Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД
А. П. ЮШКЕВИЧ

ОМАР ХАЙЯМ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД
А. П. ЮШКЕВИЧ

ОМАР ХАЙЯМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА · 1965

Поэт и ученый

В 1859 г. английский поэт Эдвард Фицджеральд опубликовал книгу стихов «Рубайят Омара Хайяма» [31], [44]. В книге было помещено около ста четверостиший, переведенных с персидского. Каждое четверостишие — «рубаи» — содержало законченную мысль, выраженную в чеканной художественной форме. Вначале Фицджеральд поместил стихи, воспевающие вино, наслаждения и радости жизни, затем — стихи, дышащие разочарованием в жизни, а в конце — проповедующие мистическую веру в бога. Перед читателем вставал образ восточного мудреца, в юности — любителя наслаждений, в зрелом возрасте — разочарованного скептика, в старости — религиозно настроенного мистика.

Перевод Фицджеральда, открывший персидского поэта европейскому читателю, сразу получил большую популярность. Английский поэт Теннисон назвал этот перевод «планетой, равной Солнцу, бросившему ее в пространство» [1]. Поэзия Омара Хайяма стала предметом большого числа исследований, причем одни исследователи видели в нем только гедониста, другие — только скептика, третьи — только мистика. В 1897 г. известный востоковед В. А. Жуковский в своей работе о Хайяме привел такой список различных, взаимно исключающих характеристик Хайяма, встречающихся к этому времени в литературе:

«Он вольнодумец, разрушитель веры; он безбожник и материалист; он насмешник над мистицизмом и пантеист; он правоверующий мусульманин, точный философ, острый наблюдатель, ученый; он — гуляка, развратник,

[1] A. Tennyson. To E. Fitzgerald. В кн.: Tiresias and other poems. London, 1885, стр. 3.

Омар Хайям. Миниатюра из рукописи Али Герави (1509 г.)

ханжа и лицемер. Он не просто богохульник, а воплощенное отрицание положительной религии и всякой нравственной веры, он мягкая натура, преданная более созерцанию божественных вещей, чем жизненным наслаждениям; он скептик-эпикуреец, он — персидский Абу-л-Ала, Вольтер, Гейне.

Можно ли, в самом деле, представить,— продолжает Жуковский,— человека, если только он не нравственный урод, в котором могли бы совмещаться и уживаться такая смесь и пестрота убеждений, противоположных склонностей и направлений, высоких доблестей и низменных страстей, мучительных сомнений и колебаний» [87, стр. 325].

За несколько лет до появления перевода Фицджеральда, в 1851 г. немецкий математик Франц Вёпке опубликовал в Париже книгу «Алгебра Омара Альхайями» [6], содержащую арабский текст и французский перевод алгебраического трактата почти неизвестного европейской науке средневекового математика. В трактате содержалась полная классификация кубических уравнений с положительными корнями и для каждого случая был приведен способ решения при помощи конических сечений.

Имя Хайяма появлялось в специальной литературе и ранее: о Хайяме-поэте упоминал еще в 1700 г. Томас Хайд в своей «Истории религии древних персов» [1], а алгебраический трактат Хайяма впервые был назван в Европе в 1742 г. в предисловии к книге по исчислению флюксий (т. е. по математическому анализу) Ж. Меермана [2]. По этому поводу Ж. Э. Монтюкла в своей известной «Истории математики», заметив, что арабы продвинулись в алгебре дальше квадратных уравнений, говорит, что в Лейдене имеется арабская рукопись, озаглавленная «Алгебра кубических уравнений» или «Решение телесных задач», и что автором ее является Омар бен-Ибрахим. «Таково, по крайней мере, заглавие, сообщаемое г. Меерманом в предисловии в его Specimen calculi fluxionalis; но, признаюсь, названия арабских книг, приводимые библиографами, по большей части столь искажены, что доверять этому предположению нельзя» [3]. Но подлинное изучение творчества этого замечательного поэта и математика началось только после публикаций Фицджеральда и Вёпке.

Вначале поэт Омар Хайям и математик Омар ал-Хайями рассматривались как разные люди. Например, в русском энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона в 42-м томе имеется статья «Омар Аль-Кайями» об ученом, а в 73-м томе — статья «Хейям или Омар Хейям» о поэте [4]. Однако вскоре выяснилось, что средневековые авторы, говоря о Хайяме, говорят о нем и как об авторе научных трактатов, и как об авторе четверостиший, причем обычно в персидских сочинениях автор именуется Омар

---

[1] T. Hyde. Religionis veterum Persanum historia. Oxoniae, 1700.

[2] J. Meerman. Specimen calculi fluxionalis. Lugduno-Bataviae, 1742.

[3] J. F. Montucla. Histoire des mathématiques, t. I. Paris, VII [1799], стр. 383.

[4] Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона, т. 42, СПб., 1897, стр. 927—928; т. 73, СПб., 1903, стр. 149—151.

Хайям, а в арабских Омар ал-Хайями. Нужно заметить, что сочетание автора научных трактатов и поэта в одном лице — не редкость на средневековом Востоке. Например, живший в X—XI вв. знаменитый врач и мыслитель Абу-Али ибн Сина (Авиценна) писал не только научные и философские трактаты, но и четверостишия, весьма близкие по стилю к стихам Хайяма. Сочинял четверостишия и выдающийся математик и астроном XIII в. Насир ад-Дин ат-Туси, многие труды которого написаны под сильным влиянием Хайяма.

Через полстолетия после публикаций Фицджеральда и Вёпке стали появляться и другие сочинения Хайяма, обнаруживающие новые черты ученого и поэта. В 1906 г. была издана часть физического трактата Хайяма об определении золота и серебра в состоящем из них теле [7]. В 1908 г. вышел перевод одного философского трактата Хайяма, написанного по-персидски [9], а в 1917 г. увидели свет еще три философских трактата Хайяма, написанных по-арабски [16]. Эти три трактата вместе с четвертым арабским философским трактатом и упомянутым выше персидским трактатом были опубликованы на языках оригинала в 1932 г. [18]. В 1933 г. появился на персидском языке исторический трактат Хайяма «Науруз-наме» об иранском празднике Нового года — Наурузе [19]. В 1936 г. были изданы на арабском языке чрезвычайно интересные «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» [20], посвященные двум важнейшим проблемам математики — теории параллельных линий и теории отношений, дальнейшее развитие которых впоследствии привело к первостепенным открытиям математиков Европы. И совсем недавно, в 1960—1961 гг. были опубликованы на арабском языке еще один алгебраический трактат Хайяма, посвященный тем же вопросам, что и трактат, изданный Вёпке [26, стр. 60—71, 282—292], и отрывок из астрономических таблиц Хайяма, содержащий каталог ста наиболее ярких звезд [3, стр. 177—179 арабск. текста]. Кроме того, сохранились сведения о произведенной под руководством Хайяма в 1079 г. реформе иранского солнечного календаря (на этот год и указаны координаты звезд в упомянутом каталоге) и о не обнаруженных до сих пор трактатах по арифметике, теории музыки, физике и географии. Имеются данные и о том, что Хайям занимался медициной.

Стихи Хайяма издавались много раз как по-персидски, так и в переводах на европейские языки. Дошедшие до нас рукописи содержат, как правило, наряду с совпадающими, и различные четверостишья. Многие четверостишья приписываются наряду с Хайямом и другим авторам, в частности упоминавшимся выше Ибн Сине и ат-Туси. В настоящее время известно более тысячи четверостиший, приписываемых Хайяму. Помимо персидских четверостиший, сохранилось несколько стихотворных отрывков — «кит'а» Хайяма на персидском и арабском языках. Все четверостишия и кит'а, приписываемые Хайяму, собраны в книге индийского исследователя Свами Говинды Тиртхи [136].

В настоящее время Хайям-поэт весьма популярен в обоих полушариях Земли.

В США и некоторых других странах поклонники его четверостиший, воспевающих вино и наслаждения, организуют «клубы хайямистов». По подписке среди почитателей Хайяма были собраны средства, на которые в 1934 г. был воздвигнут обелиск на его могиле в Нишапуре.

Чрезвычайно популярен Омар Хайям и в Советском Союзе. Таджики, язык которых так же, как современный персидский, развился на основе средневекового языка фарси, неоднократно издавали стихи Хайяма в переводе сначала на латинскую, а затем на русскую графику, которой пользуются в Таджикской ССР [76], [79], [81]. Четверостишия Хайяма много раз издавались в стихотворных переводах на языках различных народов Советского Союза. Великолепные по точности и художественности переводы принадлежат О. Румеру, Л. Некоре и И. Тхоржевскому [35], [36], [38]. В 1959 и 1961 гг. издательство Академии наук СССР выпустило новые издания четверостиший и десяти научных трактатов Хайяма с репродукциями рукописей и комментариями [42], [3].

Годы жизни Хайяма в разных сочинениях указаны по-разному. Во втором издании Большой Советской энциклопедии указано, что Хайям родился около 1040 г. и умер в 1123 г., в первом издании БСЭ указано только, что Хайям умер около 1123 г.[1] 1040 г. как год рождения Хайяма и 1123 г. как год его смерти указываются многими автора-

БСЭ, 1-е изд. . 59, М., 1935, стр. 388; БСЭ, 2-е изд., . 46, М., 1957, стр. 30.

ми [94, стр. 8 и 12], [79, стр. 6 и 16], [82, стр. 3] [1]. С другой стороны, историк Фазлаллах Рашид ад-Дин, живший в XIII—XIV вв., считает Хайяма ровесником везира Низам ал-Мулка (1017—1092). При таком разнообразии мнений мы оставались бы в совершенной неизвестности, если бы не сохранился гороскоп Хайяма, приведенный лично знавшим Хайяма историком Абу-л-Хасаном ал-Байхаки (1106—1174), в его книге «Дополнение к „Охранителям мудрости“». Гороскопы, естественно, не могут внушать доверия в части предсказаний, но точное указание в гороскопе расположения светил в день рождения лица, для которого составляется гороскоп, является важным документом для установления этой даты. Ал-Байхаки пишет, что «его [Хайяма] гороскопом были Близнецы; Солнце и Меркурий были в 3-м градусе Близнецов, Меркурий был в соединении [с Солнцем], а Юпитер был по отношению к ним обоим в тригональном аспекте» [136, стр. 32—33]. Этот гороскоп фиксировал положение Солнца, Меркурия и Юпитера в день рождения Хайяма. Мы не знаем, составлен ли этот гороскоп при рождении Хайяма или вычислен позднее, но несомненно, что он стал известен ал-Байхаки от самого Хайяма. Тот факт, что Солнце в этот день находилось в 3-м градусе Близнецов, дает возможность определить число и месяц, когда родился Хайям: Солнце во время своего видимого годового оборота проходит каждое из 12 созвездий Зодиака за месяц, а за сутки передвигается примерно на 1°, так как число дней в году близко к числу градусов окружности. В день весеннего равноденствия Солнце вступает в созвездие Овна, через месяц — в созвездие Тельца, а еще через месяц — в созвездие Близнецов. Поэтому день рождения Хайяма позже дня весеннего равноденствия на 2 месяца и 3 дня, т. е. на 63 дня. Так как день весеннего равноденствия в XI в., когда родился Хайям, приходился на 14—16 марта, день рождения Хайяма должен быть 17—19 мая. Год рождения и более точную дату можно установить по Меркурию и Юпитеру: Меркурий, как сказано в гороскопе, был в соединении с Солнцем, т. е. его геоцентрическая долгота должна быть близка к 63°; геоцентрическая долгота Юпитера, находящегося по отношению к Солнцу в «тригональном аспекте»,

---

[1] Эти же даты приведены в большинстве советских изданий четверостиший Хайяма.

должна отличаться от 63° на величину, близкую к трети окружности, т. е. она должна быть близка к 183° или 303° Такое сочетание планет имело место только 18 мая 1048 г., когда геоцентрические долготы Солнца, Меркурия и Юпитера были соответственно равны 63°, 59° и 305° Этот подсчет впервые выполнил индийский исследователь Свами Говинда Тиртха, издавший в 1941 г. книгу о Хайяме, в которой собрал почти все приписываемые Хайяму четверостишия, несколько философских трактатов и большое число биографических подробностей, сообщаемых средневековыми историками. В своем подсчете Говинда пользовался средневековыми индийскими таблицами движений планет. Подсчет Говинды был проверен советским астрономом Ш. Г. Шараф (см. [3, стр. 18—19]).

Расположение Солнца, Меркурия и Юпитера, указанное в гороскопе Хайяма, схематически изображено на стр. 12.

Согласно большинству источников, Хайям родился в том же городе Нишапуре, где, как сказано, находится его могила. Ал-Байхаки писал, что Хайям «был из Нишапура и по рождению и по предкам» [136, стр. 32—33]. В ряде рукописей к имени Хайяма прибавлялось Нишапури (по-персидски) или ан-Найсабури (по-арабски).

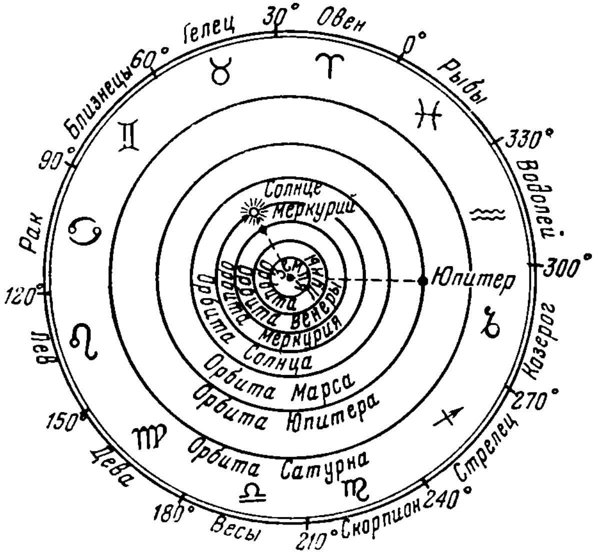
Как мы увидим в XII главе, наиболее вероятно, что Хайям скончался в 1131 г.

Приведем список всех научных сочинений Хайяма, которые сохранились полностью или частично или о которых нам известно из средневековых источников.

1. Проблемы арифметики (Мушкилат ал-хисаб) — арифметический трактат. Рукописи не найдены, упоминается Хайямом в алгебраическом трактате [3, стр. 74].

2. Алгебраический трактат без названия. Рукопись в Тегеране (Центральная библиотека университета, № VII, 1751/2). Впервые опубликован Г. Х. Мосахебом [26], русский перевод — в XV выпуске «Историко-математических исследований» [5, стр. 445—472].

3. Трактат о доказательствах задач алгебры и алмукабалы (Рисала фи-л-барахин ала масаил ал-джабр ва-л-мукабала) — алгебраический трактат. Рукописи в Париже (Национальная библиотека, Arabe 2461 и 2458/7), Лейдене (Университетская библиотека, Cod. or. 14/2), Лондоне (Библиотека Индийского ведомства, № 734/10), Риме (Ватиканская библиотека, Barb. 96/2) и Нью-Йорке



Гороскоп Хайяма

(библиотека проф. Д. Ю. Смита). Впервые опубликован Ф. Вёпке [6], русский перевод — в «Трактатах» [3, стр. 69—112].

4. Комментарии к трудностям «Книги о музыке» (Шарх ал-мушкил мин китаб ал-мусика). Рукописи не найдены, упоминается Хайямом в геометрическом трактате [3, стр. 143].

5. Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида (Шарх ма ашкала мин мусадарат китаб Уклидас) — геометрический трактат. Рукописи в Лейдене (Университетская библиотека, Cod. or. 199/8) и Париже (Национальная библиотека, Arabe 4946/4). Впервые опубликован Т. Эрани [20], русский перевод в «Трактатах» [3, стр. 113—146].

6. Краткое о естествознании (Мухтасар фи-т-таби’ият) — физический трактат. Рукописи не найдены, упомянут ал-Байхаки [136, стр. 32—33].

7. Весы мудростей (Мизан ал-хикам), вошел в состав «Книги о весах мудрости» (Китаб мизан ал-хикма) Абд ар-Рахмана ал-Хазини [23], рукопись которой находится

в Ленинграде (Публичная библиотека им. М. Е. Салтыкова-Щедрина, фонд Ханыкова, № 117), Хайдерабаде (Государственная библиотека, № 125) и в Бомбее (университетская библиотека). Отдельная рукопись — в г. Гота (Государственная библиотека, № 1158/9). Впервые опубликован Э. Видеманом [7]), русский перевод — в «Трактатах» [3, стр. 147—151]

8. Необходимое о местах (Лавазим ал-амкина) — географический трактат. Рукописи не найдены, упомянут Татави [87, стр. 337—338].

9. Трактат о бытии и долженствовании (Рисалат ал-каун ва-т-таклиф) — философский трактат. Рукопись находилась в Каире (библиотека Нур ад-Дина Мустафы), ныне утеряна. Впервые опубликована в «Собрании уникумов» [16], русский перевод — в «Трактатах» [3, стр. 152—159].

10. Ответ на три вопроса (Ал джаваб ан салас масаил) — философский трактат. Рукопись находилась в Каире (библиотека Нур ад-Дина Мустафы), ныне утеряна. Впервые опубликована в «Собрании уникумов», русский перевод — в «Трактатах» [3, стр. 160—166].

11. Свет разума о предмете всеобщей науки (Ад-дия ал-акли фи мауду ал-илм ал-кулли) — философский трактат. Рукопись находилась в Каире (библиотека Нур ад-Дина Мустафы), ныне утеряна. Впервые опубликована в «Собрании уникумов», русский перевод — в «Трактатах» [3, стр. 167—171].

12. Трактат о существовании (Рисала фи-л-вуджуд) — философский трактат. Рукописи в Берлине (Государственная библиотека, Ms. or. Petermann II, № 466 и Ms. or. II, № 258/35), Тегеране (библиотека Меджлиса, № 9014) и Пуне (библиотека проф. Абдулкадира Саффараза), русский перевод — в «Трактатах» [3, стр. 172—179].

13. Awakeкшахские астрономические таблицы (Зидж-и Awakeкшахи). Упоминаются Хаджи Халифой[1]. Сохранился заимствованный из этих таблиц каталог 100 неподвижных звезд на I год «эры Малики», впервые опубликованный с русским переводом в «Трактатах» [3, стр. 225—235].

---

[1] См.: Haji Khalfa. Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum, t. III. Leipzig, 1842, стр. 570.

14. Трактат о всеобщности существования (Рисала фи куллият ал-вуджуд) — философский трактат. Рукописи — в Лондоне (Британский музей, Or. 6572), Париже (Национальная библиотека, Suppl. persan № 139/7), Тегеране (библиотека Меджлиса, № 9072, и библиотека им. Хайяма). Впервые опубликована А. Кристенсеном [9], русский перевод — в «Трактатах» [3, стр. 180—186].

15. Книга о празднике нового года (Науруз-наме) — исторический трактат. Рукописи в Берлине (Государственная библиотека, Cod. or. 8° № 2450) и Лондоне (Add. № 23568). Впервые опубликована А. Минови [19], русский перевод — в «Трактатах» [3, стр. 187—224].

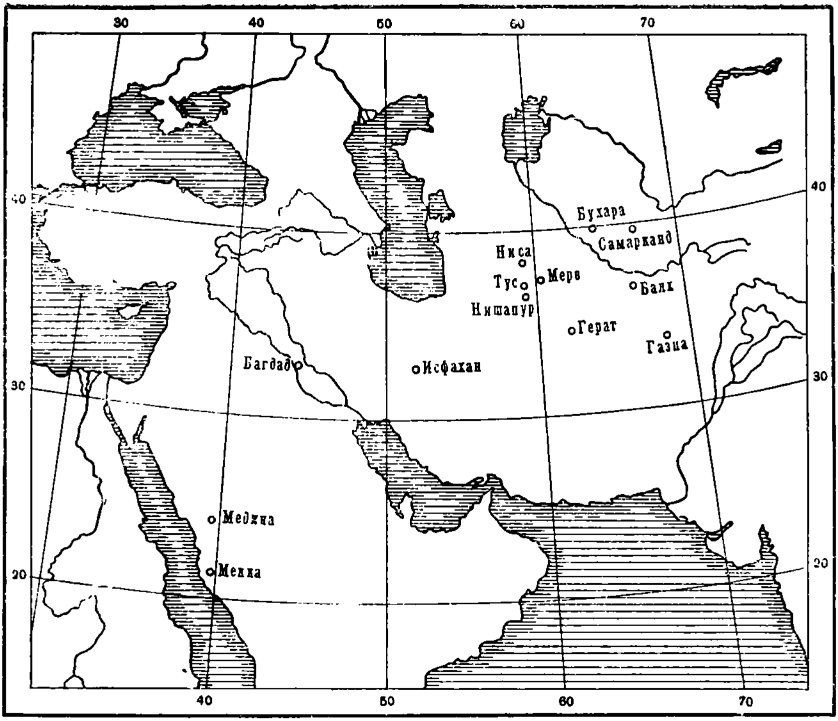
ГЛАВА ВТОРАЯ

Хорасан

Город Нишапур, в котором Хайям родился и умер, существует и в настоящее время. Это один из городов провинции Хорасан на северо-востоке Ирана, к югу от Копетдагского хребта, отделяющего Иран от Туркменской ССР. Нишапур находится в 90 километрах к западу от Мешхеда — главного города иранского Хорасана.

Во времена Хайяма Хорасаном называлась значительно бо́льшая область, охватывающая, кроме нынешнего иранского Хорасана, основную часть современной Туркмении, примыкающую к Копетдагскому хребту с севера, а также часть нынешнего Афганистана; в этом отношении иранский Хорасан подобен таким иранским провинциям, как Азербайджан и Ирак, составляющим, собственно, только те части Азербайджана и Ирака, которые в силу ряда исторических причин вошли в состав иранского государства и отделены границей, соответственно, от Азербайджанской ССР и Иракской республики. Важнейшими городами Хорасана в средние века были Тус (ныне Фирдоус, вблизи Мешхеда) и Нишапур (на территории Ирана), Ниса (вблизи нынешнего Ашхабада) и Мерв (ныне Мары) на территории Туркменской ССР, Герат и Балх (на территории Афганистана; см. карту на стр. 16).

В древности Хорасан составлял ядро парфянского государства. Парфяне, о которых Пушкин писал: «Узнаю парфян кичливых по высоким клобукам»,— народ, родственный современным персам и таджикам,— обладали в древности высокой культурой. Парфия входила в состав древнеперсидского царства Ахеменидов и вместе с ним была покорена в 330 г. до н. э. Александром Македонским. После распадения империи Александра Парфия вошла в сирийское царство Селевкидов. В середине III в. до н. э.



Карта географических пунктов, связанных с Хайямом

Парфия вновь становится независимым царством во главе с Аршаком, основателем династии Аршакидов (256 г. до н. э.— 226 г. н. э.). Парфянское царство, столицей которого была Ниса, становится одним из самых могущественных государств в Азии, простирающимся от Инда до Кавказа. Расцвету этого государства способствовало то, что оно находилось на «великом шелковом пути» из Китая в Рим. В I в. до н. э. начинается многолетняя война Парфии с Римом. Вначале римская армия вторглась далеко в глубь страны, но вскоре была уничтожена парфянами, впоследствии война с Римом велась с переменным успехом. В 226 г. н. э. обессиленное войнами с Римом парфянское царство было покорено среднеперсидским царством Сасанидов. Государственной религией в этом царстве был зороастризм, основание которого приписывается Зороастру (Заратуштре), якобы жившему в VII в. до н. э. Зороастризм объяснял все происходящее в мире борьбой между божеством света Ормуздом и божеством тьмы Ариманом, характерной особенностью этой религии было поклонение Солнцу и огню.

В 636 г. Хорасан вместе со всем царством Сасанидов был завоеван арабами и вошел в состав созданной ими мусульманской теократической империи — халифата. Мусульманская религия — ислам (что значит «покорность») была основана пророком Мухаммедом (571—632), преемниками которого считались халифы (халиф по-арабски обозначает «преемник»). В руках халифов первоначально была сосредоточена не только духовная, но и светская власть. Столицей халифата с 661 г. был Дамаск, а затем ею стал основанный в 762 г. Багдад.

В 705—715 гг. арабы завоевывают область между Аму-Дарьей и Сыр-Дарьей с городами Самаркандом и Бухарой. После завоевания эта область получает название Мавераннахр (от арабских слов ма вара-н-нахр — «то, что за рекой»). Мавераннахр вместе с Хорасаном объединяется в наместничество с центром в Мерве. В начале IX в. наместником Хорасана был Ма'мун, сын халифа Харуна ар-Рашида. Его полководец Тахир ибн Хусейн (775—822), уроженец Герата, способствовал победе Ма'муна в его междуусобной войне с братом Амином и в 813 г., взяв Багдад, возвел Ма'муна на престол. В 821 г. Ма'мун назначает Тахира наместником Хорасана. Вскоре Тахир превращает Хорасан в самостоятельное феодальное государство и принимает титул эмира (по-арабски — «повелевающий»). Столицей нового эмирата становится Нишапур. Потомки Тахира, так называемые Тахириды, управляют Хорасаном до его захвата в 874 г. Якубом ибн Лейсом, по прозвищу Саффар («медник»), основателем династии Саффаридов, правившей до 900 г.

В конце IX в. в Мавераннахре возникает феодальное государство Саманидов, возглавляемое потомками Самана из Балха. Исмаил Саманид, который в 874 г. становится правителем Бухары, в 888 г. захватывает весь Мавераннахр, а в 900 г. и Хорасан. Столицей государства Саманидов, существовавшего до 999 г., была Бухара. В эпоху Саманидов литературным языком Мавераннахра и Хорасана становится средневековый персидский язык, называемый фарси, или дари, на основе которого, как было сказано, развились современные персидский и таджикский языки.

Создателями языка фарси были знаменитые поэты Абу-л-Хасан Рудаки (ум. в 941 г.), Абу Мансур Дакики (ум. в 977 г.) и Абу-л-Касим Фирдоуси (ок. 935—1020). Дакики начал, а Фирдоуси завершил классическую «Шах-наме» («Книга царей»), где рассказывается о судьбах царей и героев древнего Ирана и Средней Азии.

В 945 г. после захвата Багдада иранским феодалом Фаннахосровом, принадлежавшим к династии Буидов, или Бувейхидов, т. е. потомков Бувейха, багдадские халифы окончательно теряют светскую власть. За ними сохраняется только духовное руководство религиозной жизнью мусульман. Захват Багдада монгольскими ханами в 1258 г. повлек за собой присвоение титула халифа сперва правителями Египта, а затем Оттоманской империи.

Монгольское нашествие было крупнейшим, но не единственным из нашествий кочевников из азиатских степей, опустошавших культурные страны Ближнего и Среднего Востока. Кочевники, принадлежавшие к различным тюркским племенам, родственным половцам южно-русских степей, появляются на границах государства Саманидов еще в X в. Саманиды пытаются бороться с ними с помощью гвардии, набранной из тюркских же племен. Тюркский гвардеец Сабуктегин становится одним из главных полководцев Саманидов, а его сын Махмуд (ум. в 1030 г.) — наместником Хорасана. В 999 г. Мавераннахр с Бухарой и Самаркандом захватывают кочевники Караханиды, а Махмуд основывает огромный султанат, включающий и Хорасан. Столицей империи становится Газна в Афганистане, вследствие чего султана Махмуда и его потомков именуют Газневидами.

В начале XI в. в Хорасане появляются тюркские кочевники из племени сельджуков, называемого по имени родоначальника из племени Сельджука, так же как появившиеся позднее тюркские племена османов и узбеков, предки современных народов Турции и Узбекистана, назывались по имени ханов Османа и Узбека. В 1040 г. под Мервом предводитель сельджуков Тогрул-бек (ум. в 1063 г.) разбил войска султана Мас'уда Газневида, сына Махмуда, и взял Мас'уда в плен. Империя Газневидов распадается, и Тогрул-бек провозглашается эмиром Хорасана.

Вскоре после завоевания Хорасана сельджуки овладевают Хорезмом, северным и западным Ираном и Азербайджаном. В 1055 г. они захватывают столицу арабского халифата Багдад, и их полководец Тогрул-бек получает титул султана.

Наивысшего расцвета государство сельджуков достигло при племяннике Тогрул-бека султане Алп-Арслане (1033—1072) и сыне последнего, султане Джалал ад-Дпне Малик-шахе (1054—1092). В это время власть сельджукских султанов распространяется на огромную территорию от Китая до Средиземного моря, от Кавказа до Йемена. Столицей при Алп-Арслане был Мерв, Малик-шах перенес ее в Исфахан (центральный Иран).

Везиром (премьер-министром) при Алп-Арслане и Малик-шахе был Низам ал-Мулк (1017—1092). Низам ал-Мулк стремился к укреплению централизованного феодального государства, пытался упорядочить экономику страны, ввести в некоторые правовые рамки эксплуатацию народа феодалами. При нем государство несколько оправилось от тяжких хозяйственных потрясений. Низам ал-Мулк понимал значение культуры и просвещения для хозяйства и могущества государства, покровительствовал ученым и открывал учебные заведения, в том числе знаменитую академию «Низамийя» в Багдаде.

Борьба Низам ал-Мулка с феодалами за укрепление централизованного государства, как и многие другие общественные движения в средние века, приобрела религиозную окраску. Низам ал-Мулк был сторонником ортодоксального ислама — суннизма, иранские феодалы использовали в своих интересах оппозиционное направление в исламе — шиизм. Первоначально сунниты (от арабского слова сунна — «предание», имеется в виду устное предание о делах и высказываниях Мухаммеда) были сторонниками династии халифов Омейядов, убивших в 661 г. последнего из непосредственных преемников Мухаммеда, халифа Али ибн Аби Талиба, а шииты (от арабского слова ши'а — «партия», имеется в виду «партия Али») были сторонниками свергнутой династии халифов. Шиизм получил распространение главным образом в Иране и находился под сильным влиянием господствовавшей здесь до арабского завоевания религии зороастризма. На шиитов в значительной степени опирались халифы Аббасиды, свергшие в 750 г. Омейядов.

И сунниты, и шииты во времена Хайяма подразделялись на большое число сект, из которых следует отметить шиитскую секту исмаилитов, прозванную по имени

Исмаила (ум. в 762 г.), одного из потомков халифа Али, с которым члены секты связывали мессианские чаяния. Движение исмаилитов или карматов (называемые так по имени одного из основателей секты, Карматуйе) возникло как антифеодальное движение крестьян, облеченное в форму религиозной ереси. На идеологию карматов существенное влияние оказало учение зороастрийского жреца Маздака (ум. в 529 г.), проповедовавшего общность имущества. С ранним исмаилизмом были связаны народные восстания против арабских завоевателей Муканны в Мавераннахре (775—783 гг.) и Бабека в Азербайджане (816—838 гг.). Впоследствии руководство исмаилитским движением было захвачено иранскими феодалами, и к середине XI в. исмаилиты превратились в своеобразное теократическое государство. Армия, или, лучше сказать, орден преданных главе государства террористов — «фидаи», боролась всеми средствами против сельджукских султанов, багдадских халифов и европейских крестоносцев. Исмаилиты этой эпохи известны под названием «ассасины», от персидского слова хашишин — «любители хашиша», так как считалось, что глава секты опьянял своих юных приверженцев этим наркотиком. В состоянии опьянения фидаи чувствовали себя, как в раю, а затем, «удостоенные предвкушения райских радостей», они выполняли самые опасные задания, стремясь скорее попасть в рай. Столицей ассасинов была горная крепость Аламут («Орлиное гнездо») в северном Иране. Первым главой государства был Хасан Саббах, ранее служивший при дворе Малик-шаха, а впоследствии ставший злейшим врагом этого государя и его везира — Низам ал-Мулка. Именно ассасин, переодетый дервишем, убил Низам ал-Мулка. Есть подозрение, что и Малик-шах был отравлен ассасинами. Ассасины наводили ужас на все страны Ближнего и Среднего Востока, пока не были чуть не поголовно истреблены монголами во второй половине XIII в. Термин «ассасины» был принесен крестоносцами в Европу и сохранился до сих пор в ряде европейских языков в смысле «убийца».

Во времена Хайяма большинство населения Хорасана еще говорило на языке фарси. На этом языке написаны четверостишия и некоторые трактаты Хайяма. Но уже при Хайяме тюркское население Хорасана играло все большую роль. Впоследствии первоначальное население

Хорасана смешалось с тюркскими кочевниками и образовало основную часть туркменского народа, живущего в Туркменской ССР, в иранском Хорасане и примыкающих к нему провинциях Ирана. Туркмены, говорящие на тюркском языке, сохранили ряд особенностей древних жителей Хорасана, например в одежде (любовь к высоким шапкам — «клобукам»). Другая часть потомков древних жителей Хорасана вошла в состав близких к ним по языку иранского, таджикского, а также афганского народов.

Как мы видим, Хорасан был своеобразным котлом, где варились элементы многих культур — парфянской и персидской, греческой и римской, арабской и тюркской.

Мы не имеем сведений о культуре и науке Хорасана до арабского завоевания. Арабские завоеватели уничтожили все книги, написанные на местных языках, и истребили множество образованных людей. О захвате соседнего с Хорасаном Хорезма арабским полководцем Кутейбой хорезмийский ученый X—XI вв. ал-Бируни писал: «И уничтожил Кутейба людей, которые хорошо знали хорезмийскую письменность, ведали их предания и обучали [наукам], существовавшим у хорезмийцев, и подверг их всяким терзаниям, и стали [эти предания] столь скрытыми, что нельзя уже узнать в точности, что [было с хорезмийцами] после возникновения ислама» [1].

Однако наука в странах, покоренных арабами, не была уничтожена полностью. Отдельные ученые уцелели, им на смену приходили новые. В первые века после арабского завоевания наука в странах ислама развивалась только на арабском языке, игравшем здесь ту же роль международного языка ученых, что и греческий язык в эллинистических государствах, образовавшихся после походов Александра Македонского, и латынь в средневековой Европе. Но возникшая таким образом наука стран ислама впитала в себя традиции, сложившиеся издавна на их территориях. Многие классические труды ученых эллинистической эпохи — Евклида, Архимеда, Аполлония, Птолемея были переведены на арабский язык, как и сочинения Аристотеля и других философов. На арабский язык переводится сирийская, персидская и индийская литература — как ученые труды, так и народный эпос.

---

[1] **Абу Рейхан Бируни.** Памятники минувших поколений. Избранные произведения, т. 1. Перевод М. А. Салье. Ташкент, 1957, стр. 46.

В VIII в. центром науки стран ислама становится Багдад, где при дворе халифа Ма'муна организуется большая научная школа. Здесь встретились уроженцы Средней Азии и Хорасана, составлявшие большинство багдадской школы, с сабиями — потомками вавилонских жрецов-звездопоклонников (центром сабиев был город Харран в Месопотамии), персами из процветавшей при Сасанидах академии в Гундишапуре, и учеными из сирийских христианских монастырей.

К багдадским ученым из Средней Азии и Хорасана относились хорезмиец Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми (ок. 780 — ок. 850), уроженец Ферганской долины Ахмед ал-Фергани, уроженец хорасанского города Мерва Ахмед ал-Марвази (ок. 770 — ок. 870) и их современник, уроженец Туркестана Абд ал-Хамид ибн Турк ал-Хуттали. Ал-Хорезми, именовавшийся также ал-Маджуси, происходил из семьи «магов» — жрецов зороастрийской религии, в руках которых находилась наука в Иране и Средней Азии в доисламские времена. Ал-Хорезми был автором арифметического трактата, по которому ученые стран ислама, а затем и Европы познакомились с десятичной позиционной системой счисления, изобретенной индийцами, основоположного алгебраического труда[1], астрономических таблиц — так называемых «Ал-Ма'муновых астрономических таблиц» — и сочинения по географии. Ал-Фергани и ал-Марвази также были авторами астрономических трактатов и таблиц. Ал-Хуттали, наряду с ал-Хорезми, составил одно из двух древнейших сочинений по алгебре.

Одновременно с ал-Хорезми в Багдаде работал врач из Гундишапура Джибраил ибн Бахтишу (ум. в 829 г.) и уроженец Басры философ Якуб ал-Кинди (ум. в 877 г.). Родом из сабиев был Сабит ибн Корра ал-Харрани (836—901), который перевел с греческого на арабский основные труды Архимеда и Аполлония и «Алмагест» Птолемея и был автором многих трактатов по геометрии, арифметике, астрономии и механике. «Механику» Герона и «Арифметику» Диофанта перевел сирийский христианин Коста ибн Лука ал-Ба'лабакки из Баалбека (Гелиополиса).

Начиная с X в. мы встречаем ученых уже не только в Багдаде. Знаменитый философ Абу Наср ал-Фараби

[1] Русский перевод: Мухаммед ал-Хорезми. Математические трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда и Ю. Х. Копелевич. Ташкент, 1964.

(880—950) из Фараба па Сыр-Дарье, работал в Дамаске. Но в конце X в. Абу-л-Вафа ал-Бузджани (940—998) из Бузгана близ Нишапура — снова в Багдаде, при дворе буидского султана Шараф ад-Даула. Абу-л-Вафа был одним из крупнейших астрономов и математиков своего времени, он был автором астрономического сочинения «Алмагест» — обработки одноименного классического сочинения Птолемея, книги по вопросам арифметики, важным для чиновников и купцов, и трактата о геометрических построениях, необходимых для ремесленников.

В конце IX и начале X в. в Каире живет Абу Камил ал-Мисри (ум. ок. 930), автор алгебраического труда, развивавшего идеи ал-Хорезми. В Каире же в конце X и начале XI в. работает уроженец Басры Абу Али ибн Хайсам (Альгазен) (965—1039) — знаменитый оптик, астроном и математик, автор «Книги оптики», комментариев к Евклиду и многих математических и астрономических трактатов. «Книга оптики» была широко распространена в средневековой Европе под названием «Opticae thesaurus» («Сокровище оптики»).

В это же время в Рее, Исфахане и Газне работает уроженец хорасанского города Нисы ан-Насави (ум. ок. 1030), автор арифметического трактата[1], а в Хорезме, Горгане и Газне работает уроженец хорезмского города Кята Абу-р-Рейхан ал-Бируни (973 — ок. 1050), один из крупнейших астрономов средневековья, автор «Канона Мас'уда по астрономии и звездам», написанного в Газне при дворе султана Мас'уда и посвященного астрономии, математике и математической географии, а также многих трудов по астрономии и другим наукам вплоть до минералогии и фармакогнозии[2]. В начале XI в. в Бухаре, Хорезме, Рее и Хамадане расцветало творчество уже

---

[1] См.: Абу-л-Хасан ан-Насави. Достаточное об индийской арифметике. Перевод М. И. Медового. «Историко-матем. исследования», вып. 15. М., 1963, стр. 381—430.

[2] На русский язык переведены следующие сочинения ал-Бируни: Памятники минувших поколений — см. сноску на стр. 21; Индия; в кн.: Избранные произведения, т. II, перевод А. Б. Халидова и Ю. П. Завадовского. Ташкент, 1963; Минералогия, перевод А. М. Беленицкого. М., 1963; Трактат об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в него, перевод С. А. Красновой и Л. А. Карповой; Книга об индийских рашиках, перевод Б. А. Розенфельда, в сб. «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. 3. М., 1963, стр. 93—167.

упоминавшегося Абу Али ибн Сины из Бухары (980—1077), крупнейшего врача и философа средневековья, автора «Канона медицины» и нескольких энциклопедических трактатов, в которых изложены философия («метафизика»), физика, химия, ботаника, зоология, геология, минералогия, геометрия, арифметика, астрономия и теория музыки. Самый большой энциклопедический трактат Ибн Сины называется «Китаб аш-шифа» — «Книга исцеления» (подразумевается: исцеления души от невежества). Имелись два более кратких сводных труда Ибн Сины — «Китаб ан-наджат» — «Книга спасения» на арабском языке и «Даниш-наме» — «Книга знания» на персидском языке. Эти две книги весьма близки по содержанию и охватывают тот же круг вопросов, что и «Книга исцеления». «Канон медицины», «Книга исцеления» и «Книга спасения» были широко распространены в средневековой Европе в латинских переводах под сокращенными названиями «Canon», «Sanatio» и «Liberatio». Ибн Сине принадлежит также большое число трактатов по различным отраслям знания [1].

Ан-Насави, ал-Бируни и Ибн Сина были ближайшими предшественниками Хайяма. Первые двое попали ко двору султана Махмуда. Ал-Бируни участвовал в походе Махмуда в Индию, прожил там много лет и написал большую книгу о науке индийцев. Ибн Сина, который находился в Хорезме вместе с ал-Бируни во время взятия Хорезма Махмудом, бежал в Иран через пустыню, чтобы не служить у Махмуда.

Из этих трех ученых дожил до разгрома империи Газневидов сельджуками только ал-Бируни, который провел последнее десятилетие своей жизни в небольшом княжестве, оставшемся у Маудуда, сына Мас'уда, от империи отца.

На русский язык переведены «Канон медицины» и «Книга знания» Ибн Сины: Ибн Сина. Канон врачебной науки, т. I—V, перевод М. А. Салье и др. Ташкент, 1954—1960; Даниш-намэ — Книга знания, перевод А. М. Богоутдинова, [Душанбе], 1957.

Г Л А В А Т Р Е Т Ь Я

Молодые годы

Хайям родился в эпоху, когда Хорасан был центральной областью быстро растущей империи сельджукских султанов.

Имя Хайяма, которое, как мы указывали, в разных рукописях приводится несколько по-разному, в наиболее полной форме таково: Гияс ад-Дин Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям (ал-Хайями) Нишапури (ан-Найсабури); Омар — личное имя Хайяма, ибн Ибрахим — значит «сын Ибрахима»; Абу-л-Фатх — «отец Фатха» — подобного рода прибавление к имени, не обязательно обозначающее, что Омар Хайям имел сына Фатха, было общепринято на средневековом Востоке, Гияс ад-Дин («помощь веры») — почетное прозвище, полученное ученым впоследствии. Об имени «Нишапури», указывающем о происхождении Хайяма из Нишапура, уже говорилось. Наконец, «Хайям» буквально означает «палаточный мастер», от слова «хайма» — палатка, от этого же слова происходит старорусское «хамовник», т. е. «текстильщик», сохранявшееся до недавнего времени в названии одного района Москвы. По-видимому, это имя указывает на профессию отца или предков Хайяма, который намекает на значение своего имени в следующем четверостишии:

Палаток мудрости нашивший без числа,
В горнило мук унав, сгорел Хайям дотла,
Пресеклась жизни нить, и пепел за бесценок
Надежда, старая торговка, продала.

[*36, № 298, стр. 87*]

Из полного имени Хайяма видно, что отца его звали Ибрахим и он, видимо, происходил из рода ремесленников.

Средневековые источники обычно именуют Хайяма «имамом» — духовным вождем, «ходжой» — учителем и «Доказательством истины» (худжжат ал-хакк) — с этими именами мы встретимся ниже, в сообщении Низами Самарканди [1].

О молодых годах Хайяма почти нет сведений. Историк Фазлаллах Рашид ад-Дин (1247—1318) в своей исторической хронике «Собрание летописей» сообщает следующую легенду о детских годах Хайяма, везира Низам ал-Мулка и главы исмаилитов Хасана Саббаха, которого он называет его исмаилитским титулом «наш повелитель»: ««Наш повелитель», Омар Хайям и Низам ал-Мулк вместе учились у учителя в Нишапуре. По обычаю детских лет, как и полагается мальчикам, они соблюдали правила дружбы и преданности и придерживались их до такой степени, что, выпив крови друг друга, поклялись, что если кто-нибудь из них достигнет высокой степени и величественного положения, то будет покровительствовать и помогать другим. Случилось, что Низам ал-Мулк, как известно из истории сельджуков, достиг степени везира. Омар Хайям явился к нему и напомнил о клятвах и договорах дней детства... Низам ал-Мулк, признав старое право, сказал: «Управление Нишапуром и его округой принадлежит тебе». Омар, бывший великим ученым, досточтимым и мудрым, сказал: «Я не думаю о власти, приказаниях и запрещениях народу. Лучше прикажи ежегодно выдавать мне жалованье». Низам ал-Мулк назначил ему десять тысяч динаров из дохода Нишапура, которые платил ему каждый год без уменьшения» [107].

