Из наследия
А. А. Зиновьева

А. А. Зиновьев

ФИЛОСОФСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

URSS

Из наследия А. А. Зиновьева

А. А. Зиновьев

ФИЛОСОФСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Вступительная статья
академика В. А. Лекторского

Издание второе,
исправленное и дополненное

URSS
МОСКВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с возникновением и развитием многозначной логики был поставлен ряд интересных философских проблем, обсуждение которых пока еще находится в начальной стадии. Ниже мы рассмотрим группу проблем такого рода, не претендуя на исчерпывающую полноту их охвата и безусловную категоричность предлагаемого их решения. Философские проблемы многозначной логики принадлежат к числу трудных философских проблем, достаточно полное и убедительное решение их может быть достигнуто лишь в результате широкой дискуссии в кругах логиков и философов, занимающихся философскими вопросами современной науки.

Изложение будет построено следующим образом. В первой главе даны краткие замечания о двухзначной логике и о системе записи. Во второй главе будут рассмотрены условия возникновения первых многозначных логических систем и особенности этих систем. Это полезно сделать хотя бы уже потому, что в нашей философской и логической литературе характеристика их почти полностью отсутствует. Однако предварительная характеристика многозначных систем будет иметь не только и даже не столько информационную цель. По мере изложения ее мы будем стремиться к тому, чтобы подвести читателя к некоторым философским обобщениям.

Вплоть до шестой главы речь будет идти исключительно об исчислении высказываний. Если в пятой главе (и частично в четвертой) будет говориться о структуре высказываний, то это само по себе еще ни в какой мере не затрагивает исчисления предикатов, для которого характерно расчленение простых высказываний на предикаты и (если воспользоваться термином традиционной логики) субъекты, а также использование кванторов общности и существования. На исчислении предикатов мы кратко остановимся в шестой главе. Это объясняется тем, что необходимо разобраться в философских вопросах многозначных исчислений высказываний, прежде чем браться за исчисления предикатов (не говоря уже о том, что рассматриваемые в данной работе философские вопросы являются для них общими).

В ходе разбора различных логических систем мы, разумеется, будем брать лишь их основы, отдельные фрагменты, отдельные выводы или свойства.

В целом ряде случаев нам придется касаться общих философских вопросов логики. Однако рассуждения подобного рода мы постараемся свести до необходимого минимума и сосредоточим основное внимание на том, что специфически относится к многозначной логике.

Данная работа рассчитана на широкий круг философов и логиков, интересующихся философской и логической проблематикой современной науки. Поэтому чисто специальные вопросы многозначной логики (например, доказательства непротиворечивости, полноты и т. д. систем аксиом) будут либо опущены совсем, либо изложены упрощенно, в качестве иллюстрации общих идей и методов логики.

Глава первая

Предварительные замечания

§ 1. Двухзначная логика

Читателя, не знакомого с двухзначной логикой, отсылаем к многочисленным работам, имеющимся на русском языке, в частности — к [7], [14], [21]. Правда, само понятие «двухзначная (классическая, аристотелевская, хризиппова) логика» не является однозначным. В пятой главе мы это разъясним. Пока же под двухзначной логикой будем иметь в виду логические системы, в которых высказываниям приписывается одно и только одно из двух возможных значений истинности (истинностных значений, логических значений), обозначаемых обычно терминами «истинно» и «ложно» или соответствующими им знаками 1 и 0, 1 и 2, v и f и т. п.

Другими словами, под двухзначной логикой будем иметь в виду логические теории, исходящие из следующего предположения: множество высказываний разбивается на два непересекающихся подмножества, исчерпывающие множество высказываний; одно из этих подмножеств соответствует множеству истинных высказываний, второе — ложных; ни одно истинное высказывание при этом не является ложным, ни одно ложное — истинным [41].

В качестве формального выражения двухзначной логики будем брать классическое исчисление высказываний, понимаемое не только как фрагмент классической логики в целом, но и как экспликация общих законов логики, в особенности — законов исключенного третьего и противоречия. Причина выделения этих законов, надо думать, понятна: дискуссия вокруг них составляет ядро дискуссии как по вопросу об отношении формальной логики вообще и неформальной логики (диалектической в нашей литературе), так и по вопросу об отношении классической и неклассической логики в рамках логики формальной.

Будем пользоваться так называемой польской системой записи, которая нам представляется наиболее удобной с самых различных точек зрения. Простые (рассматриваемые в целом, без расчленения на составные части) переменные высказывания будем обозначать малыми буквами латинского алфавита, а операторы, превращающие их в новые высказывания (например, знак отрицания) и связывающие их в сложные высказывания (вообще говоря, функции высказываний), будем обозначать большими буквами латинского алфавита. Чтобы не усложнять изложение, различие между функциями истинности и функциями высказываний (как это сделано, например, в работе [60]) проводить не будем: поскольку смысл высказываний безразличен для определения типов функций высказываний, последние можно рассматривать и как функции истинности. Основные функции исчисления высказываний, с которыми нам в дальнейшем постоянно придется иметь дело, в польской записи имеют следующий вид:

Nx — отрицание (не-x)
Kxy — конъюнкция (x и y)
Axy — нестрогая дизъюнкция (x или y)
Cxy — материальная импликация (если x, то y)
Rxy — равнозначность.

При чтении сложных символов следует придерживаться следующих правил:

1) знак N относится только к одному ближайшему справа от него высказыванию;

2) прочие операторы K, A, C и т. д. относятся к двум и только двум ближайшим высказываниям справа от них. Например, в выражении $KNRxAxNyz$ второй по порядку написания оператор N относится только к y, A соединяет x и Ny, R соединяет x и $AxNy$, первое отрицание относится к $RxAxNy$, оператор K соединяет $NRxAxNy$ и z. Расставив для наглядности скобки, получим $K\{N[Rx(Ax\{Ny\})]\}z$.

Основные законы (тавтологии, всегда истинные высказывания) имеют следующий вид:

Rxx — закон тождества

$RNNxx$ — закон двойного отрицания
$AxNx$ — закон исключенного третьего
$NKxNx$ — закон противоречия
$RNKxyANxNy$ — правило де Моргана
$RNAxyKNxNy$ — правило де Моргана
$RKxAyzAKxyKxz$ — первый дистрибутивный закон
$RAxKyzKAxyAxz$ — второй дистрибутивный закон
$RCNxyCNyx$ — правило контрапозиции
$RRxyKCxyCyx$ — разложение равнозначности
$RCxyANxy$ — разложение импликации
$CCxNxNx$ — приведение к абсурду.

Нет необходимости излагать подробнее, поскольку это достаточно хорошо изложено, например, в [7]. Там же характеризованы и различия в способах построения исчисления.

Определим еще строгую дизъюнкцию, с которой нам точно так же придется сталкиваться. Ее можно определить через нестрогую таким образом: $Bxy = KAxyANxNy$, поскольку тавтологией является $RBxyKAxyANxNy$. Строгая дизъюнкция двух или более высказываний истинна тогда и только тогда, когда истинно только одно из этих высказываний, а остальные все ложны. Поскольку в польской записи строгая дизъюнкция трех и более высказываний принимает громоздкий вид (в силу того, что для нее не имеет силы ассоциативный закон, то есть неравнозначными будут высказывания $BBxyz$, $BBxzy$ и т. д.), будем писать ее в форме $xByB...Bz$. Например, для трех высказываний вместо $AAKKxNyNzKKNxyNz$ $KKNxNyz$ будем иметь запись $xByBz$, которая читается так: «либо x, либо y, либо z». В некоторых случаях для наглядности таким же образом будем записывать конъюнкцию и нестрогую дизъюнкцию.

Закон исключенного третьего, если быть верным традиционной логике (и если отвлечься от структуры высказывания), должен иметь вид $BxNx$. Но поскольку имеет место $RBxNxAxNx$, то есть строгая дизъюнкция высказывания и его отрицания равнозначна их нестрогой дизъюнкции, в качестве закона исключенного третьего принимается $AxNx$. Этот закон, как и закон противоречия, можно рассматривать как своего рода уточнение законов традиционной логики: «либо x, либо не-x» и «не может быть, чтобы было x и не-x».

Способ определения основных функций двухзначной логики и доказательства ее законов охарактеризуем в следующем параграфе.

§ 2. Способ определения функций

Для определения функций высказываний (функций истинности) помимо табличной записи, к которой будем прибегать в исключительных случаях, будем пользоваться равенствами типа $a = b$ и $a = \alpha$, где знак равенства означает соответственно следующее:

1) значение истинности высказывания a равно (является таким же, тождественно) значению истинности высказывания b; это равенство может иметь место в силу определения или в силу доказанного, что в каждом случае будем оговаривать (во всяком случае, из контекста будет ясно, что имеется в виду);

2) значение истинности высказывания a равно α, где α есть какое-либо число или вообще знак значения истинности, а также алгебраическая сумма значений истинности; в частности, α может быть числом 1, 2,..., суммой значений истинности высказываний b и c, разностью значений истинности высказываний b и c и т. д.; например, $a = n - b + c$ будет означать: значение истинности высказывания a равно n минус значение истинности высказывания b и плюс значение истинности высказывания c.

