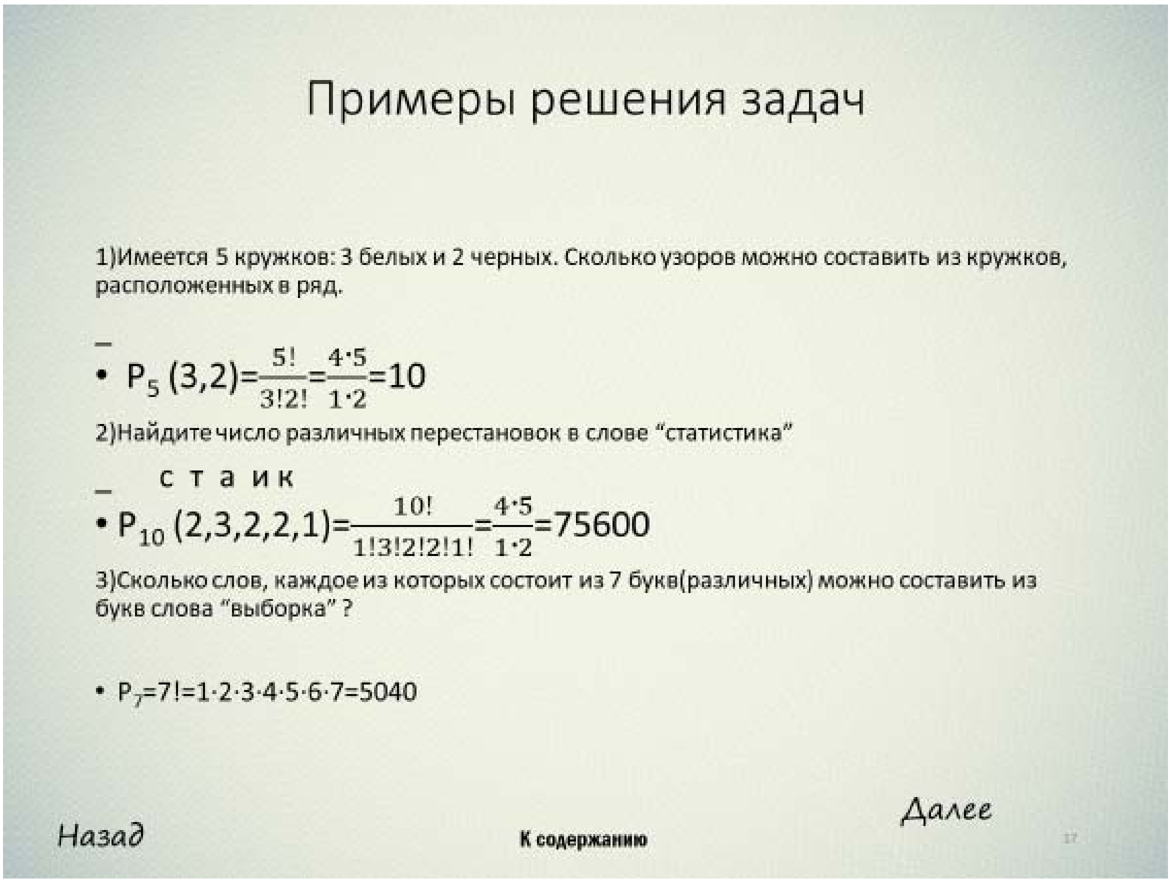
Далее

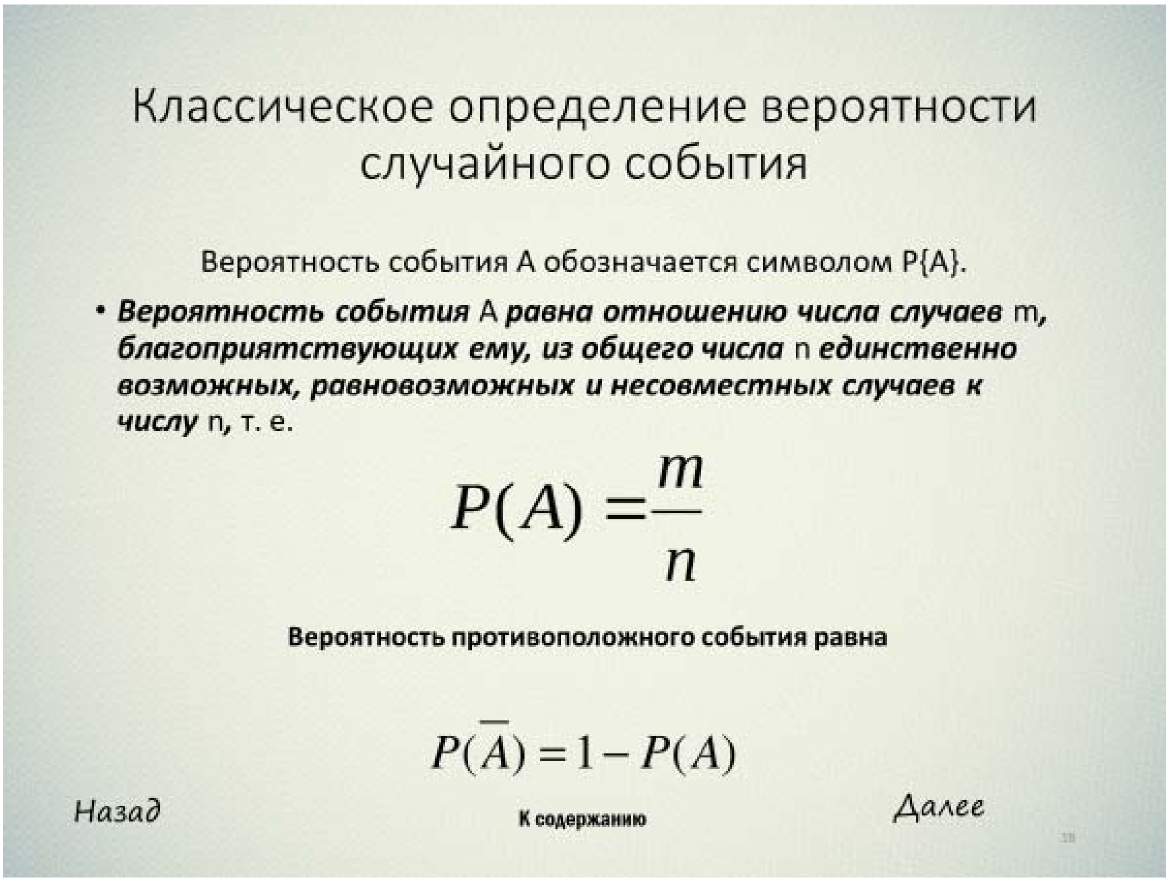
В выборках с повторениями могут быть одинаковые элементы. Тогда число таких выборок можно посчитать с помощью формул:

