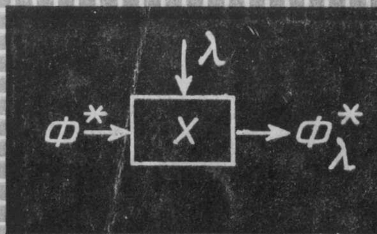
А. Ф. Романенко
Г. А. Сергеев



Аппроксимативные методы анализа случайных процессов

Романенко А. Ф.,
Сергеев Г. А.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

«ЭНЕРГИЯ» МОСКВА 1971

Романенко А. Ф. и Сергеев Г. А.

Р 69 Аппроксимативные методы анализа случайных процессов. М., «Энергия», 1974.

176 с. с ил.

Излагаются методы параметрической аппроксимации оценок характеристик случайных процессов. Рассматриваются также особенности синтеза вычислительных устройств, реализующих соответствующие аппроксимативные методы анализа случайных процессов и показавших достаточно высокую эффективность. Указанные методы иллюстрируются большим количеством примеров.

Книга рассчитана на широкий круг специалистов в области технической кибернетики, вычислительных систем статистической обработки информации, научных работников, инженеров и студентов вузов.

Р $\frac{30502\text{-}235}{051(01)\text{-}74}$ 229-74 6Ф7

Александр Филиппович Романенко
Геннадий Александрович Сергеев

Аппроксимативные методы анализа случайных процессов

Редактор *С. Д. Чупров*
Редактор издательства *Н. А. Медведева*
Обложка художника *И. Г. Иванова*
Технический редактор *М. П. Осипова*
Корректор *В. С. Антипова*

Сдано в набор 22/XI 1973 г.
Подписано к печати 5/VII 1974 г. Т-12812
Формат 84×108¹/₃₂ Бумага типографская № 2
Усл. печ. л. 9,24 Уч.-изд. л. 9,1
Тираж 7 000 экз. Зак. 495 Цена 91 коп.

Издательство «Энергия». Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга содержит теоретические и практические вопросы аппроксимации оценок характеристик случайных величин и случайных процессов.

Основное внимание уделяется методу параметрических функций, отличающемуся исключительной простотой и широкими возможностями реализации с помощью средств вычислительной техники. Разработанный метод параметрических функций обеспечивает аппроксимацию байесовских алгоритмов для оценки указанных характеристик, а также уточнение предварительно выбранных оценок характеристик за счет привлечения дополнительной информации и введения структурной избыточности. На основе метода параметрических функций синтезированы вычислительные устройства, показавшие достаточно высокую эффективность аппроксимативных процедур.

В 1968—1969 гг. материал исследований излагался А. Ф. Романенко в цикле лекций «Адаптивные методы обработки информации» для инженеров, научных сотрудников и аспирантов, работающих в направлениях исследований эффективности и надежности сложных систем. Основной вклад в практическую реализацию аппроксимативных методов анализа случайных процессов внесен Г. А. Сергеевым.

Цель настоящей работы — показать роль и место метода параметрических функций в ряду других методов статистической обработки информации. В частности, указывается взаимосвязь с байесовским подходом, методом стохастической аппроксимации и регрессионным анализом.

Монография предназначена для инженерно-технических работников различных специализаций, связанных с экспериментальными статистическими исследованиями.

Авторы выражают глубокую признательность редактору канд. физ.-мат. наук С. Д. Чупрову за предложения и критические замечания, способствовавшие улучшению книги, а также тов. А. Д. Черкаю, совместная творческая работа с которым стимулировала исследования в направлении создания теории параметрической аппроксимации.

Авторы будут благодарны читателям за их критические замечания и предложения, которые они просят направлять по адресу: 113114, Москва, Шлюзовая набережная, 10, изд-во «Энергия».

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Все возрастающий объем исследований, связанных с испытаниями сложных и дорогостоящих объектов современной техники, контролем их технического состояния, проведением экспериментов и анализом результатов, моделированием физических явлений и процессов функционирования систем различного назначения, делает актуальной проблему создания инженерных методов и алгоритмов статистической обработки соответствующей информации. В дальнейшем будут рассматриваться наиболее распространенные формы представления информации — случайные объекты (случайные события, случайные величины и случайные процессы).

Конкретными задачами обработки информации являются:

при планировании экспериментов: создание методов и алгоритмов оперативной статистической обработки результатов испытаний и исследование возможностей управления экспериментом в процессе его проведения;

при создании систем контроля технического состояния объектов, находящихся в эксплуатации: определение совокупности параметров, характеризующих техническое состояние объекта в процессе его функционирования; разработка методов и алгоритмов анализа и интерпретации данных и стандартизация алгоритмов обработки;

при моделировании процессов функционирования систем различного назначения: разработка методов статистического управляемого моделирования.

Вопросы статистической обработки информации образуют одно из актуальных и самостоятельных направлений науки и техники.

В общем плане вопросы построения процедур статистической обработки, в особенности оптимальных процедур, рассматриваются в математической статистике. Однако практическое использование этих процедур требует специального рассмотрения возможностей средств вычислительной техники в реализации тех или иных методов и алгоритмов статистической обработки данных. Известны трудности в реализации оптимальных методов статистической обработки данных, обусловленные сложностью соответствующих алгоритмов.

Интенсивное развитие средств вычислительной техники обеспечивает реализацию все более сложных алгоритмов статистической обработки информации. Особый интерес представляет при этом рассмотрение и использование специализированных вычислительных машин. Применительно к универсальным ЦВМ важной является задача алгоритмизации разработанных методов статистической обработки данных.

Таким образом, для успешного решения задач статистической обработки информации необходимо развитие, с одной стороны, математической статистики, а с другой — исследование возможностей средств вычислительной техники в части практической реализации соответствующих методов и алгоритмов.

Исторически развитие методов и алгоритмов статистической обработки данных в математической статистике проходило в двух взаимосвязанных направлениях, отличающихся друг от друга степенью полноты учитываемой информации:

направление, характеризуемое использованием сравнительно общей информации, заключенной в функции правдоподобия $f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\alpha)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — набор данных (выборка) и α — оцениваемый параметр;

направление, характеризуемое использованием полной информации.

Заметим, что полная информация относительно параметра α при наличии выборки $\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ характеризуется совместной плотностью вероятностей $f(\mathbf{x}_n, \alpha) = f(\alpha) f(\mathbf{x}_n|\alpha)$.

К первому из указанных направлений относятся методы максимального правдоподобия, наименьших квадратов, моментов, стохастической аппроксимации, оптимальной статистической фильтрации, ко второму направлению нужно отнести байесовские методы.

На основе методов первого направления созданы специализированные вычислительные устройства аналогового и цифрового исполнения: коррелограф НК-200, дискретная информационная корреляционная система

(ДИКС), электронный анализатор случайных процессов (ЭАСП) и др. Образцов вычислительных устройств, предназначенных для статистической обработки случайных процессов на основе байесовских методов, к настоящему времени еще не создано. Разработка и изготовление подобных устройств является важной и перспективной задачей, поскольку при решении ряда прикладных задач (прогнозирование развития техники, оптимальное распределение функций между человеком и машиной, выбор оптимальных технических характеристик проектируемых сложных систем и др.) возникает необходимость учета постоянно накапливающейся информации относительно объекта исследования.

На основе байесовских методов возможно построение адекватных алгоритмов статистической обработки случайных процессов. Эти алгоритмы являются адаптивными и имеют форму рекуррентных соотношений, причем каждое новое наблюдение (новая порция информации) приводит лишь к уточнению предыдущих оценок. Однако к настоящему времени адаптивные методы получили развитие только применительно к обработке стационарных эргодических случайных процессов. Развитие соответствующих методов для нестационарных случайных процессов встречает трудности методического и инженерного плана. Действительно, наиболее общий байесовский подход требует знания априорных распределений характеристик нестационарности. Обычно же, кроме факта нестационарности исследуемого процесса, невозможно указать какую-либо дополнительную информацию. При этом требуется синтезировать такие вычислительные устройства, которые могли бы изменять свои параметры и даже структуру в зависимости от текущих статистических характеристик исследуемых нестационарных случайных процессов.

Решение актуальных задач создания сложных и больших систем (в частности, решение задач оценки их эффективности, живучести, надежности и др.) наталкивается на трудности, связанные с отсутствием инженерных методов и аппаратуры статистической обработки нестационарных случайных процессов, характеризующих режимы функционирования и развития указанных систем.

В то же время обработка именно нестационарных случайных процессов представляет наибольший практический интерес, поскольку модель нестационарного процесса является адекватной более широкому кругу явлений по сравнению с моделью стационарного случайного процесса.

Нестационарность процессов обычно обусловливается динамикой смены режимов функционирования систем как объектов исследования (в силу наличия переходных процессов), конечным временем протяженности физического процесса, влиянием нестационарных неоднородностей среды на параметры распространяющихся в ней электромагнитных или акустических сигналов.

К числу примеров нестационарных случайных процессов можно отнести процессы развития, создания и восстановления сложной системы, развивающееся волнение моря, различные виды турбулентного движения, радио и гидроакустические сигналы, прошедшие через среду с нестационарными неоднородностями, динамические характеристики биологических объектов (включая характеристики человека-оператора). Другими примерами нестационарности случайных процессов могут служить статистические оценки их параметров: корреляционные и структурные функции, спектральные плотности и т. п.

В последнее время интенсивно стало развиваться еще одно направление в математической статистике. Методы этого направления характеризуются тем, что могут использоваться при различной степени полноты информации. К этим методам относится метод параметрических функций, сущность которого сводится к тому, что процесс обработки разбивается на два этапа: на первом этапе проводится оценка α^* с использованием неполной информации, на втором — оценка вида

$$\alpha^*_\lambda = \sum_{j=0}^{l} \lambda_{lj} (\alpha^*)^j,$$

где λ_{lj} — некоторые коэффициенты, названные параметрическими функциями и оптимизируемые по заданному функционалу качества (например, минимуму среднеквадратической функции потерь).

Такой подход обеспечивает сравнительно простую реализацию алгоритмов статистической обработки на элементах аналоговой и цифровой вычислительной техники. Возможность обработки нестационарных случайных процессов обусловливается при этом нелинейным характером изменения параметрических функций в зависимости от соответствующих статистических параметров исследуемых процессов.

Мультипликативная форма параметрических оценок адекватна в определенном смысле используемому в различных областях экспериментальных исследований коэффициентному методу, заключающемуся в том, что неизвестная зависимость между двумя величинами заменяется линейной с некоторым коэффициентом пропорциональности, определяемым из дополнительных условий (например, из условий обеспечения заданной точности аппроксимации и т. п.).

Известны единичные результаты применения указанного подхода, получившего название метода параметрических функций (МПФ).

Так, в 1960 г. В. К. Савчковым и И. В. Челпановым [Л. 31] была высказана идея использования МПФ для решения задачи фильтрации (выделения) полезного сигнала в присутствии аддитивной стационарной помехи. Однако авторы ограничились выбором мультипликативной параметрической функции из условия несмещенной оценки полезного сигнала.

Использование же МПФ для решения статистических задач оценивания не производилось.

В 1962 г. Г. А. Балл в [Л. 2] предложил мультипликативную компенсацию фазовых ошибок специального типа корреляторов. Фактически здесь использовалось условие несмещенности оценки корреляционной функции, отыскиваемой в два этапа, причем на первом этапе использовался эвристический алгоритм корреляционного анализа с переменной во времени задержкой.

Следует заметить, что в области статистики случайных величин коррекция смещенных оценок проводилась давно. Например, в задаче оценивания дисперсии при неизменном математическом ожидании, отправляясь от первоначальной оценки

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2,$$

где x_i — измерения; n — объем выборки, переходят затем к оценке

$$S_\lambda^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2,$$

отличающийся от S^2 величиной мультипликативной поправки $\lambda = n/(n-1)$, называемой поправкой Бесселя. Оценка S_λ^2 является несмещенной оценкой дисперсии.

В монографии С. Р. Рао [Л. 17] корректируется оценка S_λ^2 с помощью мультипликативного параметра, отыскиваемого из условия минимума среднего квадрата ошибки. При этом указывается, что в зависимости от того, для чего строится оценка, можно пользоваться параметрической или обычной оценкой дисперсии.

Систематическое исследование возможностей МПФ проводилось нами с 1962 г., причем в качестве первоначальной оценки для математического ожидания нестационарного случайного процесса использовался оператор текущего среднего, а для выбора мультипликативной параметрической функции выбиралось условие несмещенности оценки.

В [Л. 19] приведены результаты исследований в области МПФ при решении задач сглаживания (для выбора мультипликативной параметрической функции использовался средний квадрат ошибки). Однако оставались еще неясными вопросы определения роли и места МПФ в ряду других известных методов статистической обработки информации. В настоящей работе сделана попытка восполнить указанный пробел.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ АППРОКСИМАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Основные задачи статистической обработки информации сводятся к формированию и измерению оценок математических ожиданий, корреляционных и структурных функций, спектральных плотностей, интервалов корреляции и других параметров [Л. 19, 28]. Применительно к обработке нестационарных случайных процессов возникают дополнительные задачи по их классификации и формированию количественно оцениваемых параметров нестационарности.

Рассмотрим возможные математические постановки задачи получения (формирования) оценок характеристик случайных объектов.

Пусть $\Phi(\alpha)$ — заданное преобразование оцениваемого параметра α; $\Phi^*(\mathbf{x})$ — оценка преобразования $\Phi(\alpha)$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — выборка объема n. Если $R[\Phi(\alpha), \Phi^*(\mathbf{x})]$ — некоторая известная функция риска, то оценки $\Phi^*_b(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условию минимума среднего риска

$$\bar{R} = \int\limits_{\Omega_\alpha}\int\limits_{\Omega_{\mathbf{x}}} R[\Phi(\alpha), \Phi^*(\mathbf{x})] f(\alpha, \mathbf{x})\, d\alpha\, dx_1, \ldots, dx_n = M_{\mathbf{x}\alpha} R[\Phi(\alpha), \Phi^*(\mathbf{x})],$$

называются байесовыми оценками.

Здесь $f(\alpha, \mathbf{x})$ — совместная плотность α и $\mathbf{x}$; Ω_α, $\Omega_{\mathbf{x}}$ — области изменения характеристики α и вектора $\mathbf{x}$ соответственно; $M_{\mathbf{x}\alpha}$ — символ математического ожидания по $\mathbf{x}$ и α.

Во многих случаях отсутствует точное аналитическое выражение для байесовского оператора-оценки $\Phi^*_b(\mathbf{x})$. В других случаях структура байесовского оператора оказывается исключительно сложной, а реализация соответствующего вычислительного алгоритма громоздкой и связанной со значительными затратами времени и средств.

В связи с указанным возникает задача построения таких алгоритмов, для которых основная расчетная часть осуществлялась бы заранее (до проведения эксперимента и, следовательно, до получения соответствующей информации). Очевидно, указанные расчеты должны охватывать параметры, являющиеся носителями априорной информации относительно оцениваемых характеристик. Схема вычисления таких параметров не всегда эквивалентна в смысле величины критерия качества байесовским операторам и поэтому может рассматриваться с позиций аппроксимации последних.

Следует отметить, что теория аппроксимации байесовских операторов в достаточной мере не разработана.

Одно из направлений теории аппроксимации байесовских операторов заключается в использовании следующего их свойства. В общем случае байесовские операторы являются нелинейными функциями достаточных статистик и могут быть выражены аналитически, в частности через максимально правдоподобные оценки. При этом задача аппроксимации байесовских операторов сводится к нахождению параметрических функций l-го порядка. Действительно, пусть $Z=\Phi^*_g(\mathbf{x})$ — некоторая оценка, являющаяся достаточной статистикой; тогда можно записать, что

$$\Phi^*_b(\mathbf{x})=\varphi(Z).$$

Следовательно, задача аппроксимации оценки $\Phi^*_b(\mathbf{x})$ может быть сведена к более простой задаче аппроксимации функции $\varphi(Z)$ от аргумента Z некоторым отрезком ряда

$$\varphi(Z)\approx\sum_{j=0}^{l}\lambda_{lj}\varphi_j(Z),$$

где λ_{lj} — параметрическая функция ($j=0, 1, \ldots, l$); $\varphi_j(Z)$ — координатные функции, принимаемые в дальнейшем равными

$$\varphi_j(Z)=Z^j,\ j=0, 1, \ldots, l.$$

Параметрические функции λ_{lj} можно выбирать, используя различные подходы. Так, функция риска может быть задана в форме

$$R = R[\Phi^*_b, \Phi^*_\lambda],$$

где

$$\Phi^*_\lambda = \sum_{j=0}^{l} \lambda_{lj}\varphi_j(Z)$$

(здесь предполагается, что байесовская оценка Φ^*_b известна исследователю).

В другом подходе могут быть известны априорные значения оцениваемых характеристик, тогда функция риска выбирается в форме

$$R = R[\Phi(\alpha), \Phi^*_\lambda].$$

Рассмотрим более подробно решение задачи аппроксимации во втором подходе.

Пусть

$$R[\Phi(\alpha), \Phi^*_\lambda] = \left[\Phi(\alpha) - \sum_{j=0}^{l} \lambda_{lj}\varphi_j(Z)\right]^2.$$

Тогда необходимыми и достаточными условиями минимума среднего риска $\bar{R}$ являются:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \lambda_{l0}} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \lambda_{l1}} = \ldots = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \lambda_{ll}} = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l} \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial \lambda_{li}\partial \lambda_{lj}} d\lambda_{li} d_{lj} > 0. \qquad (2)$$

Выполнение условий (1) и (2) приводит к уравнению

$$\psi = \lambda\mu, \qquad (3)$$

где

$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_l);$$
$$\lambda = (\lambda_{l0}, \lambda_{l1}, \ldots, \lambda_{ll});$$
$$\mu = \begin{Vmatrix} \mu_{00} & \mu_{01} & \ldots & \mu_{0l} \\ \mu_{10} & \mu_{11} & \ldots & \mu_{1l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{l0} & \mu_{l1} & \ldots & \mu_{ll} \end{Vmatrix}.$$

Здесь

$$\psi_j = M_{\alpha z}[\Phi(\alpha)\varphi_j(Z)], \; j = 0, 1, \ldots, l;$$
$$\mu_{ij} = M_{\alpha z}[Z^{i+j}], \; i, j = 0, 1, \ldots, l.$$

Из уравнения (3) следует:

$$\lambda = \psi \mu^{-1},$$

где μ^{-1} — матрица, обратная матрице μ.

Задача аппроксимации байесовских операторов может быть решена и другим способом. Известно, что оптимальной (в смысле минимума средней квадратической ошибки) оценкой $\Phi(\alpha)$ является средняя апостериорная оценка

$$\Phi^*_b(x_n) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \Phi(\alpha) f(\alpha \mid x_n)\, d\alpha, \tag{4}$$

Вычисление интегралов типа (4) часто бывает затруднительным, поэтому могут быть предложены различные приближенные методы. Суть таких методов состоит в разложении функции $\Phi(\alpha)$ в ряд и использовании нескольких первых членов разложения.

С практической точки зрения интерес представляют разложения $\Phi(\alpha)$ в ряд Тейлора в окрестностях априорного математического ожидания

$$\alpha_{ap} = (\alpha^*_{1ap}, \alpha^*_{2ap}, \ldots, \alpha^*_{map})$$

и в окрестностях апостериорного математического ожидания

$$\alpha_{ps} = (\alpha^*_{1ps}, \alpha^*_{2ps}, \ldots, \alpha^*_{mps}).$$

Практика исследования этих разложений показывает, что вполне достаточно ограничиться квадратичной формой.

В первом случае разложение имеет вид:

$$\Phi(\alpha) \approx \Phi(\alpha^*_{ap}) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_i = \alpha^*_{iap}} (\alpha_i - \alpha^*_{iap}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right)_{\alpha = \alpha^*_{ap}} (\alpha_i - \alpha^*_{iap})(\alpha_j - \alpha^*_{jap}). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) и интегрируя, получаем:

$$\Phi^*_b(x_n) = \Phi(\alpha^*_{ap}) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_i = \alpha^*_{iap}} (\alpha^*_{ips} - \alpha^*_{iap}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right)_{\alpha = \alpha^*_{ap}} (R^*_{ij} + \alpha^*_{ips}\alpha^*_{jps} + \\ + \alpha^*_{iap}\alpha^*_{jap} - 2\alpha^*_{jap}\alpha^*_{jps}), \tag{6}$$

где

$$\alpha^*_{ips} = \int\limits_{\Omega_\alpha} \alpha_i f(\alpha_i \mid x_i)\, d\alpha_i;$$

$$R^*_{ij} = \int\limits_{\Omega_\alpha} (\alpha_i - \alpha^*_{iap})(\alpha_j - \alpha^*_{jap}) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Здесь элементы

$$\Phi(\alpha^*_{ap}), \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_i = \alpha_{iap}}, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right)_{\alpha = \alpha^*_{ap}}$$

от выборки не зависят и могут быть вычислены заранее, тогда выражение (6) реализуется на модели, структура которой приведена на рис. 1.

Во втором случае выражение, аналогичное (5), запишется в виде

$$\Phi(\alpha) \approx \Phi(\alpha^*_{ps}) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_i = \alpha^*_{ips}} (\alpha_i - \alpha_{ips}) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right)_{\alpha = \alpha^*_{ps}} (\alpha_i - \alpha^*_{ips})(\alpha_j - \alpha^*_{jps}). \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (4) и интегрируя, получаем:

$$\Phi^*_b(x_n) \approx \Phi(\alpha^*_{ps}) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right)_{\alpha = \alpha^*_{ps}} R^*_{ij}. \qquad (8)$$

Выражение (8) может быть реализовано на модели, структура которой представлена на рис. 2.

Сравнительный анализ первой и второй структур показывает, что целесообразно использовать вторую модель, отличающуюся более простой структурой.

Б. Р. Левин [Л. 14] подходит к задаче аппроксимации байесовских операторов с позиций использования асимптотических (при большом объеме выборки) свойств байесовских оценок. Сущность подхода состоит в том, что при увеличении объема выборки апостериорная плотность вероятности исследуемой характеристики во многих случаях стремится к функции Гаусса. Это обстоятельство позволяет надеяться, что апостериорную плотность вероятности при небольших объемах выборки можно представить в виде разложения по функциям типа Гаусса. Такими разложениями, в частности, являются

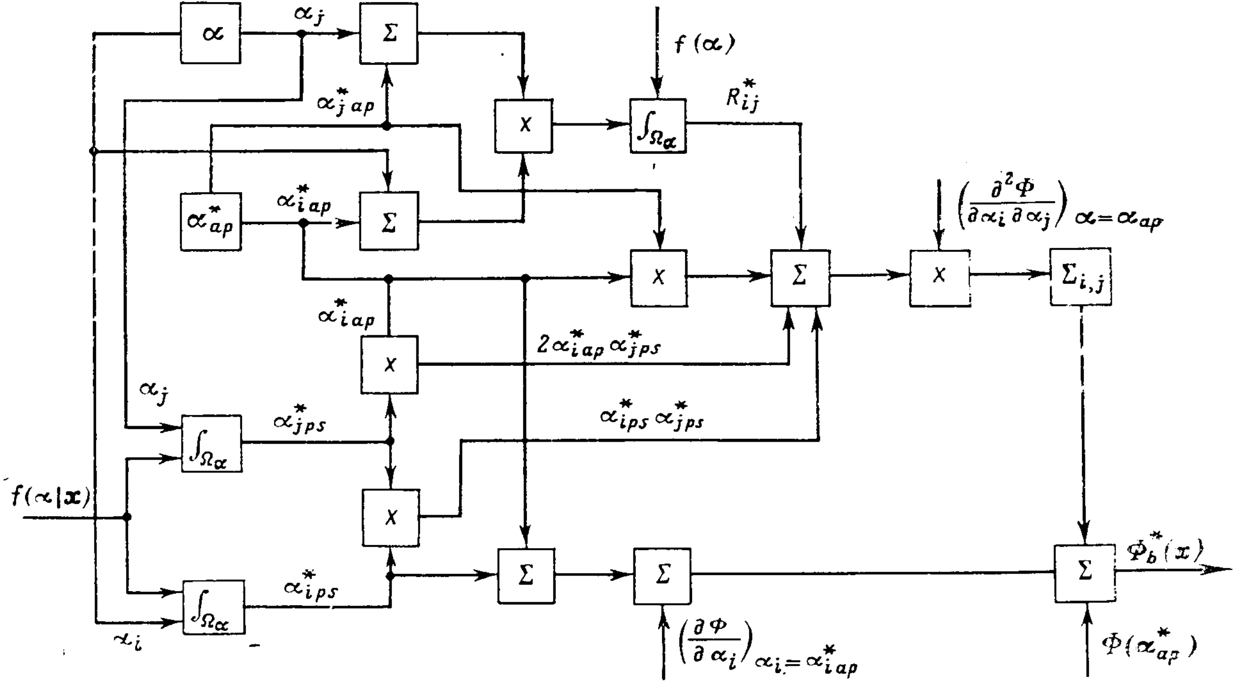


Рис. 1. Первая структура модели аппроксимации байесовских оценок.

ряды Эрмита (или Грама — Шарлье). С увеличением объема выборки точность разложения (при использовании конечного ряда) повышается.

В инженерной практике интерес представляет использование полной линейной модели

$$\Phi^*_{\lambda}(\mathrm{x}) = \lambda_{10} + \lambda_{11}\Phi^*(\mathrm{x}), \tag{9}$$

а также ее частных случаев

$$\Phi^*_{\lambda}(\mathrm{x}) = \lambda_{10} + \Phi^*(\mathrm{x}) \tag{10}$$

(аддитивная модель) и

$$\Phi^*_{\lambda}(\mathrm{x}) = \lambda_{11}\Phi^*(\mathrm{x}) \tag{11}$$

(мультипликативная модель).

Задача заключается в отыскании для λ_{10} и λ_{11} подходящих аналитических соотношений на основе использования тех или иных критериев качества оценок. Решение этой задачи подробно рассматривается в § 6—21.

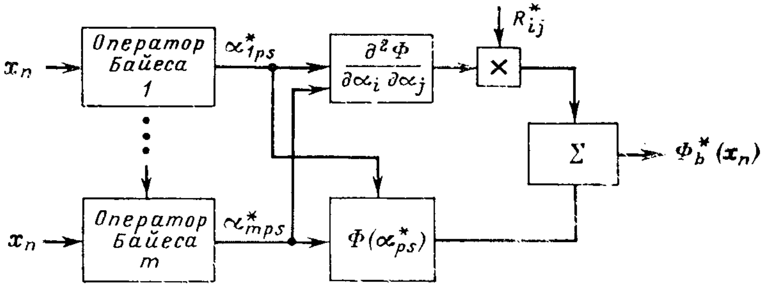


Рис. 2. Вторая структура модели аппроксимации байесовских оценок.

Задача аппроксимации оценок заданных преобразований одних случайных процессов по заданным преобразованиям других случайных процессов ставится аналогичным образом.

Пусть $\Phi(Y)$ — заданное преобразование случайного процесса $Y(t)$ и $Z(X)$ — заданное преобразование входного процесса $X(t)$. Тогда, формируя функцию риска $R[\Phi(Y), \psi(Z)]$, можно найти $\psi(Z)$.

Если

$$\Phi(Y) = X(t+T);$$

$$\psi(Z) = \lambda_{10} + \lambda_{11}X(t);$$

$$R[\Phi(Y),\ \psi(Z)] = [X(t+T) - \lambda_{10} - \lambda_{11}X(t)]^2,$$

то средний риск имеет вид:

$$\overline{R}=M[X(t+T)-\lambda_{10}-\lambda_{11}X(t)]^2.$$

Определение λ_{10} и λ_{11} из условия $\overline{R}=\min$ дает решение задачи прогнозирования случайных процессов, которое рассматривается в § 10.

В указанной постановке имеет место аппроксимация одного случайного процесса по известному другому случайному процессу. Такая задача решена в общем виде [Л. 10, 16]. Соответствующие разложения случайных процессов носят название канонических разложений.

Еще одна важная для практики задача касается аппроксимации оценок параметров вероятностных мер. При этом рассматривается некоторый функционал $\Phi(\mathbf{x}, \mu)$, оптимизация которого по параметрам μ дает соответствующие оценки параметров случайных процессов. Здесь $\mathbf{x}$ — выборка или наблюдаемая реализация случайного процесса.

Этот метод называется компенсационным. Процедура оптимизации сводится к решению уравнений

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{x}, \mu)}{\partial\mu}=0$$

на вычислительных устройствах, моделирующих функционал $\Phi(\mathbf{x}, \mu)$ и регистрирующих его экстремальное значение при варьировании человеко-оператором компенсационных параметров μ. Параметры $\mu=\mu^*(\mathbf{x})$, соответствующие экстремуму $\Phi(\mathbf{x}, \mu)$, и дают искомые аппроксимативные оценки для параметров вероятностной меры случайного процесса $X(t)$.

2. СТРУКТУРЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Основная тенденция развития современной техники сводится к созданию все усложняющихся систем: информационных, кибернетических, систем автоматизированного управления объектами различного назначения и пр. Для успешного создания таких систем, а также для обеспечения нормальных режимов их эксплуатации необходимо проведение сравнительно большого объема экспериментальных и теоретических исследований в области количественного описания помех, полезных сигналов, информационных потоков. В свою очередь этот объем исследований можно реализовать с помощью специализированных систем обработки информации, основанных на использовании средств вычислительной техники. В связи с этим целесообразно рассмотреть рациональные структуры вычислительных систем обработки данных. Прежде всего дадим определение стохастической системы обработки информации.

Под стохастической системой обработки информации понимается совокупность взаимосвязанных устройств, обеспечивающих формирование (представление) заданного набора параметров (характеристик) случайных процессов. К числу этих параметров можно, в частности, отнести функции распределения, корреляционные и структурные функции, спектральные плотности.

С позиции общей теории систем можно дать следующее определение. Стохастическая система обработки информации есть пятерка индексов

$$S=\{\mathbf{x},\ \Phi^*,\ \Phi(\alpha),\ R,\ f\}, \tag{12}$$

где $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\dots,x_n)$ — вектор входной информации; $\Phi^*=\Phi^*(\mathbf{x})=\{\Phi^*_1,\ \Phi^*_2,\dots,\Phi^*_m\}$ — вектор выходной информации; $\Phi(\alpha)=\{\Phi_1(\alpha),\ \Phi_2(\alpha),\dots,\Phi_m(\alpha)\}$ — вектор заданных преобразований параметров $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_\rho)$; $R=R[\Phi^*,\ \Phi(\alpha)]$ — функция потерь (функция риска); $f=f(\mathbf{x},\ \alpha)$ — вероятностная мера, описывающая векторы $\mathbf{x}$ и α (размерность $n+\rho$).

Для детерминированных α размерность f сокращается до величины n.

Структурная схема типовой стохастической обработки информации представлена на рис. 3. Функционирование системы происходит следующим образом. По команде устройства управления реализация исследуемого случайного процесса из устройства сбора и хранения информации поступает одновременно на устройство проверки гипотез и устройство формирования априорных значений оцениваемых параметров. Информация, получаемая в устройстве проверки гипотез, используется в дальнейшем для выбора алгоритма определения требуемых характеристик и оптимизации параметров устройств формирования характеристик случайных процессов. За счет использования информации, получаемой в устройстве проверки гипотез, обеспечивается оперативность и точность формирования необходимых характеристик.

Известен ряд систем обработки случайных процессов. Например, ДИКС [Л. 9, 30], все узлы которой выполнены на полупроводниковых элементах, позволяет измерять мгновенные значения реализаций исследуемых процессов, формировать интегральные одномерные законы распределения, определять корреляционные функции и спектральные плотности. С целью анализа инфразвуковых процессов в ДИКС использовано преобразование временного масштаба с помощью запоминающего устройства на магнитном барабане.

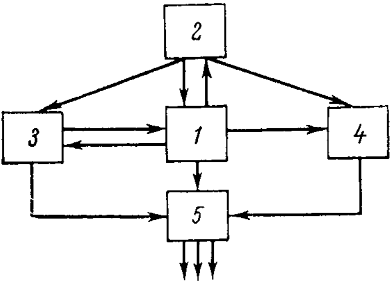


Рис. 3. Структурная схема типовой системы обработки случайных процессов.

1 — устройство управления; *2* — устройство сбора и хранения информации; *3* — устройство проверки гипотез; *4* — устройство формирования априорных характеристик; *5* — устройство получения требуемых характеристик.

На рис. 4 приведена структурная схема ДИКС. Внешнее устройство состоит из двух узлов. В первом узле преобразуются непрерывные величины, задаваемые в виде графиков на лентах и пленках. Этот узел выполнен в виде двух блоков: один на фотодиодах, а другой на телевизионной трубке «Видикон». Считывание графиков производится с диаграммной ленты шириной от 36

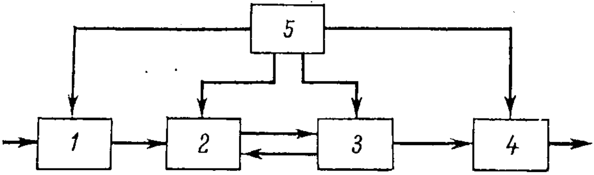


Рис. 4. Структурная схема ДИКС.

1 — внешнее устройство; *2* — запоминающее устройство; *3* — арифметическое устройство; *4* — выходное устройство; *5* — устройство управления.

до 300 мм. Далее происходит преобразование графиков в четырехразрядные двоичные числа. Второй узел преобразует случайные процессы из непрерывной в дискретную форму с последующим вводом в запоминающее устройство (ЗУ). Помимо хранения информации запоминающее устройство обеспечивает также образование необходимого временного сдвига при вычислении корреляционных функций. Арифметическое устройство реализует алгоритмы формирования статистических характеристик случайного процесса.

Выходное устройство позволяет регистрировать результаты вычислений в виде цифровых таблиц с помощью электрической печатающей машинки. Вычисление одного значения корреляционной функции производится за 0,5 *сек*.

Среди ряда задач, выполняемых системами обработки данных, следует отметить:

выделение (фильтрацию) полезной информации в присутствии помех;

прогнозирование случайных процессов;

сглаживание результатов измерений;

оценку характеристик случайных процессов.

Для иллюстрации постановок задач, связанных с функционированием систем обработки информации, рассмотрим некоторые структурные схемы.

На рис. 5 представлена структурная схема выделения полезного сигнала в присутствии помех, где $x(t) = \psi[W, N]$ — входной процесс, содержащий полезную W и шумовую N компоненты; $R[AW, W^*_n]$—функция риска; W^*_n — выходной процесс; A^t_τ — заданный оператор.

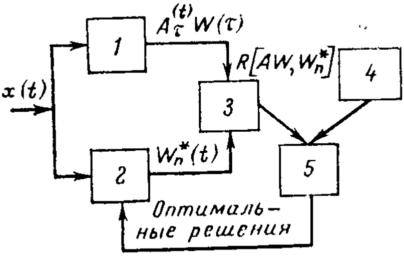


Рис. 5. Структурная схема для выделения полезного сигнала на фоне помех.

1 — идеальная система выделения; *2* — реальная система выделения; *3* — устройство сравнения; *4* — априорная информация; *5* — устройство оптимизации.

Роль идеальной системы выделения может выполнять эталонный сигнал (например, в системах обучения).

Среди систем обработки данных особое место занимают иерархические системы. Под иерархической стохастической системой обработки информации понимается совокупность упорядоченных подсистем $S_1, S_2, \ldots, S_r$, т. е.

$$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_r\}, \tag{13}$$

где подсистема S_i есть стохастическая система обработки информации i-го ранга.

На рис. 6 показана система (13). На первом ранге ($i=1$) подсистема S_1 задается выражением вида (12)

$$S_1=\{\mathbf{x},\ \Phi^{*(1)},\ \Phi^{(1)}(\alpha^{(1)}),\ R_1,\ f_1\}.$$

На следующем уровне имеем подсистему

$$S_2=\{\Phi^{*(1)},\ \Phi^{*(2)},\ \Phi^{(2)}(\alpha^{(2)}),\ R_2,\ f_2\}.$$

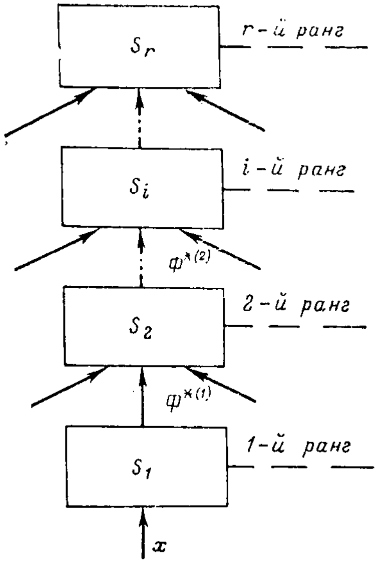


Рис. 6. Иерархическая стохастическая система обработки информации.

Таким образом, выход подсистемы i-го ранга является одновременно одним из входов подсистемы S_{i+1}. То обстоятельство, что на вход подсистемы i-го ранга поступает информация вида $\Phi^{*(i-1)}(\Phi^{*(i-2)}$, приводит к необходимости использования соответствующих вероятностных распределений оценок $\Phi^{*(i-1)}$, а не вероятностного распределения выборки $\mathbf{x}$.

В простейшем случае при $r=2$ и $\Phi(\alpha)=\alpha$ получаем двухуровневую систему, схема которой представлена на рис. 7. Здесь подсистема S_1 выполняет задачу предварительного анализа информации $\mathbf{x}$, а система S_2 — окончательного анализа.

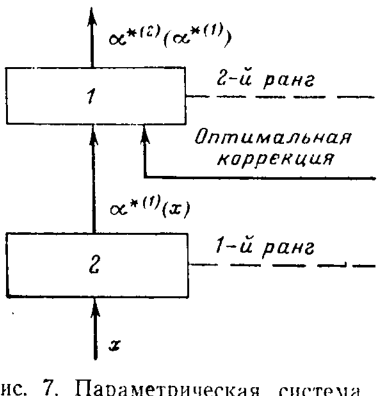


Рис. 7. Параметрическая система обработки сигналов на фоне помех.

1 — подсистема окончательной обработки; *2* — подсистема предварительной обработки.

Целесообразность разбиения процедуры обработки на два последовательных этапа обусловливается несколькими причинами:

территориальной протяженностью между источником информации **x** и ее потребителем, что приводит к необходимости передачи информации по линиям связи, обладающим конечной пропускной способностью;

необходимостью учета различного характера априорной информации, изменяющейся в зависимости от характера условий, создающихся в районе источника информации;

ограничениями по весам и габаритам на аппаратуру, располагаемую в районе источника информации.

Система предварительной обработки должна с минимальной временной задержкой осуществлять простей-

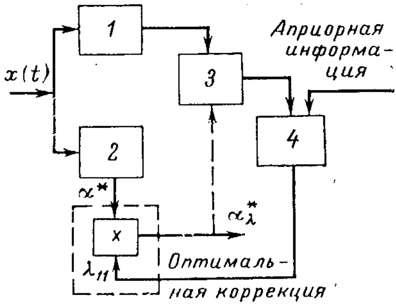


Рис. 8. Система обработки с использованием одной параметрической функции.

1 — идеальная система; *2* — система предварительной обработки; *3* — система сравнения; *4* — система оптимизации.

шие процедуры обработки и анализа случайного процесса и тем самым осуществлять сжатие информации. Система окончательной обработки должна являться по существу корректирующей. Коррекция результатов предварительной обработки может осуществляться с помощью параметрических функций.

В целом структурная схема обработки характеристик случайных процессов на основе использования одной параметрической функции представлена на рис. 8.

В более общем варианте реальная система обработки с параметрической коррекцией имеет вид, представленный на рис. 9. Здесь Φ^* и Φ^*_λ — оценки заданной функции $\Phi(\alpha)$. Аналитическое выражение окончательной оценки имеет вид:

$$\Phi^*_\lambda = \sum_{j=0}^{l} \lambda_{lj}\varphi_j(z).$$

При наличии n источников информации может использоваться весовая обработки в соответствии со структурой, представленной на рис. 10. Здесь оценка α^*_λ принимает вид:

$$\alpha^*_\lambda = \lambda_1\alpha^*_1 + \lambda_2\alpha^*_2 + \ldots + \lambda_n\alpha^*_n.$$

Вводя обозначения $\alpha^*_j = z_j$, можно прийти к структуре, соответствующей реализации полиномов Колмогорова—

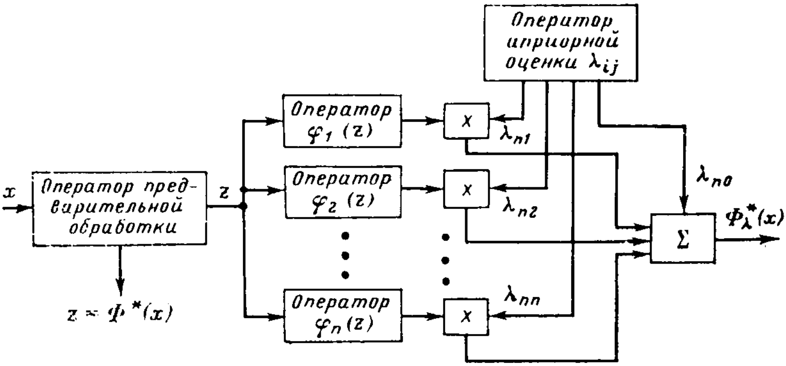


Рис. 9. Система параметрической коррекции общего вида.

Габора, которые, в частности, при $n=2$ принимают вид:

$$\alpha^*_\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_1 z_2.$$

Соответствующая структура вычислительного устройства приведена на рис. 11.

Интерес представляет еще неисследованная структура реальной системы (рис. 12). Примером операторов такой структуры могут служить интегральные опе-

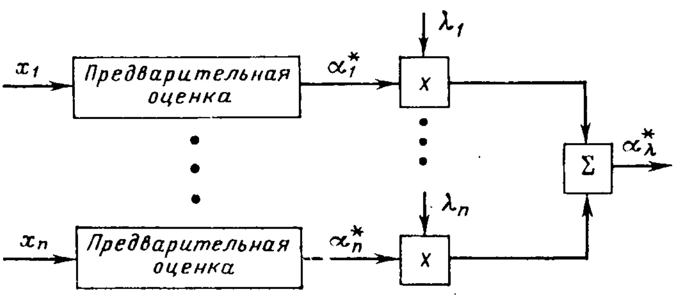


Рис. 10. Многомерная система весовой обработки.

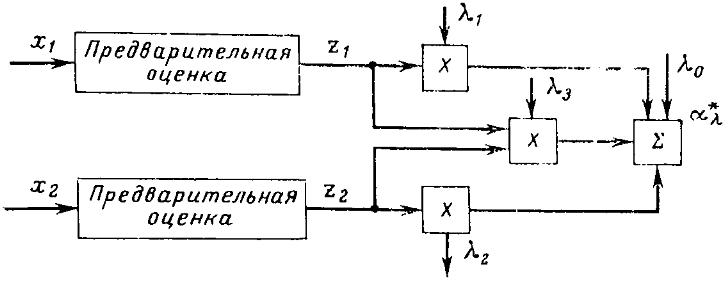


Рис. 11. Структура алгоритма полиноминального разложения.

раторы

$$\alpha^*_\lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau,$$

где $h(\tau)$ — весовая функция системы обработки с жестким алгоритмом, т. е. с известной весовой функцией $h(\tau)$, являющейся импульсной реакцией линейной системы, что следует из вида интегрального оператора.

Исследуя параметрические структуры оценок параметров случайных процессов, интересно остановиться на

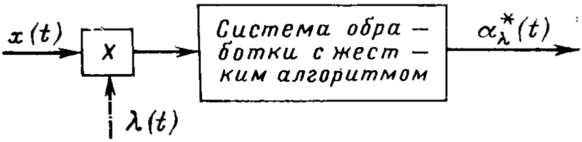


Рис. 12. Система обработки с жестким алгоритмом.

представлении указанных структур в виде систем, охваченных обратными связями. Такая интерпретация позволяет углубить знания особенностей параметрического подхода к проблеме оценок.