Вообще-то говоря, здесь следовало бы употреблять дополнительные знаки, чтобы показать, что речь идет не о приравнивании, сложении и вычитании высказываний, а об этих операциях с их значениями. Но это очень усложнило бы запись. И раз мы условились относительно употребления знаков равенства, сложения и вычитания, прибегать к этой усложненной форме нет необходимости. Будем пользоваться также знаками неравенства (больше и меньше) и на тех же основаниях, что и знаком равенства.

Знак равенства (как и неравенства, сложения и вычитания) не есть знак функции истинности. Это — знак языка, посредством которого мы описываем функции истинности и их взаимоотношения. Поскольку мы, естественно, пользуемся языком двухзначной логики, то в классическом исчислении высказываний этому знаку соответствует знак R. Так что иногда для наглядности знак равнозначности будем заменять знаком равенства, что к путанице не приведет. Например, приведенные в первом параграфе законы, содержащие знак R, можно записать в форме $NNx = x$, $Cxy = ANxy$, $NKxy = ANxNy$. Аналогично для прочих законов. В трех и более значной логике, однако, такого рода замена не всегда допустима, и строгое различение знаков строящегося исчисления и знаков используемого при этом языка является совершенно необходимым.

Приведенные в первом параграфе функции двухзначной логики в принятой форме записи определятся так, если истинности будет соответствовать число 1, а ложности — число 0:

$Kxy = min(x, y)$, то есть значение истинности Kxy равно меньшему из значений истинности x и y;

$Axy = max\ (x, y)$, то есть значение истинности Axy равно большему из значений истинности x и y;

$Cxy = max\ (Nx,\ y)$; в другой форме $Cxy = 1$, если $x \leqslant y$, $Cxy = 0$, если $x > y$;

$Nx = 1 - x$; в другой форме $Nx = 1$, если $x = 0$, $Nx = 0$, если $x = 1$.

$Bxy = 1$, если $x > y$ или $y > x$, $Bxy = 0$, если $x = y$; $Bxy = min\ [max\ (x, y),\ max\ (1 - x,\ 1 - y)]$;

$Rxy = 1$, если $x = y$; $Rxy = 0$, если $x > y$ или $y > x$.

Помимо экономичности сравнительно с табличной формой записи, эта форма записи удобна и как средство доказательства утверждений. Приведем несколько примеров. Для доказательства равнозначности высказываний $NKxy$ и $ANxNy$ потребовалось бы строить целый ряд таблиц, тогда как в данной форме достаточно следующего рассуждения: $NKxy = ANxNy$, $1 - min(x, y) = max(1 - x,\ 1 - y)$, $max(1 - x,\ 1 - y) + min(x, y) = 1$, что верно для всех комбинаций значений x и y. Аналогично имеем: $NNx = 1 - Nx = 1 - 1 + x = x$, $NKxNx = 1 - KxNx = 1 - min(x,\ 1 - x) = 1$, поскольку одно из x и $1 - x$ равно нулю; $CCxNxNx = max(NCxNx,\ Nx) = max(1 - CxNx,\ 1 - x) = max\ [1 - max(Nx, Nx),\ 1 - x] = max(1 - Nx,\ 1 - x) = max(1 - 1 + x,\ 1 - x) = max(x,\ 1 - x) = 1$, поскольку одно из x и $1 - x$ равно единице.

Надо сказать, что форма определений функций будет меняться в зависимости от выбора способа обозначения значений истинности. Так, если истинность обозначим через 1, а ложность — через 2, то получим такие определения: $Nx = 3 - x$, $Kxy = max(x, y)$, $Axy = min(x, y)$, $Cxy = min(3 - x, y)$. Однако это не влияет на законы логики (например, и в этой записи $NNx = 3 - Nx = 3 - 3 + x = x$ и т. п.). Кроме того, всегда можно установить соответствие различных способов обозначения, так что их различие принципиального значения не имеет: законы логики есть нечто инвариантное для них.

Глава вторая

Первоначальные многозначные системы

§ 1. Понятие многозначной логики

С того момента, когда в логике был провозглашен принцип: «каждое высказывание либо истинно, либо ложно», всегда находились люди, подвергавшие этот принцип сомнению [60]. Эти сомнения имели вполне здравый и реальный смысл. В частности, в рамках приведенного только что принципа возникали затруднения при оценке значения истинности высказываний о будущих событиях, высказываний, в которых не указано время или место событий, высказываний, получаемых при условии взаимоисключающих опытов, и т. п. Аналогичные трудности возникали при попытках строить модальную логику. На эти факты указывается в работах [48], [40], [54], [60] и многих других. Но поскольку сомнения такого рода не реализовались в форме целостных логических систем, они имели ценность исторических фактов, но не более. Требовалось создание определенных условий внутри самой логики, чтобы они смогли сыграть роль стимулов к построению многозначных логических систем.

Условимся прежде всего, что мы будем понимать под многозначной логикой. Многозначная логика есть прежде всего совокупность логических исчислений (исчислений высказываний и предикатов), в которых высказываниям может приписываться более двух истинностных значений, а в общем случае — любое конечное или счетное бесконечное множество значений, так что традиционные «истинно» и «ложно» оказываются лишь частными случаями таких значений. Естественно, потребовалось накопление опыта построения логических исчислений в рамках классической логики, прежде чем обобщить его на случай трех и более истинностных значений. Другими словами, потребовалась разработка современной методики логического исследования (матричный метод, аксиоматический метод, способность полностью отвлекаться от содержательного смысла употребляемых знаков, то есть способность чисто формального подхода к логической задаче, и т. п.), чтобы отважиться посягнуть на освященное веками всевластие классической логики. Не случайным поэтому является то обстоятельство, что многозначная логика начала свое существование и развитие сравнительно недавно, а именно — начиная с двадцатых годов нашего столетия. Основателями ее являются Лукасевич (1920 г.) и Пост (1921 г.), а также отчасти Броуэр (1924 г.), заложивший идейную базу для логики интуиционизма (работы Гейтинга).

Многозначная логика как отрасль научного исследования не сводится, естественно, к совокупности исчислений. Она охватывает и общие проблемы построения и обоснования исчислений, их взаимоотношений, их отношений к двухзначной логике и т. д., — короче говоря, охватывает теоретические исследования, предметом которых являются сами многозначные исчисления.

Договоренность относительно смысла самого термина «многозначная логика» очень важна. В дальнейшем мы увидим, что аксиоматики классического исчисления высказываний могут интерпретироваться в многозначных матрицах, многие функции многозначных логик будут определяться аналогично двухзначным, многозначные аксиоматики будут удовлетворять двухзначным матрицам и т. д. Все это делает грань между классической и неклассической логикой совершенно неопределенной, если упустить из виду главное, а именно — число возможных значений истинности высказываний или число различных множеств, на которые разбивается множество всех высказываний.

§ 2. Система Лукасевича

Исторически первой многозначной логической системой (исчисление высказываний) является система, построенная Лукасевичем [50, 51, 52, 53]. Исходя из анализа модальных высказываний, Лукасевич пришел к выводу, что двухзначная логика недостаточна для описания взаимоотношения и свойств этих высказываний, что здесь нужна логика, в которой помимо классических истинностных значений «истинно» и «ложно» фигурирует третье значение «возможно», «нейтрально» (среднее, нейтральное значение). При этом следует иметь в виду, что «возможно» не есть модальный функтор, входящий в структуру высказывания. Это — оценка высказывания по отношению его к действительности, лежащая вне самого высказывания, не входящая в структуру его, подобно тому, как оценка высказываний терминами «истинно» и «ложно» не входит в структуру оцениваемых высказываний. Конечно, сами термины «истинно», «ложно» и «возможно» могут быть предикатами высказываний типа «высказывание x истинно (ложно, возможно)», но это не меняет сути дела: если x есть какое-то высказывание, то оценка его этими терминами есть образование нового высказывания, в котором название высказывания x является лишь субъектом.

Трактуя многозначность как деление множества высказываний не на два, а на три и более непересекающихся подмножества (деление предполагается исчерпывающим), в системе Лукасевича мы имеем три класса высказываний [41], [65]: 1) истинные, 2) ложные и 3) нейтральные, так что относительно каждого высказывания будет иметь силу принцип: «высказывание либо истинно, либо ложно, либо нейтрально».