$\overline{P}_n(n_1,\dots,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!}$	-Перестановки с повторениями
$\overline{A_n^m}=n^m$	-Размещения с повторениями
$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$	-Сочетания с повторениями

Назад К содержанию Далее




Примеры решения задач
1)Имеется 5 кружков: 3 белых и 2 черных. Сколько узоров можно составить из кружков, расположенных в ряд.
• $\bar{P}_5\,(3,2)=\frac{5!}{3!2!}=\frac{4\cdot5}{1\cdot2}=10$
2)Найдите число различных перестановок в слове “статистика”
с т а и к
• $\bar{P}_{10}\,(2,3,2,2,1)=\frac{10!}{1!3!2!2!1!}=\frac{4\cdot5}{1\cdot2}=75600$
3)Сколько слов, каждое из которых состоит из 7 букв(различных) можно составить из букв слова “выборка” ?
• $P_7=7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$
Назад
К содержанию
Далее


Классическое определение вероятности случайного события
Вероятность события А обозначается символом P{A}.
• ***Вероятность события*** А ***равна отношению числа случаев*** m***, благоприятствующих ему, из общего числа*** n ***единственно возможных, равновозможных и несовместных случаев к числу*** n***,*** т. е.
$$P(A)=\frac{m}{n}$$
Вероятность противоположного события равна
$$P(\bar{A})=1-P(A)$$
Назад
К содержанию
Далее

Основные теоремы теории вероятности

Сложение вероятностей

- **Теорема.** Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B+\ldots+N)=P(A)+P(B)+\ldots+P(N).$$

Назад *Далее*

К содержанию

19

Условная вероятность.

- Если при вычислении вероятности никаких других ограничений не налагается, то такую вероятность называют **безусловной**; если же налагаются дополнительные условия, то вероятность называется **условной**.
- **Условной вероятностью** $P_A(B)$ называют вероятность события B, в предположении, что событие A уже наступило.

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

Пример: В ящике 3 белых и 3 черных шара. Из него дважды вынимают по одному шару, не возвращая из обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

- после первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них три белых.
- Искомая вероятность равна:

$PA(B)=\frac{C^1{}_3}{C^1{}_5}=\frac{3}{5}$

Назад *Далее*

К содержанию

20

Умножение вероятностей

- **Теорема .** Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

- **Следствие.** Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

  $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$.

Назад К содержанию *Далее*

21

Зависимые и независимые события

- События называются ***зависимыми***, если одно из них влияет на вероятность появления другого.
- События называются **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

Зависимое

Из колоды карт достали карту красной масти, вероятность достать карту черной масти стала больше.

Независимое

Из колоды карт достали карту красной масти и положили её назад в колоду, вероятность достать карту черной масти не изменилась.

Назад *Далее*

К содержанию

22

Пример

- Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: p_1=0,7 p_2=0,8. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одном из орудий.
- Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы другого орудия, поэтому событие А (попадание первого орудия) и В (попадание второго орудия) независимы.
- Вероятность события АВ (оба орудия попали)
- P(AB)=P(A)+P(B)=0,7+0,8=0,56

Искомая вероятность:

- P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-0,56=0,94
- Ответ:0,94

Назад К содержанию *Далее* 23

Формула полной вероятности

- **Теорема .** Если событие А наступает только при условии появления одного из событий H1,H2,…Hn, образующих полную группу несовместных событий, то вероятность события А равна сумме произведений вероятностей каждого из событий H1,H2,…Hn на соответствующую условную вероятность события H1,H2,…Hn:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

При этом события Bi, i=1,…,nBi, i=1,…,n называются **гипотезами**, а вероятности P{Bi}P{Bi} — **априорными**. Эта формула называется **формулой полной вероятности**.

Назад К содержанию *Далее* 24

Пример

- Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8; а второго 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь стандартная.
- A — извлечена стандартная деталь
- B_x — извлечена из 1 набора
- B_2 — извлечена из 2 набора

Искомая вероятность

$$P(B_1)=\frac{1}{2}\quad P(B_2)=\frac{1}{2}\quad P_{B_1}(A)=0{,}8\quad P_{B_2}(A)=0{,}9$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}8+\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=0{,}85$$