Отметим, что в экономических исследованиях используется так называемый мультипликатор Кейнса [Л. 13], представляющий собой преобразование некоторой системой автоматического регулирования входных сигналов X. Уравнение автоматической системы регулирования (АСР), представленной на рис. 13, имеет вид:

$$Y = X + kY,$$

откуда

$$Y = \frac{1}{1-k} X = \lambda X.$$

где $\lambda = 1/(1-k)$ — мультипликатор Кейнса (в наших определениях это параметрическая функция мультипликативной модели).

Применительно к автоматическому определению статистических оценок схема на рис. 13 может быть представлена как часть схемы, изображенной на рис. 14. В соответствии с рис. 14 имеем:

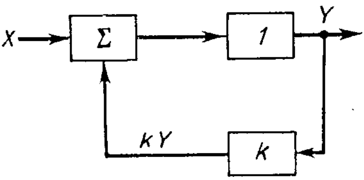


Рис. 13. Структура мультипликатора Кейнса.

$$\alpha^*_\lambda(t) = \frac{1}{1-k} \alpha^*(t).$$

Рассмотрение схемы на рис. 14 приводит к мысли об ее обобщении. Один из вариантов такого обобщения представлен на рис. 15. Здесь имеет место уравнение

$$\alpha^*_k(t) = k_1[\alpha^*(t) + k_2\alpha^*_k(t)],$$

откуда

$$\alpha^*_k(t) = \frac{k_1}{1 - k_1 k_2} \alpha^*(t).$$

Заметим, что величины k_1, k_2, k могут быть функциями времени, вырабатываемыми специальными генераторами. В этом случае схема, представленная на рис. 15, примет вид, изображенный на рис. 16.

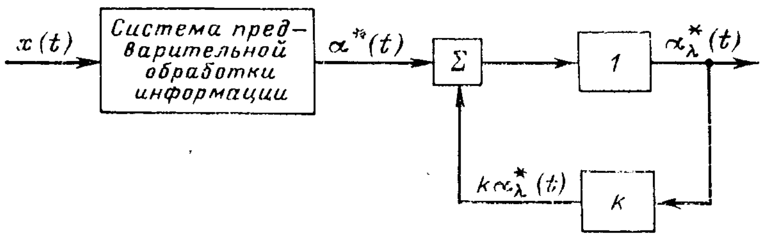


Рис. 14. Система автоматического определения оценки статистических параметров.

Структуры с обратной связью позволяют обеспечить принцип параметрической коррекции предварительных оценок. С точки зрения теории АСР параметрические

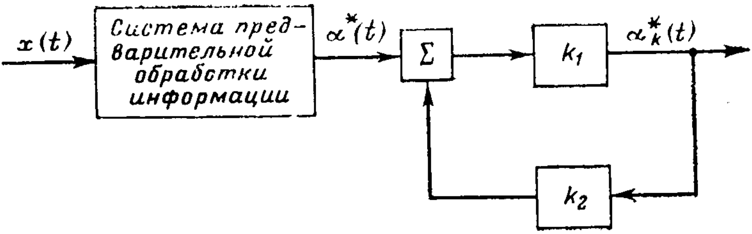


Рис. 15. Структура обобщенной системы автоматического определения статистических параметров.

структуры осуществляют регулирование по принципу компенсации возмущений. В связи с указанным возникают новые задачи:

разработка соответствующих параметрических структур, функционирующих по принципу выравнивания отклонений;

нахождение связи с теорией инвариантных систем.

В заключение параграфа отметим, что используемый принцип разделения функций в реальной системе оценок

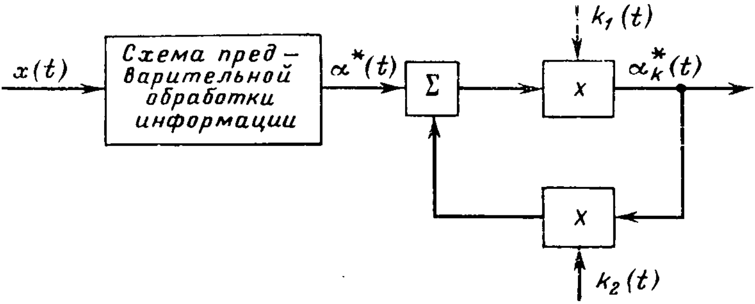


Рис. 16. Система обработки с обратной связью.

характеристик на предварительные и окончательные с применением параметрических корректирующих функций позволяет:

использовать уже имеющиеся системы оценок характеристик с добавлением несложной корректирующей системы;

упростить структуру системы обработки в целом (по весам, габаритам, надежности, живучести, экономичности и пр.);

уменьшить загрузку линий связи, если система предварительной обработки разнесена в пространстве с ее потребителем.

Следует иметь в виду, что определение параметрической функции можно осуществить на базе некоторой итерационной процедуры, которая носит адаптивный характер. В чем адаптивность рассматриваемой схемы обработки случайных процессов? Адаптивность состоит в том, что до обработки параметрическая функция устанавливается априори, а затем уточняется на основе результатов предварительного (первого) этапа обработки.

Особенностью использования метода параметрических функций является необходимость анализа структуры первых двух моментов предварительно выбранной оценки $\Phi^*(x)$. Как показано в § 6, при использовании условия несмещенности должно соблюдаться соответствие структуры параметрической оценки $\Phi^*_\lambda(x)$ структуре условного математического ожидания $M_{x\,|\,\alpha}\,\Phi^*(x)$.

Причинами повышения эффективности систем параметрической коррекции по сравнению с некорректируемыми системами в случае использования неполной информации относительно оцениваемых характеристик являются:

введение структурной избыточности;

наличие регуляции параметров системы обработки информации;

неоптимальность алгоритмов предварительной обработки информации.

3. ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Аппроксимативные методы анализа случайных процессов лежат в основе важного класса систем статистической обработки информации — измерительных статистических систем (ИСС) [Л. 11].

Сущность функционирования ИСС заключается в сравнении того или иного вида статистической информации с некоторым эталоном и выдаче количественной меры результата измерения и оценки его точности.

Обычно исследователь располагает следующими видами информации:

исходной информацией в форме реализаций случайных процессов $x(t)$;

результатами обработки (формирования оценок) $\alpha^* = \alpha^*(x(t))$.

Следовательно, при построении ИСС необходимо предусматривать соответствующие эталоны. В результате получим три типа ИСС.

В ИСС первого типа (ИСС-1) в качестве эталонов выступают реализации стандартных случайных процессов. Упрощенная структурная схема ИСС-1 представлена на рис. 17. Здесь в блоке формирования классификационных признаков может определяться также оценка

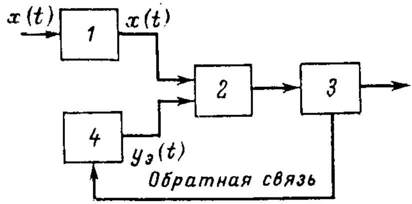


Рис. 17. Структурная схема ИСС-1.

1 — запоминающее устройство; *2* — блок формирования классификационных признаков; *3* — классификатор случайных процессов; *4* — генератор стандартных случайных процессов.

неизвестного параметра распределения вероятностей. Классификатор случайных процессов осуществляет по существу сравнение исходной реализации $x(t)$ с реализацией эталонного случайного процесса $y_э(t)$. На выходе ИСС-1 получаются тип исследуемого процесса и вектор классификационных признаков $\beta^*(x)$.

Существенным недостатком ИСС-1 является отсутствие аппроксимаций оценок α^*, входящих в состав вектора $\beta^*(x)$, что затрудняет их дальнейшее практическое использование.

Измерительная статистическая система второго типа (ИСС-2) имеет в качестве эталонов только характеристики искомых параметров распределения вероятностей. На рис. 18 представлена структурная схема ИСС-2. Особенностью схемы является наличие устройства аппроксимации характеристик. Так, если в качестве оцениваемой характеристики выступает нормированная корреляционная функция $R_н(\tau)$, то эталонными характеристиками могут быть отрезки ряда

$$\psi_n(\tau) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(\tau).$$

Здесь c_j — коэффициенты, получаемые из условия минимума некоторого функционала потерь $R[R^*_н(\tau), \psi_n(\tau)]$, где $R^*_н(\tau)$ — оценка функции $R_н(\tau)$. Коэффициенты c_j

автоматически вычисляются в устройстве аппроксимации характеристик.

Недостатком ИСС-2 является отсутствие возможности калибровать и настраивать устройство статистической обработки случайных процессов.

От указанных недостатков ИСС-1 и ИСС-2 свободен третий тип измерительных систем (ИСС-3). Здесь име-

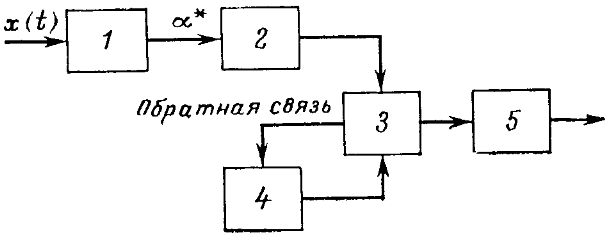


Рис. 18. Структурная схема ИСС-2.

1 — устройство статистической обработки случайных процессов; *2* — запоминающее устройство; *3* — устройство сравнения; *4* — устройство хранения эталонных характеристик; *5* — устройство аппроксимации характеристик.

ются эталоны как случайных процессов, так и им соответствующие эталонные характеристики. Структурная схема ИСС-3 представлена на рис. 19.

Система осуществляет:

автоматическую классификацию исследуемых случайных процессов;

формирование оценок характеристик случайных процессов;

сопоставление (сравнение) оценок со стандартными характеристиками и получение количественных результатов.

В канале классификации случайных процессов осуществляется:

формирование оценок классификационных признаков (к числу которых могут относиться, например, признаки нестационарности, эргодичности, «нормальности» и др.);

опознавание (классификация) типа случайного процесса в соответствии с принятыми правилами решений;

формирование (генерирование) реализаций стандартных случайных процессов соответствующих типов (для оптимизации параметров измерительной системы и ее калибровки).

Для нормального функционирования измерительных систем важное значение приобретают вопросы калибровки и настройки всей аппаратуры, что возможно благодаря использованию метода параметрических функций.

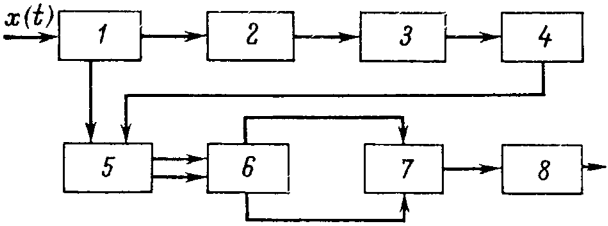


Рис. 19. Структурная схема ИСС-3.

1, 6 — запоминающие устройства; *2* — блок формирования классификационных признаков; *3* — классификаторы случайных процессов; *4* — генератор стандартных случайных процессов; *5* — устройство статистической обработки; *7* — устройство сравнения; *8* — устройство аппроксимации характеристик.

Пусть $\alpha_э$ — эталонная характеристика случайного процесса и α^* соответствующая ей оценка.

Вводя функцию риска $R\left[\alpha_э, \sum_{j=1}^{l} \lambda_{lj} (\alpha^*)^j\right]$, можно найти оптимальные значения параметрических функций λ_{lj}, установив которые в измерительной системе, можно затем переходить к измерениям характеристик α исследуемых случайных процессов.

4. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

При решении задач статистических исследований информации необходимо иметь в виду различные формы задания информации. Наиболее распространенными формами являются случайные величины и случайные процессы.

Случайные величины классифицируются в основном по принадлежности к тому или другому закону распределения вероятностей, полностью определяющему любую случайную величину. По этому признаку различают гауссовские, релеевские, пуассоновские и другие типы случайных величин.

Наиболее трудными в классификационном отношении являются такие объекты, как случайные процессы. До настоящего времени отсутствует достаточно четкая и приемлемая с инженерной точки зрения классификация случайных процессов.

По отсутствию или наличию зависимости характеристик или вероятностных мер от времени различают стационарные и нестационарные случайные процессы соответственно.

Стационарные случайные процессы являются математической абстракцией и соответствуют физическим процессам с устойчивым режимом.

Следует иметь в виду, что состояние вопросов статистической обработки именно стационарных случайных процессов является более или менее удовлетворительным. Проблема обработки нестационарных случайных процессов еще ждет своего решения.

Основными типами нестационарных случайных процессов являются:

эргодические нестационарные процессы;

квазистационарные процессы;

случайные процессы, нестационарные по математическому ожиданию, дисперсии, начальной моментной функции второго порядка, корреляционной функции и пр.:

периодические и почти периодические нестационарные случайные процессы;

мультипликативные;

аддитивные;

сепарабельные;

процессы со стационарными приращениями;

процессы с некоррелированными приращениями;

процессы со стационарными n-ми производными;

импульсные случайные процессы.

Стационарные случайные процессы делятся:

по виду корреляционной функции на экспоненциально-косинусные, экспоненциально-коррелированные, дельта-коррелированные процессы (процессы типа «белого шума»);

по наличию эргодических свойств на эргодические по математическому ожиданию, дисперсии, корреляционной функции и неэргодические.

На рис. 20 представлена взаимосвязь основных типов случайных процессов.

3—495

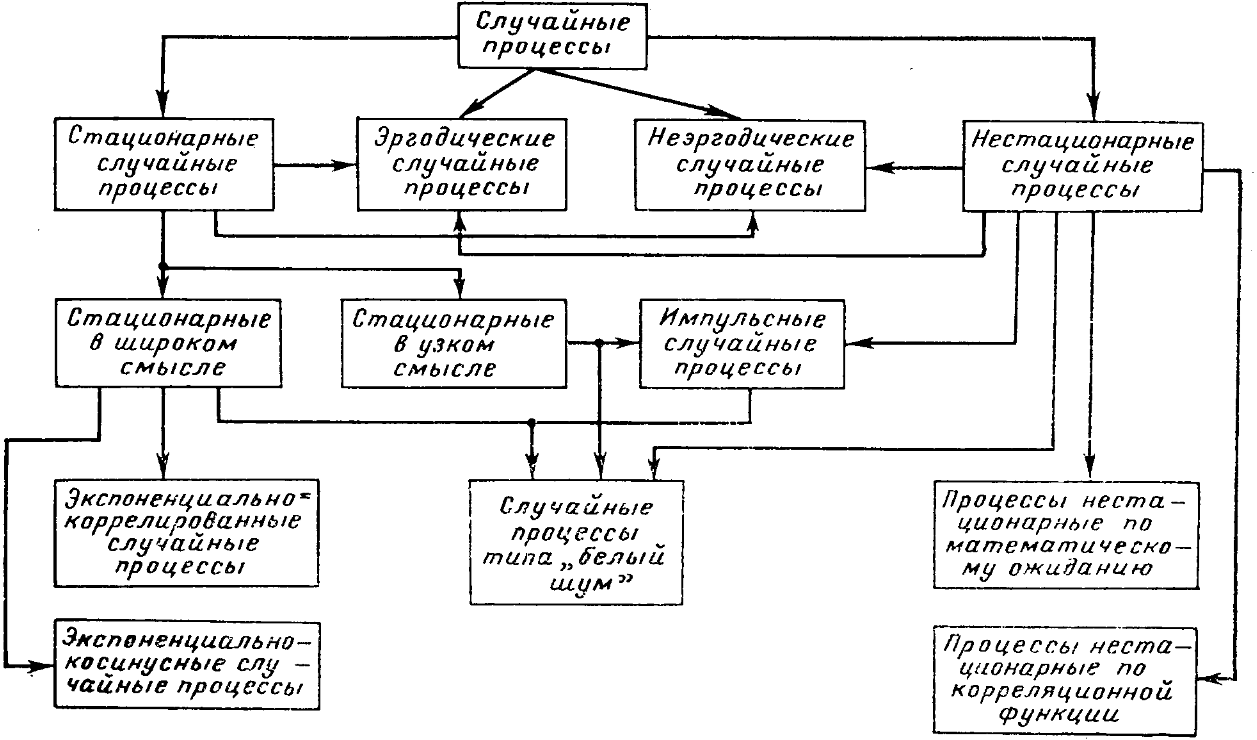


Рис. 20. Основные типы случайных процессов.

Весьма актуальной и пока нерешенной является задача автоматической (аппаратурной) классификации случайных процессов по наблюдаемым их реализациям. Для решения этой задачи необходимо провести исследования по определению классификационных признаков. В качестве таких признаков могут служить оцениваемые характеристики случайных процессов, которые рассмотрены в § 5.

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основными характеристиками случайных процессов являются моментные функции: математические ожидания, дисперсии, корреляционные и структурные функции, спектральные плотности, а также функционалы — интервалы корреляции различных порядков и др. [Л. 19, 28].

Рассмотрим более подробно характеристики случайных процессов.

1. *Математическое ожидание случайного процесса во временной области.* Аналитическая форма названной характеристики имеет вид:

$$m_{\text{в}}(t) = MX(t) = \int\limits_{\Omega_x} x(t) f[x(t), t]\, dx(t),$$

где Ω_x — область возможных значений $X(t)$; $f[x(t), t]$ — плотность распределения мгновенных значений $x(t)$ в момент времени t.

Характеристика $m_{\text{в}}(t)$ является предметом исследований при решении задач центрирования случайных процессов, нестационарных по математическому ожиданию во временной области.

2. *Математическое ожидание случайного процесса в частотной области.* Аналитическая форма характеристики

$$m_{\text{ч}}(\varphi) = MY(\varphi),$$

где

$$Y(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-2\pi i\varphi t}\, dt, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Параметр $m_{\text{ч}}(\varphi)$ используется при центрировании случайных процессов, нестационарных по математическому ожиданию в частотной области.

3. *Средние математические ожидания* соответственно во временной и в частотной областях

$$\bar{m}_{\text{в}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T m_{\text{в}}(t)\,dt;$$

$$\bar{m}_{\text{ч}} = \frac{1}{\Delta f}\int\limits_0^{\Delta F} m_{\text{ч}}(\varphi)\,d\varphi,$$

где T и ΔF — интервалы усреднения. Параметры $\bar{m}_{\text{в}}$ и $\bar{m}_{\text{ч}}$ используются для определения соответствия нестационарного процесса эквивалентному стационарному.

4. *Математическое ожидание случайного процесса совместно во временной и в частотной областях (спектр мгновенной мощности)*

$$\Phi(\varphi,\ t) = MZ(\varphi,\ t),$$

где

$$Z(\varphi, t) = X(t)\,Y(\varphi)\,e^{2\pi i\varphi t}.$$

Спектр мгновенной мощности используется для описания радиолокационных сигналов и в других приложениях.

5. *Корреляционная функция случайного процесса во временной области*

$$R_{\text{в}}(t,\ \tau) = M[X_0(t)\,X_0(t\pm\tau)],$$

где

$$X_0(t) = X(t) - m_{\text{в}}(t),$$

используется при корреляционном анализе большого круга явлений и процессов.

6. *Корреляционная функция случайного процесса в частотной области*

$$R_{\text{ч}}(\varphi,\ \nu) = M[Y_0(\varphi)\,Y^*_0(\varphi\pm\nu)];$$

$$Y_0(\varphi) = Y(\varphi) - m_{\text{ч}}(\varphi),$$

где $Y^*_0(\varphi)$ — комплексно-сопряженная функция.

Функция $R_{\text{ч}}(\varphi,\ \nu)$ используется для получения дополнительной информации, учитывающей нестационарный характер исследуемых процессов.

7. *Корреляционная функция случайного процесса совместно во временной и в частотной областях*

$$R_{\text{в.ч}}(t,\ \tau,\ \varphi,\ \nu) = M[Z_0(\varphi,\ t)\,Z^*_0(\varphi+\gamma,\ t+\tau)],$$

где

$$Z_0(\varphi, t) = Z(\varphi, t) - \Phi(\varphi, t).$$

Функция $R_{в.ч}(t, \tau, \varphi, \nu)$ может использоваться в теоретических исследованиях преобразований нестационарных случайных процессов.

8. *Средние корреляционные функции соответственно во временной, частотной и совместно во временной и частотной областях*

$$\overline{R}_в(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T R_в(t, \tau)\,dt;$$

$$\overline{R}_ч(\nu) = \frac{1}{\Delta F}\int_0^{\Delta F} R_ч(\varphi, \nu)\,d\varphi;$$

$$\overline{R}_{в.ч}(\tau, \nu) = \frac{1}{T\Delta F}\int_0^T\int_0^{\Delta F} R_{в.ч}(t, \tau, \varphi, \nu)\,dt\,d\varphi.$$

Указанные функции используются в прикладных задачах, связанных со статистическим анализом кратковременных сигналов.

9. *Взаимная корреляционная функция*

$$R(t_1, t_2) = M[X_0(t_1)\,Y^*_0(t_2)].$$

10. *Структурная функция случайного процесса во временной области*

$$C_в(t, \tau) = M[X(t) - X(t-\tau)]^2.$$

Функция $C_в(t, \tau)$ используется при описании случайных процессов со стационарными приращениями.

11. *Структурная функция случайного процесса в частотной области*

$$C_ч(\varphi, \nu) = M[Y(\varphi) - Y(\varphi-\nu)]^2;$$

12. *Обобщенные структурные функции соответственно во временной и в частотной областях*

$$C_{вs}(t) = M[X(t) - SX(t)]^2;$$

$$C_{чs}(\varphi) = M[Y(\varphi) - SY(\varphi)]^2,$$

где S — оператор текущего среднего. Эти функции используются при статистическом анализе гидроакустических сигналов, информации физиологического типа.

13. *Спектральная плотность*

$$G(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{в}}(t, \tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Для стационарных вещественных случайных процессов справедливы соотношения

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} R_{\text{в}}(\tau) \cos \omega\tau d\tau;$$

$$R_{\text{в}}(\tau) = \int_{0}^{\infty} G(\omega) \cos \omega\tau d\omega.$$

Спектральная плотность используется при частотном подходе к изучаемым процессам.

14. *Средняя квадратическая частота случайного процесса*

$$\omega_{\text{п}} = \sqrt{\frac{\int_{0}^{\infty} \omega^2 G(\omega)\, d\omega}{\int_{0}^{\infty} G(\omega)\, d\omega}}.$$

15. *Сравнительная корреляционная функция*

$$S(t, \tau) = M\,|X(t) - X(t-\tau)|,$$

используемая при корреляционном анализе случайных импульсных потоков [Л. 7].

16. *Вероятностно-знаковые функции во временной и в частотной областях*

$$Q_{\text{в}}(t, \tau) = M\eta(t, \tau);$$

$$Q_{\text{ч}}(\varphi, \nu) = M\gamma(\varphi, \nu),$$

где

$$\eta, \gamma = \begin{cases} 1, & \text{если знаки процесса } X(t) \text{ или } Y(\varphi) \text{ в моменты } t \text{ и } t+\tau\, (\varphi, \varphi+\nu) \text{ одинаковы,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эти функции используются при корреляционной обработке гауссовских случайных процессов.

17. *Корреляционные моменты*

$$a_\nu^{(R)}=\int\limits_0^\infty \tau^\nu R_в(t,\tau)\,d\tau;$$

$$q_\nu^{(R)}=\int\limits_0^\infty |R_{в.н}(t,\tau)|^\nu\,d\tau;$$

$$q_{ср}^{(R)}=\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m} q_\nu^{(R)}.$$

Здесь $R_{в.н}(t,\ \tau)$ — нормированная корреляционная функция процесса во временной области.

18. *Параметры колебательности*

1) $\varkappa=\beta/\alpha$ (используется при инженерных статистических расчетах), где α и β — характеристики нормированной корреляционной функции вида

$$R_{в.н}(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau;$$

2)

$$\theta=\frac{\int\limits_0^\infty |R_н(\tau)|\,d\tau-\int\limits_0^\infty R_н(\tau)\,d\tau}{\int\limits_0^\infty |R_н(\tau)|\,d\tau}.$$

Параметр θ используется в качестве меры устойчивости функционирования вычислительных систем.

19. *Коэффициент вариации*

$$k_в=\frac{\delta(t)}{m_в(t)},$$

$\sigma^2(t)=M[X(t)-m_в(t)]^2$ — текущая дисперсия.

20. *Коэффициенты эксцесса и асимметрии*

$$E=\frac{\mu^4}{\sigma^4}-3;$$

$$S=\frac{\mu^3}{\sigma^3};$$

$$\mu^n=M[X(t)-m_в(t)]^n,\ n=3,\ 4.$$

21. *Интенсивность случайного процесса*

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)},$$

где $f(t)$ — плотность вероятности величины t;

$$P(t) = \int_t^\infty f(\tau)\, d\tau.$$

Параметр $\lambda(t)$ используется при исследованиях надежности систем.

6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УСЛОВИЯ НЕСМЕЩЕННОСТИ ОЦЕНОК

При обработке информации возникают ситуации, когда выбранная из каких-либо необходимых, например, конструктивно-технологических требований предварительная оценка $\Phi^*(\mathbf{x})$ оказывается смещенной. Смещенными в ряде случаев оказываются оценки, получаемые методом максимального правдоподобия. Часто требование оперативности статистической обработки удовлетворяется алгоритмами определенной структуры, получаемыми, например, эвристическими процедурами. К таким алгоритмам, в частности, относится алгоритм вычисления корреляционной функции, основанный на использовании переменной во времени задержки. Этот алгоритм приводит к смещенной оценке, для компенсации которой Г. А. Балл [Л. 2, 3] предложил мультипликативную коррекцию, являющуюся примером использования метода параметрических функций. Целесообразность использования условия несмещенности обусловливается задачами последующего применения получаемых оценок, а также их простотой и сокращением уровня дисперсии. Кроме того, алгоритмы параметрической коррекции при использовании условия несмещенности оказываются наиболее простыми для практической реализации.

Итак, если некоторая (предварительная) заданная оценка $\Phi^*(\mathbf{x})$ является смещенной, то выбором одной параметрической функции можно получить новую оценку $\Phi^*_\lambda(\mathbf{x})$, обладающую свойством несмещенности.

Условия несмещенности имеют вид:

для случайных α

$$M_{x\alpha}\Phi^*_\lambda(\mathbf{x}) = M_\alpha\, \Phi(\alpha); \qquad (14)$$

для детерминированных α

$$M_{x|\alpha}\Phi^*_\lambda(\mathbf{x}) = \Phi(\alpha). \tag{15}$$

Поскольку $M_\alpha M_{x|\alpha} = M_{x\alpha}$, то имеет место также соотношение

$$M_\alpha M_{x|\alpha}\Phi^*_\lambda(\mathbf{x}) = M_\alpha \Phi(\alpha).$$

Принимая

$$\Phi^*_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_{10}^{(\varepsilon)} + \Phi^*(\mathbf{x}) \text{ или } \Phi^*_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_{11}^{(\varepsilon)}\Phi^*(\mathbf{x}),$$

находим:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{10}^{(\varepsilon)} &= M_\alpha\Phi(\alpha) - M_{x\alpha}\Phi^*(\mathbf{x}); \\ \lambda_{11}^{(\varepsilon)} &= \frac{M_\alpha\Phi(\alpha)}{M_{x\alpha}\Phi^*(\mathbf{x})}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Из выражения (16) следует, что параметрические функции $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ и $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$ связаны между собой соотношениями

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = M_{x\alpha}\Phi^*(\mathbf{x})[\lambda_{11}^{(\varepsilon)} - 1];$$

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = 1 + \frac{\lambda_{10}^{(\varepsilon)}}{M_{x\alpha}\Phi^*(\mathbf{x})}.$$

Наличие указанных соотношений позволяет осуществлять переход от мультипликативной структуры к аддитивной и обратно. Учитывая вопросы реализации соответствующих структур, следует отдавать предпочтение аддитивной структуре, однако не во всех случаях.

Для детерминированных $\Phi(\alpha)$ параметрические функции $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ и $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$ в общем случае зависят от оцениваемых параметров $\Phi(\alpha)$, интерес представляет определение условий, при которых $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ и $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$ не зависят от $\Phi(\alpha)$.

Из анализа (16) вытекают условия

$$M_{x|\alpha}\Phi^*(\mathbf{x}) = \Phi(\alpha) - \beta; \tag{17}$$

$$M_{x|\alpha}\Phi^*(\mathbf{x}) = \gamma\Phi(\alpha), \tag{18}$$

где β и γ — произвольные постоянные, не зависящие от $\Phi(\alpha)$.

Таким образом, параметрические функции $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ и $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$ не зависят от $\Phi(\alpha)$, если математические ожидания предварительных оценок в первом случае (для $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$) имеют аддитивную структуру (17) и во втором случае (для $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$) — мультипликативную структуру (18). При этом соответствующие параметрические функции принимают вид:

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = \beta; \quad \lambda_{11}^{(\varepsilon)} = 1/\gamma.$$

Если же вопреки условиям (17) и (18) воспользоваться в первом случае мультипликативной параметрической оценкой, а во втором — аддитивной, то получим соотношения для $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ и $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$, зависящие от $\Phi(\alpha)$:

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{\Phi(\alpha)}{\Phi(\alpha) - \beta}; \quad \lambda_{10}^{(\varepsilon)} = (1 - \gamma)\,\Phi(\alpha).$$

Таким образом, прежде чем выбирать ту или иную структуру параметрических оценок, целесообразно провести анализ структуры условного математического ожидания предварительной оценки $\Phi^*(x)$. Указанные структуры по возможности должны соответствовать друг другу.

Полученные выше результаты сведены в табл. 1.

Таблица 1

Общий вид параметрических функций

Структура условного математического ожидания $M_{x\mid x}\,\Phi^*(x)$	Структура оценки $\Phi^*_\lambda(x)$	
	Аддитивная $\Phi^*_\lambda(x) = \lambda_{10}^{(\varepsilon)} + \Phi^*(x)$	Мультипликативная $\Phi^*_\lambda(x) = \lambda_{11}^{(\varepsilon)}\Phi^*(x)$
Аддитивная $M_{x\mid\alpha}\,\Phi^*(x) = \Phi(\alpha) - \beta$	$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = \beta$	$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{\Phi(\alpha)}{\Phi(\alpha) - \beta}$
Мультипликативная $M_{x\mid\alpha}\,\Phi^*(x) = \gamma\Phi(\alpha)$	$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = (1 - \gamma)\,\Phi(\alpha)$	$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\gamma}$

Средние квадраты ошибок оценок Φ^*_λ имеют следующий вид:

1. При использовании $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$

$$\overline{R}(\lambda_{10}^{(\varepsilon)}) = M_{x\alpha}[\Phi(\alpha) - \lambda_{10}^{(\varepsilon)} - \Phi^*(x)]^2 =$$

$$= M_\alpha M_{x\mid\alpha}[\Phi(\alpha) - \Phi^*(x)]^2 - [M_\alpha\Phi(\alpha) - M_x\Phi^*(x)]^2 =$$

$$= \sigma^2_{\text{ош}} - \{M_{x\alpha}[\Phi(\alpha) - \Phi^*(x)]\}^2 = \sigma^2_{\text{ош}} - \sigma^2_{\text{см}} = d = D\Phi^2(x),$$

где D — символ дисперсии; $\varepsilon^2_{\text{см}} = \{M_{x\alpha}[\Phi(\alpha) - \Phi^*(x)]\}^2$ — квадрат ошибки смещения; $\sigma^2_{\text{ош}}$ — дисперсия ошибки.

Таким образом, применение $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ обеспечивает не только несмещенность оценки, но также и уменьшение среднего квадрата ошибки на величину $\varepsilon^2_{\text{см}}$ (или, что то же самое, сохранение уровня дисперсии ошибок).

2. При использовании $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$

$$\overline{R}(\lambda_{11}^{(\varepsilon)}) = M_{x\alpha}[\Phi(\alpha) - \lambda_{11}^{(\varepsilon)}\Phi^*(x)]^2 =$$

$$= \sigma^2_{\text{ош}} - a(2-a)M_{x\alpha}[\Phi^*(x)]^2 + 2aM_{x\alpha}[\Phi^*(x)\Phi(\alpha)],$$

где

$$a = 1 - \frac{M_\alpha\Phi(\alpha)}{M_{x\alpha}\Phi^*(x)}.$$

Отсюда следует, что мультипликативная корректирующая поправка может как улучшить, так и ухудшить первоначальную оценку.

Параметрические функции в соответствии с выражениями (16) могут быть подсчитаны заранее по априорной информации. Особенно простыми эти соотношения оказываются для оценок $\Phi^*(x)$, обладающих свойствами

$$M_{x\alpha}\Phi^*(x) = M_\alpha\Phi(\alpha) \oplus M_\alpha C_\alpha\Phi(\alpha),$$

где C_α — некоторый известный оператор; $\oplus$ — некоторая арифметическая операция.

Так, если

$$M_{x\alpha}\,\Phi^*(\mathbf{x}) = M_\alpha\,\Phi(\alpha) - M_\alpha C_\alpha \Phi(\alpha),$$

то

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = M_\alpha\,\Phi(\alpha) - M_\alpha\,\Phi^*(\mathbf{x}) = M_\alpha C_\alpha \Phi(\alpha).$$

Для детерминированных характеристик α и $\Phi(\alpha)$ выражения (16) принимают вид:

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = \Phi(\alpha) - M_{x\,|\,\alpha}\,\Phi^*(\mathbf{x});\quad \lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{\Phi(\alpha)}{M_{x\,|\,\alpha}\,\Phi^*(\mathbf{x})},$$

поскольку

$$M_\alpha\,\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha).$$

Самостоятельный интерес представляет случай, когда

$$\Phi(\alpha) \equiv \alpha \text{ и } \alpha^*(x) = A_\tau^{(t)}\,B_\tau x(\tau),$$

где $A_\tau^{(t)}$ — заданный линейный оператор; B_τ — некоторый оператор (в общем случае нелинейный), удовлетворяющий условию

$$M_{x\,|\,\alpha}\,B_t X(t) = \alpha(t).$$

Примерами оператора B_τ являются:

1) $B_t^{(1)}\,x(t) = x_0^2(t)$. Этот оператор используется при оценках дисперсии, так как

$$M_{x\,|\,\alpha}\,B_t^{(1)}\,X(t) = M_{x\,|\,\alpha}\,X_0^2(t) =$$
$$= M_{x\,|\,\alpha}\,[X(t) - m(t)]^2 = DX = d;$$

2) $B_t^{(2)}\,x(t) = x_0(t)\,x_0(t \pm \tau)$. Этот оператор используется при оценках корреляционных функций, поскольку

$$M_{x\,|\,R}\,B_t^{(2)}\,X(t) = M_{x\,|\,R}\,[X(t) - m(t)][X(t \pm \tau) -$$
$$- m(t \pm \tau)] = R(t, t \pm \tau).$$

С учетом введенных операторов $A_\tau^{(t)}$ и B_τ соотношения (16) можно записать в виде

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = M_\alpha\,\alpha(t) - A_\tau^{(t)}\,M_\alpha\,\alpha(\tau);$$

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{M_\alpha\,\alpha(t)}{A_\tau^{(t)} M_\alpha\,\alpha(\tau)}.$$

Для детерминированных функций $\alpha(t)$ имеем:

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = \alpha(t) - A_\tau^{(t)}\,\alpha(\tau);\quad \lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{\alpha(t)}{A_\tau^{(t)}\,\alpha(\tau)}.$$

Введем обозначение $M_\alpha\,\alpha(t) = \varphi(t)$.

Пусть

$$\varphi(t) = \lambda_c A_\tau^{(t)}\,\varphi(\tau),$$

где λ_c — собственные значения оператора $A_\tau^{(t)}$; $\varphi(t)$ — соответствующие им собственные функции.

С учетом последнего замечания параметрические функции принимают вид:

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = \varphi(t) - \frac{\varphi(t)}{\lambda_c} = \varphi(t)\,\frac{\lambda_c - 1}{\lambda_c};\quad \lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \lambda_c.$$

В качестве примера рассмотрим широко используемый в задачах сглаживания оператор текущего среднего

$$S_\tau^{(t)}\,x(\tau) = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau.$$

В табл. 2 приведены собственные функции и параметрические константы $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$, $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ для оператора $S_\tau^{(t)}$.

Из табл. 2 следует, что для линейных функций $\varphi(t) = a_0 + a_1 t$ параметрические функции $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ и $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$ соответственно равны:

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = 0,\ \lambda_{11}^{(\varepsilon)} = 1.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что применительно к детерминированным (неслучайным) функциям $\Phi(\alpha)$ или $\alpha(t)$ на пути использования метода параметрических функций появляется возможность создания новых алгоритмов статистической обработки. Это обусловливается определением вместо истинных оптимальных параметрических функций соответствующих оценок.

Рассмотрим пример. Используется аддитивная струк-

Таблица 2

Параметрические функции для оператора текущего среднего

№ п/п.	$\varphi(t)$	$\lambda_{11}^{(\varepsilon)}=\lambda_c$	$\lambda_{10}^{(\varepsilon)}=\frac{\lambda_c-1}{\lambda_c}$	Примечание
1	a_0+a_1t	1	0	a_0 и a_1 — произвольные действительные числа
2	$c_1e^{\alpha t}+c_2e^{-\alpha t}$; $c_3\,\mathrm{sh}\,\alpha t+c_4\,\mathrm{ch}\,\alpha t$	$\frac{\alpha T/2}{\mathrm{sh}\,(\alpha T/2)}$	$\frac{\frac{\alpha T}{2}-\mathrm{sh}\,(\alpha T/2)}{\frac{\alpha T}{2}}$	c_1—c_4—произвольные действительные числа
3	$\gamma_1\cos\beta t+\gamma_2\sin\beta t$	$\frac{\beta T/2}{\sin(\beta T/2)}$	$1-\frac{\sin(\beta T/2)}{\frac{\beta T}{2}}$	γ_1 и γ_2 — произвольные действительные числа
4	$(a_0+a_1t)\cos\beta t+$ $+(c_1+c_2t)\sin\beta t$	$\frac{\beta T/2}{\sin(\beta t/2)}$	$1-\frac{\sin(\beta T/2)}{\beta T/2}$	Накладывается дополнительное условие $\mathrm{tg}\,(\beta T/2)=\beta T/2$

тура оценки характеристики $\alpha(t)$ некоторого случайного процесса:

$$\alpha^*_\lambda(t)=\lambda_{10}^{(\varepsilon)}(t)+\alpha^*(t),$$

где $\alpha^*(t)=A_\tau^{(t)}\,x(\tau)$; $A_\tau^{(t)}$ — линейный оператор.

Пусть $M_{x|\alpha}\,X(\tau)=\alpha(t)$. Тогда

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)}(t)=\alpha(t)-M_{x|\alpha}\,\alpha^*(t)=\alpha(t)-A_\tau^{(t)}\,\alpha(\tau).$$

Перейдем к новой параметрической оценке

$$\alpha^{**}_\lambda(t)=\lambda_{10}^{*(\varepsilon)}(t)+\alpha^*(t),$$

где

$$\lambda^*_{10}(t)=\alpha^*(t)-A_\tau^{(t)}\,\alpha^*(\tau).$$

Оценку $\alpha^{**}_\lambda(t)$ можно представить и в иной форме

$$\alpha^{**}_\lambda(t)=2\alpha^*(t)-A_\tau^{(t)}\,\alpha^*(\tau).$$

Рассмотрим выражение для ошибки смещения оценки $\alpha^{**}_\lambda(t)$

$$\varepsilon^{(2)}_{\text{см}}(t) = \alpha(t) - M_{x|\alpha}\,\alpha^{**}_\lambda(t) = A^{(t)}_\tau\, A^{(\tau)}_\beta\, \alpha(\beta) - $$

$$- 2A^{(t)}_\tau\, \alpha(\tau) + \alpha(t).$$

Ошибка смещения $\varepsilon^{(1)}_{\text{см}}(t)$ для первоначальной оценки $\alpha^*(t)$ имеет вид:

$$\varepsilon^{(1)}_{\text{см}}(t) = \alpha(t) - M_{x|\alpha}\,\alpha^*(t) = \alpha(t) - A^{(t)}_\tau\, \alpha(\tau).$$

С учетом $\varepsilon^{(1)}_{\text{см}}(t)$ ошибку $\varepsilon^{(2)}_{\text{см}}(t)$ представим в виде

$$\varepsilon^{(2)}_{\text{см}}(t) = \varepsilon^{(1)}_{\text{см}}(t) - A^{(t)}_\tau\, \alpha(\tau) + A^{(t)}_\tau\, A^{(\tau)}_\beta\, \alpha(\beta) =$$

$$= \varepsilon^{(1)}_{\text{см}}(t) - A^{(t)}_\tau \left[\alpha(\tau) - A^{(\tau)}_\beta\, \alpha(\beta)\right].$$

Из анализа полученного выражения следует, что если $\varepsilon^{(1)}_{\text{см}}(t) > 0$, то для уменьшения $\varepsilon^{(2)}_{\text{см}}(t)$ необходимо и достаточно выполнить условие

$$\alpha(t) > A^{(t)}_\tau\, \alpha(\tau).$$

Таким образом, при использовании параметрической оценки $\alpha^{**}_\lambda(t)$ возможны случаи повышения ее эффективности по сравнению с первоначальной $\alpha^*(t)$.

7. ПРИМЕРЫ НЕСМЕЩЕННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Пример 1. Оценивается математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ при условии, что предварительная оценка имеет вид:

$$m^* = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)\, d\tau.$$

Параметрические оценки математического ожидания определяются соотношениями

$$m^{*(1)}_\lambda = \lambda_{10} + \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)\, d\tau;$$

$$m_\lambda^{*(2)} = \frac{\lambda_{11}}{T}\int_0^T x(\tau)\,d\tau.$$

Условие несмещенности дает следующие соотношения для оптимальных параметрических функций:

$$\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = M_m m(t) - \frac{1}{T}\int_0^T M_m m(\tau)\,d\tau;$$

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{M_m m(t)}{\frac{1}{T}\int_0^T M_m m(\tau)\,d\tau},$$

где M_m — априорное математическое ожидание оцениваемой функции $m(t)$.

Пусть

$$m(t) = m_0 + m_1 t;\ M_m m_0 = m_{ap0};\ M_m m_1 = m_{ap1}.$$

Тогда

$$\lambda_{10}^{\varepsilon} = m_{ap1}\left(t - \frac{T}{2}\right) = m_{ap1}t - \frac{m_{ap1}T}{2};$$

$$\lambda_{11}^{\varepsilon} = \frac{m_{ap0} + m_{ap1}t}{m_{ap0} + \frac{m_{ap1}T}{2}} = \frac{m_{ap1}t}{m_{ap0} + \frac{m_{ap1}T}{2}} + \frac{m_{ap0}}{m_{ap0} + \frac{m_{ap1}T}{2}}.$$

Из полученных выражений следует, что параметрическая функция $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ не зависит от m_{ap0} и изменяется по линейному закону в зависимости от t. Реализация параметрической функции $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$ требует знания двух величин m_{ap0} и m_{ap1} и является более сложной.

В стационарном случае $m_{ap1} = 0$, $\lambda_{10}^{(\varepsilon)} = 0$ и $\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = 1$.

Пример 2. Пусть дана реализация случайного процесса вида

$$X(t) = m\psi(t) + \eta,$$

где $m = MY$ — математическое ожидание некоторой случайной величины Y; $\psi(t)$ — известная детерминированная функция; η — случайная величина с нулевым математическим ожиданием.

Требуется найти параметрическую оценку для математического ожидания случайного процесса $X(t)$

$$M_{x|\alpha} X(t) = m\psi(t) = \alpha(t).$$

Пусть оценка $\alpha^*_\lambda(t)$ отыскивается в виде

$$\alpha^*_\lambda(t) = \frac{\lambda_{11}^{(\varepsilon)}}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} X(\tau)\,d\tau = A_\tau^{(t)}\,X(\tau).$$

Учитывая, что априорное математическое ожидание случайного процесса $X(t)$

$$M_\alpha [m\psi(t)] = \psi M_\alpha m,$$

где $M_\alpha m$ — априорное значение параметра m, находим:

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{\psi(t)}{\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \psi(\tau)\, d\tau}.$$

Из последнего соотношения следует независимость корректирующего множителя $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$ от априорных значений параметра m. В этом случае окончательное выражение для оценки α^*_λ принимает вид:

$$\alpha^*_\lambda(t) = \frac{\psi(t)\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\, d\tau}{\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \psi(\tau)\, d\tau}.$$

Поскольку функция $\psi(t)$ известна, то параметрическая функция $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$ может быть рассчитана до проведения обработки (эксперимента) и введена затем программным способом.