Легенда эта неправдоподобна, так как Хайям родился в 1048 г., а Низам ал-Мулк в 1017 г. Против нее говорит и то, что такой крупный историк, как Ибн ал-Асир (1160—1232), уделявший много внимания и Низам ал-Мулку, и Хасану Саббаху, нигде не упоминает о том, что они были школьными товарищами. Эта легенда свидетельствует лишь о том, что в памяти летописцев Хайям остался человеком, лишенным властолюбия, и что его имя связывалось с именем покровительствовавшего ему Низам ал-Мулка.

В отличие от Рашид ад-Дина, по свидетельству которого Хайям учился в Нишапуре, писатель XV в. Яр-Ахмед

---

[1] См. стр. 168 и 171.

Табризи в сочинении «Дом радости» указывает, что в «ранней юности он [Хайям] жил в Балхе» и только «в конце жизни — в Нишапуре». Табризи же сообщает, что «свое первое образование он [Хайям] получил у главы ученых и исследователей по имени Насир ал-милла ва-д-Дин шейх Мухаммед-и Мансур» (о котором мы не имеем никаких сведений) и что «в семнадцать лет он достиг глубоких знаний во всех областях философии» [136, стр. 70—71].

Что изучал Хайям в годы своего учения? Прежде всего в средневековых мусульманских школах штудировали священную книгу мусульман — Коран. О том, как хорошо знал Хайям эту книгу, видно из следующего рассказа ал-Байхаки:

«Рассказывают, что однажды имам Омар пришел к везиру Шихаб ал-Исламу Абд ар-Раззаку, сыну досточтимого богослова Абу-л-Касима Абдаллаха ибн Али, племяннику Низама. У него был имам чтецов [Корана] Абу-л-Хасан ал-Газзал. Они говорили о разночтении в каком-то стихе [Корана]. Тогда Шихаб ал-Ислам сказал: «Обратимся к знающему», и спросил об этом имама Омара. Тот указал виды различий в чтении и недостатки каждого из них, упомянул противоречивые места и их недостатки, а затем предпочел один вид другим видам. Тогда имам чтецов Абу-л-Хасан ал-Газзал сказал: «Да умножит Аллах подобных тебе среди ученых, сделай меня твоим слугой и будь благосклонен ко мне, ибо я не думаю, чтобы хоть один из чтецов в мире помнил бы это наизусть и знал это, кроме одного мудреца» [136, стр. 32—33].

Так как Шихаб ал-Ислам, племянник Низам ал-Мулка, был везиром при дворе султана Санджара в 1117—1123 гг., мы видим, что Хайям сохранял великолепную память и, в частности, хорошее знание Корана даже на склоне лет. Знал он его, несомненно, с детства, так как в зрелые годы, интенсивно занимаясь наукой и сочиняя крамольные стихи, он вряд ли занимался столь прилежным изучением этой книги. О превосходной памяти Хайяма ал-Байхаки рассказывает: «Однажды в Исфахане он [Хайям] внимательно прочел одну книгу семь раз подряд и запомнил ее наизусть, а возвратившись в Нишапур, он продиктовал ее, и когда сравнили это с подлинником, между ними не нашли большой разницы» [136, стр. 32—33].

Основы наук Хайям мог изучать по кратким энциклопедическим трактатам Ибн Сины — «Книга спасения» и «Книга знания».

Вероятно, изучив краткие трактаты Ибн Сины, Хайям перешел к его «Книге исцеления», а затем — к первоисточникам — «Органону» и «Метафизике» Аристотеля, «Началам» Евклида, «Алмагесту» Птолемея, «Измерению круга» и «Двум книгам о шаре и цилиндре» Архимеда, «Коническим сечениям» Аполлония. Все эти сочинения, как говорилось, были переведены на арабский язык еще в IX—X вв., и ко временам Хайяма имелся уже целый ряд изложений «Начал» Евклида и «Алмагеста» с комментариями и переработок этих сочинений.

Несомненно, что наряду с изучением математиков древности Хайям знакомился с трудами своих более близких предшественников в странах Ближнего и Среднего Востока и прежде всего с алгебраическим трактатом ал-Хорезми и арифметическим трактатом ан-Насави.

Ал-Байхаки характеризует Хайяма как «знатока языковедения, мусульманского права и истории» и называет Хайяма «последователем Абу Али [Ибн Сины] в различных областях философских наук» [136, стр. 32—33]. Географ Закария ал-Казвини в своем космографическом трактате «Памятники городов и известия о рабах божьих» говорит о Хайяме, что «он был мудрец, человек сведущий во всех областях философии, особенно же в математике» [87, стр. 335].

К окончанию учения относится, вероятно, первый опыт самостоятельной научной работы Хайяма, посвященный извлечению корня $\sqrt[n]{N}$, любой целой положительной степени n из целого положительного числа N.

Об этом Хайям говорил в своем алгебраическом трактате: «У индийцев имеются методы нахождения сторон квадратов и ребер кубов, основанные на небольшом последовательном подборе и на знании квадратов девяти цифр, т. е. квадрата одного, двух, трех и т. д., а также произведений одной из них на другую, т. е. произведения двух на три и т. д. Нам принадлежит трактат о доказательстве правильности этих методов и того, что они действительно приводят к цели. Кроме того, мы увеличили число видов, т. е. мы показали, как определять основания квадрато-квадратов, квадрато-кубов, кубо-кубов и так далее сколько угодно, чего раньше не было. Доказательства, которые я даю по этому вопросу,— числовые доказательства, основанные на числовых книгах «Стихий»» [3, стр. 74—75].

Сведения о «методах индийцев» Хайям заимствовал, по-видимому, у ан-Насави, который в своем трактате «Достаточное об индийской арифметике» [1] излагает приемы извлечения квадратных и кубических корней. «Стихии» (у Хайяма «Истиксат») — искаженное греческое название «Начал» Евклида Stoicheia (буквально «стихии, элементы»). Числовые книги «Начал» — это VII—IX книги сочинения Евклида, посвященные изложению арифметики древних греков.

Трактат Хайяма до нас не дошел, но в сборнике математических рукописей, хранящемся в Лейденской библиотеке, в оглавлении, содержащем перечень не только рукописей, которые имеются в сборнике, но и тех, которые переписчик предполагал в него включить, значится трактат Хайяма «Проблемы арифметики», который, по-видимому, и является арифметическим трудом, упомянутым в его сочинении по алгебре [134, стр. 112].

О содержании этого трактата с большой долей вероятности можно судить по арифметическому трактату Насир ад-Дина ат-Туси (1201—1274), который, как упоминалось, был хорошо знаком с творчеством Хайяма и во многом развивал его идеи. Трактат ат-Туси называется «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли» и посвящен арифметическим действиям на вычислительной доске, покрытой пылью. Цифры писались на этой доске заостренной палочкой, а использованные в ходе действия и более ненужные цифры стирались. Содержание части трактата ат-Туси, посвященной арифметике целых чисел, очень близко к содержанию арифметического трактата ан-Насави. Разница главным образом состоит в том, что если ан-Насави приводил правила извлечения только квадратных и кубических корней, ат-Туси приводил правила извлечения корней любой степени [2]. Так же, как у ан-Насави, правило ат-Туси по существу совпадает с методом решения

---

[1] См. сноску на стр. 23.

[2] См.: Насир ад-Дин ат-Туси. Сборник по арифметике с помощью доски и пыли. Перевод С. А. Ахмедова и Б. А. Розенфельда, примечания С. А. Ахмедова, «Историко-матем. исследования», вып. 15. М., 1963, стр. 431—444.

уравнений, называсмым в Европе «методом Руффини-Горнера» в применении к решению двучленных уравнений $x^n = a$, где n — натуральное число. Этот метод для извлечения квадратных и кубических корней внервые был применен в древнекитайской «Математике в девяти книгах», написанной во II—I вв. до н. э.; возможно, что ан-Насави познакомился с этим правилом через индийцев. Но ан-Насави скорее всего называет «индийской арифметикой» любые вычисления в десятичной позиционной системе с помощью «индийских цифр», а правила извлечения квадратных и кубических корней ему могли быть известны без посредства индийцев. Помимо правила извлечения корней, ат-Туси приводит в словесном выражении правило разложения натуральной степени двучлена $(a+b)^n$, обычно называемое теперь «формулой бинома Ньютона». Эта формула применяется им для приближенного выражения дробной части корня из целого числа: если подкоренное выражение равно $a^n + b$, где $b < (a+1)^n - a^n$, то ат-Туси записывает приближенное выражение корня в виде $a' + \dfrac{b}{(a+1)^n - a^n}$ и вычисляет знаменатель дробной части корня по формуле бинома. В связи с этим ат-Туси приводит таблицу биномиальных коэффициентов до $n = 12$:

Показатель квадрата .											2
Показатель куба .										3	3
Показатель квадрато - квадрата .									4	6	4
Показатель квадрато - куба .								5	10	10	5
Показатель кубо - куба .							6	15	20	15	6
Показатель квадрато - квадрато - куба .						7	21	35	35	21	7
Показатель квадрата кубо - куба . .					8	28	56	70	56	28	8
Показатель кубо - кубо - куба .				9	36	84	126	126	84	36	9
Показатель квадрато - квадрато - кубо - куба			10	45	120	210	252	210	120	45	10
Показатель квадрато - кубо - кубо - куба		11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
Показатель кубо - кубо - кубо - куба	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12

Ат-Туси подробно описывает структуру таблицы и приводит аддитивное правило последовательного вычисления коэффициентов, соответствующее нашей формуле

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

Ат-Туси не претендует на открытие этих правил и несомненно, что они принадлежат одному из его предшественников. Возможно, что не только правило извлечения корней любой степени, но и формула бинома для натурального n были впервые открыты молодым Хайямом в его первом трактате, но пока рукопись «Проблем арифметики» не найдена, этот вопрос, разумеется, нельзя решать окончательно.

Позднее мы находим тот же способ извлечения корней и таблицу биномиальных коэффициентов до $n = 9$ в «Ключе арифметики» Джемшида Гияс ад-Дина ал-Каши (1427) [1]. В Европе извлечение корней, основанное на разложении бинома, было описано для показателей до 8-й степени П. Апианом в 1527 г. и в более общей форме М. Штифелем в 1544 г., который дал таблицу чисел, названных им биномиальными, до $n = 17$. Мультипликативное правило образования этих чисел подметил первым, или одним из первых, Г. Бриггс (опубл. в 1633 г.). Б. Паскаль в «Трактате об арифметическом треугольнике» (опубл. посмертно в 1665 г.) впервые исследовал свойства биномиальных чисел теоретически. Наконец, бессмертной заслугой Ньютона явилось распространение разложения $(a + b)^n$ на случай любого действительного показателя (ок. 1670 г.).

---

[1] Джемшид ал-Каши. Ключ арифметики. Трактат об окружности. Перевод Б. А. Розенфельда под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, комментарии А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда. М., 1956.

Изгнание

Годы учения Хайяма сменились годами учительства, бедствий и странствий. Из его стихов

> Ученью не один мы посвятили год,
> Потом других учить пришел и нам черед.
>
> [*36, № 291, стр. 85*]

можно, по-видимому, заключить, что Хайям стал учителем. Преподавание не могло ни материально обеспечить Хайяма, ни дать ему досуг для занятий наукой. В эти времена ученый, не будучи человеком состоятельным, мог регулярно заниматься наукой только при дворе того или иного правителя, занимая одну из четырех должностей — секретаря (дабира), поэта, астролога или врача. «Дабир, поэт, астролог и врач,— писал Низами Арузи Самарканди (1110—1155) в «Собрании редкостей»,— суть ближние люди царя, и обойтись без них ему невозможно. На дабире — крепость правления, на поэте — вечная слава, на астрологе — благое устроение дел, на враче — здоровье телесное» [96, стр. 36]. Судьба ученого в этом случае в значительной степени зависела от милости или немилости правителя, его нрава и капризов, от придворных интриг и дворцовых переворотов. Но наиболее тяжелым бичом этой эпохи были жестокие войны, приводившие к опустошению целых городов и стран. Положение ученого в это время и собственные невзгоды Хайям ярко характеризует во введении к своему алгебраическому трактату, жалуясь, что в течение многих лет он не мог заниматься наукой: «Я был лишен возможности систематически заниматься этим делом и даже не мог сосредоточиться на размышлении о нем из-за мешавших мне превратностей судьбы. Мы были свидетелями гибели ученых, от которых осталась малочисленная, но многострадальная кучка людей. Суровости судьбы в эти времена препятствуют им всецело отдаться совершенствованию и углублению своей науки. Большая часть из тех, кто в настоящее время имеет вид ученых, одевают истину ложью, не выходя в науке за пределы подделки и притворяясь знающими. Тот запас знаний, которым они обладают, они используют лишь для низменных плотских целей. И если они встречают человека, отличающегося тем, что он ищет истину и любит правду, старается отвергнуть ложь и лицемерие и отказаться от хвастовства и обмана, они делают его предметом своего презрения и насмешек» [3, стр. 70].

Невзгоды, которые пришлось испытать Хайяму, несомненно, усугублялись тем, что его молодость совпала с первыми годами сельджукского завоевания. Может быть, в связи с этим ему пришлось покинуть Хорасан. Во всяком случае дальнейшие сведения о Хайяме приводят нас в Мавераннахр, управлявшийся Караханидами, которые стали вассалами сельджукских султанов только в 70-х годах XI в.

Мы уже говорили, что кочевники Караханиды захватили Мавераннахр в 999 г. Столицей Караханидов, принявших титул хаканов, стала сначала Бухара, а позже Самарканд. В 1042—1067 гг. хаканом был Ибрахим Тамгач-хан, в 1067—1079 гг,— его сын Шамс ал-Мулук Наср. При жизни султана Алп-Арслана Караханиды находились с ним в состоянии почти постоянной войны, затихавшей во время победоносных походов султана на западе (один из них закончился пленением византийского императора Романа Диогена) и разгоравшейся снова, когда он возвращался на восток. В 1072 г. Алп-Арслан во главе своей армии переправился через Аму-Дарью и погиб в одном из первых сражений против Шамс ал-Мулука. Но вскоре Шамс ал-Мулук был вынужден признать себя вассалом нового султана Малик-шаха. По-видимому, в это время одна из сельджукских принцесс была выдана замуж за Шамс ал-Мулука, а Малик-шах взял себе в жены племянницу Шамс ал-Мулука Туркан-хатун.

После смерти Шамс ал-Мулука, в 1079 г., отстранив его сына Махмуда, трон хакана захватил брат Шамс ал-Мулука Хизр-хан, а после смерти последнего в 1080 г. хаканом стал его сын Ахмед-хан. Ахмед-хан, царствовавший в 1080—1095 гг., перенес столицу в Самарканд и пытался вновь добиться независимости. В борьбе против сельджуков Ахмед-хан опирался на те же силы, которые повсюду боролись против централизованного государства,— на местных феодалов. Мусульманское духовенство, напротив, поддерживало Малик-шаха. В ходе войны Ахмед-хан был взят в плен и, по некоторым сведениям, казнен. В 1095 г. хаканом стал сын Шамс ал-Мулука Махмуд.

Во введении к алгебраическому трактату, после рассказа о своих бедствиях, Хайям пишет, что получил возможность написать эту книгу только благодаря покровительству «славного и несравненного господина, судьи судей имама господина Абу Тахира». «Его присутствие,— пишет Хайям,— расширило мою грудь, его общество возвысило мою славу, мое дело выросло от его света и моя спина укрепилась от его щедрот и благодеяний. Благодаря моему приближению к его высокой резиденции я почувствовал себя обязанным восполнить то, что я потерял из-за превратностей судьбы, и кратко изложить то, что я изучил до мозга костей из философских вопросов. И я начал с перечисления этих видов алгебраических предложений, так как математические науки более всего заслуживают предпочтения» [3, стр. 70]. Историк Ибн ал-Асир один раз упоминает о судье по имени Абу Тахир. Это главный судья города Самарканда Абу Тахир Абд ар-Рахман ибн Алак (1039—1091). Ибн ал-Асир указывает, что в 482 г. хиджры (1089 г. н. э.) главный судья Самарканда Абу Тахир жаловался султану Малик-шаху на Ахмед-хана и просил защиты от него [1]. По-видимому, Абу Тахир, бывший одним из наиболее авторитетных представителей самаркандского духовенства, играл существенную роль в подавлении сельджуками движения местных феодалов, возглавлявшегося Ахмед-ханом.

Слова Хайяма подтверждают его материальную зависимость от покровительства знатных господ: только оно обеспечивало условия для его научной работы.

Введение Хайяма к алгебраическому трактату дает повод считать, что основная часть этого трактата была написана в Самарканде. Первая попытка Хайяма написать алгебраический трактат относится, впрочем, к более раннему времени.

---

[1] Ibn el-Athirus. Chronicon quod perfectissime inscribitur, t. 10. Leiden, 1894, стр. 113.

Первым дошедшим до нас сочинением Хайяма является, как мы указывали, небольшой алгебраический трактат, рукопись которого хранится в библиотеке Тегеранского университета. Рукопись не имеет заглавия, в начале ее сказано только: «Этот трактат — Абу-л-Фатха Омара ибн Ибрахима ал-Хайями» [5, стр. 445]. В этом сочинении Хайям, между прочим, выражает намерение составить более полный «правильный трактат» по алгебре, которым, очевидно, и явился «Трактат о доказательствах задач алгебры и алмукабалы».

В конце трактата Хайям говорит: «Если бы не благородство собрания, да будет это благородство вечным, и не достоинство спрашивающего, да сделает аллах вечной свою поддержку ему, я был бы в большом отдалении от этого, так как мое внимание ограничено тем, что для меня важнее этих примеров и на что расходуются все мои силы» [5, стр. 461]. Неизвестно, перед каким «благородным собранием» выступал Хайям, и кто был «достойный спрашивающий», руководивший этим собранием. Может быть, этим «спрашивающим» и был тот Абу Тахир, который предоставил Хайяму возможность написать «Трактат о доказательствах», может быть, напротив, «благородное собрание» не оценило молодого ученого и, прежде чем он попал к Абу Тахиру, прошло еще много времени. Не к этому ли выступлению Хайяма и, в частности, к его характеристике тех, кто «хвастлив, тщеславен и бессилен» [5, стр. 450], относится жалоба в «Трактате о доказательствах» на «тех, кто в настоящее время имеет вид ученых» и, встречая «человека, отличающегося тем, что он ищет истину и любит правду», «делают его предметом своего презрения и насмешек»? [3, стр. 70].

После Абу Тахира Хайям пользовался покровительством бухарского хакана Шамс ал-Мулука, а после 1074 г.— самого султана Малик-шаха. Об этом сообщает ал-Байхаки, в рассказе которого о Хайяме говорится, что «султан Малик-шах назначал его, Хайяма, своим надимом, а бухарский хакан Шамс ал-Мулук крайне возвеличивал его и сажал имама Омара с собой на свой трон» [136, стр. 32—33]. Надимом при дворе сельджукских султанов назывался ближайший приближенный султана, являвшийся и постоянным собеседником его и телохранителем. Весьма вероятно, что ко двору Шамс ал-Мулука Хайям был представлен Абу Тахиром. Сообщение, что хакан сажал

Хайяма с собой на трон, скорее всего является преувеличением, так же, как и то, что Хайям был надимом Малик-шаха, однако покровительство со стороны Шамс ал-Мулука не вызывает сомнений, так же, как засвидетельствованное многими источниками покровительство Хайяму со стороны султана Малик-шаха и его везира Низам ал-Мулка.

О пребывании Хайяма в Бухаре рассказывает и Табризи: «Я слышал еще, что когда ученый [Хайям] соблаговолил прибыть в Бухару, через несколько дней после прибытия он посетил могилу весьма ученого автора «Собрания правильного», да освятит аллах его душу. Когда он дошел до могилы, ученого осенило вдохновение, и он двенадцать дней и ночей блуждал по пустыне и не произносил ничего, кроме четверостишия:

Хоть послушание я нарушал, господь,
Хоть пыль греха с лица я не стирал, господь,
Пощады все же жду: ведь я ни разу в жизни
Двойным единое не называл, господь.»

[*136, стр. 70—71*],
[*35, № 81, стр. 229*]

«Собрание правильного» — философское сочинение бухарского ученого X в. Мухаммеда ал-Бухари.

Через пять лет после окончания основной части алгебраического трактата Хайям, получив сведения об алгебраическом трактате одного из своих непосредственных предшественников Абу-л-Джуда Мухаммеда ибн ал-Лейса, написал к ней дополнение [3, стр. 109—112]. Это дополнение было составлено в Бухаре при дворе Шамс ал-Мулука или уже в Исфахане при дворе Малик-шаха, куда Хайям был приглашен в 1074 г. Поэтому основная часть алгебраического трактата была написана около 1069 г.— несколько раньше, если Хайям написал дополнение в Бухаре, и несколько позже, если он написал его в Исфахане.

ГЛАВА ПЯТАЯ

Алгебра

Современная алгебра далеко переросла границы, которые еще сто с небольшим лет назад отделяли алгебру как учение об алгебраических многочленах

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \quad + a_{n-1}x + a_n$$

(где a_k — любые числа) от других математических дисциплин. Но в течение почти четырех тысячелетий алгебра развивалась именно как теория таких многочленов и центральное место в ней занимало решение уравнений

$$P_n(x) = 0,$$

начиная с линейных, т. е. первой степени, и постепенно переходя к квадратным, кубическим, а затем и к уравнениям произвольно высокой степени. В ходе разработки алгебры многочленов создано было и алгебраическое исчисление, основанное на применении буквенных или иных символических обозначений для данных и искомых величин; из потребностей той же алгебры многочленов, в первую очередь, выросла во второй половине XVIII в. и особенно в XIX в. теория групп и полей. В настоящее время алгебра многочленов $P_n(x)$ образует лишь один из отделов алгебраической науки — отдел, весьма важный в практическом отношении, но в теоретическом отношении по существу завершенный.

Решать задачи, выражающиеся уравнением первой степени с одним неизвестным, умели еще в древнем Египте за двадцать столетий до нашей эры. Тогда же в древнем Вавилоне решали и задачи, выражающиеся системами таких уравнений с несколькими — немногими — неизвестными. Вавилонские ученые пошли и дальше.

Они создали приемы решения задач, которые мы записываем в виде систем

$$(\mathrm{I})\ x+y=p,\quad xy=q \text{ и } (\mathrm{II})\ x-y=p,\ xy=q.$$

Для этого использовалось тождество

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy,$$

которое сводит дело в обоих случаях к отысканию двух величин x, y по их известным сумме и разности. По правилам, известным ныне каждому школьнику, вавилоняне решали также квадратные уравнения

$$(\mathrm{III})\ x^2+px=q \text{ и } (\mathrm{IV})\ x^2-px=q.$$

Эти два типа уравнений, в которых коэффициенты p, q считаются положительными, имеют каждое один положительный корень и один отрицательный; но отрицательных чисел вавилоняне не знали. В случае, когда старший член входит с коэффициентом a, отличным от единицы, обе части уравнения умножали на a и сперва находили значение ax. Уравнение

$$(\mathrm{V})\ x^2+q=px,$$

которое имеет либо два положительных (различных или совпадающих) корня, либо вовсе не имеет действительных корней, в вавилонских текстах пока не обнаружено. Впрочем, система (I) равносильна уравнению (V).

Вавилоняне решали и отдельные задачи, приводящиеся к кубическим уравнениям, вроде

$$x^3+x^2=252.$$

Условия подбирались так, чтобы решение выражалось небольшим целым числом (в данном случае $x=6$), для отыскания которого путем подбора могли использоваться таблицы значений суммы n^3+n^2.

Уравнения, их решения и применяемые преобразования записывали словесно, без применения символов величин (кроме своеобразных клинописных цифр). Коэффициенты уравнений были всегда рациональными.

Древние греки внесли в учение о квадратных уравнениях новую идею, создав геометрические методы решения нескольких канонических задач, выражающихся такими уравнениями, называемые теперь геометрической алгеброй. В ней роль нашего действительного числа, рационального или иррационального, играли прямолинейные отрезки, а произведение изображалось в виде прямоугольника, в частности квадрата. Простейшие требуемые алгебраические преобразования выражались с помощью преобразования одних прямоугольных площадей в другие, а уравнению соответствовало равенство между некоторы-

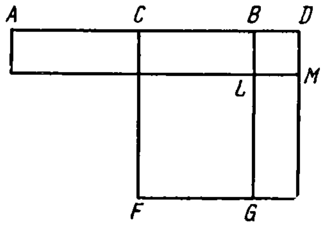


Рис. 1. Решение уравнения $x^2 + px = q$ с помощью геометрической алгебры

ми площадями. Естественно, что при этом все члены уравнения должны быть второго измерения, подчиняясь «принципу однородности».

Вот как, для примера, выражалась и решалась задача, соответствующая нашему уравнению

$$x^2 + px = q^2$$

(такую задачу при $p=q$ приходится решать при построении стороны правильного вписанного в круг радиуса p десятиугольника и x тогда равен $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,p$).

На отрезке $AB = p$ (рис. 1) требуется построить прямоугольник AM, равный данному квадрату q^2 так, чтобы избыточная над прямоугольником AL площадь BM была квадратом x^2; при этом прямоугольник $AM = (p+x)x = q^2$. Предположив задачу решенной, AB делили пополам в C, на LM строили прямоугольник MG, равный LC. Тогда прямоугольник AM будет разностью квадратов DF и LF. Так как эта разность q^2 и квадрат $LF = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ известны, то по теореме Пифагора можно получить квадрат DF, после чего найдутся $DC = \frac{p}{2} + x$ и $BC = x$. Эти построения (так называемые «приложения площадей») соответствуют, в переводе на язык алгебры, преобразованиям

$$q^2 = px + x^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2},$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2} - \frac{p}{2}.$$

В геометрической алгебре речь шла о построении некоторого отрезка, удовлетворяющего условию задачи, а не о вычислении корня уравнения. Но греки, конечно, превосходно знали связь между «приложением площадей» и правилом решения квадратного уравнения.

Мы находим у греков и задачи, приводящиеся к уравнениям третьей степени. Так, задача об удвоении куба, известная еще под названием «делосской» (в связи с легендой об оракуле храма на о. Делосе, предложившем удвоить объем кубического алтаря, не меняя его формы), равносильна чистому кубическому уравнению. В самом деле, если объем данного куба есть a^3, то для нового куба, с искомой стороной x, получается $x^3 = 2a^3$. Нетрудно решить чистое квадратное уравнение или, что то же, преобразовать прямоугольник ab в квадрат x^2:

$$x^2 = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

для построения x достаточно теоремы Пифагора. Но требуемое уравнением $x^3 = 2a^3$ преобразование параллелепипеда в куб (и извлечение $\sqrt[3]{2}$) не выполнимо с помощью «приложения площадей» и вообще построений, пользующихся исключительно прямыми и окружностями,— единственными линиями, применяемыми в элементарной геометрии. Греки этого не знали (это окончательно выяснилось только в прошлом веке), но все попытки их в этом направлении были обречены на неудачу. В результате им пришлось выйти за пределы средств, доставляемых элементарной геометрией.

Известно, что построение стороны квадрата, равновеликого данному прямоугольнику ($x^2 = ab$), легко приводится к построению средней пропорциональной, удовлетворяющей пропорции $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Мы указали выше, что построить

x можно с помощью теоремы Пифагора; это же можно выполнить с помощью окружности и прямой, построив в круге диаметра $a+b$ полухорду, перпендикулярную к диаметру и делящую его на части a и b. Математик с о. Хиоса Гиппократ, живший около 420 г. до н. э., показал, что задача о построении стороны куба, равновеликого данному

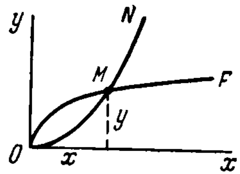


Рис. 2. Решение уравнения $x^3 = 2a^3$ с помощью двух парабол

прямому параллелепипеду a^2b, приводится к нахождению двух средних пропорциональных x, y между величинами a, b (удвоение куба — частный случай этой задачи при $b = 2a$). В самом деле, если мы определим x, y пропорциями

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

то найдем, что

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx,$$

откуда $x^4 = a^2bx$ и $x^3 = a^2b$. Среди различных решений, предложенных античными учеными, для нас представляет особый интерес то, которое приписывается Менехму (около 360 г. до н. э.), применившему конические сечения, именно: параболу и гиперболу. Комментатор VI в. н. э. Эвтокий сообщает, что Менехм нашел две средние пропорциональные как отрезки-полухорды точек пересечения некоторых двух парабол или параболы и равносторонней гиперболы [1]. В современных обозначениях речь шла о следующем. Если в прямоугольной системе координат (рис. 2) построить параболы OMN, OMP с уравнениями

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx,$$

[1] См.: А р х и м е д. Сочинения. Перевод, статья и комментарии И. Н. Веселовского. Изд-во «Наука», М., 1964, стр. 470—471.

то абсцисса и ордината y их общей точки M, отличной от вершин, будут одновременно удовлетворять обоим написанным уравнениям, а следовательно, пропорциям $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, так что $x^3=a^2b$.

Другой чрезвычайно важной задачей, сводящейся к кубическому уравнению, была трисекция угла, т. е. деление данного произвольного угла на три равных части. С помощью циркуля и линейки это можно сделать только в исключительных случаях. Для построения трети заданного угла античные математики применяли новые средства — квадратрису Гиппия, конхоиду Никомеда и др. Впрочем, они не привели эту проблему к кубическому уравнению, что удалось только ученым стран ислама.

Большую роль сыграла задача Архимеда о делении шара данного радиуса r плоскостью на два сегмента, объемы которых находятся в данном отношении $m:n(m>n)$. Эта задача рассмотрена в IV предложении 11 книги его сочинения «О шаре и цилиндре» [1] где выражена пропорцией, которую мы, обозначив высоту большего сегмента x, можем записать в виде

$$(1) \qquad (2r)^2 : x^2 = (3r - x) : \frac{mr}{m+n}.$$

Рассматриваемый вопрос является частным случаем другой более общей задачи: разделить данный отрезок a на части x и $a-x$ так, чтобы имела место пропорция

$$(2) \qquad S : x^2 = (a-x) : b,$$

где b — еще один данный отрезок, а S — данная площадь. Обобщенная задача не всегда разрешима, т. е. соответствующее кубическое уравнение не всегда имеет положительные корни. Подробное исследование Архимед обещал дать в конце сочинения, но ни в одном из его списков, известных еще со II в. до н. э., оно не сохранилось. Лишь в VI в. комментатор Архимеда Евтокий обнаружил в одной старинной рукописи отрывок, содержавший это исследование или его изложение [2].

Искомый отрезок x Архимед строит, как абсциссу общей точки параболы

$$y = \frac{x^2}{p}$$

---

[1] Архимед. Сочинения, стр. 150.

[2] Там же, стр. 484.

и гиперболы

$$y = \frac{bc}{a-x},$$

где c, p связаны условием $cp = S$. Для исследования условий возможности задачи, причем принимаются во внимание только положительные решения, так что $0 < x < a$, пропорция (2) выражается в виде уравнения

$$x^2(a-x) = bS = bcp. \tag{3}$$

Задача, очевидно, разрешима, т. е. уравнение (3) имеет положительное решение $0 < x < a$, если его правая часть, т. е. bS, не превосходит наибольшего значения, принимаемого левой частью, т. е. выражением $x^2(a-x)$. Пользуясь свойствами параболы и равносторонней гиперболы и касательных к ним, Архимед нашел, что такое наибольшее значение достигается при $x = \frac{2}{3}a$, и равно $\frac{4}{27}a^3$. Таким образом, положительное решение — точнее говоря, два положительных решения $0 < x_1 < \frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}a < x_2 < a$ уравнения (3) — существуют при условии

$$bS \leqslant \frac{4}{27}a^3 \tag{4}$$

и если, в частности $bS = \frac{4}{27}a^3$, то решения совпадают (корень $x_{1,2} = \frac{2}{3}a$ — двойной). При этом ветви параболы и гиперболы в первой четверти координатной плоскости, вообще говоря, пересекаются в двух точках, а в упомянутом частном случае встречаются в одной точке с общей касательной в ней.

В задаче о делении шара $a = 3r$, $S = (2r)^2$, $b = \frac{mr}{m+n}$ и $\frac{m}{m+n}4r^3 < 4r^3$, так что пропорция (1) всегда имеет положительное решение $x_1 < 2r$; второе решение, большее $2r$, заведомо не подходит для задачи Архимеда и лишнее.

Задача Архимеда была самостоятельно решена еще двумя греческими учеными — Дионисодором ок. 230 г. до н. э., также употребившим равностороннюю гиперболу и параболу, и Диоклом ок. 180 г. до н. э., применившим равностороннюю гиперболу и эллипс.

Исследование кубического уравнения вида

$$x^3 + r = px^2 \tag{5}$$

явилось выдающимся достижением греческой математики и, прежде всего, Архимеда. Однако дальнейшего развития учение об уравнениях третьей степени в Греции не получило. В отличие от квадратных уравнений, кубические не были здесь подвергнуты сколько-нибудь систематической разработке. Не были выделены основные типы задач, приводящихся к кубическим уравнениям. Мы не можем даже сказать, что было усмотрено то общее, чтó присуще важнейшим таким задачам, кроме разве того, что их, как и некоторые другие сложные вопросы, приходится решать с помощью тех или иных неэлементарных средств — то с помощью конических сечений, то конхоиды, или квадратрисы и т. п. Напомним, что задача о трисекции угла не была охарактеризована алгебраически, как сводимая к уравнению третьей степени. Вместе с тем задаче Архимеда суждено было сыграть тысячу лет спустя роль одного из первых стимулов к возрождению интереса к дальнейшим алгебраическим изысканиям, причем античный геометрический метод получил новые широкие применения.

Первый трактат по алгебре на арабском языке написал, по-видимому ок. 830 г., Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми. Его «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы» стала отправным пунктом дальнейшего прогресса алгебры как в странах ислама, так и в Европе, где широкое распространение получили ее латинские переводы, сделанные в XII в. Робертом Честерским и Гергардом Кремонским. Вопрос об источниках ал-Хорезми во многом еще не ясен, а его прямые предшественники вовсе неизвестны. С уверенностью можно сказать только, что ал-Хорезми опирался на богатое научное наследие, в котором можно обнаружить отчетливые следы вавилонских, греческих, индийских знаний, которые веками передавались и синтезировались в школах, работавших на обширных территориях Ближнего Востока, Передней и Средней Азии.

Сочинение ал-Хорезми не является чисто алгебраическим трактатом. Написанное в значительной части для людей практических занятий — от купцов и юристов до строителей и астрономов — оно содержит, среди прочего, отдел о задачах на тройное правило, сведения об измерении фигур и множество популярных задач на раздел наследств. Здесь алгебра получает некоторые применения. Но в главном — это курс алгебры или, как называл его сам автор, «хисаб ал-джабр ва-л-мукабала» — «исчисление алгебры и алмукабалы».

Основное содержание книги составляет решение шести нормальных форм линейных и квадратных уравнений, к которым приводятся все рассматриваемые задачи. Эти уравнения, как и правила их решения, формулируются словесно, без применения алгебраической символики:

(а) «Квадраты равны корням» $ax^2=bx$;
(б) «Квадраты равны числу» $ax^2=c$;
(в) «Корни равны числу» $ax=c$;
(г) «Квадраты и корни равны числу» $ax^2+bx=c$;
(д) «Квадраты и число равны корням» $ax^2+c=bx$;
(е) «Корни и число равны квадратам» $bx+c=ax^2$.

Для приведения задач к этим формам, не содержащим, как видно, вычитаемых членов, ал-Хорезми сообщает сведения, принадлежащие к области алгебраического исчисления, хотя и выраженные опять-таки чисто словесно. Это некоторые правила действий с одночленами и многочленами, а также правила «ал-джабр» и «ал-мукабала», служащие для преобразования полученных уравнений к нормальному виду. Ал-джабр, буквально восполнение,— термин, который несколько позднее стал служить для наименования алгебраической науки,— состоит, как мы бы сказали теперь, в переносе вычитаемых членов уравнения в другую его часть, где они оказываются прибавляемыми. Ал-мукабала, буквально: противопоставление,— сокращение равных слагаемых в разных частях равенства. Кроме того, коэффициент при квадрате неизвестного делают равным единице, так как правила решения полных квадратных уравнений высказаны только для этого случая.

Самые правила решений ал-Хорезми обосновывает геометрически, причем вполне общим образом, хотя и на примерах с определенными числовыми коэффициентами, вроде уравнения

$$x^2+10x=39,$$

которое потом фигурировало в алгебраических руководствах стран ислама и Европы в течение нескольких сотен лет. Нулевой и отрицательные корни не учитываются. Поэтому уравнение (а) для ал-Хорезми, как и для многих поколений его преемников, равносильно линейному $ax=b$, а уравнения (г) и (е) всегда имеют один корень (другой — обязательно отрицательный). Что касается уравнения (д), то оно может иметь два (положительных) корня, может иметь и один (мы бы сказали — двойной положительный) корень. В этом случае, однако, задача иногда оказывается и «невозможной», именно, когда дискриминант уравнения отрицательный. Вряд ли ал-Хорезми впервые указал на возможность существования двух корней квадратного уравнения (д), но в более ранней литературе об этом нигде явно не говорится [1].

Приемы геометрического построения корней у ал-Хорезми частью совершенно отличны от известных нам приемов греческой геометрической алгебры, частью имеют с ними некоторое сходство. То же относится к геометрическим построениям современника ал-Хорезми Абд ал-Хамида ибн Турка ал-Хуттали, изложившего учение о квадратных уравнениях несколько полнее.

Наряду с трактатом ал-Хорезми большую роль сыграла «Книга об алгебре и алмукабале» египетского ученого Абу Камила ал-Мисри, написанная в конце IX или начале X в. Абу Камил также ограничился линейными и квадратными уравнениями. Но он подробнее разработал алгебраическое исчисление, построения корней произвел, пользуясь теоремами геометрической алгебры, заимствованными из «Начал» Евклида, и привел много новых замечательных примеров, которые свидетельствовали о свободном обращении автора с квадратичными иррациональностями. Такие иррациональности входят у Абу Камила не только в выражения для корней уравнений, но и в коэффициенты последних. У ал-Хорезми этого не было. Кроме того, книга Абу Камила однороднее по содержанию. Это уже чисто алгебраическое руководство: в нем нет отделов о тройном правиле и об измерении фигур, нет и огромного собрания задач на раздел наследства. Во второй половине X в. ал-Караджи в трактате «Ал-Фахри» рассмотрел еще ре-

---

[1] Существование (при определенных условиях) двух решений системы (V) $x + y = p$, $xy = q$ было известно уже издавна, а этот факт равносилен существованию двух корней уравнений $x^2 + q = px$.

шение уравнений, квадратных относительно x^n, а также таких уравнений, домноженных на x^m.

Во второй половине IX в. алгебраисты стран ислама приступили к изучению кубических уравнений. Это было связано с переводом Сабита ибн Корры сочинения Архимеда «О шаре и цилиндре». Архимедову задачу о делении шара попытался решить прежде всего ал-Махани, который свел ее к уравнению вида (5). Ал-Махани, однако, не смог решить последнее, и это удалось только примерно сто лет спустя хорасанскому ученому Абу Джафару ал-Хазину (ум. между 961 и 971 гг.) и работавшему в Каире Абу Али ибн ал-Хайсаму, которые применили построение корня с помощью конических сечений. Тщательный анализ задачи произвел их современник ал-Кухи из г. Куха в Табаристане, к юго-западу от Каспийского моря. Ал-Кухи выдвинул и решил также другую задачу, приводящуюся к кубическому уравнению того же вида,— о построении сферического сегмента по данным его объему и поверхности. Всё новые задачи приводятся к уравнениям третьей степени, причем разрабатываются как способы приближенного вычисления их корней, так и методы геометрического исследования, основанные на учении о конических сечениях, с которым в странах ислама познакомились еще во второй половине IX в. по переводу «Конических сечений» Аполлония, также выполненному Сабитом ибн Коррой. Выдающееся значение имело при этом сведение задачи о трисекции угла к уравнению

$$x^3 + qx = r. \tag{6}$$

Эта задача представляла особый интерес для составления тригонометрических таблиц и тем самым для блестяще развивавшейся астрономии, поскольку ее решение давало один из лучших методов вычисления синуса 1° по синусу 3°, вычисление которого требует только извлечения квадратных корней. К решению кубических уравнений приведены были и другие вопросы геометрии и тригонометрии. Так, Абу Наср ибн Ирак, работавший в Хорезме и Газне (ум. ок. 1035 г.), представил кубическим уравнением задачу о построении вписанного в данный круг правильного семиугольника, впервые исследованную Архимедом, а ал-Бируни приближенно вычислил сторону правильного вписанного девятиугольника или удвоенный синус 20°; эта последняя задача была ал-Бируни выражена уравнениями

$$x^3+1=3x \text{ и } x^3=1+3x,$$

причем в первом x есть хорда $\frac{1}{18}$ окружности, а во втором — хорда $\frac{2}{9}$ окружности. Ставятся и чисто арифметические вопросы, обобщающие задачи, которые служили примерами на составление квадратных уравнений, вроде такого: разделить число 10 на две части так, чтобы сумма их квадратов и частного от деления большей на меньшую равнялась 72. Если обозначить меньшую часть x, то вопрос выражается уравнением

$$2x^3+27x+10=20x^2,$$

которое не удалось решить ал-Кухи, Абу-л-Вафе и многим другим, и которое построил с помощью конических сечений математик X—XI вв. Абу-л-Джуд Мухаммед ибн ал-Лейс.

Таким образом, получив первый толчок к занятиям кубическим уравнениям от греков, математики стран ислама на протяжении X в. продвинулись в этом направлении значительно дальше. В Греции задача Архимеда и более ранняя задача удвоения куба остались изолированными. В странах ислама учение о кубических уравнениях вырастает в новую, важную как по приложениям, так и в теоретическом смысле главу алгебры, которая вместе с тригонометрией представляла собой ведущую математическую дисциплину того времени. Накопленные к началу XI в. знания нуждались в систематизации и углубленном исследовании. Требовалось выделить нормальные формы кубических уравнений, выяснить условия возможности решения, т. е. существования положительных корней, подобрать подходящие средства их построения. Видимо, первый опыт был предпринят тем же Абу-л-Джудом, но его сочинение до сих пор не обнаружено. Согласно Хайяму, который познакомился с этим трудом уже после завершения своего собственного, Абу-л-Джуд не достиг полноты в классификации типов уравнений и в различении возможных задач от невозможных. После Абу-л-Джуда и независимо от него теорией кубических уравнений занялся Хайям.