Ответ: 0,85

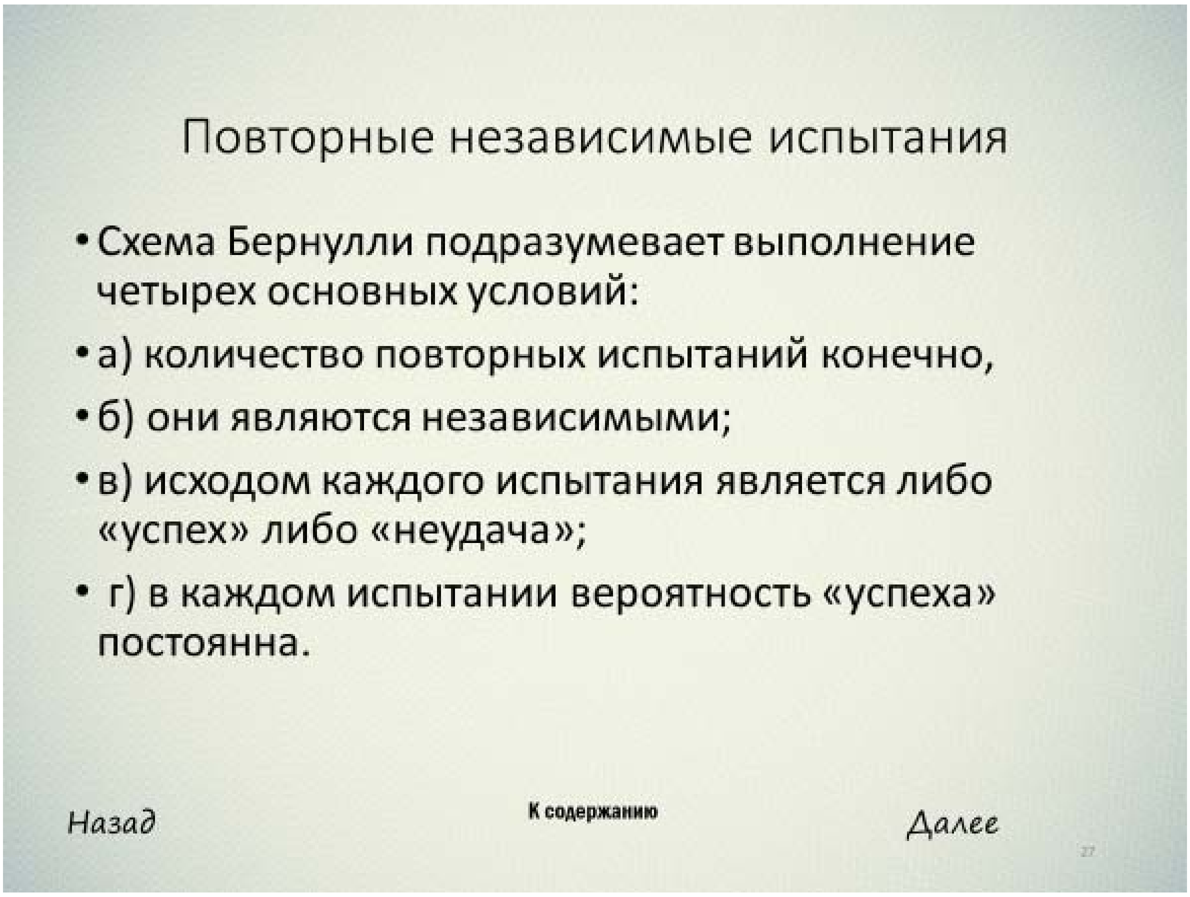
Назад К содержанию *Далее* 25

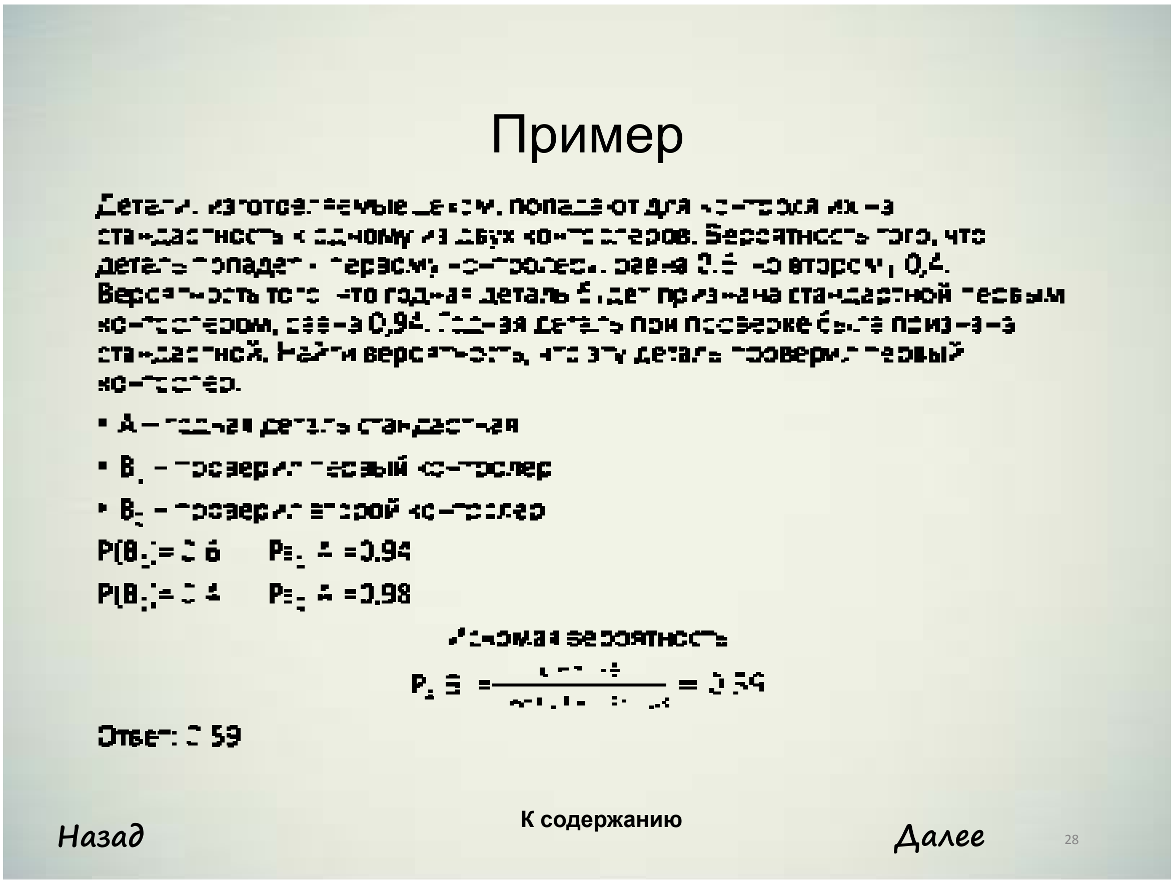
Формула Байеса

- Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является так называемая теорема гипотез, или формула Байеса.
- Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и известно, что событие А уже наступило, т.е. произведен опыт, в результате которого наблюдается появление некоторого события А. Спрашивается, как следует изменить вероятности гипотез в связи с появлением этого события? То есть, необходимо вычислить условную вероятность того, что вместе с событием А осуществилась гипотеза H_k по формуле Байеса:

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}$$

Назад К содержанию *Далее* 26


Повторные независимые испытания
• Схема Бернулли подразумевает выполнение четырех основных условий:
• а) количество повторных испытаний конечно,
• б) они являются независимыми;
• в) исходом каждого испытания является либо «успех» либо «неудача»;
• г) в каждом испытании вероятность «успеха» постоянна.
Назад
К содержанию
Далее
27


Пример
Детали, изготовляемые цехом, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность, что эту деталь проверил первый контролер.
• А – годная деталь стандартная
• В1 – проверил первый контролер
• В2 – проверил второй контролер
P(B1)= 0,6
P(B2)= 0,4
=0,94
=0,98
Искомая вероятность
= 0,59
Ответ: 0,59
Назад
К содержанию
Далее
28

Формула Бернулли

p – вероятность наступления события **A** в каждом испытании;
q =1– p – вероятность события, противоположного событию A, то есть
q = P(A) =1– P(A) =1– p ;

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Назад **К содержанию** *Далее* 29

Пример

Задача:
Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение суток не превысит нормы, равна p=0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход энергии в течение 4 суток не превысит нормы.
$P_6(4)=C^4б\text{-}(0,75)^4 *(0,25)^2=0,3$
Ответ: 0,3
Задача:
Монета брошена 2раза. Написать в виде таблицы Закон распределения случайной величины X- числа Выпадений герба"
Решение:
Вероятность появления "герба" в каждом бросании монеты p=1/2, следовательно, вероятность непоявления"герба"д=1-1/2=1/2. При двух бросаниях монеты "герб" может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $X_г = 2$, $X_2 = 1$, $X_3 = 0$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли.

$$P_2(2) = C_2^2 \cdot p^2 \cdot q^0 \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25$$

$$P_2(1) = C_2^1 \cdot p^1 \cdot q^1 \frac{1}{2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.5$$

$$P_2(0) = C_2^0 \cdot p^0 \cdot q^2 \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25$$

x	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

Контроль:0,25+0,5+0,25=1

Назад **К содержанию** *Далее* 30

Формулы Муавра-Лапласа

Абраам де Муавр (1667-1754)

Пьер-Симон Лаплас (1749-1827)