Пример 3. Применительно к задаче фильтрации полезного сигнала $W(t)$ В. К. Савчковым и И. В. Челпановым [Л. 31] был использован метод параметрических функций для синтеза нестационарного фильтра первого порядка.

В этой задаче предполагалась аддитивная структура входного случайного процесса

$$X(t) = W(t) + N(t) = C\psi(t) + N(t),$$

где C — случайная величина; $\psi(t)$ — детерминированная функция; $N(t)$ — помеха с известной корреляционной функцией $R_N(t_1, t_2)$.

Для выделения $W(t)$ использовался фильтр, описываемый соотношением

$$Y(t) = \lambda_{11}(t)\int\limits_0^t h(t-\tau)\, X(\tau)\, d\tau,$$

где $h(t)$ — весовая функция неизменяемой части фильтра.

Из условия несмещенности оценки полезного сигнала следует, что

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)}(t) = \frac{\psi(t)}{\int\limits_0^t h(t-\tau)\,\psi(\tau)\, d\tau}.$$

Для $\psi(t) \equiv 1$ имеем:

$$\lambda_{11}^{(e)}(t) = \frac{1}{a^2(t)},$$

где

$$a(t) = \int_0^t h(x)\,dx$$

— переходная (интегральная) функция неперестраиваемой части фильтра.

Было проведено сравнение эффективности параметрического фильтра первого порядка с фильтром, оптимальным по условиям минимума среднего квадрата ошибки.

Оптимальный фильтр описывается уравнением первого порядка

$$\frac{dY(t)}{dt} + b(t)\,Y(t) = b(t)\,X(t),$$

где $b(t)$ — оптимизируемый параметр.

Для помехи с $R_N(\tau) = \sigma_N^2 e^{-\alpha|\tau|}$ соответствующее интегральное уравнение приводит к следующему выражению:

$$b(t) = \frac{\frac{1}{2}\frac{\overline{W}^2}{\sigma_N^2}\left[\alpha t_{\text{н}} + \delta(t) + \delta(t - t_{\text{н}})\right]}{1 + \frac{1}{2}\frac{\overline{W}^2}{\sigma_N^2}(1 + \alpha t)},$$

где $\overline{W}^2 = M[W(t)]^2$; $t_{\text{н}}$ — конечный момент времени наблюдения за реализацией $X(t)$.

Выражение для минимального среднего квадрата ошибки оптимального фильтра имеет вид:

$$\sigma^2_{\text{опт.ф}} = \frac{\overline{W}^2}{1 + \frac{2 + \alpha t_{\text{н}}}{2}\frac{\overline{W}^2}{\sigma_N^2}}.$$

Эффективность параметрического фильтра

$$\sigma^2_{\text{п.ф}} = [\lambda_{11}^{(e)}(t)]_0^2 \int_0^t\int_0^t h(t_1)\,h(t_2)\,R_N(t_1, t_2)\,dt_1 dt_2.$$

Из рис. 21, где показаны зависимости $\sigma^2_{\text{опт.ф}}/\sigma_N^2$ и $\sigma^2_{\text{п.ф}}/\sigma_N^2$ от $\alpha t_{\text{н}}$, следует, что эффективность параметрического фильтра близка

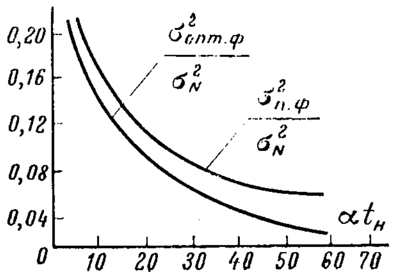


Рис. 21. Сравнительная эффективность параметрического и оптимального фильтров.

к эффективности оптимального фильтра в классе фильтров, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка (с переменным коэффициентом). В этом смысле можно говорить о том, что параметрические фильтры являются аппроксимирующими по отношению к фильтрам, описываемым дифференциальными уравнениями.

Пример 4. При анализе стабильности стандартов (генераторов) частоты (включая и так называемые «биологические часы») возникает задача оценки среднего значения мгновенной частоты $\omega(t)$, определяемой по формуле

$$\omega(t)=\frac{d}{dt}[\omega_0 t+\varphi(t)]=\omega_0+\varphi'(t),$$

где ω_0 — стабильный уровень частоты; $\varphi(t)$ — флюктуационное колебание фазы, являющееся причиной нестабильности частоты генератора.

Пусть

$$\omega^*_\lambda(t)=\frac{\lambda_{11}^{(\varepsilon)}}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}\omega(\tau)\,d\tau.$$

Подставляя в последнее выражение значение $\omega(\tau)$, получаем:

$$\omega^*_\lambda(t)=\frac{\lambda_{11}^{(\varepsilon)}}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}[\omega_0+\varphi'(\tau)]\,d\tau=$$

$$=\lambda_{11}^{(\varepsilon)}\left[\omega_0+\frac{\varphi(t+T/2)-\varphi(t-T/2)}{T}\right]=\lambda_{11}^{(\varepsilon)}[\omega_0+B_\tau^{(t)}\varphi(\tau)],$$

где

$$B_\tau^{(t)}\varphi(\tau)=\frac{\varphi(t+T/2)-\varphi(t-T/2)}{T}$$

— оператор Брукса.

Условие несмещенности оценки имеет вид:

$$M_\varphi M_{\omega|\varphi}\,\omega^*_\lambda=M_\varphi\omega(\varphi),$$

отсюда

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)}=\frac{M_\varphi\,\omega(\varphi)}{M_\varphi M_{\omega|\varphi}\,\omega^*(\varphi)}=\frac{\omega_0+\frac{d}{dt}M_\varphi\varphi(t)}{\omega_0+B_\tau^{(t)}[M_\varphi M_{\omega|\varphi}\,\varphi(\tau)]}.$$

Пример 5. Рассмотрим особенности сглаживания случайных процессов с помощью оператора текущего среднего.

Пусть сглаживаемый случайный процесс имеет аддитивную структуру

$$X(t) = W(t) + N(t),$$

где $W(t)$ — полезная составляющая; $N(t)$ — шумовая составляющая.

В качестве оценки $W^*(t)$ используем оператор текущего среднего

$$W^*(t) = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau = S_\tau^{(t)} x(\tau).$$

Однако при использовании оператора $S_\tau^{(t)}$ возникают трудности с определением интервала сглаживания T, результатом чего является эвристическое задание T. С целью увеличения эффективности оператора $S_\tau^{(t)}$ при произвольном задании T целесообразно использование параметрического оператора $S_{\lambda\tau}^{(t)}$.

Вспомогательное выражение определяется как

$$M_{x|w} W^*(t) = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} M_{x|w} X(\tau)\,d\tau = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} W(\tau)\,d\tau.$$

Следовательно, функцию $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}$ можно представить в форме

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)}(t) = \frac{M_w W(t)}{\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} M_w W(\tau)\,d\tau},$$

где $M_w W(t)$ — априорное среднее полезной составляющей $W(t)$.

Пусть

$$M_w W(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n \tau^n(t).$$

Тогда

$$\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} M_w W(\tau)\,d\tau = \sum_{n=0}^{m} a_n \mu_n(t),$$

где

$$\mu_n(t) = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \tau^n d\tau =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\,T}\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{2k+1}\,\frac{t^{n-2k}}{2^{2k}}\,T^{2k+1}.$$

Здесь C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.

Параметрическая функция $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}(t)$ в этом случае примет вид:

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)}(t) = \frac{\sum_{n=0}^{m} a_n t^n}{\sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{2k+1} 2^{-2k} t^{n-2k} T^{2n}}.$$

При $m = 0$ и $m = 1$ имеем $\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = 1$, при $m = 2$

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)}(t) = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 - \frac{a_2 T_2}{12}}.$$

Если же для последнего случая $a_0 = a_1 = 0$, то

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)}(t_{\text{отн}}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{12 t_{\text{отн}}^2}},$$

где $t_{\text{отн}} = t/T$.

Пример 6. На основе метода параметрических функций может быть создано аналоговое вычислительное устройство с программным управлением, обеспечивающее получение оценки текущей дисперсии случайного процесса. Для этого в устройстве дополнительно устанавливается программный генератор, управляющий коэффициентом усиления усилителя, подключенного к выходу первого интегратора. Выход усилителя подключен к одному из входов блока вычитания. Другой вход блока вычитания объединен со входом первого интегратора, а его выход подсоединен к схеме выработки текущей дисперсии. В рассматриваемом устройстве осуществляется автоматическая программная коррекция оценки математического ожидания случайного процесса за счет использования априорно определяемых параметрических функций $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}(t)$, в результате чего обеспечивается более эффективное центрирование.

Параметрические функции $\lambda_{11}^{(\varepsilon)}(t)$ определяются из следующих соотношений.

Пусть случайный процесс $X(t)$ содержит две аддитивные компоненты, т. е.

$$X(t) = X_0(t) + W(t).$$

Компонента $X_0(t)$ является стационарным исследуемым случайным процессом, а компонента $W(t)$ представляет собой нестационарный случайный процесс.

Указанные процессы характеризуются вероятностными мерами (функционалами): априорным $P_{ap}(W)$ и условным $P(x|W)$ распределениями процесса $W(t)$.

Для исключения $W(t)$ проводится сглаживание реализаций $x(t)$ процесса $X(t)$ по формуле

$$W^*(t) = \frac{\lambda_{11}^{(s)}(t)}{T_1} \int\limits_{t-T_1/2}^{t+T_1/2} x(\tau)\, d\tau,$$

где T_1 — длительность памяти (интервал сглаживания) оператора сглаживания $S_{T_1}^{(t)}$;

$$S_{T_1}^{(t)} x(\tau) = \frac{1}{T_1} \int\limits_{t-T_1/2}^{t+T_1/2} x(\tau)\, d\tau.$$

Поскольку $W(t)$ — случайный процесс, ошибка смещения по определению имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{см}}(t) &= M_w W(t) - M_w M_{x|w} \lambda_{11}^{(s)}(t)\, S_{T_1}^{(t)} x(\tau) = \\ &= M_w W(t) - \lambda_{11}^{(s)}(t)\, M_w S_{T_1}^{(t)} M_{x|w}\, x(\tau) = \\ &= M_w W(t) - \lambda_{11}^{(s)}(t)\, M_w S_{T_1}^{(t)} W(\tau), \end{aligned}$$

где M_w и $M_{x|w}$ — символы соответствующих математических ожиданий по вероятностным мерам $dP_{ap}(W)$ и $dP(x|W)$.

Последнее соотношение может быть записано также в форме

$$\varepsilon_{\text{см}}(t) = \int\limits_{\Omega_w} W dP_{ap}(W) - \lambda_{11}^{(s)}(t) \int\limits_{\Omega_w} S_{\tau}^{(t)} W(t)\, dP_{ap}(W),$$

где Ω_w — область изменения $W(t)$.

Из условия $\varepsilon_{\text{см}}(t) \equiv 0$ находим:

$$\lambda_{11}^{(s)}(t) = \frac{M_w W(t)}{M_w S_{\tau}^{(t)} W(\tau)} = \frac{M_w W(t)}{\dfrac{1}{T_1} \displaystyle\int\limits_{t-T_1/2}^{t+T_1/2} M_w W(\tau)\, d\tau}.$$

В результате параметрическая оценка $W^*_{\lambda}(t)$ принимает вид:

$$W^*_{\lambda}(t) = \frac{\lambda_{11}^{(s)}(t)}{T_1} \int\limits_{t-T_1/2}^{t+T_1/2} x(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{\displaystyle\int\limits_{\Omega_w} W dP_{ap}(W)}{\displaystyle\int\limits_{\Omega_w} \int\limits_{t-T_1/2}^{t+T_1/2} W(\tau)\, dP_{ap}(W)\, d\tau} \int\limits_{t-T_1/2}^{t+T_1/2} x(\tau)\, d\tau.$$

Поскольку вероятностная мера $P_{ap}(W)$ является априорной и предполагается известной, параметрическая функция может быть рассчитана заранее (до обработки случайного процесса) и затем введена в задающий генератор в форме определенной программы.

На рис. 22 представлена структурная схема устройства формирования текущей дисперсии. Программное устройство центрирования I обеспечивает получение стационарной составляющей $x_0(t)$ реализации нестационарного процесса $X(t)$ и состоит из фильтра (интегратора с памятью T_1), программного генератора, усилителя с управляемым коэффициентом усиления и блока вычитания.

Схема II предназначена для выработки оценки текущей дисперсии $\sigma^2(t)$ и содержит блок возведения в квадрат и фильтр (интегратор с памятью T_2). Фильтры, аппроксимирующие интеграторы с конечной памятью, могут быть созданы на операционных усилителях постоянного тока, охваченных цепью обратной связи из параллельно

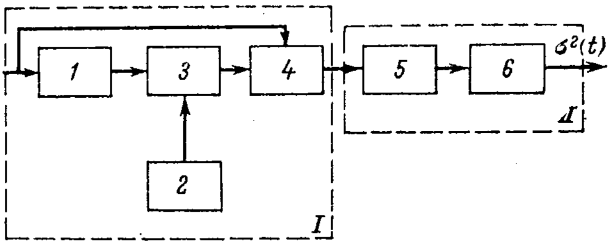


Рис. 22. Структурная схема устройства формирования текущей дисперсии.

1 — фильтр (интегратор с памятью T_1); 2 — программный генератор; 3 — усилитель с переменным коэффициентом усиления; 4 — блок вычитания; 5 — квадратор; 6 — фильтр (интегратор с памятью T_2).

включенных резистора и конденсатора. Сопротивление резистора выбирается такой величины, при которой коэффициент передачи усилителя $k=1$, а емкость конденсатора выбирается исходя из желаемой величины постоянной времени T цепи обратной связи. Блок возведения в квадрат может реализоваться в виде схемы, состоящей из двух электронных усилителей постоянного тока и функционального преобразователя на диодных элементах.

Программный генератор воспроизводит напряжение, отражающее априорный закон изменения математического ожидания. В частном случае это может быть генератор синусоидальных напряжений с частотой f_0, равной, например, частоте вибраций, вызывающих медленную нестационарность анализируемого процесса.

Операция вычитания выполняется на электронном усилителе постоянного тока, охваченном цепью обратной связи.

Принцип работы устройства заключается в следующем. Исследуемая реализация нестационарного процесса $x(t)$ в виде электрического сигнала поступает на вход блока центрирования и подается на вход фильтра 1 и первый вход блока вычитания 4. Ввод сигнала может осуществляться либо непосредственно с выхода измерительного устройства, либо с выхода регистратора.

С выхода первого фильтра сглаженный процесс $x(t)$ поступает на усилитель с переменным коэффициентом усиления. Управляющее напряжение формируется в программном генераторе в соответствии с выражением

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)}(t) = \frac{M_w W(t)}{M_w S_{T_1}^{(t)} W(\tau)},$$

где $M_w W(t)$ — априорный закон изменения математического ожидания процесса $W(t)$.

Далее с выхода блока *3* реализация поступает на второй вход блока вычитания *4*. На выходе последнего вырабатывается центрированная составляющая $x_0(t) = x(t) - m^*_\lambda$, которая подается на вход блока возведения в квадрат *5*, с выхода которого снимается напряжение $x^2_0(t)$. Этот сигнал подается на вход фильтра *6*. На выходе последнего вырабатывается значение текущей дисперсии $\sigma^2(t)$ реализации случайного процесса.

Пример 7. Предварительная оценка корреляционной функции стационарного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием имеет вид:

$$R^*(\tau_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t - \tau_0 - \alpha t)\, dt,$$

где τ_0 — начальная задержка; α — скорость изменения задержки.

Требуется построить параметрическую оценку

$$R^*_\lambda(\tau_0) = \frac{\lambda_{11}^{(\varepsilon)}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t - \tau_0 - \alpha t)\, dt,$$

где

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{R(\tau_0)}{M_{x|R} R^*(\tau_0)}.$$

В [Л. 2] показано, что

$$M_{x|R} R^*(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R(\tau_0 + \alpha t)\, dt$$

или, учитывая, что

$$R(\tau) = \int_0^\infty G(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega,$$

где $G(\omega)$ — спектральная плотность мощности, имеем:

$$M_{x|R} R^*(\tau) = \int_0^\infty G(\omega) \cos \omega\tau_0 \frac{\sin \frac{\alpha T\omega}{2}}{\frac{\alpha T\omega}{2}}\, d\omega.$$

Для случайных процессов, ширина спектра которых мала по сравнению с $1/\alpha T$, последнее выражение можно заменить следующим:

$$M_{x|R} R^*(x) \approx \frac{\sin\frac{\alpha T\omega_0}{2}}{\frac{\alpha T\omega_0}{2}} \int_0^\infty G(\omega)\cos\omega\tau_0\, d\omega = \frac{\sin\frac{\alpha T\omega_0}{2}}{\frac{\alpha T\omega_0}{2}} R(\tau_0).$$

Поэтому

$$\lambda_{11}^{(*)} \approx \frac{\alpha T\omega_0/2}{\sin(\alpha T\omega_0/2)}.$$

Таким образом, в качестве параметрической оценки корреляционной функции может быть использована оценка вида

$$R^*_\lambda(\tau_0) = \frac{\alpha\omega_0}{2\sin\frac{\alpha\omega_0 T}{2}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t-\tau_0-\alpha t)\, dt.$$

Здесь ω_0 — средняя частота узкополосного процесса $X(t)$.

Таким образом, априорное знание частоты, на которой спектральная плотность максимальна, обеспечивает коррекцию предварительной оценки, являющейся эвристической оценкой (в том смысле, что используемый алгоритм не является следствием какой-либо процедуры оптимизации).

8. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УСЛОВИЯ МИНИМУМА СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ МОДЕЛИ

Мультипликативная модель параметрической аппроксимации описывается соотношением

$$\Phi^*_\lambda(x) = \lambda_{11}\Phi^*(x).$$

Минимизируя средний квадратический риск

$$\bar{R} = M_{x\alpha}[\Phi(\alpha) - \lambda_{11}\Phi^*(x)]^2 = M_\alpha M_{x|\alpha}[\Phi(\alpha) - \lambda_{11}\Phi^*(x)]^2,$$

из условия $\partial\bar{R}/\partial\lambda_{11} = 0$ находим следующее выражение для оптимальной параметрической функции $\lambda_{11}^{(o)}$:

$$\lambda_{11}^{(o)} = \frac{M_{x\alpha}[\Phi(\alpha)\Phi^*(x)]}{M_{x\alpha}[\Phi^*(x)]^2} \tag{19}$$

или в более удобном для вычислений виде

$$\lambda_{11}^{(o)} = \frac{M_\alpha[\Phi(\alpha)\, M_{x|\alpha}\Phi^*(x)]}{M_\alpha\{M_{x|\alpha}[\Phi^*(x)]^2\}}. \tag{20}$$

Учитывая понятие корреляции

$$R[\Phi(\alpha), \Phi^*(x)] = M_{x\alpha}[\Phi^0(\alpha)\Phi^{*0}(x)],$$

где

$$\Phi^0(\alpha) = \Phi(\alpha) - M_\alpha \Phi(\alpha);$$

$$\Phi^{*0}(x) = \Phi^*(x) - M_{x\alpha}\Phi^*(x),$$

выражение (19) можно записать в следующем виде:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{R[\Phi(\alpha), \Phi^*(x)] + M_\alpha \Phi(\alpha) M_{x\alpha}\Phi^*(x)}{D_{x\alpha}\Phi^*(x) + [M_{x\alpha}\Phi^*(x)]^2}.$$

Для получения $\overline{R}_{\text{мин}}$ подставим в соответствующее соотношение для $\overline{R}$ выражение $\lambda_{11}^{(\sigma)}$. Тогда

$$\overline{R}_{\text{мин}} = M_\alpha \Phi^2(\alpha) - \frac{\{M_\alpha M_{x|\alpha}\Phi(\alpha)\Phi^*(x)\}^2}{M_{x\alpha}[\Phi^*(x)]^2} =$$

$$= M_\alpha \Phi^2(\alpha) - \lambda_{11}^{(\sigma)}(t) M_{x\alpha}[\Phi(\alpha)\Phi^*(x)].$$

Пусть

$$\Phi(\alpha) = \alpha(t);$$

$$\Phi^*(x) = \alpha^*(x) = A_\tau^{(t)} B_\tau x(\tau),$$

где A — заданный линейный оператор, а оператор B удовлетворяет условию

$$M_{x|\alpha} B_t x(t) = \alpha(t).$$

Тогда выражение для параметрической функции $\lambda_{11}^{(\sigma)}(t)$ примет вид:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{M_{x\alpha}[\alpha(t)\alpha^*(x)]}{M_{x\alpha}[\alpha^*(x)]^2} = \frac{M_\alpha \alpha(t) M_{x|\alpha}\alpha^*(x)}{M_\alpha M_{x|\alpha}[\alpha^*(x)]^2} =$$

$$= \frac{M_\alpha \alpha(t) A_\tau^{(t)} M_{x|\alpha} B_\tau x(\tau)}{M_\alpha M_{x|\alpha} A_{t_1}^{(t)} A_{t_2}^{(t_1)} x(t_2) B_t^{(t_2)} x(t)} =$$

$$= \frac{M_\alpha \alpha(t) A_\tau^{(t)} \alpha(\tau)}{M_\alpha A_{t_1}^{(t)} A_{t_2}^{(t)} M_{x|\alpha} B_t^{(t_1)} x(t) B_t^{(t_2)} x(t)} =$$

$$= \frac{A_\tau^{(t)} M_\alpha \alpha(t)\alpha(\tau)}{M_\alpha A_{t_1}^{(t)} A_{t_2}^{(t)} \Gamma_{BX}(t_1, t_2)} = \frac{A_\tau^{(t)} \Gamma_\alpha(t, \tau)}{A_{t_1}^{(t)} A_{t_2}^{(t)} M_\alpha \Gamma_{BX}(t_1, t_2)},$$

где $\Gamma_\alpha(t, \tau) = M_\alpha[\alpha(t)\alpha(\tau)]$ — априорная функции ковариации оцениваемого параметра;

$$\Gamma_{BX}(t_1, t_2) = M_{x\mid\alpha}\{[B_t^{(t_1)} x(t)][B_t^{(t_2)} x(t)]\} =$$
$$= \alpha(t_1)\alpha(t_2) + R_{BX}(t_1, t_2).$$

Здесь $R_{BX}(t_1, t_2)$ — корреляционная функция случайного процесса $B_\tau^{(t)} X(\tau)$.

Учитывая последнее соотношение, находим:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{A_\tau^{(t)}\,\Gamma_\alpha(t, \tau)}{A_{t_1}^{(t)} A_{t_2}^{(t)}[\Gamma_\alpha(t_1, t_2) + R_{BX}(t_1, t_2)]}. \qquad (21)$$

Соотношение для соответствующего минимального среднего риска принимает вид:

$$\overline{R}_{\text{мин}} = M_\alpha \alpha^2(t) - \lambda_{11}^{(\sigma)} M_\alpha M_{x\mid\alpha}\alpha(t)\alpha^*(x) =$$
$$= M_\alpha \alpha^2(t) - \lambda_{11}^{(\sigma)} M_\alpha \alpha(t) A_\tau^{(t)}\alpha(\tau) =$$
$$= M_\alpha \alpha^2(t) - \lambda_{11}^{(\sigma)} A_\tau^{(t)}\Gamma_\alpha(t, \tau).$$

Для детерминированных функций $\alpha(t)$ имеем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{A_\tau^{(t)}\alpha(t)\alpha(\tau)}{[A_\tau^{(t)}\alpha(\tau)]^2 + A_{t_1}^{(t)} A_{t_2}^{(t)} R_{BX}(t_1, t_2)}$$

или

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{\lambda_{11}^{(\text{e})}}{1 + a},$$

где

$$\lambda_{11}^{(\text{e})} = \frac{\alpha(t)}{A_\tau^{(t)}\alpha(\tau)}$$

— параметрическая функция для несмещенной оценки (см. § 6);

$$a = \frac{A_{t_1}^{(t)} A_{t_2}^{(t)} R_{BX}(t_1, t_2)}{[A_\tau^{(t)}\alpha(\tau)]^2}.$$

Параметр a имеет смысл отношения шум/сигнал на выходе устройства, реализующего оператор $A_\tau^{(t)}$.

Средняя квадратическая функция риска в данном случае определяется выражением

$$\bar{R}_{\text{мин}} = \alpha^2(t) - \lambda_{11}^{(\sigma)} A_\tau^{(t)} \alpha(t)\alpha(\tau) = \alpha^2(t)\frac{a}{1+a}.$$

Относительная средняя квадратическая функция риска

$$\bar{R}_{\text{отн}} = \frac{\bar{R}_{\text{мин}}}{\alpha^2(t)}$$

определяется только параметром a:

$$\bar{R}_{\text{отн}} = \frac{a}{1+a}.$$

В табл. 3 представлены значения $\bar{R}_{\text{отн}}$ в зависимости от параметра a.

Таблица 3

Значения функции среднего риска $\bar{R}_{\text{отн}}$

a	0,25	0,5	0,75	1	1,75
$\bar{R}_{\text{отн}}$	0,2	0,33	0,43	0,5	0,64

Функция $\bar{R}_{\text{отн}}$ имеет смысл отношения шум/сигнал на выходе параметрического фильтра. Из табл. 3 следует, что отношение шум/сигнал уменьшается за счет параметрической фильтрации. Величина выигрыша от применения параметрического фильтра, определяемая по формуле

$$\Delta\% = \frac{a - \bar{R}_{\text{отн}}}{a} 100\%,$$

для практического диапазона изменений параметра a от 0,25 до 1 составляет от 20 до 50%.

При построении систем, автоматически определяющих $\lambda_{11}(t)$, целесообразно разрабатывать специальные устройства для приближенной оценки параметра a.

Для детерминированных $\Phi(\alpha)$ параметрические функции $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ определяются выражением

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{\Phi(\alpha) M_{x|\alpha|} \Phi^*(x)}{M_{x|\alpha} [\Phi^*(x)]^2}. \tag{22}$$

которое следует непосредственно из формулы (20).

В общем случае параметрическая функция $\lambda_{11}^{(\sigma)}$, определяемая соотношением (22), зависит от самих оцениваемых параметров, т. е. от $\Phi(\alpha)$, что является существенным недостатком метода параметрических функций. Однако на практике можно воспользоваться либо минимаксным критерием (выбирать $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ из условия $\min\limits_{\lambda_{11}} \max\limits_{\Phi(\alpha)} \overline{R}[\lambda_{11}, \Phi(\alpha)]$), либо использовать предварительные оценки, первые два момента которых так выражаются через $\Phi(\alpha)$, что в результате $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ оказывается независящей от $\Phi(\alpha)$.

Условие независимости $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ от $\Phi(\alpha)$ можно использовать для определения связи первых двух моментов предварительной оценки $\Phi^*(x)$. Введем обозначения:

$$m_1(\alpha) = M_{x\,|\,\alpha}\, \Phi^*(x);$$
$$m_2(\alpha) = M_{x\,|\,\alpha}\, [\Phi^*(x)]^2.$$

Тогда выражение (22) примет вид:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \Phi(\alpha)\frac{m_1(\alpha)}{m_2(\alpha)}. \tag{23}$$

Дифференцируя по α обе части равенства (23), получаем:

$$m_2 m_1 \frac{d\Phi}{d\alpha} + \Phi m_2 \frac{dm_1}{d\alpha} - \Phi m_1 \frac{dm_2}{d\alpha} = 0.$$

В приращениях это уравнение имеет вид:

$$m_2 m_1 d\Phi + \Phi m_2 dm_1 - \Phi m_1 dm_2 = 0,$$

откуда

$$\frac{d\Phi}{\Phi} + \frac{dm_1}{m_1} - \frac{dm_2}{m_2} = 0.$$

Следовательно,

$$\ln\Phi + \ln m_1 - \ln m_2 - \ln c = 0,$$

где c — некоторая произвольная постоянная, не зависящая от оцениваемого параметра α.

Окончательное выражение имеет вид:

$$m_1(\alpha) = c\,\frac{m_2(\alpha)}{\Phi(\alpha)}. \tag{24}$$

Соотношение (24) является необходимым и достаточным условием независимости параметрической функции $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ от оцениваемого параметра α.

Параметрическую функцию $\lambda_{11}^{(\sigma)}(t)$ при оценке $\alpha^*_\lambda(x)$ можно выразить с помощью средней апостериорной оценки $\alpha^*_{ps}(x)$ и некоторой предварительной оценки $\alpha^*(x)$.

Пусть

$$\alpha^*_{ps}(x) = M_{\alpha\,|\,x}\,\alpha(t) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \alpha(t)\, f(\alpha|x)\, d\alpha$$

— средняя апостериорная оценка характеристики $\alpha(t)$.

Воспользуемся полученным ранее соотношением для оптимальной параметрической функции

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{M_{x\alpha}\,[\alpha(t)\,\alpha^*(x)]}{M_{x\alpha}\,[\alpha^*(x)]^2}.$$

Числитель выражения для $\lambda_{11}^{(\sigma)}(t)$ можно представить в виде

$$M_{x\alpha}\,[\alpha(t)\,\alpha^*(x)] = M_x M_{\alpha\,|\,x}\,[\alpha(t)\,\alpha^*(x)] =$$

$$= M_x\,[M_{\alpha\,|\,x}\,\alpha(t)]\,\alpha^*(x) = M_x\,[\alpha^*_{ps}(x)\,\alpha^*(x)].$$

Окончательно

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{M_x\,[\alpha^*_{ps}(x)\,\alpha^*(x)]}{M_{x\alpha}\,[\alpha^*(x)]^2}. \tag{25}$$

При $\alpha^*(x) = \alpha^*_{ps}(x)$ знаменатель соотношения (25) не зависит от α, поэтому $M_{x\alpha}\,[\alpha^*_{ps}(x)]^2 = M_x\,[\alpha^*_{ps}(x)]^2$. Параметрическая функция $\lambda_{11}^{(\sigma)}(t)$ при этом удовлетворяет условию

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) \equiv 1.$$

Таким образом, полученное соотношение (25) указывает на возможность образования оценки α^*_λ по двум оценкам α^*_{ps} и $\alpha^*(x)$, одна из которых α^*_{ps} может оказаться сложной для реализации, а другая $\alpha^*(x)$ — недостаточно эффективной. Оценка α^*_λ при этом может рассматриваться как некоторая компромиссная.

Сущность параметрической коррекции заключается в учете взаимных корреляционных связей рассматриваемых двух оценок $\alpha^*_{ps}(x)$ и $\alpha^*(x)$. Действительно, вводя коэффициент корреляции

$$\rho = \frac{M_{x\alpha}[\alpha^*_{ps}(x)\,\alpha^*(x)] - \sigma_{ps}\sigma_0}{\sigma_{ps}\sigma_0},$$

где

$$\sigma_{ps} = \sqrt{M_{x\alpha}[\alpha^*_{ps}(x)]^2 - [M_{x\alpha}\alpha^*_{ps}(x)]^2};$$

$$\sigma_0 = \sqrt{M_{x\alpha}[\alpha^*(x)]^2 - [M_{x\alpha}\alpha^*(x)]^2},$$

и учитывая, что

$$M_{x\alpha}\alpha^*_{ps}(x) = \alpha_{ap}(t),$$

а также рассматривая оценки $\alpha^*(x)$, обладающие свойством

$$M_{x\alpha}\alpha^*(x) = \alpha_{ap}(t),$$

можно записать следующее выражение для оптимальной параметрической функции:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{\rho\sigma_{ps}\sigma_0 + \alpha_{ap}^2(t)}{\sigma_0^2 + \alpha_{ap}^2(t)} = \frac{\rho\,\frac{\sigma_{ps}}{\sigma_0} + \left[\frac{\alpha_{ap}(t)}{\sigma_0}\right]^2}{1 + \left[\frac{\alpha_{ap}(t)}{\sigma_0}\right]}.$$

Задачу параметрического анализа случайных процессов можно свести к аналогичной задаче применительно к векторным случайным величинам. Пусть $\alpha(t)$ — некоторая функция, подлежащая оценке. Будем полагать, что двухкомпонентный процесс $[\alpha(t), x(t)]$ задан на дискретном множестве (α_k, x_k), причем $\alpha_k = \alpha(k\Delta t)$, $x_k = x(k\Delta t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Задача состоит в том, чтобы по наблюдаемой компоненте $\mathbf{x}_m = \{x_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, m$ определить оценку для α_m в конце периода наблюдения.

Пусть α^*_m — первоначальная оценка, $\alpha^*_{m\lambda}$ — скорректированная оценка.

Воспользуемся средней квадратической ошибкой

$$R = \int\limits_{\Omega_\alpha}\int\limits_{\Omega_x} (\alpha_m - \alpha^*_{m\lambda})^2 f(\alpha_m, \mathbf{x}_m)\, d\alpha_m d\mathbf{x}_m =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\alpha}\int\limits_{\Omega_{x_1}} \cdots \int\limits_{\Omega_{x_m}} (\alpha_m - \alpha^*_{m\lambda})^2 f(\alpha_m) f(x_0, x_1, \ldots, x_m \mid \alpha_m) \times$$

$$\times\, d\alpha_m dx_0 dx_1, \ldots, dx_m.$$

Пусть $\alpha^*_{m\lambda}=\lambda_{11}(m)\,\alpha^*_m$, тогда

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{R}}{\partial\lambda_{11}(m)}=\int\limits_{\Omega_\alpha}\int\limits_{\Omega_x}[\alpha_m-\alpha^*_m\lambda_{11}(m)]\,\alpha^*_m f(\alpha_m \mathrm{x}_m)\times$$

$$\times\, d\alpha_m d\mathrm{x}_m=0,$$

откуда

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(m)=\frac{\int\limits_{\Omega_\alpha}\alpha_m f(\alpha_m)\,d\alpha_m\int\limits_{\Omega_x}\alpha^*_m f(\mathrm{x}_m\mid\alpha_m)\,d\mathrm{x}_m}{\int\limits_{\Omega_\alpha}\int\limits_{\Omega_x}[\alpha^*_m]^2 f(\mathrm{x}_m)\,d\mathrm{x}_m d\alpha_m},$$

где

$$f(\mathrm{x}_m)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\alpha_m,\ \mathrm{x}_m)\,d\alpha_m=\frac{f(\alpha_m)\,f(\mathrm{x}_m\mid\alpha_m)}{f(\alpha_m\mid\mathrm{x}_m)}.$$

Выражение для $\lambda_{11}^{(\sigma)}(m)$ может быть записано с помощью операторов математического ожидания

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(m)=\frac{M_\alpha[\alpha_m M_{x\mid\alpha_m}\alpha^*_m]}{M_{x\alpha}[\alpha^*_m]^2}. \tag{26}$$

Рассмотрим пример. Пусть оценка α^*_m определяется соотношением

$$\alpha^*_m=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j,$$

тогда

$$M_{x\mid\alpha}\,\alpha^*_m=\alpha_m;$$

$$M_{x\mid\alpha}(\alpha^*_m)^2=\alpha_m^2+\frac{D_\alpha\alpha_m}{m},$$

поэтому

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(m)=\frac{M_\alpha\alpha_m^2}{M_\alpha\alpha_m^2+\dfrac{D_\alpha\alpha_m}{m}}.$$

Здесь полагаем, что $D_\alpha\alpha_m$ — заданная детерминированная величина.

Параметрический анализ случайных процессов на основе мультипликативной модели коррекции можно осуществлять, используя условие минимума дисперсии ошибки $D_{x\alpha}\Delta(t, x)$, а именно

$$D_{x\alpha}\Delta(t, x) = D_{x\alpha}[\Phi(\alpha) - \Phi^*_\lambda(x)] = \lambda_{11}^2 D_{x\alpha}\Phi^*(x) + \\ + D_\alpha[\Phi(\alpha)] - 2\lambda_{11}R_{\Phi\Phi^*}.$$

Условие

$$\frac{\partial D_{x\alpha}\Delta(t, x)}{\partial\lambda_{11}} = 0$$

приводит к оптимальной параметрической функции $\lambda_{11}^{(d)}$:

$$\lambda_{11}^{(d)} = \frac{R_{\Phi\Phi^*}}{D_{x\alpha}\Phi^*(x)} = \rho_{\Phi\Phi^*}\frac{\sigma_\Phi}{\sigma_{\Phi^*}}, \tag{27}$$

где

$$\rho_{\Phi\Phi^*} = \frac{R_{\Phi\Phi^*}}{\sigma_\Phi\sigma_{\Phi^*}}; \quad \sigma_\Phi = \sqrt{D_\alpha\Phi(\alpha)}; \quad \sigma_{\Phi^*} = \sqrt{D_{x\alpha}\Phi^*(x)}.$$

Поскольку $\lambda_{11}^{(d)} \leqslant 1$, то условие целесообразности параметрической коррекции имеет вид:

$$\sigma_\Phi\,\rho_{\Phi\Phi^*} \leqslant \sigma_{\Phi^*}.$$

Величина дисперсии ошибки при использовании $\lambda_{11}^{(d)}$ определяется соотношением

$$D_{x\alpha}\Delta(t, x) = \frac{\sigma_\Phi^2}{\sigma_{\Phi^*}^2}[1 - \rho_{\Phi\Phi^*}^2] = \frac{D_\alpha\Phi(\alpha)}{D_{x\alpha}\Phi^*(x)}(1 - \rho_{\Phi\Phi^*}^2).$$

Для $\Phi(\alpha) = \alpha$ имеем:

$$\lambda_{11}^{(d)} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha^*}}\rho_{\alpha\alpha^*} \quad \text{и} \quad D_{x\alpha}\Delta(t, x) = \frac{D_\alpha\alpha(t)}{D_{x\alpha}\alpha^*(x)}(1 - \rho_{\alpha\alpha^*}^2).$$

Для детерминированных характеристик $\alpha(t)$ справедливо выражение $\rho_{\alpha\alpha^*} = 0$, поэтому $\lambda_{11}^{(d)} = 0$ и использование параметрических функций, оптимизируемых по дисперсионному критерию, практически невозможно.

В ряде случаев целесообразно употреблять параметрические функции, оптимальные в смысле критерия относительной дисперсии:

$$J_{\text{отн}}=\frac{D_{x\lambda}\Delta(t,\ x)}{[M_\alpha \Phi^*_\lambda(x)]^2}.$$

Критерий $J_{\text{отн}}$ можно представить в форме

$$J_{\text{отн}}=\frac{\lambda_{11}^2 D_{x\lambda}\Phi^*(x)+D_\alpha\Phi(\alpha)-2\lambda_{11}R_{\Phi\Phi^*}}{\lambda_{11}^2[M_{x\alpha}\Phi^*(x)]^2}.$$

Условие $\partial J_{\text{отн}}(\lambda_{11})/\partial\lambda_{11}=0$ приводит к оптимальной параметрической функции $\lambda_{11}^{(d_0)}$, определяемой соотношением

$$\lambda_{11}^{(d_0)}=\frac{D_\alpha\Phi(\alpha)}{R_{\Phi\Phi^*}}=\frac{\sigma_\Phi}{\sigma_{\Phi^*}\rho_{\Phi\Phi^*}}.$$

Сравнение $\lambda_{11}^{(d_0)}$ и $\lambda_{11}^{(d)}$ показывает существующую между ними простую связь

$$\lambda_{11}^{(d_0)}=k^2/\lambda_{11}^{(d)},$$

где

$$k=\sigma_\Phi/\sigma_{\Phi^*},$$

или

$$\lambda_{11}^{(d)}\lambda_{11}^{(d_0)}=\frac{\sigma_\Phi^2}{\sigma_{\Phi^*}^2}.$$

Последнее соотношение позволяет переходить от оценки Φ^*_λ, оптимальной по одному критерию, к оценке Φ^*_λ, оптимальной по другому критерию.

Величина относительной дисперсии параметрической оценки Φ^*_λ с использованием $\lambda_{11}^{(d_0)}$ определяется выражением

$$J_{\text{отн}}=\frac{\frac{\sigma_\Phi^4}{R_{\Phi\Phi^*}^2}\sigma_{\Phi^*}^2-\sigma_\Phi^2}{\frac{\sigma_\Phi^4}{R_{\Phi\Phi^*}^2}[M_{x\alpha}\Phi^*(x)]^2}=$$

$$=\left[\frac{\sigma^*{}_\Phi}{M_x\Phi^*(x)}\right]^2(1-\rho_{\Phi\Phi^*}^2)=J_{\text{отн}}^{(1)}(1-\rho_{\Phi\Phi^*}^2),$$

где

$$J^{(1)}_{\text{отн}} = \frac{\sigma^2_{\Phi^*}}{[M_x \Phi^*(x)]^2}$$

— относительная дисперсия предварительной оценки $\Phi^*(x)$.

Величина выигрыша

$$\gamma = \frac{J'_{\text{отн}} - J_{\text{отн}}}{J'_{\text{отн}}} 100\% = 100\rho^2_{\Phi\Phi^*} = (10\rho_{\Phi\Phi^*})^2$$

пропорциональна квадрату коэффициента корреляции $\rho_{\Phi\Phi^*}$. При $\rho_{\Phi\Phi^*} = 1$ величина $\gamma = 100\%$.

В ряде случаев используется критерий средневзвешенной средней квадратической ошибки

$$J_{\text{ср}} = \beta m^2_{\text{в}} + (1 - \beta) d_{\text{в}},$$

где β — заданная величина (вес ошибок);

$$m_{\text{в}} = M_{x\alpha} [\Phi(\alpha) - \Phi^*_\lambda(x)];$$

$$d_{\text{в}} = D_{x\alpha} \Delta(t, x).$$

Условие $J_{\text{ср}} = \min$ приводит к следующему выражению для оптимальной параметрической функции $\lambda^{(J)}_{11}$:

$$\lambda^{(J)}_{11} = \frac{\beta \overline{\Phi}^* \overline{\Phi} + (1 - \beta) R_{\Phi\Phi^*}}{\beta (\overline{\Phi}^*)^2 + (1 - \beta) \sigma^2_{\Phi^*}}.$$

Из этого соотношения при $\beta = 1$ получается выражение (21) для $\lambda^{(\text{в})}_{11}$, а при $\beta = 0$ — выражение (27) для $\lambda^{(d)}_{11}$, которые анализировались выше.

9. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С целью качественного анализа метода параметрических функций рассмотрим мультипликативную оценку для детерминированного α:

$$\alpha^*_\lambda(x) = \lambda_{11} \alpha^*(x),$$

где $\alpha^*(x)$ — предварительная оценка параметра α; λ_{11} — параметрическая функция.

Используя среднюю квадратическую ошибку

$$R = M_{x|\alpha}[\alpha - \lambda_{11}\alpha^*(x)]^2 = \int\limits_{\Omega_x} [\alpha - \lambda_{11}\alpha^*(x)]^2 f(x|\alpha)\,dx,$$

замечаем возможность ее разложения на две составляющие

$$R = \lambda_{11}^2 D_{x|\alpha}\alpha^*(x) + \varepsilon_\lambda^2,$$

где

$$\varepsilon_\lambda = \alpha(1 - \lambda_{11}) + \lambda_{11}\varepsilon_{\text{см}};$$

$$\varepsilon_{\text{см}} = \alpha - M_{x|\alpha}\alpha^*(x).$$

Не ограничивая общности рассмотрения метода параметрических функций, можно предположить, что $\varepsilon_{\text{см}} = 0$. Тогда

$$R = \alpha^2(1 - \lambda_{11})^2 + \lambda_{11}^2 D_{x|\alpha}\alpha^*(x).$$

Введем функцию $\gamma = R/D_{x|\alpha}\alpha^*$, характеризующую сравнительное качество оценок α^* и α^*_λ. Очевидно,

$$\gamma(\lambda_{11}) = \frac{\alpha^2(1-\lambda_{11})^2}{D_{x|\alpha}\alpha^*(x)} + \lambda_{11}^2 = \frac{(1-\lambda_{11})^2}{d_{\text{отн}}} + \lambda_{11}^2,$$

где

$$d_{\text{отн}} = D_{x|\alpha}\left[\frac{\alpha^*(x)}{\alpha}\right].$$

На рис. 23 представлены кривые зависимости $\gamma(\lambda_{11})$ для различных значений $d_{\text{отн}}$.