О том, что двухзначная логика недостаточна для описания модальных высказываний, говорит хотя бы такой факт. Конъюнкция высказываний «возможно, что x» и «возможно, что не-x» (здесь «возможно» есть модальный функтор, знак модальности) в двухзначной логике должна считаться ложной, если их рассматривать по аналогии с утверждением и отрицанием, тогда как даже с чисто содержательной точки зрения ее правомерность не вызывает сомнений: некоторое событие, фиксируемое высказыванием x, может быть (случиться) и может не быть.

В работах Лукасевича недостаточность двухзначной логики для описания модальных высказываний показана следующим образом. Примем обозначения:

1) Mx — возможно, что x,

2) NMx — невозможно, что x,

3) MNx — возможно, что не-x,

4) $NMNx$ — невозможно, что не-x (необходимо, что x), где после слова «что» излагается содержание x.

К модальным высказываниям относятся высказывания, характеризующиеся следующими утверждениями:

1) $CNMxNx$ — если невозможно, что x, то не-x,

2) $CNxNMx$ — если не-x, то невозможно, что x,

3) $\Sigma xKMxMNx$ — существует x, для которого возможно, что x, и возможно, что не-x.

Лукасевич доказал, что в рамках двухзначной логики мы, учитывая эти утверждения, придем к противоречию. В частности, выводятся утверждения $CMxx$ и $CMNxNx$ (если возможно, что x, то x; если возможно, что не-x, то не-x); если же одновременно истинными будут Mx и MNx, то значит будут истинными одновременно x и Nx. что противоречиво; последний вывод делается на основе *modus ponens*

$$\frac{\begin{matrix} CMxx \\ Mx \end{matrix}}{x} \qquad \frac{\begin{matrix} CMNxNx \\ MNx \end{matrix}}{Nx},$$

а согласно третьему утверждению конъюнкция этих заключений для некоторых x правомерна.

Аналогично — в табличном построении. В двухзначной логике возможны четыре одноаргументные функции x:

x	U_x^1	U_x^2	U_x^3	U_x^4
1	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Mx должна быть тождественна одной из них. Но утверждения 1—3 исключают это. Первое имеет место (истинно) только в случае, если $Mx = x$ или $Mx = U^4x$, второе — в случае, если $Mx = x$ или $Mx = U^1x$, третье — в случае, если $Mx = U^4x$. Третье утверждение верифицируется на основе положения $\Pi x\alpha(x) = K\alpha(0)\alpha(1)$, где Π — квантор общности, а α — какая-то функция. Согласно этому положению третье утверждение равнозначно $KM0M1$, поскольку $\Sigma xKMxMNx = N\Pi xNKMxMNx$, что возможно лишь в случае, если $M0 = M1 = 1$.

Проверка показывает, таким образом, что первое и второе утверждения истинны, если $Mx = x$, первое и третье — если $Mx = U^4x$, второе и третье несовместимы. Таким образом, нет функции для Mx, которая удовлетворяла бы утверждениям 1—3. Каким образом проблема решается в многозначной логике, покажем в пятой главе.

Подчеркиваем, что, говоря о недостаточности классической логики, в данном случае мы имеем в виду недостаточность ее лишь с определенной точки зрения, а не вообще; классическая логика не удовлетворяет как модель модальных высказываний. По мнению некоторых авторов, теория модальных высказываний может быть развита и в рамках классической логики (с известными ограничениями, конечно).

Ниже мы еще приведем иллюстрацию использования трехзначной логики для описания модальных высказываний. Здесь же заметим, что потребность описать взаимоотношения модальных высказываний в работах Лукасевича является исторически преходящим фактом. Существенным же является само доказательство возможности неклассической системы логики. Огромное значение этого последнего обстоятельства трудно переоценить, — по значению некоторые его сравнивают с открытием неэвклидовой геометрии [48].

Система Лукасевича строится так. Значения истинности обозначаются знаками 1 (истинно), 0 (ложно) и $^1/_2$ (третье значение). Отрицание Nx высказывания x и импликация Cxy высказывания x и y определяются соответственно матрицами

x	Nx
1	0
0	1
$^1/_2$	$^1/_2$

$x \backslash y$	1	0	$^1/_2$
1	1	0	$^1/_2$
0	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	1

Дизъюнкция Axy и конъюнкция Kxy могут быть определены через импликацию: $Axy = CCxyy$, $Kxy = NCCNxNyNy$ или $Kxy = NANxNy$ (здесь знаки N, A, K и C обозначают, разумеется, трехзначные функции; при соответствующих определениях и оговорках их будем использовать в логике с любым числом значений истинности). Однако дизъюнкцию и конъюнкцию можно определить матрицами соответственно

$x \backslash y$	1	0	$^1/_2$
1	1	1	1
0	1	0	$^1/_2$
$^1/_2$	1	$^1/_2$	$^1/_2$

$x \backslash y$	1	0	$^1/_2$
1	1	0	$^1/_2$
0	0	0	0
$^1/_2$	$^1/_2$	0	$^1/_2$

В таком случае приведенные выше их линейные определения будут выступать как утверждения о равнозначности высказываний, проверяемые матрицами.

В форме равенств рассмотренные функции запишутся так:

1) $Nx = 1 - x$

2) $Cxy = 1$, если $x \leqslant y$; $Cxy = 1 - x + y$, если $x > y$; $Cxy = \min(1,\ 1 - x + y)$

3) $Axy = \max(x, y)$

4) $Kxy = \min(x, y)$.

Здесь обнаруживается еще одно удобство этой формы записи: в ней легко осуществить обобщение на любое конечное или счетное бесконечное множество значений, как это и сделал Лукасевич. Например, рассматривая значения истинности как действительные числа от 0 до 1, мы получим следующие отношения: если $x = {}^3/_7$, то $Nx = 1 - {}^3/_7 = {}^4/_7$; если $x = {}^3/_7$ и $y = {}^2/_7$, то $Cxy = \min(1,\ 1 - {}^3/_7 + {}^2/_7) = \min(1,\ {}^6/_7) = {}^6/_7$.

Поскольку конъюнкция и дизъюнкция определяются с помощью импликации и отрицания, система Лукасевича (Лукасевича — Тарского, точнее, поскольку Тарский аксиоматизировал ее) известна как система $N - C$, то есть как система с основными операторами N и C (с основными функциями Nx и Cxy). Если за истинностные значения принять целые положительные числа от 1 до n, то определения N и C посредством равенств значений будут по форме выглядеть несколько иначе, что не меняет сути дела: как говорилось в первой главе, законы логики не зависят от формы записи.

В качестве тавтологий (утверждаемых, доказуемых, всегда истинных и т. п. высказываний) в системе Лукасевича принимаются высказывания, имеющие значение 1 при всевозможных подстановках, то есть при любых значениях аргументов (первичных высказываний, из которых образовано данное высказывание), как и в классической логике. С помощью матриц (или вычисления путем подстановок истинностных значений в равенства, адекватные матрицам) можно убедиться, что не все тавтологии двухзначной логики будут тавтологиями в логике Лукасевича. Так $CCNxxx, NKxNx, AxNx$, являющиеся тавтологиями (законами) двухзначной логики, не являются таковыми в логике Лукасевича, поскольку соответственно $CCN^1/_2{}^1/_2{}^1/_2 = CC\ ^1/_2{}^1/_2{}^1/_2 = C\ 1^1/_2 = {}^1/_2$, $NK\ ^1/_2N^1/_2 = NK\ ^1/_2\ ^1/_2 = N^1/_2 = {}^1/_2$, $A^1/_2N^1/_2 = A^1/_2\ ^1/_2 = {}^1/_2$.

Не являются здесь тавтологиями и правила приведения к абсурду в двухзначной логике $CCxNxNx$ и $CCxKyNyNx$, так как при $x = y = {}^1/_2$ принимают значение истинности $^1/_2$. Равнозначные в двухзначной логике $CNxy$ и $CCxyy$ не равнозначны здесь, так как $CN^1/_2{}^1/_2 = C^1/_2{}^1/_2 = 1$ и $CC^1/_2{}^1/_2{}^1/_2 = C1^1/_2 = {}^1/_2$. Аналогично обстоит дело с Cxy и $ANxy$, так как $C^1/_2\ ^1/_2 = 1$ и $AN^1/_2\ ^1/_2 = A^1/_2{}^1/_2 = {}^1/_2$. Тогда как, например, $CNNxx$ и $CxNNx$ суть тавтологии и здесь, покольку здесь $NNx = 1 - Nx = 1 - 1 + x = x$ по определению (в отличие от интуиционистской логики, где тавтологией является, как увидим ниже, лишь вторая формула), то есть здесь двойное отрицание любого значения истинности дает то же значение.