- Если число независимых испытаний велико, то, формулу Бернулли применять (чисто технически) достаточно сложно. В этих случаях применяют асимптотические (локальную и интегральную) формулы Муавра – Лапласа и асимптотическую формулу Пуассона.

Назад **К содержанию** *Далее* 31

Локальная формула Муавра-Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

Где $\phi(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

$$X = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Функция $\phi(x)$ обладает следующими свойствами:

1)функция $\phi(x)$ является четной, то есть $\phi(-x) = \phi(x)$;

2) функции $\phi(x)$ монотонно убывает при положительных значениях аргумента;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} (\phi) = 0$;

4) для всех значений $x > 5$ значение функции $\phi(x) \approx 0$.

Назад **К содержанию** *Далее* 32

Интегральная формула Муавра-Лапласа

$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(X_2) - \Phi(X_1)$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Функция Φ(x) обладает следующими свойствами:
1) функция Φ(x) является нечетной, то есть Φ(−x) =−Φ(x) ;
2) функции Φ(x) – монотонно возрастающая;
3) $\lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = 0{,}5$;
4) для всех значений x > 5 значение функции Φ(x) ≈ 0,5 .

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$ – Функция Лапласа

Назад К содержанию Далее 33

Формула Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$

Выбор формул осуществляется исходя из количества испытаний n и вероятности наступления события в каждом испытании p. Используемые понятия «мало», «не очень мало», «велико» являются относительными и могут признаваться таковыми в зависимости от конкретных условий задачи. Как правило, если n ≥ 20 , то можно говорить, что n – велико; если p < 0,01, то p – не очень мало.

Назад К содержанию Далее 34

Пример

Задача:

- Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия.

Решение:

- n=5000
- p=0,0002
- k=3
- λ=np$\lambda = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$
- По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна:
- $P_{5000}(3) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{6} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06$

Назад К содержанию *Далее* 35

Случайные величины

- ***Случайной*** называется величина, которая в результате испытаний принимает то или иное (но при этом только одно) возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.
- В отличие от случайного события, являющегося **качественной** характеристикой случайного результата испытания, случайная величина характеризует результат испытания **количественно**.
- Примерами случайной величины могут служить размер обрабатываемой детали, погрешность результата измерения какого-либо параметра изделия или среды. Среди случайных величин, с которыми приходится встречаться на практике, можно выделить два основных типа: **дискретные** и **непрерывные**.