Первый трактат Хайяма по алгебре, о котором уже упоминалось в IV главе, возник в связи с задачей деления четверти AB круга $ABCD$ (рис. 3) в точке G таким образом, чтобы имела место пропорция

$$AE : GH = EH : HB,$$

или, если обозначить угол BEG через α, чтобы имело место равенство

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Проведя касательную в искомой точке G до пересечения с продолженным диаметром DB в точке F, Хайям

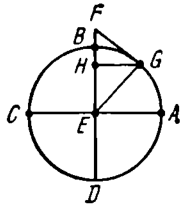


Рис. 3. Задача из первого алгебраического трактата Хайяма

сводит задачу к другой: построить прямоугольный треугольник с данным катетом EG, в котором гипотенуза EF равнялась бы сумме этого катета с высотой GH, опущенной на гипотенузу, $EF = EG + GH$. Полагая затем данным не катет EF, а его проекцию EH на гипотенузу, он, «пользуясь выражениями алгебраистов» — ал-джабрийуна [5, стр. 449], берет $EH = 10$ и высоту $GH = x$ и получает уравнение

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000.$$

«Это,— пишет Хайям,— невозможно исследовать при помощи плоской геометрии в силу присутствия здесь куба. Здесь необходимо применение конических сечений» [5, стр. 450]. Несколько далее это утверждение распространяется и на другие виды кубических уравнений, не сводящиеся к квадратным, а затем повторяет его в большом алгебраическом трактате [3, стр. 74]. Это, насколько известно, первое в истории математики утверждение, что уравнения третьей степени, вообще говоря, не решаются в квадратичных радикалах, т. е. при помощи циркуля и линейки. В 1637 г. то же заявил Декарт, но доказано это было двести лет спустя, в 1837 г., французским математиком П. Л. Ванцелем.

Выразив задачу уравнением, Хайям делает несколько замечаний о понятиях числа, неизвестной и ее степеней и полностью перечисляет все 25 нормальных форм линейных, квадратных и кубических уравнений, из которых 14 кубических не приводятся к линейным или квадратным путем деления на x или x^2. Эти 14 форм или видов Хайям подразделяет на три группы — 1 двучленное уравнение, 6 трехчленных и 7 четырехчленных, именно:

$$
\begin{aligned}
&1)\ x^3 = qr,\\
&2)\ x^3 + px^2 = r,\\
&3)\ x^3 + r = qx,\\
&4)\ x^3 + r = px^2,\\
&5)\ x^3 + qx = r,\\
&6)\ x^3 = px^2 + r,\\
&7)\ x^3 = qx + r,\\
&8)\ x^3 = px^2 + qx + r,\\
&9)\ x^3 + qx + r = px^2,\\
&10)\ x^3 + px^2 + r = qx,\\
&11)\ x^3 + px^2 + qx = r,\\
&12)\ x^3 + px^2 = qx + r,\\
&13)\ x^3 + qx = px^2 + r,\\
&14)\ x^3 + r = px^2 + qx.
\end{aligned}
$$

Он сообщает, что четыре вида были решены ранее: 1) — еще древними, вид 4) — ал-Хазином, вид 2) — ибн-Ираком и вид 9) — Абу-л-Джудом, решение которого в то время было Хайяму неизвестно. «До нас,— пишет Хайям,— не дошла речь ни об одном из оставшихся десяти (видов), ни об этой классификации» [5, стр. 455]. Выразив надежду, что ему еще удастся в дальнейшем рассмотреть все эти виды и условия возможности их решения, Хайям возвращается к своей задаче, т. е. уравнению вида 13), и даст построение искомого отрезка $x = AL$ (рис. 4) с помощью пересечения окружности

$$y^2 = (x - 10)(20 - x)$$

и равносторонней гиперболы

$$xy = 10\sqrt{2}(x - 10),$$

причем на чертеже изображены только верхняя полуокружность и часть одной ветви гиперболы (другая точка пересечения D не принимается во внимание; ее абсцисса $x = AD = 10$ не удовлетворяет данному кубическому

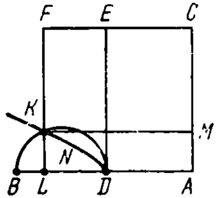


Рис. 4. Решение этой задачи с помощью пересечения окружности и равносторонней гиперболы

уравнению, но является корнем уравнения четвертой степени, получающегося при исключении из уравнений обеих кривых y и сводящегося к данному кубическому уравнению при сокращении обеих его частей на $x - 10$).

Но Хайям не ограничивается этим построением, доказывающим возможность и единственность решения задачи. С характерным для математики стран ислама соединением теоретических и прикладных, в данном случае вычислительных, интересов, он приводит еще результат приближенного вычисления корня. Прежде всего он замечает, что «если кто хочет узнать это при помощи арифметики, то для этого нет пути» [5, стр. 460]. Это весьма любопытное заявление, свидетельствующее, что уже в то время пытались найти какие-либо арифметические выражения для корней кубического уравнения. Приходится поэтому удовлетвориться приближенным вычислением. С этой целью Хайям выражает задачу тригонометрической пропорцией — по существу, той самой, какая приведена выше, на стр. 49, и находит, что угол α близок к $57°$, синус этого угла $50 : 60$ и косинус $32\frac{2}{3} : 60$. Это дало бы $x = 15{,}306$... Более точное вычисление показывает, что $\alpha = 57°4'34''$ и $x = 15{,}437$..., так что погрешность значения корня у Хайяма меньше одного процента. Хайям добавляет: «Размельчением можно достигнуть того, что разница не будет ощущаться» [5, стр. 461], не поясняя, однако, способ «размельчения», т. е. приближенного вычисления угла α в более мелких шестидесятиричных долях. Скорее всего это была комбинация метода проб и линейного интерполирования.

Программу, намеченную в рассмотренном сочинении, Хайям вскоре выполнил в большом «Трактате о доказательствах задач алгебры и алмукабалы», который можно разделить — сам Хайям этого не делает — на пять частей: 1) введение, 2) линейные и квадратные уравнения, 3) кубические уравнения, 4) уравнения, содержащие величину, обратную неизвестной, и 5) добавление, в котором разобрана одна ошибка Абу-л-Джуда, с сочинением которого Хайям познакомился через несколько лет после окончания основного текста трактата.

Во введении дается первое известное нам определение алгебры, как науки о решении уравнений, которые уже в новое время стали называть алгебраическими. «Искусство алгебры и алмукабалы есть научное искусство, предмет которого составляют абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-нибудь известной вещи, по которой их можно определить. Эта вещь есть количество или отношение...» [3, стр. 70—71]. Абсолютным числом Хайям называет число натуральное, измеримыми величинами — линии, поверхности, тела и время. Таким образом, предметом алгебры служат дискретные и непрерывные величины, а также отвлеченные отношения величин. И далее: «Алгебраические решения производятся при помощи уравнений, т. е., как это хорошо известно, приравнения одних степеней другим» [3, стр. 71][1]. К этим разъяснениям добавлены соображения

[1] Индийские математики дали определения алгебры (включавшей решения неопределенных уравнений) еще ранее. Уже в IX в. она получает название биджаганиты, что означает примерно «наука о вычислении при помощи элементов» или «наука об аналитическом исчислении». Позднее подчеркивалось применение символов неизвестных величин, широко применявшееся в Индии. Однако специфические особенности алгебры многочленов при этом не выделялись. Ср.: B. Datta and A. N. Singh. History of Hindu Mathematics, t. II. Lahore, 1938, стр. 1—6.

относительно степеней неизвестной, причем указано, что степени выше третьей (следуя греческой традиции они называются квадрато-квадратом, квадрато-кубом, кубо-кубом и т. д.) следует понимать метафорически, так как они не принадлежат к настоящим величинам. За этим идут уже известные нам указания, что для решения кубических уравнений, не сводящихся к квадратным, необходимо применение конических сечений и что их арифметическое решение, т. е., по-нашему, решение в радикалах, неизвестно. «Может быть,— прозорливо писал Хайям,— кто-нибудь из тех, кто придет после нас, узнает это для случая, когда имеются не только три первых степени, а именно число, вещь (т. е. неизвестная) и квадрат» [3, стр. 72]. Лишь спустя более чем четыреста лет решение кубического уравнения в кубических радикалах было открыто итальянцами Ш. дель Ферро и Н. Тартальей.

За этим следуют упоминавшаяся классификация уравнений, основанное на греческой геометрической алгебре построение и соответствующее ему числовое решение квадратных уравнений и построение всех 14 видов уравнений третьей степени.

Построение корней каждого вида сопровождается разбором его «случаев». Рассматривая условия пересечения или касания подходящим образом выбранных конических сечений, Хайям, в сущности, развивает геометрическую теорию распределения положительных корней кубических уравнений. В согласии с этим изображаются только те части конических сечений, которые лежат — по нашему выражению — в первом координатном угле. Выясняется, при каких условиях задача возможна; существует ли у данного вида только один случай, т. е. корень (сюда включаются двойные корни — понятия о кратных корнях не было), или же различные случаи, именно один или два корня. Определяются границы корней. Хайям показывает, что для некоторых уравнений имеет место многообразие случаев, так что они могут либо совсем не иметь корня, либо один или же два корня. Насколько известно, он впервые заметил возможность двух корней у кубического уравнения. Но он не заметил — мы об этом еще скажем,— что такое уравнение может иметь и три корня. Уравнения, заведомо не имеющие положительных

«Трактат о доказательствах задач алгебры и алмукабалы». Титульный лист рукописи № 2461 Парижской национальной библиотеки

корней, вовсе не рассматривались. Поэтому мы не встречаем в алгебре стран ислама уравнений

$$x^2 + px + q = 0 \text{ и } x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

с положительными коэффициентами p, q и r.

Чтобы дать читателю более полное представление о методе Хайяма с присущими ему достоинствами и недостатками, мы разберем — в современных обозначениях и не соблюдая принципа однородности, всегда соблюдаемого Хайямом, когда он пользуется геометрическим методом,— два характерных примера. Прежде всего рассмотрим уравнение вида (4)

$$x^3 + r = px^2, \tag{7}$$

встречавшееся еще Архимеду. Построение корней производится при помощи параболы

$$y^2 = \sqrt[3]{r}\,(p - x) \tag{8}$$

и равносторонней гиперболы

$$xy = \sqrt[3]{r^2}. \tag{9}$$

Выясняется, что уравнение может иметь один или два корня (верхние ветви кривых касаются или пересекаются), может и вовсе не иметь решения (ветви не встречаются). Устанавливаются некоторые границы корней. В первую очередь Хайям показывает (см. рис. 5, где $AC=p$, $H=BC=\sqrt[3]{r}$ и $AB=p-\sqrt[3]{r}$), что при $\sqrt[3]{r} \geqslant p$ задача невозможна. В самом деле, тогда при $x=\sqrt[3]{r}$ будет $px^2 \leqslant r$, при $x < \sqrt[3]{r}$ будет $px^2 < r$ и при $x > \sqrt[3]{r}$ будет $x^3 > px^2$, что противоречит данному уравнению. После этого разбираются условия $\sqrt[3]{r} \gtreqless \frac{p}{2}$, для чего сравниваются ординаты параболы и равносторонней гипероблы BD при значении $x = p - \sqrt[3]{r}$.

Если $\sqrt[3]{r} = \frac{p}{2}$, то

$$y_{\text{гип}} = y_{\text{пар}} = \sqrt[3]{r},$$

и кривые пересекаются, кроме того, еще в одной точке, «что ты можешь определить при небольшом размышлении» [3, стр. 91].

Если $\sqrt[3]{r} > \frac{p}{2}$, то $x = p - \sqrt[3]{r} < \sqrt[3]{r}$ и

$$y_{\text{гип}} = \frac{\sqrt[3]{r^2}}{p - \sqrt[3]{r}} > y_{\text{пар}} = \sqrt[3]{r}.$$

Справа от ординаты BD ветви могут пересечься или иметь касание, но могут и не встретиться; задача соответственно

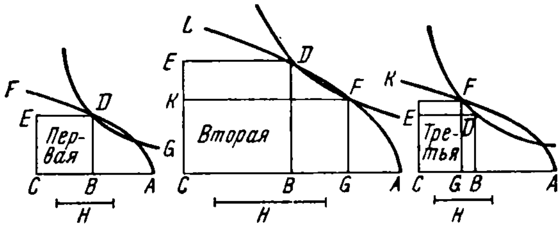


Рис. 5. Решение уравнения $x^3 + r = px^2$ с помощью пересечения параболы и равносторонней гиперболы

может иметь два или одно решение, меньшие чем $p - \sqrt[3]{r}$, либо же невозможна.

Если же, наконец, $\sqrt[3]{r} < \frac{p}{2}$, то $x = p - \sqrt[3]{r} > \sqrt[3]{r}$,

$$y_{\text{гип}} < y_{\text{пар}},$$

и точка гиперболы D лежит внутри параболы; имеются два пересечения и два решения.

Анализ довольно подробен, но не является исчерпывающим и уступает исследованиям Архимеда и ал-Кухи, которые установили, что граница положительных корней определяется условием $r \leqslant \frac{4p^3}{27}$. Хайям дает меньше. Он показывает, что при $r \leqslant \frac{p^3}{8} = \frac{3\frac{3}{8}p^3}{27}$ существуют два корня, при $r > \frac{3\frac{3}{8}p^3}{27}$ могут быть либо два корня, либо один, либо ни одного, а при $r \geqslant p^3$ корень не существует.

Разбирая этот вид уравнений, Хайям указал на ошибку Абу-л-Джуда, который считал, что при $\sqrt[3]{r} = \frac{p}{2}$ имеет место касание, а при $\sqrt[3]{r} > \frac{p}{2}$ кривые не встречаются. Эта ошибка подробно рассмотрена в добавлении к трактату. Для опровержения ее берется уравнение

$$x^3 + 144 = 10x^2.$$

Здесь $\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{144} > 5 = \frac{p}{2}$ Вместе с тем парабола

$$y^2 = \sqrt[3]{144}\,(10 - x)$$

и равносторонняя гипербола

$$xy = \sqrt[3]{144^2}$$

встречаются при $x = 6$ (второй корень $x = 2 + 2\sqrt{7}$ у Хайяма не указан).

Однако в следующем примере ошибку допускает сам Хайям. Он желал привести случай, когда при $\sqrt[3]{r}$ несколько большем, чем $\frac{p}{2}$ кривые не пересекаются, и берет уравнение

$$x^3 + 41^3 = 80x^2.$$

При абсциссах $x_1 = \sqrt[3]{r} = 41$ и

$$x_2 = \sqrt[3]{r} + \frac{3}{4}(p - \sqrt[3]{r}) = 41 + \frac{3}{4}\cdot 39$$

ординаты параболы меньше соответствующих ординат гиперболы, и отсюда Хайям заключает, что кривые не пересекаются. На самом деле между двумя названными точками ветви пересекаются два раза. Это видно из того, что при промежуточном значении $x_3 = \frac{11}{10}\cdot 41$ ордината гиперболы меньше ординаты параболы. Хайяму следовало бы взять свободный член побольше, скажем 43^3.

Последние два примера свидетельствуют о применении общей геометрической теории отделения корней к уравнениям с числовыми коэффициентами. С другой стороны, они выявляют слабую сторону геометрического метода, применявшегося Хайямом: в такого рода вопросах чертежи могут иногда ввести в заблуждение, если не выполнены строго в согласии с предварительным подсчетом. Именно по причине несовершенства чертежа Хайям прошел мимо открытия возможности трех корней кубического уравнения. Этот пробел, быть может наиболее досадный в исследовании, встречается при анализе уравнения вида (13)

$$x^3 + qx = px^2 + r, \tag{10}$$

для построения которого применяются окружность

$$y^2 = \left(x - \frac{r}{q}\right)(p - x) \tag{11}$$

и равносторонняя гипербола

$$x(\sqrt{q} - y) = \frac{r}{\sqrt{q}} \tag{12}$$

(см. рис. 6, где $BC = p$, $BD = \sqrt{q}$, $S = AB = \frac{r}{q}$). Хайям

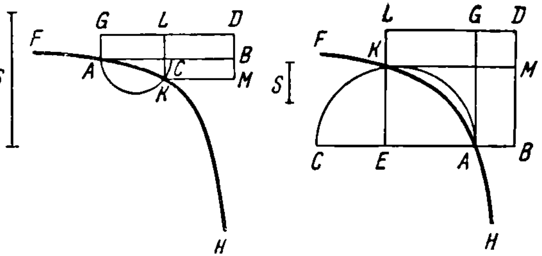
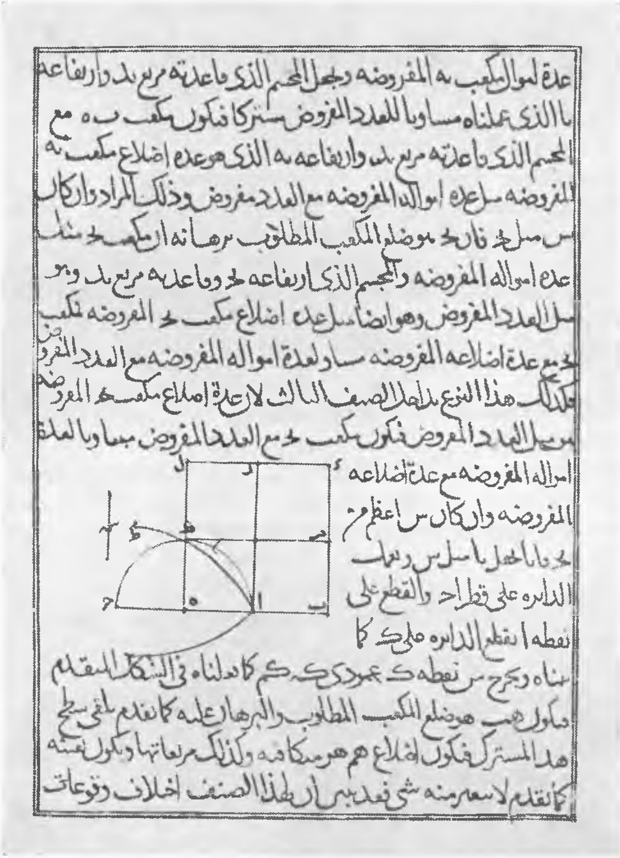


Рис. 6. Решение уравнения $x^3 + qx = px^2 + r$ с помощью пересечения окружности и равносторонней гиперболы

справедливо говорит, что уравнение всегда имеет решение — абсциссу точки K и что при $\frac{r}{q} \leqslant p$ этот корень единственный (абсцисса точки A, т. е. $x = \frac{r}{q}$ данному уравнению не удовлетворяет; она является корнем вспомогательного уравнения 4-й степени, возникающего при исключении из уравнений кривых величины y). Но Хайям не заметил, что при $\frac{r}{q} < p$ представляются различные случаи: могут иметься еще два различных или совпадающих корня, но может быть и только один корень (два дру-



عدة اموال المكعب ب المفروضة ونجعل المجسم الذي قاعدته مربع بد وارتفاعه
ا الذي عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فنكون مكعب ب ه مع
المجسم الذي قاعدته مربع بد وارتفاعه ه الذي هو عدة اضلاع مكعب ب ه
المفروضة مثل عدة اموال المفروضة مع العدد المفروض وذلك المراد وان كان
س مثل ح فان ح هو ضلع المكعب المطلوب برهانه ان مكعب ح مثل
عدة امواله المفروضة والمجسم الذي ارتفاعه ح وقاعدته مربع بد و ح
مثل العدد المفروض وهو ايضا مثل عدة اضلاع مكعب ح المفروضة فمكعب
ح مع عدة اضلاعه المفروضة مساو لعدة امواله المفروضة مع العدد المفروض
فكذلك هذا النوع من الصنف الثالث لا عدة اضلاع مكعب ه المفروضة
مثل العدد المفروض فنكون مكعب ح مع العدد المفروض مساويا لعدة
امواله المفروضة مع عدة اضلاعه
المفروضة وان كان س اعظم من
ح
الدائرة على قطر اح والقطع على
نقطة ا نقطع الدائرة على ك كما
بيناه ونخرج من نقطة ك عمود ك م كما عملناه في الشكل المتقدم
فيكون ه م هو ضلع المكعب المطلوب والبرهان عليه كما تقدم يلقى سطح
هد المشترك فيكون اضلاع هم هو مكافئه وكذلك مربعاتها ويكون نسبته
كما تقدم لا يسقط منه شيء فقد تبين ان لهذا الصنف اختلاف وقوعات

Лист 20 «Трактата о доказательствах задач алгебры и алмукабалы» (окончание решения уравнения $x^3 + qx = px^2 + r$ с помощью пересечения окружности и равносторонней гиперболы; на чертеже упущена возможность еще двух точек пересечения окружности с гиперболой) гие — мнимые). Обнаружить возможность еще двух точек пересечения между точками K и A на рисунке, сделанном от руки и на глаз, затруднительно. Так или иначе, но лишь итальянец Дж. Кардано в середине XVI в. установил, что кубическое уравнение может иметь три действительных корня.

В выборе конических сечений, служащих для построения 14 видов кубических уравнений, Хайям следовал определенной системе. Нижеследующая схема, предложенная первым издателем трактата Ф. Вёпке, характеризует этот подбор. Греческие буквы могут принимать в ней значения $+1$ и -1, кроме того, в одном случае $\varkappa=0$. Тогда пары конических сечений, применяемые Хайямом для построения нормальных видов кубических уравнений, принадлежат к следующим трем системам:

$$\begin{matrix} \text{I парабола } x^2-\sqrt{q}\,y=0, \\ \text{кривая } y^2+\varkappa x^2+\lambda\frac{r}{q}\,x=0 \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} \varkappa=0 \text{ парабола,} \\ \varkappa=1 \text{ окружность,} \\ \varkappa=1 \text{ гипербола.} \end{matrix} \right.$$

Эта система служит для решения уравнений вида

$$x^3+\varkappa qx+\lambda r=0.$$

$$\text{II парабола } y^2+\varkappa sx+\lambda sp=0,$$
$$\text{гипербола } xy-\sqrt{rs}=0.$$

Эта система служит при соответствующем выборе $\varkappa$, λ для уравнений вида

$$x^3+\varkappa\lambda px^2+\varkappa r=0,$$

при этом s берется равным либо $\sqrt[3]{r}$ либо p.

$$\begin{matrix} \text{III гипербола } xy+\sigma\sqrt{q}x+\tau\frac{r}{\sqrt{q}}=0 \\ \text{кривая } y^2+\varkappa x^2+\lambda\left(\frac{r}{q}+\mu p\right)x+\nu\frac{pr}{q}=0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \varkappa=1 \text{ окружность,} \\ \varkappa=-1 \text{ гипербола.} \end{matrix} \right.$$

Последняя система приводит к уравнению

$$x^4+\varkappa\lambda\left(\frac{r}{q}+\mu p\right)x^3+\varkappa\left(q+\nu\frac{pr}{q}\right)x^2+2\varkappa\sigma\tau rx+\varkappa\frac{r^2}{q}=0$$

и, после деления его на $x \pm \frac{r}{q}$, к четырехчленному кубическому уравнению типа

$$x^3 + \zeta p x^2 + \eta q x + \vartheta r = 0,$$

где ζ, η, ϑ равны либо $+1$, либо -1.

Хайям еще коротко останавливается на уравнениях, содержащих степени величины, обратной неизвестной («доли вещи», «доли квадрата» и т. п.), вроде

$$\frac{1}{x^3} + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x} = 3\frac{3}{8},$$

приводя их подстановкой $x = \frac{1}{z}$ к уже исследованным. Рассматривая случаи вроде $x^2 + 2x = 2 + 2\frac{1}{x}$, приводящие к уравнениям четвертой степени, Хайям подошел к границе своих достижений. Способа решения таких задач, заявил он, не существует [3, стр. 107].

Исследования по кубическим уравнениям велись в странах ислама и после Хайяма. В «Ключе арифметики» знаменитого астронома и математика Джемшида Гияс ад-Дина ал-Каши (1427), создавшего один из лучших методов приближенного решения уравнения трисекции угла, говорится, со ссылкой на одного автора XIII—XIV вв., что Шараф ад-Дин ал-Мас'уди «определил девятнадцать задач, кроме шести, и доказал свойства определения их неизвестных в тех случаях, когда это возможно» [1]. Ал-Мас'уди жил в XII—XIII вв. в Тусе и был одним из учителей Насир ад-Дина ат-Туси. Поскольку ат-Туси был хорошо знаком с трудами Хайяма, можно думать, что ал-Мас'уди знал алгебру Хайяма с ее 19 видами кубических уравнений (из которых 5 сводятся к уравнениям низшей степени). Сочинение ал-Мас'уди нам неизвестно, как оно было неизвестно и ал-Каши. То обстоятельство, что ал-Каши не упоминает Хайяма, может означать, что заслуги последнего ему были незнакомы. Однако оно может быть и сознательным умолчанием о человеке, который в глазах многих и многих на века был одним из ярких представителей свободомыслия. Ат-Туси в своих сочинениях явно избегал называть Хайяма и делает это лишь раз — в одном обзоре работ своих предшественников в теории параллельных.

---

[1] Джемшид ал-Каши. Ключ арифметики. Трактат об окружности, стр. 142.

Математики стран ислама стремились распространить геометрические методы на уравнения выше третьей степени. До нас дошел один пример такого числового уравнения, решенный анонимным автором при помощи равносторонней гиперболы и окружности. Речь идет о задаче: построить трапецию с основанием и боковыми сторонами, равными 10, и площадью 90, приводящейся к уравнению

$$x^4 + 2000x = 20x^3 + 1900;$$

построение произведено было с помощью кривых

$$x^2 + y^2 = 100 \text{ и } (10 - x)y = 90.$$

Хайям сообщает, что Ибн ал-Хайсам произвел построение (нам неизвестное) четырех средних пропорциональных между двумя данными величинами, т. е. решение двучленного уравнения пятой степени. Тот же Ибн ал-Хайсам в своем труде по оптике дал геометрическое решение такой задачи, сводящейся к уравнению четвертой степени: из двух данных точек в плоскости данного круга провести две прямые, пересекающиеся в точке окружности и образующие в этой точке равные углы с проведенным в нее радиусом. Вероятно, задачи, приводящие к уравнениям четвертой степени, занимали ученых и позднее. Иначе трудно понять, почему ал-Каши предпринял попытку классификации и анализа всех видов таких уравнений, о чем он сообщает в упомянутом «Ключе арифметики» следующее: «Для случая, когда родов пять (т. е. от чисел до четвертой степени), мы открыли способ определения неизвестных в этих семидесяти задачах, которых не касался никто ни из древних, ни из современников» [1]. В действительности, таких уравнений с положительными корнями не 70, но 65: по-видимому, ал-Каши не довел до конца свои исследования, о которых мы знаем только из приведенной цитаты.

Сведения о работах по кубическим уравнениям, которые велись на Востоке, проникали и на арабский Запад. Выдающийся тунисский историк XIV в. Ибн Халдун, человек энциклопедической образованности, писал: «До нас

---

[1] Джемшид ал-Каши. Ключ арифметики. Трактат об окружности, стр. 192.

дошло, что некоторые великие ученые Востока распространили число уравнений на эти шесть видов, доведя их более чем до двадцати, и нашли для них надежные решения при помощи геометрических доказательств»[1]. Однако западноарабские математики не только не развили учения о кубических уравнениях, но даже не упоминают в своих трудах о достижениях своих восточных коллег. Точно также оставались неизвестными открытия Хайяма и других восточных алгебраистов в учении о кубических уравнениях и в Европе. Мы уже говорили, что первые сведения об этом в европейской литературе стали появляться только в XVIII в.

Идеям Хайяма, таким образом, не суждено было оказать непосредственное влияние на судьбы алгебры в Европе. Здесь алгебра, отправляясь сперва от трактата Мухаммеда ал-Хорезми и его обработок, а затем от классиков античности, пошла иными путями развития. В XV—XVI вв. на основе все совершенствующейся символики быстро развивается алгебраическое исчисление и Ф. Виет закладывает начала современной буквенной алгебры, которая принимает почти нынешний вид у Р. Декарта в 1637 г. В XVI в., как упоминалось, было открыто решение в радикалах кубических уравнений и вскоре — уравнений четвертой степени. Открываются новые свойства алгебраических многочленов, новые приемы приближенного вычисления; ставятся новые проблемы и в учении о распределении корней алгебраических уравнений. Но вместе с тем, в XVII в. возрождаются и идеи геометрической теории, которую вслед за древними столь успешно разрабатывали математики стран ислама и особенно Хайям.

Геометрическое построение решений алгебраических уравнений было вновь выдвинуто на видное место Р. Декартом, как общий метод исследования и построения их корней, а потому как общий метод его универсальной математики, в которой всякая проблема считалась в принципе сводимой к уравнению. За неимением общего способа арифметического решения уравнений любой степени, автор «Рассуждения о методе» (1637) решил воспользоваться геометрическим построением. В этой связи он дает указания о подборе соответствующих кривых, служащих для построения уравнений тех или иных степеней, а это

---

[1] E b n K h a l d o u n. Prolegomènes. Paris. 1858, стр. 98.

приводит его к необходимости классификации алгебраических кривых. Не вдаваясь в подробности, мы заметим, что с этим кругом вопросов оказалось во многом связанным развитие аналитической геометрии на первом ее этапе. В этом смысле важно подчеркнуть известное родство между Хайямом и Декартом: идея классификации уравнений по видам для подбора соответствующих конических сечений получает новое развитие и теперь в центре оказывается проблема классификации кривых, удобных для построения уравнений всех степеней. Введение отрицательных чисел, начало чему было положено несколько ранее, чрезвычайно упростило дело и, в частности, позволило немедленно предложить прием построения кубических уравнений, гораздо более общий, чем приемы Хайяма. В классической «Геометрии», явившейся одним из приложений к «Рассуждению о методе», Декарт обнимает одним построением все действительные корни уравнения четвертой степени

$$x^4 = \pm px^2 \pm qx \pm r,$$

которое при $r = 0$ переходит в кубическое уравнение. Отсутствие в уравнении второго по старшинству члена не имеет значения: в это время математики умели освобождать от него исследуемое уравнение с помощью простой линейной подстановки. Приведенное уравнение четвертой степени строится с помощью окружности

$$\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + r$$

и параболы

$$y = x^2.$$

При этом Декарт разбирает относительное расположение и величины отрезков, определяющих центр круга в зависимости от знаков коэффициентов. Конечно, он пользуется обеими частями кривых и получает как положительные, так и отрицательные корни [1]. Аналогичный прием Декарт распространил на уравнения пятой и шестой степени; он дал также прием геометрического построения любого числа средних пропорциональных.

[1] См.: Р. Декарт. Геометрия. Перевод, примечания и статья А. П. Юшкевича. М.— Л., 1938, стр. 271—272.

В «Геометрии» Декарта были разработаны или поставлены и другие вопросы теории распределения корней уравнения, которые были затем более подробно исследованы Ф. Дебоном, И. Ньютоном, М. Роллем, К. Маклореном и многими другими, включая математиков и нашего времени (напомним хотя бы теорему А. Гурвица об условии отрицательности действительной части комплексного корня). При этом на первый план выдвигаются собственно алгебраические приемы исследования; однако и геометрическое построение, даже в самых его элементарных видах, сохраняет известное подчиненное значение.

Так, идеи алгебры Хайяма продолжали и в новых условиях, хотя и в преобразованном виде, входить в состав развивающейся алгебраической мысли.

Обсерватория в Исфахане

В 1074 г., вскоре после того, как Шамс ал-Мулук признал себя вассалом султана Малик-шаха, Хайям был приглашен ко двору Малик-шаха для руководства реформой иранского солнечного календаря. Историк Ибн ал-Асир пишет: «В этом году Низам ал-Мулк и султан Малик-шах собрали самых лучших астрономов... Для султана Малик-шаха была построена обсерватория, в ее создании участвовали лучшие астрономы Омар ибн Ибрахим ал-Хайями, Абу-л-Музаффар ал-Исфазари, Маймун ибн Наджиб ал-Васити и другие. На создание обсерватории пошло очень много средств» [1].

Во времена Хайяма в государстве сельджуков пользовались одновременно двумя календарями — солнечным и лунным. В основе солнечного календаря лежит солнечный год — период оборота Земли вокруг Солнца, равный 365,2422 суток, т. е. 365 суткам 5 часам 48 минутам 46 секундам. В основе лунного календаря лежит месяц — период оборота Луны вокруг Земли, равный 29,5306 суток, т. е. 29 суткам 12 часам 44 минутам 3 секундам; 12 месяцев составляют лунный год, равный 354 суткам 8 часам 48 минутам 36 секундам.

До ислама арабы пользовались лунно-солнечным календарем, подобным еврейскому и средневековому китайскому календарям: в 9 годах 24-летнего цикла они добавляли тринадцатый месяц наси, чтобы в среднем год был равен солнечному. К этому времени относятся названия арабских месяцев, которые тогда приходились на определенные времена года: месяцы джумада I и II от джама-

[1] Ibn el-Athirus. Chronicon..., т. 10, стр. 67—68.

да — «стынуть», рамадан от рамида — «быть жгучим», шавваль от шаввала — «сниматься со стоянки» и т. д. В 631 г. основатель мусульманской религии пророк Мухаммед запретил добавлять месяц наси, и арабский календарь стал чисто лунным.

Годы мусульманского лунного календаря отсчитывались от так называемой хиджры — бегства Мухаммеда из Мекки в Медину 16 июля 622 г. Мусульманский год, равный 12 лунным месяцам, примерно на 10 суток короче солнечного года, так что 100 солнечным годам соответствуют 103 мусульманских года. Приведем таблицу названий и продолжительности месяцев арабского лунного календаря:

Месяцы арабского лунного календаря	*Число дней в месяце*
Мухаррам	30
Сафар	29
Раби I	30
Раби II	29
Джумада I	30
Джумада II	29
Раджаб	30
Шаабан	29
Рамадан	30
Шавваль	29
Зу-ль-каада	30
Зу-ль-хиджжа	29 или 30

В древности в Иране и Средней Азии пользовались солнечным календарем, который был освящен зороастрийским культом Солнца. Днем Нового года — Наурузом считался день весеннего равноденствия. Месяцы иранского солнечного года соответствовали созвездиям зодиака, в которых совершается видимое движение Солнца в эти месяцы. Соответствие созвездий зодиака, месяцев иранского солнечного года и месяцев нашего календаря можно выразить в виде таблицы (стр. 68).

В древности и в средние века все месяцы иранского календаря имели по 30 дней, а к одному из месяцев добавлялась «дополнительная пятерка». В настоящее время

Созвездие Зодиака	*Месяцы иранского солнечного календаря*	*Соответственные месяцы нашего календаря*
Овен	Фарвардин	Март — апрель
Телец	Урдбихишт	Апрель — май
Близнецы	Хурдад	Май — июнь
Рак	Тир	Июнь — июль
Лев	Мурдад	Июль — август
Дева	Шахривар	Август — сентябрь
Весы	Михр	Сентябрь — октябрь
Скорпион	Абан	Октябрь — ноябрь
Стрелец	Азар	Ноябрь — декабрь
Козерог	Дай	Декабрь — январь
Водолей	Бахман	Январь — февраль
Рыбы	Исфандармуз	Февраль — март

первые шесть месяцев иранского календаря имеют по 31 дню, следующие пять — по 30 дней, а последний — 29 или 30 дней. Народы Ирана и Средней Азии приняли лунный календарь, являющийся религиозным календарем мусульман, вместе с исламом, но сохранили и старый, иранский календарь, важный для полевых работ, поскольку лунный год, который на несколько дней короче солнечного, для земледельцев неудобен. Лунный календарь применялся в религиозных и официальных документах, солнечный — в хозяйственной жизни. Вместе с солнечным календарем сохранился и новогодний праздник Науруз.

В своей книге «Науруз-наме» Хайям дает следующую характеристику месяцев иранского календаря, истолковывая их названия на пехлевийском (среднеперсидском) языке, т. е. на языке Ирана эпохи Сасанидов:

«Месяц фарвардин — пехлевийское слово, означающее, что этот месяц является началом роста растений. Этот месяц относится к созвездию Овна. С начала до конца этого месяца Солнце находится в этом созвездии.

Месяц урдбихишт — этот месяц назвали урдбихишт, что означает, что в этом месяце мир своим весельем похож на рай, «урд» на пехлевийском языке значит «как». Солнце в этом месяце, согласно истинному обороту, находится в созвездии Тельца. Этот месяц является серединой весны.

Месяц хурдад — это означает, что этот месяц кормит людей пшеницей, ячменем и плодами. Солнце в этом месяце находится в созвездии Близнецов.

Месяц тир — этот месяц назвали тир, потому что в этом месяце делят пшеницу, ячмень и другие вещи. В этом месяце кульминация Солнца начинает понижаться, в этом месяце Солнце находится в созвездии Рака. Этот месяц является первым месяцем лета.

Месяц мурдад — т. е. земля дала то, что надо было дать из плодов и фруктов, чтобы они созрели. В этом месяце погода похожа на прах земли. Этот месяц есть середина лета. Солнце в этом месяце находится в созвездии Льва.

Месяц шахривар — этот месяц называют шахривар, так как это месяц обилия доходов, т. е. доходы царей приходятся на этот месяц. В этом месяце крестьянину легче платить налог. В этом месяце Солнце находится в Деве. Это последний месяц лета.

Месяц михр — этот месяц называют михр, так как это месяц дружбы между людьми, и все, что созрело из злаков и плодов и досталось им, они совместно съедают. Солнце в этом месяце находится в Весах. Это начало осени.

Месяц абан — т. е. в этом месяце прибывают воды вследствие начинающихся дождей, и люди поливают посевы. Солнце в этом месяце находится в Скорпионе.

Месяц азар — на пехлевийском языке «азар» означает «огонь». В этом месяце погода становится холодной и появляется нужда в огне, т. е. это месяц огня. Солнце в этом месяце находится в созвездии Стрельца.

Месяц дай — на пехлевийском языке дай означает «дьявол». Этот месяц называют «дай», так как он суров и земля в этом месяце далека от веселья. Солнце находится в Козероге. Это первый месяц зимы.

Месяц бахман — т. е. этот месяц похож на тот месяц (на месяц дай) по своему холоду и сухости. Солнце в этом месяце вместе с Сатурном находится в Водолее и близко к Козерогу.

Месяц исфандармуз — этот месяц называют «исфандармуз», так как асфанд на пехлевийском языке означает «плод», т. е. в этом месяце начинают прорастать плоды и растения. Солнце в этом месяце достигает последнего созвездия, т. е. созвездия Рыб» [3, стр. 189—190].

Далее Хайям излагает историю реформ иранского солнечного календаря. Разделение года на 12 месяцев он приписывает легендарному иранскому царю Каюмарсу и установление празднования Науруза — Джемшиду. Этот праздник был восстановлен после освобождения Ирана от царя-дракона Заххака Афридуном. Далее Хайям переходит к ахеменидскому царю Гуштаспу, т. е. Дарию Гистаспу (552—486 до н. э.), когда, как указывает Хайям, «со времени праздника Афридуна до тех пор прошло девятьсот сорок лет. Когда Солнце вошло в созвездие Скорпиона, Гуштасп приказал отметить високос, в результате чего фарвардин начался в день вступления Солнца в созвездие Рака. Гуштасп установил праздник, говоря, что надо соблюдать этот день и праздновать Науруз [в этот день], так как Рак — счастливое созвездие для работы, и что крестьянам и земледельцам нужно дать право платить налог в это время, тогда им будет легко. Потом он приказал считать високос каждые сто двадцать лет, чтобы годы были определенными и чтобы люди знали свое время и в холода и в жару. Этот обычай продолжался до эпохи Искандара Румского, называвшегося Двурогим. Начиная с этого времени люди перестали отмечать високос и продолжали поступать так же, как и до этого обычая. Это продолжалось до эпохи Ардашира Папакана, который вновь отметил високос и установил большой праздник. Он составил договор об этом и назвал этот день [Наурузом]. Люди справляли этот праздник до эпохи Нушинравана Справедливого. Когда портик Мадаина был закончен, Нушинраван установил празднование Науруза согласно обычаям того времени. Но он не отмечал високоса, говоря, что люди должны воздерживаться от этого обычая, пока Солнце к концу оборота не достигнет первого дня Рака, и таким образом упразднил указания Каюмарса и Джемшида о совершении високоса. Это продолжалось до эпохи халифа Ма'муна, который приказал наблюдать за Солнцем и каждый год, когда Солнце достигает Овна, совершать Науруз. Таким образом были составлены «Астрономические таблицы Ма'муна» и еще в наше время календарь исчисляют при помощи этих таблиц. Это продолжалось до эпохи Мутаваккила ала-л-лаха, Мутаваккил имел везира по имени Мухаммед ибн Абд ал-Малик, который сказал ему, что собирание налога приходится на такое время, когда скот далеко от хлебных полей, и поэтому люди мучаются, и что согласно обычаю царей Ирана люди совершали високос для возвращения года на свое место, чтобы меньше мучиться во время уплаты налога после сбора урожая. Мутаваккил согласился и приказал считать високос и возвратить Солнце из Рака к фарвардину. Тогда люди успокоились и вновь стали придерживаться этого обычая. После этого Халаф ибн Ахмад, эмир Сеистана, установил другой високос» [3, стр. 192—193]. Искандар, о котором идет речь у Хайяма, это Александр Македонский (365—323 до н. э.). Далее упоминаются календарные реформы при основателе династии Сасанидов Ардашире Папакане (царствовал в 226—251 гг.), при царе той же династии Хосрове Ануширване (531—579), при халифах Ма'муне (813—833) и Мутаваккиле ала-л-лахе (847—861) и, наконец, при эмире Сеистана Халафе ибн Ахмеде, вассале султана Махмуда.

О календарной реформе Хайяма сообщается в «Эльханских астрономических таблицах» Насир ад-Дина ат-Туси и в «Новых Гураганских астрономических таблицах», составленных самаркандскими астрономами, работавшими при дворе Улугбека. Ат-Туси пишет: «О новой эре, называемой Малики. Она установлена счастливым султаном Джалал ад-Дином Малик-шахом ибн Алп-Арсланом Сельджуком. Установлено, что за начало ее года берется день, когда Солнце вступает в Овен, т. е. начало истинной весны. В начале каждого месяца Солнце вступает в то созвездие зодиака, которое соответствует этому месяцу, и, таким образом, месяцы этой эры — настоящие солнечные месяцы. Названия месяцев — персидские, такие же, как первоначальные, древние месяцы. Астрономы установили продолжительность месяцев в тридцать дней для облегчения подсчета дней и чтобы не было расхождения с другими календарями. Дополнительная пятерка добавляется в конце месяца исфандармуза, и, каждые четыре года к году прибавляется еще один день, так что год становится 366 днями: так поступают семь или восемь раз по четыре года, а один раз високос производится в пять лет» [1]. Далее ат-Туси приводит таблицу номеров високосных годов нового летосчисления [2], которую мы здесь

[1] Зидж-и ходжа Насир-и Туси машхур бар Зидж-и Хани (на персидском языке), рукопись республиканского рукописного фонда АН Азерб. ССР, № М-221, стр. 34.

[2] Там же, стр. 35.

воспроизводим, подчеркивая номера високосных годов, отделенных от предыдущих не четырехлетним, а пятилетним промежутком (верхние числа — номера по порядку, нижние — номера високосных лет).

1	2	3	4	5	6
2	6	10	14	18	22
7	8	9	10	11	12
26	**31**	35	39	43	47
13	14	15	16	17	18
51	55	59	**64**	68	69
19	20	21	22	23	24
76	80	84	88	92	**97**
25	26	27	28	29	30
101	105	109	113	117	121
31	32	33	34	35	36
125	**130**	134	138	142	146

37	38	39	40	41	42
150	154	158	**163**	167	171
43	44	45	46	47	48
175	179	183	187	191	**196**
49	50	51	52	53	54
200	204	208	212	216	220
55	56	57	58	59	60
225	229	233	237	241	245
61	62	63	64	65	66
249	253	**258**	262	266	270
67	68	69	70	71	72
274	278	282	286	**291**	295

Годы, отделенные от предыдущих пятилетним промежутком, во всех случаях, кроме одного, являются восьмыми, и только 225-й год является седьмым високосным годом после предыдущего високосного года с выделенным номером.