Из анализа этих кривых следует возможность существенного уменьшения ошибки ($\gamma < 1$) за счет рационально выбранных значений параметра λ_{11}, причем чем точнее выбрана первоначальная оценка, тем острее минимум функции $\gamma(\lambda_{11})$ и тем меньший выигрыш можно получить за счет параметрической коррекции. Возможные значения λ_{11} находятся в отрезке $(0,1)$; ограничение сверху обеспечивает устойчивость соответствующих автоматических устройств параметрической обработки информации, для ограничения λ_{11} снизу необходимо хотя бы приблизительно знать величину $d_{\text{отн}}$.

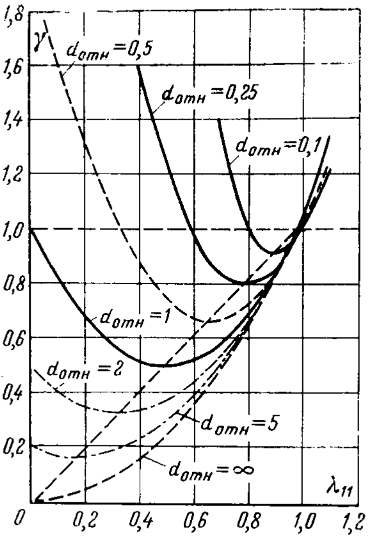


Рис. 23. Эффективность параметрической аппроксимации при использовании критерия среднего квадрата ошибки.

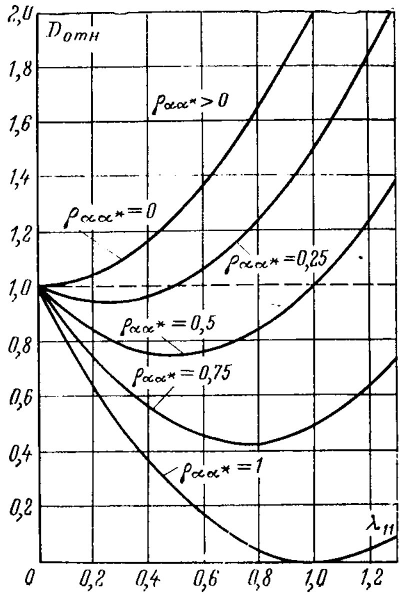


Рис. 24. Эффективность параметрической аппроксимации при использовании критерия дисперсии ошибки.

Условие $\partial\gamma/\partial\lambda_{11}=0$ приводит к оптимальному значению параметра

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{1}{1+d_{\text{отн}}}. \tag{28}$$

При этом

$$\gamma\left(\lambda_{11}^{(\sigma)}\right)=\lambda_{11}^{(\sigma)}.$$

Для анализа области допустимых значений $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ рассмотрим уравнение

$$\gamma=\frac{[1-\lambda_{11}^{(\sigma)}]^2}{d_{\text{отн}}}+(\lambda_{11}^{(\sigma)})^2=1,$$

корни которого имеют вид:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)\,(1)}=\frac{1-d_{\text{отн}}}{1+d_{\text{отн}}};\ \lambda_{11}^{(\sigma)\,(2)}=1.$$

Следовательно,

$$\lambda_{11}^{(\sigma)\,(1)}<\lambda_{11}^{(\sigma)}<1.$$

Для проверки устойчивости устройства параметрической обработки предположим, что вместо $d_{\text{отн}}$ в (28) используется оценка $d^*_{\text{отн}}$. Тогда

$$\lambda_{11}^{(\sigma)*} = \frac{1}{1 + d^*_{\text{отн}}}.$$

Используя первые два члена ряда Тейлора в окрестностях точки $d^{*0}_{\text{отн}} = M_{x\,|\,\alpha}\, d^*_{\text{отн}}$, получаем:

$$\sigma^*_\lambda = \left(\frac{1}{1 + d^*_{\text{отн}}}\right)' \sigma_{d^*_{\text{отн}}} = \frac{1}{(1 + d^{*0}_{\text{отн}})^2}\, \sigma_{d^*_{\text{отн}}}.$$

Поскольку $d^{*0}_{\text{отн}} > 0$, то и $\sigma_{\lambda*} < \sigma_{d^*_{\text{отн}}}$, откуда и следует устойчивость устройства параметрической обработки.

Перейдем к качественному анализу метода параметрических функций, использующего условие минимума дисперсии ошибки $D_{x\alpha}\Delta(t, x)$. Здесь полагаем, что α — случайный параметр.

Применительно к задачам оценивания характеристики α справедливо следующее выражение для дисперсии ошибки:

$$D_{x\alpha}\Delta(t,\ x) = \sigma_\alpha^2 + \lambda_{11}^2\, \sigma_{\lambda*}^2 - 2\lambda_{11} R_{\alpha\alpha*}.$$

Это соотношение запишем в виде

$$D_{\text{отн}} = \frac{D_{x\alpha}\Delta\ (t,\ x)}{\sigma_{\alpha*}^2} = \frac{\sigma_\lambda^2}{\sigma_{\alpha*}^2} + \lambda_{11}^2 -$$

$$- 2\lambda_{11}\rho_{\alpha\alpha*}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha*}} = \beta^2 + \lambda_{11}^2 - 2\lambda_{11}\rho_{\alpha\alpha*}\beta,$$

где

$$\beta = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha*}};\ \rho_{\alpha\alpha*} = \frac{R_{\alpha\alpha*}}{\sigma_\alpha \sigma_{\alpha*}}.$$

Кривые зависимости $D_{\text{отн}}(\lambda_{11})$ представлены на рис. 24 для случая $\beta = 1$ при различных значениях $\rho_{\alpha\alpha*}$.

Анализ кривых, приведенных на рис. 24, показывает, что при $\beta = 1$ выигрыш (т. е. $D_{\text{отн}} < 1$) имеет место для значений λ_{11}, находящихся в диапазоне $0 < \lambda_{11} < \lambda_{\text{макс}}$, где $\lambda_{\text{макс}} = 2\rho_{\alpha\alpha*}$. В общем случае λ_{11} изменяется в диапазоне

$$\lambda_{\text{мин}} < \lambda_{11} < \lambda_{\text{макс}},$$

причем

$$\lambda_{\text{мин}} = \beta\rho_{\alpha\alpha^*} - \sqrt{\beta^2\rho^2_{\alpha\alpha^*} - \beta^2 + 1};$$

$$\lambda_{\text{макс}} = \beta\rho_{\alpha\alpha^*} + \sqrt{\beta^2\rho^2_{\alpha\alpha^*} - \beta^2 + 1}.$$

Отрицательные значения $\rho_{\alpha\alpha^*}$ не позволяют снизить $D_{x\alpha}\Delta(t, x)$ за счет введения мультипликаторов λ_{11}.

С увеличением корреляционной связи α и α^* повышаются возможности улучшить оценку α^*. Это указывает на значительные резервы, имеющиеся при наличии предварительных оценок α^*, образуемых на основе использования условия максимума $\rho_{\alpha\alpha^*}$.

10. МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Физический смысл параметрической коррекции можно пояснить на примере использования метода параметрических функций в задачах линейного прогнозирования случайных процессов.

Пусть дана реализация $x(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ и требуется найти оценку $x^*_\lambda(t+T)$, где T — величина прогноза. Если считать, что предварительной оценкой $x^*(t+T)$ является оценка $x^*(t+T) = x(t)$, то для линейной параметрической модели имеем:

$$x^*_\lambda(t+T) = \lambda_{10} + \lambda_{11}x(t). \qquad (29)$$

Условие

$$J = M_x[X(t+T) - \lambda_{10} - \lambda_{11}X(t)]^2 = \min$$

приводит к следующим соотношениям для оптимальных параметрических функций:

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = m(t+T) - \lambda_{11}^{(\sigma)}\, m(t);$$

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{R(t+T, t)}{\sigma_x^2(t)},$$

где

$$m(t)=M_x[X(t)];$$

$$R(t+T,\ t)=M_x[X^0(t+T)X^0(t)];$$

$$X^0(t)=X(t)-m(t);$$

$$\sigma_x^2(t)=R(t,\ t).$$

Вводя нормированную корреляционную функцию

$$\rho(t+T,\ t)=\frac{R(t+T,\ t)}{\sigma_x(t+T)\,\sigma_x(t)},$$

получаем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{\sigma_x(t+T)}{\sigma_x(t)}\rho(t+T,\ t).$$

Таким образом, окончательное выражение для оценки прогноза случайного процесса имеет вид:

$$x^*_\lambda(t+T)=m(t+T)+\lambda_{11}^{(\sigma)}x^0(t)=m(t+T)+$$

$$+\rho(t+T,\ t)\frac{\sigma_x(t+T)}{\sigma_x(t)}[x(t)-m(t)].$$

Из полученного соотношения следует, что оптимальный линейный прогноз определяется текущим значением процесса $x(t)$, его математическим ожиданием $m(t)$, дисперсией $\sigma^2(t)$, а также будущими значениями $m(t+T)$, $\sigma_x(t+T)$, $\rho(T+T,\ t)$.

Для центрированного случайного процесса $X^0(t)$ имеем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}=0;\ \lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{\sigma_x(t+T)}{\sigma_x(t)}\rho(t+T,\ t);$$

$$x^*_\lambda(t+T)=\frac{\sigma_x(t+T)}{\sigma_x(t)}\rho(t+T,\ t)\,x(t).$$

Для стационарных в широком смысле случайных процессов имеют место соотношения

$$m(t)=m_0=\text{const};\ R(t+T,\ t)=R(T);$$

$$\sigma_x^2(t)=\sigma_x^2=\text{const};\quad \rho(T)=\frac{R(T)}{\sigma_x^2}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \rho(T), \quad \lambda_{10}^{(\sigma)} = m_0[1 - \rho(T)].$$

Оценка прогноза стационарного случайного процесса принимает вид:

$$x^*_\lambda(t+T) = m_0[1-\rho(T)] + \rho(T)\,x(t) =$$

$$= m_0 + \rho(T)\,[x(t - m_0)].$$

Следовательно, оптимальный линейный прогноз стационарного случайного процесса не зависит от дисперсии процесса и определяется величинами $x(t)$, m_0 и $\rho(t)$.

Для центрированного стационарного случайного процесса

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = 0;\ \lambda_{11}^{(\sigma)} = \rho(T);\ x^*_\lambda(t+T) = \rho(t)\,x(t).$$

Величина ошибки прогноза стационарного случайного процесса определяется соотношением

$$J = M_x[x(t+T) - \lambda_{10}^{(\sigma)} - \lambda_{11}^{(\sigma)}\,x(t)]^2 = \sigma_x^2\,[1 - \rho^2(T)],$$

а относительная ошибка

$$J_{\text{отн}} = \frac{J}{\sigma_x^2} = 1 - \rho^2(T).$$

При $T \to \infty$ $J_{\text{отн}} \to 1$, $J \to \sigma_x^2$ и $x^*_\lambda(t+T) \to m_0$.

Рассмотрим применительно к прогнозированию стационарных случайных процессов два алгоритма.

1. Пусть оценка прогноза отыскивается в виде

$$x^*(t+\tau) = \lambda_1 x(t) + \lambda_2 x(t-\tau).$$

Для определения оптимальных параметрических функций воспользуемся критерием вида

$$J = M_x[X(t+\tau) - \lambda_1 X(t) - \lambda_2 X(t-\tau)]^2.$$

Условия $\partial J/\partial\lambda_j = 0$ приводят к системе двух линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^{(\sigma)}\,\sigma_x^2 + \lambda_2^{(\sigma)}\,R(\tau) &= R(\tau); \\ \lambda_1^{(\sigma)}\,R(\tau) + \lambda_2^{(\sigma)}\,\sigma_x^2 &= R(2\tau), \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

из которых следует:

$$\lambda_1^{(\sigma)} = \rho(\tau)\frac{1-\rho(2\tau)}{1-\rho^2(\tau)};$$

$$\lambda_2^{(\sigma)} = \frac{\rho(2\tau)-\rho^2(\tau)}{1-\rho^2(\tau)},$$

где

$$\rho(\tau) = R(\tau)/\sigma_x^2.$$

Систему уравнений (30) можно разрешить относительно $\rho(\tau)$ и $\rho(2\tau)$:

$$\left.\begin{aligned} \rho(\tau) &= \frac{\lambda_1^{(\sigma)}}{1-\lambda_2^{(\sigma)}}; \\ \rho(2\tau) &= \frac{\lambda_2^{(\sigma)} - (\lambda_2^{(\sigma)})^2 + (\lambda_1^{(\sigma)})^2}{1-\lambda_2^{(\sigma)}}. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Соотношениями (31) целесообразно воспользоваться при наличии так называемого компенсационного коррелометра (см. § 11), обеспечивающего получение оценок $\lambda_1^{(\sigma)}$ и $\lambda_2^{(\sigma)}$.

2. Пусть оценка прогноза отыскивается в виде

$$x^*(t+\tau) = \lambda_1 x(t) + \lambda_2 x(t-\tau) + \lambda_3 x(t-2\tau).$$

Условия $\partial J/\partial\lambda_j = 0$, $j=1, 2, 3$ приводят к системе линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^{(\sigma)} + \lambda_2^{(\sigma)}\rho(\tau) + \lambda_3^{(\sigma)}\rho(2\tau) &= \rho(\tau); \\ \lambda_1^{(\sigma)}\rho(\tau) + \lambda_2^{(\sigma)} + \lambda_3^{(\sigma)}\rho(\tau) &= \rho(2\tau); \\ \lambda_1^{(\sigma)}\rho(2\tau) + \lambda_2^{(\sigma)}\rho(\tau) + \lambda_3^{(\sigma)} &= \rho(3\tau), \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

решения которой даются соотношениями вида

$$\lambda_j^{(\sigma)} = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \rho(\tau) & \rho(2\tau) \\ \rho(\tau) & 1 & \rho(\tau) \\ \rho(2\tau) & \rho(\tau) & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2\rho^2(\tau) + \rho(2\tau)[2\rho^2(\tau) - \rho(2\tau)],$$

а определитель Δ_j получается из Δ заменой j-го столбца на столбец, составленный из свободных членов системы уравнений:

$$\Delta_1=\rho(\tau)[1-\rho^2(\tau)]+\rho(2\tau)\rho(\tau)[\rho(2\tau)-1]+$$
$$+\rho(3\tau)[\rho^2(\tau)-\rho(2\tau)];$$
$$\Delta_2=\rho(\tau)[\rho(2\tau)-1]+\rho(2\tau)[1-\rho^2(2\tau)]+$$
$$+\rho(3\tau)\rho(\tau)[\rho(2\tau)-1];$$
$$\Delta_3=\rho(\tau)[\rho^2(2\tau)+\rho^2(\tau)-2\rho(2\tau)]+$$
$$+\rho(3\tau)[1-\rho^2(\tau)].$$

11. КОМПЕНСАЦИОННЫЙ МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ОЦЕНОК

На основе соотношений для параметрических функций $\lambda_{10}^{(\sigma)}$ и $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ оптимального линейного прогноза стационарных случайных процессов возможно построение компенсационного корреляционного устройства. Данное устройство должно реализовать выражение

$$J^*(\lambda_{10},\ \lambda_{11})=\frac{1}{T}\int\limits_0^{T_0}[x(t-T)-\lambda_{10}-\lambda_{11}x(t)]^2\,dt.$$

Структурная схема соответствующего устройства представлена на рис. 25. Для каждого значения T величина J^* является функцией λ_{10} и λ_{11}. Ручной настройкой устанавливаются такие значения λ_{10} и λ_{11}, при которых показание индикатора оказывается минимальным.

Используя соотношения, полученные в § 10,

$$\left.\begin{aligned}&\rho(T)=\lambda_{11}^{(\sigma)};\\ &m_0=\frac{\lambda_{10}^{(\sigma)}}{1-\rho(T)}=\frac{\lambda_{10}^{(\sigma)}}{1-\lambda_{11}^{(\sigma)}},\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

можно определить средний уровень m_0 и величину нормированной корреляционной функции $\rho(T)$.

В описанных ранее компенсационных корреляторах средний уровень не определялся, поэтому при обработке нецентрированных случайных процессов появлялась дополнительная погрешность. Приведенный пример показывает физический смысл $\lambda_{11}^{(\sigma)}$.

Оказывается параметрическая функция мультипликативной модели $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ является нормированной корреляционной функцией (при обработке центрированных стационарных случайных процессов).

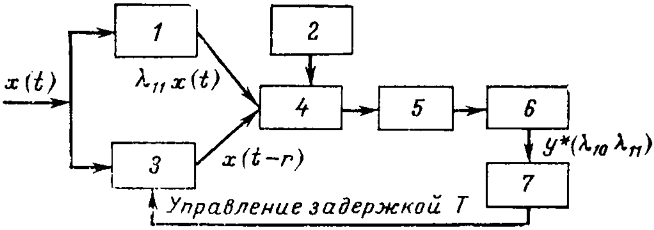


Рис. 25. Структурная схема компенсационного коррелометра.

1 — калиброванный потенциометр; *2* — регулируемое напряжение; *3* — линия задержки; *4* — сумматор; *5* — квадратор; *6* — интегратор; *7* — индикатор.

Рассматривая аддитивную модель, т. е. устанавливая на компенсационном коррелометре $\lambda_{11}=1$, получаем:

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = MX(t+T) - MX(t).$$

Для стационарных процессов $\lambda_{10}^{(\sigma)} = 0$ и эта величина может служить мерой нестационарности исследуемого случайного процесса по математическому ожиданию.

Рассматривая мультипликативную модель $\lambda_{10}=0$ и стационарный случайный процесс, получаем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M[X(t+T)X(t)]}{MX^2(t)} = \frac{R(T)+m_0^2}{\sigma^2+m_0^2},$$

что свидетельствует о существенном влиянии уровня m_0 на величину $\lambda_{11}^{(\sigma)}$. Поэтому и целесообразно использование полной линейной модели.

Заметим, что принимая $\lambda_{10}=0$ и $\lambda_{11}=1$, приходим к структурной функции (по определению А. Н. Колмогорова)

$$J(0,1) = C(T) = M_x[X(t+T) - X(t)]^2.$$

Следовательно, представленная на рис. 25 схема компенсационного коррелометра позволяет определять и структурную функцию.

Наличие минимального значения выражения $J(\lambda_{10}, \lambda_{11})$ указывает на возможность приближения (аппроксимации) вида

$$x(t+T) \approx \lambda_{10}^{(\sigma)} + \lambda_{11}^{(\sigma)} x(t),$$

т. е.

$$x(t+T) \approx m_0[1-\rho(T)]+\rho(T)x(t).$$

Это выражение может использоваться при прогнозировании нецентрированного стационарного случайного процесса $X(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ на отрезке времени T.

При наличии априорной информации в форме $M_R R(T)$, $M_m m^2$ и $M_m m$ оптимальные параметрические функции $\lambda_{10}^{(\sigma)}$ и $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ определяются соотношениями

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = [1 - \lambda_{11}^{(\sigma)}]\, M_m m;$$

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_R R(T) + M_m m^2 - (M_m m)^2}{M_R R(0) + M_m m^2 - (M_m m)^2},$$

где $M_R R(T)$ — априорное математическое ожидание корреляционной функции.

Обобщая рассмотренный пример, можно сформулировать следующую задачу. Пусть задан функционал $\Phi[\varphi(x), \mu]$, где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ — некоторые параметры; $\varphi(x)$ — заданное преобразование выборки x (или реализации соответствующего случайного процесса).

Условие

$$\nabla_\mu \Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_n}\right) = 0$$

приводит к вектору μ_0, компоненты которого могут совпадать с некоторыми из известных статистических оценок параметров соответствующей вероятностной меры.

Необходимо найти вектор μ_0.

Рассмотрим случай, когда μ является скалярной величиной, а целевой функционал $\Phi(\varphi(x), \mu)$ имеет вид:

$$\Phi = \int_0^T [\varphi(x(t)) - \mu f(x(t)]^2 dt,$$

где $f(x(t))$ — заданная функция от выборки.

Условие $\partial\Phi/\partial\mu=0$ приводит к оптимальному значению параметра

$$\mu_0=\frac{\int\limits_0^T \varphi(x(t))\, f(x(t))\, dt}{\int\limits_0^T f^2(x(t))\, dt}.$$

Если воспользоваться функционалом с весом

$$\Phi_1=\int\limits_0^T p(x(t))\,[\varphi(x(t))-\mu f(x(t))]^2\, dt,$$

то соответствующее значение $\mu=\mu_0^{(1)}$ примет вид:

$$\mu_0^{(1)}=\frac{\int\limits_0^T p(x(t))\,\varphi(x(t))\, f(x(t))\, dt}{\int\limits_0^T p(x(t))\, f^2(x(t))\, dt}.$$

В дискретном случае

$$\Phi_g=\sum_{j=1}^{n}[\varphi(x_j)-\mu_g f(x_j)]^2;$$

$$\mu_g=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi(x_j)\, f(x_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n} f^2(x_j)}.$$

Перейдем к рассмотрению случая двухпараметрической оптимизации. Пусть целевой функционал имеет вид:

$$\Phi=\int\limits_0^T [\varphi(x(t))-\mu^{(0)}-\mu^{(1)} f(x(t))]^2\, dt.$$

Условие

$$\nabla_\mu \Phi=\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\mu^{(0)}},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\mu^{(1)}}\right\}=0$$

приводит к системе двух уравнений

$$\int_0^T \varphi(x(t))\,dt - T\mu_0^{(0)} - \mu_0^{(1)} \int_0^T f(x(t))\,dt = 0;$$

$$\int_0^T \varphi(x(t))\, f(x(t))\,dt - \mu_0^{(0)} \int_0^T f(x(t))\,dt - \mu_0^{(1)} \int_0^T f^2(x(t))\,dt = 0.$$

Решая первое уравнение относительно $\mu_0^{(0)}$, а второе относительно $\mu_0^{(1)}$, получаем:

$$\mu_0^{(0)} = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x(t))\,dt - \mu_0^{(1)} \frac{1}{T}\int_0^T f(x(t))\,dt;$$

$$\mu_0^{(1)} = \frac{\int_0^T \varphi(x(t))\, f(x(t))\,dt - \mu_0^{(0)} \int_0^T f(x(t))\,dt}{\int_0^T f^2(x(t))\,dt},$$

откуда

$$\mu_0^{(1)} = \frac{\operatorname{cov}^*[\varphi(x(t))\, f(x(t))]}{d^*_f};$$

$$\mu_0^{(0)} = m^*_\varphi - m^*_f\, \frac{\operatorname{cov}^*[\varphi(x(t))\, f(x(t))]}{d^*_f},$$

где

$$m^*_\varphi = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x(t))\,dt;$$

$$m^*_f = \frac{1}{T}\int_0^T f(x(t))\,dt;$$

$$d^*_f = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(x(t))\,dt - \left[\frac{1}{T}\int_0^T f(x(t))\,dt\right]^2,$$

$$\operatorname{cov}^*[\varphi(x(t))\, f(x(t))] = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x(t))\, f(x(t))\,dt -$$

$$- \left[\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x(t))\,dt\right]\left[\frac{1}{T}\int_0^T f(x(t))\,dt\right].$$

Рассмотрим примеры однопараметрических компенсационных алгоритмов для задач оценки характеристик случайных процессов.

Пример 8. Пусть $\varphi(x(t)) = x(t)$; $f(x, (t)) \equiv 1$. Тогда

$$\mu_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \quad \text{или} \quad \mu_g = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Полученное выражение есть оценка математического ожидания стационарного случайного процесса. Следовательно, если иметь устройство, реализующее целевое отношение

$$\Phi = \int_0^T [x(t) - \mu]^2\,dt$$

и позволяющее регулировать величину μ, то такое устройство дает возможность оценивать математическое ожидание исследуемых случайных процессов.

Применительно к нестационарным случайным процессам можно воспользоваться линейным оператором $A_\tau^{(t)}$, например,

$$\Phi = \int_{t-T/2}^{t+T/2} [x(\tau) - \mu]^2 d\tau.$$

В общем случае

$$\Phi = A_\tau^{(t)}\,[x(\tau) - \mu]^2.$$

Оптимизация этого отношения дает:

$$\mu_0 = \frac{A_\tau^{(t)} x(\tau)}{A_\tau^{(t)}}.$$

Пример 9. Пусть $\varphi(x(t)) \equiv 1$, $f(x(t)) = x(t)$. Тогда

$$\mu_0 = \frac{\int_0^T x(t)\,dt}{\int_0^T x^2(t)\,dt} = \frac{m^*_1}{m^*_2},$$

где

$$m^*_1 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

— оценка математического ожидания стационарного случайного процесса (оценка моментной функции первого порядка);

$$m^*_2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$$

— оценка моментной функции второго порядка.

Пример 10. При обработке нестационарных случайных процессов можно воспользоваться функционалом

$$\Phi = \int_{t-T/2}^{t+T/2} [1 - \mu x(t)]^2\,dt,$$

в результате оптимизации которого можно получить отношение моментных функций

$$\mu_0{}^r = \frac{\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau}{\int_{t-T/2}^{t+T/2} x^2(\tau)\,d\tau} = \frac{m^{**}_1}{m^{**}_2}.$$

Пример 11. Рассмотрим алгоритм определения интервала корреляции первого порядка центрированного случайного процесса $X(t)$. Для этого целевое отношение выберем в виде

$$\Phi = \int_0^T \left[\int_0^{\tau_0} x(t-\tau)\,d\tau - \mu x(t)\right]^2 dt.$$

Условие $\partial\Phi/\partial\mu = 0$ приводит к уравнению

$$\int_0^T \int_0^{\tau_0} x(t-\tau)\,x(t)\,dt\,d\tau = \mu_0 \int_0^T x^2(t)\,dt,$$

откуда

$$\mu_0 = \frac{\int_0^{\tau_0}\int_0^T x(t-\tau)\,x(t)\,dt\,d\tau}{\int_0^T x^2(t)\,dt} = \frac{\int_0^{\tau_0} R^*(\tau)\,d\tau}{d^*} = \int_0^{\tau_0} R^*_{\text{н}}(\tau)\,d\tau = \tau^*_1,$$

где

$$R^*(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t-\tau)\,x(t)\,dt$$

— оценка корреляционной функции случайного процесса $X(t)$; $d^* = R^*(0)$ — оценка дисперсии; $R^*_{\text{н}}(\tau)$ — оценка нормированной корреляционной функции; τ^*_1 — оценка интервала корреляции.

Пример 12. Рассмотрим алгоритм определения взаимной корреляционной функции. Пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — два стационарных случайный процесса. Целевое отношение выберем в форме

$$\Phi = \int_0^T [x_1(t-\tau) - \mu x_2(t)]^2 \, dt.$$

Из условия $\partial\Phi/\partial\mu = 0$ находим:

$$\mu_0 = \frac{\int_0^T x_1(t-\tau)\, x_2(t)\, dt}{\int_0^T x_2^2(t)\, dt} = \frac{R^*_{12}(\tau)}{d^*_{x_2}},$$

где $R^*_{12}(\tau)$ — оценка взаимной корреляционной функции; $d^*_{x_2}$—оценка дисперсии процесса $X_2(t)$.

Пример 13. Рассмотрим целевое отношение

$$\Phi = \int_0^{\tau_0} \left[1 - \frac{\mu}{T} \int_0^T x(t)\, x(t-\tau)\, dt \right]^2 d\tau.$$

Условие $\partial\Phi/\partial\mu = 0$ приводит к получению отношения интервалов корреляции первых двух порядков, т. е.

$$\mu_0 = \frac{\int_0^{\tau_0} R^*(\tau)\, d\tau}{\int_0^{\tau_0} [R^*(\tau)]^2 d\tau} = \frac{\tau^*_1}{\tau^*_2 R(0)} = \frac{\tau^*_1}{\tau^*_2 \sigma^2},$$

где

$$R^*(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, x(t-\tau)\, dt;$$

$$\tau^*_1 = \frac{\int_0^{\tau_0} R^*(\tau)\, d\tau}{R(0)};$$

$$\tau^*_2 = \frac{\int_0^{\tau_0} [R^*(\tau)]^2\, d\tau}{R^2(0)}.$$

Отношение интервалов корреляции μ_0 является важным информационным показателем случайного процесса.

12. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ ПОЛЕЗНЫХ СИГНАЛОВ

Пусть $W(t)$ — полезный сигнал, $W^*(x)$ — его оценка.

Применение метода параметрических функций к задачам выделения (фильтрации) полезного сигнала $W(t)$ из выборки $x(t)$, содержащей помимо $W(t)$ также и аддитивную помеху $N(t)$ сводится к анализу трех алгоритмов:

аддитивного

$$W^*_\lambda(t) = \lambda_{10}(t) + W^*(x);$$

мультипликативного

$$W^*_\lambda(t) = \lambda_{11}(t) W^*(x);$$

полного линейного

$$W^*_\lambda(t) = \lambda_{10}(t) + \lambda_{11}(t) W^*(x).$$

Интерес представляет простейший случай, когда в качестве предварительной оценки $W^*(x)$ рассматривается сама измеряемая величина $x(t)$.

Для определения оптимальных параметрических функций можно воспользоваться общими соотношениями, полученными в предыдущих параграфах.

Так, при использовании мультипликативного алгоритма $W^*_\lambda(t) = \lambda_{11}(t)\, x(t)$ будем иметь:

для условия минимума средней квадратической ошибки

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{R(W, x) + M_w W M_x X(t)}{\sigma_x^2 + [M_x X(t)]^2};$$

для условия минимума дисперсии

$$\lambda_{11}^{(d)} = \frac{R(W, x)}{\sigma_x^2}.$$

При фильтрации детерминированных полезных сигналов $W(t)$ имеем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{W(t)\, M_{x\,|\,w} X(t)}{\sigma_x^2 + [M_{x\,|\,w} X(t)]^2};$$

$$\lambda_{11}^{(d)} = 0.$$

Величина минимальной средней квадратической ошибки (при оптимальной параметрической коррекции $\lambda_{11}^{(\sigma)}$) определяется соотношением

$$\overline{R}_{\text{мин}} = M_w (W)^2 - \frac{[R(W, x)]^2}{M_x [X(t)]^2}.$$

Дальнейшая конкретизация использования $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ может быть продемонстрирована на примере оценки амплитуды эхо-сигнала. Эта задача решалась на основе использования байесовских процедур [Л. 10]. Однако при этом получились весьма громоздкие алгоритмы.

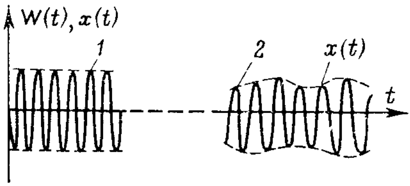


Рис. 26. Зондирующий и отраженный сигналы.

Итак, имеются радиолокационная или гидролокационная станции, работающие в импульсном режиме. На рис. 26 показаны зондирующий *1* и отраженный *2* сигналы. Отраженный сигнал (эхо-сигнал) имеет случайный уровень огибающей W, изменяющийся от одного цикла зондирования к другому.

Пусть $f_{ap}(w)$ — априорная плотность распределения уровня полезного сигнала W; $f(x|w)$ — плотность распределения огибающей смеси сигнала W с помехой; x — измеряемый уровень огибающей смеси сигнала с помехой; σ^2_N — дисперсия помехи; $f(x, w)$ — совместная плотность распределения уровней x и W.

Задача состоит в отыскании оценки W^*_λ. Воспользуемся мультипликативной параметрической моделью

$$W^*_\lambda = \lambda_{11} x \tag{34}$$

и будем искать оптимальные параметрические функции $\lambda_{11}^{(\sigma)}$.

Критерий $\overline{R} = M_{xw}[W - \lambda_{11} X]^2 = \min$ в соответствии с (19) и (20) дает:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_{xw}(WX)}{M_{xw}(X)^2} = \frac{M_w [W M_{x|w} X]}{M_w M_{x|w} (X)^2}. \tag{35}$$

Для определения

$$M_{x\mid w}X=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x\mid w)dx \quad \text{и} \quad M_{x\mid w}(X)^2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x\mid w)\,dx$$

необходимо знать условную плотность распределения $f(x|w)$.

Будем предполагать, что полезный сигнал задан в виде гармонического (синусоидального) колебания

$$S(t)=W\cos\omega_0 t,$$

а помеха представляет собой узкополосный стационарный нормальный шум.

Используя метод огибающих, можно записать шумовую составляющую в виде

$$N(t)=N_1(t)\cos\omega_0 t+N_2(t)\sin\omega_0 t,$$

где $N(t)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ — нормально распределенные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и равными дисперсиями:

$$\sigma_N^2=\sigma_{N_1}^2=\sigma_{N_2}^2 .$$

Аддитивная смесь полезного сигнала и помехи имеет вид:

$$y(t)=S(t)+N(t)=[W+N_1(t)]\cos\omega_0 t+$$

$$+N_2(t)\sin\omega_0 t=x(t)\cos[\omega_0 t-\varphi(t)],$$

где

$$x(t)=\sqrt{[W+N_1(t)]^2+N_2^2(t)}$$

— огибающая суммарного процесса $y(t)$;

$$\varphi(t)=\operatorname{arctg}\frac{N_2(t)}{W+N_1(t)}$$

— фаза процесса.

Распределение модуля вектора $\mathbf{x}(t)$ с независимыми нормальными компонентами называется обобщенной функцией распределения Релея и имеет вид:

$$f(x\mid w)=\frac{x}{\sigma_N^2}\exp\left[-\frac{x^2+w^2}{2\sigma_N^2}\right]\mathrm{J}_0\left(\frac{iwx}{\sigma_N^2}\right),\quad x>0, \qquad (36)$$

где $J_0\left(\frac{iwx}{\sigma_N^2}\right)=I_0\left(\frac{wx}{\sigma_N^2}\right)$ — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента.

Пусть $m_k = M_{x\,|\,w} x^k$, следовательно,

$$m_k=\frac{1}{\sigma_N^2}\exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma_N^2}\right)\int\limits_0^\infty x^{k+1}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_N^2}\right]I_0\left(\frac{wx}{\sigma_N^2}\right)dx.$$

Вычислив в последнем выражении интеграл, получим:

$$m_k=(2\sigma_N^2)^{k/2}\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right){}_1F_1\left(-\frac{k}{2},\,1,\,-\frac{w^2}{2\sigma_N}\right),$$

где $\Gamma(1+k/2)$ — гамма-функция; ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Пусть $k=1$, тогда

$$\Gamma(3/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$m_1=\sigma_N\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,{}_1F_1\left(-\frac{1}{2},\,1,\,-\frac{w^2}{2\sigma_N^2}\right)=$$

$$=\sigma_N\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,{}_1F_1\left(-\frac{1}{2},\,1,\,-q^2\right),$$

где $q^2=w^2/(\sqrt{2}\,\sigma_N^2)$ — отношение мощностей сигнала и шума.

Используя представление гипергеометрической функции в виде ряда

$${}_1F_1(a,b,c)=1+\frac{ac}{b\cdot 1!}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{c^2}{2!}+$$

$$+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{c^3}{3!}+\ldots,$$

при условии $q \ll 1$ получаем:

$$m_1=\left(\frac{\pi}{2}\sigma_N^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{16}q^4-\frac{1}{96}q^6-\ldots\right)$$

или приближенно

$$\tilde{m}_1\approx\left[\frac{\pi}{2}\sigma_N^2(1+q^2)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (37)$$

Для больших отрицательных значений аргумента c имеет место асимптотическое разложение

$$ {}_1F_1(a, b, c) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \frac{1}{(-c)^a} \left[1 + \frac{a(a-b+1)}{(-c)} + \right. $$

$$ \left. + \frac{a(a+1)(a-b+1)(a-b+2)}{2(-c)^2} + \ldots \right]. $$

Поэтому при $q \gg 1$ имеем:

$$ {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, 1, -q^2\right) \approx \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1/2} q\left(1 + \frac{1}{4} q^{-2}\right). $$

Следовательно,

$$ m_1 \approx \tilde{\tilde{m}}_1 = (2\sigma_N^2)^{\frac{1}{2}}\, q\left(1 + \frac{1}{4} q^{-2}\right). \tag{38} $$

Вторые моменты m_2 будем определять по формуле

$$ m_2 = 2\sigma_N^2 + m_1^2 . $$

Таким образом, соотношение (35) можно записать в виде

$$ \lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_w(Wm_1)}{2\sigma_N^2 + M_w(m_1^2)}. $$

Используя приближенные значения m_1, определяемые формулами (37) и (38), можно получить следующие приближенные значения параметра $\lambda_{11}^{(\sigma)}$:

1) $q \ll 1$

$$ \tilde{\lambda}_{11}^{(\sigma)} \approx \frac{\sigma_N \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, M_w\left\{W \sqrt{1 + \frac{W^2}{2\sigma_N^2}}\right\}}{2\sigma_N^2 + \frac{\pi}{2}\, \sigma_N^2 M_w\left(1 + \frac{W^2}{2\sigma_N^2}\right)} = $$

$$ = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, M_w\left\{\sqrt{W^2 + \frac{W^4}{2\sigma_N^2}}\right\}}{\sigma_N\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} M_w\left(\frac{W^2}{2\sigma_N}\right)}; \tag{39} $$

2) $q \gg 1$

$$\widetilde{\widetilde{\lambda}}_{11}^{(\sigma)} \approx \frac{M_w\left\{W\,(2\sigma_N^2)^{\frac{1}{2}}\, q\left(1+\frac{1}{4q^2}\right)\right\}}{2\sigma_N^2 + M_w\left\{(2\sigma_N^2)\, q^2\left(1+\frac{1}{4q^2}\right)^2\right\}} =$$

$$= \frac{M_w\left[W\left(1+\frac{\sigma_N^2}{2W^2}\right)\right]}{2\sigma_N^2 + M_w\left[W^2\left(1+\frac{\sigma_N^2}{2W^2}\right)^2\right]}. \tag{40}$$

Дальнейшая конкретизация оценок $\widetilde{\lambda}_{11}^{(\sigma)}$ и $\widetilde{\widetilde{\lambda}}_{11}^{(\sigma)}$ может проводиться только на основе задания априорных плотностей вероятности $f_{ap}(w)$.

Рассмотрим несколько видов априорных плотностей вероятности уровня полезного сигнала.

Равномерный закон

В случае равномерного закона имеем:

$$f_{ap}(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{W_2 - W_1} & \text{при} \quad W_1 < w < W_2; \\ 0 & \text{при} \quad w < W_1 \text{ и } w > W_2. \end{cases}$$

Вычислим некоторые вспомогательные интегралы:

$$M_w W = \frac{1}{W_2 - W_1}\int_{W_1}^{W_2} w\,dw = \frac{W_1 + W_2}{2};$$

$$M_w\left(\sqrt{W^2 + \frac{W^4}{2\sigma_N^2}}\right) = \frac{1}{W_2 - W_1}\int_{W_1}^{W_2}\sqrt{w^2 + \frac{w^4}{2\sigma_N^2}}\,dw =$$

$$= \frac{1}{W_2 - W_1}\int_{W_1}^{W_2} w\sqrt{1 + \frac{w^2}{2\sigma_N^2}}\,dw =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}\,\sigma_N (W_2 - W_1)}\left[(W_2^2 + 2\sigma_N^2)^{3/2} - (W_1^2 + 2\sigma_N^2)^{3/2}\right];$$

$$M_w (W)^2 = \frac{1}{W_2 - W_1}\int_{W_1}^{W_2} w^2\,dw = \frac{1}{3}\,\frac{W_2^3 - W_1^3}{W_2 - W_1};$$

$$M_w\left(\frac{1}{W}\right)=\frac{1}{W_2-W_1}\int\limits_{W_1}^{W_2}\frac{1}{w}\,dw=\frac{\ln W_2-\ln W_1}{W_2-W_1};$$

$$M_w\left(\frac{1}{w}\right)^2=\frac{1}{W_2-W_1}\int\limits_{W_1}^{W_2}\frac{1}{w^2}\,dw=\frac{1}{W_1W_2}.$$

Выражения для $\tilde{\lambda}_{11}^{(\sigma)}$ и $\tilde{\tilde{\lambda}}_{11}^{(\sigma)}$ принимают вид:

$$\tilde{\lambda}_{11}^{(\sigma)}=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[(W_2^2+2\sigma_N^2)^{3/2}-(W_1^2+2\sigma_N^2)^{3/2}\right]}{3\sqrt{2}\,\sigma_N^2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)(W_2-W_1)+\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}(W_2^3-W_1^3)};$$

$$\tilde{\tilde{\lambda}}_{11}^{(\sigma)}=\frac{W_2^2-W_1^2+\sigma_N^2(\ln W_2-\ln W_1)}{6\sigma_N^2(W_2-W_1)+\frac{2}{3}(W_2^3-W_1^3)+\frac{\sigma^4(W_2-W_1)}{4W_1W_2}}.$$

Если $W_1=0$, то

$$\tilde{\lambda}_{11}^{(\sigma)}=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[(W_2^2+2\sigma_N^2)^{3/2}-(2\sigma_N^2)^{3/2}\right]}{3\sqrt{2}\,\sigma_N^2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)W_2+\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}W_2^3}.$$

Для сравнения укажем некоторые апостериорные характеристики, получаемые на основе использования формулы Байеса.

Апостериорная плотность вероятности амплитуды полезного сигнала равна:

$$f(w\,|\,x)=\frac{f_{ap}(w)\,f(x\,|\,w)}{\int\limits_{\Omega_w} f_{ap}(w)\,f(x\,|\,w)\,dw}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{w^2}{2\sigma_N^2}}\,\mathrm{I}_0\left(\frac{xw}{\sigma_N^2}\right)}{\int\limits_{W_1}^{W_2}e^{-\frac{w^2}{2\sigma_N^2}}\,\mathrm{I}_0\left(\frac{xw}{\sigma_N^2}\right)dw}=B(x)\,e^{-\frac{w^2}{2\sigma_N^2}}\,\mathrm{I}_0\left(\frac{wx}{\sigma_N^2}\right),$$

где

$$B(x)=\frac{1}{\int\limits_{W_1}^{W_2} e^{-\frac{w^2}{2\sigma_N^2}} \mathrm{I}_0\left(\frac{wx}{\sigma_N^2}\right) dw}.$$

Среднеапостериорная оценка амплитуды полезного сигнала

$$W^*{}_{ps}(x)=M_{w\mid x}W=$$

$$=\int\limits_{W_1}^{W_2} wf(w\mid x)\,dw=\int\limits_{W_1}^{W_2} wB(x)\,e^{-\frac{w^2}{2\sigma_N^2}}\mathrm{I}_0\left(\frac{wx}{\sigma_N^2}\right)dw=$$

$$=B(x)\,\sigma_N^2\,e^{\frac{x^2}{2\sigma_N^2}}\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{w}{\sigma_N^2}\exp\left[-\frac{x^2+w^2}{2\sigma_N^2}\right]\mathrm{I}_0\left(\frac{wx}{\sigma_N^2}\right)dw. \qquad (41)$$

Для $W_1=0$ и $W_2=\infty$ с учетом

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}\mathrm{I}_\nu(\beta x)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\exp\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)\mathrm{I}_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)$$

имеем:

$$B(x)=\frac{1}{\frac{\sigma_N\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{x^2}{4\sigma_N^2}\right)\mathrm{I}_0\left(\frac{x^2}{4\sigma_N^2}\right)};$$

$$\int\limits_{w_1}^{w_2}\frac{w}{\sigma_N^2}\exp\left[-\frac{x^2+w^2}{2\sigma_N^2}\right]\mathrm{I}_0\left(\frac{wx}{\sigma_N^2}\right)dw=1.$$

Поэтому

$$W^*{}_{ps}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sigma_N\exp\left(\frac{x}{2\sigma_N}\right)^2}{\mathrm{I}_0\left[\left(\frac{x}{2\sigma_N}\right)\right]^2}. \qquad (42)$$

Соотношения (41) и (42) указывают на сравнительную громоздкость байесова алгоритма обработки по сравнению с алгоритмами параметрической коррекции.

Распределение Релея

Для распределения Релея имеем:

$$f_{ap}(w)=\frac{w}{\sigma_w^2}e^{-\frac{w}{2\sigma_w^2}},\quad 0<w<\infty,$$

где σ_w^2 — дисперсия уровней эхо-сигнала W.