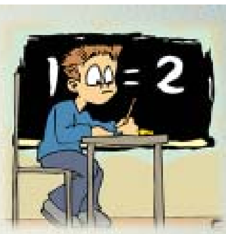
Назад К содержанию *Далее* 36

Дискретная случайная величина

- Дискретной называется случайная величина, принимающая конкретное или бесконечное счетное множеств значений.
- Например: число бракованных изделий в партии из n штук; число вызовов, поступающих на телефонную станцию в течение суток; число выстрелов до первого попадания в цель и т.д.

Назад **К содержанию** *Далее* 37

Пример



Задача:

- Абитуриент сдает два вступительных экзамена: по математике и физике.
- Составить закон распределения случайной величины x, число полученных
- пятерок, если вероятность получения пятерки по математике равно 0,8, а по
- физике – 0,6.
- Решение:
- Возможное значение X есть 0, 1, 2. Причем
- $P(x=0) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$
- $P(x=1) = P(\overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 =$
- $= 0{,}44$
- $P(x=2) = P(A_1 \cdot A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$
- Здесь A_1, A_2 - события, заключающиеся в том, что и математика и физика сданы
- На 5.
- Сведем полученное в таблицу.

x	0	1	2
p	0,88	0,44	0,48

- Условие нормировки $\sum_{i-1}^{3} p_i = 1$ выполняется.

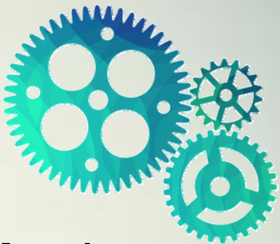
Назад **К содержанию** *Далее* 38

Непрерывная случайная величина

- Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного интервала.
- Число возможных значений непрерывной случайной величины **бесконечно**.
- Например: время безотказной работы микросхемы; концентрация соли в морской воде; погрешность изготовления деталей и т.д.

Назад К содержанию *Далее* 39

Пример



[illegible]

Назад К содержанию *Далее* 40

Функция распределения вероятностей и её свойства

- Функция распределения является наиболее общей формой задания закона распределения.
- Она используется для задания как дискретных, так и непрерывных случайных величин.
- Обычно ее обозначают F(x).
- **Функция распределения** определяет вероятность того, что случайная величина X принимает значения, меньшие фиксированного действительного числа x, т.е. $F(x) = P\{X<x\}$.
- Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Ее еще называют ***интегральной функцией распределения.***

Назад К содержанию Далее 54

Рассмотрим свойства функции распределения.

- **Свойство 1.** Функция распределения — неотрицательная, функция, заключенная между нулем и единицей: $0 \le F(x) \le 1$
- **Свойство 2.** Вероятность попадания случайной величины в интервал $[\alpha;\beta)$ равна разности значений функции распределения на концах этого интервала, т. е. $P\{\alpha \le X<\beta\}=F(\beta)-F(\alpha)$
-
  Отсюда следует, что вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.
- **Свойство 3.** Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция, т. е. $F(\beta) \ge F(\alpha)$.
- **Свойство 4.** На минус бесконечности функция распределения равна нулю, а на плюс бесконечности — единице, т. е. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$

Назад К содержанию Далее 41

Плотность распределения вероятности

- ***Плотность распределения*** f(x) равна производной от функции распределения F(x) , т. е.

$$f(x)=F'(x)$$

Смысл плотности распределения f(x) состоит в том, что она указывает на то, как часто случайная величина X появляется в некоторой окрестности точки x при повторении опытов. Кривая, изображающая плотность распределения f(x) случайной величины, называется ***кривой распределения.***

Назад **К содержанию** Далее 42

Свойства

Свойство 1. Плотность распределения неотрицательна, т. е.

$$f(x)\geqslant 0$$

Свойство 2. Функция распределения случайной величины равна интегралу от плотности в интервале от $-\infty$ до x , т. е.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