Существенно важно обратить внимание на следующее свойство системы Лукасевича. Высказывания $NKxNx$ и $AxNx$ являются соответственно законами противоречия и исключенного третьего двухзначной логики. Как мы видели выше, они не являются законами в системе Лукасевича. Это не означает ничего другого, кроме следующего: если $x = {}^1/_2$, то приведенные высказывания в целом точно так же имеют значения $^1/_2$, то есть не всегда принимают значения 1.

С другой стороны, в системе Лукасевича не являются законами и отрицания законов противоречия и исключенного третьего, так как $NNK1N1 = 0$, $NNK0N0 = 0$, $NNK^1/_2N^1/_2 = {}^1/_2$, $NA1N1 = 0$, $NA0N0 = 0$, $NA^1/_2N^1/_2 = {}^1/_2$. Это обстоятельство точно так же чрезвычайно важно иметь в виду: логика Лукасевича не есть отрицание двузначной логики, она есть обобщение последней. В самом деле, если учитывать только 1 и 0, то из матриц Лукасевича вычленяются матрицы обычных двузначных отрицания, импликации и других функций. Другими словами, если $x = 1$ или $x = 0$, а все промежуточные значения исключены, то двузначная логика выступает как частный (предельный) случай системы Лукасевича. В частности, $N1 = 1-1 = 0$, $N0 = 1-0 = 1$.

Тарский [53] и Вайсберг [67] аксиоматизировали систему Лукасевича. Соотношение матричных (истинностных, функциональных) и аксиоматических построений специально рассмотрим ниже. Здесь ограничимся кратким замечанием. Аксиоматика Вейсберга имеет следующий вид:

1. $CxCyx$
2. $CCxyCCyzCxz$
3. $CCCxNxxx$
4. $CCNyNxCxy$.

Аксиомы 1, 2 и 4 суть тавтологии двузначной логики. Вместо аксиомы 3 в двузначной логике принимается $CCNxxx$, не являющееся тавтологией в системе Лукасевича, так как $CCN{}^1/_2\ {}^1/_2\ {}^1/_2 = {}^1/_2$. Посредством матриц (и сформулированных выше равенств) можно убедиться, что аксиомы 1—4 все суть тавтологии, то есть принимают всегда значение 1. Вообще, при выборе системы аксиом выбираются утверждаемые в матричном построении высказывания, в данном случае — всегда истинные. Тем же путем можно убедиться и в том, что данная аксиоматика не противоречит двузначной логике: третья аксиома имеет значение 1, если x имеет любое из значений 1 и 0.

Важно отметить также, что третья аксиома будет тавтологией и в двузначной логике, так как $CCC1N111 = CCC1011 = CC011 = C\ 11 = 1, CCC0N000 = CCC0100 = CC100 = C00 = 1$. Так что многозначную по идее аксиоматику можно интерпретировать в ряде случаев как двузначную.

Лукасевич связал идею многозначной логики с исчислением вероятностей: если третье значение («возможно») имеет градации, то возможно бесконечное число значений (аналогично вероятности в рамках от 0 до 1).

Трехзначная и бесконечнозначная логика, по мысли Лукасевича, есть фрагмент двухзначной в том смысле, что утверждения многозначной логики (без кванторов) имеют силу и в двухзначной (но, как мы видели, не всегда наоборот). В трехзначной логике имеются утверждения, не имеющие силы в бесконечно-значной.

Лукасевич отмечает, и с этим следует согласиться, что многозначную логику будет неточным называть неаристотелевской: Аристотель сам допускал для ряда высказываний (высказывания о будущих событиях), что они ни истинны и ни ложны. Правильнее ее называть нехризипповой, поскольку Хризипп первый категорически заявил, что высказывания либо истинны, либо ложны [52].

§ 3. Система Поста

Вскоре после Лукасевича опубликовал свою многозначную систему Пост [55]. В отличие от Лукасевича Пост исходил из чисто формальных соображений: допускал, что аргументы принимают значения из числа данных n значений (допустим, 1, 2,..., n), и рассматривал функции такого рода аргументов, принимающие значения из того же множества n значений. Какой при этом имеют смысл выражения «значение i», этот вопрос Поста совершенно не интересовал. Очевидно, что такой подход стал возможен лишь при том условии, что в классической логике он уже осуществлялся: уже в классической логике была выработана способность отвлекаться от того, что означают выражения «истинно» и «ложно», и заменять их вообще любыми удобными знаками, сосредоточивая тем самым внимание на чисто логических соотношениях; вместо высказываний брались вообще любые аргументы и функции, определенные этими логическими соотношениями. Всякие философские проблемы исключались из рассмотрения при подходе к проблеме, который имел место у Поста.

Между прочим, надо сказать, что хотя Лукасевич исходил из некоторой содержательной задачи, сам процесс построения многозначного исчисления требовал формального подхода (то есть отвлечения от смысла знаков, обозначающих истинностные значения) в качестве необходимого момента. У Поста эта дифференциация процесса построения логической системы и ее содержательной интерпретации выражена абсолютно резко: он вообще не дает никакой интерпретации. Такого рода абстракция является, однако, не только допустимой, но и необходимой для преодоления технических (если можно так выразиться) трудностей построения многозначных систем (ниже мы к этому еще вернемся).

Пост строит свою многозначную систему как обобщение двухзначной. Это не следует понимать так, будто все функции многозначной логики будут иметь аналоги в двухзначной логике (ниже мы увидим, что имеются функции, для котрых нет аналогов такого рода). Это следует понимать так, что при n, равном двум, мы в качестве частного случая будем иметь двухзначную логику.

x	N_x^1
1	2
2	3
.	.
.	.
.	.
$n-1$	n
n	1

x	N_x^2
1	n
2	$n-1$
.	.
.	.
.	.
$n-1$	2
n	1

Отрицания у Поста определяются матрицами или, в другой форме,

1) $N^1x = x + 1, \quad N^1n = 1$

2) $N^2x = n - x + 1.$

Дизъюнкция определяется как у Лукасевича, то есть $Axy = min\,(x, y)$, с той только разницей, что минимальное значение считается более утверждаемым. Это связано с выбором системы обозначения истинностных значений и не имеет принципиального значения; важно лишь одно, что если для одной из функций Axy и Kxy выбирается min, то для другой выбирается max, и по аналогии с двухзначной логикой соответственно выбирается более утверждаемое (истинное) значение.

Конъюнкция определяется через дизъюнкцию и отрицание: $Kxy = N^2AN^2x\,N^2y$. Можно показать, что $Kxy = max\,(x, y)$. В самом деле, $Kxy = N^2AN^2xN^2y = n - AN^2xN^2y + 1 = n - min\,(N^2x, N^2y) + 1 = n - min(n-$

$-x+1,\ n-y+1)+1$; пусть $x=y$; тогда $Kxy=n-n+$ $+x-1+1=n-n+y-1+1=x=y$; пусть $x>$ $>y$; тогда $Kxy=n-n+x-1+1=x$; пусть $x<y$; тогда $Kxy=n-n+y-1+1=y$.

Таким образом, здесь дается обобщение законов двузначной логики, касающихся взаимоотношений конъюнкции и дизъюнкции.

Из приведенных примеров видно также, что обобщение функций двузначной логики может идти по разным линиям. Так, оба определенные выше отрицания суть обобщения двузначного. Однако первое нужно осуществить n раз, чтобы получить исходное высказывание, для второго же правило двойного отрицания сохраняется для любого i. В случае, если n равно двум, эти отрицания совпадают.

Пост определяет ряд других функций. С некоторыми из них мы еще встретимся в их трехзначном варианте при рассмотрении системы Рейхенбаха (в частности, с так называемой стандартной импликацией, аналогичной импликации Лукасевича). Здесь важно другое. Роль формального подхода к разработке проблем логики вряд ли нужно сейчас кому-либо доказывать. Конечно, в основе формальных построений можно усмотреть какие-то реальные исторические мотивы (как в случае с Лукасевичем и, будет показано ниже, с Броуэром и Гейтингом), реальные потребности науки. Однако не менее интересна и другая сторона истории науки, когда предложение той или иной теории создает спрос на нее. И как следствие здесь рождаются различные интерпретации формальных построений. В такого рода случаях роль того подхода к решению логических проблем, какой имел место у Поста, неоценима в качестве предварительного условия решения научных проблем.

В настоящее время положение пока еще таково, что спрос на многозначную логику невелик сравнительно с тем, что в ней сделано с чисто формальной точки зрения. Основная работа ведется именно по линии разработки логики как формального аппарата. С этой точки зрения работа Поста сыграла свою роль. В частности, одной из проблем является проблема функциональной полноты исчисления, то есть отбора небольшого числа основных функций, на базе которых можно было бы в принципе определить всевозможные функции n-значного исчисления (через выбранные функции выразить все остальные). При огромном числе возможных функций задача представляется далеко не тривиальной. Пост показал возможность преодоления трудностей такого рода.