Выражение для $\widetilde{\lambda}_{11}^{(\sigma)}$ принимает вид:

$$\widetilde{\lambda}_{11}^{(\sigma)}=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,M_w\left\{\sqrt{W^2+\frac{W^4}{2\sigma_N^2}}\right\}}{\sigma_N\left(2+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}M_w\left(\frac{W^2}{2\sigma_N^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\frac{1}{\sigma_w^2}\int\limits_0^\infty w\sqrt{w^2+\frac{w^4}{2\sigma_N^2}}\exp\left(-\frac{w}{2\sigma_w^2}\right)dw}{\sigma_N\left(2+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4\sigma_w^2\sigma_N}\int\limits_0^\infty w^3e^{-\frac{w}{2\sigma_w^2}}dw}.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx=\Gamma(z),$$

то

$$\widetilde{\lambda}_{11}^{(\sigma)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\int\limits_0^\infty w^2\sqrt{1+\frac{w^2}{2\sigma_N^2}}\exp\left(-\frac{w}{2\sigma_w^2}\right)dw}{\sigma_w^2\sigma_N\left(2+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{24\pi}{\sigma_N}\sigma_w^6}.$$

Перейдем к рассмотрению примеров оценок характеристик случайных величин.

13. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОК ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пример 14. Рассмотрим оценку дисперсии S^2, называемую выборочной дисперсией, в качестве предварительной

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2, \tag{43}$$

где

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i;$$

$\{x_i\}$ — некоррелированные выборочные значения.

Известно, что

$$M_{x|\sigma}(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Для данного примера

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)}=\frac{\sigma^2}{M_{x|\sigma}(S^2)}=\frac{n}{n-1}$$

и не зависит от оцениваемой характеристики σ^2.

Параметрическая оценка дисперсии

$$S^2_{\lambda(\varepsilon)}=\lambda_{11}^{(\varepsilon)}S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

является несмещенной и используется практически для малых n ($n<30$). Заметим, что в геодезии оценка стандартного отклонения

$$S_{\lambda(\varepsilon)}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

носит наименование формулы Бесселя.

Используя оценку $S^2_{\lambda(\varepsilon)}$ как исходную, можно перейти к новой оценке

$$S^2_{\lambda(\sigma)}=\lambda_{11}^{(\sigma)}S^2_{\lambda(\varepsilon)}=\lambda_{11}^{(\sigma)}\lambda_{11}^{(\varepsilon)}S^2,$$

характеризующейся минимальной средней квадратической ошибкой.

Пусть случайная величина X распределена по произвольному закону, причем $\sigma<\infty$ и $\mu_4<\infty$ (μ_4 — центральный момент четвертого порядка). Тогда

$$DS^2=\frac{\mu_4-\sigma^4}{n}-\frac{2(\mu_4-2\sigma^4)}{n^2}+\frac{\mu_4-3\sigma^4}{n^3}$$

или

$$DS^2_{\lambda(\varepsilon)}=D(\lambda_{11}^{(\varepsilon)}S^2)=[\lambda_{11}^{\varepsilon}]^2DS^2=\frac{n^2}{(n-1)^2}DS^2=$$

$$=\frac{1}{(n-1)^2}\left[n(\mu_4-\sigma^4)-2(\mu_4-2\sigma^4)+\frac{\mu_4-3\sigma^4}{n}\right].$$

Следовательно, используя формулу типа (22), получаем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{1}{1+D\left(\frac{S^2_{\lambda(\varepsilon)}}{\sigma^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{(n-1)^2\sigma^4}\left[n(\mu_4-\sigma^4)-2(\mu_4-2\sigma^4)+\frac{\mu_4-3\sigma^4}{n}\right]}.$$

Для нормальной случайной величины X $\mu_4=3\sigma^4$. Следовательно,

$$DS^2=\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4;$$

$$DS^2_{\lambda(\varepsilon)}=\frac{2}{n-1}\sigma^4;$$

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{1}{1+\frac{2}{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}.$$

Оптимальная параметрическая оценка принимает вид:

$$S^2_{\lambda(\sigma)}=\frac{n-1}{n+1}\,\frac{n}{n-1}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

Пример 15. Рассмотрим оценку дисперсии методом последовательных разностей [Л. 13], которая имеет вид:

$$q^2=\frac{1}{2(n-1)}\sum_{j=1}^{n-1}\Delta_j^2,$$

где $\Delta^2{}_j=(x_{j+1}-x_j)^2$, и используется в тех случаях, когда измерения x_j имеют смещение, а дисперсия остается постоянной.

Перейдем к определению параметрической оценки q^2_λ. Пусть исследуемая случайная величина X распределена нормально, тогда

$$Dq^2=\frac{3n-4}{(n-1)^2}\sigma^4.$$

Кроме того, $M_{x|\sigma}\,q^2=\sigma^2$ (оценка q^2 является несмещенной). Очевидно,

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{1}{1+D\left(\frac{q^2}{\sigma^2}\right)}=\frac{1}{1+\frac{3n-4}{(n-1)^2}}=\frac{(n-1)^2}{n^2+n-3}=\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-3}.$$

Поэтому параметрическая оценка

$$q_\lambda^2 = \lambda_{11}^{(\sigma)} q^2 = \frac{n-1}{2[n(n+1)-3]} \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_j^2.$$

Пример 16. Рассмотрим оценку среднего квадратического отклонения

$$S = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Для нормально распределенной случайной величины X имеем:

$$M_{x|\sigma}\, S \approx \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{1/2} \sigma,$$

что указывает на асимптотическую несмещенность S как оценки σ. Отсюда находим:

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{\sigma}{M_{x|\sigma}\, S} = \frac{1}{(1 - 3/2n)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2n}{2n-3}}.$$

Несмещенная оценка $S_{\lambda(\varepsilon)}$ принимает вид:

$$S_{\lambda(\varepsilon)} = \left[\frac{2}{2n-3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2}.$$

Рассматривая оценку $S_{\lambda(\sigma)} = \lambda_{11}^{(\sigma)} S_{\lambda(\varepsilon)}$, учтем, что

$$D_{x|\sigma}(S) \approx \frac{\sigma^2}{2n},$$

тогда

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{2n-3}{2(n-1)};$$

$$S_{\lambda(\sigma)} = \left[\frac{n(2n-3)}{2(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2}.$$

Пример 17. Для характеристики асимметричности распределения случайных величин используется понятие медианы. В качестве оценки медианы часто употребляется выражение

$$\mu^* = \begin{cases} x_{\frac{(n+1)}{2}} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & \text{при } n \text{ четном} \end{cases}$$

при условии, что ряд x_i, $i=1, 2, \ldots, n$ является упорядоченным, т. е. $x_i \leqslant x_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots, n-1$.

Для симметричных распределений

$$M_{x|m}\,\mu^* = m;\quad D_{x|m}\mu^* \approx \frac{\pi\sigma^2}{2n}.$$

Поэтому

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{1}{1 + D_{x|m}\left(\frac{\mu}{m}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\pi\sigma^2}{2nm^2}};$$

$$\mu^*_\lambda = \lambda_{11}^{(\sigma)}\mu^* = \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2n}\frac{\sigma^2}{m^2}}\, x_{\frac{n+1}{2}} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2n}\frac{\sigma^2}{m^2}}\, \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Повышение точности параметрической оценки медианы объясняется привлечением дополнительной информации в форме отношения σ/m.

Пример 18. Взвешенное среднее $\bar{x}_h$ определяется соотношением

$$\bar{x}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i},\quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где h_i — веса (некоторые числа).

Статистика $\bar{x}_h$ используется в качестве оценки математического ожидания случайных величин при использовании независимых x_i с разными дисперсиями σ^2_i.

Найдем параметрическую коррекцию оценки $\bar{x}_h$. Для любого распределения случайной величины X

$$M_{x|m}(\bar{x}_h) = m;$$

$$D_{x|m}(\bar{x}_h) = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2}.$$

Поэтому оптимальная параметрическая функция $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ определится соотношением

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{1}{1+D_{x|m}\left(\frac{\bar{x}_h}{m}\right)}=\frac{1}{1+\frac{\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}h_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\right)^2}}.$$

Новая скорректированная оценка

$$m^*_\lambda=\lambda_{11}^{(\sigma)}\bar{x}_h=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}h_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\right)^2+\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}h_i^2}\sum_{i=1}^{n}h_ix_i,$$

откуда следует, что для оценки m^*_λ знать m не обязательно, достаточно знать коэффициент вариации σ/m.

Если $h_i=1/\sigma_i^2$, то

$$D_{x|m}(\bar{x}_h)\approx\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}.$$

Поэтому

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{1}{1+D_{x|m}\left(\frac{\bar{x}_h}{m}\right)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m^2}{\sigma_i^2}}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m^2}{\sigma_i^2}}.$$

Оценка $m^*_\lambda=\lambda_{11}^{(\sigma)}\bar{x}_h$ принимает вид:

$$m^*_\lambda=\frac{1}{m^{-2}+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma_i^2}.$$

Пример 19. Пусть оценка среднего квадратического отклонения определяется соотношением

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} |,$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Для нормально распределенных X имеем:

$$M_{x|\sigma}(d) = \left[\frac{2(n-1)}{\pi n} \right]^{1/2} \sigma;$$

$$D_{x|\sigma}(d) \approx \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{\sigma^2}{n}.$$

Рассматривая d как оценку σ, т. е.

$$\sigma^* = d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} |,$$

вычисляем:

$$\lambda_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{\sigma}{M_{x|\sigma}(d)} = \left(\frac{n\pi}{2(n-1)} \right)^{1/2}$$

и приходим к несмещенной оценке

$$\sigma^*_{\lambda(\varepsilon)} = \left[\frac{\pi}{2n(n-1)} \right]^{1/2} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{a}|.$$

Вычисляя

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{\sigma M_{x|\sigma} d}{D_{x|\sigma}(d) + [M_{x|\sigma}(d)]^2} = \frac{2(n-1)}{2(n-2) + \pi},$$

получаем скорректированную оценку

$$\sigma^*_{\lambda(\sigma)} = \lambda_{11}^{(\sigma)} \sigma^*_{\lambda(\varepsilon)} = \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}}{n[2(n-2) + \pi]} \sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} |.$$

Таким образом, для параметрической коррекции оценки d дополнительной информации относительно характеристик исследуемой случайной величины не требуется.

Пример 20. Оценим параметр случайной величины, распределенной по закону Релея. Параметрическую оценку будем проводить при условии, что первоначальной является максимально правдоподобная оценка.

Для нахождения максимально правдоподобной оценки воспользуемся функцией правдоподобия

$$f(x \mid \alpha) = \frac{x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}, \quad x > 0,$$

где α — детерминированный параметр, подлежащий оценке по совокупности n независимых измерений (испытаний) $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Функция правдоподобия для совокупности n независимых измерений $L_x(\alpha)$ и ее логарифм соответственно равны:

$$L_x(\alpha) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j \mid \alpha) = \frac{\prod_{j=1}^{n} x_j}{\alpha^n} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{2\alpha}};$$

$$\ln L_x(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \ln x_j - n \ln \alpha - \frac{1}{2\alpha} \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

Для нахождения максимально правдоподобной оценки воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial \ln L_x(\alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial \ln L_x(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 0,$$

из которого определяем:

$$\alpha^*_{\text{м.п}} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

Оценка $\alpha^*_{\text{м.п}}$ является несмещенной, поскольку

$$M_{x \mid \alpha} \alpha^*_{\text{м.п}} = \frac{1}{2n} M_{x \mid \alpha} \left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2 \right) = \frac{1}{2} M_{x \mid \alpha} X^2;$$

$$M_{x \mid \alpha} X^2 = D_{x \mid \alpha} X + (M_{x \mid \alpha} X)^2 = \frac{4 - \pi}{2} \alpha + \frac{\pi}{2} \alpha = 2\alpha;$$

$$M_{x \mid \alpha} \alpha^*_{\text{м.п}} = \alpha.$$

Будем искать параметрическую оценку в виде

$$\alpha^*_\lambda = \frac{\lambda_{11}^{(\sigma)}}{2n} \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

Для определения $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ в соответствии с формулой, которая вытекает из соотношения

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{1}{1 + d_{\text{отн}}},$$

где

$$d_{\text{отн}} = D_{x \mid \alpha}\left(\frac{\alpha^*_{\text{м.п}}}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2} D_{x \mid \alpha}\alpha^*_{\text{м.п}},$$

требуется знать дисперсию оценки $\alpha^*_{\text{м.п}}$.

Очевидно, следующая последовательная цепь соотношений:

$$D_{x \mid \alpha}\alpha^*_{\text{м.п}} = D_{x \mid \alpha}\left[\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right] = \frac{D_{x \mid \alpha}X^2}{4n};$$

$$D_{x \mid \alpha}X^2 = M_{x \mid \alpha}X^4 - (M_{x \mid \alpha}X^2)^2;$$

$$M_{x \mid \alpha}X^4 = \int_0^\infty \frac{x^5}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} dx = 8\alpha^2;$$

$$D_{x \mid \alpha}X^2 = 8\alpha^2 - 4\alpha^2 = 4\alpha^2;$$

$$D_{x \mid \alpha}\alpha^*_{\text{м.п}} = \frac{\alpha^2}{n};$$

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{1}{1 + d_{\text{отн}}} = \frac{n}{n+1};$$

$$\alpha^*_\lambda = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

Эффективность оценки α^*_λ определится соотношением

$$R_{\text{мин}} = \alpha^2 (1 - \lambda_{11}^{(\sigma)}) = \frac{\alpha^2}{n+1}.$$

Для сравнения с максимально правдоподобной оценкой $\alpha^*_{\text{м.п}}$ введем отношение

$$\gamma = \frac{D_{x \mid \alpha}\alpha^*_{\text{м.п}} - R_{\text{мин}}}{D_{x \mid \alpha}\alpha^*_{\text{м.п}}} = \frac{1}{n+1}.$$

Рассмотрим итерационную форму оценки α^*_λ, котор ая получает последовательно из соотношений

$$\alpha^*_\lambda(n) = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 + \frac{1}{2(n+1)} x_n^2;$$

$$\alpha^*_\lambda(n-1) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2;$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 = 2n\alpha^*_\lambda(n-1);$$

$$\alpha^*_\lambda(n) = \frac{n\alpha^*_\lambda(n-1)}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} x_n^2 + \alpha^*_\lambda(n-1) - \alpha^*_\lambda(n-1) =$$

$$= \alpha^*_\lambda(n-1) - \frac{1}{n+1}\left[\alpha^*_\lambda(n-1) - \frac{1}{2} x_n^2\right].$$

В разностной форме это уравнение имеет вид:

$$\Delta\alpha^*_\lambda(n-1) = \alpha^*_\lambda(n) - \alpha^*_\lambda(n-1) =$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left[\alpha^*_\lambda(n-1) - \frac{1}{2} x_n^2\right].$$

В табл. 4 представлены параметрические оценки для характеристик случайных величин, распределенных по различным законам (экспоненциальному, Максвелла и др.). В качестве исходных оценок рассматривались максимально правдоподобные оценки, которые затем уточнялись с помощью параметрического мультипликатора.

14. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОК ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пример 21. Рассмотрим параметрическую оценку математического ожидания случайного процесса $X(t)$

$$m^*_\lambda = \frac{\lambda^*_{11}}{T} \int_0^T x(\tau)\, d\tau.$$

Поскольку в данном примере

$$A_\tau^{(t)} x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau)\, d\tau;$$

$$\Gamma_\alpha(t_1, t_2) = M_m m(t_1) m(t_2) = \Gamma_m(t_1, t_2);$$

$$R_{\text{в}x}(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2),$$

Таблица 4

Параметрические статистические оценки характеристик случайных величин

№ п/п.	Вид распределения	Максимально правдоподобные оценки	Оценки с мультипликатором	Параметрическая функция
1	Экспоненциальное распределение $f(x \mid T) = \frac{1}{T} e^{-\frac{x}{T}}$, $x > 0$	$T^*_{\text{м.п}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$	$T^*_{\lambda} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i$	$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{n}{n+1}$
2	Распределение Максвелла $f(x \mid \sigma) = \frac{\alpha^2}{\sigma^3} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$(\sigma^2)^*_{\text{м.п}} = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$(\sigma^2)^*_{\lambda} = \frac{1}{3n+2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{3n}{2+3n}$
3	Гамма-распределение $f(x \mid \beta) = \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$ α — const; $\beta = 1/\gamma$; γ — параметр; $x > 0$	$\beta^*_{\text{м.п}} = \frac{\alpha n}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$; $\gamma^*_{\text{м.п}} = \frac{1}{\alpha n} \sum_{i=1}^{n} x_i$	$\beta^*_{\lambda} = \frac{\alpha n + 1}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$; $\gamma^*_{\lambda} = \frac{1}{\alpha n + 1} \sum_{i=1}^{n} x_i$	$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{\alpha n + 1}{\alpha n}$ $\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{\alpha n}{\alpha n + 1}$

№ п/п.	Вид распределения	Максимально правдоподобные оценки	Оценки с мультипликатором	Параметрическая функция
4	Распределение Вейбулла $f(x\|T)=\frac{\alpha}{T}x^{\alpha-1}e^{-x^{\alpha}/T}$; $T=2\sigma_x^2$ при $\alpha=2$; $T=m_x$ при $\alpha=1$; $x>0$	$T^*_{\text{м.п}}=$ $=\begin{cases}\frac{1}{n\Gamma(2)}\Sigma x_i, & \text{если } \alpha=1;\\ \frac{1}{2n\Gamma(2)}\Sigma x_i^2, & \text{если } \alpha=2\end{cases}$	$T^*_{\lambda}=$ $=\begin{cases}\frac{\Gamma^2(2)}{n\Gamma(3)}\Sigma x_i, & \text{если } \alpha=1;\\ \frac{\Gamma^2(2)}{4n}\Sigma x_i^2, & \text{если } \alpha=2\end{cases}$	$\lambda_{11}^{(\sigma)}=$ $=\begin{cases}\frac{\Gamma^3(2)}{\Gamma(3)}, & \text{если } \alpha=1;\\ \frac{\Gamma^3(2)}{2}, & \text{если } \alpha=2\end{cases}$
5	Распределение S^2 $f(x\|T)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\times$ $\times\left(\frac{k}{2\sigma_n^2}\right)^{\frac{k-1}{2}}\times$ $\times x^{\frac{k-3}{2}}e^{-\frac{kx}{2\sigma_n^2}}$; $T=2\sigma_n^2$	$T^*_{\text{м.п}}=\frac{2k}{n(k-1)}\sum_{i=1}^{n}x_i$	$T^*_{\lambda}=\frac{2k}{n(k-1)+2}\sum_{i=1}^{n}x_i$	$\lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{n(k-1)}{n(k-1)+2}$

№ п/п.	Вид распределения	Максимально правдоподобные оценки	Оценки с мультипликатором	Параметрическая функция
6	Распределение S $f(x\|T)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\times$ $\times\left(\frac{k}{T}\right)^{\frac{k-1}{2}}\times$ $\times x^{k-2}e^{-\frac{k}{T}x^2}$; $T=2\sigma_n^2$	$T^*_{\text{м.п}}=\frac{2k}{n(k-1)}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$	$T^*_\lambda=\frac{A_1}{k-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\times$ $\times\begin{cases}a, & \text{если } k=2m;\\ b, & \text{если } k=2m+1,\end{cases}$	$\lambda_{11}^{(\sigma)}=\frac{A_1 n}{2k}\times$ $\times\begin{cases}a, & \text{если } k=2m;\\ b, & \text{если } k=2m+1,\end{cases}$
			где $A_1=\frac{2k}{n}(k-1)\,\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)$; $a=\frac{2^{\frac{k-2}{2}}}{(k+1)!!\,n\sqrt{n}+B_1\frac{1}{k-1}2^{\frac{k-2}{2}}}$; $B_1=A_1(1-n)(k-1)$; $b=\frac{1}{4n\left(\frac{k+1}{2}\right)!+\frac{B_1}{k-1}}$	

№ п/п.	Вид распределения	Максимально правдоподобные оценки	Оценки с мультипликатором	Параметрическая функция
7	Распределение Релея $f(x\|T) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0; \\ \frac{x}{T} e^{-x^2/2T} \text{ при } x > 0; \end{cases}$ $T = \sigma_k^2$	$T^*_{\text{м.п}} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$T^*_{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\{n + [\Gamma(3) - \Gamma(2)]\}}$	$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{n}{n + [\Gamma(3) - \Gamma(2)]}$
8	Распределение Лапласа $f(x\|T) = \frac{1}{2T} e^{-\frac{x-T}{T}}$	$T^*_{\text{м.п}} = \frac{1}{2n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i > 0$	Нет	Нет

то из (21) получаем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{\frac{1}{T}\int\limits_0^T \Gamma_m(t,\ \tau)\, d\tau}{\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T [\Gamma_m(t_1,\ t_2) + R_x(t_1 - t_2)]\, dt_1 dt_2}.$$

Пусть $m(t) = m_0$, тогда

$$\Gamma_m(t_1,\ t_2) = (M_m m_0)^2 + \sigma_{m_0}^2 = m_{0ap}^2 + \sigma_{m_0}^2,$$

где $\sigma_{m_0}^2$ — априорная дисперсия случайной величины m_0; m_{0ap} — априорное значение математического ожидания.

Выражение для $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ примет вид:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{(m_{0ap})^2 + \sigma_{m_0}^2}{(m_{0ap})^2 + \sigma_{m_0}^2 + \frac{2}{T}\int\limits_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_x(\tau)\, d\tau}. \tag{44}$$

Для $T = \infty$ имеет место соотношение

$$\int\limits_0^\infty R_x(\tau)\, d\tau = \tau_{\text{кор}}^{(1)}\sigma_x^2,$$

поэтому

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} \approx \frac{(m_{0ap})^2 + \sigma_{m_0}^2}{(m_{0ap})^2 + \sigma_{m_0}^2 + \frac{2\tau_{\text{кор}}^{(1)}\sigma_x^2}{T}} =$$

$$= \frac{(m_{0ap})^2 + \sigma_{m_0}^2}{(m_{0ap})^2 + \sigma_{m_0}^2 + \frac{2\sigma_x^2}{N_э}},$$

где $N_э = T/\tau_{\text{кор}}^{(1)}$ — число некоррелированных элементов, содержащихся в реализации случайного процесса длительностью T. При $N_э \to \infty$ $\lambda_{11}^{(\sigma)} \to 1$.

Возвращаясь к (44) и рассматривая функцию корреляции вида $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$, находим:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{(m_{0ap})^2 + \sigma_{m_0}^2}{(m_{0ap})^2 + \sigma_{m_0}^2 + \frac{2\sigma_x^2}{T_{\text{отн}}}\left(1 - \frac{1}{T_{\text{отн}}} + \frac{1}{T_{\text{отн}}} e^{-T_{\text{отн}}}\right)},$$

где

$$T_{\text{отн}} = \alpha T = N_э, \text{ так как } \alpha = 1/\tau_{\text{кор}}^{(1)}.$$

Таким образом, параметрическая функция $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ определяется априорными значениями оцениваемого параметра m_{0ap} и дисперсии $\sigma_m^{2_0}$, а также значением $T_{\text{отн}} = N_э$, причем α — параметр, полностью определяющий протяженность корреляционных связей в исследуемом процессе.

Пример 22. Рассмотрим особенности сглаживания случайного процесса $X(t) = W(t) + N(t)$ с помощью оператора текущего среднего. Задача заключается в определении параметрической оценки

$$W^*_\lambda(t) = \frac{\lambda_{11}^{(\sigma)}}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\, d\tau,$$

причем

$$W^*(t) = S_\tau^{(t)} x(\tau) = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\, d\tau;$$

$$M_{x\,|\,w}\, x(t) = W(t);$$

$$\Gamma_w(t_1, t_2) = M_w[W(t_1) W(t_2)];$$

$$R_{BX}(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2).$$

Выражение для $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ имеет вид

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{\dfrac{1}{T} \displaystyle\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \Gamma_w(t, \tau)\, d\tau}{\dfrac{1}{T^2} \displaystyle\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} [\Gamma_w(t_1, t_2) + R_x(t_1, t_2)]\, dt_1 dt_2}.$$

Учитывая, что

$$\Gamma_w(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2) + R_w(t_1, t_2),$$

где

$$\varphi(t) = M_w W(t);$$

$$R_w(t_1, t_2) = M_w[W_0(t_1) W_0(t_2)];$$

$$W_0(t) = W(t) - M_w W(t),$$

имеем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{\dfrac{\varphi(t)}{T} \displaystyle\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi(\tau)\, d\tau + \dfrac{1}{T} \displaystyle\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} R_w(t, \tau)\, d\tau}{\left[\dfrac{1}{T} \displaystyle\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi(\tau)\, d\tau\right]^2 + \dfrac{1}{T^2} \displaystyle\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} R_{wx}(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2},$$

где

$$R_{wx}(t_1,\ t_2) = R_w(t_1,\ t_2) + R_x(t_1,\ t_2).$$

Воспользовавшись неравенством В. С. Пугачева [Л. 16]

$$\frac{1}{T^2}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} R_{wx}(t_1,\ t_2)\,dt_1 dt_2 \leqslant \frac{2\sigma^2_{\text{макс}}\tau^{(1)}_{\text{кор}}}{T},$$

где

$$\sigma^2_{\text{макс}} = \max R_{wx}(t,\ t);$$

$\tau^{(1)}_{\text{кор}}$ — интервал корреляции процесса $W(t) + N(t)$, получим:

$$\lambda^{(\sigma)}_{11}(t) \approx \frac{\frac{1}{T}\left[\varphi(t)\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}\varphi(\tau)d\tau + \int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} R_w(t,\ \tau)\,d\tau\right]}{\left[\frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}\varphi(\tau)\,d\tau\right]^2 + \frac{2\sigma^2_{\text{макс}}\tau^{(1)}_{\text{кор}}}{T}}.$$

Пусть

$$\varphi(t) = \lambda_c \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2}\varphi(\tau)\,d\tau,$$

где $\varphi(\tau)$, λ_c — собственные функции и собственные значения оператора текущего среднего. Полагая, что $\tau^{(1)}_{\text{кор}} = \tau^{(1)}_w + \tau^{(1)}_N$, где τ_w и τ_N — интервалы корреляции процессов $W(t)$ и $N(t)$ соответственно, получаем:

$$\lambda^{(\sigma)}_{11}(t) \approx \frac{\frac{\varphi^2(t)}{\lambda_c} + \frac{1}{T}\int\limits_{t-T/2}^{t+T/2} R_w(t,\ \tau)\,d\tau}{\frac{\varphi^2(t)}{\lambda_c^2} + \frac{2\sigma^2_{\text{макс}}(\tau_w + \tau_N)}{T}}.$$

Пример 23. У. Гренандер [Л. 8] показал, что для нормальных стационарных случайных процессов с нормированной корреляционной функцией вида $R_н(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ оценка математического ожидания m^*, получаемая методом максимума правдоподобия, имеет вид:

$$m^* = \frac{x(0) + x(T) + \alpha\int\limits_0^T x(\tau)\,d\tau}{2 + \alpha T}.$$

Здесь T — длительность реализации $x(t)$.

Проведем коррекцию указанной оценки с помощью метода параметрических функций. Для этого нужно найти два первых ... вых момента оценки m^*, а именно $M_{x\,|\,m,\,\alpha} m^*$ и $M_{x\,|\,m,\,\alpha} (m^*)^2$.

Нетрудно заметить, что

$M_{x\,|\,m,\,\alpha} m^* = m$ (случай несмещенной оценки);

$$M_{x\,|\,m,\,\alpha} (m^*)^2 = \frac{M_{x\,|\,m,\,\alpha} \left[x(0) + x(T) + \alpha \int\limits_0^T x(\tau)\, d\tau \right]^2}{(2 + \alpha T)^2}.$$

Проведем необходимые промежуточные выкладки:

$$M_{x\,|\,m,\,\alpha} \left[x(0) + x(T) + \alpha \int\limits_0^T x(\tau)\, d\tau \right]^2 =$$

$$= M_{x\,|\,m,\,\alpha} \left[x^2(0) + x^2(T) + \alpha^2 \int\limits_0^T \int\limits_0^T x(\tau_1)\, x(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 + \right.$$

$$\left. + 2x(0)\, x(T) + 2\alpha \int\limits_0^T x(0)\, x(\tau)\, d\tau + 2\alpha \int\limits_0^T x(T)\, x(\tau)\, d\tau \right] =$$

$$= 2\sigma^2 + 2m^2 + 2\alpha^2 T \int\limits_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R(\theta)\, d\theta + \alpha^2 T^2 m^2 +$$

$$+ 2R(T) + 2m^2 + 2\alpha \int\limits_0^T R(\tau)\, d\tau + 2\alpha \int\limits_0^T R(\tau - T)\, d\tau +$$

$$+ 4\alpha m^2 T = 2\sigma^2 + 4m^2 + 4\alpha m^2 T + 2R(T) +$$

$$+ 2\alpha^2 T \int\limits_0^T \left(1 - \frac{\theta}{T}\right) R(\theta)\, d\theta + 2\alpha \int\limits_0^T [R(\tau) + R(\tau - T)]\, d\tau + \alpha^2 T^2 m^2.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^T e^{-\alpha\tau}\, d\tau = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha},$$

находим выражения для интегралов

$$\int_0^T R_{\text{н}}(\tau - T)\,d\tau = e^{-\alpha T}\int_0^T e^{\alpha\tau}\,d\tau = \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha};$$

$$\int_0^T \left(1-\frac{\theta}{T}\right) R_{\text{н}}(\theta)\,d\theta = \int_0^T \left(1-\frac{\theta}{T}\right) e^{-\alpha\theta}d\theta =$$

$$= \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} - \frac{1}{T}\int_0^T \theta e^{-\alpha\theta}d\theta = \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} -$$

$$-\frac{1}{T}\left[\frac{e^{-\alpha T}}{\alpha^2}(-\alpha T - 1) + \frac{1}{\alpha^2}\right] = \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} +$$

$$+\frac{1}{\alpha^2 T}\left[(1+\alpha T)\,e^{-\alpha T} - 1\right].$$

Итак,

$$M_{x\,|\,m,\,\alpha}(m^*)^2 = m^2 + \frac{2\sigma^2}{2+\alpha T}.$$

Параметрическая функция

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_m m^2}{M_m m^2 + \dfrac{2\sigma^2}{2+\alpha T}} = \frac{1}{1+\dfrac{2\sigma^2}{M_m m^2(2+N_{\text{кор}})}}.$$

Из последнего выражения следует, что при $\alpha T \to \infty$ $\lambda_{11}^{(\sigma)} \to 1$. Если

$$\frac{\sigma^2}{M_m m^2} = 0{,}5, \text{ то } \lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{2+N_{\text{кор}}}}.$$

Значения $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ в зависимости от числа некоррелированных значений процесса $N_{\text{кор}}$ приведены в табл. 5.

Таблица 5

$N_{\text{кор}}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_{11}^{(\sigma)}$	0,8	0,83	0,86	0,875	0,89	0,90	0,91	0,918	0,925

Окончательное выражение для оценки математического ожидания экспоненциально-коррелированного стационарного случайного процесса принимает вид:

$$m_\lambda^* = \frac{M_m m^2}{2\sigma^2 + M_m m^2 (2+\alpha T)} \left[x(r) + x(T) + \alpha \int_0^T x(\tau)\, d\tau \right].$$

Пример 24. Рассмотрим параметрическую коррекцию экспоненциальной оценки математического ожидания.

Под экспоненциальной оценкой математического ожидания понимается оценка вида

$$m^{*э}(t) = E_\tau^{(t)} x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} x(\tau)\, d\tau,$$

где E — оператор экспоненциального сглаживания.

Целесообразность практического использования указанного оператора обусловливается тем обстоятельством, что для реализации (синтеза) специализированных вычислительных устройств дискретного типа, основанных на применении операторов экспоненциального сглаживания, требуется минимальный объем запоминающих устройств (по сравнению с устройствами, реализующими другие операторы сглаживания). Однако при этом эффективность сглаживания невысокая.

Эффективность сглаживания можно повысить за счет использования параметрической функции, определяемой соотношением, вытекающим из (21),

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{M_m m(t) E_\tau^{(t)} m(\tau)}{M_m [E_\tau^{(t)} m(\tau)]^2 + E_{t_1}^{(t)} E_{t_2}^{(t)} R_{BX}(t_1, t_2)} =$$

$$= \frac{T e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T}} M_m [m(t)\, m(\tau)]\, d\tau}{M_m \left[\int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}} m(\tau)\, d\tau \right]^2 + \int_0^t \int_0^t e^{-\frac{t_1+t_2}{T}} R_{BX}(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2}.$$

Для

$$\varphi(t) = \frac{\lambda_c}{T} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} \varphi(\tau)\, d\tau$$

последнее выражение принимает вид:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_c} + \frac{\lambda_c}{T^2 \varphi^2(t) \exp(2t/T)} \int_0^t \int_0^t e^{-\frac{t_1+t_2}{T}} R_{BX}(t_1, t_2)\, dt_1, dt_2}.$$

При сглаживании некоррелированных стационарных случайных процессов с дисперсией σ^2_x будем иметь:

$$\frac{e^{-\frac{2t}{T}}}{T^2}\int_0^t\int_0^t e^{-\frac{t_1+t_2}{T}} R_{BX}(t_1,\ t_2)\,dt_1,\ dt_2=\frac{\sigma_x^2}{2T}\left(1-e^{-\frac{2t}{T}}\right),$$

поэтому

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t)=\frac{1}{\frac{1}{\lambda_c}+\frac{\lambda_c\sigma_x^2\,[1-\exp(-2t/T)]}{2T\varphi^2(t)}}.$$

Введя обозначение $a=\sigma_x^2/\varphi^2(t)$, получаем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t)=\frac{1}{\frac{1}{\lambda_c}+a\,\frac{\lambda_c}{2T}\,[1-\exp(2t/T)]}.$$

Поскольку λ_c и $\varphi(t)$ имеют смысл для установившегося процесса, т. е. при $t\gg T$, то

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t)=\frac{1}{\frac{1}{\lambda_c}+a\,\frac{\lambda_c}{2T}}.$$

Пример 25. Рассматривается задача сглаживания случайного процесса $X(t)$ аддитивной структуры

$$X(t)=W(t)+N(t),$$

где $N(t)$ — помеха типа «белого шума» с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью G; $W(t)$ — полезный сигнал вида

$$W(t)=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{-\alpha t}.$$

Здесь C_1, C_2, α — заданные величины.

Следует заметить, что рассматриваемая функция $W(t)$ описывает класс сигналов управления перестройкой клистронных генераторов, зондирующих сигналов при определении технического состояния систем автоматизации и др.

Пусть далее используется обобщенный оператор экспоненциального сглаживания E_λ с параметрами T и $\lambda(t)$.

Требуется найти $\lambda(t)$ и T, обеспечивающие минимум средней квадратической ошибки выделения сигнала $W(t)$.

Средняя квадратическая ошибка σ_Σ^2 состоит из двух компонент:

$$\sigma_\Sigma^2=\varepsilon_{\text{см}}^2+\sigma_{\text{ош}}^2,$$

где $\varepsilon_{\text{см}}$ — ошибка смещения; $\sigma^2_{\text{ош}}$ — дисперсия ошибки.

Для определения ошибки смещения воспользуемся соответствующим дифференциальным уравнением, характеризующим оператор E,

$$\lambda_{11}(t)\,W(t)=y(t)+Ty'(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y(t)=\frac{\lambda_{11}C_1}{1+\alpha T}e^{\alpha t}+\frac{\lambda_{11}C_2}{1-\alpha T}e^{-\alpha t}+\gamma e^{-\frac{t}{T}},$$

где γ — произвольная постоянная.

Для определения γ введем начальное условие $y(0)=0$. Тогда

$$\gamma=-\lambda_{11}\left(\frac{C_1}{1+\alpha T}+\frac{C_2}{1-\alpha T}\right).$$

Ошибка смещения

$$\varepsilon_{\text{см}}=\left(1-\frac{\lambda_{11}}{1+\alpha T}C_1e^{\alpha t}+\left(1-\frac{\alpha_{11}}{1-\alpha T}\right)C_2e^{-\alpha t}+\right.$$

$$+\lambda_{11}\left(\frac{C_1}{1+\alpha T}+\frac{C_2}{1-\alpha T}\right)e^{-\frac{t}{T}}.$$

Дисперсия ошибки

$$\sigma^2_{\text{ош}}=\frac{G\lambda^2_{11}}{2T}\left(1-e^{-\frac{2t}{T}}\right).$$

Суммарная ошибки

$$\sigma^2_{\Sigma}=\left[\left(1-\frac{\lambda_{11}}{1+\alpha T}\right)C_1e^{\alpha t}+\left(1-\frac{\lambda_{11}}{1-\alpha T}\right)C_2e^{-\alpha t}+\right.$$

$$\left.+\lambda_{11}\left(\frac{C_1}{1+\alpha T}+\frac{C_2}{1-\alpha T}\right)e^{-\frac{t}{T}}\right]^2+\frac{G\lambda^2_{11}}{T}\left(1-e^{-\frac{2t}{T}}\right)=$$

$$=\left\{C_1e^{\alpha t}+C_2e^{-\alpha t}-\frac{\alpha_{11}C_1e^{\alpha t}}{1+\alpha T}-\frac{\lambda_{11}C_2e^{-\alpha t}}{1-\alpha T}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_{11}C_1e^{-\frac{t}{T}}}{1+\alpha T}+\frac{\lambda_{11}C_2}{1-\alpha T}e^{-\frac{t}{T}}\right\}+\frac{G\lambda^2_{11}}{T}\left(1-e^{-\frac{2t}{T}}\right)=$$

$$=\left\{C_1e^{\alpha t}+C_2e^{-\alpha t}+\lambda_{11}\left[\frac{C_1}{1+\alpha T}\left(e^{-\frac{t}{T}}-e^{\alpha t}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{C_2}{1-\alpha T}\left(e^{-\frac{t}{T}}-e^{-\alpha t}\right)\right]\right\}^2+\frac{G\lambda^2_{11}}{T}\left(1-e^{-\frac{2t}{T}}\right)=$$

$$=(a+\lambda_{11}b)^2+\frac{G\lambda^2_{11}c}{T},$$

где

$$a = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t};$$

$$b = \frac{C_1}{1+\alpha T}\left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{\alpha t}\right) + \frac{C_2}{1+\alpha T}\left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\alpha t}\right);$$

$$c = 1 - e^{-\frac{2t}{T}}.$$

В силу трансцендентной зависимости оптимальных значений T имеет смысл рассмотреть случай, когда параметр T выбирается некоторым неоптимальным образом. Однако за счет использования оптимальной параметрической функции λ_{11} возможна компенсация (до определенного значения) ошибок сглаживания, обусловленных неоптимальными значениями постоянной интегрирования T (памяти экспоненциального оператора сглаживания).

Из условия $\partial\sigma_\Sigma^2/\partial\lambda_{11} = 0$ находим:

$$\lambda_{11} = \lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{ab}{b^2 + \frac{Gc}{T}}.$$

Средняя квадратическая ошибка при этом будет равна:

$$\sigma^2_{\Sigma\ \text{мин}} = \frac{a^2 cG}{Gc + Tb^2}.$$

При $t \gg T$ и $t \gg 1/\alpha$ имеют место асимптотические соотношения

$$a \approx C_1 e^{\alpha t};\ b \approx -\frac{a}{1+\alpha T};\ c \approx 1.$$

При этом

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} \approx \frac{C_1^2 e^{2\alpha t}}{(1+\alpha T)\left[\frac{G}{T} + \frac{C_1^2 e^{2\alpha t}}{(1+\alpha T)^2}\right]};$$

$$\sigma^2_{\Sigma\ \text{мин}} \approx \frac{C_1^2 e^{2\alpha t}\, G}{G + \frac{TC_1^2 e^{2\alpha t}}{(1+\alpha T)^2}}.$$

Из последнего соотношения следует возможность отыскания асимптотически оптимальной величины T.

Пример 26. Рассмотрим возможность параметрической коррекции оценки информативного параметра, определяемого соотношением

$$L = \sigma^2 \tau_{\text{кор}}^{(1)} = \int_0^\infty R(\tau)\, d\tau.$$

В соответствии с этим определением очевидно использование оценки вида

$$L^* = \int_0^{T_0} R^*(\tau)\, d\tau,$$

где $R^*(\tau)$ — оценка корреляционной функции $R(\tau)$ для $0 \leqslant \tau \leqslant T_0$.

Пусть

$$R^*(\tau) = R^*_1(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_0(t)\, x_0(t+\tau)\, dt.$$

Для определения параметрических функций найдем и $M_{x\,|\,R} L^*_1$ и $M_{x\,|\,R} (L^*_1)^2$. Очевидно,

$$M_{x\,|\,R} L^*_1 = \frac{1}{T} \int_0^{T_0} \int_0^T M_{x\,|\,R}\, X_0(t)\, X_0(t+\tau)\, dt\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{T_0} \int_0^T R(\tau)\, d\tau\, dt = \int_0^{T_0} R(\tau)\, d\tau;$$

$$M_{x\,|\,R} (L^*_1)^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^{T_0}\int_0^{T_0}\int_0^{T}\int_0^{T} M_{x\,|\,R} [X_0(t_1)\, X_0(t_1 +$$

$$+ \tau_1)\, X_0(t_2)\, X_0(t_2 + \tau_2)]\, dt_1\, dt_2\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

В случае нормальных процессов

$$M_{x|R}[X_0(t_1) X_0(t_2) X_0(t_1+\tau_1) X_0(t_2+\tau_2)] =$$

$$= R(t_2-t_1) R(t_1-t_2+\tau_1-\tau_2) + R(\tau_1) R(\tau_2) +$$

$$+ R(t_2+\tau_2-t_1) R(t_1+\tau_1-t_2),$$

поэтому

$$M_{x\,|\,R} (L^*_1)^2 = \frac{2}{T} \int_0^{T}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R(\tau)\, R(-\tau + \tau_1 - \tau_2)\, d\tau\, d\tau_1\, d\tau_2 +$$

$$+ (M_{x\,|\,R} L^*_1)^2 + \frac{2}{T} \int_0^{T}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R(\tau+\tau_2)\, R(-\tau + \tau_1)\, d\tau\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

В результате для $\lambda_{11}^{(*)}$ и $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ можно записать следующие выражения:

$$\lambda_{11}^{(*)} = \frac{\int\limits_0^\infty M_R R(\tau)\,d\tau}{\int\limits_0^{T_0} M_R R(\tau)\,d\tau};$$

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_R \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{T_0} [R(\tau_1)\,R(\tau_2)]\,d\tau_1 d\tau_2}{M_R \int\limits_0^{T_0} \int\limits_0^{T_0} [R(\tau_1)\,R(\tau_2)]\,d\tau_1 d\tau_2 + M_R D_{x\,|\,R} L^*{}_1},$$

где

$$M_R D_{x\,|\,R} L^*{}_1 = \frac{2}{T} \int\limits_0^T \int\limits_0^{T_0} \int\limits_0^{T_0} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) M_R\,[R(\tau)\,R(\tau_1 - \tau_2 - \tau) +$$

$$+ R(\tau_1 + \tau_2)\,R(\tau_1 - \tau)]\,d\tau d\tau_1 d\tau_2.$$

Пример 27. Оценивается интегральная функция распределения $F(x)$ стационарного случайного процесса $X(t)$.