В «Новых Гураганских астрономических таблицах» о календарной реформе Хайяма говорится: «О познании эры Малики. Эта эра названа по имени султана Джалал ад-Дина Малик-шаха ибн Алп-Арслана Сельджука. Она начинается, согласно одним,— в воскресенье 5 шаабана 468 года хиджры, а согласно другим — в пятницу 10 рамадана 471 года хиджры. Это составляет разницу в 1097 дней, причина этого различия нам неизвестна. Но поскольку второе мнение — более распространенное, мы будем следовать ему. Начало года — это тот день, в полдень которого Солнце вступает в Овен, месяцы соответствуют вступлению Солнца в каждое созвездие зодиака. Поэтому годы и месяцы этого летосчисления — настоящие солнечные. Месяцы считают по тридцать дней, чтобы число дней в листках календарей было бы неизменным, при этом условии месяцы — условные солнечные. Названия месяцев этого летосчисления те же, что и названия персидских месяцев, только эти месяцы называют джалали, а те — древними. Дополнительная пятерка добавляется в конце месяца исфандармуза, и каждые четыре года добавляется еще один день. После шести или семи лет, когда високос производится через четыре года, один раз високос производится через пять лет»[1].

Далее приводится таблица полного числа лет в годах этого летосчисления до 1000 лет. Согласно этой таблице 1000 лет в календаре Хайяма содержит 365 242 дня с шестидесятиричной дробью 0; 35, 5, 33, 20, т. е. в десятичных дробях — 365 242, 534 860 дней. Это число показывает, что составители «Новых Гураганских астрономических таблиц» считали чередование високосных дней в календаре Хайяма обеспечивающим равенство календарного года истинному солнечному году.

Если принять, как это часто делают, что в календаре Хайяма високосный год, отделяемый от предыдущего високосного года не четырехлетним, а пятилетним промежутком, всегда является восьмым, мы получим менее точный, но зато исключительно простой календарь с 33-летним периодом, причем високосными будут 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 и 33 годы. Средняя продолжительность года в этом случае равна $365\frac{8}{33}=365{,}2424$ суток, т. е. отклонение от истинного солнечного года равно 0,0002 суток, и, следовательно, ошибка в 1 день накапливается за 5000 лет. Для сравнения заметим, что в нашем календаре, в котором за 400 лет имеется 99 високосных, средняя продолжительность года равна $365\frac{99}{400}=365{,}2425$ суток, т. е. отклонение от истинного года равно 0,0003 суток, и ошибка в 1 день накапливается за 3333 года.

Вероятнее всего, что Хайям не выработал окончательной системы следования високосных лет, а только про-

---

[1] Зидж-и джадиди Гурагани, рукопись Института Востоковедения АН УзССР, № И-2214, л. 5.

изводил астрономические наблюдения над наступлением весеннего равноденствия, пытаясь установить закономерность следования високосных лет. Именно так и нужно, по-видимому, понимать слова Хайяма о его календарной реформе в «Науруз-наме»; после приведенного нами обзора календарных реформ Хайям пишет: «С тех пор до нашего времени стало шестнадцать дней разницы. Счастливый султан, опора веры, Малик-шах,— до освятит Аллах его душу,— узнав об этом, приказал установить старый високос и возвратить год на свое место. Для этого он призвал ученых того времени из Хорасана. Они соорудили все необходимое для наблюдения — возвели стены, установили астролябии и тому подобное — перенесли Науруз в фарвардин. Но время пе дало возможности султану закончить это дело, и високос остался незаконченным» [3, стр. 193]. Таким образом, Хайям стоял на пороге создания замечательной системы календаря с 33-летним периодом, значительно более точной, чем наша, но ему не удалось довести это дело до конца.

Календарь Хайяма, помимо специальных астрономических сочинений, упоминается более чем через сто лет после его смерти знаменитым иранским поэтом Саади (1184—1292) в его «Гулистане», написанном в 1258 г.:

> Настал урдбихишт по Джелаловой эре,
> Поют соловьи на минбарах — ветвях;
> Как пот на висках разъяренной красотки,
> Жемчужная влага на алых цветах [1]

В исфаханской обсерватории под руководством Хайяма были составлены «Маликшахские астрономические таблицы», от которых сохранились только таблицы неподвижных звезд на начало 1 года эры Маликшаха (1079 г.). Эти таблицы, содержащие названия 100 наиболее ярких неподвижных звезд, их эклиптические координаты и величины, сохранились в анонимных астрономических таблицах, составленных в XII в. в государстве ассасинов и хранящихся ныне в Парижской Национальной библиотеке. Приведем координаты звезд первой величины из этой таблицы [3, стр. 226—234]:

---

[1] Муслихиддин Саади. Гулистан. Перевод Р. М. Алиева. Перевод стихов А. Старостина. М., 1957.

Название звезд	*Долгота*	*Широта*	*Темперамент*
Та, которая между ног (Волопаса), т. е. Симак-копьеносец (Арктур)	190°26	31°30 сев.	Юпитер — Марс
Та, которая на щите Черепахи (Лиры), т. е. Падающий орел (Вега)	271°46	62°0 сев.	Венера — Меркурий
Та, которая на левом плече (Возничего), т. е. Щеголь (Капелла)	169°26	22°30 сев.	Марс — Меркурий
Яркая, красноватая из фигуры (в виде буквы) «дал» в южном глазу (Тельца) т. е. Альдебаран	57°6	5°10 юж.	Марс
Та, которая на сердце (Льва), называемая Царственной (Регул)	136°56	0°10 сев.	Юпитер — Марс
Та, которая на конце хвоста (Льва), т. е. Хвост Льва (Денебола)	158°56	11°50 сев.	Сатурн—Венера
Та, которая в руке (Девы), т. е. Колос или Симак безоружный (Спика)	191°6	2°0 юж.	Меркурий — Марс
Та, которая в конце воды (Водолея), т. е. во рту Южной рыбы (Фомальгаут)	321°20	33°0 юж.	Луна — Марс
Та, которая на правом плече (Ориона), т. е. Рука Ориона и Плечо Ориона (Бетельгейзе)	76°26	17°0 юж.	Марс — Меркурий
Та, которая на левой ступне, т. е. Левая нога Ориона (Ригель)	64°16	31°30 юж.	Юпитер — Сатурн
Яркая в конце Реки (Эридана), т. е. Страус (Ахернар)	14°36	53°30 юж.	Юпитер — Марс
Та, которая в пасти (Большого Пса), т. е. Йеменский Сириус (Сириус)	92°6	39°10 юж.	Юпитер — Марс
Яркая сзади (Малого Пса), т. е. Сирийский Сириус (Процион)	103°36	16°10 юж.	Юпитер — Меркурий
Передняя из двух на заднем весле (Корабля Арго), т. е. Сухейль (Канопус)	91°36	75°0 юж.	Сатурн — Юпитер
Та, которая на конце правой передней ноги (Центавра), т. е. Вазн (Альфа Центавра)	232°46	41°10 юж.	Венера — Юпитер

В столбце «темперамент» приведены названия планет (к которым во времена Хайяма относили Солнце и Луну), имеющих с точки зрения астрологических представлений того времени ту же «природу», что и соответствующие звезды. Заметим, что наши названия звезд — Вега, Денебола, Фомальгаут, Бетельгейзе, Ригель и Ахернар — искажения арабских слов ан-наср ал-ваки (падающий орел), занаб ал-асад (хвост льва), фум ал-хут (рот рыбы), ибт ал-джауза (плечо Ориона), риджл (нога) и ахир ан-нахр (конец реки), а латинские названия Регул и Спика означают, соответственно, «царственный» и «колос».

Обсерватория в Исфахане существовала до смерти Малик-шаха в 1092 г. Время руководства обсерваторией было самым плодотворным в жизни Хайяма. В 1077 г. Хайям заканчивает свой замечательный математический труд «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида». В 1080 г. Хайям пишет философский «Трактат о бытии и долженствовании», а вскоре другое философское сочинение — «Ответ на три вопроса».

Перейдем к рассмотрению научного творчества Хайяма в исфаханский период его жизни.

Г Л А В А   С Е Д Ь М А Я

Параллельные линии

«Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида», законченные Хайямом в Исфахане в 1077 г., посвящены комментированию «Начал» Евклида.

«Начала», написанные Евклидом на рубеже IV и III в. до н. э. в Александрии (Египет), представляли собой свод почти всей древнегреческой элементарной геометрии и теории чисел. «Начала» состоят из 13 книг, основное содержание которых представляет обработку различных математических теорий предшественников Евклида, живших в V и IV вв. до н. э. I—IV книги, посвященные планиметрии и XI книга, посвященная основам стереометрии, восходят во многом еще к «Началам» Гиппократа Хиосского. V—VI книги, посвященные общей теории отношений и основанному на ней учении о подобии, и XII книга, посвященная измерению круглых тел, изложены, по-видимому, по Евдоксу Книдскому. VII—IX книги, посвященные теории чисел и числовых отношений, являлись быть может, переработкой трудов позднего пифагорейца Архита Тарентского. В X книге, содержащей подробную классификацию иррациональных величин, которые можно построить с помощью циркуля и линейки, и в XIII книге, посвященной пяти правильным многогранникам, излагаются большей частью открытия Теэтета Афинского.

Мы не знаем, какие отдельные результаты «Начал» принадлежат самому Евклиду, но во всяком случае «Начала» представляют собой замечательно стройное целое и уже один тот факт, что они вытеснили из обихода сочинения предшественников Евклида, и прослужили более двух тысяч лет, свидетельствует о высоких дарованиях их автора. Знаменитый немецкий математик Д. Гильберт как-то заметил, что достоинства какого-либо труда следует оценивать по тому, сколько более ранних сочинений стали после него ненужными. Ни один курс математики, составленный до «Начал» Евклида, не сохранился, их даже не пробовали сколько-нибудь существенно переработать более полутора тысяч лет (мы не говорим о попытках улучшить отдельные пункты и о более простых и кратких изложениях).

Почти каждая книга «Начал» открывается «введением», содержащим необходимые определения и, кроме того, во введении к I книге приводятся аксиомы двух видов.

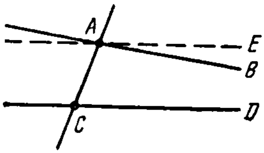


Рис. 7. Пятый постулат Евклида

Евклид приводит пять «постулатов» (допущений). Первые четыре постулата Евклида — аксиомы геометрических построений с помощью идеальной линейки и идеального циркуля: I, «допустим, что от всякой точки до всякой точки [можно] провести прямую линию»; II, «и что ограниченную прямую [можно] непрерывно продолжать по прямой»; III, «и что из всякого центра и всяким раствором [может быть] описан круг». IV, «и что все прямые углы равны между собой» [1].

Пятый постулат Евклида гласит: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы [в сумме] меньшие двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых» [2]. В силу этого постулата через точку вне прямой можно провести не более одной прямой, не пересекающей данной прямой, т. е. параллельной этой прямой (на рис. 7 углы BAC и ACD в сумме меньше двух прямых и прямые AB и CD пересекаются, углы EAC и ACD в сумме равны двум прямым и

[1] Евклид. Начала, т. I. Перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского, при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского, т. I. М.—Л., 1948, стр. 14.

[2] Евклид. Начала, т. I, стр. 15.

прямые AE и CD параллельны). На V постулате Евклида основана его теория параллельных линий.

Далее Евклид приводит пять «общих понятий», т. е. аксиом о сравнении величин: 1) «Равные одному и тому же равны и между собой», 2) «и если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны», 3) «и если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны», 4) «и совмещающиеся друг с другом равны между собой», 5) «и целое больше части» [1].

Пятый постулат вследствие его сравнительной сложности и малой наглядности вызвал большое число попыток доказать это утверждение как теорему, вывести его из остальных аксиом. По-видимому, этот постулат отсутствовал в сочинениях математиков IV в. до н. э. Во всяком случае Аристотель, разбирая в своей «Первой аналитике» логическую ошибку «постулирование основания» (petitio principi), т. е. неявное использование утверждения, равносильного доказываемому, пишет: «Так поступают те, кто думает описать параллельные линии. В самом деле, они, сами того не зная, [в основу доказательства] берут то, что [само] не может быть доказано, если [линии] не параллельны» [2]. Чтобы избежать этой логической ошибки, необходимо открыто постулировать V постулат, что и было сделано в «Началах» Евклида, или эквивалентное ему утверждение.

Вопрос о V постулате и теории параллельных линий рассматривался многими учеными на протяжении двух тысяч лет. По-видимому, первым сочинением, посвященным этому вопросу, появившимся уже через несколько десятков лет после «Начал», был недошедший до нас трактат Архимеда «О параллельных линиях», название которого приведено в списке сочинений Архимеда, имевшихся у арабов, в «Истории мудрецов» Джамал ад-Дина ал-Кифти (1172—1231) наряду с «Измерением круга» и «О шаре и цилиндре», известными по греческим рукописям, и с «Леммами», «О семиугольнике» и «О касающихся кругах», сохранившимися только в арабских переводах Сабита ибн

---

[1] Евклид. Начала, т. I, стр. 15.

[2] Аристотель. Аналитики первая и вторая. Перевод и примечания Б. А. Фохта. М., 1952, стр. 155. В русском переводе «Первой аналитики» слово graphein, означающее и «описать» и «провести», переведено не первым значением, соответствующим сути дела, а вторым.

Корры [149, стр. 66][1]. О содержании указанного трактата Архимеда мы можем только догадываться. Не исключено, что Архимед исходил здесь из другого определения параллельной прямой, именно как линии, описываемой свободным концом перпендикуляра данной длины, другой конец которого движется вдоль данной прямой (разумеется, предполагается, что все происходит в одной плоскости). Допущение: описанная таким образом линия — прямая, содержит в себе V постулат; из него, в частности, сразу следует, что параллель к данной прямой является равноотстоящей от нее прямой. Наша гипотеза во всяком случае согласуется с отношением Архимеда к применению движения в геометрии. Например, спираль, изучение свойств которой является одним из лучших достижений великого сиракузянина, получает у него чисто кинематическое определение, которое обычно приводится и в наших учебниках. В этом вопросе Архимед стоял на позиции, отличной от евклидовой. Автор «Начал» старательно избегал употребления в геометрии движения, на чем настаивал и Аристотель. Впрочем, полностью избежать движения Евклид в ряде случаев не смог; в частности, сфера определяется у него через вращение полукруга относительно его неподвижного диаметра.

Не исключено также, что Архимед сразу определил параллельные как равноотстоящие прямые на плоскости. Обе наши гипотезы находят подтверждение в том, что соответствующие определения параллельности встречаются, как мы сейчас увидим, у последующих геометров. Возможно, конечно, что он пользовался евклидовым определением параллельных, как непересекающихся прямых, лежащих в одной плоскости, и некоторым другим постулатом. Как бы то ни было, именно определение через равноотстояние или эквидистантность, по свидетельству Прокла Диадоха (410—485), положил в основу своего доказательства V постулата философ, астроном и математик Посидоний (135—50 до н. э.) — уроженец Сирии, работавший в Риме: «Параллельными называются такие прямые, которые находятся в одной плоскости, не сближаются и не удаляются, так что все перпендикуляры, проведенные из точек одной из них к другой, равны между со-

---

[1] Последние три трактата переведены с арабского в кн.: Архимед. Сочинения, стр. 391—440.

бой»[1] Это определение параллельных линий, основанное на предположении о том, что геометрическое место точек плоскости, расположенных по одну сторону от прямой на равном расстоянии от нее, является прямой линией, фактически содержит утверждение, равносильное V постулату и, как мы увидим ниже, в геометрии Лобачевского, в которой V постулат не выполняется, такое геометрическое место является кривой линией. Поэтому утверждение V постулата легко выводится как следствие из этого определения параллельных линий.

Вполне возможно, что Посидоний сознательно заменил определение параллельных линий Евклида другим определением, более наглядным и делающим излишним сложный V постулат. Включение аксиом в неявном виде в определения встречались и у самого Евклида, таково, например, определение квадрата: «Из четырехсторонних фигур квадрат есть та, которая и равносторонняя и прямоугольная»[2]: тот факт, что все углы равностороннего четырехугольника с равными углами — прямые, как и факт существования прямоугольника, также содержат утверждение, равносильное V постулату, и в геометрии Лобачевского все углы четырехугольника с равными углами — острые. Наиболее раннее первое известное нам доказательство V постулата на основе определения параллельных линий как равноотстоящих принадлежит византийскому математику V в. Аганису, сохранившееся в передаче персидского математика X в. ан-Найризи[3]. Доказательство Аганиса состояло в том, что сначала из его определения параллельных линий выводится существование прямоугольника, ограниченного двумя параллельными линиями и двумя их общими перпендикулярами (рис. 8), а из существования прямоугольника выводится V постулат для случая, когда секущая перпендикулярна одной из двух данных прямых (в этой формулировке постулат гласит: «перпендикуляр и наклонная пересекаются»). Аганис рассматривает прямые AB и CD и секущую EG, перпендикулярную AB (рис. 9). Выбрав на прямой CD произвольную точку F, он опускает из

[1] Proclus Diadochus. In primum Euclidis Elementorum libri Commentarii, ed. G. Friedlein, Leipzig, 1873, стр. 176.

[2] Евклид. Начала, т. I, стр. 13.

[3] Г. Б. Петросян, Б. А. Розенфельд. Доказательство Аганиса пятого постулата Евклида. Известия Академии наук Армянской ССР, т. 13, № 1, 1960, стр. 153—164.

нее перпендикуляр FI на секущую EG. Далее, секущая EG несколько раз делится пополам до тех пор, пока одна из точек деления M не окажется между точками I и G (на рис. 9 точка M получается делением отрезка EG на 4 части). В точке M восставляется перпендикуляр MN до пересечения с прямой CD и строится отрезок GQ прямой CD

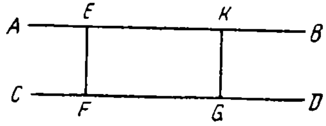


Рис. 8. Начало доказательства Аганиса V постулата

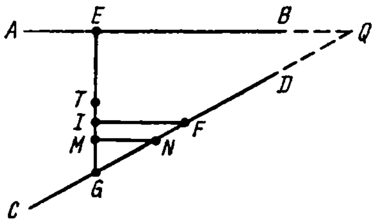


Рис. 9. Окончание доказательства Аганиса V постулата

больший отрезка MN во столько же раз, во сколько отрезок EG больше отрезка MG. Дальнейшее построение Аганиса равносильно построению прямоугольника со стороной EG и диагональю GQ. Построение Аганиса применимо и в случае, когда секущая не перпендикулярна ни к одной из данных прямых — в этом случае прямоугольник следует заменить параллелограмом (рис. 10). Тот факт, что отрезок EG можно делить пополам до тех пор, пока не получится отрезок GM, меньший отрезка GI, является следствием так называемой аксиомы Архимеда, в силу которой для двух неравных длин, площадей или объемов всегда существует такое натуральное число n, что меньшая величина, будучи сложена с собой n раз, превзойдет большую однородную с ней величину (Архимед формулирует эту аксиому несколько иначе[1]); эта аксиома была известна еще Евдоксу и приводится Евклидом в виде 4-го определения V книги «Начал» значительно позже теории параллельных линий, излагаемой им в I книге[2].

Возможно, что доказательства Посидония и Архимеда состояли из тех же этапов и, в частности, также содержали применение аксиомы Архимеда; может быть, эти доказательства были более полными, т. е. в них прямоугольник заменялся параллелограмом или общий случай V постулата выводился из случая, рассматривавшегося Аганисом.

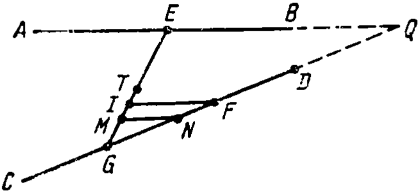


Рис. 10. Модификация чертежа Аганиса

Прокл сообщает и о другом доказательстве V постулата, принадлежащем знаменитому астроному Клавдию Птолемею (ум. ок. 170 г. н. э.)[3]. Птолемей сначала доказывал, что при пересечении двух параллельных прямых третьей внутренние односторонние углы в сумме равны двум прямым: он предполагал, что эти углы меньше двух прямых с одной стороны секущей, тогда такие же углы с другой стороны, как смежные с первыми, должны быть больше двух прямых. Но прямые по одну сторону от секущей «не более параллельны», чем те же прямые по другую сторону от нее, из чего делался неправомерный вывод, что если с одной стороны внутренние односторонние углы меньше двух прямых, они должны быть меньше и с другой стороны

---

[1] Архимед. Сочинения, стр. 97: «Большая из двух неравных линий, поверхностей или тел превосходит меньшую на такую величину, которая, будучи складываема сама с собой, может превзойти любую заданную величину из тех, которые могут друг с другом находиться в определенном отношении».

[2] Евклид. Начала, т. I, стр. 142: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга».

[3] Proclus Diadochus. Commentarii.., стр. 191—193.

роны. Полученное «противоречие» доказывало утверждение Птолемея, равносильное V постулату, из которого он легко выводил V постулат, пользуясь доказательством от противного.

Помимо сведений о доказательствах V постулата, данных Посидонием и Птолемеем, Прокл приводит и свое собственное доказательство [1]. Прокл рассматривает прямые AB и CD и секущую EF, составляющую с этими прямыми внутренние односторонние углы BEF и EFD, в сумме меньшие двух прямых (рис. 11). Прокл проводит через точку

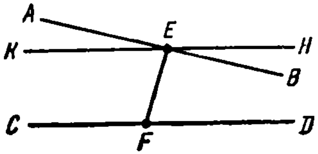


Рис. 11. Доказательство Прокла V постулата

E прямую KH, параллельную прямой CD, и считает, что, так как расстояние между точками сторон угла HEB по мере их удаления от его вершин E может быть сделано сколь угодно большим, оно обязательно превзойдет расстояние между параллельными прямыми KH и CD и, следовательно, сторона EB этого угла обязательно пересечется с прямой CD. И Прокл совершает «постулирование основания», так как предположение, что расстояние между непересекающимися прямыми на плоскости (называемые им параллельными) ограничено, эквивалентно доказываемому им V постулату (в геометрии Лобачевского расстояние между непересекающимися прямыми на плоскости может быть сколь угодно большим).

В письме Алам ад-Дина Кайсара ал-Ханафи (1178—1258) к Насир ад-Дину ат-Туси цитируется доказательство V постулата византийского математика VI в. Симпликия [2],

---

[1] Proclus Diadochus. Commentarii..., стр. 364—373.

[2] См.: Насир ад-Дин ат-Туси. Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий. Перевод Б. А. Розенфельда, статья и примечания Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. «Историко-матем. исследования», вып. 13. М., 1960, стр. 475—532 (см. стр. 481, 523 и 532), а также Б. А. Розенфельд, А. П. Юш-

в котором совершается еще один вид «постулирования основания» — предполагается, что через точку внутри угла всегда можно провести прямую, пересекающую обе его стороны (рис. 12). Это утверждение также эквивалентно V постулату и не выполняется в геометрии Лобачевского. Ту же ошибку совершил в своем доказательстве V постулата в конце XVIII в. французский геометр А. М. Лежандр. Заметим, что Симпликий был учеником Дамаския, в свою

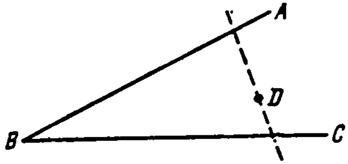


Рис. 12. Предположение Симпликия

очередь ученика Прокла, и упоминавшегося выше Аганиса; сведения о доказательстве Аганиса, сообщаемые ан-Найризи, основываются на сообщении Симпликия.

Математикам стран ислама, как мы видим, были известны и трактат Архимеда о параллельных линиях (хотя бы по названию) и доказательства Аганиса и Симпликия, а из геометрического трактата Хайяма мы увидим, что ему, по-видимому, было знакомо и доказательство Прокла. «Начала» Евклида были переведены на арабский язык ал-Хаджжаджем около 800 г. Многие математики стран ислама участвовали в комментировании «Начал»: только ко временам Хайяма можно насчитать по крайней мере 30 арабских сочинений такого рода [1]. Особенное внимание комментаторов привлекали аксиоматика и основанная на V постулате теория параллельных, а также общая теория отношений V книги и теория квадратичных иррациональностей трудной X книги. Одними из первых комментариев

кевич. Доказательства пятого постулата Евклида у Сабита ибн Корры и Шамс ад-Дина ас-Самарканди. «Историко-матем. исследования», вып. 14. М., 1961, стр. 587—602 (см. стр. 599—600 и 602).

[1] E. B. Plooij. Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as critized by Arabian commentators. Rotterdam, 1950, стр. 3—10.

к Евклиду были толкования определений I и V книг «Начал», данные Абу Насром ал Фараби [1].

Первыми комментариями, относящимися к V постулату, было «Усовершенствование Начал Евклида» ал-Аббаса ибн Саида ал-Джаухари, работавшего в первой половине IX в. в Багдаде. Его доказательство, сохранившееся в передаче Насир ад-Дина ат-Туси [2], основано на той же предпосылке, что и доказательство Симпликия. На ней же основано и гораздо более позднее доказательство самаркандского математика конца XIII в. Шамс ад-Дина Мухаммеда ас-Самарканди [3].

Два трактата, специально посвященные доказательству V постулата, принадлежат Сабиту ибн Корре. Один из них называется «Книга о доказательстве известного постулата Евклида» [4], другой — «Книга о том, что две линии, проведенные под углами, меньшими двух прямых, встретятся» [5]. В первом случае Ибн Корра, основывается на предположении, что если две прямые удаляются друг от друга с одной стороны, они обязательно приближаются с другой стороны. Это эквивалентно V постулату и в геометрии Лобачевского существуют прямые, удаляющиеся друг от друга по обе стороны от их общего перпендикуляра. С помощью этого предположения Ибн Корра доказывает существование параллелограмма, из чего выводит V постулат с помощью рассуждения, близкого к рассуждению Аганиса (см. рис. 3).

Во втором трактате Ибн Корра исходит из существования равноотстоящих прямых на плоскости, с помощью чего доказывается существование прямоугольника, из чего

---

[1] Абу Наср ал-Фараби. Комментарии к трудностям во введениях в первой и пятой книгах Евклида. Перевод М. Ф. Бокштейна, введение и примечания Б. А. Розенфельда. «Проблемы востоковедения», 1959, № 4, стр. 93—103.

[2] Насир ад-Дин ат-Туси. Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий, стр. 501—508.

[3] Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич. Доказательства пятого постулата Евклида у Сабита ибн Корры и Шамс ад-Дина ас-Самарканди, стр. 598—601.

[4] Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич. Доказательства пятого постулата Евклида у Сабита ибн Корры и Шамс ад-Дина ас-Самарканди, стр. 593—597.

[5] Сабит ибн Корра. Книга о том, что две прямые, проведенные под углами, меньшими двух прямых, встретятся. Перевод и примечания Б. А. Розенфельда. «Историко-матем. исследования», вып. 15. М., 1963, стр. 363—380.

выводится V постулат. Причем, если Аганис из существования прямоугольника выводил только частный случай V постулата, когда секущая перпендикулярна одной из линий, Ибн Корра здесь доказывает сразу общий случай V постулата. В этом доказательстве Ибн Корры общий ход рассуждений также близок к рассуждениям Аганиса. В обоих доказательствах Ибн Корры существенно используется аксиома Архимеда. Наиболее интересным во втором трактате является то, что здесь Ибн Корра не постулирует существование равноотстоящих прямых на плоскости, определяя параллельные прямые как равноотстоящие, как это делали Посидоний и Аганис, а доказывает существование этих прямых на основе такой предпосылки: «Всякое тело, которое мы представляем движущимся целиком в одну сторону одним простым движением в одном направлении, таково, что всякая его точка движется в этом направлении, поэтому линия, описываемая этой точкой, является прямой линией в нем» [1]. В этой предпосылке также скрывается утверждение, эквивалентное V постулату: «одно простое движение» — это движение вдоль прямой линии, причем Ибн Корра имеет в виду, разумеется, равномерное прямолинейное движение, при котором все точки движущегося тела «движутся в одном направлении», т. е. описывают параллельные прямые; однако такое движение возможно только в геометрии Евклида, в геометрии Лобачевского при движении плоскости, когда некоторая прямая переходит в себя, остальные точки описывают кривые линии. Самое привлечение движения для геометрических доказательств и в древности, и в средние века встречалось весьма редко, так как противоречило известному требованию Аристотеля: «Математические науки чужды движению» [2]. Еще Евклид пытался, хотя и не всегда успешно, избежать применения движения. Вопросу о применимости движения к геометрии посвящено введение ко второму трактату Ибн Корры, где указывается, что движение в форме наложения применялось Евклидом в IV и VIII предложениях I книги «Начал» [3], а «если подумать, то уже в первом предложении, предшествующем

---

[1] Сабит ибн Корра. Книга о том, что две прямые, проведенные под углами, меньшими двух прямых, встретятся, стр. 365.

[2] Аристотель. Метафизика. Перевод А. В. Кубицкого. М., 1934, стр. 33.

[3] Евклид. Начала, т. I, стр. 18—19 и 23.

всей этой книге, этот принцип применяется для установления равенства прямых линий, выходящих из центра определенного круга» [1], т. е. радиусов круга. Более того, такая основная геометрическая операция, как измерение величин, требует наложения одной величины на другую или, как говорит Ибн Корра, «приведения в движение одной из двух вещей, сравниваемых друг с другом, т. е. поднятия ее с места, переноса ее и т. д. без изменения ее формы» [2].

Кинематические соображения Ибн Корры снова напоминают нам об Архимеде. Не исключено, что эти соображения багдадского геометра восходят к недошедшему до нас трактату Архимеда о параллельных линиях.

Элементарное доказательство V постулата на основе определения параллельных линий как равноотстоящих прямых на плоскости приведено в «Книге знания» Ибн Сины [3].

К началу XI в. относится также доказательство V постулата в «Книге комментариев к введениям книги Евклида „Начала“» Абу Али ибн ал-Хайсама [4], где, так же как во втором трактате Ибн Сины, центральным пунктом которого служит доказательство существования прямоугольника, в свою очередь основанное на предложении о существовании равноотстоящих прямых, обосновываемом с помощью кинематических соображений, аналогичных соображениям Ибн Корры. Доказательство существования прямоугольника состоит в рассмотрении четырехугольника с тремя прямыми углами и трех гипотез о четвертом угле этого четырехугольника и в опровержении гипотез о том, что этот угол острый или тупой. Этот четырехугольник (рис. 13) и три гипотезы о его четвертом угле, из которых «гипотеза прямого угла» выполняется в геометрии Евклида, а «гипотеза острого угла» — в геометрии Лобачевского, сыграл важную роль в истории неевклидовой геометрии;

---

[1] С а б и т и б н К о р р а. Книга о том, что две прямые... встретятся, стр. 364; ср. Е в к л и д. Начала, т. I, стр. 16.

[2] С а б и т и б н К о р р а. Книга о том, что две прямые... встретятся, стр. 363—364.

[3] A v i c e n n e. Le livre de science, t. I. Physique et mathématiques, trad. M. Achena et H. Massé. Paris, 1958, стр. 94—96.

[4] Б. А. Р о з е н ф е л ь д. Доказательство пятого постулата Евклида средневековых математиков Хасана ибн ал-Хайсама и Льва Герсонида. «Историко-матем. исследования», вып. 11. М., 1958, стр. 733—782.

его часто называют четырехугольником Ламберта по имени эльзасского математика И.-Г. Ламберта (1728—1777), вновь рассматривавшего этот четырехугольник. Установив существование прямоугольника, Ибн ал-Хайсам сначала доказывает V постулат для случая перпендикуляра и наклонной, используя, подобно Аганису, аксиому Архимеда, а затем V постулат доказывается в случаях, когда оба угла, составляемые секущей с данными прямыми, острые и когда один из этих углов острый, а другой — тупой.

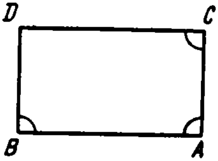


Рис. 13. Четырехугольник Ибн ал-Хайсама—Ламберта

В своем другом сочинении «О разрешении сомнений в книге Евклида «Начала»», посвященном комментированию самих предложений «Начал», Ибн ал-Хайсам, сославшись на то, что он доказал V постулат в книге комментариев ко введениям, указывает, что этому постулату равносильно утверждение: две пересекающиеся прямые не параллельны одной линии (т. е. через точку нельзя провести двух различных параллелей к одной прямой, как это условно изображено на рис. 14), причем «это утверждение более наглядно для чувства и более проникает в душу, чем то» [1].

Хайям в своем геометрическом трактате упоминает доказательство Ибн ал-Хайсама из его «Книги комментариев ко введениям», «доказательство ан-Найризи», под которым скорее всего следует понимать доказательство Аганиса, изложенное в комментариях ан-Найризи к «Началам», и неизвестные нам доказательства ал-Хазина и математика X в. аш-Шанни.

«Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» Хайяма близки по названию к комментариям

---

[1] См.: Б. А. Розенфельд; А. П. Юшкевич. Примечания к трактату Насир ад-Дина ат-Туси о параллельных линиях. «Историко-матем. исследования», вып. 13, 1960, стр. 526.

ал-Фараби и Ибн ал-Хайсама. Это сочинение Хайяма разделено на три книги, которым предшествует предисловие. В предисловии автор говорит о предмете сочинения и некоторых своих предшественниках. Характерна высокая оценка философско-логических трудов Аристотеля. Хайям не только принимает учение Аристотеля о структуре дедуктивной науки и его теорию доказательства, но следует за великим греком и в ряде более частных вопросов.

В первой книге «Комментариев» изложена теория параллельных, а в двух следующих — учение об отношении,

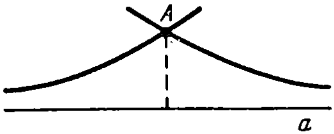


Рис. 14. Утверждение Ибн ал-Хайсама, равносильное V постулату

которое мы рассмотрим в следующей главе. Хайям не сомневается в истинности классического постулата Евклида, но считает его менее очевидным, чем ряд предложений, которые Евклид считал нужным доказывать, вроде теоремы о том, что равные центральные углы высекают на окружностях равных кругов равные дуги. Хайям отвергает попытки Герона, Евтокия, ал-Хазина, аш-Шанни и ан-Найризи доказать V постулат, как логически несостоятельные. Он отвергает и доказательство Ибн ал-Хайсама, которое критикует за применение движения, так как сам вслед за Аристотелем исключает из геометрии «определения такого рода, дающие место движению» [3, стр. 116].

Беда предшествующих ученых, по мнению Хайяма, состоит в том, что «они не учитывали принципов, заимствованных у философа», т. е. Аристотеля. Хайям приводит пять таких «философских принципов»: I) «Величины можно делить до бесконечности, т. е. они не состоят из неделимых»; II) «Прямую линию можно продолжать до бесконечности»; III) «Всякие две пересекающиеся прямые линии раскрываются и расходятся по мере удаления от вершины угла пересечения»; IV) «Две сходящиеся прямые линии пересекаются, и невозможно, чтобы две сходящиеся прямые линии расходились в направлении схождения»; V) «Из двух неравных ограниченных величин меньшую можно взять с такой кратностью, что она превзойдет большую» [3, стр. 120—121]. Последний принцип — знакомая нам аксиома Архимеда, которую Хайям явно вводит перед изложением своей теории параллельных. I, II, и V принципы — известные утверждения Аристотеля: «Длина и время, как и вообще все непрерывное, называется бесконечным в двояком смысле или в отношении деления, или в отношении границ»; «Невозможно ничему непрерывному состоять из неделимых частей, например, линии из точек, если линия непрерывна, а точка неделима»; «Конечную величину всегда можно исчерпать любой определенной величиной» [1]. III принцип — утверждение Аристотеля, цитировавшееся Проклом, который говорит, что его доказательство V постулата «предполагает аксиому, которой пользовался Аристотель в своем доказательстве конечности мира: именно, если из одной точки выходят две прямые, то при неограниченном продолжении их растояние между ними становится больше любой конечной величины» [2]. И только IV принцип не встречается в известных нам сочинениях Аристотеля. Этот-то принцип играет основную роль в хайямовском доказательстве V постулата; он состоит из двух утверждений, каждое из которых эквивалентно V постулату.

Вначале Хайям доказывает, что два перпендикуляра к одной прямой не могут пересекаться, так как в этом случае они должны пересекаться в двух точках по обе стороны от этой прямой. Отсюда и из первого утверждения принципа Хайяма следует, что два перпендикуляра и одной прямой не могут сходиться.

Из второго утверждения принципа Хайяма следует, что эти два перпендикуляра не могут и расходиться, так как они должны были бы расходиться друг от друга по обе стороны от этой прямой. Поэтому два перпендикуляра к одной прямой должны находиться на постоянном расстоянии.

Далее Хайям доказывает 8 предложений, которые должны быть, по его мнению, вставлены в I книгу

---

[1] А р и с т о т е л ь. Физика. Перевод В. П. Карпова. М.— Л., 1937, стр. 128, 124 и 64.

[2] P r o c l u s D i a d o c h u s. Commentarii..., стр. 370.

«Начал» Евклида вместо 29-го предложения этой книги, с которого Евклид начинает изложение теории параллельных линий, основанной на V постулате (первые 28 предложений «Начал» не зависят от V постулата). Здесь он строит четырехугольник, образованный двумя перпендикулярами AC и BD равной длины, восставленными к одной прямой AB, и отрезками AB и CD (рис. 15). Этот четырехугольник, так же как четырехугольник Ибн ал-Хайсама — Ламберта, сыграл важную роль в истории неевклидовой геометрии; его часто называют четырехугольником Саккери, по имени итальянского математика

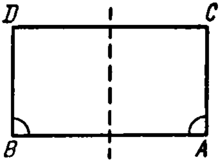


Рис. 15. Четырехугольник Хайяма— Саккери

Дж. Саккери (1667—1733), вновь рассматривавшего такой четырехугольник. Заметим, что четырехугольник Хайяма — Саккери делится своей осью симметрии на два четырехугольника Ибн ал-Хайсама — Ламберта.

В I предложении Хайям доказывает, что верхние углы рассматриваемого им четырехугольника равны между собой. Во II предложении Хайям доказывает, что перпендикуляр, восставленный в середине нижнего основания этого четырехугольника, перпендикулярен к верхнему основанию этого четырехугольника и делит это верхнее основание пополам.

Особенно важно III предложение Хайяма, в котором он доказывает, что верхние углы рассматриваемого им четырехугольника прямые. Для этого рассматриваются три гипотезы, состоящие в том, что эти углы являются прямыми, острыми и тупыми. Восставляя в середине E нижнего основания AB четырехугольника (рис. 16) перпендикуляр EG, пересекающий верхнее основание CD в точке G, Хайям продолжает этот перпендикуляр до такой точки K, что $EG = GK$, затем восставляет перпендикуляр к прямой EK в точке K, находит точки H и F его пересечения с продолжением сторон AC и BD и показывает, что $CH = DF$, т. е. четырехугольник $ABHF$ также является четырехугольником того же типа. Далее Хайям говорит: «Если углы ACD и BDC прямые, это истинно поневоле. Если же они не прямые, то каждый из них или меньше прямого, или больше его.

Пусть сначала они меньше прямого. Если мы наложим плоскую фигуру CF на плоскую фигуру CB, то GK наложится на EG так же, как HF на AB, причем HF будет равна линии NS, так как угол HCG больше угла

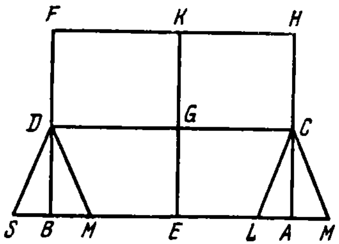
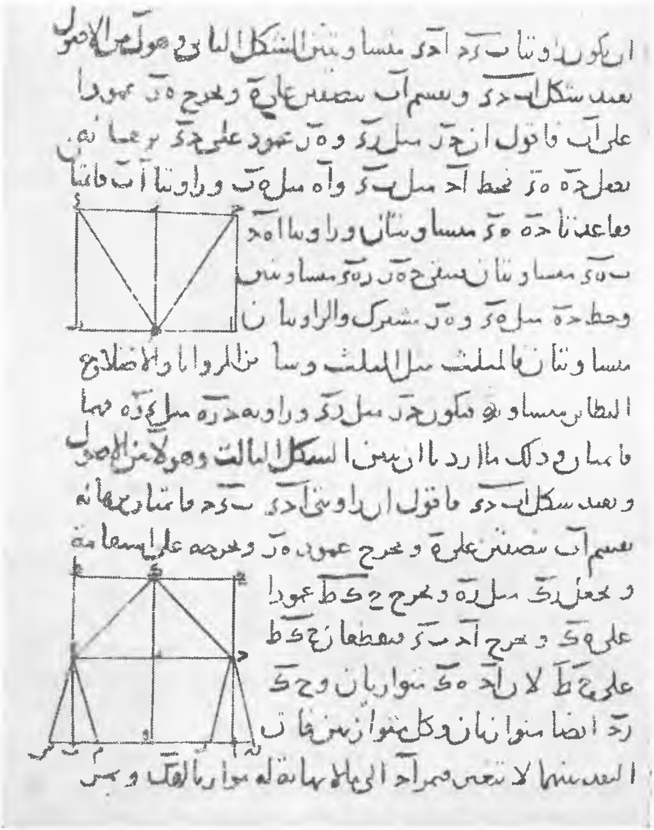


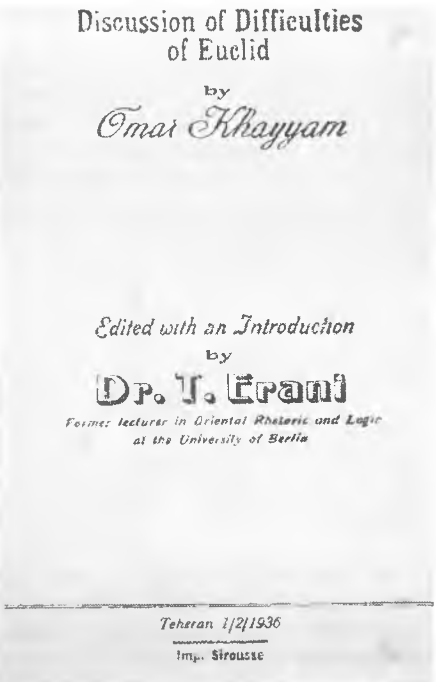
Рис. 16. Основное предложение доказательства Хайяма V постулата

ACG и линия HF больше AB. Точно так же, если эти две линии [CH и DF] продолжать до бесконечности, то каждая из соединяющих их линий в порядке последовательности будет больше, чем другая. Поэтому линии AC, BD будут расходиться. Точно так же линии AC, BD при продолжении в другом направлении будут расходиться, что доказывается совершенно так же, так как положения по обе стороны при наложении необходимо совпадают. Поэтому две прямые линии пересекают под прямыми углами прямую линию, а затем по обе стороны от этой линии расстояние между ними увеличивается. Но это в силу аксиомы нелепо, если представить себе прямизну. Поэтому между этими двумя линиями имеется определенное расстояние. Это из того, что рассматривалось философом.

Пусть теперь каждый из них [углов ACD и BDC] больше прямого. Тогда при наложении линия HF будет равна LM, которая будет меньше AB, так же как все соединяющие линии, и эти две линии будут сходиться. С другой стороны, также будет схождение, так как поло-



«Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида». Лист 81. об. рукописи Cod. or. 199/8. Лейденской университетской библиотеки (III *предложение доказательства V постулата*)



Титульный лист в издании Таги Эрани (Тегеран, 1936) «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида».

жения по обе стороны при наложении совпадают. Если ты немного подумаешь, ты это поймешь. Но это, согласно сказанному выше, опять нелепо» [3, стр. 121—122].