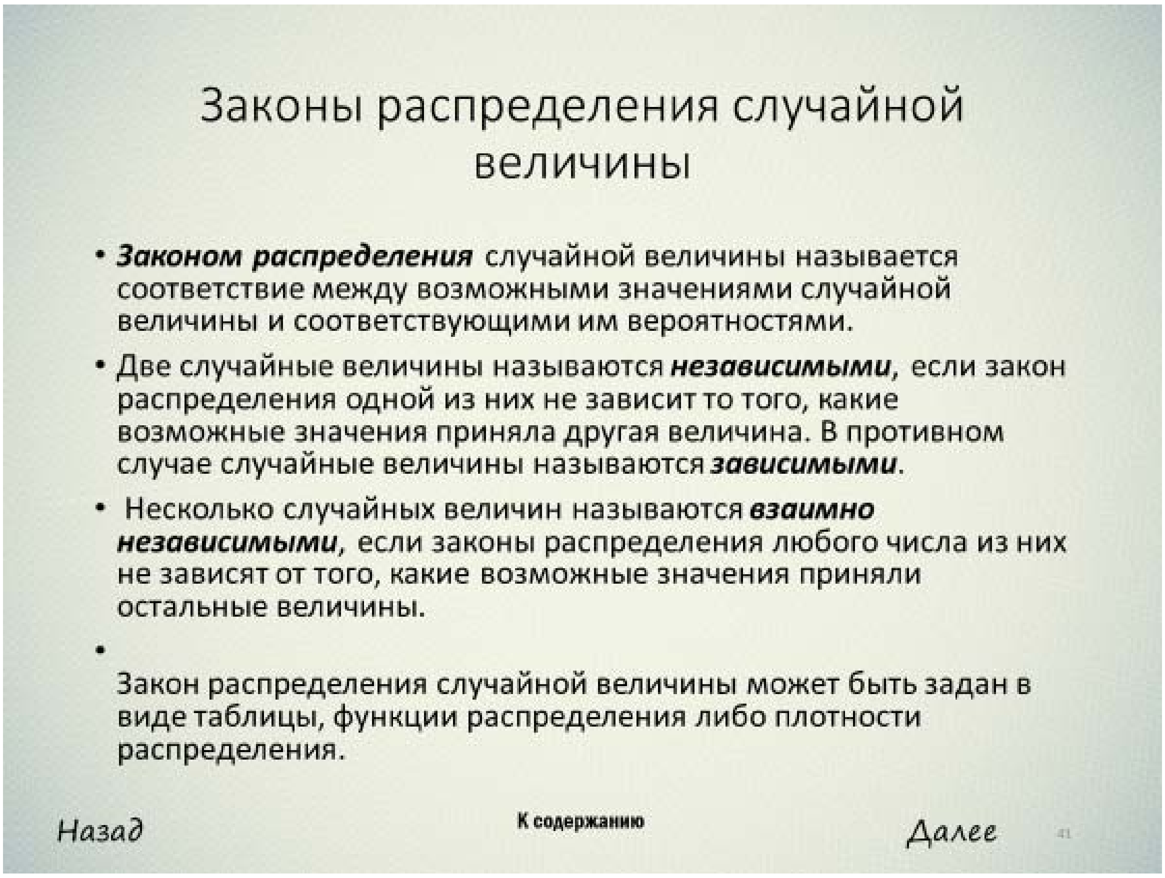
Свойство 3. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на участок (α;β) равна интегралу от плотности распределения, взятому по этому участку, т. е.

$$P\{\alpha\leqslant X\leqslant\beta\}=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Свойство 4. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

Назад **К содержанию** Далее 57



Законы распределения случайной величины

- ***Законом распределения*** случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.
- Две случайные величины называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не зависит то того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются ***зависимыми***.
- Несколько случайных величин называются ***взаимно независимыми***, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.
-

Закон распределения случайной величины может быть задан в виде таблицы, функции распределения либо плотности распределения.

Назад **К содержанию** *Далее* 41

Основные законы распределения Дискретной случайной величины

	Биномиальный	Пуассона	Геометрический
Математическое ожидание	M(x)=np	M(x)=λ=np	M(x)=$\frac{1}{p}$
Дисперсия	D(x)=npq	D(x)=λ=np	D(x)=$\frac{\sqrt{q}}{p^2}$
Среднее квадратическое отклонение	σ(x)=$\sqrt{(npq)}$	σ(x)=$\sqrt{(n)}$=$\sqrt{(np)}$	σ(x)=$\frac{\sqrt{q}}{p}$

Биномиальный ряд распределения

x_i	0	1	2	…	m	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ряд распределения Пуассона

x	0	1	2	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	…

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Геометрический ряд распределения

ξ	1	2	3	4	..	n	..
p_i	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	$q^3 \cdot p$	..	$q^{n-1} \cdot p$	..

$$P_k = P_n(k) = q^{k-1} p$$

Назад **К содержанию** *Далее* 43

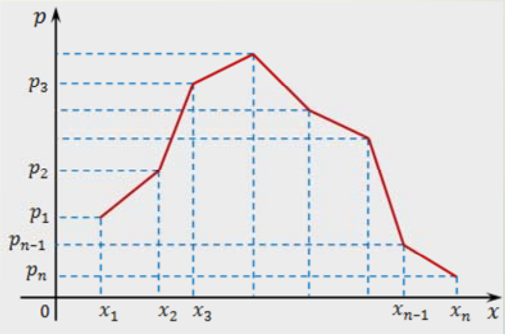
- Табличное задание закона распределения можно использовать только для **дискретной случайной величины с конечным числом возможных значений**. Табличная форма задания закона случайной величины называется также рядом распределения.

X	x1	x2	x3	…	Xn-1	Xn
P	p1	p2	p3	…	Pn-1	pn

Так как события образуют полную группу событий, то в таблице сумма

вероятностей равна единице, то есть $P_1+P_2+P_3+\dots+P_n = \sum_{i=1}^{1} P_i = 1$

- Для наглядности ряд распределения представляют графически. При графическом изображении в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают все возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие вероятности. Точки (xi, pi), соединены прямоугольными отрезками, называют **многоугольником распределения**.



Назад **К содержанию** *Далее* 46

Биномиальный закон распределения

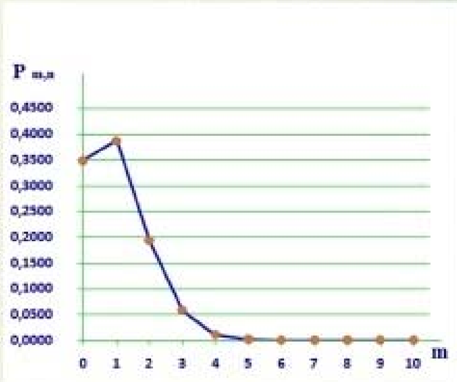
- Биномиальный закон распределения описывает вероятность наступления события А m раз в n независимых испытаниях, при условии, что вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна.

$$P_{m,n} = C_n^m \cdot P^m \cdot q^{n-m}$$

Назад **К содержанию** *Далее* 44

Например, отдел продаж магазина бытовой техники в среднем получает один заказ на покупку телевизоров из 10 звонков. Составить закон распределения вероятностей на покупку m телевизоров. Построить полигон распределения вероятностей.