В соответствии с определением имеем:

$$F(x) = \mathscr{P}\{X(t) \leqslant x\}.$$

Обычно используемая оценка $F^*(x)$ имеет вид:

$$F^*(x) = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \eta_x(t)\,dt,$$

где

$$\eta_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } X(t) \leqslant x; \\ 0, & \text{если } X(t) > x. \end{cases}$$

Пусть параметрическая оценка $F^*{}_\lambda(x)$ отыскивается в форме

$$F^*{}_\lambda(x) = \frac{\lambda_{11}}{T} \int\limits_0^T \eta_x(t)\,dt,$$

где λ_{11} удовлетворяет соотношению (21), в котором

$$A_\tau^{(t)} B_\tau x(\tau) = \frac{1}{T} \int\limits_0^T B_\tau x(\tau)\,d\tau,$$

B_τ — нелинейный оператор, удовлетворяющий условиям

$$B_\tau x(\tau) = \eta_x(\tau);$$
$$M_{x\,|\,F}\, B_t X(t) = M_{x\,|\,F}\, \eta_x(\tau) = F(x);$$
$$\Gamma_F(t_1,\ t_2) = M_F[F(t_1)F(t_2)] = (F^a(x))^2 + \sigma_F^2$$

— априорная функция ковариации оцениваемого параметра;

$$\Gamma_{BX}(t_1,\ t_2) = M_{x\,|\,F}\{B_{t_1} X(t_1) B_{t_2} X(t_2)\} =$$
$$= M_{x\,|\,F}\, \eta_x(t_1)\, \eta_x(t_2) = F^2(x) + R_\eta(t_1 - t_2).$$

Итак,

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \Gamma_F(t,\ \tau)\, d\tau}{\dfrac{1}{T^2}\displaystyle\int_0^T\int_0^T [\Gamma_F(t_1 - t_2) + R_\eta(t_1 - t_2)]\, dt_1 dt_2} =$$

$$= \frac{[F_{ap}(x)]^2 + \sigma_F^2}{[F_{ap}(x)]^2 + \sigma_F^2 + \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_\eta(\tau)\, d\tau}.$$

Следовательно, оптимальная параметрическая функция $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ выражается через априорное значение $F_{ap}(x)$, дисперсию σ_F^2 (априорную) и корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$.

Вводя функцию

$$K(x) = \frac{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_\eta(\tau)\, d\tau}{[F_{ap}(x)]^2 + \sigma_F^2},$$

находим следующее соотношение для параметрической функции:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{1}{1 + K(x)}.$$

Для практического использования полученного соотношения воспользуемся определением

$$R_\eta(\tau) = \mathscr{P}\{X(t) \leqslant x; X(t+\tau) \leqslant x\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} f(x_1,\ x_2,\ \tau)\, dx_1 dx_2,$$

где $f(x_1,\ x_2,\ \tau$ — двумерная плотность вероятности исследуемого стационарного процесса.

Во многих случаях целесообразно исходить из гипотезы о гауссовском характере процесса $X(t)$ и использовать разложение двумерной плотности вероятности в ряд по степеням нормированной корреляционной функции

$$f(x_1,\ x_2,\ \tau)=\frac{1}{\sigma_x^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\Phi^{(\nu+1)}\left(\frac{x_1}{\sigma_x}\right)\Phi^{(\nu+1)}\left(\frac{x_2}{\sigma_x}\right)R_{\text{н}}^{\nu}(\tau),$$

где

$$\Phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right);$$

$\Phi^{\nu+1}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)$ — $(\nu+1)$-я производная функция Лапласа Φ.

В результате почленного интегрирования приведенного разложения получим:

$$R_{\eta}(\tau)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left[\Phi^{\nu}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)\right]^2 R_{\text{н}}^{\nu}(\tau).$$

Для функции $K(x)$ справедливо выражение

$$K(x)=\frac{\frac{2}{T}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left[\Phi^{(\nu)}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)\right]^2\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{R}\right)R_{\text{н}}^{\nu}(\tau)\,d\tau}{[F_{ap}(x)]^2+\sigma_F^2}.$$

Для $T\gg\tau$ имеет место приближенное соотношение

$$K(x)\approx\frac{\frac{2}{T}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left[\Phi^{(\nu)}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)\right]^2 q_{\nu}(T)}{[F_{ap}(x)]^2+\sigma_F^2},$$

где

$$q_{\nu}(T)=\int_0^T R_{\text{н}}^{\nu}\,d\tau.$$

Функции $\Phi^{\nu}(x/\sigma)$ табулированы, что упрощает инженерные расчеты.

Реализация алгоритма параметрической оценки $F^*_{\lambda}(x)$ может быть осуществлена с помощью ЭВМ, причем должны быть предусмотрены операции получения корреляционных моментов $q_{\nu}(T)$ и сечений функций $\Phi^{(\nu)}(x/\sigma)$ для заданных значений x.

15. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНОК МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Среди простых оценок для параметров $m = M_{x|m} \times X(t) = \mathrm{const}$ широко используется оценка вида

$$m^* = \int_0^T h(\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \tag{45}$$

где $h(\tau)$ — весовая функция.

Будем считать, что оценка (45) является предварительной. Задача состоит в нахождении выражения для корректирующей параметрической функции $\lambda_{11}^{(\sigma)}$. Для определения $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ необходимо иметь условные моменты $M_{x|m} m^*$ и $M_{x|m}(m^*)^2$. Очевидны соотношения

$$M_{x|m} m^* = M_{x|m} \int_0^T h(\tau)\, X(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^T h(\tau)\, M_{x|m} X(\tau)\, d\tau = m \int_0^T h(\tau)\, d\tau;$$

$$M_{x|m}(m^*)^2 = D_{x|m} m^* + (M_{x|m} m^*)^2 =$$

$$= \int_0^T \int_0^T h(t_1)\, h(t_2)\, R(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 +$$

$$+ m^2 \int_0^T \int_0^T h(t_1)\, h(t_2)\, dt_1 dt_2,$$

где

$$R(t_1, t_2) = M_{x|m}[X_0(t_1)\, X_0(t_2)];$$

$$X_0(t) = X(t) - M_{x|m} X(t).$$

Используя билинейное представление корреляционной функции

$$R(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(t_1)\, \varphi_n(t_2)}{\lambda_{cn}},$$

где λ_{cn}, $\varphi_n(t)$ — собственные значения и функции интегрального уравнения,

$$\varphi_n(t_1) = \lambda_{cn}\int_0^T R(t_1, t_2)\,\varphi_n(t_2)\,dt_2,$$

получаем следующее выражение для условной дисперсии оценки m^*:

$$D_{x\mid m}m^* = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{cn}}\left[\int_0^T h(\tau)\,\varphi_n(\tau)\,d\tau\right]^2 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2}{\lambda_{cn}},$$

где

$$c_n = \int_0^T h(\tau)\,\varphi_n(\tau)\,d\tau.$$

С учетом полученных соотношений выражение для $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ может быть записано в виде

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_m m M_{x\mid m} m^*}{M_m M_{x\mid m}(m^*)^2} = \frac{\int_0^T h(\tau)\,d\tau M_m(m)^2}{\int_0^T\int_0^T h(t_1)\,h(t_2)\,dt_1 dt_2 M_m(m^2) + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2}{\lambda_{cn}}}.$$

При условии $\int_0^T h(\tau)\,d\tau = 1$ будем иметь:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_m(m)^2}{M_m(m)^2 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2}{\lambda_{cn}}}.$$

Интерес представляет рассмотрение несмещенных эффективных (в классическом смысле) оценок m^*.

Условие несмещенности обеспечивается выполнением

$$\int_0^T h(\tau)\,d\tau = 1. \tag{46}$$

Для отыскания эффективной оценки $m^*_{эф}$ в классе рассматриваемых линейных оценок необходимо найти минимум выражения

$$D_{x|m}m^* = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2}{\lambda_{cn}}$$

при условии (46).

Условие (46) представим в следующем виде, учитывая справедливость соотношения

$$h(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(\tau),$$

а именно

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = 1, \tag{47}$$

где

$$d_n = \int_0^T \varphi_n(\tau)\, d\tau.$$

Соотношение (47) представим в виде

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n \sqrt{\lambda_{cn}}}{\lambda_{cn}} = 1$$

и применим неравенство Буняковского — Шварца

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n d_n \sqrt{\lambda_{cn}}}{\sqrt{\lambda_{cn}}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_{cn}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_{cn}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn} \geqslant 1,$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn} D_{x|m}m^* \geqslant 1,$$

где

$$D_{x|m} m^* \geqslant \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn}}.$$

Знак равенства достигается при

$$c_n = \frac{d_n \lambda_{cn}}{\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn}}.$$

Соотношение

$$D_{x|m} m^*_{\text{эф}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn}}$$

и определяет минимальный уровень дисперсии для линейных несмещенных эффективных оценок $m^*_{\text{эф}}$. Соответствующая параметрическая функция примет вид:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_m (m)^2}{M_m (m^2) + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn}}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn}}{\frac{1}{M_m (m)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn}}.$$

Скорректированная оценка $m^*_{\text{эф}\lambda}$ имеет вид:

$$m^*_{\text{эф}\lambda} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn}}{\frac{1}{M_m m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \lambda_{cn}} \int_0^T h(\tau) x(\tau) d\tau,$$

где $h(\tau)$ — определяется из интегрального уравнения

$$\int_0^T h(\tau) \varphi_n(\tau) d\tau = c_n.$$

16. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УСЛОВИЯ МИНИМУМА СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ДЛЯ АДДИТИВНОЙ МОДЕЛИ

В соответствии с определением для аддитивной модели имеет место выражение

$$\Phi^*_\lambda(x) = \lambda_{10} + \Phi^*(x).$$

Из условий $\partial \bar{R}/\partial\lambda_{10} = 0$, где

$$\bar{R} = M_\alpha M_{x\mid\alpha}[\Phi(\alpha) - \lambda_{10} - \Phi^*(x)]^2,$$

находим:

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = M_\alpha\Phi(\alpha) - M_\alpha M_{x\mid\alpha}\Phi^*(x),$$

т. е.

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = M_\alpha\Phi(\alpha) - M_x\Phi^*(x),$$

что совпадает с выражением (16), а именно:

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = \lambda_{10}^{(\varepsilon)}.$$

Таким образом, параметрическая функция $\lambda_{10}^{(\varepsilon)}$ удовлетворяет одновременно условиям несмещенности и минимума средней квадратической ошибки.

В § 6 приведено значение средней квадратической ошибки

$$\bar{R}_{\text{мин}}(\lambda_{10}^{(\varepsilon)}) = M_x[\Phi(\alpha) - \Phi^*(x)]^2 - \\ - \{M_x[\Phi(\alpha) - \Phi^*(x)]\}^2.$$

Можно привести для ошибки и другое тождественное выражение

$$\bar{R}_{\text{мин}}(\lambda_{10}^{(\varepsilon)}) = M_x[\Phi^0(\alpha) - \Phi^{0*}(x)]^2,$$

где

$$\Phi^0(\alpha) = \Phi(\alpha) - M_\alpha\Phi(\alpha);$$

$$\Phi^{0*}(\alpha) = \Phi^*(x) - M_x\Phi^*(x).$$

После преобразования получаем:

$$\bar{R}_{\text{мин}}(\lambda_{10}^{(\varepsilon)}) = D_x\Phi^*(x) + D_\alpha\Phi(\alpha) - \\ - 2R_{\Phi\Phi^*} = \sigma^2_{\Phi^*} + \sigma^2_\Phi - 2R_{\Phi\Phi^*},$$

где

$$R_{\Phi\Phi^*} = M_x[\Phi^0(\alpha)\Phi^{0*}(x)] = M_\alpha\{\Phi^0(\alpha) M_{x|\alpha}\Phi^{0*}(x)\} = \\ = M_\alpha\{\Phi(\alpha)[M_{x|\alpha}\Phi^*(x) - M_x\Phi^*(x)]\}.$$

Для случая $\Phi(\alpha) = \alpha$ имеем:

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = \lambda_{10}^{(\varepsilon)} = M_\alpha\alpha(t) - M_x\alpha^*(x);$$

$$\overline{R}_{\text{мин}} = \sigma^2_{\alpha^*} + \sigma^2_\alpha - 2R_{\alpha\alpha^*}.$$

Для детерминированных параметров

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = \lambda_{10}^{(\varepsilon)} = \alpha(t) - M_{x|\alpha}\alpha^*(x); \quad \overline{R}_{\text{мин}} = \sigma^2_{\alpha^*}.$$

Последнее соотношение указывает на то, что за счет аддитивной добавки $\lambda_{10}^{(\sigma)}$ при условии смещения первоначальной оценки $\lambda^*(x)$ возможно уменьшение средней квадратической ошибки на величину квадрата ошибки смещения. Таким образом, возможность за счет аддитивной добавки уменьшить среднюю квадратическую ошибку более ограниченная по сравнению с мультипликативной моделью, для которой используется оптимальная параметрическая функция $\lambda_{11}^{(\sigma)}$.

17. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Использование метода параметрических функций для линейной модели приводит к соотношению

$$\Phi^*_\lambda(x) = \lambda_{10} + \lambda_{11}\Phi^*(x).$$

Рассматривая средний риск

$$\overline{R} = M_\alpha M_{x|\alpha}[\Phi(\alpha) - \lambda_{10} - \lambda_{11}\Phi^*(x)]^2$$

и используя уравнения

$$\frac{\partial\overline{R}}{\partial\lambda_{10}} = \frac{\partial\overline{R}}{\partial\lambda_{11}} = 0,$$

т. е.

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{R}}{\partial\lambda_{10}} = M_\alpha M_{x|\alpha}[\Phi(\alpha) - \lambda_{10} - \lambda_{11}\Phi^*(x)] = 0;$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{R}}{\partial\lambda_{11}} = M_\alpha M_{x|\alpha}\{[\Phi(\alpha) - \lambda_{10} - \lambda_{11}\Phi^*(x)]\Phi^*(x)\} = 0,$$

получаем:

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = \frac{M_x [\Phi^*(x)]^2 M_\alpha \Phi(\alpha) - M_x \Phi^*(x) M_\alpha \Phi(\alpha) M_{x \mid \alpha} \Phi^*(x)}{D_x \Phi^*(x)};$$

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_\alpha \Phi(\alpha) - \lambda_{10}^{(\sigma)}}{M_x \Phi^*(x)}.$$

Минимальный средний риск $\overline{R}_{\text{мин}}$ при этом определится соотношением

$$\overline{R}_{\text{мин}} = M_\alpha \Phi^2(\alpha) + M_x [\lambda_{10}^{(\sigma)} + \lambda_{11}^{(\sigma)} \Phi^*(x)]^2 -$$

$$- 2M_x \Phi(\alpha) [\lambda_{10}^{(\sigma)} + \lambda_{11}^{(\sigma)} \Phi^*(x)].$$

Для случая $\Phi(\alpha) = \alpha$

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = \frac{M_x [\alpha^*(x)]^2 M_\alpha \alpha - M_x \alpha^*(x) M_\alpha \alpha M_{x \mid \alpha} \alpha^*(x)}{D_x \alpha^*(x)};$$

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_\alpha \alpha - \lambda_{10}^{(\sigma)}}{M_x \alpha^*(x)};$$

$$\overline{R}_{\text{мин}} = M_\alpha \alpha^2 + M_x [\lambda_{10}^{(\sigma)} + \lambda_{11}^{(\sigma)} \alpha^*(x)]^2 -$$

$$- 2M_x \alpha [\lambda_{10}^{(\sigma)} + \lambda_{11}^{(\sigma)} \alpha^*(x)].$$

Для детерминированных параметров $\alpha(t)$ получаем:

$$\lambda_{10}^{(\sigma)} = \frac{\alpha M_{x \mid \alpha} [\alpha^*(x)]^2 - \alpha [M_{x \mid \alpha} \alpha^*(x)]^2}{D_{x \mid \alpha} \alpha^*(x)} = \alpha;$$

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = 0; \quad \overline{R}_{\text{мин}} = 0.$$

Таким образом, для детерминированных оцениваемых параметров полная линейная параметрическая модель вырождается в тривиальную оценку

$$\alpha^*_\lambda = \lambda_{10}^{(\sigma)} + \lambda_{11}^{(\sigma)} \alpha^*(x) = \lambda_{10}^{(\sigma)} = \alpha,$$

не зависящую от выборки x, что свидетельствует о нецелесообразности ее использования. Практически для детерминированных параметров целесообразно использовать мультипликативную модель.

Интересно рассмотреть полную линейную параметрическую модель при использовании условия нулевой ошибки смещения и минимума дисперсии ошибки.

Как показано в приложении, функционал $\overline{R}$ можно представить в следующем виде:

$$\overline{R} = D_x\Delta(t, x) + \varepsilon^2_{\text{см}}(t),$$

где

$$D_x\Delta(t, x) = D_x[\Phi(\alpha) - \Phi^*_\lambda(x)] =$$

$$= D_x\Phi^*_\lambda(x) + D_\alpha\Phi(\alpha) - 2R_{\Phi\Phi^*_\lambda};$$

$$\varepsilon_{\text{см}}(t) = \overline{\Phi}(\alpha) - \overline{\Phi}^*_\lambda(x);$$

$$\overline{\Phi}(\alpha) = M_\alpha\Phi(\alpha);$$

$$\overline{\Phi}^*(x) = M_x\Phi^*_\lambda(x).$$

Параметрические функции λ_{10} и λ_{11} определим из двух условий

$$\varepsilon_{\text{см}} = 0;\ D_x\Delta(t, x) = \min. \tag{48}$$

Условия (48) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\Phi}(\alpha) - \lambda_{10} - \lambda_{11}\overline{\Phi}^*(x) = 0; \\ &D_x\Delta(t, x) = \lambda^2_{11}D_x\Phi^*(x) + D_\alpha\Phi(\alpha) - 2\lambda_{11}R_{\Phi\Phi^*} = \min. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Используя неопределенный множитель Лагранжа γ, условия (49) сведем к одному

$$J = \lambda^2_{11}D_x\Phi^*(x) + D_\alpha\Phi(\alpha) - 2\lambda_{11}R_{\Phi\Phi^*} +$$

$$+ \gamma[\overline{\Phi}(\alpha) - \lambda_{10} - \lambda_{11}\overline{\Phi}^*(x)] = \min.$$

Используя обычную процедуру приравнивания нулю частных производных, находим:

из условия $\partial J/\partial\gamma = 0$

$$\lambda^{(\alpha)}_{10} = \overline{\Phi}(\alpha) - \lambda^{(d)}_{11}\overline{\Phi}^*(x);$$

из условия $\partial J/\partial\lambda_{10} = 0$

$$\gamma = 0;$$

из условия $\partial J/\partial\lambda_{11} = 0$

$$\lambda^{(d)}_{11} = \frac{R_{\Phi\Phi^*}}{D_x\Phi^*(x)} = \rho_{\Phi\Phi^*}\frac{\sigma_\Phi}{\sigma_{\Phi^*}},$$

где

$$\sigma_\Phi = \sqrt{D_\alpha\Phi(\alpha)};\quad \sigma_{\Phi^*} = \sqrt{D_x\Phi^*(x)};$$

$\rho_{\Phi\Phi^*}$ — коэффициент взаимной корреляции $\Phi(\alpha)$ и $\Phi^*(x)$.

Таким образом, выражение для параметрической оценки $\Phi^*_\lambda(x)$ при полной линейной модели примет вид:

$$\Phi^*_\lambda(x) = \overline{\Phi}(\alpha) + \rho_{\Phi\Phi^*}\frac{\sigma_\Phi}{\sigma_{\Phi^*}}[\Phi^*(x) - \overline{\Phi}^*(x)].$$

Аналогично для оцениваемой характеристики $\alpha(t)$ имеем:

$$\alpha^*_\lambda(x) = \overline{\alpha} + \rho_{\alpha\alpha^*}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha^*}}[\alpha^*(x) - \overline{\alpha}^*(x)].$$

18. ОСОБЕННОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО КОНЕЧНОМУ ЧИСЛУ РЕАЛИЗАЦИЙ

Применение параметрических функций позволяет реализовать полезный в прикладных задачах принцип использования различного рода информации, заключенной, в частности, в результатах обработки экспериментов, проведенных другими исследователями.

При наличии конечного числа реализаций исследуемого процесса $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ очень часто используют операцию усреднения по множеству, которая в наших обозначениях представлена предварительной оценкой

$$\alpha^*(x) = AB_t x_j(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B_t x_j(t),$$

где A — оператор арифметического среднего; B_t — оператор, удовлетворяющий условию

$$M_{x\,|\,\alpha} B_t X(t) = \alpha(t).$$

Например, при вычислении корреляционных функций обычно используется оценка

$$R^*(t, t+\tau) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^0_i(t)\, x^0_i(t+\tau),$$

где

$$x^0_i(t) = x(t) - m_x(t).$$

Здесь оператор B_t имеет вид:

$$B_t x_i(t) = x_i^0(t)\, x_i^0(t+\tau) = B_t^{(t,\tau)} x_i(t).$$

Переходя к оценкам $\alpha^*_\lambda(x)$, заметим справедливость соотношений

$$M_{x|\alpha}\alpha^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_{x|\alpha} B_t^{(t,\tau)} X_j(t) = \alpha(t,\tau);$$

$$M_{x|\alpha}[\alpha^*(x)]^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} M_{x|\alpha}\{B_t^{(t,\tau)} X_i(t)\, B_t^{(t,\tau)} X_j(t)\} =$$

$$= \frac{\sigma_y^2}{n} + \alpha^2(t,\tau),$$

где

$$\sigma_y^2 = M_{x|\alpha} Y_0^2(t);$$

$$Y_0(t) = Y(t) - M_{x|\alpha} Y(t) = Y(t) - \alpha(t);$$

$$Y(t) = B_t X(t).$$

Используя полученное ранее выражение для $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ (мультипликативная модель) и учитывая соотношения для $M_{x|\alpha}\alpha^*(x)$ и $M_{x|\alpha}[\alpha^*(x)]^2$, находим:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{M_\alpha \alpha^2(t)}{M_\alpha[\alpha^2(t) + \sigma_y^2/n]};$$

$$\overline{R}_{\text{мин}} = M_\alpha \alpha^2(t)[1 - \lambda_{11}^{(\sigma)}(t)].$$

Для детерминированных $\alpha(t)$ имеем:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)}(t) = \frac{\alpha^2(t)}{\alpha^2(t) + \frac{\sigma_y^2}{n}} = \frac{1}{1+a};$$

$$\overline{R}_{\text{мин}} = \alpha^2(t)\frac{a}{1+a}; \quad \overline{R}_{\text{отн}} = \frac{\overline{R}_{\text{мин}}}{\alpha^2(t)} = \frac{a}{1+a},$$

где

$$a = \frac{\sigma_y^2}{n\alpha^2(t)}.$$

Случай детерминированных $\alpha(t)$ имеет смысл рассмотреть более подробно. Дело в том, что в большинстве практических случаев параметрические функции выражаются через такие параметры, которые раньше являлись предметом экспериментальных исследований других авторов. При этом средняя арифметическая оценка, например, математического ожидания случайного процесса может быть уточнена с помощью параметрических функций, выражаемых только через коэффициент вариации $k_в = \sigma/m$. Для коэффициентов вариации имеются интересные зависимости от различных параметров объектов исследований. Поэтому априорная информация относительно $k_в$ может быть использована для существенного уточнения оценки математического ожидания m.

Итак, пусть $m_x(t) = \alpha(t, \tau)$ — оцениваемый детерминированный параметр, причем

$$m^*_\lambda(t) = \frac{\lambda_{11}^{(\sigma)}}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j(t),$$

т. е.

$$B_t^{(t,\tau)} x_j(t) = x_j(t).$$

Оптимальная параметрическая функция $\lambda_{11}^{(\sigma)}$ принимает вид:

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{1}{1 + k_в^2/n} = \frac{1}{1+a}; \quad k_в = \frac{\sigma_x}{m_x}.$$

При этом оценка m^*_λ может быть записана в виде

$$m^*_\lambda = \frac{1}{n + k_в^2} \sum_{j=1}^{n} x_j(t).$$

Относительная ошибка

$$\overline{R}_{отн} = \frac{\overline{R}_{мин}}{m_x^2(t)} = \frac{k_в^2}{n^2 + k_в^2}.$$

Эффективность средней арифметической оценки математического ожидания определяется соотношением

$$\sigma^2_{ош} = M_{x|m}\left[m(t) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right]^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}.$$

Коэффициент выигрыша γ при использовании m^*_λ определяется как

$$\gamma = \frac{\sigma^2_{\text{ош}} - \bar{R}_{\text{мин}}}{\sigma^2_{\text{ош}}} = 1 - \lambda^{(\sigma)}_{11} = \frac{a}{1+a}\,;\ a = \frac{\sigma^2_x}{nm^2_x}.$$

В предельном случае при $n \to \infty$ $\lambda^{(\sigma)}_{11} \to 1$ и $\gamma \to 0$, что указывает на область целесообразного использования параметрической оценки. Пусть $\gamma_{\text{ц}}$ — заданный уровень целесообразного использования оценки m^*_λ. Тогда величина n, соответствующая $\gamma_{\text{ц}}$, будет равна:

$$n_{\text{ц}} = \frac{\gamma_{\text{ц}}}{1-\gamma_{\text{ц}}} k^2_{\text{в}}.$$

Для $k_{\text{в}} = 1$ и $\gamma_{\text{ц}} = 0{,}95$ $n_{\text{ц}} = 19$. Следовательно, параметрическую оценку m^*_λ целесообразно использовать при числе реализаций $n \leqslant 19$.

Выигрыш в числе реализациий (при условии равенства ошибок $\sigma^2_{\text{ош}}$ и $\bar{R}_{\text{мин}}$) оценки m^*_λ по сравнению со средней арифметической оценкой дается соотношением

$$n_\lambda = n_{\text{с}} - k^2_{\text{в}},$$

где n_λ и $n_{\text{с}}$ — число реализаций при использовании m^*_λ и m^* соответственно.

Рассмотрим пример, имеющий особое значение для статистических задач в теории надежности.

Пусть $x_i = 1$ и 0, причем

$$M_{x|p} X = P;\ D_{x|p}\, x = P(1-P),$$

а оцениваемый параметр $\alpha = P$ — вероятность появления в i-м испытании исхода $x_i = 1$.

Средняя арифметическая оценка P^* имеет вид:

$$P^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{m}{n},$$

где m — суммарное число благоприятных событий (т. е. исходов $x_i = 1$). Поскольку

$$\lambda^{(\sigma)}_{11} = \frac{P^2}{P^2 + \frac{\sigma^2}{n}} = \frac{P^2}{P^2 + \frac{D_{x|p}X}{n}} = \frac{P^2}{P^2 + \frac{P(1-P)}{n}} =$$

$$= \frac{P}{P + \frac{1-P}{n}} = \frac{nP}{1+nP-P},$$

то

$$P^*_\lambda = \frac{Pm}{nP - P + 1} = \frac{m}{n + \frac{1-P}{P}}.$$

Средняя квадратическая функция риска

$$\overline{R}_{\text{мин}} = \frac{P^2(1-P)}{1 + nP - P}.$$

Коэффициент выигрыша

$$\gamma = 1 - \frac{\overline{R}_{\text{мин}}}{\sigma^2_{\text{ош}}} = 1 - \frac{nP}{1 + nP - P}.$$

19. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ НЕЭРГОДИЧЕСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В ряде прикладных задач возникает необходимость получения корреляционных функций стационарных неэргодических случайных процессов вида

$$X(t) = C_0 + Y(t),$$

где C_0 — случайная величина с заданной дисперсией; $Y(t)$ — стационарный случайный процесс, характеризуемый параметрами

$$M_{y|m} Y(t) = m_y = \text{const};$$

$$M_{y|m} R_y(\tau)\,[Y^0(t)\,Y^0(t+\tau)] = R_y(\tau);$$

$$Y^0(t) = Y(t) - m_y.$$

Особенности корреляционного анализа будем рассматривать применительно к обработке n реализаций процесса $X(t)$ при условии, что предварительная оценка отыскивается в виде

$$R^*_y(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x^*_{j0}(t)\, x^*_{j0}(t+\tau),$$

где

$$x^*_{j0}(t) = x_j(t) - \frac{1}{T}\int_0^T x_j(\theta)\,d\theta;$$

$x_j(t)$ — j-я реализация исследуемого случайного процесса $X(t)$.

Для отыскания параметрической оценки $R^*_{\lambda y}(\tau)$ необходимо прежде всего раскрыть выражение $M_{x|m,\ R}[R^*_y(\tau)]$.

В силу линейности операции среднего арифметического имеем:

$$M_{x|m,\ R}[R^*_y(\tau)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_{x|m,\ R}[X^*_{j0}(t)\, X^*_{j0}(t+\tau)].$$

Далее

$$M_{x|m,\ R}[X^*_{j0}(t)\, X^*_{j0}(t+\tau)] = M_{x|m,\ R}\left\{\left[X_j(t) - \frac{1}{T}\int_0^T X_j(t_1)\,dt_1\right]\left[X_j(t+\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T X_j(t_2)\,dt_2\right]\right\} =$$

$$= M_{x|m,\ R}[X_j(t)\, X_j(t+\tau)] - \frac{1}{T}\int_0^T M_{x|m,\ R}[X_j(t_1)\times$$

$$\times X_j(t_2)]\,dt_2 - \frac{1}{T}\int_0^T M_{x|m,\ R}[X_j(t_1)\, X_j(t_1+\tau)]\,dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T M_{x|m,\ R}[X_j(t_1)\, X_j(t_2)]\,dt_1 dt_2 =$$

$$= R_y(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T R(t-t_2)\,dt_2 - \frac{1}{T}\int_0^T R(t+\tau-t_1)\,dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t_2-t_1)\,dt_1 dt_2 = R_y(\tau) - \frac{2}{T}\int_0^T R_y(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\theta}{T}\right)R(\theta)\,d\theta = R_y(\tau) - \frac{2}{T^2}\int_0^T \theta R_y(\theta)\,d\theta.$$

Итак, имеет место случай, когда

$$M_{x|R}R^*_y(\tau) = M_R R_y(\tau) - M_R C_\theta R_y(\theta),$$

где M_R — оператор априорного математического ожидания корреляционной функции; C_θ — оператор вида

$$C_\theta R_y(\theta) = \frac{2}{T^2}\int\limits_0^T \theta R_y(\theta)\,d\theta.$$

Следовательно, оптимальная параметрическая функция принимает вид:

$$\lambda_{10}^{(s)} = M_R C_\theta R_y(\theta) = \frac{2}{T^2}\int\limits_0^T \theta M_R R_y(\theta)\,d\theta.$$

Очевидно, выражение для параметрической оценки $R^*_{\lambda y}(\tau)$ может быть записано в форме

$$R^*_{\lambda y}(\tau) = \frac{2}{T^2}\int\limits_0^T \theta M_R R_y(\theta)\,d\theta + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x^*_j(t)\,x^*_j(t+\tau).$$

Здесь первый член может быть рассчитан заранее. Так, пусть

$$M_R R_y(\theta) = \sigma_y^2 \exp[-\alpha|\theta|].$$

Тогда

$$\lambda_{10}^{(s)} = \frac{2}{T^2}\int\limits_0^T \theta M_R R_y(\theta)\,d\theta = \frac{2\sigma_y^2}{T^2}\int\limits_0^T \theta e^{-\alpha|\theta|}d\theta =$$

$$= \frac{2\sigma_y^2}{T^2\alpha^2}\left[1 - e^{-\alpha T}(1+\alpha T)\right] = \frac{2\sigma_y^2}{N_{\text{кор}}^2}\left[1 - e^{-N_{\text{кор}}}/(1+N_{\text{кор}})\right],$$

где $N_{\text{кор}} = \alpha T$.

При $N_{\text{кор}} = 10$ и $\sigma_y^2 = 1$ величина добавки составит примерно 0,02, а при $N_{\text{кор}} = 2$ и $\sigma_y^2 = 1$ — примерно 0,29.

Интересно отметить, что величина поправки не зависит от числа обрабатываемых реализаций, а определяется первым моментом средней априорной корреляционной функции.

20. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

В ряде практических задач интерес представляет использование относительной средней квадратической функции потерь

$$\overline{R}_{\text{отн}} = M_x\left[\frac{\Phi(\alpha) - \Phi^*{}_\lambda(x)}{\Phi(\alpha)}\right]^2.$$

Рассмотрим соответствующие аналитические соотношения применительно к линейной параметрической модели.

Относительная средняя квадратическая функция потерь применительно к мультипликативной модели принимает вид:

$$\overline{R}_{\text{отн}} = M_x\left[\frac{\Phi(\alpha) - \lambda_{11}\Phi^*(x)}{\Phi(\alpha)}\right]^2.$$

Условие $\partial\overline{R}_{\text{отн}}/\partial\lambda_{11} = 0$ приводит к уравнению

$$M_x\left\{\left[1 - \frac{\lambda_{11}^{(\sigma_0)}\Phi^*(x)}{\Phi(\alpha)}\right]\frac{\Phi^*(x)}{\Phi(\alpha)}\right\} = 0,$$

из которого следует:

$$\lambda_{11}^{(\sigma_0)} = \frac{M_x\left[\dfrac{\Phi^*(x)}{\Phi(\alpha)}\right]}{M_x\left[\dfrac{\Phi^{*2}(x)}{\Phi^2(\alpha)}\right]} = \frac{M_x[\Phi^*(x)\,\Phi^{-1}(\alpha)]}{M_x[\Phi^{*2}(x)\,\Phi^{-2}(\alpha)]}$$

или

$$\lambda_{11}^{(\sigma_0)} = \frac{M_\alpha\left[\dfrac{1}{\Phi(\alpha)}\,M_{x|\alpha}\Phi^*(x)\right]}{M_\alpha\left[\dfrac{1}{\Phi^2(\alpha)}\,M_{x|\alpha}\Phi^{*2}(x)\right]} = \frac{M_\alpha[\Phi^{-1}(\alpha)\,M_{x|\alpha}\Phi^*(x)]}{M_\alpha[\Phi^{-2}(\alpha)\,M_{x|\alpha}\Phi^{*2}(x)]}.$$

Минимальное значение относительного среднеквадратического риска определяется выражением

$$\overline{R}_{\text{мин.отн}} = 1 - [\lambda_{11}^{(\sigma_0)}]^2\,M_x\left[\frac{\Phi^{*2}(x)}{\Phi^2(\alpha)}\right].$$

Относительная средняя квадратическая функция потерь применительно к аддитивной модели имеет вид:

$$\overline{R}_{\text{отн}} = M_x\left[\frac{\Phi(\alpha) - \lambda_{10} - \Phi^*(x)}{\Phi(\alpha)}\right]^2.$$

Условие $\partial \bar{R}_{\text{отн}}/\partial \lambda_{10} = 0$ приводит к уравнению

$$M_x \left\{ \left[1 - \frac{\lambda_{10}^{(\sigma_0)} + \Phi^*(x)}{\Phi(\alpha)} \right] \frac{1}{\Phi(\alpha)} \right\} = 0,$$

из которого следует:

$$\lambda_{10}^{(\sigma_0)} = M_\alpha \Phi^{-1}(\alpha) - \frac{M_x [\Phi^* \Phi^{-2}(\alpha)]}{M_\alpha \Phi^{-2}(\alpha)}.$$

Минимальное значение относительного среднего квадратического риска определяется выражением

$$\bar{R}_{\text{мин.отн}} = 1 - 2M_x [\Phi^*(x) \Phi^{-1}(\alpha)] + M_x [\Phi^{*2}(x) \Phi^{-2}(\alpha)] -$$

$$- 2\lambda_{10}^{(\sigma_0)} \{M_\alpha \Phi^{-1}(\alpha) - M_x [\Phi^*(x) \Phi^{-2}(\alpha)]\} + [\lambda_{10}^{(\sigma_0)}]^2 M_\alpha \Phi^{-2}(\alpha).$$

21. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО УСЛОВИЮ МАКСИМУМА ВЕРОЯТНОСТИ НЕВЫХОДА ОШИБКИ ИЗ ЗАДАННЫХ ПРЕДЕЛОВ

В различных приложениях встречаются задачи обработки информации при условии максимума вероятности невыхода ошибки за заданные пределы.

Рассмотрим аналитические соотношения, определяющие параметрические функции для мультипликативной модели и оптимальные в смысле указанного критерия.

Итак, даны математическое ожидание и дисперсия мгновенной ошибки

$$M_x (\alpha - \alpha^*_\lambda) = M_\alpha \alpha - M_x \alpha^*_\lambda = \bar{\alpha} - \bar{\alpha}^*_\lambda = m_\varepsilon;$$

$$D_x [\alpha - \alpha^*_\lambda] = M_x [\alpha - \alpha^*_\lambda - \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^*_\lambda]^2 =$$

$$= M_x [\alpha^0 - \alpha_\lambda^{*0}]^2 = \sigma_\alpha^2 - 2R_{\alpha\alpha^*_\lambda} + \sigma^2_{\alpha^*_\lambda} = d_\varepsilon,$$

где

$$\alpha^0 = \alpha - \bar{\alpha}; \quad \alpha_\lambda^{*0} = \alpha^*_\lambda - \bar{\alpha}^*_\lambda;$$

$$\sigma_\alpha^2 = M_\alpha (\alpha^0)^2; \quad \sigma^2_{\alpha^*} = M_x (\alpha_\lambda^{*0})^2;$$

$$R_{\alpha\alpha^*} = M_x [\alpha^0 \alpha_\lambda^{*0}].$$

Пусть ошибка $\varepsilon(t) = \alpha(t) - \alpha^*(x, t)$ подчиняется нормальному закону и должна находиться в пределах

$$c_1 \leqslant \varepsilon \leqslant c_2,$$

где $c_1 < 0$ и $c_2 > 0$.

Тогда

$$\mathcal{P}\{c_1 \leqslant \varepsilon \leqslant c_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_\varepsilon}} \int\limits_{c_1}^{c_2} \exp\left\{-\frac{(x-m_\varepsilon)^2}{2d_\varepsilon}\right\} dx =$$

$$= \Phi\left(\frac{c_2 - m_\varepsilon}{\sqrt{d_\varepsilon}}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - m_\varepsilon}{\sqrt{d_\varepsilon}}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Гаусса.

Для $c_2 = -c_1 = c$, где c — некоторая достаточно малая величина, можно воспользоваться приближенным выражением

$$\mathcal{P}\{|\varepsilon| < c\} \approx \frac{2c}{\sqrt{2\pi d_\varepsilon}} \exp\left\{-\frac{m_\varepsilon^2}{2d_\varepsilon}\right\}. \tag{50}$$

Введем обозначения

$$J = \mathcal{P}\{|\varepsilon| < c\};\ J_1 = m_\varepsilon^2;\ J_2 = d_\varepsilon.$$

Вероятность невыхода ошибки из заданных пределов является функцией от J_1 и J_2, т. е.

$$J = f(J_1, J_2). \tag{51}$$

В соответствии с результатами работы Н. И. Андреева [Л. 1] экстремум J эквивалентен экстремуму приведенного функционала

$$J_\theta = \theta J_1 + J_2,$$

где θ — так называемый «сглаживающий» параметр, определяемый уравнением

$$\theta = \frac{\partial J(\theta)/\partial m_\varepsilon^2}{\partial J(\theta)/\partial d_\varepsilon}.$$

Используя (51), находим:

$$\theta = \left[1 - \frac{m_\varepsilon^2(\theta)}{d_\varepsilon(\theta)}\right]^{-1}. \tag{52}$$

Для мультипликативной модели $(\alpha^*_\lambda = \lambda_{11}\alpha^*)$

$$J_\theta = \theta m_\varepsilon^2 + d_\varepsilon = \theta(\overline{\alpha} - \lambda_{11}\overline{\alpha}^*)^2 + \sigma_\alpha^2 - 2\lambda_{11}R_{\alpha\alpha^*} + \lambda_{11}^2\sigma_{\alpha^*}^2.$$

Экстремум этого выражения достигается при значении $\lambda_{11} = \lambda_{11}^{(p)}$, определяемом соотношением

$$\lambda_{11}^{(p)} = \frac{\theta\overline{\alpha}\overline{\alpha}^* + R_{\alpha\alpha^*}}{\theta(\overline{\alpha}^*)^2 + \sigma_{\alpha^*}^2}. \tag{53}$$

Для детерминированной характеристики $\alpha=\alpha(t)$ и оценки $\alpha^*(x)=A_t x(t)$, где A_t — линейный оператор, будем иметь:

$$\overline{\alpha}=\alpha;\ \overline{\alpha^*}=A_t\alpha(t);\ R_{\alpha\alpha^*}=0,$$

поэтому

$$\lambda_{11}^{(p)}=\frac{\theta\alpha(t)\,A_t\alpha(t)}{\theta\,[A_t\alpha(t)]^2+A_{t_1}A_{t_2}R_x(t_1,\ t_2)}. \tag{54}$$

Подставляя в выражение (52) значение $\lambda^{(p)}{}_{11}$ из (53), получаем кубическое уравнение, определяющее согласующий параметр θ. Для детерминированной характеристики $\alpha(t)$ из (52) получается квадратное уравнение относительно θ, решение которого имеет вид:

$$\theta_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{A_{t_1}A_{t_2}R_x(t_1,\ t_2)}{[A_t\alpha(t)]^2}},$$

причем максимуму вероятности невыхода ошибки за заданные пределы соответствует θ_1 (со знаком «+»).

Итак, оптимальная (по вероятностному критерию) параметрическая функция определяется выражением

$$\lambda_{11}^{(p)}=\frac{\theta\alpha(t)}{(\theta+\alpha)\,A_t\alpha(t)}=\frac{\alpha(t)}{A_t\alpha(t)}\,\frac{\theta}{\theta+a}=$$

$$=\lambda_{11}^{(\varepsilon)}\frac{\theta}{\theta+a}=\lambda_{11}^{(\varepsilon)}\frac{0,5+\sqrt{0,25+a}}{a+0,5+\sqrt{0,25+a}},$$

где

$$a=\frac{A_{t_1}A_{t_2}R_x(t_1,\ t_2)}{[A_t\alpha(t)]^2}.$$

При этом вероятность невыхода ошибки за заданные пределы определяется соотношением

$$\mathscr{P}\{|\varepsilon|<c\}=\frac{2c}{\sqrt{2\pi d_\varepsilon}}\exp\left\{-\frac{m_\varepsilon^2}{2d_\varepsilon}\right\}=$$

$$=\frac{2c\,(0,5+\sqrt{0,25+a}+a)\exp\left(-\dfrac{a}{1+\sqrt{1+4a}}\right)}{\sqrt{2\pi}\,d_\varepsilon\sqrt{a}\,(0,5+\sqrt{0,25+a})}.$$

На рис. 27 представлены зависимости $\mathscr{P}\{|\varepsilon|<c\}$) от параметра a при различных значениях отношения $2c/\pi$. Чем хуже фильтрующие (сглаживающие) свойства оператора A_t (что связано с ростом a), тем меньше вероятность нахождения ошибки в заданных пределах.

22. БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ И ИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ

При полной информации и использовании параметрических функций, оптимальных по критерию средней квадратической ошибки, получаемая оценка может рассматриваться как аппроксимация (при малом объеме располагаемой информации) байесовских алгоритмов. Более того, для нормальных процессов (и оцениваемых параметров) полная линейная параметрическая модель в ряде случаев полностью совпадает с байесовским алгоритмом. Отличие алгоритмов параметрической коррекции от байесовских состоит в реализуемости первых во всех практических случаях.

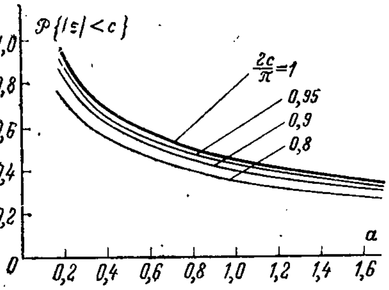


Рис. 27. Вероятность невыхода параметра за заданные границы.

Целый ряд примеров использования байесовских операторов подтверждает возможность выразить оценку $\alpha^*{}_b$ в явной или неявной аналитической форме в зависимости от некоторой достаточной статистики z, т. е. имеет место некоторая зависимость

$$F[z, \alpha^*{}_b(z)] = 0. \qquad (55)$$

В ряде случаев уравнение (55) может быть разрешено относительно $\alpha^*{}_b(z)$, т. е.

$$\alpha^*{}_b(z) = \psi(z).$$

Сложность функции F или ψ затрудняет использование байесовского оператора в инженерной практике. Задача аппроксимации $\alpha^*{}_b(z)$, т. е. представления в виде отрезка ряда

$$\alpha^*{}_b(z) \approx \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij}\varphi_j(z),$$

при выбранных $\varphi_j(z)$ сводится к определению параметров λ_{ij}.