Мы видим, что в случае гипотез острого и тупого углов Хайям сначала перегибает чертеж по прямой CD и показывает, что при этом отрезок HF совпадает при гипотезе острого угла с отрезком NS, а при гипотезе тупого угла — с отрезком LM, т. е. при первой гипотезе верхнее основание четырехугольника больше нижнего, и боковые стороны удаляются друг от друга, а при второй гипотезе верхнее основание меньше нижнего, и боковые стороны приближаются друг к другу. Далее, перегибая чертеж по прямой AB, Хайям видит, что при гипотезе острого угла два перпендикуляра к одной прямой расходятся по обе стороны от этой прямой, а при гипотезе тупого угла эти перпендикуляры сходятся по обе стороны от этой прямой. Но, как мы видели из IV принципа, заимствованного Хайямом у философа, следует, что два перпендикуляра к одной прямой находятся на постоянном расстоянии («это из того, что рассматривалось философом»). Таким образом, как гипотеза острого угла, так и гипотеза

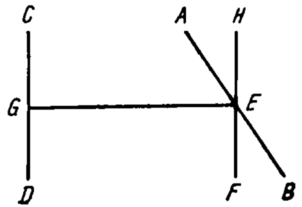


Рис. 17. Окончание доказательства Хайяма V постулата

тупого угла приведены к противоречию с его принципом. Тем самым доказано существование прямоугольника.

В IV предложении доказано, что в прямоугольнике противоположные стороны равны, в V предложении — что два перпендикуляра к одной прямой обладают тем свойством, что любой перпендикуляр к одному из них является их общим перпендикуляром. Согласно VI предложению, если две прямые параллельны в смысле Евклида, т. е. не пересекаются, они являются двумя перпендикулярами к одной прямой.

В VII предложении устанавливается, что если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, накрестлежащие и соответственные углы равны, а внутренние односторонние углы составляют в сумме два прямых. Это предложение совпадает с 29-м предложением первой книги Евклида, но при его доказательстве Хайям опирается уже не на V постулат Евклида, а на свои предложения.

И, наконец, в VIII предложении доказан V постулат Евклида: прямые EA и GC, пересекающие прямую EG

под углами AEG и CGE, которые в сумме меньше двух прямых (рис. 17), продолжаются и если угол AEG меньше угла EGD, строится угол GEH, равный углу EGD. Тогда прямые EH и GC параллельны. Поэтому в силу VI предложения прямые EH и GC находятся на постоянном расстоянии и, следовательно, прямые GC и EA приближаются друг к другу и, в силу принципа Хайяма, эти прямые пересекаются. Это последнее предложение близко к доказательству V постулата Прокла с той разницей, что постоянство расстояния между непересекающимися прямыми EH и CD у Хайяма обосновывается, а у Прокла ограниченность этого расстояния молчаливо предполагалась.

Теории параллельных линий посвящено упоминавшееся сочинение Насир ад-Дина ат-Туси «Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий». В этом трактате вначале излагаются и критикуются теории параллельных линий Ибн ал-Хайсама, ал-Джаухари и Хайяма. Ат-Туси, писавшему свой трактат в государстве ассасинов (он закончил его до 1251 г., когда умер Алам ад-Дин ал-Ханафи, с которым ат-Туси переписывался по поводу этого трактата, а ат-Туси находился у ассасинов до монгольского завоевания Ирана, которое началось в 1253 г.) в условиях изоляции от внешнего мира, были недоступны многие интересовавшие его математические сочинения. В частности, в это время ат-Туси не располагал «Книгой комментариев к введениям книги Евклида «Начала»» Ибн ал-Хайсама, где приводилось его доказательство V постулата, и был знаком только с его трактатом «О разрешении сомнений в книге Евклида «Начала»». Поэтому из слов Ибн ал-Хайсама о равносильности V постулата утверждению о невозможности существования двух пересекающихся прямых, параллельных третьей прямой, и о том, что последнее утверждение нагляднее V постулата, ат-Туси заключил, будто Ибн ал-Хайсам не пытался доказывать V постулат, а только хотел заменить его более наглядным утверждением. Ат-Туси цитирует не всю часть геометрического трактата Хайяма, относящуюся к параллельным линиям, а только восемь предложений, в которых проводится доказательство V постулата, и не замечает, что доказательство Хайяма основано на IV «принципе, заимствованном у философа», состоящем из двух утверждений, равносильных V постулату. Ат-Туси считает, что Хайям совершает в своем доказательстве логическую ошибку, воспользовавшись утверждением о том, что расстояние между двумя пересекающимися прямыми неограниченно увеличивается. На самом деле это утверждение не зависит от V постулата, и упрек ат-Туси Хайяму неоснователен.

Далее ат-Туси дает два варианта своего доказательства V постулата, в одном из которых использует ряд

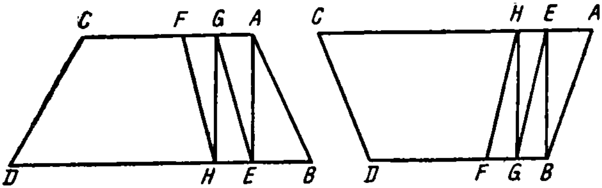


Рис. 18. Доказательство ат-Туси V постулата

предложений Хайяма, в другом — ряд предложений ал-Джаухари. Центральное место в обоих вариантах этого доказательства также занимает четырехугольник Хайяма — Саккери и три гипотезы о его верхних углах. Однако ат-Туси опровергает гипотезы острого и тупого угла другим способом (рис. 18). В случае гипотезы тупого угла в вершине A восставляется перпендикуляр AE к основанию AC, в его конце E восставляется перпендикуляр EG к основанию BD и этот процесс можно повторять бесконечно. В случае гипотезы острого угла из вершин B опускается перпендикуляр BE на основание AC, из его конца E опускается перпендикуляр EG на основание BD и этот процесс также можно повторять бесконечно. Ат-Туси доказывает, что в первом случае перпендикуляры увеличиваются, а во втором случае уменьшаются, и считает это противоречащим симметрии четырехугольников относительно перпендикуляров, соединяющих середины верхних и нижних оснований. На самом деле все перпендикуляры, построенные по ат-Туси, оказываются по одну сторону от оси симметрии четырехугольника и доказывают, что основания четырехугольника Хайяма — Саккери приближаются друг к другу по обе стороны от оси симметрии в случае гипотезы тупого угла и удаляются друг от друга в случае гипотезы острого угла, что, как мы знаем, доказывал Хайям о двух перпендикулярах к одной прямой.

Переписка ат-Туси с ал-Ханафи показывает, что ат-Туси обсуждал свой трактат о параллельных линиях с другими учеными. По-видимому, под влиянием чьей-то критики, поместив оба варианта своего доказательства V постулата в свое «Изложение Евклида», в отличие от трактата, после формулировки V постулата, ат-Туси внес следующую вставку: «Я говорю, что последнее утверждение не является аксиомой и может быть доказано только в геометрической науке. Об этом лучше говорить не во введении и я докажу его в надлежащем месте. Вместо него я ставлю другое утверждение: если прямые линии, лежащие в одной плоскости, сходятся в одном направлении, они не могут в этом направлении расходиться, если только они не пересекаются» [1].

Доказательство V постулата имеется и в другой редакции «Изложения Евклида» ат-Туси, изданной в 1594 г. на арабском языке в Риме [2]. Эта редакция подвергнута значительно большей переработке, чем первая. Тот факт, что в библиотеках разных стран имеется около семидесяти рукописей первой редакции и только одна рукопись второй редакции (именно, рукопись библиотеки Медичи во Флоренции, с которой было произведено римское издание) указывает, что вторая редакция является более поздней. Возможно, что она была сделана уже после смерти ат-Туси на основе его сочинений. В этой редакции дано новое доказательство V постулата, также основанное на рассмотрении трех гипотез о верхних углах четырехугольника Хайяма — Саккери и опровержении гипотез острого и тупого угла. И здесь имеется постулат, заменяющий пятый, но он высказан некорректно: если его понимать буквально, он представляет собой утверждение, не зависящее от V постулата. Однако применяется на деле не это утверждение, а утверждение,

---

[1] Насир ад-Дин ат-Туси. Тахрир Уклидис фи илм ал-хандаса. Тегеран, 1888, стр. 4.

[2] Euclidis Elementorum geometricorum libri tredecim ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum arabice impressi. Romae, 1594, стр. 28—33.

близкое к постулату первой редакции. Это доказательство было переведено на латинский язык Дж. Валлисом в его работе «О пятом постулате и пятом определении VI книги Евклида» [1]. По работе Валлиса с этим доказательством познакомились многие ученые Европы, в том числе Дж. Саккери, который в своем «Евклиде, очищенном от всех пятен» [2] ссылался на ат-Туси, критиковал недостатки его доказательства и положил в основу своих доказательств V постулата опровержение гипотез тупого и острого угла о верхних углах того же четырехугольника. Легко опровергнув гипотезу тупого угла, Саккери сделал две попытки опровержения гипотезы острого угла и в обоих совершил довольно трудно обнаруживаемые ошибки.

После Насир ад-Дина ат-Туси на средневековом Востоке мы встречаем доказательство V постулата в «Жемчужине короны для украшения Дубаджа» ученика ат-Туси Кутб ад-Дина ат-Ширази (1236—1311) и в «Основных предложениях» упоминавшегося нами Шамс ад-Дина ас-Самарканди; последнее сочинение комментировалось самаркандским математиком Кази-заде ар-Руми; возможно, что флорентинская рукопись второй редакции «Изложения Евклида» ат-Туси, привезенная в Италию в конце XVI в. из Стамбула, также принадлежит одному из математиков самаркандской школы и была привезена в Стамбул основоположником стамбульской математической школы самаркандцем Ала ад-Дином Али Кушчи (ум. 1474).

Первое доказательство V постулата в Западной Европе предложили живший в Провансе во Франции Лев Герсонид (1288—1344) [3] и малоизвестный нам Альфонсо [4]. Оба они писали на древнееврейском языке, на который были переведены многие арабские математические трактаты. Их доказательства, как и попытки многих

[1] J. Wallis. De postulato quinto et definitione quinta lib. 6 Euclidis, Opera mathematica, t. II. Oxoniae, 1693, стр. 669—673.

[2] H. Saccherius. Euclides ab omne naevo vindicatus. Mediolani, 1733.

[3] См.: Б. А. Розенфельд. Доказательство пятого постулата Евклида средневековых математиков Хасана ибн ал-Хайсама и Льва Герсонида.

[4] Рукопись № Add. 26894/6 Британского музея, перевод которой на русский язык готовится к печати Г. М. Глускиной.

ученых стран ислама, основаны на доказательстве существования прямоугольника, у Герсонида — с помощью рассмотрения четырехугольника с четырьмя равными углами, у Альфонсо — с помощью четырехугольника Хайяма — Саккери. Доказательство Герсонида имеет много общего с доказательством Ибн ал-Хайсама; в доказательстве Альфонсо упоминается ан-Найризи и используется движение перпендикуляра к прямой, как у Ибн Корры и Ибн ал-Хайсама. Четырехугольник Хайяма — Саккери играет существенную роль и в доказательстве V постулата на латинском языке, принадлежащем Хр. Клавию (1577—1612), который также ссылается на «арабского Евклида» [1].

Мы уже упоминали теории параллельных линий европейских математиков Валлиса, Саккери, Ламберта и Лежандра. Первые две из них, появившиеся в конце XVII и начале XVIII в., написаны на латинском языке, последние две, относящиеся ко второй половине XVIII в., написаны, соответственно, по-немецки и по-французски. Валлис, проанализировав доказательство из римского издания ат-Туси, открыто заменил V постулат более наглядным, с его точки зрения, утверждением о существовании подобных фигур любых размеров. Доказательства Саккери и Лежандра, как уже указывалось, были основаны на ошибках (кроме упоминавшегося доказательства Лежандр предложил еще два). Ламберт в своей «Теории параллельных линий», рассмотрев три гипотезы о четвертом угле четырехугольника, который мы встречали у Ибн ал-Хайсама, опроверг только гипотезу тупого угла. Пытаясь опровергнуть гипотезу острого угла, он нашел большое число следствий из этой гипотезы, в том числе теоремы, что сумма углов треугольника меньше двух прямых, а площадь треугольника пропорциональна разности между суммой его треугольника и двумя прямыми. Сопоставляя это с теоремой Альберта Жирара (1595—1632) о том, что сумма углов треугольника на сфере, образованного дугами ее больших кругов, больше двух прямых (что равносильно гипотезе тупого угла), а площадь сферического треугольника пропорциональна разности между суммой его углов и двумя прямыми, Ламберт писал: «Мне

---

[1] Chr. Clavius. Euclidis Elementorum libri XV. Coloniae. 1596, стр. 50.

кажется очень замечательным, что вторая гипотеза оправдывается, если вместо плоских треугольников взять сферические. Я из этого почти должен был бы сделать заключение, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере. Во всяком случае должна же существовать причина, почему она на плоскости далеко не так легко поддается опровержению, как это могло быть сделано в отношении второй гипотезы» [1].

Многовековые попытки доказательства V постулата Евклида привели к открытию совершенно независимо

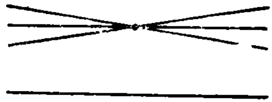


Рис. 19.
Постулат Лобачевского

друг от друга Н. И. Лобачевским (1792—1856), Я. Бойяи (1802—1860) и К. Гауссом (1777—1855) новой геометрии, в которой выполнены все аксиомы геометрии Евклида за исключением V постулата, который заменен противоположным утверждением: «через точку вне прямой можно провести более одной прямой в их плоскости, не пересекающейся с этой прямой» (рис. 19) [2].

Наиболее простой способ определения плоскости Лобачевского [3] может быть получен в порядке развития аналогии между окружностью и равносторонней гиперболой, которую впервые заметили Дж. Валлис и Л. Эйлер. В главе пятой мы рассматривали кривые, в уравнения которых входит параметр $\varkappa$, причем при $\varkappa = 1$ эти кривые

---

[1] J. H. Lambert. Theorie der Parallellinien, в книге: F. Engel und P. Stäckel. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig, 1895, стр. 202—203.

[2] Н. И. Лобачевский. О началах геометрии. Сочинения, I. М.— Л., 1946, стр. 186.

Мы не касаемся здесь истории этого великого открытия, впервые опубликованного Лобачевским в названном только что сочинении в 1829—1830 гг., а затем в одном мемуаре Я. Бойяи 1832 г. (заметки Гаусса по неевклидовой геометрии не были опубликованы при его жизни).

[3] См.: Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии. М., 1955.

являются окружностями, а при $\varkappa = -1$ — равносторонними гиперболами. Рассмотрим кривые такого вида с уравнениями

$$x^2 + \varkappa y^2 = c. \tag{1}$$

При $\varkappa = 1$ кривая (1) ($c > 0$)—окружность (рис. 20*а*), при $\varkappa = -1$ ($c > 0$ и $c < 0$) — равносторонняя гипербола (черт. 20*б* и *в*). Гиперболы (1) при $\varkappa = -1$ можно условно рассматривать как окружности, если считать, что левая часть (1) является квадратом расстояния OM

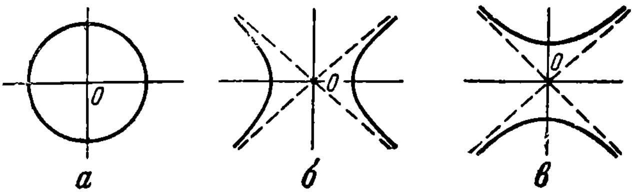


Рис. 20. Окружности на евклидовой и псевдоевклидовой плоскости

точки $M(x, y)$ от начала координат $O(0, 0)$. Если отказаться от обычного способа определений расстояний на плоскости, когда OM^2 равно левой части (1) при $\varkappa = 1$, и заменить его новым способом измерения расстояний, соответствующим $\varkappa = -1$, мы получим вместо обычной евклидовой плоскости так называемую псевдоевклидову плоскость. Квадрат расстояния M_1M_2 между произвольными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на обеих плоскостях равен

$$M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + \varkappa (y_1 - y_2)^2, \tag{2}$$

а угол между отрезками OM_1 и OM_2 определяется по формуле

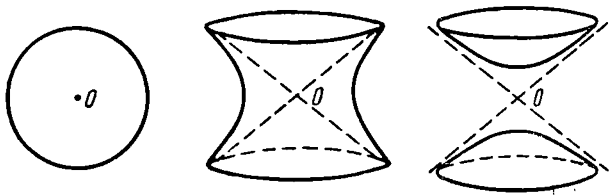
$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + \varkappa y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + \varkappa y_1^2}\sqrt{x_2^2 + \varkappa y_2^2}}. \tag{3}$$

При $\varkappa = -1$ выражение (2) может быть как положительным, так и отрицательным и равным нулю. В соответствии с этим на псевдоевклидовой плоскости кривая (1) при $c > 0$ является окружностью действительного радиуса $\sqrt{c}$, а при $c < 0$ является окружностью чисто мнимого радиуса $\sqrt{c} = i\sqrt{|c|}$.

При $\cos\varphi = 0$ отрезки OM_1 и OM_2 называются перпендикулярными, эти отрезки направлены по сопряженным диаметрам кривой (1) [1].

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести и в пространстве: для этого надо исходить не из кривой (1), а из поверхности

$$(4) \qquad x^2 + y^2 + \varkappa z^2 = c,$$



а *б* *в*

Рис. 21. Сферы в евклидовом и псевдоевклидовом пространстве

являющейся при $\varkappa = 1$ $(c > 0)$ сферой (рис. 21*а*), при $\varkappa = -1$, $c > 0$ однополостным гиперболоидом вращения (рис. 21*б*), а при $\varkappa = -1$, $c < 0$ — двуполостным гиперболоидом вращения (рис. 21*в*). Откажемся теперь от обычного способа определения расстояний, когда OM_2 равно левой части (4) при $\varkappa = 1$ и заменим его новым способом, соответствующим $\varkappa = -1$: в этом случае вместо обычного евклидова пространства мы получим псевдоевклидово пространство. Квадрат расстояния M_1M_2 между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ равен аналогичному (2) выражению

$$(5) \qquad M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \varkappa (z_1 - z_2)^2,$$

[1] Определение угла на псевдоевклидовой плоскости при $\cos\varphi \neq 0$ более сложно: в этом случае $\cos\varphi$ — действительное число большее 1 или меньшее — 1 или чисто мнимое число и угол φ в этих случаях является мнимым числом, соответственно, вида $i\psi$, $\pi - i\psi$ и $\pi/2 \pm i\psi$, где $\psi > 0$.

а угол между отрезками OM_1 и OM_2 определяется по аналогичной (3) формуле

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + \varkappa z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + \varkappa z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + \varkappa z_2^2}}. \tag{6}$$

При $\varkappa = -1$ поверхность (4) при $c > 0$ является сферой действительного радиуса $\sqrt{c}$, а поверхность (4) при $c < 0$ является сферой чисто мнимого радиуса $\sqrt{c} = i\sqrt{|c|}$.

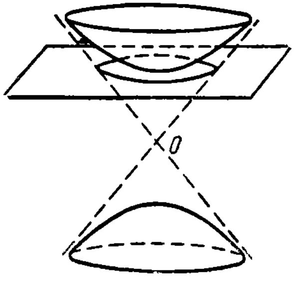


Рис. 22. Карта Бельтрами плоскости Лобачевского

Неевклидову плоскость Лобачевского можно определить как сферу чисто мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве с отождествленными диаметрально противоположными точками (вместо отождествления пар точек можно ограничиться рассмотрением одной, например верхней, полости этой поверхности). Прямыми линиями плоскости Лобачевского называются сечения этой сферы ее диаметральными плоскостями. Сферу в евклидовом пространстве с отождествленными диаметрально противоположными точками называют неевклидовой плоскостью Римана [1], причем за прямые линии этой плоско-

[1] Б. Риман (1826—1866) выступил в Геттингенском университете в 1854 г. с речью «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». В этой речи содержится блестящий набросок геометрии искривленных многомерных пространств, включающих, в частности, как пространства постоянной кривизны K: 1) пространство Евклида ($K = 0$), 2) неевклидово пространство Лобачевского ($K < 0$) и 3) неевклидово пространство Римана ($K > 0$).

сти также считают сечения сферы диаметральными плоскостями, т. е. большие круги. Плоскость Римана часто называют эллиптической плоскостью, а плоскость Лобачевского — гиперболической плоскостью.

Для того чтобы проверить, что на плоскости Лобачевского не выполняется V постулат, спроектируем верхнюю полость сферы чисто мнимого радиуса (4) при $\varkappa = -1$, $c = -1$ из ее центра на плоскость $z = 1$ (рис. 22). Вся плоскость Лобачевского при этом спроектируется внутри круга $x^2 + y^2 = 1$ этой плоскости, а прямые плоскости

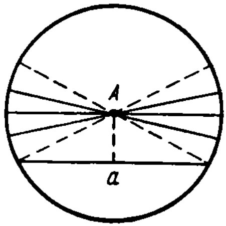


Рис. 23. Невыполнение V постулата на карте Бельтрами

Лобачевского изобразятся хордами этого круга. Это изображение плоскости Лобачевского называется картой Бельтрами [1].

Пусть для определенности точка A плоскости Лобачевского изображается на карте Бельтрами центром круга, а прямая a — горизонтальной хордой (рис. 23). Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую a изобразится и на карте Бельтрами перпендикуляром (хотя в общем случае углы при этом изображении искажаются), а перпендикуляр, восставленный в точке A к этому перпендикуляру, изобразится хордой, проведенной через точку A параллельно хорде a. Эти хорды, очевидно, не пересекаются. Но с хордой a не пересекаются и многие другие хорды, проведенные через точку A, которые, сле-

---

[1] Э. Бельтрами (1835—1900) принадлежат выдающиеся работы по интерпретациям плоскости Лобачевского на евклидовых поверхностях специального вида — «псевдосферах», на которых такая плоскость изображается неполностью, и во внутренней области евклидова круга, на которую плоскость Лобачевского отображается полностью.

довательно, составляют с перпендикуляром острый угол. Прямые плоскости Лобачевского, изображаемые на карте Бельтрами хордами круга, пересекающимися на его окружности, называются параллельными прямыми (на рис. 23 мы видим, что из точки A можно провести две параллели к прямой a), прямые, изображаемые на карте Бельтрами хордами без общих точек, называются расходящимися прямыми.

Нетрудно проверить, что все остальные аксиомы Евклида, кроме V постулата, на плоскости Лобачевского

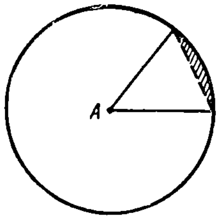


Рис. 24. Невыполнение предположения Симпликия на карте Бельтрами

выполняются. С другой стороны, на плоскости Римана любые две прямые пересекаются, и V постулат автоматически выполнен; в то же время на этой плоскости не выполнены некоторые другие аксиомы Евклида, например, на этой плоскости две прямые ограничивают часть плоскости (соответствующую «дольке» сферы между двумя большими полукругами с общими концами). Тот факт, что в геометрии Лобачевского не из всякой точки внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла, также очевиден на карте Бельтрами (рис. 24): такими свойствами обладают все точки, изображаемые точками сегмента, ограниченного окружностью круга и хордой, соединяющей точки пересечения окружности со сторонами угла. Поэтому предположение, которым неявно пользовались Симпликий, ас-Самарканди и Лежандр, предполагает выполнение V постулата.

Тот факт, что геометрия Лобачевского осуществляется на сфере чисто мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве, приводит к большой аналогии между геометрией Лобачевского и сферической геометрией. В частности (как это обнаружил Лобачевский), формулы тригонометрии на плоскости Лобачевского совпадают с формулами сферической тригонометрии, если в них считать радиус $\sqrt{c}$ сферы мнимым числом. И на обычной

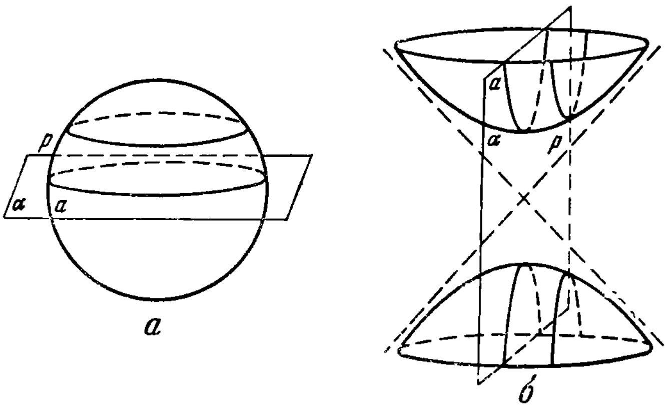


Рис. 25. Эквидистанты на сфере и на плоскости Лобачевского

сфере и на плоскости Лобачевского площадь S треугольника ABC связана с его углами A, B, C в радианной мере соотношением

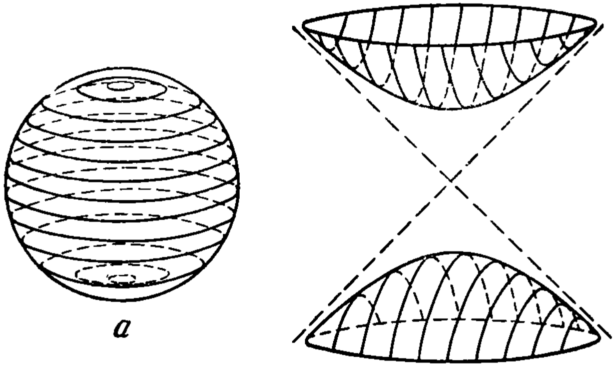
(7) $$S = c(A + B + C - \pi),$$

причем в случае обычной сферы $c > 0$ и $A + B + C > \pi$, а в случае плоскости Лобачевского $c < 0$ и $A + B + C < \pi$ (пропорциональность площади S и разности $\pi - A - B - C$ в случае «гипотезы острого угла» была обнаружена, как мы видели, Ламбертом; «мнимая сфера», о которой он догадывался, и есть сфера чисто мнимого радиуса, на которой не выполняется V постулат).

Заметим, что из формулы (7) вытекает невозможность существования подобных треугольников разной площади на неевклидовых плоскостях Лобачевского и Римана, откуда видно, что постулат Валлиса содержит утверждение, равносильное V постулату.

Если прямая a соответствует сечению сферы диаметральной плоскостью α, то геометрическое место точек неевклидовой плоскости, находящихся на расстоянии p

от прямой a, соответствует сечению сферы плоскостью, параллельной плоскости α. Это сечение является окружностью на обычной сфере (рис. 25*а*) и имеет вид гиперболы на сфере чисто мнимого радиуса (рис. 25*б*). Поэтому геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от прямой по одну сторону от нее, на плоскости Римана является окружностью, а на плоскости Лобачевского — специальной кривой линией, называемой «эквидистантой»



а *б*

Рис. 26. Сдвиг вдоль большого круга сферы и сдвиг вдоль прямой на плоскости Лобачевского

(равноотстоящей), откуда видно, что определение параллельных линий, которым пользовались Посидоний и Аганис, предполагает выполнение V постулата. Отсюда же видно, что движение, переводящее в себя прямую (отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния между точками), переводит на плоскости Римана (рис. 26*а*) все равноотстоящие от этой прямой окружности (т. е. является поворотом вокруг «полюса» этой прямой), а на плоскости Лобачевского (рис. 26*б*) все эквидистанты, равноотстоящие от этой прямой, и кинематические соображения Ибн Корры и Ибн ал-Хайсама также предполагают выполнение V постулата.

Из того, что сумма углов треугольника на плоскости Римана больше π, а на плоскости Лобачевского меньше π, вытекает, что суммы углов четырехугольника на этих плоскостях, соответственно, больше и меньше 2π и в случае четырехугольника с равными углами эти углы, соответственно, тупые и острые; такие четырехугольники изображены на рис. 27, где стороны этих четырехугольников условно изображены кривыми. Оси симметрии делят такой четырехугольник на два четырехугольника Хайяма — Саккери и на четыре четырехугольника Ибн ал-Хайсама — Ламберта, так что в неевклидовых геометриях

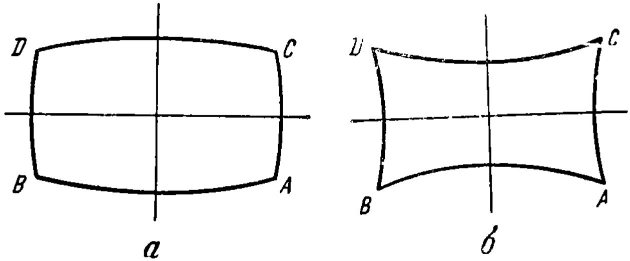


Рис. 27. Четырехугольник с равными углами в случае гипотезы тупого и острого угла

Римана и Лобачевского выполняются, соответственно, гипотезы тупого и острого углов. В случае геометрии Римана противоположные стороны равноугольных четырехугольников пересекаются в «полюсах» перпендикулярных им осей симметрии, и поэтому если две противоположные стороны такого четырехугольника оставить неизменными, а две другие стороны удалять от оси симметрии, эти последние две стороны будут уменьшаться, т. е. две прямые на плоскости Римана приближаются друг к другу по обе стороны от их общего перпендикуляра, и верхнее основание четырехугольника Хайяма — Саккери меньше нижнего. В случае геометрии Лобачевского противоположные стороны равноугольных четырехугольников являются расходящимися прямыми и если две противоположные стороны такого четырехугольника оставить неизменными, а две другие стороны удалять от оси симметрии, эти последние две стороны будут увеличиваться, т. е. две расходящиеся прямые на плоскости Лобачевского удаляются друг от друга по обе стороны от их общего перпендикуляра, и верхнее основание четырехугольника Хайяма — Саккери больше нижнего.

Указанное расположение прямых исключается постулатами Хайяма и ат-Туси, вследствие чего в рассматриваемых ими четырехугольниках Хайяма — Саккери оказывается верной только гипотеза прямого угла, т. е. эти четырехугольники являются прямоугольниками, откуда необходимо вытекает справедливость V постулата.

Мы видим, что исследования Хайяма, впервые открыто заменившего V постулат более простым и наглядным и по существу доказавшего первые теоремы неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана о его четырехугольнике при гипотезах острого и тупого углов, были, хотя их автор этого и не подозревал, первыми шагами к доказательству независимости V постулата от остальных аксиом Евклида и к открытию неевклидовых геометрий. Работа Хайяма по теории параллельных вместе с работами других математиков стран ислама — его предшественников и последователей — сыграли важную роль в подготовке великих геометрических открытий XIX столетия.

Отношения и числа

Вторая и третья книги «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида» посвящены теории отношений и учению о числе. И здесь Хайяму предшествовал ряд ученых стран ислама, развивавших и критиковавших античные воззрения.

Древние греки словом число — arithmos — называли собрание единиц, т. е. наше натуральное число, причем отвлеченную единицу, начало всех чисел, считали в принципе неделимой. Разумеется, в математике часто приходилось действовать с дробями, которые фактически также постепенно были включены в область чисел. В V в. до н. э. была доказана несоизмеримость некоторых величин и тем самым обнаружено, что некоторые операции над числами, прежде всего извлечение квадратных корней из неквадратных чисел (2, 3, 5 и т. д.), неосуществимы с совершенной точностью в области рациональных чисел. Были предложены способы приближенного вычисления несоизмеримых или иррациональных величин, однако понятие иррационального числа создано не было. Вместо него была разработана теория отношений величин, состоящая из двух больших отделов. Один из них, по времени создания первый, охватывает учение об отношениях соизмеримых величин или, что сводится к тому же, целых положительных чисел. Другой возник после открытия несоизмеримостей и представляет собой общее учение об отношениях, включая иррациональные отношения.

Учение об отношениях соизмеримых величин явилось теоретической основой операций над дробями и теоретико-числового исследования свойств целых чисел, связанных с делимостью одних чисел на другие. На первых порах оно применялось и в геометрии в теории подобия. Это учение известно нам по VII—IX книгам «Начал» Евклида, посвященным арифметике. Основную роль в нем играет алгоритм отыскания общей наибольшей меры двух однородных величин, скажем, двух отрезков или двух площадей и т. п., или же двух чисел — в последнем случае общая наибольшая мера есть общий наибольший делитель этих чисел. Алгоритм принято называть по имени Евклида, хотя он более раннего происхождения. Пусть величины будут a и b, причем $a > b$. Вычтем меньшую b из большей a возможное число раз q_0, так что $a = q_0 b + r_1$, где остаток $r_1 < b$. Затем вычтем r_1 из меньшей величины b возможное число раз q_1, так что $b = r_1 q_1 + r_2$, где $r_2 < r_1$. Теперь проделаем то же самое над вторым остатком r_2 и первым r_1, что даст $r_1 = r_2 q_2 + r_3$, $r_3 < r_2$ и будем повторять этот прием попеременного вычитания, пока возможно. Общей наибольшей мерой (a, b) величин a, b оказывается тот последний остаток r_n, который измеряет целое число раз q_n предшествующий ему остаток r_{n-1}. Когда такой остаток r_n существует, величины a, b соизмеримы. Описанный прием, в наших современных обозначениях и терминологии есть не что иное, как представление отношения $\frac{a}{b}$ в виде непрерывной дроби с неполными частными q_0 ($= 0$, если $a < b$), $q_1, q_2, ..., q^n$:

$$\frac{a}{b} = (q_0; q_1, q_2, \ldots q_n) = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}.$$

Две пары величин или чисел a, b и c, d называются пропорциональными, мы записываем это равенством $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, если существуют такие общие меры или делители p для a, b, и q для c, d, что

$$\left.\begin{aligned} a &= mp \\ b &= np \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} c &= mq \\ d &= nq \end{aligned}\right\},$$

где m, n — некоторые натуральные числа. В качестве p и q естественно взять общие наибольшие меры или общие наибольшие делители. Тем самым алгоритм Евклида привлекается уже в исходных положениях учения. Собственное определение Евклида гласит: «Числа будут пропорциональными, когда первое от второго, а третье от четвертого будут или равнократными, или той же частью, или теми же частями»[1]. В первом случае, в частности, $p = (a, b) = b$ и $q = (c, d) = d$, а во втором $p = (a, b) = a$ и $q = (c, d) = c$.

Открытие несоизмеримости показало недостаточность учения об отношениях, построенного на таком определении пропорциональности. Полностью сохранив свое значение в арифметике дробей и в теории чисел, оно оказалось неприменимым в одной из центральных глав геометрии — теории подобия фигур, а также в быстро развивавшихся на протяжении V—III вв. исследованиях, которые можно было бы назвать античным математическим анализом — измерении площадей круга, эллипса, сегмента параболы, объема пирамиды, шара, эллипсоида, сегмента параболоида и т. п. Пропорции и отношения несоизмеримых величин встречаются здесь сплошь и рядом.

Первая общая теория отношений явилась как бы распространением учения о соизмеримых отношениях и также опиралась на алгоритм попеременного вычитания, или антифайрезис, как эта операция названа у Евклида. Применение алгоритма к равным соизмеримым отношениям $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ дает для каждого из них одинаковые последовательности неполных частных. Иными словами, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b} = (q_0; q_1, \ldots q_m)$, а $\frac{c}{d} = (q_0'; q_1', \ldots q_n')$, то $n = m$ и $q_k' = q_k$ для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Несоизмеримое отношение отличается от соизмеримого тем, что соотносимые величины не имеют общей меры, алгоритм не обрывается на каком-либо шагу и последовательность неполных частных бесконечна. Было естественно определить пропорциональность двух пар несоизмеримых величин $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ аналогично предыдущему. В такой антифайретической теории тождество отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ определяется условием, что $q_k' = q_k$ для всех натуральных значений k, т. е. что $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ представляются одинаковыми бесконеч-

[1] Евклид. Начала, т. II. Перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского. М.— Л., 1949, стр. 10.

ными непрерывными дробями. Это определение охватывает как несоизмеримые, так и соизмеримые отношения. Можно соответственно определить, когда $\frac{a}{b}$ больше или меньше $\frac{c}{d}$ и вывести многие свойства пропорций и неравенств. Однако антифайретическое учение натолкнулось на некоторые трудности и в середине IV в. оно было совершенно вытеснено новым общим учением об отношениях, разработанным Евдоксом Книдским и изложенным в V книге евклидовых «Начал», так что в античной литературе сохранились только беглые упоминания о нем.

Само понятие отношения прямо не определяется. В отношении могут находиться только величины, друг с другом однородные, например длины с длинами, площади с площадями, но не площадь с длиной или объем с площадью. Это ограничение выражается таким условием: величины a, b, из которых $a > b$, могут быть в отношении между собой, лишь если существует такое целое n, что $nb > a$. Это требование, как мы упоминали в главе седьмой, равносильно так называемой аксиоме Архимеда [1]. Центральное место занимает определение тождества отношений, которое у Евклида гласит: «Говорят, что величины находятся в том же отношении: первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой, каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке» [2]. Такие величины называются пропорциональными. Иначе говоря, две пары величин a, b и c, d пропорциональны, если для любых натуральных чисел m, n, для которых имеет место одно из условий $ma \gtreqless nb$, одновременно выполняется соответствующее из условий $mc \gtreqless nd$. Заметим, что Евклид не трактует отношения ни как величины, ни как числа, и не говорит, да, собственно, и не имеет права заранее говорить о равенстве отношений. Он особо доказывает, что пропорциональные отношения обладают тем свойством, что если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ тождественны с $\frac{e}{f}$, то они тождественны друг другу. Очевидно, что $\frac{a}{b}$ тождественно

---

[1] См. сноски и [2] на стр. 83.

[2] Евклид. Начала, т. I, стр. 142.

самому себе и что если $\frac{a}{b}$ тождественно $\frac{c}{d}$, то и $\frac{c}{d}$ тождественно $\frac{a}{b}$ Эти три свойства теперь называют, соответственно, свойствами транзитивности, симметрии и рефлективности. Всеми ими обладает свойство равенства. Можно сказать, что евклидова пропорция является соотношением типа равенства. Это и оправдывает ее обозначение с помощью знака равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, которым мы пользуемся в дальнейшем [1].

Определение пропорции дополняется определением неравенства «больше», опять-таки с помощью сравнения кратных для рассматриваемых величин, а также составления двойного, тройного и т. д. отношений. Для трех пропорциональных величин $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ двойным называется отношение $\frac{a}{c}$, для четырех пропорциональных величин $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, тройным называется отношение $\frac{a}{d}$ и т. п. Эта операция соответствует нашему возведению в степень. Затем Евклид выводит 25 теорем о свойствах пропорций и неравенств.

Учение Евдокса было весьма совершенным и все же в нем имелись пробелы, один из которых обнаружился в первых же приложениях. В нем не была определена общим образом операция, соответствующая умножению: она введена была только для частного случая отношений $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ с общим членом b, как образование составного отношения $\frac{a}{c}$. В VI книге «Начал», где изложена теория подобия, такая общая операция, правда, вводится, но только для особого случая, в котором членами отношений служат отрезки. Здесь доказывается, что для любых трех

---

[1] Определение Евдокса — Евклида является примером так называемого определения через абстракцию, когда при введении новой области математических предметов понятие предмета не определяется прямо, но устанавливается общее свойство всех объектов, которые надлежит считать друг друга в известном смысле равносильными. См. подробнее: С. А. Яновская. О так называемых «определениях через абстракцию». Сб. статей по философии математики, под ред. С. А. Яновской. М., 1936, стр. 108—136.

данных отрезков a, b, c можно построить четвертый пропорциональный отрезок d, так что $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Это позволяет для отношений пар отрезков $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ввести аналог произведения отношений, именно взять произвольно отрезок k и построить отрезки l и m так, чтобы $\frac{a}{b}=\frac{k}{l}$, $\frac{c}{d}=\frac{l}{m}$, а затем образовать составное отношение $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$ как $\frac{k}{l}\cdot\frac{l}{m}=\frac{k}{m}$. Для других родов величин общая операция составления определена не была, но фактически ею пользовались, опираясь при этом на допущение о существовании четвертой пропорциональной к любым трем данным однородным величинам. Позднейшие комментаторы «Начал» заметили этот пробел и «подправили» Евклида. В некоторых списках «Начал» среди определений VI книги имеется и такое: «Говорится, что отношение составляется из отношений, когда количества этих отношений, перемноженные между собой, образуют нечто»[1]. Здесь не объясняется, чтó такое количество отношения и умножение таких количеств. Данное определение безусловно является позднейшей вставкой. Его авторы делали первые неуверенные шаги в сторону расширения понятия числа и включения в него любых положительных иррациональностей.

В фундаменте нынешней теории подобия и математического анализа лежит учение о действительном числе, впервые детально разработанное в 70-х годах прошлого века Р. Дедекиндом (1831—1916), Г. Кантором (1845—1918), К. Вейерштрассом (1815—1897) и др. Общая теория отношений Евдокса играла в античности сходную роль. Нам важно отметить как некоторые общие моменты, так и отличия учений Евдокса и Дедекинда. Это позволит лучше понять ход развития учения о числе и оценить достижения Хайяма.

Дедекинд исходил из множества рациональных чисел R, элементы которого расположены в порядке возрастания,— множества, в котором, как говорят, уже установлены отношения порядка и все основные арифметические операции. Множество R обладает свойством всюду-

---

[1] Евклид. Начала, т. I, стр. 174.

плотности: между двумя любыми рациональными числами имеется промежуточное третье, а следовательно, имеется и бесконечно много промежуточных рациональных чисел. Каждое рациональное число r разбивает множество R на два класса, нижний R_1 и верхний R_2, так что любое число r_1 первого меньше любого числа r_2 второго, $r_1 < r_2$. Само число r можно отнести по желанию к R_1, где оно будет наибольшим, или к R_2, где оно окажется наименьшим, или выделить его в особый третий класс R_3. Говорят, что число r производит сечение во множестве рациональных чисел R.

Если взять прямую, то каждая точка на ней обладает таким же свойством по отношению к точкам этой прямой: нужно лишь заменить отношения «быть меньше» и «быть больше» соответственно на «лежать слева» и «лежать справа». Но прямая имеет еще другое свойство, которого уже нет у множества рациональных чисел: всякое сечение прямой на два класса, так что все точки одного лежат слева от всех точек другого, производится некоторой и притом единственной точкой той же прямой. В этом состоит непрерывность прямой линии. Между тем отнюдь не всякое сечение множества рациональных чисел производится рациональным же числом. Простейший пример: отнесем к классу R_1 все отрицательные рациональные числа, нуль и положительные рациональные числа, квадрат которых меньше 2, а к классу R_2 — положительные рациональные числа, квадрат которых больше 2; тогда любое r_1 меньше любого r_2. Однако такое сечение не производится рациональным числом, ибо нет рационального числа, квадрат которого равен 2. Вместо 2 можно взять всякое другое неквадратное целое или рациональное число; имеется бесчисленно много и других нерациональных сечений множества R. В этом и состоит неполнота или разрывность множества рациональных чисел, из-за которой оно не в состоянии служить числовым образом множества точек непрерывной прямой. Иррациональное число Дедекинд определил, как любое сечение множества рациональных чисел, не производимое рациональным числом. При этом иррациональное число больше любого числа соответствующего ему нижнего класса, в котором нет наибольшего числа, и меньше любого числа верхнего класса, в котором нет наименьшего; вместе с тем в каждом из этих классов из них есть рациональные числа, отличающиеся от данного иррационального числа меньше, чем на любое сколь угодно малое рациональное число. Равенство двух иррациональных чисел определяется через тождество соответствующих им сечений или нижних и верхних классов рациональных чисел. Взятые вместе, рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел, которое уже непрерывно: каждое его сечение производится действительным, рациональным или иррациональным, числом. Непрерывное множество действительных чисел является числовым образом точек непрерывной прямой — при выборе начальной точки отсчета, соответствующей нулю, и единичного отрезка каждая точка прямой получает одну-единственную действительную координату. На определенные таким образом иррациональные и действительные числа без труда распространяются операции сложения, вычитания, умножения и деления, установленные сперва для рациональных чисел, и Дедекинд, например, впервые смог строго доказать тот давно известный факт, что $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ и т. п.