m	C_n^m	p^m	q^{n-m}	P(m,n)
0	1	1	0,34867844	0,3486784401
1	10	0,1	0,387420489	0,3874204890
2	45	0,01	0,43046721	0,1937102445
3	120	0,001	0,4782969	0,0573956280
4	210	0,0001	0,531441	0,0111602610
5	252	0,00001	0,59049	0,0014880348
6	210	0,000001	0,6561	0,0001377810
7	120	0,0000001	0,729	0,0000087480
8	45	0,00000001	0,81	0,0000003645
9	10	0,000000001	0,9	0,0000000090
10	1	0,0000000001	1	0,0000000001
∑				1,0000000000



В таблице m - число заказов, полученных компанией на покупку телевизора. C_n^m - число сочетаний m телевизоров по n, p - вероятность наступления события А, т.е. заказа телевизора, q - вероятность не наступления события А, т.е. не заказа телевизора, P m,n - вероятность заказа m телевизоров из n. На рисунке 1 изображен полигон распределения вероятностей.

Назад **К содержанию** *Далее* 45

Геометрическое распределение.

- Геометрическое распределение случайной величины имеет следующий вид:

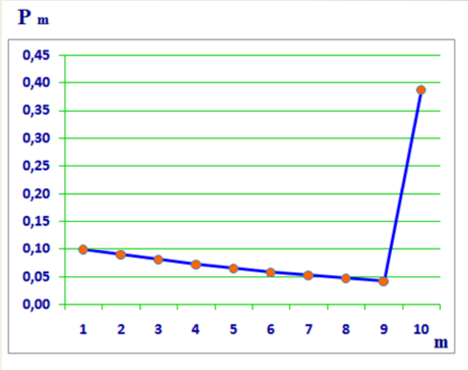
$$P(m) = pq^{m-1},$$

где

- Pm - вероятность наступления события А в испытание под номером m.
  p - вероятность наступления события А в одном испытании.
  q = 1 - p
- Пример. В компанию по ремонту бытовой техники поступила партия из 10 запасных блоков для стиральных машин. Бывают случаи, что в партии оказывается 1 блок бракованный. Проводится проверка до обнаружения бракованного блока. Необходимо составить закон распределения числа проверенных блоков. Вероятность того, что блок может оказаться бракованным, равна 0,1. Построить полигон распределения вероятностей.

Назад **К содержанию** *Далее* 49

m	p	q^{m-1}	P(m)
1	0,1	1	0,1000000000
2	0,1	0,9	0,0900000000
3	0,1	0,81	0,0810000000
4	0,1	0,729	0,0729000000
5	0,1	0,6561	0,0656100000
6	0,1	0,59049	0,0590490000
7	0,1	0,531441	0,0531441000
8	0,1	0,4782969	0,0478296900
9	0,1	0,43046721	0,0430467210
10	0,1	0,387420489	0,3874204890
∑			**1,0000000000**



Из таблицы видно, что с увеличением числа m вероятность того, что будет обнаружен бракованный блок, снижается. Последняя строчка (m=10) объединяет две вероятности: 1 - что десятый блок оказался неисправным - 0,038742049 , 2 - что все проверяемые блоки оказались исправными - 0,34867844. Так как вероятность того, что блок окажется неисправным относительно низкая (p=0,1), то вероятность последнего события Pm (10 проверенных блоков) относительно высокая.

Назад **К содержанию** *Далее* 50

Закон распределения Пуассона.

- Случайная величина X имеет распределение Пуассона, если закон ее распределения имеет вид:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

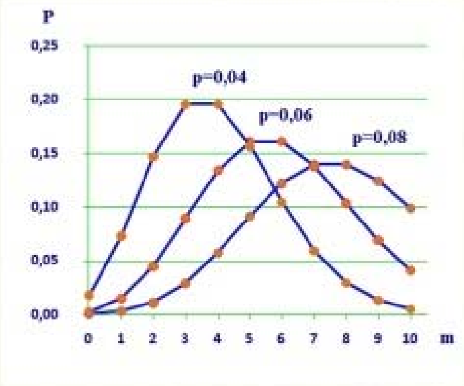
- где
- λ = np = const
  n - число испытаний, стремящееся к бесконечности
  p - вероятность наступления события, стремящаяся к нулю
  m - число появлений события A

Назад **К содержанию** *Далее* 51

Например, в среднем за день в компанию по продаже телевизоров поступает около 100 звонков. Вероятность заказа телевизора марки А равна 0,08; В - 0,06 и С - 0,04. Составить закон распределения заказов на покупку телевизоров марок А,В и С. Построить полигон распределения вероятностей.

Из условия имеем: m=100, λ1=8, λ2=6, λ3=4 (≤10)

m	p = 0,08	p = 0,06	p = 0,04
0	0,00034	0,00248	0,01832
1	0,00268	0,01487	0,07326
2	0,01073	0,04462	0,14653
3	0,02863	0,08924	0,19537
4	0,05725	0,13385	0,19537
5	0,09160	0,16062	0,15629
6	0,12214	0,16062	0,10420
7	0,13959	0,13768	0,05954
8	0,13959	0,10326	0,02977
9	0,12408	0,06884	0,01323
10	0,09926	0,04130	0,00529



Если n достаточно большое и стремится к бесконечности, а значение p стремится к нулю, так что произведение np стремится к постоянному числу, то данный закон является приближением к биномиальному закону распределения. Из графика видно, что чем больше вероятность p, тем ближе кривая расположена к оси m, т.е. более пологая.

Необходимо отметить, что биномиальный, геометрический, гипергеометрический и закон распределения Пуассона выражают распределение вероятностей дискретной случайной величины.