Прежде всего рассмотрим более подробно сущность байесовских оценок. Пусть для формирования оценки α^* случайного параметра α мы располагаем некоторой априорной плотностью вероятности $f_{ap}(\alpha)$ оцениваемого параметра; функцией правдоподобия $f(x|\alpha)$; выборкой $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Поскольку параметр α является случайным объектом, полной его характеристикой является соответствующая плотность вероятности. Если наблюдения отсутствуют, то такой плотностью является $f_{ap}(\alpha)$. При наличии выборки x плотность вероятности изменяется и становится $f_{ps}(\alpha|x)$ — апостериорной. Оптимальная система статистической обработки случайных объектов в качестве промежуточного этапа должна формировать $f_{ps}(\alpha|x)$ (на основании факта полноты $f_{ps}(\alpha|x)$).

В результате предварительных экспериментальных исследований (например, отработки изделия) или путем теоретического рассмотрения производится обоснование априорного распределения $f_{ap}(\alpha)$.

По сформированной апостериорной плотности $f_{ps}(\alpha|x)$ можно отыскать:

$\alpha^*_{\text{макс}}$ — максимально апостериорные оценки;

α^*_b — среднеапостериорные (байесовские) оценки;

$\alpha^*_{\text{ин}}$ — интервальные оценки.

Общий способ формирования $f_{ps}(\alpha|x)$ заключается в использовании теоремы гипотез (теоремы Байеса):

$$f_{ps}(\alpha|x) = \frac{f_{ap}(\alpha)\, f(x|\alpha)}{f(x)} = \frac{f_{ap}(\alpha)\, f(x|\alpha)}{\int\limits_{\Omega_\alpha} f(\alpha,\ x)\, d\alpha} = \frac{f_{ap}(\alpha)\, f(x|\alpha)}{\int\limits_{\Omega_\alpha} f_{ap}(\alpha)\, f(x|\alpha)\, d\alpha}.$$

Приведенная формула справедлива для непрерывных случайных величин α и x. Если α — дискретная величина, то

$$P_{ps}(\alpha_i|x) = \frac{P(\alpha_i)\, f(x|\alpha_i)}{\sum\limits_{i=1}^{l} P(\alpha_i)\, f(x|\alpha_i)}.$$

Если же α — непрерывная величина, а x — дискретная, то

$$f_{ps}(\alpha|x_n) = \frac{f_{ap}(\alpha)\, P(x_n|\alpha)}{\int\limits_{\Omega_\alpha} f_{ap}(\alpha)\, P(x_n|\alpha)\, d\alpha}.$$

Если и x и α — дискретные величины, то

$$P_{ps}(\alpha_i|x_n) = \frac{P_{ap}(\alpha_i)\,P(x_n|\alpha_i)}{\sum\limits_{j=1}^{l} P_{ap}(\alpha_j)\,P(x_n|\alpha_j)}.$$

Итак, для определения апостериорного распределения необходимо располагать априорным распределением и функцией правдоподобия.

Пусть $f_{ap}(\alpha) = 1/(\alpha_{\text{макс}} - \alpha_{\text{мин}})$ (т. е. равномерный закон распределения) и $f(x|\alpha) = A(x)\varphi(x, \alpha)$ — функция правдоподобия, представимая в мультипликативной

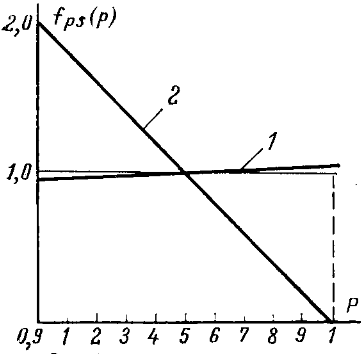


Рис. 28. График апостериорной плотности вероятности.

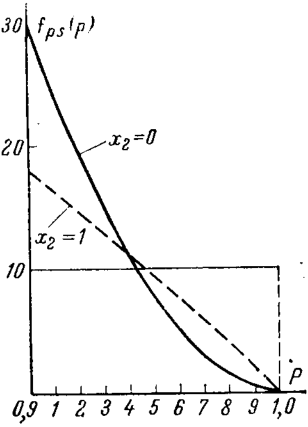


Рис. 29. Плотность вероятности при разных исходах испытаний.

форме, в которой $A(x)$ есть функция только выборки, а $\varphi(x, \alpha)$ — функция и выборки и параметра α.

При указанных условиях апостериорная плотность вероятности определяется соотношением

$$f_{ps}(\alpha) = \frac{f_{ap}(\alpha)\,f(x|\alpha)}{\int\limits_{\alpha_{\text{мин}}}^{\alpha_{\text{макс}}} f_{ap}(\alpha)\,f(x|\alpha)\,d\alpha} = \frac{\varphi(x, \alpha)}{\int\limits_{\alpha_{\text{мин}}}^{\alpha_{\text{макс}}} \varphi(x, \alpha)\,d\alpha}.$$

В качестве примера формирования $f_{ps}(\alpha)$ рассмотрим задачу из области надежности. Пусть $\alpha = P$, где P — вероятность безотказного функционирования системы, причем

$$f_{ap}(p)=\frac{1}{P_{\text{макс}}-P_{\text{мин}}}=\frac{1}{1-0{,}9}=10.$$

Проводятся испытания системы с исходами $x_j=1$ с вероятностью P и $x_j=0$ с вероятностью $1-P$, т. е.

$$P(x_1=1\,|\,p)=P;$$

$$P(x_1=0\,|\,p)=1-P.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть $x_1=1$. Тогда

$$f_{ps}(p|x_1=1)=\frac{P(x_1=1|p)}{\int\limits_{0,9}^{1}P(x_1=1|p)\,dP}=\frac{P}{\int\limits_{0,9}^{1}PdP}=\frac{P}{0{,}095}.$$

Функция $f_{ps}(p)=P/0{,}095$ представлена на рис. 28 (прямая *1*).

2. Пусть $x_1=0$. Тогда

$$f_{ps}(p|x=0)=\frac{P(x=0|p)}{\int\limits_{0,9}^{1}P(x=0|p)\,dP}=\frac{1-P}{\int\limits_{0,9}^{1}(1-P)\,dP}=$$

$$=200(1-P).$$

Функция $f_{ps}(p)=200(1-P)$ графически также представлена на рис. 28 (прямая *2*).

Анализ функций, представленных на рис. 28, показывает значительную деформацию плотности распределения при наличии отказа изделия ($x_1=0$). Однако при этом область изменения параметра P сохраняется, а именно: $0{,}9\leqslant P\leqslant 1$.

3. Пусть $x_1=0$, $x_2=0$ (проводятся два испытания). Тогда

$$f_{ps}(p|x_1=0,\ x_2=0)=\frac{f_{ps}(p|x_1=0)\,P(x_2=0|p)}{\int\limits_{0,9}^{1}f_{ps}(p|x_1=0)\,P(x_2=0|p)dP}=$$

$$=\frac{(1-P)^2}{\int\limits_{0,9}^{1}(1-P)^2\,dP}=3\,000(1-P)^2.$$

4. Пусть $x_1=0$, $x_2=1$. Тогда

$$f_{ps}(p|x_1=0,\ x_2=1)=\frac{(1-P)P}{\int\limits_{0,9}^{1}(1-P)PdP}=200(1-P)P.$$

На рис. 29 показаны графики функций $f_{ps}(p|x_1=0,\ x_2=1)$ и $f_{ps}(p|x_1=0,\ x_2=0)$.

5. Пусть $m=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j$. Тогда

$$f_{ps}(p|m)=\frac{P^m(1-P)^{n-m}}{\int\limits_{\Omega_p}P^m(1-P)^{n-m}dP}.$$

Возвращаясь к анализу байесовского оценивания параметров, покажем, что среднее апостериорное значение параметра минимизирует среднюю квадратическую функцию потерь.

Пусть $\Phi(\alpha)$ — заданное преобразование параметра α и $\Phi^*(x)$ — соответствующая оценка для $\Phi(\alpha)$.

Рассмотрим среднюю квадратическую функцию потерь

$$\overline{R}=\int\limits_{\Omega_x}\int\limits_{\Omega_\alpha}[\Phi(\alpha)-\Phi^*(x)]^2 f(x,\ \alpha)\,dx\,d\alpha=$$

$$=\int\limits_{\Omega_x}f(x)\,dx\int\limits_{\Omega_\alpha}[\Phi(\alpha)-\Phi^*(x)]^2 f(\alpha|x)\,d\alpha=M_xJ(\alpha,\ x).$$

Условие $\overline{R}=\min$ эквивалентно условию $J[\Phi(\alpha)\times\times\Phi^*(x)]=\min$, поэтому из

$$\frac{\partial J[\Phi(\alpha),\ \Phi^*(x)]}{\partial\Phi^*(x)}=0$$

следует:

$$\Phi^*_{ps}(x)=\int\limits_{\Omega_\alpha}\Phi(\alpha)f_{ps}(\alpha|x)\,d\alpha.$$

Для случая $\Phi(\alpha)=\alpha$ имеем:

$$\alpha^*_{ps}=\int\limits_{\Omega_\alpha}\alpha f_{ps}(\alpha|x)\,d\alpha.$$

Таким образом, одно из основных свойств средних апостериорных оценок состоит в их оптимальном (в смысле минимума средней квадратической ошибки) характере.

Найдем аналитическое выражение для указанного минимального риска. По определению имеем:

$$R_{\text{мин}} = \int\limits_{\Omega_\alpha}\int\limits_{\Omega_x} [\Phi(\alpha) - \Phi^*(x)]^2 f(x) f(\alpha|x)\, d\alpha dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_x} f(x) \left\{ \int\limits_{\Omega_\alpha} [\Phi(\alpha) - \Phi^*(x)]^2 f(\alpha|x)\, d\alpha \right\} dx.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках последнего соотношения, представим в виде

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} [\Phi(\alpha) - \Phi^*(x)]^2 f(\alpha|x)\, d\alpha = \int\limits_{\Omega_\alpha} \Phi^2(\alpha) f(\alpha|x)\, d\alpha -$$

$$-2\Phi^*(x) \int\limits_{\Omega_x} \Phi(\alpha) f(\alpha|x)\, d\alpha + [\Phi^*(x)]^2 \int\limits_{\Omega_\alpha} f(\alpha|x)\, d\alpha.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} \Phi(\alpha) f(\alpha|x)\, dx = \Phi^*(x);$$

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} f(\alpha|x)\, dx = 1,$$

получаем:

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} \Phi^2(\alpha) f(\alpha|x)\, d\alpha - \left[\int\limits_{\Omega_\alpha} \Phi(\alpha) f(\alpha|x)\, d\alpha \right]^2 = D_{\alpha|x}\Phi(\alpha),$$

поэтому

$$\bar{R}_{\text{мин}} = \int\limits_{\Omega_\alpha} D_{\alpha|x}[\Phi(\alpha)] f(x)\, dx = M_x D_{\alpha|x}\Phi(\alpha). \qquad (56)$$

Последнее выражение можно представить в ином виде

$$\bar{R}_{\text{мин}} = M_x\{M_{\alpha|x}[\Phi(\alpha)]^2 - M_{\alpha|x}[\Phi(\alpha)]^2\} = M_x M_{\alpha|x}\Phi^2(\alpha) -$$

$$- M_x[M_{\alpha|x}\Phi(\alpha)]^2 = M_\alpha \Phi^2(\alpha) - M_x \Phi^{*2}(x).$$

В инженерной практике бытует мнение о том, что вместо (56) для определения качества оценки $\Phi^*(x)$ целесообразно использовать условную дисперсию

$$d_x = D_{\alpha|x}\Phi(\alpha).$$

Однако зависимость критерия d_x от конкретной реализации (выборки) не позволяет использовать его для определения объема испытаний (измерений). Здесь не выполняется одно из основных требований, предъявляеемых к критериям качества функционирования — они не должны быть случайными.

Средние апостериорные оценки обладают также свойством несмещенности.

Заметим прежде всего, что для случайных параметров условие несмещенности имеет вид:

$$M_\alpha M_{x|\alpha}\, \Phi^*(x) = M_\alpha \Phi(\alpha);$$

$$M_x \Phi^*(x) = M_\alpha \Phi(\alpha).$$

Для неслучайных $\Phi(\alpha)$ имеем $f(\alpha)=\delta(\alpha-\alpha_0)$, где α_0 — истинное значение параметра α, поэтому условие несмещенности

$$M_{x|\alpha_0} \Phi^*(x) = \Phi(\alpha_0).$$

Пусть $\Phi^*_{ps}(x)$ — средняя апостериорная оценка, т. е

$$\Phi^*_{ps}(x) = M_{\alpha|x}\, \Phi(\alpha),$$

тогда

$$M_x \Phi^*_{ps}(x) = M_x M_{\alpha|x}\, \Phi(\alpha) = M_\alpha \Phi(\alpha),$$

что и доказывает несмещенность средних апостериорных оценок.

Этот же результат можно получить путем решения задачи минимизации среднего риска $\overline{R}$ с дополнительным условием

$$M_x\left[\Phi^*(x) - M_{\alpha|x}\, \Phi(\alpha)\right] = 0.$$

Эта задача на условный экстремум определяется минимизацией функционала

$$J = \int_{\Omega_x} f(x)\,dx \left\{ \int_{\Omega_x} [\Phi(\alpha) - \Phi^*(x)]^2 f(\alpha|x)\,d\alpha + \right.$$

$$\left. + \lambda \left[\Phi^*(x) - \int_{\Omega_\alpha} \Phi(\alpha) f(\alpha|x)\,d\alpha \right] \right\}.$$

В данном примере условие $\partial J/\partial\lambda = 0$ приводит к соотношению

$$\int_{\Omega_x} f(x) \left[\Phi^*(x) - \int_{\Omega_\alpha} \Phi(\alpha) f(\alpha|x)\,d\alpha \right] dx = 0,$$

из которого следует (как достаточное условие) выражение для оценки $\Phi^*(x)$ в форме средней апостериорной оценки

$$\Phi^*_{ps}(x) = \int_{\Omega_\alpha} \Phi(\alpha) f(\alpha|x)\,d\alpha.$$

В ряде практических задач целесообразным является критерий

$$\overline{R}_{\text{отн}} = \int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_x}\left[\frac{\Phi(\alpha)-\Phi^*(x)}{\Phi(\alpha)}\right]^2 f(\alpha, x)\,d\alpha dx.$$

Найдем байесовский оператор, минимизирующий средний относительный риск $\overline{R}_{\text{отн}}=\min$.

Условие $\partial\overline{R}_{\text{отн}}/\partial\Phi^*=0$ приводит к соотношению

$$\int_{\Omega_x} f(x)\left[\int_{\Omega_\alpha}\frac{1}{\Phi(\alpha)}f(\alpha|x)\,d\alpha - \Phi^*(x)\int_{\Omega_\alpha}\frac{1}{\Phi^2(\alpha)}f(\alpha|x)\,d\alpha\right]=0,$$

откуда

$$\Phi^*_b(x)=\frac{\int_{\Omega_\alpha}\frac{1}{\Phi(\alpha)}f(\alpha|x)\,d\alpha}{\int_{\Omega_\alpha}\frac{1}{\Phi^2(\alpha)}f(\alpha|x)\,d\alpha}.$$

Минимальное значение относительного среднего риска

$$\overline{R}_{\text{мин.отн}}=\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_x}\left[1-\frac{\Phi^*_b(x)}{\Phi(\alpha)}\right]^2 f(\alpha, x)\,d\alpha dx =$$

$$=1-\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_x}\frac{\Phi^*_b(x)}{\Phi(\alpha)}f(\alpha, x)\,d\alpha dx=$$

$$=1-\int_{\Omega_x}\Phi^*_b(x)f(x|\alpha)\int_{\Omega_\alpha}\frac{1}{\Phi(\alpha)}f(\alpha)\,d\alpha dx.$$

Перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 28. Пусть $\alpha=P$ (характеристика надежности) при равномерном априорном распределении ($0\leqslant P\leqslant 1$), т. е. $f_{ap}(p)=1$.

Функция правдоподобия имеет вид:

$$P(m\mid p)=C_n^m P^m(1-P)^{n-m},$$

где m — число благоприятных исходов при n испытаниях.

В соответствии с определением имеем:

$$f_{ps}(p\mid m)=\frac{P^m(1-P)^{n-m}}{\int_0^1 p^m(1-p)^{n-m}\,dp}. \qquad (57)$$

Поскольку

$$\int_0^1 p^m (1-p)^l\,dp = \frac{m!\,l!}{(m+l+1)!},$$

то для средней апостериорной оценки P^*_b будем иметь:

$$P^*_b = \int_0^1 p f_{ps}(p \mid m)\,dp = \frac{\int\limits_0^1 p^{m+1}(1-p)^{n-m}\,dp}{\int\limits_0^1 p^m (1-p)^{n-m}\,dp} = \frac{m+1}{n+2}.$$

Итак, байесовская оценка имеет вид:

$$P^*_b = \frac{m+1}{n+2}. \tag{58}$$

Проведем анализ эффективности оценки (58) и сравним ее с параметрической и максимально правдоподобной.

Условная дисперсия оценки (58) определяется соотношением

$$\sigma^2(m) = \int_0^1 (p - p^*_b) f_{ps}(p \mid m)\,dp =$$

$$= \int_0^1 p^2 f_{ps}(p \mid m)\,dp - (P^*_b)^2 =$$

$$= \frac{\int\limits_0^1 p^{m+2}(1-p)^{n-m}\,dp}{\int\limits_0^1 p^m (1-p)^{n-m}\,dp} - \left(\frac{m+1}{n+2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{(n+2)(n+3)} - \left(\frac{m+1}{n+2}\right)^2 = \frac{(m+1)(n-m+1)}{(n+2)^2(n+3)}.$$

Заметим, что здесь m — случайная величина, поэтому использование $\sigma^2(m)$ на практике нецелесообразно. Минимальное значение среднего риска оценки (58) определяется соотношением

$$\bar{R}_{\text{мин}} = \int_0^1 \sum_{m=0}^{n} (p - p^*(m))^2 p(m \mid p)\,dp =$$

$$= \int_0^1 \sum_{m=0}^{n} \left(p - \frac{m+1}{n+2}\right)^2 C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\,dp = \frac{1}{6(n+2)}.$$

На рис. 30 представлена зависимость $\overline{R}_{\text{мин}}$ от объема выборки n (кривая *1*). На этом же рисунке показана эффективность максимально правдоподобной оценки $P^*_{\text{м.п}}=m/n$ (кривая *3*), для которой $\sigma^2(p)=\approx P(1-P)/n$ и

$$\overline{R}_{\text{мин}}=\int_0^1 \sigma^2(p)\,dp=\frac{1}{6n}.$$

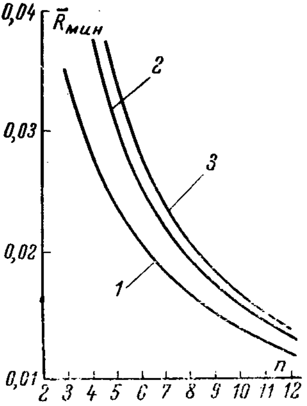


Рис. 30. Эффективность обработки в зависимости от объема выборки.

1 — байесовский метод; *2* — метод параметрических функций; *3* — метод максимального правдоподобия.

Проведем сравнение байесовской оценки с оценкой, получаемой на основе метода параметрических функций при использовании в качестве первоначальной оценки максимального правдоподобия.

Итак, исследуем оценку

$$P^*_\lambda=\lambda_{11}P^*_{\text{м.п}}=\lambda_{11}\frac{m}{n},$$

где

$$\lambda_{11}=\frac{1}{1+\dfrac{M_pD_{m\,|\,p}[P^*_{\text{м.п}}]}{M_p(P)^2}}=\frac{1}{1+\dfrac{M_p\left[\dfrac{P(1-P)}{n}\right]}{M_p(P)^2}}=$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{\int_0^1\dfrac{p(1-p)}{n}\,dp}{\int_0^1 p^2dp}}=\frac{2n}{1+2n}.$$

При этом

$$\overline{R}^{(\lambda)}_{\text{мин}}=(1-\lambda_{11})\,M_p(P)^2=\frac{1}{3(1+2n)}.$$

На рис. 30 представлена также зависимость $\overline{R}^{(\lambda)}_{\text{мин}}(n)$ (кривая *2*), из которой видно, что оценка P^*_λ по эффективности занимает промежуточное положение между байесовской оценкой и оценкой максимального правдоподобия.

Интересно провести анализ полученной оценки $P^*=(m+1)/(n+2)$ с позиций адаптивных алгоритмов.

Представим оценку $P^* = P^*_n$ в форме

$$P^*_n = \frac{m+1}{n+2} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\sum_{j=1}^{n} x_j =$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\sum_{j=1}^{n-1} x_j + \frac{1}{n+2} x_n,$$

где

$$m = \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad x_j = 0 \text{ или } 1.$$

Аналогично можно записать:

$$P^*_{n-1} = \frac{m+1}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n-1} x_j,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j = (n+1) P^*_{n-1} - 1.$$

Следовательно

$$P^*_n = P^*_{n-1} - \frac{1}{n+2}\,[P^*_{n-1} - x_n].$$

Таким образом, получена формула, аналогичная типовому рекуррентному соотношению стохастической аппроксимации и отличающаяся только величиной шага γ_n, а именно: здесь

$$\gamma_n = \frac{1}{n+2}.$$

Возвращаясь к выражениям (57) и (58), заметим, что интеграл

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}\,dt = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} = B(z, \omega),$$

являющийся интегралом Эйлера первого рода, носит название бета-функции и обозначается $B(z, \omega)$.

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция, удовлетворяющая соотношению (для целочисленных положительных значений $z=n$)

$$\Gamma(n)=(n-1)!, \quad n=3, 4 \ldots$$

Итак, апостериорная плотность вероятности (57) относится к классу бета-функции.

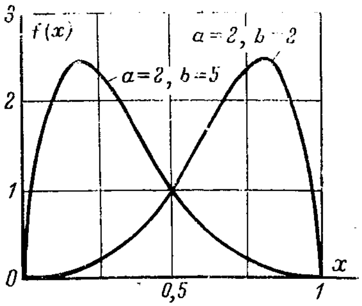


Рис. 31. Плотность бета-распределения.

В общем случае для величины X, имеющей бета-распределение, можно записать плотность вероятности $f(x)$ в виде

$$f(x)=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},$$

где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a>0$, $b>0$ (рис. 31).

Основные моментные характеристики рассматриваемой случайной величины X определяются соотношениями

$$MX=\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{a}{a+b};$$

$$DX=\int_0^1 (x-m_x)^2 f(x)\,dx=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)},$$

где $m_x=MX$.

Для случайной величины $X=P$ бета-распределение имеет вид:

$$f(p)=\frac{P^{a-1}(1-P)^{b-a-1}\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}=\frac{P^{a-1}(1-P)^{b-a-1}}{B(a,\ b-a)}.$$

Соответствующие моментные характеристики равны:

$$MP=\int_0^1 pf(p)\,dp=\frac{a}{b};$$

$$DP=\int_0^1 \left(p-\frac{a}{b}\right)^2 f(p)\,dp=\frac{a(b-1)}{b^2(b+1)}.$$

Из (57) следует, что если бета-распределение взять в качестве априорного для параметра P, то тогда и апостериорное распределение будет также бета-распределением.

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пример 29. Пусть

$$f_{ap}(p) = \frac{P^{a-1}(1-P)^{b-a-1}}{B(a,\ b-a)},$$

причем

$$\int_0^1 P f_{ap}(p)\, dP = P_{ap};$$

$$\int_0^1 (P - P_{ap})^2 f_{ap}(p)\, dP = \sigma_{ap}^2 .$$

Функция правдоподобия

$$P(m \mid p) = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}.$$

По определению имеем:

$$f_{ps}(p) = \frac{P^{a-1}(1-P)^{b-a-1} P^m (1-P)^{n-m}}{\int_0^1 P^{a-1}(1-P)^{b-a-1} P^m (1-P)^{n-m}\, dP} =$$

$$= \frac{P^{m+a-1}(1-P)^{n+b-a-1-m}}{B(m+a,\ n+b-a-m)}.$$

Из уравнений

$$P_{ap} = \frac{a}{b};\ \sigma_{ap}^2 = \frac{a(b-a)}{b^2(b+1)}$$

находим параметры бета-распределения

$$a = P_{ap}b - P_{ap}\left[\frac{P_{ap}(1-P_{ap})}{\sigma_{ap}^2} - 1\right];$$

$$b = \frac{P_{ap}q_{ap} - \sigma_{ap}^2}{\sigma_{ap}^2} = \frac{P_{ap}(1-P_{ap})}{\sigma_{ap}^2} - 1.$$

Средняя апостериорная оценка как первый момент бета-распределения определяется выражением

$$P^*_b = \frac{m+a}{b+n}.$$

Условная дисперсия

$$\sigma_{ps}^2(m) = \frac{(m+a)(b+n-a)}{(n+b)^2(n+b+1)}.$$

Для определения среднего риска $\overline{R}_{\text{мин}}$ (средней дисперсии) целесообразно применительно к рассматриваемой задаче воспользоваться исходным выражением

$$\overline{R}_{\text{мин}} = \int_0^1 f_{ap}(p) \sum_{m=0}^{n} [p - p^*(m)]^2 \, p(m \mid p) \, dp,$$

раскрывая которое, получаем:

$$\overline{R}_{\text{мин}} = \int_0^1 f_{ap}(p) \sum_{m=0}^{n} \left(p - \frac{m+a}{n+b}\right)^2 p(m \mid p) \, dp =$$

$$= \int_0^1 f_{ap}(p) \left[p^2 - \frac{2p(a+np)}{b+n} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2 + 2anp + np + n(n-1)p^2}{(b+n)^2} \right] dp.$$

Учтем следующие выражения первых двух моментов бета-распределения:

$$\int_0^1 p f_{ap}(p) \, dp = \frac{a}{b} = P_{ap};$$

$$\int_0^1 p^2 f_{ap}(p) \, dp = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a(b-a)}{b^2(b+1)} = m_2.$$

В результате получаем:

$$\overline{R}_{\text{мин}} = m_2 - \frac{2(aP_{ap} + nm_2)}{b+n} +$$

$$+ \frac{(n^2 - n) m_2 + nP_{ap}(1 + 2a) + a^2}{(b+n)^2} =$$

$$= \frac{m_2(b^2 - n) - P_{ap}(2ab - n) + a^2}{(b+n)^2}. \quad (59)$$

Общее выражение среднего риска (59) можно представить также в виде

$$\overline{R}_{\text{мин}} = \frac{(\sigma_{ap}^2 + P_{ap}^2)(b^2 - n) - P_{ap}(2P_{ap}b^2 - n) + P_{ap}^2 b^2}{(b+n)^2} =$$

$$= \frac{\sigma_{ap}^2 (b^2 - n) - P_{ap}^2 n + P_{ap}^2 b^2 - 2P_{ap}^2 b^2 + nP_{ap} + P_{ap}^2 b^2}{(b+n)^2} =$$

$$= \frac{\sigma_{ap}^2 (b^2 - n) + nP_{ap}q_{ap}}{(b+n)^2}, \text{ где } q_{ap} = 1 - P_{ap}.$$

Поскольку $P_{ap}q_{ap}=(b+1)\sigma^2_{ap}$, то

$$\overline{R}_{\text{мин}}=\frac{\sigma^2_{ap}b^2-\sigma^2_{ap}n+nb\sigma^2_{ap}+n\sigma^2_{ap}}{(b+n)^2}=$$

$$=\frac{b\sigma^2_{ap}(b+n)}{(b+n)^2}=\sigma^2_{ap}\frac{b}{b+n}$$

или

$$\overline{R}_{\text{мин}}=\sigma^2_{ap}\frac{P_{ap}q_{ap}-\sigma^2_{ap}}{P_{ap}q_{ap}-\sigma^2_{ap}+n\sigma^2_{ap}}.$$

Пусть $P_{ap}=0{,}5$. Тогда

$$\overline{R}_{\text{мин}}=\sigma^2_{ap}\frac{1-4\sigma^2_{ap}}{1+4\sigma^2_{ap}(n+1)}. \tag{60}$$

Интерес представляет сравнение байесовских оценок при использовании двух априорных распределений: бета-распределения и равномерного (в интервале [0,1]) распределения.

Для равномерного распределения имеем $P_{ap}=0{,}5$ и $\sigma^2{}_{ap}=1/12$. Эквивалентное бета-распределение будет иметь соответствующие параметры:

$$b=\frac{P_{ap}(1-P_{ap})}{\sigma^2_{ap}}-1=2;$$

$$a=P_{ap}b=1;\ m_2=0{,}25+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}. \tag{61}$$

Оценка P^* имеет вид:

$$P^*=\frac{m+a}{b+n}=\frac{m+1}{n+2}.$$

Минимальный средний риск $\overline{R}_{\text{мин}}$ при этом равен:

$$\overline{R}_{\text{мин}}=\frac{m_2(b^2-n)-P_{ap}(2ab-n)+a^2}{(b+n)^2}=\frac{1}{6(2+n)}. \tag{62}$$

Совпадение оценки (61) и среднего риска (62) с соответствующими характеристиками оценок, использующих априорное равномерное распределение, объясняется тем, что бета-распределение с параметрами $b=2$ и $a=1$ вырождается в равномерное

$$f_{ap}(p)=\frac{p^{a-1}(1-b)^{b-a-1}}{\mathrm{B}(a,\ b-a)}=\frac{1}{\mathrm{B}(1,1)}=1.$$

Поэтому гипотеза о равномерном априорном распределении является соответственно частным случаем гипотезы о бета-распределении.

Сравнение показывает, что повышение точности (уменьшение $\sigma^2{}_{ap}$) априорной оценки эквивалентно сокращению числа испытаний. Найдем соотношение, определяющее указанную эквивалентность.

Пусть n_0 — число испытаний при определении P в предположении априорного равномерного распределения; $n_э$ — эквивалентное число испытаний при определении P в предположении об априорном бета-распределении.

Из условия равенства средних квадратических ошибок

$$\frac{1}{6(2+n_1)} = \sigma_{ap}^2 \frac{1-4\sigma_{ap}^2}{1+4\sigma_{ap}^2(n_э-1)}$$

находим:

$$n_э = \frac{6\sigma_{ap}^2(2+n_1)(1-4\sigma_{ap}^2)+4\sigma_{ap}^2-1}{4\sigma_{ap}^2}.$$

Выигрыш $\Delta n = n_1 - n_э$ найдем из соотношения

$$\Delta n = \frac{4\sigma_{ap}^2(n_1-1)+1-6\sigma_{ap}^2(2+n_1)(1-4\sigma_{ap}^2)}{4\sigma_{ap}^2}.$$

При $\sigma_{ap}^2 = 1/12$ имеем $\Delta n = 0$, как и следовало ожидать. При $\sigma_{ap}^2 = 0{,}01$ и $n_0 = 18$ имеем $\Delta n \approx 13$, $n_э \approx 5$. Рассмотрим примеры использования оценки $P^*_b = (m+a)/(n+b)$. Для $n = 10$, $\sigma_{ap}^2 = 0{,}01$ и $P_{ap} = 0{,}8$ и $0{,}9$, а также $m = 9$ и 10 результаты сведены в табл. 6

Таблица 6

Примеры расчетов байесовских оценок

P_{ap}	a	b	m	P^*_b	$P^*_{м.п}$
0,8	12	15	9	0,84	0,9
			10	0,88	1,0
0,9	7,2	8	9	0,9	0,9
			10	0,955	1,0

Анализ результатов расчетов показывает, что априорные средние P_{ap} в значительной степени оказывают влияние на оценку P^*. Так, если $P_{ap} = 0{,}8$, то даже все $m = 10$ успешных испытаний дают $P^* = 0{,}88$, а если $P_{ap} = 0{,}9$, то при тех же условиях $P^* = 0{,}955$.

Рассмотрим параметрическую оценку

$$P^*_\lambda = \lambda_{11} P^*_{\text{м.п}},$$

где

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{1}{1 + \dfrac{M_p D_{mp} P^*_{\text{м.п}}}{M_p (P)^2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\int\limits_0^1 P(1-P) f_{ap}(P)\, dP}{n \int\limits_0^1 P^2 f_{ap}(P)\, dP}}.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^1 \frac{P(1-P)}{n} f_{ap}(p)\, dP = \frac{P_{ap}}{n}\left[1 - P_{ap} - \frac{b-a}{b(b+1)}\right];$$

$$\int\limits_0^1 P^2 f_{ap}(p)\, dP = P_{ap}\left[P_{ap} + \frac{b-a}{b(b+1)}\right],$$

то

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{n\left(P_{ap} + \dfrac{\sigma_{ap}^2}{P_{ap}}\right)}{1 + (n-1)\left(P_{ap} + \dfrac{\sigma_{ap}^2}{P_{ap}}\right)}.$$

Например, $P_{ap} = 0{,}5$ и $\sigma_{ap}^2 = 0{,}01$. Тогда

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{0{,}52n}{0{,}52n + 0{,}48}.$$

Средний риск при использовании параметрической оценки

$$\bar{R}_{\text{мин}}^{(\lambda)} = (1 - \lambda_{11}^{(\sigma)}) M_p (P^2) = (1 - \lambda_{11}^{(\sigma)}) P_{ap}\left(P_{ap} + \frac{\sigma_{ap}^2}{P_{ap}}\right) =$$

$$= \frac{P_{ap}\left(1 - P_{ap} - \dfrac{\sigma_{ap}^2}{P_{ap}}\right)\left(P_{ap} + \dfrac{\sigma_{ap}^2}{P_{ap}}\right)}{1 + (n-1)\left(P_{ap} + \dfrac{\sigma_{ap}^2}{P_{ap}}\right)}.$$

Для указанного выше случая

$$\bar{R}_{\text{мин}} = \frac{12{,}48}{48 + 52n}.$$

Интересно отметить в сравнительном плане средний риск при использовании максимально правдоподобной оценки:

$$\bar{R}_{\text{мин. м.п}} = \int_0^1 \frac{P(1-P)}{n} f_{ap}(p)\, dP = \frac{P_{ap}}{n}\left[1 - \left(P_{ap} + \frac{\sigma_{ap}^2}{P_{ap}}\right)\right].$$

При $P_{ap} = 0{,}5$ и $\sigma_{ap}^2 = 0{,}01$ имеем:

$$\bar{R}_{\text{мин. м.п.}} = \frac{0{,}24}{n} \approx \frac{1}{4{,}17n}.$$

При $n = 2$ $\bar{R}_{\text{мин.м.п}} \approx 0{,}12$.

Возвращаясь к оценке

$$P^* = P^*_n = \frac{a + \sum_{j=1}^{n} x_j}{b+n},$$

можно получить следующую рекуррентную формулу:

$$P^*_n = P^*_{n-1} - \frac{1}{b+n}\left(P^*_{n-1} - x_n\right),$$

где

$$P^*_0 = P_{ap};\ b = \frac{P_{ap}q_{ap}}{\sigma_{ap}^2} - 1;\ x_n = 1\ (\text{или } 0).$$

Это типовая алгоритмическая форма метода стохастической аппроксимации с величиной шага $\gamma = 1/(b+n)$.

Пример 30. При исследовании надежности широкое распространение получил экспоненциальный закон распределения времени жизни изделий (в частности, комплектующих элементов: конденсаторов, резисторов и пр.):

$$P(t) = \exp(-\lambda t) = \exp(-t/T),$$

где $\lambda = 1/T$ — интенсивность отказов; T — среднее время жизни изделия.

Соответственно плотность вероятности времени жизни имеет вид:

$$f(t \mid T) = \frac{1}{T}\exp(-t/T).$$

Параметр T — среднее время жизни, является важной характеристикой, оценка которой по результатам испытаний представляет собой интересную (с практической точки зрения) задачу.

Пусть T, как случайная величина, распределена по экспоненциальному закону

$$f_{ap}(T) = \frac{1}{T_{ap}}\exp(-T/T_{ap}), \tag{63}$$

где T_{ap} — априорное значение параметра экспоненциального распределения.

Пусть проведены измерения случайной величины T, результаты которых фиксируем в виде выборки $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Физический смысл T_j — время жизни изделия. Вероятность получения T_j определяется функцией правдоподобия.

Требуется найти среднеапостериорную оценку T^*_{ps} по данным функции правдоподобия и априорной плотности (63) и данным $\mathbf{T}=\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$. Функция правдоподобия выборки $T_1, T_2, \ldots, T_n$ определяется выражением

$$L(\mathbf{T} \mid T) = \frac{1}{T^n} \exp\left(-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} T_i\right).$$

Апостериорная плотность вероятности определяется соотношением

$$f_{ps}(T \mid \mathbf{T}) = \frac{f_{ap}(T)\, L(\mathbf{T} \mid T)}{\int\limits_0^1 f_{ap}(T)\, L(\mathbf{T} \mid T)\, dT} =$$

$$= \frac{\frac{1}{T^n} \exp\left[-\frac{1}{T}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i - \frac{T}{T_{ap}}\right]}{\int\limits_0^\infty \frac{1}{T^n} \exp\left[-\frac{1}{T}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i - \frac{T}{T_{ap}}\right] dT}.$$

Имеет место соотношение

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^n} \exp\left[-\left(x + \frac{a^2}{x}\right)\right] dx = \frac{2}{a^{n-1}} \mathrm{K}_{n-1}(2a),$$

где $\mathrm{K}_m(x)$ — функция Бесселя второго рода мнимого аргумента.

В нашем случае, вводя замену переменных

$$T = T_{ap} x, \quad dT = T_{ap}\, dx,$$

получаем:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{T^n} \exp\left[-\left(\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} T_i + \frac{T}{T_{ap}}\right)\right] dT =$$

$$= \frac{1}{T_{ap}^{n-1}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^n} \exp\left[-\left(x + \frac{1}{x T_{ap}}\sum_{i=1}^{n} T_i\right)\right] dx =$$

$$= \frac{2}{T_{ap}^{n-1}\left(\frac{1}{T_{ap}}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\right)^{\frac{n-1}{2}}} \mathrm{K}_{n-1}\left(2\sqrt{\frac{1}{T_{ap}}\sum_{i=1}^{n} T_i}\right).$$

Следовательно,

$$f_{p s}(T \mid \mathrm{T})=\frac{T_{ap}^{n/2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left[-\left(\frac{1}{T}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i+\frac{T}{T_{ap}}\right)\right]}{T^{n} 2\mathrm{K}_{n-1}\left(2\sqrt{\frac{1}{T_{ap}}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i}\right)}.$$

Учитывая соотношение $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i = nT^*_{\text{м.п}}$, получаем:

$$f_{ps}(T \mid \mathrm{T})=\frac{T_{ap}^{n/2}\left(nT^*_{\text{м.п}}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{2\mathrm{K}_{n-1}\left(2\sqrt{\frac{nT^*_{\text{м.п}}}{T_{ap}}}\right)} \frac{1}{T^{n}} \exp\left[-\left(\frac{nT^*_{\text{м.п}}}{T}+\frac{T}{T_{ap}}\right)\right]. \tag{64}$$

Остановимся на свойствах функции Бесселя мнимого аргумента

$$\mathrm{K}_{n-1}\left(2\sqrt{\frac{nT^*_{\text{м.п}}}{T_{ap}}}\right).$$

Вообще функции $\mathrm{K}_\nu(x)$, где ν — вещественная переменная, представляют собой вещественные положительные функции, монотонно убывающие с ростом x.

Имеют место следующие приближенные выражения:

$$\mathrm{K}_\nu(x) \approx \frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{x^{\nu}} \quad \text{для } x \to 0 \text{ и } \nu > 0;$$

$$\mathrm{K}_\nu(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \quad \text{для } x \to \infty.$$

Для $x > 0$ функции $\mathrm{K}_\nu(x)$ нулей не имеют.

Например, $T_{ap}=10$ ч. В результате испытаний получено:
1) $n=1$ $T_1=9$ ч;
2) $n=2$ $T_1=9$ ч и $T_2=11$ ч.
Нужно определить $f_{ps}(T|T_1)$ и $f_{ps}(T|T_1, T_2)$.

Для использования соотношения (64) заметим, что при $n=1$ $T^*_{\text{м.п}}=9$ ч и при $n=2$ $T^*_{\text{м.п}}=10$ ч.

$$f_{ps}(T \mid T_1)=\frac{10^{1/2}}{2\mathrm{K}_0(2\sqrt{0,9})} \frac{1}{T} e^{-\left(\frac{9}{T}+0,1T\right)} \approx \frac{8,17}{T} e^{-\left(\frac{9}{T}+0,1T\right)}.$$

На рис. 32 представлены графики априорной плотности $f_{ap}(T) = 0{,}1e^{-0{,}1T}$ и $f_{ps}(T|T_1)$.

Из сопоставления рисунков видно резкое отличие $f_{ps}(T|T_1)$ от $f_{ap}(T)$. Кроме того, $f_{ps}(T|T_1)$ имеет резко выраженный максимум при $T \approx 5{,}5$ ч. Эта величина T может быть взята в качестве оценки

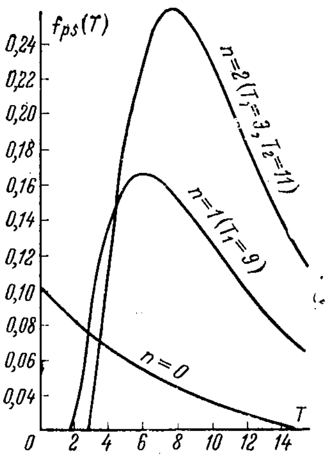


Рис. 32. График априорных плотностей.

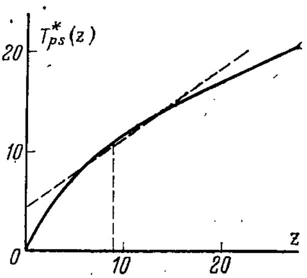


Рис. 33. Зависимость $T^*_{ps}(z)$ при $n=2$.

параметра T (при этом мы имеем дело с так называемой максимально апостериорной оценкой).

При $n=2$ $f_{ps}(T|T_1, T_2)$ принимает вид (см. рис. 32):

$$f_{ps}(T|T_1, T_2) \approx \frac{446}{T^2} e^{-\left(\frac{20}{T} + 0{,}1T\right)}.$$

Средняя апостериорная оценка может быть получена в соответствии с ее определением

$$T^*_{ps} = \int_0^\infty T f_{ps}(T|\mathrm{T})\, dT =$$

$$= \frac{T_{ap}^{n/2}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right)^{\frac{n-1}{2}}}{2K_{n-1}\left(2\sqrt{\frac{1}{T_{ap}}\sum_{i=1}^{n} T_i}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{T^{n-1}} \exp\left[-\left(\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} T_i + \frac{T}{T_{ap}}\right)\right] dT =$$

$$
= \frac{T_{ap}^{n/2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\right)^{\frac{n-1}{2}}}{2\mathrm{K}_{n-1}\left(2\sqrt{\frac{1}{T_{ap}}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i}\right) T_{ap}^{n-2}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^{n-1}} \exp\left[-\left(x+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} T_i}{T_{ap}x}\right)\right] \times
$$

$$
\times\, dx = \frac{T_{ap}^{\frac{n}{2}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\right)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{K}_{n-2}\left(2\sqrt{\frac{1}{T_{ap}}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i}\right)}{\mathrm{K}_{n-1}\left(2\sqrt{\frac{1}{T_{ap}}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i}\right) T_{ap}^{n-2}\left(\frac{1}{T_{ap}}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\right)^{\frac{n-2}{2}}} =
$$

$$
= T_{ap}\sqrt{\frac{1}{T_{ap}}\sum_{i=1}^{n} T_i}\; \frac{\mathrm{K}_{n-2}\left(2\sqrt{\frac{1}{T_{ap}}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i}\right)}{\mathrm{K}_{n-1}\left(2\sqrt{\frac{1}{T_{ap}}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i}\right)}.
$$

Таким образом, имеем окончательную формулу

$$
T^*_{ps}(z) = T_{ap}\sqrt{\frac{n}{T_{ap}}z}\; \frac{\mathrm{K}_{n-2}\left(2\sqrt{\frac{n}{T_{ap}}z}\right)}{\mathrm{K}_{n-1}\left(2\sqrt{\frac{n}{T_{ap}}z}\right)}, \tag{65}
$$

где

$$
z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i.
$$

На рис. 33 представлена зависимость $T^*_{ps}(z)$ при $n=2$.