Глубокая связь между действительными числами и теорией отношений Евдокса особенно ясна, если сформулировать определение одинаковости отношений в терминах рациональных чисел: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, когда для любых рациональных чисел $\frac{n}{m}$, для которых выполняется одно из трех условий $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{n}{m}$, выполняется одновременно соответствующее из условий $\frac{c}{d} \gtreqless \frac{n}{m}$. Другими словами, отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ образуют пропорцию, когда каждое из них производит во множестве рациональных чисел $\frac{n}{m}$ сечение на тождественные классы. Задание какого-либо отношения есть по существу задание сечения и тем самым действительного числа. Однако в теории Евдокса нет предпосылки, обеспечивающей, что всякое сечение множества рациональных чисел производится каким-либо отношением, т. е. обеспечивающей непрерывность системы отношений. Это первое и весьма глубокое отличие. Собственно говоря, определение пропорции по Евдоксу соответствует определению равенства двух иррациональных чисел по Дедекинду (только у Евдокса сразу включается и определение равенства двух рациональных отношений), но отнюдь не определению самого иррационального числа. Именно с тем, что система отношений не была построена как непрерывная, связана была трудность, относящаяся к так называемому составлению отношений, т. е., по-нашему, к умножению иррациональностей. Попытка преодолеть эту трудность с помощью принципа существования четвертой пропорциональной не была продумана и доведена до конца.

Но имеется и другое важное отличие между обеими теориями. Дедекинд и другие ученые конца XIX в. отправлялись от упорядоченного и всюду плотного множества рациональных чисел, и сама конструкция иррационального числа включала возможность его приближения с любой степенью точности посредством рациональных чисел. Здесь в сравнение между собой вступают рациональные числа $\frac{n}{m}$. В учении Евдокса применяются пары целых чисел m, n и сравниваются между собой пары кратных величин ma и nb, mc и nd. Разумеется, рациональные числа $\frac{n}{m}$ можно вводить, как пары чисел m, n, но как пары, подчиняющиеся вполне определенным условиям, например $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$, если $m_1n_2 = m_2n_1$, затем $(m_1, n_1) < (m_2, n_2)$, если $m_1n_2 < m_2n_1$ и т. д. Обо всем этом в учении Евдокса нет и речи. В результате множество пар, в котором то или иное заданное сечение производит некоторое сечение, оказывается неупорядоченным, свойство всюду-плотности множества R остается невыявленным, проблема приближения иррациональных отношений при помощи рациональных общим образом и в теоретическом плане не ставится. Операции над отношениями разработаны были в очень ограниченном объеме, непосредственно необходимом для приложений в учении о подобии. О сложении и вычитании речь шла только в случае отношений с общим вторым членом $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, а действие умножения — мы подчеркнем это еще раз — было разработано совершенно недостаточно. В результате отношения несли, так сказать, очень малую числовую и особенно вычислительную нагрузку. Этот разрыв между учением об отношениях и математикой расчетов и приближенных вычислений объясняет нам, почему древние не рассматривали общие отношения величин, как числа. В свою очередь, этот разрыв объясняется прежде всего тем, что теория отношений была создана в эпоху, когда практика приближенных вычислений была еще весьма незначительной и теоретическое их обоснование лежало вне круга научных интересов. Позднее, начиная со II в. до н. э., приближенные вычисления приобретают большее значение, особенно благодаря быстрым успехам астрономии и тригонометрических расчетов, но это уже не оказало заметного влияния на разработку учения об отношениях, сохранившего классическую традиционную форму. Со второй половины II в. н. э. и астрономия и математика вступают на территории Римской империи в долгий период упадка, отражая общие судьбы деградировавшей античной культуры.

В странах ислама учение об отношениях и понятие числа получили новое развитие. С первых же шагов Багдадской научной школы ведущее место в трудах ее представителей занимает, наряду с алгеброй, астрономия с тригонометрией, а вместе с ними — разнообразные вычисления, особенно связанные с составлением все более и более точных таблиц — синусов, тангенсов, координат планет и т. д., — значения которых почти всегда оказываются иррациональными и требуют приближенного определения. Арифметические и алгебраические иррациональности появляются все чаще и чаще. Уже Мухаммед ал-Хорезми сообщал правила операции над некоторыми простыми иррациональностями, вроде $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$ и т. п. Мы упоминали, что Абу Камил пошел в том же направлении гораздо дальше. В воззрениях на несоизмеримые величины — не без влияния математики Индии — происходит своеобразный переворот. Теория квадратичных и биквадратичных иррациональностей, обобщающая частные случаи, встречающиеся в исследовании простейших правильных многоугольников и пяти правильных многогранников, была построена греками. В X книге «Начал» эта теория строится на основе представления таких иррациональностей с помощью отрезков и прямоугольных площадей. Математики стран ислама иллюстрируют — так им яснее и понятнее — имеющиеся у Евклида типы и преобразования арифметическими примерами. В математическом сознании постепенно стираются различия между понятиями отношения и числа, «прямоугольника, построенного на отрезках», и произведения двух чисел и т. п. Это находит отражение и в терминологии, где появляются выражения вроде «произведения отрезков» и другие, в которых недопустимым для древних греков образом комбинируются геометрические и арифметические термины. Словом, иррациональные числа и выражения превращаются в необходимый и повседневный предмет математического исследования, на деле равноправный с дробями и целыми числами. Новая ситуация уже на ранних стадиях нашла свое выражение в трактовке теоретической базы, которой служила V книга «Начал». Определение равенства отношений, в ней содержащееся, подвергается критике, сходной с критикой постулата о параллельных. Не отвергая правильности этого определения, его объявляют неясным, а подлинный смысл его — подлежащим раскрытию.

Несомненно, что в определении Евдокса особенно не удовлетворяло сравнение кратностей членов отношений и разрыв, который бросался в глаза при сопоставлении общего определения пропорции в V книге с определением соизмеримой или числовой пропорции в VII книге. В VII книге, где в основе лежит алгоритм Евклида, процесс измерения одной величины с помощью другой или с помощью ее долей, выступает совершенно отчетливо и именно это импонировало ученым Востока, тем более, что этот процесс позволяет находить с какой угодно степенью точности рациональные приближения иррациональных отношений. Напротив, сравнение равнократностей величин вуалировало в их глазах именно этот процесс соизмерения, точного или приближенного, величин. Современник Хайяма, мавританский математик ал-Джайяни, сам бывший сторонником античной теории, писал: «Многие думают, что Евклид подходит к объяснению отношения не через открытую дверь и вводит его неправильным путем, определяя его через взятие кратных... и они считают, что нет очевидной связи между отношением и взятием кратных. Но, клянусь своей жизнью, ни с чем так тесно не связано отношение, как со взятием кратных двух сравниваемых величин»[1]. Иначе, чем ад-Джайяни, думали

[1] E. B. Plooij. Euclid's conception of ratio..., стр. 16.

действительно очень многие. В результате было предложено другое определение пропорции, которое оказалось не чем иным, как забытым уже более тысячи лет антифайретическим определением через алгоритм Евклида.

Антифайретическое определение мы встречаем впервые у знакомого нам уже ал-Махани, затем у Сабита ибн-Корры, у ан-Найризи и у Ибн ал-Хайсама, который, кажется, впервые изучал связь между этим определением и евдоксовым, и др. Новое замечательное развитие это направление получило у Хайяма.

Во второй книге своих «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида» Хайям для числовой или соизмеримой пропорции принимает определение VII книги «Начал». Общее определение V книги он называет «известным», отличая его от «истинного» — в том смысле, что оно раскрывает подлинную суть пропорции. Истинное определение, которое он формулирует, полагая, что предыдущий член отношения меньше последующего, гласит: «Отложим на второй все кратные первой так, чтобы остаток стал меньше первой, и отложим на четвертой все кратные третьей так, чтобы остаток стал меньше третьей, и пусть кратность первой во второй равна кратности третьей и четвертой. Далее, отложим на первой все кратные остатка второй так, чтобы остаток стал меньше остатка второй, и точно так же отложим на третьей все кратные остатка четвертой так, чтобы остаток стал меньше остатка четвертой, и пусть кратность остатка второй равна кратности остатка четвертой. Так же отложим на остатке второй все кратные остатка первой и на остатке четвертой все кратности остатка третьей, и пусть их кратности одинаковы. Точно так же будем последовательно откладывать кратные остатков одни на других так, как мы объясняли, и пусть число остатков первой и второй равно числу соответственных остатков третьей и четвертой, и так до бесконечности. В этом случае отношение первой ко второй необходимо равно отношению третьей к четвертой. Вот истинная пропорция, определенная геометрически» [3, стр. 130—131]. Итак, $\frac{a}{b} = (q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots) = \frac{c}{d} = (q_1', q_2', \ldots, q_n', \ldots)$, если $q_k' = q_k$ для всех k до бесконечности.

Аналогично вводятся определения неравенства отношений. Именно, если

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \ldots}} \quad \text{и} \quad \frac{c}{d} = \frac{1}{q_1' + \frac{1}{q_2' + \ldots}},$$

то $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ в том случае, если при выполнении равенства $q_i' = q_i$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, неполное частное q_k меньше q_k', когда k нечетное или же $q_k > q_k'$, когда k четное. Это определение Хайяма замечательно тем, что объединяет случаи соизмеримого и несоизмеримого отношения, т. е. одна из непрерывных дробей может оказаться конечной или, как он сам выражается, нет остатка при откладывании на какой-либо из получающихся величин соответствующей другой величины. Тем самым дается критерий, устанавливающий, какое из данных иррационального и рационального чисел является бо́льшим. Здесь снова проявляется стремление сблизить эти два понятия и соответствующие теории. Мы можем высказать это определение неравенства «больше» для случаев бесконечной непрерывной дроби и конечной или двух конечных непрерывных дробей, формально полагая соответствующее частное q_k или q_k' равным $+\infty$.

После этого Хайям переходит к доказательству равносильности теории отношений, опирающейся на антифайретическое определение, и теории, излагаемой Евклидом. Для этого он показывает, что отношения, одинаковые или бо́льшие в смысле V книги «Начал», одинаковы или больше в его смысле, и обратно. После этого излишне выводить заново все теоремы V книги[1]. Доказательство основано на предложении о существовании четвертой пропорциональной d к трем данным величинам a, b, c. Это предложение Хайям пытается доказать, в свою очередь, пользуясь тем, что, последовательно удваивая данную величину, можно получить величину сколь угодно большую,

---

[1] Еще до открытия рассматриваемого трактата Хайяма в историко-математической литературе было высказано предположение, что в древней Греции существовала теория отношений, промежуточная между антифайретической и евдоксовой, где из определения равенства отношений с помощью антифайрезиса выводилось определение, принятое за исходное Евдоксом, а свойства пропорций доказывались на основе второго определения.

а деля данную величину пополам — величину как угодно малую (то и другое следует из 4-го определения V книги, содержащего аксиому Архимеда). Именно из сказанного следует, что существуют столь большая величина e и столь малая g, что $\frac{a}{b} > \frac{c}{e}$ и $\frac{a}{b} < \frac{c}{g}$. Отсюда, основываясь на принципе бесконечной делимости величин — первом «принципе, заимствованном у философа» (Аристотеля), Хайям заключает, что между g и e необходимо существует такая промежуточная величина d, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. На самом деле, только из неограниченной делимости это заключение не следует. Из принципа Хайяма нельзя вывести, что величина, возрастающая от g до e, проходит через все промежуточные значения. Свойство непрерывной величины принимать все промежуточные значения между двумя данными было доказано со строгостью, удовлетворяющей требованиям классического математического анализа, только творцами современного учения о действительном числе. За Хайямом остается историческая заслуга первой, насколько нам известно, попытки восполнить большой пробел античной теории отношений, доказав предложение о четвертой пропорциональной. Впоследствии это предложение, выражающее существенное свойство непрерывных величин, принималось многими математиками Востока и Европы. В середине XIII в. его специально выделил в комментариях к своему латинскому переводу «Начал» Дж. Кампано.

Заслуживает упоминания, что, вводя принцип безграничной делимости величин, Хайям мельком касается философского учения мутакаллимов, согласно которому все в мире, включая пространство и время, состоит из неделимых элементов. Вернее, Хайям говорит здесь о вытекающем из этого учения математическом следствии — соизмеримости всех величин. Он осторожно допускает, что впоследствии, быть может, такое учение восторжествует, но, поскольку пока существование несоизмеримых величин не опровергнуто, считает нужным исследовать теорию их отношений [3, стр. 129].

Третья книга «Комментариев» Хайяма содержит теорию составных отношений, представлявшую для науки стран ислама особый интерес из-за многочисленных применений в арифметике (обоснование так называемых цепных правил, обобщающих тройное правило на случай 5, 7, 9 и более связанных между собой пропорциями величин), в теории музыки, а более всего в тригонометрии, в которой место наших равенств занимали тогда пропорции, а умножение и деление нередко выступало в форме составления отношений. Здесь Хайям анализирует операцию составления и доказывает, что отношение $\frac{a}{c}$ составляется из отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$, т. е. что $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \quad \frac{b}{c}$, а также что $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \quad \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d}$ То же самое, говорит он, распространяется на любое число величин.

Мы не будем задерживаться на самих этих теоремах. Для нас важно, что в ходе доказательства первой теоремы Хайям, правда в осторожной форме, впервые развивает новую, более широкую концепцию числа, включающую иррациональные числа. Его не останавливает и авторитет Аристотеля, на которого он не раз с уважением ссылается в данном трактате.

Вслед за древними Хайям под числом в собственном смысле слова понимает множество неделимых единиц. Но потребности развиваемой теории, а в конце концов потребности всей науки и ее приложений, побуждают его ввести новые математические объекты — делимую единицу и обобщенное понятие числа, которое он отличает от «абсолютных и настоящих» чисел, хотя и не колеблется называть именно числом. В начале третьей книги он формулирует стоящие перед ним проблемы следующим образом: «Мы рассмотрим, может ли отношение величин быть по существу числом, или оно только сопровождается числом, или отношение связано с числом не по своей природе, а с помощью чего-нибудь внешнего, или отношение связано с числом по своей природе и не нуждается ни в чем внешнем» [3, стр. 142]. Эти вопросы относятся к философскому знанию, и Хайям не дает как будто бы на них прямого и окончательного ответа. Однако такой ответ, по существу, содержится в его последующих рассуждениях.

Оставляя в стороне чисто философский аспект поставленных проблем, Хайям для вывода первой из двух теорем этой книги прежде всего выбирает некую единицу и вспомогательную величину g так, чтобы отношение

$\frac{1}{g}$ было тем же, что $\frac{a}{b}$ Но здесь a и b — произвольные однородные величины, которые в общем случае несоизмеримы, так что и $\frac{1}{g}$ — несоизмеримо. И вот о величине g говорится: «Будем смотреть на величину g не как на линию, поверхность, тело или время, но будем смотреть на нее, как на величину, отвлеченную разумом от всего этого и принадлежащую к числам, но не к числам абсолютным и настоящим, так как отношение a к b часто может не быть числовым, т. е. нельзя найти двух чисел, отношение которых было бы равно этому отношению» [3, стр. 145]. Заметим попутно, что Хайям свободно переносит на отношения арифметическую терминологию — он пишет о равенстве отношений, а перед тем говорил об их умножении.

Объявив таким образом, что величина g, несоизмеримая с единицей, принадлежит к числам в расширенном смысле слова, Хайям в подкрепление ссылается на установившуюся практику вычислителей и землемеров, которые часто применяют выражения вроде половины, трети или иной доли единицы, имея в виду «не абсолютную, настоящую единицу, из которой образуются настоящие числа» [3, стр. 145], но некую новую делимую единицу. Вычислители часто говорят также: корень из пяти, корень из десяти и т. д., причем опять-таки имеются в виду 5, 10, и т. д., состоящие из делимых единиц. Напомним, что эти единицы — не линии, поверхности, тела или иные какие-либо конкретные величины, но, пользуясь словами Хайяма, единица, «отвлеченная разумом от всего этого». Колебания, которые испытывал Хайям, встав на путь обобщений, рвавших с многовековой традицией, вполне естественны. Для него вводимые математические объекты были еще «несобственными» числовыми элементами, присоединяемыми к привычной области чисел. Эти колебания и вместе с тем убеждение в необходимости обобщения выражены в следующих словах: «Когда мы говорим «сделаем отношение единицы к величине g, как a к b», это не значит, что мы можем применить это ко всем величинам, т. е. сделать это законом искусства, но мы в то же время считаем, что по здравому смыслу невозможно, чтобы наше бессилие сделать это убедило бы нас, что это невозможно по существу. Пойми этот вопрос» [3, стр. 145].

Так Хайям противопоставил свое учение о числе античному. Теперь отношение выступает уже как число, либо в собственном, т. е. прежнем смысле слова, как целое, либо в новом, несобственном, как нецелое — дробное или иррациональное. Составление отношений не отличается более от умножения чисел, одинаковость отношений — от их равенства, и в принципе отношения становятся пригодными для измерения любых изучаемых в математике величин.

Так Хайям кладет начало подлинному перевороту в учении о числе, уничтожив принципиальную грань, отделявшую иррациональные величины от чисел. Разумеется, он обобщал при этом результаты деятельности многих своих предшественников — Сабита ибн Корры, ан-Найризи, Ибн ал-Хайсама, а также математиков-вычислителей, для которых грань между иррациональными величинами и их рациональными приближениями стиралась в их повседневных занятиях, что отмечал, как мы только что видели, и сам Хайям.

Изложенные воззрения Хайяма, как и другие его учения, получили в странах ислама дальнейшее развитие. Насир ад-Дин ат-Туси, который продолжал работы Хайяма по теории параллельных, в двух сочинениях — «Трактате о полном четырехстороннике» и «Изложении Евклида» — развивал и его теорию отношений вместе с учением о числе. Взгляды ат-Туси на природу отношений и их связь с числами не отличались при этом оригинальностью.

В Европе на протяжении средних веков происходил аналогичный процесс расширения понятия числа, также связанный с прогрессом вычислений и алгебры. И здесь иррациональные числа приобретают равноправие с рациональными. Впервые это высказал со всей отчетливостью С. Стевин (1548—1620) в «Арифметике», опубликованной в 1585 г. В то же время укореняются отрицательные числа и вводятся мнимые.

Теория отношений также развивалась в Европе сходным образом. В XVII в. ряд таких ученых, как Григорий из Санкт-Винцента (1584—1667) и А. Таке (1612—1660), выступили с критикой определения пропорции в V книге «Начал» с уже знакомых нам позиций. Например, Таке в «Началах геометрии» (1654) заявлял, что это определение выражает не природу равных отношений, но только их второстепенное свойство, которое надлежит доказывать, исходя из другого определения, которое у него основано на сравнении не кратных, а долей величин и непосредственно выражает процесс приближения любого отношения рациональными числами. Сходные причины вызывали сходные следствия. При этом вероятно, что взгляды Хайяма через посредство ат-Туси оказали влияние на некоторых европейских ученых: в седьмой главе мы видели, что одна из редакций «Изложения Евклида» ат-Туси была издана в Риме в 1594 г.

Глубокая связь между античной общей теорией отношений и арифметикой была установлена в «Геометрии» Р. Декарта, для которого отношение было, в сущности, равносильно действительному числу. Эту мысль воспринял И. Ньютон (1643—1727), определивший в своем курсе общей арифметики, изданном в 1707 г., число через отношение. «Под числом,— писал он,— мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу» [1]. Это представление о действительном числе господствовало на протяжении всего XVIII в.; оно по-новому развивается и в некоторых современных теориях.

Так работы математиков стран ислама и в особенности Хайяма оказываются важными звеньями более чем двухтысячелетней цепи исследований, которые завершились введением всей области действительных чисел и созданием ныне классических методов их теоретического построения и исследования.

---

[1] И. Ньютон. Всеобщая арифметика. Перевод, статья и комментарии А. П. Юшкевича. М.— Л., 1948, стр. 8.

Философские трактаты

Проблем философии и религии Хайям касается во множестве четверостиший и в пяти специальных трактатах. Казалось бы, это дает вполне достаточный материал для суждения о его мировоззрении. В действительности вопрос о мировоззрении замечательного ученого и поэта далек от ясности. Дело в том, что философские трактаты во многом расходятся с поэтическими высказываниями, да и в последних имеется разнобой. Мы полагаем, что нет оснований априорно больше доверять философским трактатам, чем четверостишиям.

Историк XIII в. ал-Кифти в своей «Истории мудрецов» пишет о Хайяме следующее: «Омар ал-Хайям — имам Хорасана, ученейший своего времени, который преподает науку греков и побуждает к познанию Единого Воздаятеля посредством очищения плотских побуждений ради чистоты души человеческой и велит обязательно придерживаться идеальных между людьми отношений согласно греческим правилам. Позднейшие суфии обратили внимание на кое-что внешнее в его поэзии и эти внешности (т. е. явный, буквальный смысл) применили к своему учению и приводили их в доказательство на своих собраниях и уединенных беседах. Между тем сокровенное (внутренний смысл) его стихов — жалящие змеи для мусульманского законоположения и сборные пункты, соединяющие для открытого нападения» [149], [87, стр. 333—334].

Суфии, о которых пишет ал-Кифти, — мистико-аскетическая секта, с XI в. сблизившаяся с правоверным исламом.

О том, что представляют собой «жалящие змеи для мусульманского законоположения» в стихах Хайяма, более подробно рассказывает теолог Наджм ад-Дин Абу

Бакр ар-Рази (ум. в 1256 г.) в «Зерцале рабов божьих»: «И известно, что была за мудрость в привлечении духа чистого, вышнего и бестелесного в форму земную, низшую, мрачную; [известно также], для чего дух разлучается с телом и прерывается с ним связь его и разрушается форма; [известно, наконец], что за причина вторичного оживления формы в день судный и превращения ее в оболочку для духа:— причина та, чтобы [человек] не оправдывал [коранического] выражения: «Они — как скоты, даже более заблудшие» [Коран, сура 7, стих 178],— а достигал бы ступени человечности и освобождался бы от пелены нерадения [о котором сказано в Коране]: «Знают они явное в жизни ближайшей, но к будущей они небрежны» [Коран, сура 30, стих 6] [1]; — и со вкусом и страстью вступал бы на путь шествования [к Богу]. Тем несчастным философам, материалистам и натуралистам [2], которые лишены этих двух благ, которые ошеломлены и сбиты с пути, остается вместе с одним из литераторов, который известен у них талантом и мудростью, остроумием и познанием, т. е. Омаром Хайямом, читать только, вследствие крайнего смущения и заблуждения, следующие стихи:

Приход наш и уход загадочны,— их цели
Все мудрецы земли осмыслить не сумели.
Где круга этого начало, где конец,
Откуда мы пришли, куда уйдем отселе?

Жизнь сотворивши, смерть ты создал вслед за тем,
Назначил гибель ты своим созданьям всем.
Ты плохо их слепил, но кто ж тому виною,
А если хорошо, ломаешь их зачем?»

[*87, стр. 341—342*],
[*36, № 68, стр. 3, № 85, стр. 34*]

Первое из философских сочинений Хайяма — «Трактат о бытии и долженствовании» — было написано в 1080 г. в ответ на письмо судьи и имама провинции Фарс

---

[1] Цитаты из Корана в переводе И. Ю. Крачковского. См.: Коран. М., 1963, стр. 139 и 321.

[2] В переводе Жуковского слово «натуралисты» (таби'ийи) пропущено и восстановлено здесь в соответствии с персидским текстом; словом «материалисты» переведено слово «дахри».

ан-Насави, предложившего Хайяму высказаться по вопросам «о мудрости творца в сотворении мира и в особенности человека и об обязанности людей молиться» [3, стр. 152]. К этому трактату непосредственно примыкает «Ответ на три вопроса: необходимость противоречия в мире, детерминизма и долговечности», в предисловии к которому Хайям пишет, что он не ожидал, что ему «зададут такие вопросы, в которых содержится столь сильное сомнение» [3, стр. 160], но в результате спора его слава вновь возвысилась. Уже самые обстоятельства появления обоих сочинений заставляют очень осторожно оценивать искренность их автора. Политическая обстановка того времени была очень запутанная, и исключительно сильное влияние имели различные борющиеся религиозные секты. Вряд ли можно сомневаться, что запрос судьи был вызван не одним желанием обменяться мнениями в личной переписке, что Хайям должен был оправдываться в каких-то лежавших на нем подозрениях. Это не исключает возможности того, что судья, ученик и последователь Ибн Сины, дружески относился к Хайяму и хотел помочь ему отвести тень, наброшенную распространением проникнутых вольномыслием стихов математика-поэта.

Основное содержание ответа Хайяма на первый вопрос сводится к следующему. Он рационалистически, в духе Аристотеля и Ибн Сины, обосновывает необходимость божества, как первопричины всех причин — иначе получилась бы бесконечная цепь или порочный круг, что нелепо. Мир эманирует, проистекает из первопричины наподобие некоей цепи, звенья которой «не одинаковы по благородству» [3, стр. 156]. Хайям утверждает, что на этот вопрос обратили внимание его учитель — Ибн Сина и он сам, и выражает надежду, что ими обоими «это обсуждение доведено до удовлетворения наших душ» [3, стр. 156]. Все бытие представляется как упорядоченная и нисходящая по степени благородства цепь творений, первым из которых является чистый разум, наиболее близкий к первому истинному началу, а последним — самая низкая из существующих вещей — прах разложившегося сущего. Из этого праха божество создает и более благородные вещи, среди них человека, «самого близкого к творцу среди благородных созданий и самого удаленного от праха среди сложных благородных существующих вещей» [3, стр. 157]. Учение это восходит к египетскому неоплатонику III в.


٢٦١

مجموعة الرسائل

للحكيم عمر بن ابراهيم الخيامي

عُني بجمعها وضبطها وتصحيحها

السيد سليمان الندوي

عميد دار المصنفين باعظم كره
بالهند

طبعت

بمطبعة معارف دار المصنفين باعظم كره
بالهند

١٩٣٢

Титульный лист издания философских трактат Хайяма в книге Сейийда Сулеймана Надви «Омар Хайям» (Азамгарх, 1932).

Плотину, а также его ученику сирийцу Порфирию, которые соединяли воззрения Аристотеля с учениями Платона и древних пифагорейцев. Более подробно картина мира описана в трактате Хайяма о всеобщности существования, о котором говорится ниже.

Любопытно, что попытка рационалистического обоснования религии приводит Хайяма к ограничению могущества божества: всевышний, пишет он, мог создать мир только в течение некоторого времени, из-за необходимости избегать соединения взаимно противоположных свойств в одной вещи. Здесь от проблемы бытия и онтологии происходит переход к проблеме долженствования и религиозной этике, а именно, ставится вопрос, с которым мы встречаемся и в поэзии Хайяма: почему бог создал несовместимые противоречия в существовании, почему в мире существует зло? Для решения этой проблемы, Хайям, вслед за Ибн Синой, вновь становится на весьма скользкий, с точки зрения религиозной ортодоксии, путь ограничения творческой потенции аллаха, который-де в своем творении не может обойтись без некоторого количества зла, представляющего собой как бы нравственный эквивалент низкого и неблагородного в онтологической цепи нисхождения. «Воздерживаться от большего блага из-за необходимости малого зла есть большое зло» [3, стр. 157], — заявляет Хайям. Ибн Сина приводил такой пример: огонь не мог бы приносить пользы, «если бы не был таким, что когда в него попадает благочестивый или ученый муж, то он сгорает» [1]. Мир, как божественное творение, по необходимости оказывается несовершенным, но было бы еще большим злом, если бы из-за этого бог отказался от создания мира.

Вопрос о наличии зла в мире вновь обсуждается в том же духе в «Ответе на три вопроса». В обоих сочинениях Хайям пытается показать, что несовершенство мира не есть следствие скупости или неабсолютной благости божества, причем в «Ответе» он добавляет еще, что зло случайно и очень мало. Несомненно, однако, что эта своеобразная теория наименьшего зла логически и этически не удовлетворяла ученого, который в конце концов признавался: «Здесь имеются подробности, которые невозможно выразить, и сообщающий не может сообщить это, так как у него нет достаточной ясности для этого. Только глубокая инту-

[1] Ибн Сина. Даниш-намэ — Книга знания, стр. 203.

иция может достичь того вдохновения, которое удовлетворяет совершенную душу и с помощью которого она вкушает наслаждения высокого разума» [3, стр. 164]. В четверостишиях, как мы увидим, эта проблема получила другое, не столь оппортунистическое и примиряющее решение.

Обсуждая вопрос о долженствовании, Хайям развивает свои взгляды на общество и общественную жизнь людей. Люди должны сотрудничать и оказывать друг другу помощь для производства пищи, одежды и жилищ, без чего нельзя достичь совершенства. В обществе нужно разделение труда: «каждый... должен взять на себя производство одного из необходимых средств жизни, что освободит его от той тяжести, которая лежала бы на нем, если бы он один был нагружен многими делами» [3, стр. 158]. А раз так, должен быть установлен и закон, по которому люди «делились бы между собой по справедливости» [3, стр. 158]. Впрочем, Хайям не развивает далее опасные мысли о справедливом распределении материальных благ, от которого столь далеко было современное ему общество, но непосредственно переходит к обоснованию необходимости пророка-законодателя. Пророка он наделяет высокими добродетелями, отличающими его от эгоистического большинства людей, которые не видят того, чем они обязаны другим, и считают себя более достойными блага и власти, нежели другие. Пророк, человек наиболее чистый духом и сильный разумом, не подверженный страстям и гневу и не домогающийся господства, не может, однако, жить вечно на земле. Отсюда вытекает необходимость молитвы: введенные пророком законы не удержатся, если их не вспоминать постоянно в молитвах, упоминая при том и законодателя и самого аллаха. В этой части трактата рассуждения Хайяма близки к идеям утопического «Трактата о взглядах жителей добродетельного города» ал-Фараби [1].

В «Трактате о бытии и долженствовании» и «Ответе на три вопроса» Хайям выступает как сторонник восточного аристотелизма, соединенного со значительными элементами неоплатонизма и существенно приспособленного к мусульманскому вероучению. Рационалистические доводы

---

[1] См.: Фараби. Трактат о взглядах жителей добродетельного города. Перевод А. В. Сагадеева, в кн.: С. Н. Григорян. Из истории философии Средней Азии и Ирана VII—XII вв. М., 1960, стр. 156—195; см. стр. 163—166.

используются для подтверждения важнейших положений ислама и религиозной обрядности. Впрочем, с точки зрения правоверного ислама, такое подтверждение являлось глубоко еретическим. Вместе с тем текст этих трактатов свидетельствует, что Хайям сам не был удовлетворен излагаемой им рационалистической попыткой оправдания существующего в мире зла.

В «Ответе на три вопроса» представляют интерес еще два момента. Во-первых, Хайям здесь высказывается по вопросу о детерминизме, который находился в противоречии с догмой о всемогуществе и свободе воли божества. Хайям как бы исправляет замечания о царящей в мире необходимости, сделанные в предыдущем сочинении. Он если и не опровергает, то отвергает детерминизм, но обходится при этом одной-единственной фразой, не содержащей никаких доводов. Скороговоркой он заявляет: «с первого взгляда и при внешнем рассмотрении кажется, что ближе к истине детерминизм, но на самом деле он колеблется в бессмыслице и погружается в выдумки, так что он очень далек от истины» [3, стр. 165]. Как ни решительно сформулировано это отречение, но в устах мудреца и ученого, развивающего подробную аргументацию во всех других случаях, оно звучит как формальное и вынужденное заявление человека, не рискующего вступить в конфликт с церковью по столь важному вопросу.

Во-вторых, Хайям рассматривает кардинальную в истории философии проблему существования общих понятий, которой в значительной части посвящены еще два его сочинения — «Свет разума о предмете всеобщей науки» и «Трактат о существовании». Этот вопрос лежал вне опасной зоны и не был прямо связан со щекотливыми религиозными проблемами. Следует полагать поэтому, что здесь Хайям свободно высказал свое подлинное мнение.

Проблема существования общих понятий восходит к грекам. Еще Платон учил, что абсолютным и неизменным бытием обладают идеи — идеи добра, треугольника, белизны, человека и т. д., между тем как наблюдаемый нами мир является только изменчивым и преходящим выражением идей. Аристотель подверг доктрину Платона критике. Порфирий в своих комментариях к Аристотелю поставил вопрос о родах и видах следующим образом: «существуют ли они самостоятельно или же находятся в одних мыслях, и если они существуют, то тела ли это, или бестелесные вещи, и обладают ли они отдельным бытием, или же существуют в чувственных предметах и опираясь только на них [1]. Ибн Сина считал, что общие понятия обладают трояким существованием: до вещей, именно в божественном разуме, в самих вещах и после вещей, как абстракции, возникающие в разуме человека путем отвлечения от свойств единичных вещей. По существу, Ибн Сина, подобно Платону, признавал наличие мира идей, независимого от мира вещей и даже предшествующего ему, только в его учении эти идеи имеют бытие не сами по себе, но лишь в разуме божества. Хайям, в отличие от Ибн Сины, не признает бытия общих понятий в божественном сознании и подходит к материалистической трактовке проблемы. Термин «существование», говорит он, имеет два значения, совершенно не совпадающие друг с другом. Это, во-первых, «бытие в вещах», для которого собственно и подходит слово «существование» и, во-вторых, существование в душе, т. е. чувственное, воображаемое и разумное представление. Существующее в вещах есть вещь. «Но образ, схема или идея познанной или представленной вещи могут не существовать в вещах, как наше понятие человека: в душе и в вещах имеются различные понятия человека, поскольку человек есть вещь, но образ человека, существующий в душе, есть идея, не существующая в вещах» [3, стр. 161—162]. Когда говорят, что свойство быть животным или «животность» существует в человеке, то имеют в виду не объективное существование животности, как вещи, но ее существование в сознании человека. В трактате «Свет разума» Хайям подробно разбирает нелепости и невозможности, «возникающие при суждении, что существование — вещь помимо самого существующего» [3, стр. 169]. Мы не будем останавливаться на различении свойств необходимых (например, для человека — быть животным) и возможных (например,— быть земледельцем) и других подробностях учения Хайяма.

Охарактеризованная только что концепция получила в то же самое время в Европе название номинализма (от латинского nomen — «имя»), а учение о независимом, как бы «вещном» существовании общих понятий было прозвано реализмом (от res — «вещь»). Номиналисты полагали, что

---

[1] Порфирий. Введение к Категориям; в кн.: Аристотель. Категории. М.—Л., 1939, стр. 51—76; см. стр. 53.

общие понятия суть только названия, «имена», которым не соответствует что-либо реальное. В мире существуют лишь единичные вещи, а в уме человека — соответствующие им единичные представления; некоторые их группы обозначаются одним именем. Борьба между этими двумя основными направлениями ранней средневековой схоластики оказала большое влияние на развитие европейской философской мысли. К. Маркс и Ф. Энгельс писали: «Номинализм был одним из главных элементов у *английских* материалистов и вообще является *первым выражением* материализма» [1]. Основателем номинализма был современник Хайяма француз Росцеллин из Компьена (ок. 1050—1120). Особенно близко к Хайяму учение ученика Росцеллина, также француза, Пьера Абеляра (1079—1142), считавшего, что в душе, т. е. в человеческом разуме, существуют не только индивидуальные представления, но и общие понятия как абстракции от конкретных вещей. Учение Абеляра и его последователей получило название концептуализма (от латинского conceptus — «понятие»). Концептуалисты являлись умеренными номиналистами, в отличие от крайних номиналистов, к которым относился сам Росцеллин. Заметим, что к концептуалистам был близок англичанин Аделард из Бата, работавший в первой половине XII в., известный как переводчик с арабского на латынь «Начал» Евклида и других математических произведений.

Возможно, что одним из отправных пунктов европейских номиналистов, так же как и Хайяма, было философское учение Ибн Сины.

Несколько особняком стоит пятый «Трактат о всеобщности существования», написанный по заказу Муайида ал-Мулка — везира преемников Малик-шаха — для его сына, которому Хайям, по-видимому, давал уроки философии. Это сочинение состоит из семи разделов. В первом разделе подробно излагается учение Ибн Сины о цепи порядка. Все существующее делится на «абсолютное» и «тело». Абсолютное подразделяется на разум и душу. Разум подразделяется на «творящий разум, первое следствие необходимо сущей первой причины и причина всего сущего, находящегося под ним» [3, стр. 180], второй разум — господин «высшего неба», третий — господин «неба небес», четвертый — неба Сатурна, пятый — неба Юпитера, шестой —

[1] К. Маркс и Ф. Энге… Сочинения, т. 2, стр. 142.

неба Марса, седьмой — неба Солнца, восьмой — неба Венеры, девятый — неба Меркурия, десятый — неба Луны. Каждому разуму соответствует своя душа и «каждый из разумов и душ, являющихся господами небес, движет свое небо, причем душа движет деятельностью, а разум — любовью» [3, стр. 181]. Эта картина мира, соответствующая порядку светил в системе Птолемея, через латинские переводы «Книги исцеления» и «Книги спасения» Ибн Сины получила распространение и в Европе. Данте поэтически описал десять небесных сфер в «Божественной комедии». По Данте, на сфере Луны находятся души праведников, нарушивших обет, на сфере Меркурия — души честолюбивых, на сфере Венеры — души любвеобильных, на сфере Солнца — души мудрецов, на сфере Марса — души воителей за веру, на сфере Юпитера — души справедливых, на сфере Сатурна — души созерцателей: далее следуют сферы неподвижных звезд, кристальное небо или перводвигатель, увлекающее своим вращением нижележащие небеса, и неподвижный эмпирей — лучезарная обитель бога. Солнце и светила у Данте также движутся разумом и любовью:

Здесь изнемог высокий духа взлет;
Но страсть и волю мне уже стремила,
Как если колесу дать ровный ход,
Любовь, что движет солнце и светила [1].

Во втором разделе разъясняется, что тело бывает трех видов: небеса, «матери» — элементы и образующиеся из последних «рожденные». Каждый вид делим, и его части бесконечны по возникновению и исчезновению. Небеса и светила не возникают и не исчезают. В иерархии тел за небесами следуют «матери», первая из которых огонь, затем воздух, затем вода, затем земля. Из рожденных первое — минералы, затем растения, затем животные, затем человек. Человек принадлежит к роду животных, но выделяется речью, чем превосходит животных. «Порядок сущего» сравнивается с порядком букв алфавита и чисел, причем «необходимо сущее», т. е. бог, сравнивается с единицей, которая порождает все числа, но сама не является числом (под числом здесь, следуя Аристотелю и Евклиду,

[1] Данте Алигиери. Бо[illegible]дия. Рай. Перевод М. Лозинского. М., 1945, стр. 193.

«Трактат о всеобщности существования». Рукопись Британского музея Or. 6572, листы 51 и 51об. Начало трактата — в рамке на л. 51 (стр. 141), продолжение в рамке на л.51 об.(стр. 140), дальнейшее продолжение на том же листе на полях: снизу, справа и сверху, окончание — на полях л. 51: сверху и слева.

понимается множество единиц). Из необходимо сущего проистекает, как уже говорилось, разум, из разума — душа, из души — небо, из неба — матери, а из матерей — рожденные.

Здесь же подчеркивается разница между «абсолютным» и «телом»: тело обладает длиной, шириной, глубиной, положением в пространстве и другими акциденциями, «абсолютное» не обладает ни измерениями, ни другими акциденциями, но является источником тел, определяющим их форму.

В третьем разделе рассматривается разница в постижении между самостоятельным разумом и нуждающейся в нем душой. В четвертом разделе изложено учение о пяти видах общего: роде, виде, подразделении, особенности, акциденции. Это учение, принадлежащее Порфирию, известно под названием «дерева Порфирия». Акциденции — количество, качество, отношение, место, время, состояние, обладание, действие и страдание — вместе с субстанцией составляют десять категорий Аристотеля. Здесь же приводится классификация слов на повелительные, подчинительные, условные, синонимы и омонимы.

В пятом разделе говорится о действиях человека — мгновенных и долговременных, приятных и неприятных и т. д., а в шестом разделе — о действиях тел, вроде действия огня на горючие вещества и действия магнита на железо. Эти действия объясняются силами, имеющимися в телах, обладающих этими действиями.

Наконец, в седьмом разделе сравниваются четыре группы «добивающихся познания господа». Первые — мутакаллимы, согласные с мнением, основанным на традиционных доказательствах.

Вторые — это философы и ученые, познающие при помощи чисто разумных и логических доказательств и не удовлетворяющиеся традиционными доводами. «Однако,— пишет Хайям,— они не могут быть верны условиям логики и ослабевают» [3, стр. 185].

Третьи — это исмаилиты, согласно которым средством познания творца может быть только весть праведника, поскольку «в доказательствах познания есть много трудностей и противоречий, в которых разум заблуждается и ослабевает» [3, стр. 186].

Четвертые — это суфии, которые и не пытаются познать с помощью разума, но очищают душу с помощью морального совершенствования. Этот путь объявляется наилучшим.

Седьмой раздел трактата является кратким изложением сочинения влиятельного суфия ал-Газали (1058—1111) «Избавляющий от заблуждения» [1]. В целом этот написанный по заказу трактат, менее других отражал взгляды автора, который несомненно принадлежал к «философам и ученым» и не имел ничего общего с исмаилитами-ассасинами и с мистиками-суфиями.

---

[1] Газали. Избавляющий от заблуждения; в кн.: С. Н. Григорян. Из истории философии Средней Азии и Ирана VII—XII вв., стр. 211—266.

Поэтические раздумья

Мы уже говорили, что имеется более тысячи четверостиший, приписываемых Хайяму. Многие стихи сохранились в различных вариантах и это показывает, что четверостишья, во всяком случае на первых порах, не записывались, а распространялись из уст в уста.

В некоторых четверостишьях Хайям горько сетует на жизненные невзгоды:

Будь милосердна жизнь, мой виночерпий злой!
Мне лжи, бездушия и подлости отстой
Довольно подливать! Поистине, из кубка
Готов я выплеснуть напиток горький твой

[*36, № 195, стр. 61*]

Или жалуется на «ученую чернь», о которой говорится в предисловии к его алгебраическому трактату:

То не моя вина, что наложить печать
Я должен на свою заветную тетрадь;
Мне чернь ученая достаточно знакома,
Чтоб тайн своей души пред ней не разглашать.

[*36, № 293, стр. 36*]

Жизненные невзгоды приучили Хайяма, вначале, по-видимому, довольно невоздержанного на язык, к замкнутости и осторожности:

Чтоб мудро жизнь прожить, знать надобно не мало,
Два важных правила запомни для начала:
Ты лучше голодай, чем что попало есть,
И лучше будь один, чем вместе с кем попало.

[*36, № 170, стр. 55*]

Особенно предостерегает поэт от невежд и глупцов:

О тайнах сокровенных невеждам не кричи
И бисер знаний ценных пред глупым не мечи.
Будь скуп в речах и прежде взгляни, с кем говоришь;
Лелей свои надежды, но прячь от них ключи

[*35, № 72, стр. 227*]

Общаясь с дураком, не оберешься срама:
Поэтому совет ты выслушай Хайяма:
Яд, мудрецом тебе предложенный, прими,
Из рук же дурака не принимай бальзама.

[*36, № 124, стр. 44*]

Многие четверостишья Хайяма посвящены философским вопросам. В одних из них мы встречаем ту же мысль, что «необходимо сущее есть единица», которая выражена в «Трактате о всеобщности существования»:

В тоске молило сердце: открой мне знанья свет!
— Вот это — знак алифа,— промолвил я в ответ.
И слышу вдруг: довольно! Ведь в этой букве все:
Когда Единый в доме, другим уж места нет.