§ 4. Система Броуэра — Гейтинга

Третьим первоисточником многозначной логики являются работы Броуэра [31, 32] и Гейтинга [43, 44, 45]. Толчок к разработке неклассической логики здесь был получен из конкретных научных исследований, а именно — из потребностей обоснования математики на базе принципов интуиционизма (см. об этом, например, [48], [71] и др.). Исходным пунктом послужило следующее положение Броуэра: безграничное действие закона исключенного третьего имеет силу только для той части математики (и, значит, для той части естествознания), которая развертывается внутри некоторой определенной конечной математической системы (на которую проецируется определенная конечная математическая система).

В одной из философских статей [44] Гейтинг приводит следующий пример (этот пример разобран также в [71]). Возьмем утверждение: всякое целое число, большее единицы, есть либо простое, либо сумма двух простых, либо сумма трех простых. Не известно, так это или нет, хотя во всех рассмотренных случаях (а их — конечное число) это так. Назовем исключительным числом число, которое не удовлетворяет приведенному утверждению. Существует такое число или нет? Мы не можем указать такое число и не можем вывести противоречие из допущения его существования. Отсюда делается вывод о неприменимости закона исключенного третьего в таких случаях (как увидим ниже, этот закон не объявляется ложным, просто он не принимается в качестве закона в рассуждениях, имеющих дело с такого рода фактами).

В двухзначной логике из закона исключенного третьего выводится равнозначность двойного отрицания x и x, то есть выводится $KCNNxxCxNNx$ (и наоборот). Броуэр предложил «ослабить» этот закон, принимая только одну его часть $CxNNx$ и исключая другую $CNNxx$ (исключая, по его терминологии, принцип, согласно которому из абсурдности абсурдности x следует x). Гейтинг разработал логическую систему, исходя из этого основания.

Отрицание и импликация определяются у Гейтинга (мы будем употреблять те же обозначения, что и в § 2, чтобы сравнить системы) матрицами соответственно

x	Nx
1	0
0	1
$^1/_2$	0

$x \backslash y$	1	0	$^1/_2$
1	1	0	$^1/_2$
0	1	1	1
$^1/_2$	1	0	1

Импликация в другой форме может быть задана равенствами $Cxy = 1$, если $x \leqslant y$, и $Cxy = y$, если $x > y$. Таким образом, если у Лукасевича, например, $C^1/_20 = 1 - {}^1/_2 + 0 = {}^1/_2$ и $C1^1/_2 = 1 - 1 + {}^1/_2 = {}^1/_2$, то у Гейтинга $C^1/_20 = 0$ и $C1^1/_2 = {}^1/_2$, то есть полного совпадения нет. Таким образом, многозначные системы можно строить различными путями. Конъюнкция и дизъюнкция определяются так же, как у Лукасевича. Аналогично — с определением тавтологии.

С помощью матриц можно показать, что (например) $CNNxx$ и $AxNx$ не являются тавтологиями логики Гейтинга, так как $CNN^1/_2{}^1/_2 = CN0^1/_2 = C1^1/_2 = {}^1/_2$ и $A^1/_2N^1/_2 = A^1/_20 = {}^1/_2$. Однако будет тавтологией $CxNNx$, так как $C1NN1 = 1$, $C0NN0 = 1$, $C^1/_2NN^1/_2 = C^1/_2N0 = C^1/_21 = 1$. Тавтологией является также $AAxNxNNx$, так как $AA1N1NN1 = AA101 = A11 = 1$, $AA0N0NN0 = AA010 = A10 = 1$, $AA^1/_2N^1/_2NN^1/_2 = AA^1/_201 = A^1/_21 = 1$. Это утверждение можно рассматривать как своеобразное обобщение закона исключенного третьего: «x или не-x или не-не-x». Поскольку, как мы видели выше, двойное отрицание не равнозначно утверждению, дизъюнктивный член «не-не-x» отбросить нельзя.

Было бы ошибочно думать, что в системе Броуэра — Гейтинга законы исключенного третьего и противоречия двухзначной логики ложны, а их отрицания истинны. Более того, будет грубой ошибкой трактовать сомнения во всеобщем характере этих законов как признание истинными в некоторых случаях отрицаний этих законов $NANxx$ и $NNKxNx$. С помощью матриц легко установить, что отрицания этих законов в логике Броуэра — Гейтинга всегда ложны (в логике Лукасевича они могут иметь значение $^1/_2$, но при подстановке значений, соответствующих истинности и ложности, они ложны). Таким образом, и в логике Гейтинга многозначная логика выступает не как нечто противоречащее двухзначной логике, а как своеобразное ее обобщение. К тому, что уже говорилось об обобщении двухзначной логики выше, мы в дальнейшем добавим еще ряд новых аспектов, чтобы показать, что здесь нельзя сводить дело к одному какому-либо типу отношения.

Вообще говоря, теперь уместно поставить вопрос: возможна ли логическая система, в которой в качестве закона будет иметь место отрицание законов исключенного третьего и противоречия двухзначной логики? К этому вопросу мы вернемся ниже. На базе изложенного, однако, уже здесь можно сказать следующее: поскольку n-значные логические системы суть обобщения двухзначной, то при n, равном двум, рассматриваемые законы должны иметь значение, соответствующее истине, а их отрицания — значение, соответствующее лжи.

§ 5. Аксиоматика интуиционистской логики

Как и в логике Лукасевича, выбор аксиом в логике Гейтинга осуществляется из числа тавтологий. Гейтинг сформулировал следующую аксиоматику исчисления высказываний.:

1. $CxKxx$
2. $CKxyKyx$
3. $CCxyCKxzKyz$
4. $CKCxyCyzCxz$
5. $CyCxy$
6. $CKxCxyy$
7. $CxAxy$
8. $CAxyAyx$
9. $CKCxzCyzCAxyz$
10. $CNxCxy$
11. $CKCxyCxNyNx$.

Эти аксиомы удовлетворяют матрицам Гейтинга. Например, для аксиомы 7: если $x \geqslant y$, то $Axy = x$, а $Cxx = 1$; если $x < y$, то $Axy = y$, а $Cxy = 1$ по определению; и так для прочих аксиом.

Равносильной с аксиоматикой Гейтинга является аксиоматика, сформулированная Лукасевичем для интуиционистского исчисления высказываний:

1. $CxCyx$
2. $CCxCxyCxy$
3. $CCxyCCyzCxz$
4. $CKxyx$
5. $CKxyy$
6. $CCxyCCyzCxKyz$
7. $CxAxy$
8. $CyAxy$
9. $CCxzCCyzCAxyz$
10. $CCxNyCyNx$
11. $CNxCxy$.

Достаточно к этой системе добавить аксиому

12. $CCCxNxyCCxyy$,

как получим систему двухзначной логики, — вот еще один из многочисленных аспектов отношения многозначной логики к классической. Равносильной с гейтинговской является также аксиоматика, сформулированная Генценом [36] (см. также [14]). Если в ней аксиому $CNxCxy$ заменить аксиомой $CNNxx$ (то есть принять ту «часть» закона равнозначности двойного отрицания и утверждения, которую исключил Броуэр), то получим аксиоматику двухзначного исчисления высказываний, и наоборот. Здесь, как видим, происходит замена аксиомы, а не дополнение (впрочем, можно показать, что они равносильны).

Рассмотрим еще один тип отношения многозначной логики к двухзначной. Лукасевич показал, что классическое исчисление высказываний есть часть интуиционистского. В работе Борковского [30] это описано так. Интуиционистские импликация, конъюнкция и дизъюнкция обозначаются соответственно через F, T и O, а классические — C, K и A. Принимается система аксиом, равносильная с гейтинговской:

1. $FyFxy$
2. $FFxFyzFFxyFxz$
3. $FTxyx$
4. $FTxyy$
5. $FxFyTxy$
6. $FxOxy$
7. $FyOxy$
8. $FFxzFFyzFOxyz$
9. $FFxNyFyNx$
10. $FxFNxy$.

Принимаются правило подстановки и правило вывода

$$\frac{\begin{matrix} Fxy \\ x \end{matrix}}{y}.$$

Из аксиом 1—5 и 9 выводятся утверждения

a) $NTNTNxNxNx$

b) $NTxNNTNxNy$

c) $NTNTxNyNNTNTyNzNNTxNz$.

Приняв эти утверждения за аксиомы и приняв правило подстановки и правило вывода в форме

$$\frac{\begin{matrix} NTxNy \\ x \end{matrix}}{y},$$

получим систему, которая содержит в качестве собственной части классическое исчисление высказываний.

Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний обладает одним интересным свойством: она утверждается (проверяется, удовлетворяет) рассмотренным гейтинговским матрицам, но последние проверяют, кроме того, высказывания, не выводимые в этой системе аксиом. Последняя, короче говоря, не адекватна таблицам истинности (матрицам) [71], [14], [48]. Например, утверждения $ACxyCyx$ и $CCNNxxAxNx$ не выводятся в системе аксиом Гейтинга, однако при любых значениях x и y являются истинными. В частности, $CCNN{}^1/_2{}^1/_2A{}^1/_2N{}^1/_2 = CC1{}^1/_2A{}^1/_20 = C{}^1/_2{}^1/_2 = 1$. Как показал Гёдель [39], интуиционистское исчисление высказываний нельзя рассматривать на основе таблиц истинности ни при каком конечном числе истинностных значений в том смысле, что ни одна матрица с конечным числом истинностных значений не может быть эквивалентной аксиоматической системе Гейтинга.

§ 6. Работы Колмогорова и Гливенко

Необходимо сказать, что раньше Гейтинга и независимо от него Колмогоров [15, 47] наметил формально-аксиоматический аппарат для логики, не опирающейся на закон исключенного третьего, а Гливенко [37, 38] развил идеи Колмогорова, дав систему аксиом для исчисления высказываний, которое получило название конструктивистского [22]. В нашу задачу не входит рассмотрение различия конструктивизма и интуиционизма в математике, — это специальный вопрос, далеко выходящий за рамки нашей темы. Точно как же в нашу задачу не входит разбор философских ошибок интуиционизма (см., например, [8]). Ограничимся лишь тем, что непосредственно относится к теме. Колмогоров [15] рассматривает гильбертовскую систему аксиом:

1. $CxCyx$ 2. $CCxCxyCxy$

3. $CCxCyzCyCxz$ 5. $CxCNxy$

4. $CCyzCCxyCxz$ 6. $CCxyCCNxyy$,

где аксиома шестая выражает закон исключенного третьего и может быть прочитана так: если y следует из x и Nx, то y истинно (это эквивалентно форме: всякое суждение истинно или ложно).

По мнению Колмогорова, раз аксиоматика логики высказываний претендует на значимость для любых высказываний, она должна вытекать из их общих свойств. Если не принимать во внимание субъектно-предикатное строение высказываний, то единственным свойством их оказывается истинность или ложность. Знак Cxy понимается так: убедившись в истинности x, мы обязаны признать и истинность y (если написано x, то мы можем написать и y). Знак Nx понимается как запрещение признать истинным x.

Обратимся к аксиомам. Первая аксиома, например, с интуитивной очевидностью вытекает из самого понимания логического следования, тогда как этого нельзя сказатч о пятой: она говорит о последствиях чего-то невозможного, то есть Nx. Так же обстоит дело с шестой аксиомой, то есть с законом исключенного третьего. Для оправдания ее необходимо обратиться к строению высказываний — к отношению субъектов и предикатов. При этом обнаруживается двоякое понимание отрицания: то, о котором говорилось выше — Nx, и отрицание как утверждение о несоответствии предиката субъекту. Первое понимание шире и не всегда сводится ко второму.

Вместо пятой и шестой аксиом Гильберта Колмогоров предложил аксиому

5*. $CCxyCCxNyNx$,

которая читается так: если из x следует истинность и ложность y, то x ложно. Истинность этой аксиомы, по его мнению, вытекает из простейшего (общего) понимания отрицания как запрещения считать высказывание истинным и не связана с рассмотрением содержания высказываний. Формулы, доказуемые в системе аксиом 1—4 и 5*, образуют общую логику высказываний. Присоединив к этой системе аксиом аксиому

6*. $CNNxx$,

получим систему аксиом, эквивалентную гильбертовской. Формулы, доказуемые в ней, образуют частную логику высказываний, имеющую безоговорочную силу в области финитных (конечных) суждений. Область общей логики шире, чем область частной.

В работе [47] Колмогоров дает истолкование логики высказываний без закона исключенного третьего как исчисления задач, что сыграло большую роль в становлении конструктивистского направления в обосновании математики и в логике. Аксиоматика конструктивистского исчисления высказываний в дальнейшем приняла следующий вид:

1. $CxCyx$
2. $CCxCyzCCxyCxz$
3. $CxCyKxy$
4. $CKxyx$
5. $CKxyy$
6. $CCxyCCzyCAxzy$
7. $CxAxy$
8. $CyAxy$
9. $CCxyCCxNyNx$
10. $CNxCxy$.

Схема вывода имеет вид:

$$\frac{\begin{matrix} Cxy \\ x \end{matrix}}{y}.$$

Аксиоматика Гейтинга эквивалентна конструктивистской. Обзор работ по конструктивистской логике имеется в статье Яновской [27], так что в дальнейшем мы на них будем ссылаться редко.

Глава третья

Очерк многозначных логических систем

§ 1. Пути развития многозначной логики

Дать сколько-нибудь полный обзор работ по многозначной логике, появившихся после работ Лукасевича, Поста и Броуэра, здесь не представляется возможным. Да в этом и нет необходимости. С точки зрения нашей темы достаточно будет в дальнейшем рассмотреть еще ряд систем выборочно, ориентируясь лишь на использование их в качестве иллюстраций для новых сторон этой темы и не заботясь о соблюдении правил исторического исследования. Развитие многозначной логики шло и осуществляется в настоящее время в основном по следующим трем направлениям:

1) чисто формальная разработка аппарата логики;

2) построение логических систем или приспособление имеющихся с целью решения конкретных задач научного исследования;

3) разработка общей теории многозначных логических систем. Это — стороны единого процесса, а не направления наряду друг с другом. Во многих работах прямо или косвенно затрагиваются различные стороны дела, и установить здесь какую-то жесткую классификацию вряд ли возможно.

§ 2. Метод Яськовского

В русле идей интуиционистской логики интерес представляет предложенный Яськовским [71] метод построения матриц для $n+1$ значений на основе матриц для n значений, а также метод умножения матриц. Очевидно, что в обоих случаях для $n > 2$ процесс должен пройти через случай двухзначной логики, так что рассмотрение этих методов раскрывает еще одну сторону в соотношении двухзначной и многозначной логики.

Принимаются следующие соотношения:

a) 1, $\alpha(1) = 0$

b) 1, $\alpha(1) = 2$, $\alpha(0) = 0$

c) 1, $\alpha(1) = 3$, $\alpha(2) = 2$, $\alpha(0) = 0$

и т. д., где 0, 1, 2,... суть значения истинности, а $\alpha(0)$, $(\alpha 1)$, $\alpha(2)$,... — их отрицания. Пункты a, b, c,... относятся соответственно к двухзначной, трехзначной, четырехзначной и т. д. логике. Обозначим через N, C, K и A соответственно отрицание, импликацию, конъюнкцию и дизъюнкцию в n-значной логике, а через N^*, C^*, K^* и A^* — в $(n+1)$-значной логике. Схемы для определения вторых через первые имеют следующий вид:

a)

N^*	
1	$\alpha(N1)$
$\alpha(x)$	Nx

b)

C^*	1	$\alpha(y)$
1	$C11$	$\alpha(C1y)$
$\alpha(x)$	$Cx1$	Cxy

c)

K^*	1	$\alpha(y)$
1	$K11$	$\alpha(K1y)$
$\alpha(x)$	$\alpha(Kx1)$	$\alpha(Kxy)$

d)

A^*	1	$\alpha(y)$
1	$A11$	$A1y$
$\alpha(x)$	Axy	$\alpha(Axy)$

где x есть первый, а y — второй аргумент (важно для импликации).

Действие схем проиллюстрируем на примере отрицания и импликации. В однозначной логике, где $x = Nx = N1 = 1$, имеем, очевидно,

N^*	
1	$\alpha(1)$
$\alpha(1)$	1

В двухзначной логике, где $\alpha(1) = 0$, имеем матрицу

N^*	
1	0
0	1

В трехзначной логике, где $x = 0$ или 1, а $\alpha(1) = 2$, получим матрицу

N^*	
1	0
$\alpha(0) = 0$	1
$\alpha(1) = 2$	$N1 = 0$

Для импликации в однозначной логике получим матрицу

C^*	1	$\alpha(1)$
1	$C11$	$\alpha(C11)$
$\alpha(1)$	$C11$	$C11$

или

C^*	1	$\alpha(1)$
1	1	$\alpha(1)$
$\alpha(1)$	1	1

В двухзначной логике, где $\alpha(1) = 0$, получим матрицу

C^*	1	0
1	1	0
0	1	1

В трехзначной логике, где $x = 1$ или 0, $y = 1$ или 0, $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(1) = 2$, матрица примет вид

C^*	1	$\alpha(1)$	$\alpha(0)$
1	1	$\alpha(C11)$	$\alpha(C10)$
$\alpha(1)$	$C11$	$C11$	$C10$
$\alpha(0)$	$C01$	$C01$	$C00$

и

C^*	1	2	0
1	1	2	0
2	1	1	0
0	1	1	1

(для x и для y указаны два возможных значения потому, что C двухзначна).