Назад **К содержанию** Далее

Основные законы распределения непрерывной случайной величины

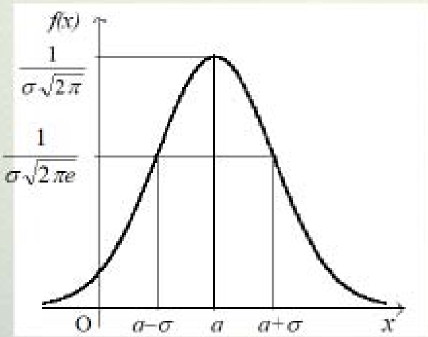
Числовые характеристики	**Нормальный Параметры — a,σ**	**Равномерный Параметры — a,b**	**Показательный Параметр — λ**
Математическое ожидание	M(X)=a	$M(X)=\frac{a+b}{2}$	$M(X)=\frac{1}{\lambda}$
Дисперсия	$D(X)=\sigma^2$	$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$	$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
Среднее квадратическое отклонение	σ(X)=σ	$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$

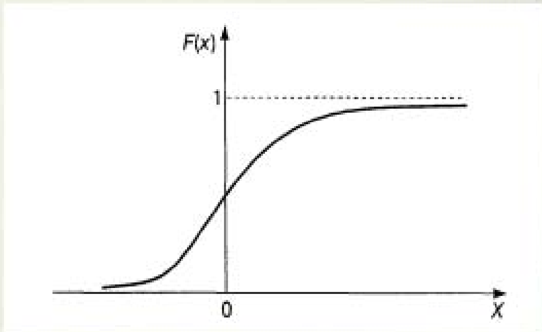
53

Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины

- Непрерывная случайная величина *X* имеет *нормальное распределение*, если плотность вероятности *f(x)* имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad F(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot dx$$



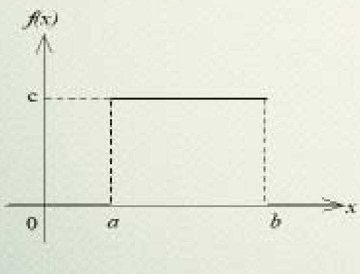


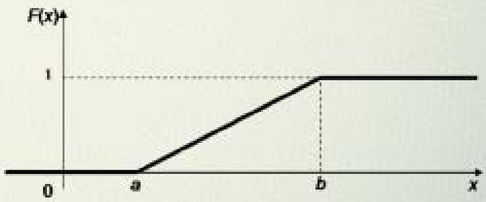
Равномерный закон распределения непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина *X* имеет *равномерное распределение* на отрезке [*a*, *b*], если на этом отрезке плотность распределения вероятности случайной величины постоянна, а вне его равна нулю, т.е. если

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<a,\\ c & \text{при} \quad a\le x\le b,\\ 0 & \text{при} \quad x>b.\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

где $c=\dfrac{1}{b-a}=const$






Показательный закон распределения непрерывной случайной величины
• Непрерывная случайная величина X имеет ***показательный (экспоненциальный) закон распределения***, если её плотность вероятности $f(x)$ имеет вид:
$f(x)$
$f(x)=\begin{cases}0, & x \le 0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0.\end{cases}$
λ
0
$F(x)$
1
$F(x)=\begin{cases}0, & x < 0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0.\end{cases}$
0
Рис. 21

Приложение 2

Таблица № I

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545

Окончание прил. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,5	0,5	0,5

Приложение 3

Таблица № 2

Значения нормальной плотности распределения $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**X**
0,0	0,399	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973	0,0
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918	0,1
0,2	0,3910	0,3902	0,3864	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825	0,2
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697	0,3
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538	0,4
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352	0,5
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144	0,6
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920	0,7
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2757	0,2732	0,2709	0,2685	0,8
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444	0,9
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203	1,0
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965	1,1
1,2	0,1942	0,1919	0,1876	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736	1,2
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518	1,3
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315	1,4
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127	1,5
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0983	0,0973	0,0957	1,6

Продолжение прил. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804	1,7
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669	1,8
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551	1,9
2,0	0,0540	0,0519	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449	2,0
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0388	0,0379	0,0371	0,0363	2,1
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0322	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290	2,2
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229	2,3
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180	2,4
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139	2,5
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107	2,6
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081	2,7
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061	2,8
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046	2,9
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034	3,0
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025	3,1
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018	3,2
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0015	0,0014	0,0013	0,0013	3,3
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009	3,4
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006	3,5
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	3,6
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	3,7
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	3,8

Окончание прил. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	3,9

Приложение 4

Таблица № 3

Значения $P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	*a=0,1*	*a=0,2*	*a=0,3*	*a=0,4*	*a=0,5*	*a=0,6*	*a=0,7*	*a=0,8*	*a=0,9*
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0011	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0030
6							0,0001	0,0002	0,0003

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k	*a=1*	*a=2*	*a=3*	*a=4*	*a=5*	*a=6*	*a=7*	*a=8*	*a=9*	*a=10*
0.	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0012	0,0000
1.	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2.	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0049	0,0023
3.	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0149	0,0076
4.	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5.	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378

Окончание прил. 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6.	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,091	0,0631
7.	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8.		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1317	0,1126
9.		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1317	0,1251
10.			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11.			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1377
12.			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0727	0,0948
13.				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14.				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15.					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16.						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17.						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18.							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19.							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20.								0,0002	0,0006	0,0019

Учебное издание

ИЛЬЯЗОВА Дания Зарифовна

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Редактор Н.А.Евдокимова

ЛР № 020640 от 22.10.97

Подписано в печать 09.11.2018. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 8,12. Тираж 75 экз. Заказ № 840

ЭИ № 1189. Объем данных 2,9 Мб.

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д.32
НПК «Венец» УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д.32

Тел.: (8422) 778-113
E-mail: venec@ulstu.ru
venec.ulstu.ru