[*35, № 4, стр. 214*]

Но в других случаях он высказывает мысли гораздо более близкие к материализму, чем в своих философских сочинениях, адресованных официальным лицам или составленных по их поручению.

Неоднократно мотивом четверостиший служит идея о вечном кругообороте материи в сочетании с грустным ощущением бренности всего живого:

Трава, которою — гляди! — окаймлена
Рябь звонкого ручья,— душиста и нежна.
Ее с презрением ты не топчи: быть может,
Из праха ангельской красы взошла она.

[*36, № 234, стр. 71*]

Или:

Знай: в каждом атоме тут на земле таится
Дышавший некогда кумир прекрасполицый,

Снимай же бережно пылинку с милых кос:
Прелестных локонов была она частицей"

[*36, № 21, стр. 18*]

Целая серия раздумий на эту тему облечена в форму стихов о гончарных изделиях, вроде:

Я к гончару зашел: он за комком комок
Клал глину влажную на круглый свой станок;
Лепил он горлышки и ручки для кувшинов
Из царских черепов и из пастушьих ног.

[*36, № 65, стр. 29*]

Или:

Кувшин мой, некогда терзался от любви ты.
Тебя, как и меня, пленяли кудри чьи-то,
А ручка, к горлышку протянутая вверх
Была твоей рукой, вкруг милого обвитой.

[*36, № 19, стр. 17*]

Аналогичные мысли о кругообороте материи в природе — в стихах Хайяма о том, что:

Когда умрем, наш прах пойдет на кирпичи
И кто-нибудь из них себе хоромы сложит.

[*36, № 18, стр. 17*]

Чрезвычайно примечательно, что сходные мотивы мы встречаем у великого Шекспира, который вложил в уста Гамлета речи, очень близкие к словам Хайяма о кругообороте материи в природе и о равенстве в нем царей и пастухов.

В IV акте на вопрос короля о Полонии Гамлет отвечает: «Мы откармливаем всех прочих тварей, чтобы откормить себя, а себя откармливаем для червей. И жирный король и сухопарый нищий — это только разве две смены, два блюда, но к одному столу; конец таков. ...Человек может поймать рыбу на червя, который поел короля, и поесть рыбы, которая питалась этим червем» [1].

В. Шекспир. Гамлет. Перевод М. Лозинского. Полное собрание сочинений, т. 6. М., 1960, стр. 3—157; см. стр. 106.

«Я к гончару зашел...» Иллюстрация Мохаммеда Таджвиди к тегеранскому изданию четверостиший 1960 г.

Аналогичные мысли, родственные мыслям, выраженным в словах Хайяма о кирпичах, на которые пойдет наш прах, Гамлет развивает и в V акте в беседе с Горацио на Эльсинорском кладбище: «Почему бы воображению не проследить благородный прах Александра, пока оно не найдет его затыкающим бочечную дыру?... например, так: Александр умер, Александра похоронили, Александр превращается в прах; прах есть земля; из земли делают глину; и почему этой глиной, в которую он обратился, не могут заткнуть пивную бочку?

Державный цезарь, обращенный в тлен,
Пошел, быть может, на обмазку стен.
Персть, целый мир страшившая вокруг,
Платает щели против зимних вьюг!» [1]

Как мы видим, Гамлет заканчивает свои размышления о прахе Александра четверостишьем, напоминающим рубаи Хайяма. После этих слов Гамлета на кладбище появляется процессия с гробом Офелии. Ее брат Лаэрт восклицает:

И пусть из этой непорочной плоти
Взрастут фиалки! [2]

И мы вспоминаем слова Хайяма о душистой и нежной траве, взошедшей «из праха ангельской красы».

Мы видели, что в философских трактатах Хайям выступал преимущественно как убежденный последователь Ибн Сины, хотя иногда и в них звучали мотивы искренней неуверенности и в еще большей мере — вынужденной неискренности. Во множестве четверостиший с большой силой звучит иной лейтмотив — колебаний и сомнений в философских учениях. Хайям-поэт как бы иронизирует над Хайямом-философом:

Меня философом враги мои зовут,
Однако — видит бог — ошибочен их суд.
Ничтожней много я — ведь мне ничто не ясно,
Не ясно даже то, зачем и кто я тут.

[*36, № 157, стр. 52*]

---

[1] В. Шекспир. Гамлет, стр. 136.
[2] Там же, стр. 137.

«Кувшин мой, некогда терзался от любви ты».
Иллюстрация Мохаммеда Таджвиди к тому же изданию.

Эти сомнения ведут очень далеко — к признанию, что:

Несовместимых мы всегда полны желаний:
В одной руке бокал, другая — на Коране.
И так вот мы живем под сводом голубым:
Полубезбожники и полумусульмане.

[*36, № 111, стр. 40*]

«Полубезбожные» мысли, а особенно жалобы на неустройство мира и жизни человека встречаются в довольно значительной части четверостиший. Все это весьма расходится с учением о торжестве добра над злом, которое играло столь важную роль в теодицее, изложенной в философских сочинениях Хайяма. Вот какую оценку земной жизни дает поэт:

Под этим небом жизнь — терзаний череда,
А сжалится ль оно над нами? Никогда.
О нерожденные! Когда б о наших муках
Вам довелось узнать, не шли бы вы сюда.

[*36, № 187, стр. 59*]

И, пройдя через эту «череду терзаний», человек не может надеяться даже на вознаграждение в загробном инобытии:

Никто не лицезрел ни рая, ни геенны;
Вернулся ль кто-нибудь оттуда в мир наш тленный?
Но эти призраки бесплотные — для нас
И страхов и надежд источник неизменный.

[*36, № 201, стр. 63*]

Объятья гурии, мне говорят,— отрада,
Меня ж прельщает сок пурпурный винограда.
Я барабанов шум лишь вдалеке люблю,
Мне мил наличный грош, посулов мне не надо.

[*36, № 15, стр. 16*]

Хайям призывает отказаться от этих надежд и страхов, а вместе с тем и от всех религиозных обрядов:

Восстань! Пригоршню праха в лицо кинь небесам.
Конец надеждам, страхам, молитвам и постам!
Люби красу земную, земное пей вино:
Никто не встал из гроба, и все истлеет

[*35, № 41, стр. 221*]

Не веря в загробную жизнь, Хайям знает, что после смерти он не подвергнется тем адским наказаниям, которые ему, как грешнику, полагаются, согласно учению ислама:

Нам говорят муллы, что существует ад.
Поверьте мне: они неправду говорят.
Будь предназначен он для пьяниц и влюбленных,
Давно бы опустел цветущий райский сад.

[36, № 240, стр. 73]

Поэтому поэт не боится смерти, и даже равнодушен к ней:

Разумно ль смерти мне страшиться? Только раз
Я ей взгляну в лицо, когда придет мой час.
И стоит ли жалеть, что я — кровавой слизи,
Костей и жил мешок — исчезну вдруг из глаз?

[36, № 43, стр. 23]

И как бы заключительным аккордом всей этой антирелигиозной прелюдии являются стихи, в которых выражается прямое сомнение, если не в существовании бога, то в его мудрости и благости. Творец мира выступает как неумелый строитель, ответственный за все недостатки своего творения:

Ужели бы гончар им сделанный сосуд
Мог в раздражении разбить, презрев свой труд?
А сколько стройных ног, голов и рук прекрасных.
Любовно сделанных, в сердцах разбито тут!

[36, № 87, стр. 34]

Традиционное объяснение зла в мире, как наказания, которое бог посылает грешникам, высмеивается. В лицо «всеведущему» богу поэт бросает:

Ты сотню западней расставил тут и там,
Но, словно за мятеж, грозишь ты смертью нам,
Коль мы отступимся и попадем в любую.
Да не забыл ли ты, что их расставил сам?

[36, № 82, стр. 33]

Когда ты для меня слепил из глины плоть,
Ты знал, что мне страстей своих не побороть;
Не ты ль тому виной, что жизнь моя греховна?
Скажи, за что же мне гореть в аду, господь?

[36, № 242, стр. 73]

Осмеивается и учение ислама о «милосердии» бога — как известно, любое сочинение во времена Хайяма должно было начинаться словами: «Во имя аллаха, милостивого, милосердного». Этому правилу подчинялся в своих философских и научных трактатах и Хайям. В стихах он говорит:

Неправ, кто думает, что бог неумолим.
Нет, к нам он милосерд, хотя мы и грешим.
Ты в кабаке умри сегодня от горячки,—
Сей грех он через год простит костям твоим.

[36, № 261, стр. 78]

И уж прямое богохульство звучит в четверостишии:

У мертвых и живых один владыка — ты;
Кто небо завертел над нами дико? Ты.
Я тварь греховная, а ты — создатель мира;
Из нас греховней кто? Сам рассуди-ка ты!

[36, № 84, стр. 34]

К этим четверостишьям тесно примыкает цикл стихов, в которых поэт издевается над официальной религией, ее обычаями и ее служителями. Хайям заявляет, что он посещает мечеть вовсе не для молитвы:

Намедни я в мечеть зашел, но не затем,
Чтоб помолиться, нет,— мне за год перед тем
Там удалось украсть молельный коврик; новый
Задумал я достать, протерся тот совсем.

[36, № 245, стр. 74]

Он разоблачает лицемерие и жадность духовенства:

Блуднице шейх сказал: «Ты, что ни день, пьяна,
И что ни час, то в сеть другим завлечена!»
Ему на то: «Ты прав, но ты-то сам таков ли,
Каким всем кажешься?» — ответила она.

[36, № 77, стр. 32]

Хоть я пьяница, о муфтий городской,
Степенен все же я в сравнении с тобой;
Ты кровь людей сосешь, я — лоз. Кто кровожадней,
Я или ты? Скажи, не покривив душой.

[36, № 248, стр. 75]

گویند هر آنکه دوزخی باشد مست		قولی است خلاف دل در آن نتوان بست

گر عاشق و میخواره بدوزخ باشند		فردا بینی بهشت همچون کف دست

«Нам говорят муллы, что существует ад».
Иллюстрация Мохаммеда Таджвиди к тому же изданию

Заодно достается и бесплодным учениям всех семидесяти двух сект ислама:

Вино дает нам силу забыть весь бред пустой
И семьдесят две секты с бесплодной их возней.
Алхимии вершина и жизни элексир,
Вино целит страданья и скорбь души больной.

[*35, № 109, стр. 235*]

Он осуждает не только мусульманскую, но и христианскую и другие религии:

Дух рабства кроется в кумирне и Каабе,
Трезвон колоколов — язык смиренья рабий,
И рабства черная печать равно лежит
На четках и кресте, на церкви и михрабе.

[*36, № 257, стр. 77*]

Бушуют в келиях, мечетях и церквах,
Надежда в рай войти и перед адом страх.
Лишь у того в душе, кто понял тайну мира,
Сок этих сорных трав весь высох и зачах.

[*36, № 258, стр. 77*]

Отсюда видно, что то предпочтение, которое оказывается сектам исмаилитов и суфиев перед учеными и философами в «Трактате о всеобщности существования», вовсе не отражает истинных симпатий Хайяма. Вот саркастический отзыв о мистической секте суфиев, учившей «очищению души»:

Ты мрачен? Покури хашиш,— и мрака нет;
Иль кубок осуши,— тоски пройдет и след.
Но стал ты суфием, увы! Не пьешь, не куришь.
Булыжник погрызи,— вот мой тебе совет.

[*36, № 114, стр. 41*]

В другом случае он издевательски говорит о переселении души учителя медресе в тело осла:

Ты нас давно покинул и возвращен, когда
Твое исчезло имя из мира без следа,
Когда сраслися ногти в копыта у тебя,
И в хвост переродилась ослиный борода [1].

---

[1] Перевод Л. Некоры, см.: [100].

Религиозной морали Хайям противопоставляет проповедь наслаждения земной жизнью, прекрасной, несмотря на все ее невзгоды:

Бегут за мигом миг и за весной весна;
Не проводи же их без песен и вина.
Ведь в царстве бытия нет блага выше жизни,—
Как проведешь ее, так и пройдет она.

[*36, № 106, стр. 39*]

Мы больше в этот мир вовек не попадем,
Вовек не встретимся с друзьями за столом.
Лови же каждое летящее мгновенье,—
Его не подстеречь уж никогда потом.

[*36, № 41, стр. 23*]

В наслаждении Хайям пытается найти выход из неразрешимых вопросов:

Вопросов полон мир,— кто даст на них ответ?
Брось ими мучиться, пока ты в цвете лет.
Тут, на земле, вином создай эдем,— в небесный
Не то ты попадешь, не то, мой милый, нет.

[*36, № 25, стр. 19*]

Эта проповедь наслаждения «бесценной жизнью» в корне противоречит учению ислама, проповедующему презрение к наслаждению в этой жизни, признающему наслаждение только в загробной жизни для тех, кто был в этой жизни праведником, а грешникам, злоупотребляющим наслаждением в этой жизни, грозящему муками ада.

Одним из высших наслаждений Хайям считает вино. Восхвалению вина посвящены многие четверостишья Хайяма. Хайям говорит:

Вино питает мощь равно души и плоти,
К сокрытым тайнам ключ вы только здесь найдете.
Земной и горний мир, до вас мне дела нет!
Вы оба пред вином ничто в конечном счете.

[*36, № 98, стр. 37*]

Воспевая вино, Хайям был далек от проповеди опьянения и разнузданности. Специфическая особенность этого славословия вину состояла на Востоке в том, что вино запрещалось исламом и похвалы вину являлись особой формой протеста против церковных догм, особой формой вольномыслия. Это подчеркивает и Хайям:

Отречься от вина? Да это все равно,
Что жизнь свою отдать! Чем возместишь вино?
Могу ль я сделаться приверженцем ислама,
Когда им высшее из благ запрещено?

[*36, № 156, стр. 52*]

Хоть мудрый шариат и запретил вино,
Хоть терпкой горечью пропитано оно,—
Мне сладко с милой пить. Недаром говорится:
Мы тянемся к тому, что нам запрещено.

[*36, № 222, стр. 68*]

Хайям издевается над запретом вина исламом в этой жизни и над обещанием его в раю:

И слева мне и справа твердят: не пей, Хайям!
Вино — враг веры правой, сок лоз — отрава нам.
Вино — враг веры правой? Так пей же кровь лозы;
Ведь кровь врагов лукавых нам пить велит ислам!

[*35, № 99, стр. 233*]

С особым удовольствием приникает Хайям к кубку как раз в то время, когда употребление вина считается более всего греховным, например в святую ночь Рамазана, когда, по преданию, архангел Гавриил передал коран пророку:

Я дня не провожу без кубка иль стакана,
Но нынешнюю ночь святую Рамазана
Хочу — уста к устам и грудь прижав к груди —
Не выпускать из рук возлюбленного жбана.

[*36, № 223, стр. 68*]

Стихам Хайяма о вине вполне соответствуют его высказывания о вине в «Науруз-наме», где вину посвящена специальная глава «Слово о пользе вина». В этой главе Хайям указывает, что ученые медики древности — Гален, Сократ и Гиппократ, а затем и средневекового Востока — Джибраил Бахтишу, Сабит ибн Корра, Абу Али ибн Сина и Абу Бакр ар-Рази — «говорили, что для организма людей нет ничего более полезного, чем вино, в особенности виноградное вино, горькое и профильтрованное. Оно уносит горе, веселит сердце, способствует перевариванию густой пищи, румянит щеки, освежает и белит кожу, обостряет память, скупого делает щедрым, трусливого делает храбрым и уменьшает болезни. Пьющий вино обычно здоров, так как лихорадки и болезни порождаются вязкими и порочными соками, и у того, кто пьет много вина, редко встречаются. Во время поноса оно не дает дурным сокам скопляться в желудке. Некоторые прозорливые называют вино пробным камнем мужественного человека. Некоторые называют его критиком разума, некоторые — мерилом знания, некоторые — критерием таланта. Большие люди называли вино смывающим горе, а некоторые — веселящим горе. Кто выпьет пять чаш чистого вина, проявляет доброе и злое, что есть в нем, всю свою сущность. Оно делает незнакомого — другом и умножает дружбу, в то же время оно усаживает друзей вместе. Вино очень приятно; все съедобное в мире, как жирное, сладкое, так и кислое, таково, что его нельзя съесть сверх насыщения, а если съешь больше, то человеческой природе становится противно, а вино как много ни пьешь, только больше хочешь. Человек не насыщается им, и человеческой природе оно не противно, потому что оно — царь напитков. В нем много пользы для людей, но его грех больше его пользы. Мудрому нужно пить так, чтобы его вкус был больше греха, чтобы не мучиться, упражнением он доводит свою душу до того, что с начала питья вина до конца от него не происходит никакого зла и грубости ни в словах, ни в поступках, а только добро и веселье. Когда он достиг этой ступени, ему подобает пить вино. Преимуществ вина много» [3, стр. 215—216]. Далее, ссылаясь на Галена, ар-Рази и Ибн Сину, Хайям рассматривает тринадцать сортов вина и указывает пользу и вред каждого сорта с медицинской точки зрения и средство устранения вреда каждого сорта и приводит легенду о появлении вина.

Много вдохновенных стихов посвящает Хайям любви:

О горе, горе сердцу, где жгучей страсти нет,
Где нет любви мучений, где грез о страсти нет!
День без любви потерян; тусклее и серей,
Чем этот день бесплодный, и дней ненастья нет.

[35, № 131, стр. 239]

У Хайяма имеются лирические четверостишья и о радостях любви и о ее муках:

И я, седобородый, в силок любви попал,
И вот, в руке сверкает искрящийся бокал!
Рассудок терпеливый мне сшил халат заслуг,
А рок мой прихотливый все в клочья изорвал...

[35, № 128, стр. 238]

Кумир мой — горшая из горьких неудач! —
Сам ввергнут, но не мной, в любовный жар и плач.
Увы, надеяться могу ль на исцеленье,
Раз тяжко занемог единственный мой врач?

[36, № 30, стр. 20]

Во многих четверостишьях Хайям воспевает женскую красоту, например:

Красой затмила ты Китая дочерей,
Жасмина нежного твое лицо нежней;
Вчера взглянула ты на шаха Вавилона
И все взяла: ферзя, ладьи, слонов, коней.

[36, № 52, стр. 26]

В некоторых четверостишьях Хайям восторгается и красотой юноши:

Сядь, отрок! Не дразни меня красой своей!
Мне пожирать тебя огнем своих очей
Ты запрещаешь... Ах, я словно тот, кто слышит:
«Ты кубок опрокинь, но капли не пролей!»

[36, № 59, стр. 27]

Со стихами Хайяма о красоте женщины и юноши также перекликается глава «Слово о свойствах красивого лица» в «Науруз-наме». Здесь Хайям говорит: «Красивое лицо ученые считают большим счастьем и его лицезрение — хорошей приметой. Говорят, что счастье хорошего лицезрения имеет такое же влияние на состояние людей, как счастливое сочетание светил на небе. Это подобно одежде, находившейся в сундуке с благовониями, испускающими приятный запах: она дает людям этот запах и без благовоний. Это подобно отражению солнца в воде, происходящему и без солнца, так как красота лица людей является частью влияния счастливых светил, достигающего людей по повелению всевышнего Изада. Красота восхваляется на всех языках и приятна всякому разуму. В мире много хороших вещей, лицезрение которых веселит людей и приносит свежесть в природу, но ничто не заменит красивое лицо, ибо от красивого лица рождается такое веселье, что никакое веселье не сравнится с ним. Говорят, что красивое лицо является причиной счастья в этом мире. А если красивое лицо вместе с хорошим характером, счастье достигает крайности. Когда человек и по наружности и по существу хорош, он возлюблен богом и людьми. Красивое лицо обладает четырьмя свойствами. Одно из них — то, что оно делает день созерцающего его благополучным, другое — то, что оно делает приятным наслаждение жизнью, третье — то, что оно делает человека великодушным и доблестным, четвертое — то, что оно увеличивает богатство и высокое положение. Если человек рано утром развеселился благодаря красивому лицу, это указывает на то, что его доля счастлива, и в этот день он видит только веселье. Когда человек садится рядом с красивым лицом, жизнь становится для него веселой, горе исчезает и дела его идут лучше. Когда человек видит кого-либо с красивым лицом, в нем возбуждаются чувства мужественности и великодушия, даже если он не мужественный и низкий. Когда люди видят того, у кого красивое лицо, они смотрят на него с уважением, так как это — благо в наслаждении жизнью. Говорят, что красивое лицо делает старика молодым, молодого делает ребенком, а ребенка — ангелом. Пророк,— мир над ним! — сказал: «Требуйте все, что вам нужно, у красивых лицом». Каждый определяет для себя красивое лицо и дает ему свое название. Некоторые люди называют его площадью любви, некоторые степенью веселья, садом общительности, украшением создания и знаком рая. Что касается ученых и философов, то они говорят, что оно есть доказательство божественного создания и желания изучать науку. Оно является следом творца и показывает доброту его сущности. Натуралисты говорят, что у всех вещей имеется прибавление, уменьшение и равновесие и единый порядок обусловливается равновесием так, что если вы посмотрите, то лицо, в котором все в равновесии, лучше по своей форме; этот мир установлен только равновесием, он процветает благодаря ему. Сторонники учения о переселении душ говорят, что лицо является почетным халатом творца, знаком его награждения за чистоту и добродетели, совершенные его рабом в прежней жизни. Творец своим светом дарует ему красивое лицо. Что касается обладающих знаниями, то они говорят, что лицо является отражением свечи, освещающим свечу. Некоторые говорят, что оно является лаврами головы и дождем милосердия, освежающим сад знания и заставляющим распускаться дерево старости. Некоторые говорят, что оно является знаком истины, показывающим исследователям правду, чтобы с помощью этой правды они вернулись к истине. О красивом лице сказано много; если мы упомянем все, будет слишком многословно» [3, стр. 220—222].

Далее Хайям приводит рассказ о красивой невольнице, которая пришла к хорасанскому эмиру Абдаллаху ибн Тахиру просить за своего хозяина — военачальника эмира, посаженного им в тюрьму, и о красивом юноше — любимце султана Махмуда.

Многие гуманистические четверостишья Хайяма проникнуты гордостью за человека:

Мы — цель и высшая вершина всей вселенной,
Мы — наилучшая краса юдоли бренной;
Коль мирозданья круг есть некое кольцо,
В нем, без сомнения, мы — камень драгоценный.

[36, № 250, стр. 75]

О любви поэта к человеку свидетельствует его призыв:

Пренебреги законом, молитвой и постом,
Зато делись, чем можешь, с голодным бедняком.

[35, № 7, стр. 214]

Хайям решается и на горячий протест против несправедливого устройства людской жизни:

О небо, к подлецам щедра твоя рука:
Им — бани, мельницы и воды арыка;
А кто душою чист, тому лишь корка хлеба.
Такое небо — тьфу! — не стоит и плевка.

[36, № 161, стр. 53]

Тому, на чьем столе надтреснутый кувшин
Со свежею водой и только хлеб один,—
Увы, приходится пред тем, кто ниже, гнуться
Иль называть того, кто равен, «господин».

[*36, № 164, стр. 54*]

Сам Хайям не хочет быть ни рабом, ни владыкой:

О, если б каждый день иметь краюху хлеба,
Над головою кров и скромный угол, где бы
Ничьим владыкою, ничьим рабом не быть!
Тогда благословить за счастье можно б небо.

[*36, № 165, стр. 54*]

Наконец, Хайям мечтает о лучшем будущем для человечества, о справедливом общественном строе, в котором могли бы беспрепятственно развиваться благородные стремления каждой личности и счастье стало бы уделом всех.

Когда б я властен был над этим небом злым,
Я б сокрушил его и заменил другим,
Чтоб не было преград стремленьям благородным
И человек мог жить, тоскою не томим.

[*36, № 172, стр. 56*]

Мы видим, что в поэзии Хайяма отразилась сложная гамма чувств. Но совершенно отчетливо в стихах Хайяма выступают такие основные черты его мировоззрения, как гуманизм и свободолюбие, постоянные ирония и скепсис, а наряду с ним своеобразное эпикурейство, переходящее иногда в гедонизм, и сочетающееся с вольномыслием, переходящим нередко в безбожие.

Опала

После того, как Низам ал-Мулк погиб от руки ассасина, везиром Малик-шаха становится Тадж ал-Мулк, ставленник молодой жены государя красавицы Туркан-хатун из рода Караханидов. Низам ал-Мулк препятствовал назначению преемником Малик-шаха малолетнего сына Туркан-хатун Махмуда и настаивал, чтобы преемником Малик-шаха был Баркьярук, его старший сын от сельджукской принцессы.

Когда, вскоре после убийства Низам ал-Мулка, умирает и Малик-шах, его старшему сыну Баркьяруку (1073—1104). было 14 лет, средним сыновьям Мухаммеду (1082—1118) и Санджару (1086—1157) было 10 и 6 лет, а младшему Махмуду (1087—1094) — 5 лет. В этих условиях Туркан-хатун, опираясь на тюркскую гвардию — «гулямов», добилась провозглашения султаном Махмуда и стала фактической правительницей государства.

Однако через два года, в 1094 г., Махмуд умирает от оспы, и на престол вступил совсем еще юный Баркьярук. Везиром назначается сын Низам ал-Мулка Изз ал-Мулк, а с 1095 г.— другой сын Низам ал-Мулка Муаййид ал-Мулк. После смерти Баркьярука, в 1104 г., султаном провозглашается его четырехлетний сын Малик-шах II, но уже в следующем, 1105 г. престол захватывает второй сын Малик-шаха Мухаммед. Везиром остается Муаййид ал-Мулк. В 1118 г., Мухаммед умирает, оставив трех малолетних сыновей. Пользуясь этим, престол захватывает третий сын Малик-шаха Санджар, царствовавший до своей смерти в 1157 г. При нем везирами были сын Низам ал-Мулка Фахр ал-Мулк, сыновья Фахр ал-Мулка Садр ад-Дин и Насир ад-Дин и племянник Низам ал-Мулка, сын его брата Абдаллаха, Шихаб ил-Ислам. Санджар, при котором государство сельджуков значительно сократилось, перенес столицу снова в Мерв. Вскоре после смерти Санджара государство распалось.

Хайям остается связанным с сельджукскими султанами и после смерти Низам ал-Мулка и Малик-шаха. Преемники Малик-шаха прекратили материальную помощь обсерватории, и она закрылась. Этим и вызвано появление книги Хайяма «Науруз-наме». Это своеобразное сочинение было адресовано новым правителям с целью заинтересовать их древним новогодним праздником — Наурузом, связанным с солнечным календарем, и побудить их возобновить субсидирование обсерватории. «Науруз-наме» излагает историю солнечного календаря и различных календарных реформ, историю празднования Науруза в доисламском Иране и описывает церемонии этого празднования, а также содержит многочисленные рассказы и предания о различных предметах и животных, связанных с церемонией празднования Науруза,— золоте, перстне, ячмене, мече, луке и стреле, пере, коне, соколе, вине а также о красоте женщины и юноши. В рассказах приводятся по тому или иному поводу исторические факты, медицинские советы, морализирующие поучения, а также легенды, неправдоподобные анекдоты и даже совершенно ненаучные приметы. Наличие таких легенд и вымыслов побудило некоторых исследователей сомневаться, что автором книги является Хайям. Но подобные вещи имеются во многих сочинениях первоклассных ученых средних веков, например в известных «Памятниках минувших поколений» ал-Бируни. По-видимому, Хайям, как и ал-Бируни, считал, что без легенд и анекдотов, столь привычных для тогдашнего «широкого» читателя, и в частности, для высокопоставленных особ, книга утратит увлекательность, необходимую для выполнения поставленной им цели. Непосредственно цель этой книги видна в главе «Об обычаях царей Ирана». Здесь перечисляются хорошие обычаи этих властителей: хлебосольство, великодушие, справедливость. Особенно подчеркивается любовь к возведению зданий и покровительство ученым: «Они горячо стремились к возведению зданий... если царь возводил высокий дворец, город, селение, караван-сарай, крепость или проводил канал и если строительство не заканчивалось в его время, то его сын или преемник на троне государства после взятия дел

OMAR KHAYYÂM

NOWRŪZ NĀMAH

A TREATISE ON THE ORIGIN, HISTORY, & THE CEREMONIES OF THE PERSIAN NEW-YEAR FESTIVAL

PERSIAN TEXT

BASED ON THE UNIQUE BERLIN MANUSCRIPT

EDITED
WITH PREFACE, NOTES, & A GLOSSARY
BY

MOJTABÂ MINOVI

TEHRAN
"KAVEH" BOOKHOP
NASSERIYEH STREET
1933

Титульный лист «Науруз-наме» в издании Моджтабы Минови на английском языке.

نوروزنامه

رساله‌ای در منشأ و تاریخ و آداب جشن نوروز

نگارش

عمر خیام

حکیم و ریاضی دان و صاحب رباعیات مشهور

مبنی بر نسخهٔ منحصر بفرد محفوظ در کتابخانهٔ عمومی برلین

با مقدمه و حواشی و فرهنگ

بسعی و تصحیح

مجتبی مینوی

طهران

کتابخانهٔ کاوه

خیابان ناصریه

Титульный лист «Науруз-наме» в издании Моджтабы Минови на персидском языке.

державы в свои руки не обращал такого внимания ни на что, кроме окончания постройки здания, не достроенного прежним царем... сын царя в этом отношении был еще более ревностен, чем его отец» [3, стр. 194]. «Еще один обычай: кусок хлеба, который они давали слуге, они не брали обратно, и, согласно обычаю, давали в свое время каждый год и каждый месяц» [3, стр. 194]. «Если они приказывали выдавать жалованье и пособие человеку, они выдавали ему это жалованье каждый год без его требования» [3, стр. 195]. «Они высоко ценили хорошую речь» [3, стр. 195].

Значению ученых посвящена и глава «О пере», где говорится: «Ученые назвали перо украшением царства и посланием сердца. Слово без пера похоже на душу без тела, а когда оно связывается с пером, оно соединяется с телом и сохраняется навсегда. Оно похоже на огонь, выскакивающий из кремня и стали и без труда не загорающийся и не становящийся светильником, от которого получают свет. Халиф Ма'мун сказал: «Да благословит Аллах перо. Как может моя голова управлять страной без пера? Оно служит воле, не стремясь к вознаграждению и оплате. Оно говорит, прогуливаясь по земле. Его белизна омрачает, а его чернота освещает»... Человек, владеющий достоинством речи, но не владеющий достоинством письма, несовершенен и похож на половину человека, так как достоинство письма является бóльшим достоинством, и никакое достоинство не равно ему, оно повышает человека из степени человека до степени ангела, а дьявола из степени дьявола до степени человека. Письмо повышает человека с низкой ступени на высокую ступень такую, что он называется ученым, имамом, законоведом ислама и секретарем, так же как люди с достоинством речи отличаются от других животных и делаются их руководителями. Религия бога,— велика его память,— устанавливается и страна приводится в порядок царем при помощи пера» [3, стр. 208].

Управлявшая государством в 1092—1094 гг. Туркан-хатун явно не благоволила к Хайяму. Быть может, здесь сыграла роль ее давняя вражда с покровителем Хайяма Низам ал-Мулком, препятствовавшим назначению преемником Малик-шаха ее сына Махмуда. Туркан-хатун посвящено приписываемое Хайяму весьма нелестное четверостишие, очень прозрачно намекающее на отношения красивой султанши с придворной гвардией — «гулямами», на которых опиралась ее власть:

На чьем столе вино, и сладости и плов?
Сырого неуча. Да, рок — увы — таков!
Глаза Туркан-хатун — красивейшие в мире —
Добычей стали чьей? Гулямов и юнцов.[1]

[*36, № 166, стр. 54*]

Ал-Байхаки рассказывает, что «однажды имам Омар пришел к великому султану Санджару, когда тот был мальчиком и болел оспой, и вышел от него. Везир Муджир ад-Даула спросил у него: «Как ты нашел его и чем ты его лечил?» Он ответил: «Мальчик внушает страх». Это понял слуга-эфиоп и доложил султану. Когда султан выздоровел, по этой причине он затаил злобу на имама Омара и не любил его» [136, стр. 32—33]. Этот эпизод относится, по-видимому, к первым годам царствования Баркьярука, вскоре после того, как умер от оспы Махмуд (примерно в это время болел оспой и сам Баркьярук, но выздоровел). Как видно, Санджар заподозрил Хайяма в недобросовестном лечении или в «дурном глазе». Возможно, что это было связано с тем, что Хайям участвовал и в лечении Махмуда и Баркьярука.

К царствованию Баркьярука и Мухаммеда, когда везиром был Муайийд ал-Мулк, относится «Трактат о всеобщности существования» Хайяма, сочиненный им для сына везира Фахр ал-Мулка. В предисловии к трактату сказано: «Когда я приобрел счастье службы праведному господину Фахр ал-Мулку, сыну Муайийда, и он одарил меня своими милостями, он потребовал от покорного слуги памятку о всеобщей науке. Это сочинено как трактат для удовлетворения этой просьбы» [3, стр. 180].

Низами Арузи Самарканди, лично знавший Хайяма, рассказывает, что в 1114 г. (508 г. хиджры) Хайям предсказывал погоду для охоты султану Мухаммеду: «Зимой 508 года в городе Мерве султан послал человека к великому ходже Садр ад-Дину Мухаммеду ибн ал-Музаффару, да помилует его Аллах! — [с поручением]: «Скажи ходже имаму Омару, пусть он определит [благоприятный момент]

---

[1] Две последние строки исправлены в соответствии с оригиналом: Румер принял имя Туркан за слово «турки», а слово «гулямов» перевел словом «рабов».

для выезда на охоту, так чтобы в эти несколько дней ни дождя, ни снега».

А ходжа имам Омар общался с ходжой и бывал в его доме. Ходжа послал человека позвать его и рассказал ему о происшедшем. [Омар] удалился, два дня потратил на это дело и определил благоприятный момент. Сам отправился [к султану] и в соответствии с этим определением усадил султана [на коня]. И когда султан сел и проехал расстояние в один петушиный крик, набежала туча и налетел ветер и поднялся снежный вихрь. Все засмеялись, и султан хотел уже повернуть. Ходжа имам сказал: «Пусть султан успокоит сердце: туча сейчас разойдется, и в эти пять дней не будет никакой влаги.

Султан поехал [дальше], и туча разошлась, и в эти пять дней не было никакой влаги и никто не видел ни облачка».

К этому рассказу Низами Самарканди добавляет: «Хотя предсказание по звездам — признанное искусство — уповать на него не следует. А астрологу надлежит далеко в этой вере не идти и каждое предсказание, кое он делает, поручать судьбе». «Хотя я был свидетелем предсказания Доказательства Истины Омара, однако в нем самом я не видел никакой веры в предсказания по звездам. И среди великих людей никого не видел и не слышал, кто бы доверял предсказаниям» [96, стр. 98].

Последние слова Низами Самарканди указывают, что предсказание погоды Хайямом, которое, возможно, по обычаям того времени было облечено в форму астрологического предсказания, на самом деле не основывалось на астрологии. Скорее всего удачный прогноз погоды Хайяма был основан на каких-либо приметах, более или менее проверенных на опыте.

Возможно, что ко времени пребывания Хайяма в Мерве относится его работа над водяными весами — «весами мудростей». Работы Хайяма и его предшественников подробно изложены в «Книге о весах мудрости» жившего в Мерве ученика Хайяма Абд ар-Рахмана, ал-Хазини, впоследствии работавшего при дворе султана Санджара и написавшего «Санджарские астрономические таблицы». В своем предисловии ал-Хазини говорит: «Во времена всепокоряющей державы Сельджуков — да упрочит ее аллах! — водяные весы рассматривал имам Абу Хафс Омар ал-Хайями. Он подтвердил то, что было сказано о них, и доказал правильность наблюдений и действий с ними при помощи воды без градуированных весов»[1]. Собственные результаты Хайяма изложены в его небольшом трактате «Весы мудростей», включенном в книгу ал-Хазини в качестве V главы IV книги. В сочинении Хайяма требуется «узнать количество золота и серебра в состоящем из них теле» [3, стр. 147]. Решение Хайяма основано на определении веса в воздухе и в воде двух произвольных слитков золота и серебра, а также веса рассматриваемого тела. Хайям находит отношения весов этих трех предметов в воздухе к их весам в воде. Для золота это отношение равно 10 11, для серебра — 10 $10^1/_2$. Хайям рассматривает сплав, для которого это отношение равно $10 : 10^3/_4$. Хайям дает два решения этой задачи — с помощью теории отношений и с помощью «алгебры и алмукабалы», которое он называет «более легким для вычисления». В последнем случае решение сводится к следующему. Вес золотой части данного тела в воздухе принимается за вещь, т. е. x, тогда если вес всего тела принять за 10, вес серебряной части данного тела в воздухе равен $10 - x$. Вес золотой части тела в воде равен $\frac{11}{10}\ x = 1\frac{1}{10}$ x, вес серебряной $\frac{10\frac{1}{2}}{10}(10 - x) = 10\frac{1}{2} - 1\frac{1}{20}\,x$, а вес всего тела в воде равен $10\frac{3}{4} = 1\frac{1}{10}x + 10\frac{1}{2} - 1\,\frac{1}{20}\,x$, т. е. после «алгебры и алмукабалы» уравнение, определяющее x, приводилось к виду $\frac{1}{4} = \frac{1}{20}x$, откуда $x = 5$ и, следовательно, в примере данный сплав состоит из равного количества золота и серебра.

К 1117—1123 гг., когда везиром султана Санджара был Шихаб ал-Ислам, относится приведенный выше рассказ о посещении Хайямом этого везира, во время которого Хайям демонстрировал блестящее знание корана. Этот рассказ дает основание считать, что когда везиром был Шихаб ал-Ислам, отношение влиятельных представителей духовенства к Хайяму было неплохим.

Но в самые последние годы жизни Хайяма его отношения с высшим духовенством резко ухудшились.

---

[1] Ал-Хазини. Китаб мизан ал-хикма. Хайдерабад, 1359 [1940], стр. 8.

Ал-Кифти в своей «Истории мудрецов» сообщает, что в это время Хайям был вынужден совершить хадж — паломничество в Мекку: «Когда же его современники очернили веру его и вывели наружу те тайны, которые он скрывал, он убоялся за свою кровь и схватил легонько поводья своего языка и пера и совершил хадж по причине боязни, не по причине богобоязненности, и обнаружил тайны из тайн нечистых. Когда он прибыл в Багдад, поспешили к нему его единомышленники по части древней науки, но он преградил перед ними дверь преграждением раскаявшегося, а не товарища по пиршеству. И вернулся он из хаджа своего в свой город, посещая утром и вечером место поклонения и скрывая тайны свои, которые неизбежно откроются. Не было ему равного в астрономии и философии, в этих областях его приводили в пословицу; о если бы дарована была ему способность избегать неповиновения богу!» [149], [87, стр. 333—334].

Мы приводили четверостишия Хайяма, свидетельствующие о тяжелых жизненных ударах, призывающие к осторожности и замкнутости. Быть может, этими обстоятельствами объясняется то, что в конце жизни Хайям, по словам ал-Байхаки, «имел скверный характер и был скуп», «был скуп в сочинении книг и преподавании» [136, стр. 32—33]. В то же время историк Шахразури сообщает, что ученик Хайяма Абу-л-Хатим Музаффар ал-Исфазари «к ученикам и слушателям был приветлив и ласков в противоположность Хайяму» [87, стр. 330]. Музаффар ал-Исфазари — автор «Сокращения «Начал» Евклида» и других математических сочинений — упоминался ал-Хазини один из ученых, изучавших водяные весы. Упоминавшийся Ибн ал-Асиром Абу-л-Музаффар ал-Исфазари, работавший вместе с Хайямом в исфаханской обсерватории, по-видимому, был отцом этого ученого.

Бессмертие

Год смерти Хайяма определяется на основании рассказа Низами Самарканди о посещении им могилы Хайяма через четыре года после его смерти.

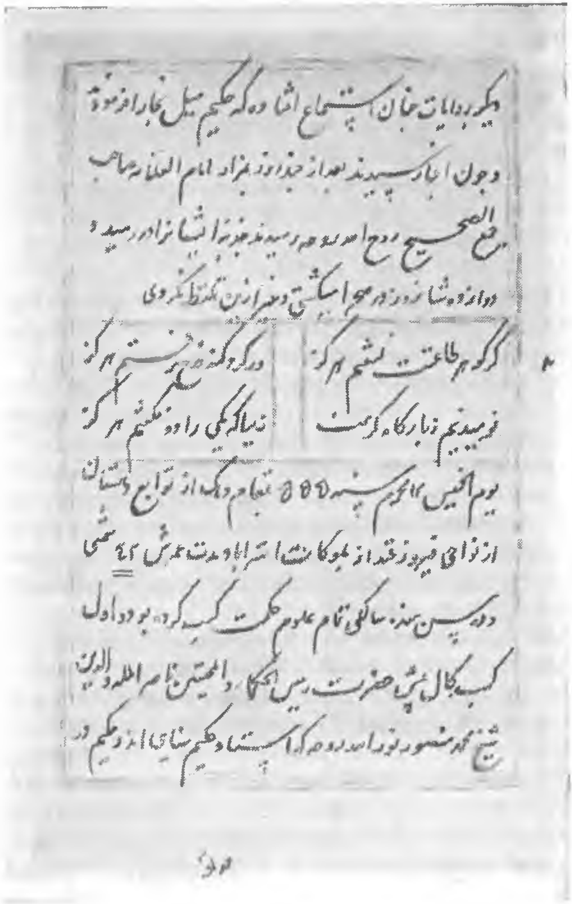
«В году пятьсот шестом [1112/13] в Балхе, на улице Работорговцев, в доме эмира Абу Са'да Джарре остановились ходжа имам Омар Хайям и ходжа имам Музаффар Исфазари, а я присоединился к услужению им. Во время пиршества я услышал, как Доказательство Истины Омар сказал: «Могила моя будет расположена в таком месте, где каждую весну ветерок будет осыпать меня цветами». Меня эти слова удивили, но я знал, что такой человек не будет говорить пустых слов.

Когда в году пятьсот тридцатом [1135/36] я приехал в Нишапур, прошло уже четыре года с тех пор, как этот великий закрыл лицо [свое] покрывалом земли и низкий мир осиротел без него. И для меня был он наставником.

В пятницу я пошел поклониться его [праху] и взял с собой одного человека, чтобы он указал мне его могилу. Он привел меня на кладбище Хире. Я повернулся налево и у подножия стены, огораживающей сад, увидел его могилу. Грушевые и абрикосовые деревья свесились из этого сада и, распростерши над могилой цветущие ветви, всю могилу его скрыли под цветами. И мне пришли на память те слова, что я слышал от него в Балхе, и я разрыдался, ибо на всей поверхности земли и в странах Обитаемой четверти я не увидел бы для него более подходящего места» [96, стр. 97—98].

Ходжа Музаффар Исфазари, о котором здесь говорится — ученик Хайяма; о нем уже шла речь ранее.