Интересно отметить, что, заменив в такого рода матрицах значение n на 1, получим ($n-1$)-значную матрицу (легко проверить, например, по последней матрице). С матрицами Лукасевича аналогичная замена ведет к абсурду, поскольку получаются равенства вроде $C10 = 1 = 0$. Если матрица для $n+1$ значений получена из матрицы для n значений по методу Яськовского, то множество логических выражений, удовлетворяющих второй матрице, будет удовлетворять и первой. Таким образом, в однозначной логике имеют силу правила двухзначной, в последней — правила трехзначной и т. д.

При умножении матриц образуются пары значений. Например, умножение двух двухзначных матриц дает пары 00, 01, 10, 11. Пары выступают как элементы новой матрицы (в примере — четырехзначной). Для удобства пары можно перенумеровать, например — $11 = 1$, $10 = 2$, $01 = 3$, $00 = 0$. Импликация двух пар, например, (0,1) и (1,1) означает следующее: $C(0,1)(1,1) = (C01, C11) = (1,1)$ (то есть значения объединяются первое по порядку написания с первым, второе со вторым и т. д.). Отрицание, например, $N(0,1)$ означает, что $N(0,1) = (N0, N1) = (1,0)$.

Матрица, получающаяся в результате умножения двух двухзначных матриц, будет иметь вид

C	11	10	01	00
11	11	10	01	00
10	11	11	01	01
01	11	10	11	10
00	11	11	11	11

Аксиомы Гейтинга (Яськовский сформулировал интуиционистскую аксиоматику, отличную от гейтинговской, но равносильную с ней) удовлетворяют такого рода матрицам. Например, возьмем $CxCyx$. Пусть $x = 01$ и $y = 10$. Имеем $C(01)C(10)(01) = (C0C10,\ C1C01) = (C00,\ C11) = (1,1)$.

Матрицы, получающиеся в результате первой из рассмотренных операций и умножения матриц, не совпадают. Так, перенумеровав пары в приведенной выше матрице импликации, получим

C	1	2	3	0
1	1	2	3	0
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
0	1	1	1	1

тогда как первым методом получим матрицу

C	1	2	3	0
1	1	2	3	0
2	1	1	1	0
3	1	2	1	0
0	1	1	1	1

Но формулы Гейтинга удовлетворяют как тем, так и другим матрицам.

Интересный пример четырехзначной логики дан в работе Расёвой [57], где матрица четырехзначной импликации

C	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	1	2	1	2
4	2	1	2	1

получается путем умножения двухзначных матриц импликации и равнозначности по методу Яськовского (тавтология всегда имеет значение 1). Аксиоматика этой системы имеет вид:

1) $CCxyCCyzCxz$
2) $CyCxCxy$
3) $CCCxyCCxyxx$

(то есть аналогична аксиоматике Тарского—Бернайса для двухзначного исчисления высказываний). Характерно, что множество тавтологий данной системы равно сумме тавтологий двухзначного импликативного исчисления, являющихся тавтологиями и в исчислении, в котором на месте знака импликации стоит знак равнозначности.

Как видим, даже в рамках идей работы одного Яськовского обнаруживается несколько различных аспектов взаимоотношения многозначной логики и двухзначной, а также различные пути обобщения последней. Поэтому всякие попытки свести их исключительно к одной форме отношения должны потерпеть крах как несоответствующие фактам. Рассмотрим одну такую неудачную попытку, чтобы покончить вообще с ними как в лучшем случае с бесполезными для логики.

§ 3. Пример невозможности сведения многозначной логики к двухзначной

К справедливым словам Россера и Тёркетта, приведенным в начале первого параграфа второй главы, следует добавить еще такие, являющиеся в настоящее время, пожалуй, более актуальными: с того момента, когда в логике стали строиться системы, базирующиеся на принципе «высказывания имеют n истинностных значений, где n есть любое целое положительное число», появились люди, подвергающие этот принцип сомнению. И если в первом случае сомнения базировались на реальных трудностях анализа человеческого познания в рамках двухзначной логики и привели в конечном счете к существенному сдвигу в истории логики, то ничего подобного нельзя сказать о втором.

По мысли Гюнтера [42], например, единственно возможной является двухзначная логика. А то, что называют многозначной логикой, есть лишь описание связи различных семантических плоскостей нашего сознания, в каждом из которых господствует двухзначная логика. В частности, трехзначная логика выступает как связь трех аспектов двухзначной. Например, таблица истинности Kxy, для которой $Kxy = min\ (x, y)$, может быть представлена как соединение трех таблиц двухзначных конъюнкций K^1xy, K^2xy и K^3xy, в которых x и y принимают соответственно значения 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3. Аналогично обстоит дело с Axy.

Однако не представляет труда показать, что таким методом может быть охвачена лишь небольшая часть функций. Возьмем, например, такую функцию (импликация Лукасевича):

1) $Cxy = 2$, если $x = 1$ и $y = 2$ и если $x = 2$ и $y = 3$;
2) $Cxy = 3$, если $x = 1$ и $y = 3$;
3) $Cxy = 1$ в остальных случаях.

Разложив матрицу, соответствующую этой функции, на три двухзначных (по идее автора), получим

a)

$x \backslash y$	1	2
1	1	2
2	1	1

b)

$x \backslash y$	2	3
2	1	2
3	1	1

c)

$x \backslash y$	1	3
1	1	3
3	1	1

Но вторая матрица, как видим, не является двухзначной: в двухзначной на месте 1 должно стоять 2, а на месте 2 стоять 3, то есть матрица должна иметь вид

d)

$x \backslash y$	2	3
2	2	3
3	2	2

В общем, во всех случаях, когда функция принимает значения такие, каких не принимают аргументы в двухзначной матрице, рассматриваемый метод не годится (он годится для функций, принимающих либо минимальное, либо максимальное значение аргументов). Кроме того, если мы попытаемся из трех матриц a, c и d сложить одну трехзначную, получим следующий нонсенс: при

$x=y=2$ и $x=y=3$ импликация принимает значение 1 и 2 одновременно, то есть $Cxy=1=2$, что явно абсурдно. Мы уже не говорим о том, что этот метод, если его применить только к Kxy и Axy, не дает ничего существенного для построения многозначных исчислений. В частности, оперируя только функциями Kxy и Axy и классическим отрицанием, оказывается невозможным определить с их помощью функции вроде (для трехзначной логики) $Fx=2$.

Но коль скоро утверждение критикуемого автора оказывается ложным с чисто логической точки зрения, то падают и все его философские нагромождения вокруг этого утверждения. Имеются и другие способы отрицать многозначную логику, об одном из которых мы упомянем в четвертой главе.

§ 4. Система Бочвара

Бочвар построил свое трехзначное исчисление [2, 3] с целью разрешения парадоксов классической математической логики путем формального доказательства бессмысленности определенных высказываний. Бочвар различает высказывания, имеющие смысл, и высказывания бессмысленные. Высказывание имеет смысл, если оно истинно или ложно. Высказывание, имеющее смысл, называется предложением. Бочвар далее различает:

1) внутреннюю форму утверждения, отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации, — соответственно x, не-x, x и y, x или y, если x, то y;

2) внешнюю форму соответственно x верно, x ложно, x верно и y верно, x верно или y верно, если x верно, то y верно. Для предложений эти формы эквивалентны. Различие их для высказываний обнаруживается при подстановке на место x (или y) бессмысленного высказывания: в первом случае получим бессмысленное высказывание, во втором — нет. Приведенное различение соответствует различению языка и его метаязыка.

Охарактеризуем исчисление Бочвара в следующей системе обозначений:

1) x, y, z, —...— переменные высказывания;

2) 1, 2, 3 — соответственно истинность, ложность и бессмысленность;

3) Kxy — внутренняя конъюнкция, определяемая матрицей

$x \backslash y$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

или, в другой форме, равенством $Kxy = max\ (x,\ y)$;

4) Nx, Vx и Wx — соответственно внутреннее отрицание (не-x), внешнее утверждение (x истинно) и внешнее отрицание (x ложно), определяемые матрицей

x	Nx	Vx	Wx
1	2	1	2
2	1	2	1
3	3	2	2

Через эти функции определяются другие:

$Axy = NKNxNy$

$Cxy = NKxNy$

$Rxy = KCxyCyx$

$K^*xy = KVxVy$

$A^*xy = AVxVy$

$C^*xy = CVxVy$

$R^*xy = KC^*xyC^*yx$

$S^*xy = KR^*xyR^*NxNy$

$Tx = NAVxWx$

$Ux = NVx$,

где: A, C и R суть знаки соответственно внутренних дизъюнкции, импликации и равнозначности; K^*, A^*, C^*, R^* — знаки соответственно внешних конъюнкции, дизъюнкции, импликации и равнозначности; Tx означает, что x бессмысленно; U — знак внешнего отрицания внутреннего утверждения.