Соотношение (65) является весьма громоздким: требуется знание табличных значений функции Бесселя и главным образом использование вычислительной техники.

Найдем выражение для условной дисперсии σ^2_y.

Средний риск определяется по формуле

$$
\bar{R}_{\text{мин}} = \int\limits_0^\infty f_{ap}(T)\, dT \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty (T - T^*)^2 f(\mathbf{T}/T)\, d\mathbf{T}.
$$

Однако получающиеся при этом интегралы в общем виде не определяются.

Громоздкость выражения для средней апостериорной T^*_{p}, оценки T затрудняет ее практическое применение. Поэтому интерес представляет рассмотрение оценок максимального правдоподобия с последующей коррекцией с помощью параметрических функций.

Составляя уравнение

$$\frac{\partial \ln L\,(\mathbf{T}\mid T)}{\partial T}=0,$$

находим:

$$\frac{\partial \ln (\mathbf{T}\mid T)}{\partial T}=-\frac{n}{T}+\frac{1}{T^2}\sum_{i=1}^{n} T_i=0,$$

откуда

$$T^*_{\text{м.п}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1} T_i.$$

Оценка $T^*_{\text{м.п}}$ является несмещенной, так как

$$MT^*_{\text{м.п}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1} MT_i=MT_j=\int_0^\infty T_j\frac{1}{T}e^{-\frac{T_j}{T}}\,dT_j=T.$$

Дисперсия оценки определяется соотношением

$$DT^*_{\text{м.п}}=D\left(\frac{T_j}{n}\right)=\frac{1}{n}\,[MT_j^2-T^2],$$

где

$$MT_j^2=\int_0^\infty \frac{T_j^2}{T}\,e^{-T_j/T}\,dT_j=T^2\Gamma(3)=2T^2,$$

т. е.

$$DT^*_{\text{м.п}}=T^2/n.$$

Оценка $T^*_{\text{м.п}}$ является эффективной, поскольку

$$J_n=nJ_1=n\int_0^\infty \frac{\partial \log f\,(T_j\mid T)}{\partial T}\,dT_j=\frac{n}{T^2};$$

$$DT^*=\frac{1}{nJ_1}=\frac{T^2}{n}=DT^*_{\text{м.п}}.$$

Перейдем к параметрической коррекции правдоподобной оценки. Рассмотрим оценку

$$T^*_n=\lambda_{11}^{(\sigma)}\,T^*_{\text{м.п}}=\frac{\lambda_{11}^{(\sigma)}}{n}\sum_{j=1}^{n} T_j,$$

где

$$\lambda_{11}^{(\sigma)} = \frac{1}{1 + \frac{M_T D_{T_j \mid T}[T^*{}_{\text{м.п}}]}{M_T (T)^2}} = \frac{n}{n+1};$$

$$\overline{R}_{\text{мин}} = \frac{2T_0^2}{n+1}.$$

Окончательное выражение для параметрической оценки принимает вид:

$$T_\lambda = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} T_j.$$

Пример 31. Пусть исследуемая случайная величина X распределена по закону Пуассона

$$P(m \mid a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = 0, 1 \ldots,$$

где a — параметр закона Пуассона, являющийся математическим ожиданием случайной величины X.

Пусть τ_1 — длительность функционирования систем и $n\lambda\Delta\tau = q$ — вероятность отказа систем за $\Delta\tau$ и n — число систем. Тогда

$$a = n\lambda\tau_1 = \lambda\tau = \frac{n\lambda\Delta\tau\tau_1}{\Delta\tau} \approx n_1 q,$$

где $\lambda = 1/T$; $n_1 = \frac{\tau_1}{\Delta\tau}$ — число элементарных участков времени длительностью $\Delta\tau$.

Итак, будем считать, что дана функция правдоподобия

$$P(m \mid T) = \frac{(\tau/T)^m}{m!} e^{-\tau/T}.$$

Параметр $\lambda = 1/T$ предполагается случайным и подчиняющимся гамма-распределению, т. е.

$$f_{ap}(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}. \tag{66}$$

Общий вид плотности гамма-распределения представлен на рис. 34.

Известно также, что моменты случайной величины λ определяются следующими выражениями:

$$M\lambda = \frac{\alpha}{\beta}; \quad D\lambda = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

В связи с тем, что искомым параметром является $T = 1/\lambda$, встает задача нахождения плотности распределения $f_T(T)$ по заданной плотности $f_\lambda(\lambda)$. Эта задача для монотонно убывающей функции $T=1/\lambda$ решается в соответствии с формулой [Л. 19], т. е.

$$f_T(T) = -f_\lambda\left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{1}{T}\right)' = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{\beta}{T}}. \quad (67)$$

В дальнейшем находится максимально правдоподобная оценка $T^*_{\text{м.п}} = z_T$, которая может быть найдена из уравнения

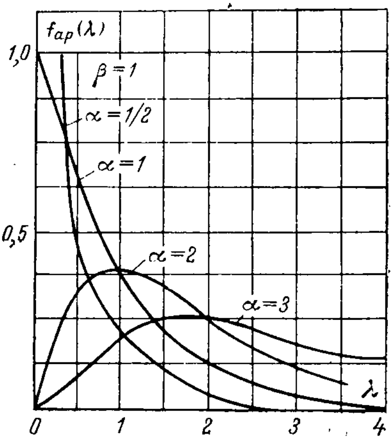


Рис. 34. Плотность гамма-распределения.

$$\frac{\partial}{\partial T}[P(m \mid T)] = 0. \quad (68)$$

Решение уравнения (68) имеет вид:

$$T^*_{\text{м.п}} = \frac{\tau}{m} = z_T.$$

Байесовская оценка по относительной средней квадратической функции потерь определится следующим соотношением:

$$T^*_{\text{отнb}} = \frac{\int\limits_0^\infty \frac{1}{T} f_{ps}(T)\,dT}{\int\limits_0^\infty \frac{1}{T^2} f_{ps}(T)\,dT}. \quad (69)$$

Найдем прежде всего апостериорную плотность

$$f_{ps}(T) = \frac{\left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha+m+1} e^{-\frac{\beta+\tau}{T}}}{\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha+m+1} e^{-\frac{\beta+\tau}{T}}\,dT}.$$

Интеграл, стоящий в знаменателе полученного выражения, найдем, производя замену переменных,

$$x = \frac{\tau+\beta}{T}; \quad dT = -\frac{\tau+\beta}{x^2}\,dx;$$

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha+m+1} e^{-\frac{\beta+\tau}{T}}\,dT =$$

$$= \frac{1}{(\tau+\beta)^{\alpha+m}} \int\limits_0^\infty x^{\alpha+m-1} e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{(\tau+\beta)^{\alpha+m}}.$$

Окончательное выражение для $f_{ps}(T)$ примет вид:

$$f_{ps}(T)=\frac{(\tau+\beta)^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m)}\left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha+m+1}e^{-\frac{\beta+\tau}{T}}. \qquad (70)$$

Введя новые параметры $\beta'=\tau+\beta$ и $\alpha'=\alpha+m$ и сравнивая с (67), устанавливаем их идентичность. Оба закона представляют собой обратное гамма-распределение.

Подставляя (70) в (69), получаем:

$$T^*_{\text{отн}b}=\frac{\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha'+2}e^{-\frac{\beta'}{T}}dT}{\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha'+3}e^{-\frac{\beta'}{T}}dT}=\frac{\Gamma(\alpha'+1)(\beta')^{\alpha'+2}}{(\beta')^{\alpha'+1}\Gamma(\alpha'+2)}=$$

$$=\frac{\beta'}{\alpha'+1}=\frac{\beta+\tau}{\alpha+m+1}.$$

Заметим, что $m=\tau/z_T$, поэтому

$$T^*_{\text{отн}b}=\frac{\beta+\tau}{\frac{\tau}{z}+\alpha+1}=\frac{\beta'}{\frac{\tau}{z}+\alpha+1}=\frac{z\beta'}{\tau+(\alpha+1)z}.$$

Это нелинейная функция от z. На рис. 35 представлена зависи-

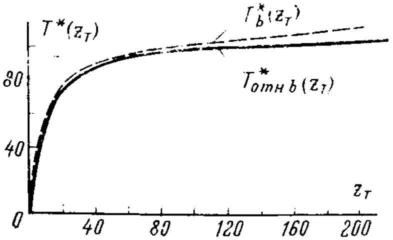


Рис. 35. Аппроксимация байесовской оценки.

мость $T^*_{\text{отн}b}$ при следующих исходных данных: $M\lambda=10^{-2}$; $\sigma_\lambda=10^{-3}$; $\alpha=10^2$; $\beta=10^4$; $\tau=5\times200=10^3$ (пять элементов, проработавших по 200 ч); $m=2$ (два отказавших элемента); $z_T=T^*_{\text{м.п}}=\tau/m=500$ ч, что в значительной мере отличается от априорного значения $T_{ap}=1/M\lambda=100$ ч.

Найдем байесовскую оценку T^*_b, оптимальную по критерию средних квадратических потерь.

В соответствии с определением имеем:

$$T^*_b=\int\limits_0^\infty Tf_{ps}(T)\,dT=\frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')}\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{T}\right)^{\alpha'}e^{\frac{\beta'}{T}}dT=$$

$$=\frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')}\frac{\Gamma(\alpha'-1)}{(\beta')^{\alpha'-1}}=\frac{\beta'}{\alpha'-1}=\frac{\beta+\tau}{\alpha+m-1}=$$

$$= \frac{\beta + \tau}{\frac{\tau}{z_T} + \alpha - 1} = \frac{\beta' z_T}{\tau + (\alpha - 1) z_T}.$$

Сравнение оценок T^*_b и T^*_α показывает, что всегда соблюдается неравенство

$$T^*_{\text{отнb}} < T^*_b,$$

т. е. оценка $T^*_{\text{отнb}}$ оказывается более осторожной.

Пример 32. В условиях примера 28 найдем оценки для параметра λ. Итак,

$$f_{ap}(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda};$$

$$P(m \mid \lambda) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}.$$

Требуется найти $f_{ps}(\lambda)$, λ^*_b, $\lambda^*_{\text{отнb}}$.

1. В соответствии с определением имеем:

$$f_{ps}(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \lambda^m e^{-\lambda\tau}}{\int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \lambda^m e^{-\lambda\tau} \, d\lambda} = \frac{\lambda^{m+\alpha-1} e^{-(\beta+\tau)\lambda}}{\int\limits_0^\infty \lambda^{m+\alpha-1} e^{-(\beta+\tau)\lambda} \, d\lambda}.$$

Произведя замену переменных в интеграле

$$J = \int\limits_0^\infty \lambda^{m+\alpha-1} e^{-(\beta+\tau)\lambda} \, d\lambda \text{ вида } x = (\beta + \tau)\lambda,$$

получаем:

$$J = \frac{1}{(\beta+\tau)^{m+\alpha}} \int\limits_0^\infty x^{m+\alpha-1} e^{-x} \, dx = \frac{\Gamma(m+\alpha)}{(\beta+\tau)^{m+\alpha}},$$

откуда окончательно имеем:

$$f_{ps}(\lambda) = \frac{\lambda^{m+\alpha-1} e^{-(\beta+\tau)\lambda} (\beta+\tau)^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha)} = \frac{(\beta')^\alpha}{\Gamma(\alpha')} \lambda^{\alpha'-1} e^{-\beta'\lambda},$$

т. е. гамма-распределение есть сопряженное распределение по отношению к закону Пуассону.

2. Оценка $\lambda^*_{\text{отнb}}$ определяется соотношением

$$\lambda^*_{\text{отнb}} = \frac{\int\limits_0^\infty \lambda f_{ps}(\lambda) \, d\lambda}{\int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} f_{ps}(\lambda) \, d\lambda} = \frac{\int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha'-2} e^{-\beta'\lambda} \, d\lambda}{\int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha'-3} e^{-\beta'\lambda} \, d\lambda} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha'-1)(\beta')^{\alpha'-2}}{(\beta')^{\alpha'-1} \Gamma(\alpha'-2)} = \frac{\alpha'-2}{\beta'} = \frac{\alpha + m - 2]}{\tau + \beta}.$$

Вводя оценку $z_\lambda = m/\tau$, получаем:

$$\lambda^*_{\text{отн}b} = \frac{\frac{\alpha}{\tau} + z_\lambda - \frac{2}{\tau}}{1 + \frac{\beta}{\tau}} = \frac{\alpha - 2}{\tau + \beta} + \frac{\tau}{\tau + \beta} z_\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 z_\lambda,$$

де

$$\lambda_0 = \frac{\alpha - 2}{\tau + \beta}; \ \lambda_1 = \frac{\tau}{\tau + \beta}.$$

3. Оценка λ^*_b определяется соотношением

$$\lambda^*_b = \int_0^\infty \lambda f_{ps}(\lambda)\, d\lambda = \frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \int_0^\infty \lambda^{\alpha'} e^{-\beta'\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \frac{(\beta')^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \frac{\Gamma(\alpha' + 1)}{(\beta')^{\alpha'+1}} = \frac{\alpha'}{(\beta')} = \frac{\alpha + m}{\tau + \beta}$$

или

$$\lambda^*_b = \frac{\alpha}{\tau + \beta} + \frac{\tau}{\tau + \beta} z_\lambda = \lambda_0^{(b)} + \lambda_1^{(b)} z_\lambda .$$

Сравнение $\lambda^*_{\text{отн}b}$ и λ^*_b показывает, что они отличаются только постоянными λ_0 и $\lambda_1^{(b)}$, а именно:

$$\lambda_0 = \frac{\alpha - 2}{\tau + \beta}; \ \lambda_0^{(b)} = \frac{\alpha}{\tau + \beta}, \quad \text{т. е. } \lambda_0^{(b)} > \lambda_0.$$

Значит, и в данном случае оценка $\lambda^*_{\text{отн}b}$ более осторожная. Полученные результаты сведены в табл. 7.

Таблица 7

λ^*_b	$\frac{1}{\lambda^*_b}$	T^*_b	$\frac{1}{T^*_b}$	$\lambda^*_{\text{отн}b}$	$\frac{1}{\lambda^*_{\text{отн}b}}$	$T^*_{\text{отн}b}$	$\frac{1}{T^*_{\text{отн}b}}$
$\frac{\alpha + m}{\tau + \beta}$	$\frac{\tau+\beta}{\alpha+m}$	$\frac{\tau+\beta}{\alpha+m-1}$	$\frac{\alpha+m-1}{\tau+\beta}$	$\frac{\alpha+m-2}{\tau+\beta}$	$\frac{\tau+\beta}{\alpha+m-2}$	$\frac{\tau+\beta}{\alpha+m+1}$	$\frac{\alpha+m+1}{\tau+\beta}$

23. СВЯЗЬ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С РЕГРЕССИОННЫМ АНАЛИЗОМ

Покажем, что для случайного оцениваемого параметра a (характеризуемого априорным распределением вероятности) метод параметрических функций в ряде случаев переходит в классический регрессионный анализ.

Для этого остановимся на сущности регрессионного анализа.

Пусть X и Y две случайные величины, определяемые совместной плотностью распределения $f(x, y)$.

Введем условные математические ожидания:

$$M(y|x) = \int_{\Omega_y} yf(y|x)\,dy;$$

$$M(x|y) = \int_{\Omega_x} xf(x|y)\,dx,$$

где $f(y|x)$ и $f(x|y)$ — условные плотности вероятности случайных величин Y и X при данных X и Y соответственно.

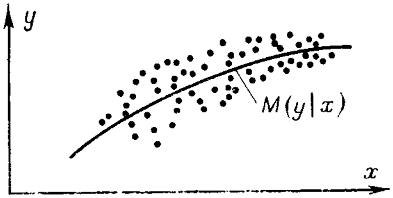


Рис. 36. График авторегрессионной зависимости.

Условное математическое ожидание Y при фиксированном X носит название регрессии Y на X и соответственно $M(x|y)$ — регрессии X на Y.

Каков физический смысл регрессии?

Если в процессе некоторого эксперимента фиксировать результаты наблюдений в виде пары чисел, то на плоскости будем иметь некоторую область, заполненную точками с координатами (рис. 36).

Если затем при каждом значении x отыскивать $y_{\text{ср}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ (при x фиксированном), то получим кривую (на рис. 36 сплошная линия), которая и является оценкой линии регрессии Y на X.

Регрессионный анализ широко используется в различных задачах.

Так, в задачах оценки случайных параметров α роль Y выполняет α, т. е. $Y = \alpha$. При этом в качестве оценки α^* и выбирается регрессия α на наблюдаемый процесс X, т. е.

$$\alpha^*_r = M[\alpha|x] = \int_{\Omega_\alpha} \alpha f(\alpha|x)\,d\alpha,$$

где функция $f(\alpha|x)$ носит название апостериорной плотности вероятности оцениваемого параметра α.

В задачах оптимальной статистической фильтрации роль Y выполняет некоторая полезная функция W:

$$Y = W = X - N,$$

где N — некоторый мешающий сигнал.

В задачах прогнозирования роль Y выполняет обычно сама наблюдаемая функция, сдвинутая на некоторый прогнозируемый отрезок времени $Y(t) = X(t+\tau)$.

Условные математические ожидания обладают замечательным свойством, используемым как в практике построения оценок, так и оптимальной статистической фильтрации: среди возможных оценок α^* регрессия $\varphi(x) = M(\alpha|x)$ является оптимальной оценкой в классе произвольных функций $\varphi(x)$ по минимуму среднеквадратической ошибки.

Докажем это утверждение.

Средний риск

$$\sigma_\varepsilon^2 = M[\alpha - \alpha^*(x)]^2 = \int\limits_{\Omega_\alpha} \int\limits_{\Omega_x} [\alpha - \alpha^*(x)]^2 f(\alpha, x)\, d\alpha dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_x} f(x)\, dx \int\limits_{\Omega_\alpha} [\alpha - \alpha^*(x)]^2 f(\alpha|x)\, d\alpha.$$

Поскольку $f(x) \geqslant 0$, то условие $\sigma_\varepsilon^2 = \min$ равносильно условию

$$Q(\alpha^*) = \int\limits_{\Omega_\alpha} [\alpha - \alpha^*(x)]^2 f(\alpha|x)\, d\alpha = \min,$$

откуда требование $\partial Q(\alpha^*)/\partial\alpha^* = 0$ приводит к уравнению

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} [\alpha - \alpha^*(x)]^2 f(\alpha|x)\, d\alpha = 0$$

или

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} \alpha f(\alpha|x)\, d\alpha = \int\limits_{\Omega_\alpha} \alpha^*(x) f(\alpha|x)\, d\alpha =$$

$$= \alpha^*(x) \int\limits_{\Omega_\alpha} f(\alpha|x)\, d\alpha = \alpha^*(x),$$

так как

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} f(\alpha|x)\, d\alpha = 1.$$

Итак, окончательно получаем:

$$\alpha^*(x) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \alpha f(\alpha|x)\, d\alpha = M(\alpha|x),$$

т. е. регрессии α на x.

Если

$$\alpha^*_\lambda(x) = \lambda_{10} + \lambda_{11}\alpha^*(x) = M[\alpha|\alpha^*(x)],$$

то можно говорить о том, что параметрическая оценка $\alpha_\lambda(x)$ есть линейная регрессия α относительно оценки $\alpha^*(x)$.

При этом

$$\lambda_{10} = \bar{\alpha} - \rho_{\alpha\alpha^*} \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha^*}} \bar{\alpha}^*;$$

$$\lambda_{11} = \rho_{\alpha\alpha^*} \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha^*}}.$$

24. СВЯЗЬ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МЕТОДОМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Прежде всего рассмотрим сущность метода стохастической аппроксимации.

Пусть $z=\varphi(x)$ — некоторая статистика и $M(z|\alpha)$ соответственно регрессия z на оцениваемый параметр α.

Для определения нулей неизвестной регрессии $\mathrm{Re}(z|\alpha)$ Роббинс и Монро [Л. 18] предложили следующую итерационную процедуру:

$$\alpha^*_n = \alpha^*_{n-1} + \gamma_n z(x_n,\ \alpha^*_{n-1}).$$

Пример 33. Пусть α — неизвестное математическое ожидание случайной величины X с неизвестной плотностью $f(x|\alpha)$, т. е.

$$\alpha = M_{x|\alpha} X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x|\alpha)\, dx.$$

Тогда $M_{x|\alpha}(X-\alpha) = 0$ и уравнение регрессии запишется в форме

$$M[(x-\alpha)|\alpha]=0, \text{ т. е. } z=x-\alpha.$$

Рекуррентная формула для определения z^*_n имеет вид:

$$\alpha^*_n = \alpha^*_{n-1} - \gamma(n)[\alpha^*_{n-1} - x_n]. \tag{71}$$

Здесь $\gamma(n)$ — некоторая последовательность положительных вещественных чисел.

Рассмотрим пример использования приведенного рекуррентного соотношения.

Исходные данные и результаты расчетов при различных значениях $\gamma(n)$ приведены на рис. 37, откуда следует, что уменьшение величины $\gamma(n)$ приводит к замедлению сходимости рекуррентного соотношения. При $\gamma(n)\equiv 1$ алгоритм вырождается, так как $\alpha^*_n = x_n$. Очевидно, что $\gamma(n)<1$. Можно показать, что оценка α^*_n имеет также вид:

$$\alpha^*_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad (72)$$

однако в отличие от (71) при реализации соотношения (72) необходимо иметь в запоминающем устройстве n ячеек памяти для хранения $x_1, \ldots, x_n$. При реализации (71) на каждом шаге требуется одна ячейка для хранения x_j. При переходе к x_{j+1} эту величину можно хранить в той же ячейке памяти, в которой на предыдущем шаге находилась информация x_j.

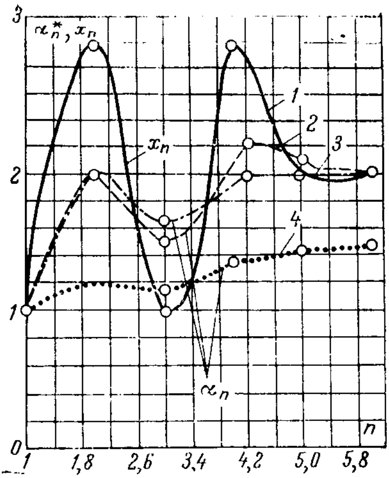


Рис. 37. Результаты сглаживания случайного процесса.

1 — исходная реализация; 2 — сглаженная при $\gamma(n)=1/n$; 3 — сглаженная при $\gamma(n)=0{,}5$; 4 — сглаженная при $\gamma(n)=0{,}1$.

Пример 34. Найти оценку дисперсии σ^2 при известном математическом ожидании m. По определению имеем:

$$\sigma^2 = M_{x\,|\,m,\sigma}(x-m)^2.$$

Вводя $z=\sigma^2-(x-m)^2$, можно записать уравнение регрессии

$$M(z|\sigma^2)=M(\sigma^2-(x-m)^2|\sigma^2)=0,$$

а потому

$$\sigma^{2*}_n = \sigma^{2*}_{n-1} - \gamma(n)\,[\sigma^{2*}_{n-1} - (x_n-m)^2].$$

Пример 35. Пусть $X=Y+\lambda$. Найти систематический сдвиг λ по данным измерениям X:

$$M_{x\,|\,m}X = M_{x\,|\,m}Y + \lambda = m_y + \lambda.$$

Уравнение регрессии

$$M(z|\lambda,\ m_y)=0;\quad Z=X-m_y-\lambda.$$

Рекуррентная зависимость для определения λ имеет вид:

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \gamma^{(1)}_n\,(m_{y_n} + \lambda_{n-1} - x_n);$$

где

$$m_{y_n} = m_{y_{n-1}} + \gamma^{(2)}_n\,[m_{y_{n-1}} + \lambda_n - x_n].$$

Пример 36. Пусть $X=\lambda Y$ (мультипликативная помеха). Требуется найти λ:

$$M_{x\mid m}=\lambda m_y \quad (m_y \text{ — известно});$$

$$M(z\mid\lambda)=\lambda m_y;\quad Z=X-\lambda m_y;$$

$$\lambda_n=\lambda_{n-1}+\gamma_n(\lambda_{n-1}m_y-x_n).$$

Пример 37. Пусть α^* — некоторая оценка для α. Условие несмещенности

$$M_{x\mid\alpha}\,\alpha^*=\alpha$$

или

$$M_{x\mid\alpha}\,(\alpha^*-\alpha)=0.$$

Уравнение регрессии

$$z=\alpha^*-\alpha;\quad \alpha^*_n=\alpha^*_{n-1}-\gamma_n(\alpha^*_{n-1}-\alpha^{**}_n).$$

В качестве α^{**}_n может быть взято

$$\alpha^{**}_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j=\alpha^{**}_{n-1}-\frac{1}{n}(\alpha^{**}_{n-1}-x_n).$$

Поэтому

$$\alpha^*_n=\alpha^*_{n-1}-\gamma_n\left[\alpha^*_{n-1}-\alpha^{**}_{n-1}+\frac{1}{n}(\alpha^{**}_{n-1}-x_n)\right].$$

Пример 38. Пусть критерий эффективности имеет вид:

$$\Phi=M[R(x,\,\boldsymbol{\alpha})]=\int R(x,\,\boldsymbol{\alpha})f(x\mid\boldsymbol{\alpha})\,dx,$$

где x — выборка; $\boldsymbol{\alpha}$ — определяемый вектор параметров; R — некоторая известная функция.

Условия оптимальности очевидно можно записать в форме

$$\nabla\Phi=M\,[\nabla_\alpha R(x,\,\boldsymbol{\alpha})]=0. \tag{73}$$

Для решения уравнений (73) можно использовать итерационные процедуры типа (71) с заменой в них $\nabla\Phi$ на $\nabla_\alpha R(x,\,\alpha)$, т. е.

$$\alpha_n=\alpha_{n-1}+\gamma(n)\,\nabla_\alpha R(x_n,\,\alpha_{n-1}). \tag{74}$$

При этом γ_n должны выбираться исходя из специальных условий.

Пример 39. Пусть $\partial f(x\mid\alpha)/\partial\alpha=0$ — уравнение максимального правдоподобия затруднительно для решения. Воспользуемся итерационной процедурой:

$$\int\limits_{\Omega_x} f(x\mid\alpha)\,dx=1;\quad \int\limits_{\Omega_\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x\mid\alpha)\,dx=0;$$

$$\int\limits_{\Omega_\alpha}\frac{\partial\log f(x\mid\alpha)}{\partial\alpha}f(x\mid\alpha)\,dx=0;$$

$$M_{x\mid\alpha}\left[\frac{\partial\log f(x\mid\alpha)}{\partial\alpha}\right]=0;$$

$$\alpha^*_n=\alpha^*_{n-1}+\gamma_n\left[\frac{\partial\log f(x_n\mid\alpha_{n-1})}{\partial\alpha}\right].$$

Из рассмотрения сущности метода стохастической аппроксимации следует возможность ускорения сходимости соответствующих итерационных процедур за счет использования некоторой дополнительной информации.

Аналогичное положение встречается и при использовании метода параметрических функций. Возникает задача представления алгоритмов параметрической аппроксимации в форме итерационных процедур, встречающихся в алгоритмах стохастической аппроксимации и установления соответствий между параметрами λ и γ. Покажем возможность установления связи γ и λ на одном из алгоритмов.

Пусть имеет место итерационная процедура

$$\alpha^*_n = \alpha^*_{n-1} - \frac{1}{n}\left[\alpha^*_{n-1} - x_n\right]. \tag{75}$$

Соотношение (75) можно представить в виде

$$\alpha^*_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j. \tag{76}$$

Рассматривая (76) как первоначальную оценку, перейдем к мультипликативной форме уточненной оценки

$$\alpha^*_{\lambda n} = \frac{\lambda_n}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j. \tag{77}$$

Представим (77) в рекуррентной форме

$$\alpha^*_{\lambda n} = \alpha^*_{\lambda, n-1} - \left[1 - \frac{(n-1)\lambda_n}{n\lambda_{n-1}}\right]\alpha^*_{\lambda, n-1} + \frac{\lambda_n}{n} x_n.$$

Вводя обозначения

$$\gamma(n) = 1 - \frac{(n-1)\lambda_n}{n\lambda_{n-1}},$$

можем записать окончательное выражение

$$\alpha^*_{\lambda n} = \alpha^*_{\lambda, n-1} - \gamma(n)\left[\alpha^*_{\lambda, n-1} - \frac{\lambda_n}{n\gamma(n)} x_n\right], \tag{78}$$

которое отличается от (75) значением множителя перед квадратными скобками и наличием коэффициента $\lambda_n/n\gamma(n)$.

При $\lambda_n = n/n+1$ имеем:

$$\gamma(n) = \frac{1}{n+1}; \quad \frac{\lambda_n}{n\gamma(n)} = 1,$$

т. е.

$$\alpha^*_{\lambda n} = \alpha^*_{\lambda, n-1} - \frac{1}{n+1}\left[\alpha^*_{\lambda, n-1} - x_n\right],$$

что практически полностью соответствует алгоритму стохастической аппроксимации при выборе коэффициента $\gamma(n) = 1/(n+1)$. В результате можно сделать вывод о том, что метод параметрических функций в ряде случаев обеспечивает возможность оптимального выбора шага γ алгоритма стохастической аппроксимации.

Если в качестве первоначальной оценки α^* использовать оператор экспоненциального сглаживания, т. е.

$$\alpha^*_n = \alpha^*_{n-1} - \frac{1}{T}[\alpha^*_{n-1} - x_n]$$

или в непрерывной форме

$$\alpha^*(t) = \frac{1}{T}\int\limits_0^t x(\tau)\, e^{-\frac{t-\tau}{T}}\, d\tau,$$

и перейти к параметрической мультипликативной модели

$$\alpha^*_{\lambda n} = \lambda\alpha^*_n,$$

то можно показать справедливость рекуррентного выражения

$$\alpha^*_{\lambda n} = \alpha^*_{\lambda, n-1} - \frac{1}{T}[\alpha^*_{\lambda, n-1} - \lambda x_n], \tag{79}$$

что соответствует непрерывной форме

$$\alpha^*_\lambda(t) = \frac{\lambda}{T}\int\limits_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}}\, x(\tau)\, d\tau.$$

Приведенное соотношение (79) показывает возможность раздельного определения параметров T и λ.

Так, если параметр T выбран, то для определения λ можно воспользоваться условием несмещенности оценки $\alpha^*_\lambda(t)$, т. е.

$$M_x[\alpha(t) - \alpha^*_\lambda(t)] = 0,$$

откуда

$$\lambda_\varepsilon(t) = \frac{\alpha(t)}{\frac{1}{T}\int\limits_0^T \alpha(\tau)\, e^{-\frac{T-\tau}{T}}\, d\tau}.$$

Из условия минимума средней квадратической ошибки можно получить уравнения для определения параметров T и α.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения задач аппроксимации оценок характеристик случайных процессов разработан метод параметрических функций.

Основные преимущества метода параметрических функций:

возможность учета дополнительной информации относительно оцениваемых характеристик;

сравнительно простая реализация соответствующих алгоритмов статистической обработки случайных процессов;

возможность решения задач метрологии случайных процессов.

Сочетание метода параметрических функций с алгоритмами стохастической аппроксимации обеспечивают ускорение сходимости соответствующих итерационных процедур.

Рассматривая алгоритмы параметрической аппроксимации с точки зрения регрессионного анализа, следует отметить, что метод параметрических функций есть метод построения линий регрессии уточненной (параметрической) оценки $\alpha^*_\lambda(x)$ на первоначальную оценку $\alpha^*(x)$.

С позиций байесовских алгоритмов метод параметрических функций по сути дела является аппроксимативным, причем для ряда случаев ошибка аппроксимации оказывается незначительной.

Метод параметрических функций может с успехом использоваться в качестве «внутреннего» алгоритма при использовании идей эволюционного моделирования [Л. 32].

Наиболее полно исследована возможность параметрической статистической обработки нестационарных случайных процессов, заданных одной реализацией.

Решение этой задачи позволяет сократить число дорогостоящих испытаний сложных объектов, увеличить оперативность обработки, упростить вычислительные системы, уменьшить затраты времени и средств на создание новых центров по обработке информации.

Следует отметить все расширяющийся фронт экспериментальных исследований, совершенствование средств вычислительной техники, разработку более эффективных методов прикладного анализа случайных процессов, к числу которых относятся и рассмотренные в книге аппроксимативные методы.

Дальнейшее развитие методов аппроксимации оценок характеристик случайных процессов может проходить в следующих направлениях:

завершение создания теории параметрической аппроксимации оценок характеристик случайных процессов;

разработка методов параметрической аппроксимации интервальных оценок;

разработка «гибридных» методов и, в частности, компенсационно-параметрического метода аппроксимации оценок характеристик случайных процессов;

создание алгоритмов статистического оценивания критериев эффективности больших систем на базе использования метода параметрических функций;

развитие метода параметрических функций на основе использования критериев оптимизации информационного типа (например, критерии Шеннона, Кульбака и др.);

учета информации относительно предельных значений оцениваемых параметров.

Последнее из указанных направлений представляется весьма перспективным. Сущность параметрического подхода к развитию этого направления покажем на примере использования мультипликативной оценки

$$\alpha^*_\lambda(x) = \lambda_{11}\alpha^*(x).$$

Будем полагать в дальнейшем, что первоначальная оценка $\alpha^*(x)$ является несмещенной, т. е. выполняется условие

$$M_x\alpha^*(x) = \alpha.$$

Выражение для средней квадратической ошибки можно представить в виде

$$R = M_x[\alpha - \lambda_{11}\alpha^*(x)]^2 =$$

$$= \lambda_{11}^2 M_x[\alpha^*(x)]^2 - 2\lambda_{11}\alpha^2 + \alpha^2 =$$

$$= \lambda_{11}^2 \cdot [\alpha^2 + D_x\alpha^*(x)] - 2\lambda_{11}\alpha^2 + \alpha^2.$$

Пусть дисперсия предварительной оценки линейно зависит от квадрата параметра α, т. е.

$$D_x\alpha^*(x) = a + b\alpha^2,$$

где a и b — некоторые коэффициенты.

В этом случае средняя квадратическая ошибка R примет вид:

$$R = A + B\alpha^2,$$

где

$$A = \lambda_{11}^2 a;$$

$$B = \lambda_{11}^2 b + (1 - \lambda_{11})^2.$$

Выбором значения параметрической функции λ_{11} можно получить для заданной области оцениваемого параметра

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\text{макс}}$$

более точную параметрическую оценку, т. е. такую оценку $\alpha_\lambda^*(x)$, для которой выполняется условие

$$R < D_x \alpha^*(x).$$

Действительно, пусть $b<0$, $a>0$. Предполагая, что величина $\alpha_{\text{макс}}$ известна, можно найти значение параметрической функции λ_{11} из условия

$$R(\alpha_{\text{макс}}) = D_x \alpha^*(x) \big|_{\alpha=\alpha_{\text{макс}}},$$

т. е.

$$A + B\alpha^2_{\text{макс}} = a + b\alpha^2_{\text{макс}}.$$

В последнем уравнении выразим коэффициенты A и B через параметрическую функцию λ_{11}

$$\lambda^2_{11} a + [\lambda^2_{11} b + (1-\lambda)^2_{11}]\,\alpha^2_{\text{макс}} = a + b\alpha^2_{\text{макс}},$$

откуда находим оптимальное значение

$$\lambda_{11} = \frac{\alpha^2_{\text{макс}} - \alpha^2_{\text{макс}} b - a}{\alpha_{\text{макс}} + \alpha^2_{\text{макс}} b + a}.$$

Кроме того, из условия $R \leqslant D_x \alpha^*(x)$, справедливого для любых значений α, в том числе и $\alpha=0$, вытекает $\lambda^2_{11} a \leqslant a$, откуда следует дополнительное ограничение

$$\lambda_{11} \leqslant 1.$$

В практических задачах часто встречается более простая ситуация, характеризуемая $b=0$, $a>0$. В этом случае параметрическая функция λ_{11} принимает вид:

$$\lambda_{11} = \frac{\alpha^2_{\text{макс}} - a}{\alpha^2_{\text{макс}} + a}.$$

Таким образом, дополнительная информация относительно предельного значения $\alpha_{\text{макс}}$ оцениваемого параметра α сравнительно просто может быть учтена с помощью параметрических функций. В результате повышается эффективность соответствующих оценок.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В исследованиях часто используются характеристики случайных процессов, являющихся преобразованиями (в общем случае нелинейными) некоторых других процессов.

Пусть $\alpha(t)$ — оцениваемая случайная функция; $\alpha^*(x)$ — некоторая оценка функции $\alpha(t)$, $x(t)$ — реализация исследуемого процесса.

Разность

$$\Delta(t)=\alpha(t)-\alpha^*(x)$$

представляет собой мгновенную ошибку.

Вторая начальная моментная функция процесса

$$\overline{R}=M_{x\alpha}[\Delta(t)]^2=M_{x\alpha}[\alpha(t)-\alpha^*(x)]^2$$

часто называется средней квадратической функцией риска или средним квадратом ошибки.

Раскрывая выражение для $\overline{R}$, получаем:

$$\overline{R}=M_{x\alpha}\alpha^2(t)-2M_{x\alpha}[\alpha(t)\alpha^*x]+M_{x\alpha}[\alpha^*(x)]^2=$$
$$=M_\alpha\alpha^2(t)+M_{x\alpha}[\alpha^*(x)]^2-2M_\alpha[\alpha(t)M_{x|\alpha}\alpha^*(x)].$$

Учитывая справедливость выражений

$$M_\alpha\alpha^2(t)=D_\alpha\alpha(t)+[M_\alpha\alpha(t)]^2;$$
$$M_{x\alpha}[\alpha^*(x)]^2=D_{x\alpha}\alpha^*(x)+[M_{x\alpha}\alpha^*(x)]^2;$$
$$M_\alpha[\alpha(t)M_{x|\alpha}\alpha^*(x)]=R_{\alpha\alpha^*}+\alpha^*(x)\overline{\alpha}(t),$$

где $R_{\alpha\alpha^*}$ — взаимная корреляционная функция процессов $\alpha(t)$ и $\alpha^*(x)$

$$\overline{\alpha}^*(x)=M_{x|\alpha}\alpha^*(x);\ \overline{\alpha}(t)=M_\alpha\alpha(t),$$

можно записать:

$$\overline{R}=D_\alpha\alpha(t)+[\overline{\alpha}(t)]^2+D_{x,\alpha}\alpha^*(x)+[\overline{\alpha}^*(x)]^2-2R_{\alpha\alpha^*}-$$
$$-2\overline{\alpha}^*(x)\overline{\alpha}(t)=D_\alpha\alpha(t)+D_{x,\alpha}\alpha^*(x)-2R_{\alpha\alpha^*}+[\overline{\alpha}(t)-\overline{\alpha}^*(x)]^2.$$

Поскольку ошибка смещения

$$\varepsilon_{\text{см}}(t)=M_{x\alpha}[\alpha(t)-\alpha^*(x)]=\overline{\alpha}(t)-\overline{\alpha}^*(x),$$

то окончательно

$$\overline{R}=D_{x\alpha}\alpha^*(x)+\varepsilon^2_{\text{см}}(t)+D_\alpha\alpha(t)-2R_{\alpha\alpha^*}. \tag{80}$$

Для детерминированных оцениваемых характеристик имеем:

$$\overline{R}=D_{x|\alpha}\alpha^*(x)+\varepsilon^2_{\text{см}}(t), \tag{81}$$

причем

$$\varepsilon_{\text{см}}(t)=\overline{\alpha}(t)-\overline{\alpha}^*(x).$$

Соотношение (80) можно представить в более компактной форме [по аналогии с (81)]

$$\overline{R}=D_{x\alpha}\Delta(t,x)+\varepsilon^2_{\text{см}}(t),$$

где

$$D_{x,\alpha}\Delta(t,x)=D_{x,\alpha}[\alpha(t)-\alpha^*(x)]=$$
$$=D_{x,\alpha}\alpha^*(x)+D_\alpha\alpha(t)-2R_{\alpha\alpha^*}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреев Н. И.** Корреляционная теория статистически оптимальных систем. М., «Наука», 1966.

2. **Балл Г. А.** К оценке погрешности, вызываемой непрерывным изменением времени задержки при измерении функции автокорреляции. — «Известия вузов. Радиотехника», 1962, т. 5, № 5.

3. **Балл Г. А.** Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов. М., «Энергия», 1968.

4. **Бунимович В. И.** Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М., «Советское радио», 1951.

5. **Воллернер Н. Ф., Балицкая В. Г., Дугин В. В.** Оценка амплитуды эхо-сигнала с учетом априорного распределения плотностей вероятностей его уровней. — «Известия вузов. Радиотехника», 1966, т. 9, № 3.

6. **Ватсон Г. Н.** Теория бесселевых функций. Пер. с англ. Под ред. В. С. Бермана. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

7. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.

8. **Гренандер У.** Случайные процессы и статистические выводы. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.

9. **Дискретная** измерительная корреляционная система (ДИКС). Новосибирск, «Наука», 1965, Авт: А. Н. Домарацкий и др.

10. **Karhunen K.** Über lineare Methodu in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.— «Ann. Acad. Sci. Fennical». Helsinki, 1947, AI, № 37.

11. **Котюк А. Ф., Ольшевский В. В.** Вопросы метрологии случайных процессов и полей. — Сборник докладов I Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л., ВНИИЭП, 1968.

12. **Крамер Г.** Математическая статистика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит, 1948.

13. **Ланге О.** Введение в экономическую кибернетику. Пер. с польского. М., «Прогресс», 1968.

14. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. Кн 2. М., «Советское радио», 1968.

15. **Мартин Т. А.** Труды института радиоинженеров. Пер. с англ., 1962, т. 50, № 12.

16. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.

17. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1966.

18. **Robbins H., Monro S.** A stochastic approximation method.— «Ann. Math. Statistics», 1951, v. 22, № 1.

19. **Романенко А. Ф., Сергеев Г. А.** Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М., «Советское радио», 1968.

20. **Романенко А. Ф., Черкай А. Д.** О решении задач оптимизации оценок характеристик случайных функций.— «Сборник докла-

дов III Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л., ВНИИЭП, 1970

21. **Романенко А. Ф., Черкай А. Д.** Параметрические методы анализа вибрационных процессов. — В кн.: Вибрационная техника. М., МДНТП, 1968.

22. **Романенко А. Ф., Черкай А. Д.** Многопараметрическая оптимизация оценок характеристик случайных процессов. — В кн.: «Вибрационная техника. М., МДНТП, 1969.

23. **Романенко А. Ф., Сергеев Г. А.** Статистический анализ физических полей с использованием средств вычислительной техники. — Сборник докладов II Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л., ВНИИЭП, 1969.

24. **Романенко А. Ф., Черкай А. Д.** Параметрическая оптимизация в задачах прогнозирования. — В кн.: Научно-техническое прогнозирование и экономика научных исследований. М., МДНТП, 1969.

25. **Романенко А. Ф., Черкай А. Д.** Об аппроксимации оптимальных оценок статистических характеристик случайных процессов. — В кн.: Вибрационная техника. М., МДНТП, 1970.

26. **Сергеев Г. А., Романенко А. Ф., Евграфов В. Г.** Вопросы моделирования элементов «человеко-машинного» комплекса. — В кн.: Системные исследования больших систем. М., МДНТП, 1968.

27. **Сергеев Г. А., Романенко А. Ф., Евграфов В. Г.** Вопросы моделирования и контроля функций человека-оператора. — В кн.: Большие информационно-управляющие системы. М., МДНТП, 1969.

28. **Сергеев Г. А., Павлова Л. П., Романенко А. Ф.** Статистические методы исследования электроэнцефалограммы человека. Л. «Наука», 1968.

29. **Смирнов Н. В., Белугин Д. А.** Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. М., «Недра», 1969.

30. **Синицын Б. С.** Автоматические корреляторы и их применение. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1964.

31. **Савчков В. К. Челпанов И. В.** К расчету нестационарных фильтров. — «Научно-технический информационный бюллетень ЛПИ им. М. И. Калинина», 1960, № 7.

32. **Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М.** Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. М., «Мир» 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Цена 91 коп.