Таким образом, согласно Низами Самарканди, Хайям умер в 1131—32 гг. С другой стороны, Свами Говинда



Сообщение Яр-Ахмеда Табризи о Хайяме. Цифры, указывающие продолжительность жизни Хайяма, подчеркнуты

Мечеть памяти имама Махрука

Памятник на могиле Хайяма

Тиртха обнаружил в рукописи писателя XV в. Яр-Ахмеда Табризи «Дом радости» два указания, позволяющие уточнить дату смерти Хайяма. В сообщении Табризи о Хайяме говорится: «Продолжительность его жизни — ?? солнечных года» и «...в четверг 12 мухаррама 555 года в деревушке одной из волостей округа Фирузгонд близ Астрабада». На месте знаков?? в рукописи Табризи, воспроизведенной нами на стр. 170 по книге Говинды [136, стр. 70—71],— две малоразборчивые цифры, первую из них можно прочесть и как ۷ — 7 и как ۸ — 8, а вторую — как ۲ — 2 и как ۳ — 3. В соответствии со сообщением Низами Самарканди указанные слова Табризи следует читать «Продолжительность его жизни — 83 солнечных года». Число 555 в сообщении Табризи является очевидной опиской, так как 12 мухаррама 555 г. хиджры, т. е. 23 января 1160 г. [1], было воскресеньем и, следовательно, с учетом поправки, о которой мы будем говорить ниже, этот день считался субботой, так что ни в том, ни в другом случае он не был четвергом. Говинда высказал предположение, что перед словами «в четверг» недостает слов «он умер» и пытался на основании этого установить точную дату смерти Хайяма. Пользуясь современными синхроническими таблицами, Говинда пришел к выводу, что Хайям умер 12 мухаррама 516 г., т. е. 23 марта 1122 г. Так как этот вывод противоречит сообщению Низами Самарканди, Говинда считает, что у Самарканди ошибочно написано «четыре года» вместо «четырнадцать лет». Так как продол-

[1] См., например: В. В. Цыбульский. Современные календари стран Ближнего и Среднего Востока. Синхронические таблицы и пояснения. М., 1964.

жительность жизни Хайяма в этом случае оказывается равной 74 годам, Говинда считал, что в сообщении Табризи следует первую цифру читать 7, а вторую, которую никак нельзя прочесть 4, он считал ошибочной.

Все эти натяжки исчезнут, если мы обратим внимание на приведенное нами выше сообщение о календарной реформе Хайяма в новых Гураганских астрономических таблицах, где об «эре Малики» говорится: «Она начинается согласно одним в воскресенье 5 шаабана 468 года хиджры, а согласно другим — в пятницу 10 рамадана 471 года хиджры» [1]. Однако по современным синхроническим таблицам первая из этих дат 14 марта 1076 г. является понедельником, а вторая — 16 марта 1079 г. является субботой. Отсюда видно, что применительно к эпохе Хайяма в современных синхронических таблицах следует каждый день недели заменить предыдущим. С учетом этой поправки мы найдем, что в период с 1115—1134 г. 12 мухаррама было четвергом только 25 апреля 1119 г., 28 января 1127 г. и 4 декабря 1131 г. Именно последняя дата — четверг 12 мухаррама 526 года хиджры — соответствует сообщению Самарканди и не противоречит возможному чтению сообщения Табризи о продолжительности жизни Хайяма и является поэтому наиболее вероятной датой смерти Хайяма.

Надпись на памятнике Хайяма

О том, как умер Хайям, рассказывает ал-Байхаки со слов свояка Хайяма, по-видимому, мужа его сестры: «Его свояк имам Мухаммед ал-Багдади рассказывал мне:

---

[1] См. цитату из «Новых Гураганских астрономических таблиц» на стр. 72.

«Однажды он чистил зубы золотой зубочисткой и внимательно читал метафизику из «[Книги] Исцеления». Когда он дошел до главы о едином и множественном, он положил зубочистку между двумя листами и сказал: «Позови чистых, чтобы я составил завещание». Затем он поднялся, помолился и после этого не ел и не пил. Когда он окончил последнюю вечернюю молитву, он поклонился до земли и сказал, склонившись ниц: «О боже мой, ты знаешь, что я познал тебя по мере моей возможности. Прости меня, мое знание тебя — этот мой путь к тебе». И умер» [136, стр. 32—33].

«Книга Исцеления» — энциклопедическое сочинение Ибн Сины. Заметим, что имя Мухаммед ал-Багдади носил математик, работавший в начале XII в. над проблемами, близкими к проблемам комментариев Хайяма к Евклиду, и составивший комментарии к X книге «Начал» Евклида. Возможно, что это и был свояк Хайяма.

В «Доме радости» Табризи сообщается также, что «у него [Хайяма] никогда не было склонности к семейной жизни и он не оставил потомства. Все, что осталось от него,— это четверостишия и хорошо известные сочинения по философии на арабском и персидском языках» [136, стр. 70—71].

Могила Хайяма находится в Нишапуре около мечети памяти имама Махрука. На этой могиле в 1934 г. на средства, собранные почитателями творчества Хайяма в разных странах, был воздвигнут обелиск. Надпись на обелиске гласит:

СМЕРТЬ МУДРЕЦА 516 г. ХИДЖРЫ
ПО ЛУННОМУ КАЛЕНДАРЮ.

У могилы Хайяма присядь и свою цель потребуй,
Одно мгновенье досуга от горя мира потребуй.
Если ты хочешь знать дату построения обелиска,
Тайны души и веры у могилы Хайяма потребуй.

Авторы этой надписи считали, что Хайям умер не в 526 г. хиджры, а в 516 г. (1122—23 г. н. э.). Последняя строка четверостишия на обелиске, в соответствии с восточной традицией, указывает дату построения обелиска. Если заменить каждую букву строки ее числовым значением в арабской буквенной нумерации и сложить эти числа, в сумме мы получим 1313 г. хиджры по солнечному календарю — официальному гражданскому календарю в современном Иране, что соответствует 1934 г. по нашему календарю.

Но лучшим памятником замечательному ученому и поэту являются его творения.

Жизнелюбивые и вольнодумные четверостишия Хайяма и ныне, как почти тысячу лет назад, доставляют высокое духовное и художественное наслаждение читателям. Более того, круг любителей «Рубайята» в настоящее время стал неизмеримо шире, чем в прежние времена, благодаря превосходным переводам на многие европейские языки.

В новом, более глубоком развитии продолжают жить в современной науке, а также философии и многие идеи Хайяма — арифметика, алгебраиста, геометра, мыслителя. От его комментариев к «Началам» Евклида протягиваются духовные нити к современной теории числа и к неевклидовым геометриям, от его алгебраических трактатов — к новой алгебре, аналитической геометрии и, далее, к алгебраической геометрии, наконец, от его концептуалистических высказываний и философских афоризмов в четверостишиях — к передовому материалистическому мировоззрению современности.

Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я[1]

I. ТРАКТАТЫ ХАЙЯМА

1. Математические трактаты, Перевод Б. А. Розенфельда, примечания Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. Историко-математические исследования, под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича. М., 1953, вып. 6, стр. 11—72.

Переводы «Трактата о доказательствах задач алгебры и алмукабалы», «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида» и «Весов мудростей» («Трактата об искусстве определения количества золота и серебра в состоящем из них теле»).

2. Философские трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда. Приложение к книге С. Б. Морочника и Б. А. Розенфельда (см. [95], стр. 163—208.

Переводы «Трактата о бытии и долженствовании», «Ответа на три вопроса», «Света разума о предмете всеобщей науки», «Трактата о существовании» и «Трактата о всеобщности существования» («Книги по требованию»).

3. Трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, вступительная статья и комментарии Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. М., ИВЛ, 1961, стр. 67—337.

Переводы трех математических трактатов, пяти философских трактатов, «Науруз-наме» и каталога неподвижных звезд из «Маликшахских астрономических таблиц» с приложением фотокопий рукописей всех трактатов.

4. Звездный каталог Хайяма. Перевод и комментарии Б. А. Розенфельда. В публикации: Звездный каталог ал-Бируни с приложением каталогов Хайяма и ат-Туси. «Историко-астрономические исследования» под ред. П. Г. Куликовского, М., 1962, вып. 8, стр. 159—173 и 186—190.

---

[1] В каждом из трех разделов библиографии, посвященных изданиям научных сочинений Хайяма, изданиям его четверостиший и исследованиям о его жизни и творчестве, сначала приводятся издания на русском языке, затем на английском, французском и немецком языках, а затем на арабском, персидском (фарси), таджикском, турецком и индийском (урду) языках. В случае, если в одном издании имеется текст на нескольких языках, издание указывается в одном месте. В случае, если издание на восточном языке имеет титульный лист на западноевропейском языке, приводится название по этому титульному листу. Слова, написанные арабскими буквами, приводятся в русской транскрипции.

Перевод каталога неподвижных звезд из «Маликшахских астрономических таблиц».

5. Первый алгебраический трактат. Перевод и примечания С. А. Красновой и Б. А. Розенфельда. «Историко-математические исследования» под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича, М., 1963, вып. 15, стр. 445—472.

6. L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî. Publ. et trad. F. Woepcke. Paris, 1851.

Французский перевод и арабский текст «Трактата о доказательствах задач алгебры и алмукабалы». Переводчик — Франц Вёпке (1826—1864) — немецкий историк математики, автор многих ценных исследований по истории математики в странах ислама.

7. Über Bestimmung der spezifischen Gewichte. Übers. E. Wiedemann. В ст.: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften, VIII, 1906, стр. 170—173 (см. [138]).

Немецкий перевод неполной рукописи «Весов мудростей».

8. Die Waage des Weisheit. Übers. E. Wiedemann. В ст.: Beiträge sur Geschichte der Naturwissenschaften, VC, 1908, стр. 105—132 (см. [138]).

Немецкий перевод полной рукописи «Весов мудростей».

9. Un traité métaphysique de Omar Hayyam. Trad. A. Christensen. Le monde oriental, 1908, т. 1, стр. 1—16.

Французский перевод «Трактата о всеобщности существования».

10. Ein wissenschaftlicher Aufsatz 'Umar-i. Khayyâms. Übers. F. Rosen. Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft, 1925, т. 4 (79), стр. 133—135.

Немецкий перевод неполной рукописи «Весов мудростей».

11. The Algebra of Omar Khayyam. Transl. D. S. Kasir. N. Y. 1931.

Английский перевод «Трактата о доказательствах задач алгебры и алмукабалы».

12. Omar Khayyam's philosophical writings. Transl. Abdul Quddus, M. W. Rahman and Swami Govinda Tirtha. В книге Свами Говидны Тиртхи (см. [136]), стр. XLVII—XLVIII, LXXXIII—CXXIX.

Английские переводы «Трактата о бытии и долженствовании», «Ответа на три вопроса» и «Трактата о всеобщности существования», арабские тексты первых двух трактатов и «Трактата о существовании» и персидский текст третьего трактата.

13. The Algebra of 'Umar Khayyam. Transl. H. J. J. Winter and W. 'Arafat. Journal of Asiatic Society of Bengal, Science, 1950, т. 16, стр. 27—77.

Английский перевод «Трактата о доказательствах задач алгебры и алмукабалы».

14. Discussion of difficulties in Euclid by Omar al-Khayyami. Transl. Ali R. Amir-Moéz. Scripta mathematica, 1959, т. 24, № 4, стр. 275—303.

Английский перевод (неполный) «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида».

15. A paper of Omar Khayyam. Transl. Ali R. Amir-Moéz. Scripta mathematica, 1961, т. 26, № 4, стр. 323—337.

Английский перевод первого алгебраического трактата Хайяма.

16. Джами' ал-бада'и (Собрание уникумов). Каир, 1335 х. [1917], стр. 165—193.

Арабский текст «Трактата о бытии и долженствовании», «Ответа на три вопроса» и «Света разума о предмете всеобщей науки».

17. Фи ихтийал ма'рафа миндарей аз-захаб ва-л-фидда фи джисм мураккаб минхума. Приложение к берлинскому изданию четверостиший Хайяма (см. [69]), стр. 202—204.

Арабский текст неполной рукописи «Весов мудростей».

18. Маджму'а ар-расаил ли-хаким 'Омар ибн Ибрахим ал-Хаййами. В кн. Сеййида Сулеймана Надви (см. [152]), стр. 373—432.

Арабский текст «Трактата о бытии и долженствовании», «Ответа на три вопроса», «Света разума о предмете всеобщей науки», «Трактата о существовании» и «Весов мудростей» и персидский текст «Трактата о всеобщности существования».

19. Omar Khayyam. Nowruz-namah, a treatise on the origin, history and ceremonies of the Persian new-year festival. Ed. with notes M. Minovi, Tehran, 1933. Персидский текст «Науруз-наме».

20. Discussion of difficulties of Euclid by Omar Khayyam. Ed. T. Erani, Tehran, 1936.

Арабский текст «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида» с приложением фотокопии неполной рукописи Весов мудрости. Издатель Таги Эрани (1902—1940) — выдающийся иранский ученый и революционер. До 1930 г. Эрани — преподаватель восточной риторики и логики в Берлинском университете, с 1930 г.— профессор физики, механики и математики в Политехническом институте и других учебных заведениях Тегерана. Эрани — автор ряда руководств и научных статей по физике, химии, психологии и литературе, редактор марксистского общественнофилософского журнала «Дунья» («Мир»). В 1938 г. Эрани — главный обвиняемый на процессе 58 революционеров, умер в тюрьме от тифа.

21. Дархаст-наме-йи хаким 'Омари Хаййам Нишабури. Изд. Мухаммеда Али Тараки.

Персидский текст (неполный) «Трактата о всеобщности существования».

22. Рисала-йи джабр-и Хаййам. В кн. Г. Х. Мусахиба 1938 г. (см. [150]), стр. 5—66.

Арабский текст и персидский перевод «Трактата о доказательствах задач алгебры и алмукабалы».

23. Фи мизан ал-ма ал-мутлак ли-имам 'Омар ал-Хаййами. В кн. Абд ар-Рахман ал-Хазини, Китаб мизан ал-хикма. Хайдарабад, 1359 х. [1940], стр. 87—92.

Арабский текст «Весов мудростей».

24. Каун у таклиф. В кн. Хусейна Шаджары, 1941 г. (см. [140]), стр. 229—337.

Персидский перевод «Трактата о бытии и долженствовании» и «Ответа на три вопроса».

25. Куллийат-и асар-и парси йи хаким 'Омар-и Хаййам (см. [147]), стр. 205—422.

Персидский текст «Науруз-наме», «Трактата о всеобщности существования (Трактата о цепи порядка)» и неполный арабский текст «Весов мудростей».

26. Рисала-йи джабр-и Хаййам. В кн. Г. Х. Мусахиба 1960 г. (см. [151]), стр. 1—74, 159—294.

Арабский текст и персидский перевод «Трактата о доказательствах задач алгебры и алмукабалы» и первого алгебраического трактата Хайяма.

27. Omar Khayyam, Explanation of the difficulties in Euclid's postulates. Ed. A. I. Sabra, Alexandria, 1961.

Арабский текст «Комментариев к трудностям во введениях книги Евклида».

II. ЧЕТВЕРОСТИШИЯ ХАЙЯМА

28. Из Омара Хайяма. Перевод В. Л. Величко. В кн.: В. Л. Величко. Второй сборник стихотворений. СПб., 1894, стр. 143—149.

Вольный перевод 18 четверостиший стихотворениями, содержащими от 4 до 16 строк.

29. С. Уманец. Из Омар-Хаяма. «Кавказский вестник», 1901, № 4, ч. 2, стр. 1—11.

10 стихотворений, каждое из которых является переводом одного или нескольких четверостиший.

30. Омар Хэйям, биографические сведения и переводы А. [И. П.] Умова. Русская мысль, 1911, № 8, стр. 41—48; в кн.: Ф. Е. Корш. Персидские лирики. Под ред. и со вступительной статьей А. Е. Крымского. М., 1916, стр. 11—22.

Стихотворный перевод 11 (1-е изд.) и 19 (2-е изд.) четверостиший восьмистишиями.

31. Э. Фицджеральд. Рубаи Омара Хайяма. Перевод и вступительная статья О. Румера. М., 1922.

Стихотворный перевод с английского (см. [44]).

32. «Робаїйят» Омара Хейяма. Перевод А. Крымского. В кн.: А. Кримський. Пальмове гилля, Екзотичні поезії, ч. III. Київ, 1922, стр. 131—144.

Украинский стихотворный перевод 30 четверостиший восьмистишиями.

33. Из четверостиший Омара Хейяма. Перевод А. Е. Грузинского. В сб. статей «Памяти П. Н. Сакулина». М., 1931, стр. 50—55.

Стихотворный перевод 31 четверостишия.

34. Робайят. Перевод О. Румера, В. Тардова, Л. И. и К. Чайкина, вступительная статья А. Болотникова. М.— Л., 1935.

Стихотворный перевод и персидский текст 50 четверостиший.

35. Робайят. Перевод Л. Н[екоры]. «Восток», сб. II, М.— Л., 1935, стр. 213—242.

Стихотворный перевод 144 четверостиший по рукописи, изданной Герон-Алленом (см. [49]).

36. Четверостишия. Перевод и вступительная статья О. Румера, М., 1938.

Стихотворный перевод 300 четверостиший по изданиям Никола (см. [45], Уинфилда, (см. [48]), Данеша (см. [67]) и Розена (см. [54]).

Переводы четверостиший О. Румера выполнены непосредственно с персидского оригинала, в отличие от его изданных в 1922 г. переводов с английского (см. [31]).

37. Четверостишия. Перевод В. Н. Энгельгардта. «Омский альманах», Омск, 1945, кн. 5, стр. 74—78.

Стихотворный перевод 35 четверостиший с английского перевода Фицджеральда.

38. Четверостишия. Избранное. Перевод Л. Н., О. Румера, И. Сельвинского и И. Тхоржевского, вступительная статья С. Б. Морочника. [Душанбе], 1948, 1949 и 1954.

Стихотворный перевод 120 (1-е и 2-е изд.) и 189 (3-е изд.) четверостиший.

39. Четверостишия. Перевод И. Сельвинского. Таджикская поэзия, [Душанбе], 1949, стр. 79—83.

Стихотворный перевод 22 четверостиший.

40. Четверостишия. Перевод Л. Н., О. Румера и И. Сельвинского. «Антология таджикской поэзии». М., 1951, стр. 277—292.

41. Рубаи. Перевод О. Румера и И. Тхоржевского, вступительная статья Р. Алиева и М.-Н. Османова. М., 1953 и 1955.

Стихотворный перевод 290 четверостиший.

42. Руба'ийат. Перевод и предисловие Р. М. Алиева и М.-Н. Османова под редакцией Е. Э. Бертельса. М., 1959.

Прозаический перевод и персидский текст 293 критически отобранных четверостиший с факсимиле рукописи, переведенной Арберри (см. [58]), содержащей 252 четверостишия.

43. Рубаи. Перевод О. Румера и И. Тхоржевского, послесловие М.-Н. Османова. М., 1961.

Стихотворный перевод 268 четверостиший.

44. Rubaiyat of Omar Khayyam. Transl. E. Fitzgerald. London, 1859, 1868, 1872, 1879.

Английский стихотворный перевод от 75 (1-е изд.) до 101 (4-е изд.) четверостиший. Много переизданий; лучшее — 1900 г. со статьей Э. Д. Росса (см. [124]) и обширными комментариями Х. М. Батсона.

45. Les quatrains de Khèyam. Ed. et trad. J. B. Nicolas. Paris, 1867.

Французский прозаический перевод и персидский текст 464 четверостиший по тегеранскому изданию 1861 г. (см. [62]). В переводе антирелигиозные четверостишия искажены с целью представить Хайяма правоверным мусульманином.

46. Strophen des Omar Chijam. Übers. A. F. von Schack. Stuttgart — Berlin, 1878.

Немецкий стихотворный перевод 336 четверостиший.

47. Die Lieder und Sprüche des Omar Chajjam. Übers. Fr. Bodenstedt. Breslau, 1881.

Немецкий стихотворный перевод 465 четверостиший.

48. The quatrains of Omar Khayyām. Transl. E. H. Whinfield. London, 1882, 1883, 1893.

Английский стихотворный перевод 253 (1-е изд.), 500 (2-е изд.) и 267 (3-е изд.) четверостиший по рукописи, изданной в Лакнау в 1878 г. (см. [63]). Во 2-м издании персидский текст 500 четверостиший.

49. The Rubâ'iyāt of 'Omar Khayyām. Ed. and transl. E. Heron-Allen. London, 1898.

Английский прозаический перевод и факсимиле рукописи, содержащей 158 четверостиший.

50. Ruba'iyat of Omar Khayyam. Multi-variorum edition of N.-H. Dole, 2 t. Boston, 1898.

Английские, французские, немецкие и др. переводы четверостиший.
51. Die Sinnsprüche Omars des Zeltmachers. Übers. F. Rosen, Stuttgart — Berlin, 1909, 1912, 1921.
Немецкий стихотворный перевод 122 (1-е и 2-е изд.) и 152 (3-е изд.) четверостиший.
52. The Rubá'iyàt of 'Umar-i-Khayyám. ed. and tranls. A. Christensen. В кн. Кристенсена 1927 г., (см. [111], стр. 55—132.
Английский прозаический перевод и персидский текст 121 критически отобранного четверостишия.
53. Die Vierzeiler des 'Omar Chajjâm. Übers. W. von der Porten. Hamburg, 1929.
Немецкий стихотворный перевод 183 четверостиший, главным образом по изданию Герон-Аллена (см. [49]).
54. The quatrains of 'Omar-i-Khayyam. Ed. and transl. F. Rosen. London, 1930.
Английский прозаический перевод и персидский текст 330 четверостиший, изданных Розеном в 1925 г. (см. [69]).
55. C. H. Rempis. 'Omar Khajjam und seine Vierzeiler. Tübingen, 1936.
Немецкий прозаический и стихотворный переводы 255 четверостиший.
56. Rubāiyāt of 'Omar Khayyām, ed. and transl. Swami Govinda Tirtha. В кн. Свами Говинды Тиртхи 1941 г. (см. [136], стр. 1—30 и CXXIX—CXXXII.
Английский стихотворный перевод и персидский текст 1069 четверостиший, с приложением перевода и текста 4 арабских и 1 персидского кит'а. В переводе заметна тенденция представить Хайяма мистиком.
57. The Rubā'īyāt of 'Omar Khayyām. Ed. from a newly discovered manuscript dated 658 (1259—60) in the possession of A. Chester Beatty by A. J. Arberry. London, 1949.
Английский прозаический перевод и персидский текст рукописи, содержащей 172 четверостишия со стихотворными переводами Фицджеральда и Уинфилда (см. [43] и [47]).
58. Omar Khayyám. A new version based upon recent discoveries. Transl. A. J. Arberry. London, 1952.
Английский стихотворный перевод 252 четверостиший восьмистишиями, по рукописи, воспроизведенной в издании под ред. Бертельса (см. [42]).
59. The quatrains of Abolfath Ghiath-E-Din Ebrahim Khayam of Nishapur. Teheran, 1955.
Английский, французский, немецкий и арабский стихотворные переводы и персидский текст 80 четверостиший с красочными иллюстрациями Акбара Таджвиди.
60. Zelte der Weisheit. Übers. D. Bellmann. Rudolstadt, 1958.
Немецкий стихотворный перевод 91 четверостишия.
61. Omar Khayam. Rubayat. Trad. A. Robin. Paris, 1958.
Французский стихотворный перевод 88 четверостиший.
62. Руба'ййат-и хаким Хаййам. Изд. Санджара Мирзы. Тегеран, 1278 х. [1861].
Персидский текст 464 четверостиший.
63. Руба'ййат-и 'Омар-и Хаййам. Изд. Мухаммеда Садика Али Лакнави, Лакнау, 1295 х. [1878], 1312 х. [1894], 1327 х. [1909].

Персидский текст 762 (1-е изд.) и 770 (2-е и 3-е изд.) четверостиший.
64. Руба'ийат-и 'Омар-и Хаййам. Изд. Сейида Мохаммеда Али Ширази. Бомбей, 1308 х. [1890].
Персидский текст 755 четверостиший по лакнаускому изданию 1878 г. (см. [63]).
65. Руба'ийат-и 'Омар-и Хаййам. Изд. Имамуддин Гуджарати Амритсар, 1907.
Персидский текст 913 четверостиший.
66. Руба'ийат-и 'Омар-и Хаййам. Изд. Мохаммеда Рахима Ардебили. Бомбей, 1324 х. 1922.
Персидский текст 745 четверостиший.
67. Руба'иййат-и 'Омар-и Хаййам. Изд. и перевод Хусейна Данеша. Стамбул, 1922, 1927.
Персидский текст и турецкий стихотворный перевод 396 четверостиший с приложением двух арабских и персидского кит'а.
68. Robaiat of Amar Khayyàm. Ed. with commentaries and transl. Jalalud Din Ahmad Jafri. Allahabad, 1925.
Персидский текст и прозаический перевод на урду 908 четверостиший.
69. Руба'иййат-и хаким-и 'Омар-и Хаййам ба мукаддама-йи доктор Фридрих Розен. Берлин, 1925.
Персидский текст рукописи, содержащей 330 четверостиший, изданной в 1930 г. с английским переводом (см. [54]).
70. Руба'иййат-и Хаййам. Изд. и перевод Абдуллы Джевдетбея. Стамбул, 1926.
Персидский текст и турецкий перевод 576 четверостиший.
71. 'Омар ал-Хаййам. Руба'иййат. Изд. и перевод Ахмеда ас-Сафи ан-Наджафи. Дамаск, 1931; Бейрут, 1950.
Персидский текст и арабский перевод 352 четверостиший.
72. B. Scillik. Les manuscrits mineurs des Rubaiyat d'Omar-i-Khayyam dans la Bibliothèque Nationale, Paris — Szeged, 1933.
Персидский текст девяти рукописей, содержащих 95, 87, 75, 60, 56, 34, 28, 8 и 6 четверостиший.
73. Руба'иййат-и хакими 'Омар-и Хаййам. Изд. Саида Нафиси. Тегеран, 1312 х. [1933].
Персидский текст 443 четверостиший.
74. Тарана-йи Хаййам. Изд. Садика Хидаята. Тегеран, 1313 х. [1934].
Персидский текст 143 четверостиший («песен»).
75. B. Scillik. The principal manuscripts of the Rubá'iyyát of 'Umar-i-Khayyám in the Bibliothèque Nationale, Paris, t. I. London — Szeged, 1934.
Персидский текст трех рукописей, содержащих 268, 213, и 349 четверостиший.
76. Umar Xajjom. Rubojjot. Под ред. З. Муллоканда. [Душанбе] — Ленинград, 1936.
Таджикский текст 326 четверостиший.
77. The Rubā'iyāt of 'Umar-i-Khayyām. Ed. M. Mahfuz-ul Haq Calcutta, 1939.
Персидский текст 206 четверостиший по рукописи, украшенной красочными миниатюрами, с репродукцией рукописи и миниатюр.

78. Руба'иййат-и хаким Хаййам-и Нишапури. Изд. Мохаммеда Али Форуги. Тегеран, 1321 х. [1942], 1335 х. [1956], 1339 х. [1960].

Персидский текст 178 критически отобранных четверостиший в издании 1960 г. с красочными иллюстрациями Мохаммеда Таджвиди.

79. Умари Хайём. Рубайёт. Под ред. М. Занда и А. Мирзоева, вступительная статья М. Занда. [Душанбе], 1956.

Таджикский текст 200 четверостиший по рукописи, переведенной Арберри (см. [57]) с приложением «Трактата о всеобщности существования».

80. Куллийат-и асар-и парси-йи хаким 'Омар-и Хаййам (см. [147]), стр. 1—181.

Персидский текст 252 четверостиший по рукописи, переведенной Арберри (см. [57]).

81. Умари Хайём. Рубайёт. Под ред. М. Занда и А. Мирзоева. Душанбе, 1963.

Персидский и таджикский текст тех же 200 четверостиший. что и в издании 1956 г. (см. [79]).

III. ИССЛЕДОВАНИЯ О ХАЙЯМЕ

82. Р. М. Алиев, М.-Н. О. Османов. Омар Хайям. М., Изд-во АН СССР, 1959.

83. Е. Э. Бертельс. Очерки истории персидской литературы. Л., 1928, стр. 44—45.

Евгений Эдуардович Бертельс (1890—1958) — крупный русский востоковед, член-корреспондент АН СССР, работал в области персидской литературы. В «Очерках истории персидской литературы» Е. Э. Бертельс придерживался пессимистической точки зрения на возможность выделения четверостиший, принадлежащих Хайяму, из многочисленных «странствующих четверостиший». Впоследствии Е. Э. Бертельс отказался от этой точки зрения и в посмертном издании этой книги («История персидской и таджикской литературы». М., 1960) раздел о Хайяме исключен.

84. Е. Э. Бертельс. Хайям Омар. БСЭ, 1-е изд., т. 59. М., 1935, стр. 388.

85. А. А. Болотников. Омар Хаяйм (философ, поэт, математик). «Восток», сб. II. М.— Л., 1935, стр. 179—211.

86. С. Н. Григорян. Из истории философии Средней Азии и Ирана VII—XII вв. М., 1960, стр. 112—122.

87. В. А. Жуковский. Омар Хайям и «странствующие» четверостишия. В кн.: «ал-Музаффарийя», сб. статей учеников В. Р Розена. СПб., 1897, стр. 325—363.

Валентин Алексеевич Жуковский (1858—1918) — крупный русский востоковед, профессор Петербургского университета, работал главным образом в области персидского языка и персидской литературы. Работа В. А. Жуковского об Омаре Хайяме была первым серьезным исследованием биографии и творчества Хайяма, цитировавшимся всеми позднейшими исследователями Хайяма. В работе приводятся все основные источники сведений о биографии Хайяма и ставится проблема «странствующих» четверостиший, т. е.

четверостиший, приписываемых и Хайяму и другим авторам; показывается, что в издании Никола (см. [45]) 82 «странствующих» четверостишия.

88. М. И. Занд. Шесть веков славы. Очерки персидско-таджикской литературы. М., 1964, стр. 117—130.

89. М. М. Касумов. Материализм Омара Хайяма по его рубаййятам. «Известия Академии наук Азерб.ССР», 1947, № 1 (отделение общественных наук), стр. 44—52.

90. А. Е. Крымский. История Персии, ее литературы и дервишеской философии, т. II. М., 1909, стр. 358—390.

91. П. Н. Лозеев. Четверостишия Омара Хайяма в русских переводах. «Ученые записки [Душанбинского] объединенного педагогического и учительского института» (филологическая серия), 1952, вып. 1, стр. 6—41.

92. П. Н. Лозеев. Омар Хайям в источниках. «Ученые записки [Душанбинского] педагогического института» (филологическая серия), 1953, вып. 3, стр. 57—102.

93. С. Б. Морочник. О жизни и творчестве Омар Хайяма. «Записки Таджикского сельскохозяйственного института», 1948, т. 1, стр. 7—19; Четверостишия Хайяма. В кн.: Омар Хайям. Четверостишия (см. [38]), стр. 5—48.

94. С. Б. Морочник. Философские взгляды Омара Хайяма. [Душанбе], 1952.

95. С. Б. Морочник, Б. А. Розенфельд. Омар Хайям — поэт, мыслитель, ученый. [Душанбе], 1957.

96. Низами Арузи Самарканди. Собрание редкостей или Четыре беседы. Перевод С. И. Баевского и З. Н. Ворожейкиной под ред. А. Н. Болдырева. М., 1963, стр. 97—98.

Воспоминания современника Хайяма о двух эпизодах из его жизни.

97. Б. А. Розенфельд. О математических работах Омара Хайяма. Ученые записки Азербайджанского гос. университета, физ.-мат. серия, 1957, № 9, стр. 3—22.

98. Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в средние века, ч. II. Советское востоковедение, 1958, № 6, стр. 66—70.

99. Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич. Жизнь и творчество Омара Хайяма. В кн.: Омар Хаййам. Трактаты (см. [3]), стр. 11—66.

100. А. А. Семенов. Омар Хейям (к 900-летию со дня рождения). «Литература и искусство Узбекистана», 1940, кн. 4, стр. 81—90.

101. Хайям Омар. БСЭ, 2-е изд., т. 46. М., 1957, стр. 30.

102. А. П. Юшкевич. Омар Хайям и его «Алгебра». «Труды Института истории естествознания». М.— Л., 1948, вып. 2, стр. 499—534.

103. А. П. Юшкевич. История математики в средние века. М., 1962, стр. 240—244, 250—259, 272—277.

104. А. П. Юшкевич, Б. А. Розенфельд. Математика в странах Востока в средние века. Сб. «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. 2. М., 1960, стр. 389—390, 399—400, 410—412.

105. R. S. Archibald. Notes on Omar Khayyam (1050—1122), Pi Mu Epsilon Journal, 1953, № 1, стр. 351—358.

106. C. Brockelmann. Geschichte der arabischen Literatur, t. I. Weimar, 1898, стр. 471; т. I дополн. Leiden, 1936, стр. 855—856, т. III. Leiden, 1943, стр. 620—621.

«История арабской литературы» Карла Броккельмана — исчерпывающий перечень всех известных западноевропейским ученым арабских рукописей и их изданий. Дополнительные тома учитывают рукописи и издания, появившиеся после выхода в свет основного издания.

107. E. G. Browne. Yet more light on Umar-i-Khayyam. Journal of the Royal Asiatic Society, 1897, стр. 409—410.

Перевод сообщения о Хайяме средневекового историка Фазлаллаха Рашид ад-Дина (1247—1318).

108. E. G. Browne. A literary history of Persia, t. II. From Firdawsí to Sa'dí. Cambridge, 1928, стр. 246—259.

109. Carra de Vaux. Les penseurs de l'Islam, t. IV. Paris, 1923, стр. 263—277.

110. A. Christensen. Recherches sur les Rubâ'iyât de Omar Hayyâm. Heidelberg, 1904.

Ранняя работа, в которой автор пришел к выводу, что критерия подлинности четверостиший Хайяма не существует и только 12 четверостиший с известным основанием можно считать подлинными.

111. A. Christensen. Critical studies in the Rubá'iyát of Umar-i-Khayyám. Kobenhavn, 1927.

Результат многолетних исследований, в которых предложен метод определения подлинности четверостиший Хайяма и приводятся 121 критически отобранные четверостишия (см. [52]).

111а. J. L. Coolidge. The Mathematics of Great Amateurs. Oxford, 1949; N. Y., 1963, стр. 19—29.

112. F. K. Ginzel. Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, т. I. Leipzig, 1906, стр. 300—305.

Сообщение о календарной реформе Хайяма.

113. P. Horn. Geschichte der persischen Literatur. Leipzig, 1901, стр. 150—155.

114. U. Jacob und E. Wiedemann. Zu Omer-i-Chajjam. Der Islam, т. 3. 1912, стр. 42—62.

Критический обзор биографических сведений о Хайяме и немецкий перевод предисловия Хайяма к его «Комментариям к трудностям во введениях книги Евклида».

115. A. P. Juschkewitsch. Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig, 1964, стр. 251—254, 259—269, 283—287.

Перевод с русского (см. [103]). В переводе раздел о Хайяме значительно расширен.

116. A. P. Juschkewitsch und B. A. Rosenfeld. Die Mathematik der Länder des Osten im Mittelalter. Sowjetische Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaft, herausg. G. Harig. Berlin, 1960, стр. 119—121, 134—135, 150—151.

Перевод с русского (см. [104]).

117. H. Lamb. Omar Khayyam, a life. N. Y., 1934.

Беллетризованная биография Хайяма.

118. V. Minorsky. 'Omar Khayyām, Enzyklopädie des Islams, t. III. Leiden — Leipzig, 1935, стр. 985—989.

119. N i d h á m í - i - 'A r ú d í - i - S a m a r q a n d í. The Chahár Maqála (Four discourses). transl. E. G. Browne. Journal of the Royal Asiatic Society. London, 1899, стр. 806—808.

Английский перевод «Четырех бесед» (см. [96])

120. A. G. P o t t e r. A bibliography of the Rubáiát of Omar Khayyam. London, 1929.

121. Ch. R e m p i s. Die Überlieferung der 'Umar-i-Hayyam zugeschriebenen Vierzeiler im 13. bis 16. Jahrhundert, Tübingen, 1937.

122. F. R o s e n. Zur Textfrage der Vierzeiler 'Omars des Zeltmachers. Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft, 1926, т. 5 (80), стр. 285—313.

123. B. A. R o s e n f e l d and A. P. Y u s h k e v i c h, The prehistory of non-Euclidean Geometry in the medieval East. «Труды XV Международного конгресса востоковедов», т. 2. М., 1963, стр. 90—96.

Освещается роль Хайяма в подготовке открытия неевклидовой геометрии.

124. E. D. R o s s. The life and times of Omar Khayyam. В кн.: The Ruba'iyat of Omar Khayyam. transl. E. Fitzgerald. London, 1900, стр. 3—76.

125. E. D. R o s s. The earliest account of 'Umar Khayyām. Bulletin of the Scholl of Oriental Studies, 1929, т. 5, № 3, стр. 468—470.

Перевод сообщения о Хайяме средневекового историка Абу-л-Хасана ал-Байхаки (1106—1174).

126. O. R o t h f e l d. 'Umar Khayyam and his age. Bombay, 1922.

127. J. R y p k a. Iranische Literaturgeschichte. Red. d. Übers. H. F. Junker. Leipzig, 1959, стр. 219—234.

Расширенный перевод с чешского «Истории персидской и таджикской литературы» Яна Рыпки (Прага, 1956). Автор рассматривает Хайяма как суфийского поэта.

128. P. S a l e t. Omar Khayyam, savant et philosophe. Paris, 1927.

129. G. S a r t o n. Introduction to the history of science, t. I. From Homer to Omar Khayyam. Baltimore, 1927, стр. 759—761.

«Введение в историю науки» Джорджа Сартона — подробнейший справочник об ученых и их творчестве с древнейших времен до середины XIV в., с указанием изданий трудов и критических исследований о них.

130. J. K. M. S h i r a z i. Life of Omar al-Khayyami. Edinburgh—London, 1905.

131. D. E. S m i t h. Euclid, Omar Khayyam and Saccheri. Scripta mathematica, 1935, т. 3, № 1, стр. 5—10.

Первое критическое исследование о теории параллельных линий Хайяма и его сравнение с теорией Саккери.

132. W. E. S t o r y. Omar Khayyam as a mathematician. Boston, 1918.

133. D. J. S t r u i k. Omar Khayyam, mathematician. The Mathematical Teacher, 1958, № 4, стр. 280—285.

134. H. S u t e r. Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Leipzig, 1900, стр. 112.

Генрих Зутер (1848—1922) — крупный немецкий историк математики, автор многих исследований по математике стран ислама. Книга «Арабские математики и астрономы и их труды» содержит сведения обо всех известных к 1900 г. математиках и астрономах стран ислама, их рукописях и изданиях трудов.

135. H. Suter. Djalālī, Enzyklopädie des Islams, I, Leiden — Leipzig, 1912, стр. 1006—1007.

Сообщение о календарной реформе Хайяма.

136. Swami Govinda Tirtha. The Nectar of grace. 'Omar Khayyām's life and works. Allahabad, 1941.

Монография о жизни и творчестве Хайяма. Содержит тексты и переводы философских трактатов (см. [12]) и четверостиший (см. [56]), а также репродукции рукописей ал-Байхаки и Табризи, содержащих биографические сведения о Хайяме (вклейки между стр. 32 и 33, 74 и 75).

137. L. Tailhade. Omar Khayyam et les poisons de l'intelligence. Paris, 1905.

138. E. Wiedemann. Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften, VIII u. XV, Sitzungsberichte der Physikalisch — medizinischen Sozietät, Erlangen, 1906, т. 38, стр. 163—180, т. 49, 1908, стр. 105—139.

Исследования о «Весах мудростей», содержащие переводы рукописей (см. [7] и [8]).

139. A. V. Williams-Jackson. From Constantinople to the home of Omar Khayyam. N. Y., 1911, стр. 229—260.

140. V. Zhukovski. Umar-i-Khayyam and the «wandering» quatrains. Transl. E. D. Ross. Journal of the Royal Asiatic Society, 1898, стр. 349—366.

Перевод с русского (см. [87]).

141. 'Аббас Икбал. 'Омар-и Хаййам, журнал «Шарк», мордад 1310 х., [июль — август 1931], стр. 466—485.

Сообщение о первом алгебраическом трактате Хайяма.

142. Hâmit Dilgan. Büjük matematikci Omer Hayyâm, Istanbul, 1959.

Исследование о математическом творчестве Хайяма.

143. М. Занд. Тарҷимаи ҳоли мухтасари Умари Хайём. Мероси шеърии Хайём. В кн.: Умари Хайём. Рубоиёт (см. [79]), стр. 5—31.

Биографические сведения и обзор поэтического наследия Хайяма.

144. Хусейн Шаджара. Тахкик-и дар руба'иййат у зиндагани-йи Хаййам. Тегеран, 1323 х. [1941].

Исследование о жизни и творчестве Хайяма с приложением персидских переводов двух философских трактатов (см. [24]).

145. Садики Нахичевани. Хаййам-и пендари. Тавриз 1320 х. [1941].

Попытка обосновать мнение, что Хайям-ученый не был автором четверостиший.

146. Абу Хамид ас-Сарраф. 'Омар ал-Хаййами, асрухи, васиратухи, адабухи, фалсафатухи. Багдад, 1350 х. [1931].

147. Мухаммед 'Аббаси. Куллийат-и асар-и парси-йи хаким Омар-и Хаййам. Тегеран, 1338 х. [1939].

Исследование о жизни и творчестве Хайяма. Содержит тексты и переводы трех трактатов (см. [25]) и четверостиший (см. [80]).

148. Zakarija el-Cazwini. Kosmographie, II. Die Denkmäler der Länder. Herausg. F. Wüstenfeld. Göttingen, 1848, стр. 318—320.

Сообщение о Хайяме средневекового географа Закарии Казвини (1203—1283).

149. Qifti. Tarikh al-hukama. Herausg. J. Lippert. Leipzig, 1903, стр. 243—244.

Сообщение о Хайяме средневекового историка Джамал ад-Дина ал-Кифти (1172—1239).

150. Гулам Хусейн Мусахиб. Джабр у мукабала-йи Хаййам. Тегеран, 1317 х. [1938].

Исследования об алгебре Хайяма с приложением текста и перевода «Трактата о доказательствах задач алгебры и алмукабалы» (см. [22]).

151. G. H. Mossaheb. Hakim Omare Khayyam as an algebraist. Teheran, 1339 (1960).

Исследование об алгебре Хайяма с приложением текста и перевода обоих алгебраических трактатов Хайяма.

152. Сейййд Сулейман Надви. 'Омар Хаййам, ор уске саваних ва тасаниф пур накидана назар. Азамгарх, 1351 х. [1932].

Исследование о жизни и творчестве Хайяма с приложением текста 6 трактатов (см. [18]).

153. An-Nizámí al-Arúdí as-Samarqandi. Chahar maqála. London, 1927, стр. 71—73.

Персидский текст «Четырех бесед» (см. [96]).

154. Са'ид Нафиси. Ду тахрир имам 'Омар-и Хаййам. Журнал «Шарк», ша'бан 1350 х. [декабрь 1931 г.], стр. 643—649.

Исследование о «Трактате о всеобщности существования».

155. Са'ид Нафиси. Кадимтарин суханха-йи Руба'ийат 'Омар-и Хаййам. «Труды XV Международного конгресса востоковедов», М., 1963, т. 2, стр. 367—373.

Исследование о древнейших рукописях четверостиший Хайяма.

СОДЕРЖАНИЕ

Борис Абрамович Розенфельд,
Адольф Павлович Юшкевич

ОМАР ХАЙЯМ

Утверждено к печати
редколлегией научно-биографической серии
Академии наук СССР

Редактор издательства *Е. М. Кляус*
Художник *Л. Г. Ларский*
Технический редактор *А. П. Ефимова*

БЗ № 43—1965 г. № 13
Сдано в набор 14/V 1965 г.
Т-11085. Подписано к печати 19/VIII 1965 г.
Формат 84×108$^1/_{32}$ Печ. л. 6 (12). Усл. л. 9,84.
Уч.-изд. л. 9,6. Тираж 12000 экз.
Изд № 148/65. Тип. зак. № 2535
Цена 48 коп.

Издательство «Наука»
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

48 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
„НАУКА"