Формулой считается:

1) символ высказывания;

2) если x формула, то Nx, Vx и Wx суть формулы;

3) если x и y формулы, то Kxy есть формула.

Прочие формулы задаются определениями новых операторов. Формула доказуема (является тавтологией) в матричной логике высказываний Бочвара, если она имеет значение 1 при любых значениях аргументов. Доказательство осуществляется проверкой посредством матриц. Например, формула (закон тождества двухзначной логики) Rxx, доказуемая в двухзначной логике, не является доказуемой здесь (не является законом логики Бочвара), так как $Rxx = KCxxCxx = KNKxNxNKxNx$, $R33 = KNK3N3NK3N3 = KN3N3 = K33 = 3$. Таким образом, и двухзначный закон тождества не абсолютен. Это обстоятельство сыграло у Бочвара важную роль при анализе парадокса Рассела. Выражение $x = x$ и рассматриваемая формула здесь не тождественны.

Доказуемыми в логике Бочвара будут, например, формулы Sxx, $SSxNxTx$, $STxTNx$. Формула, не имеющая значения 1 при никаких значениях аргументов, называется противоречием. Противоречием будут, например, K^*xWx, $SxWx$, R^*xUx.

Как и в случае с законами противоречия и исключенного третьего (см. главу II), отрицание классического закона тождества законом не является, так как $NR33 = N3 = 3$, $NR11 = N1 = 2$, $NR22 = N1 = 2$. Исключение классического закона тождества из числа законов данного исчисления вовсе не означает исключение принципа «x есть x» или «$x = x$». Оно означает только одно: в рамках принятых определений K, C, N, R, формулы и доказуемой формулы Rxx не есть доказуемая формула, что не отвергает тождества x при повторении записи и равенства $x = x$.

В логике Бочвара выводится ряд теорем, из которых для нас здесь важна следующая: матричное исчисление высказываний содержит часть, изоморфную с классическим матричным исчислением предложений. Доказательство ее строится так. С помощью матриц проверяем, что изложенные ниже формулы суть тавтологии C^*yC^*xy, C^*xA^*xy, $C^*A^*xyA^*yx$, A^*xTx и т. д. (приводится двенадцать формул). Установим следующее соответствие: переменные высказывания переходят в переменные предложения (обозначения сохраняются); знаки T, K^*, A^*, C^* и R^* переходят соответственно в знаки N, K, A, C и R. Получим систему формул: $CyCxy$, $CxAxy$, $CAxyAyx$, $AxNx$ и т. д. (соответственно двенадцать формул), изоморфную приведенной выше. Эту систему можно представить как систему аксиом для классической логики предложений, приняв следующие правила:

1) правило подстановки;

2) если x и Cxy доказуемые формулы, то доказуемо и y;

3) если x и y доказуемые формулы, то Kxy доказуема. Принцип подстановки остается в силе, что очевидно. Что касается второго и третьего правила, то из матрицы C^*xy выясняется следующее: если x и C^*xy доказуемы, то доказуемо и y; аналогично — для Cxy.

Можно показать, что в логике Бочвара содержится другой изоморфный образ логики предложений. Но для нас здесь важно другое: отношение изоморфизма, очевидно, есть отношение иного рода, чем отношение общего и частного случая,— и это обстоятельство точно так же надо иметь в виду, рассматривая взаимоотношения многозначной и двухзначной логик.

Связь классических и неклассических функций (опять-таки новый аспект их отношения) в логике Бочвара характеризуется системой формул. Приведем несколько примеров: $WWAxNx$, $STAxNxTx$, WTA^*xWx; первая формула означает, что неклассическое отрицание закона исключенного третьего всегда ложно; вторая означает, что классическая форма закона исключенного третьего бессмысленна тогда и только тогда, когда данное высказывание бессмысленно; третья означает, что неклассическая форма закона исключенного третьего не может быть бессмысленной. Логика Бочвара интересна также тем, что в ней возможно рассмотрение ряда проблем взаимоотношения языка и метаязыка.

Точно так же для математических целей используется трехзначная логика Клини [7]. Третье (помимо истинности и ложности) значение истинности у Клини может пониматься различно: 1) в смысле «не определено»; 2) в смысле «неизвестно, истинно или ложно»; 3) в смысле «значение несущественно» (мы не хотим знать значение или оно вообще не играет роли); 4) в смысле «ни истинность, ни ложность нельзя установить алгоритмически». Точнее говоря, в качестве значений истинности принимаются значения, например, типа: 1) «известна истинность» (соответствует истинности или, допустим, 1); 2) «известна ложность» (соответствует ложности или, допустим, 2); 3) «неизвестно, истинно или ложно» (соответствует третьему значению, допустим, 3). Таким образом, третье значение у Клини выступает не наравне с другими. Фактически мы имеем деление: 1) известно (определено, можно установить и т. д.) одно из двух значений — истинно или ложно; 2) неизвестно (не определено, нельзя установить и т. д.) значение. Поскольку в первом случае имеет место деление на две возможности, все три возможности можно рассматривать в одной плоскости, так сказать, поставив им в соответствие знаки t, f и u (1, 2 и 3). Последние же можно рассматривать как значения истинности. Таким образом здесь (как и у Бочвара) не непосредственно берутся три значения истинности наряду, а некоторая ситуация с тремя возможностями, в соответствие которой ставится некоторая абстрактная система с тремя значениями высказываний. Разумеется, вместо закона исключенного третьего для этих возможностей будет иметь силу закон исключенного четвертого. Заметим, что его правильнее здесь формулировать не в виде: «высказывание x имеет значение либо 1, либо 2, либо 3» , а в виде: «о высказывании x можно высказать, что оно либо имеет свойство 1 (известно, что оно истинно), либо имеет свойство 2 (известно, что оно ложно), либо имеет свойство 3 (неизвестно его значение)».

У Клини различаются два типа функций (и соответствующих таблиц): 1) слабые, определяемые таблицами, которые получаются из двухзначных путем заполнения символами третьего значения строк и столбцов, соответствующих этому третьему значению; например, для Axy

$x \backslash y$	1	2	3
1	1	1	3
2	1	2	3
3	3	3	3

2) сильные, определяемые таблицами

N	
1	2
2	1
3	3

K	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	2
3	3	2	3

A	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	3
3	1	3	3

R	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	3	3

Как видим, сильные таблицы для N и R тождественны слабым. Сильная импликация определяется матрицей

C	1	2	3
1	1	2	3
2	1	1	1
3	1	3	3

В логике Бочвара, как и в прочих системах, между значениями истинности установлены следующие соотношения:

1) если x имеет значение истинности 1, то оно не имеет значения 2 и не имеет значения 3;

2) если x не имеет значения 1, то оно имеет либо значение 2, либо значение 3 (если $n=3$);

3) если x имеет значение 1 или 2, то x не имеет значения 3;

4) если x не имеет значения 1 и значения 2, оно имеет значение 3;

5) и так далее для прочих возможностей. Рассматривая N, K и A соответственно как отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию двухзначной логики, а xi — как высказывание о том, что x имеет значение i, эти соотношения запишутся в форме: $Nx1 = x2Ax3$, $Nx2 = x1Ax3$, $x1 = Nx2KNx3$, $Nx1KNx2 = x3$ и т. п. Таким образом, сама логическая система строится посредством двухзначной логики.

§ 5. Система Рейхенбаха

Существенное место среди работ по многозначной логике занимают работы, в которых многозначные системы строятся с намерением использовать их для преодоления ряда философских и логических трудностей квантовой механики. Это — работы Биркгофа и Неймана [29], Биркгофа [1], Детуш-Феврие [33], Рейхенбаха [59] и других авторов. Некоторые сведения на этот счет имеются в статье Кузнецова [16]. Мы рассмотрим систему Рейхенбаха как наиболее простую, на наш взгляд, и достаточно ясно иллюстрирующую идейную направленность такого рода исследований. Что касается общих философских убеждений Рейхенбаха, то мы отсылаем читателя к многочисленным работам, в которых критикуются философские ошибки зарубежных философов. Здесь мы ограничимся критическими замечаниями, относящимися только к многозначной логике.

Метаязык языка трехзначной логики принадлежит к двухзначной логике, то есть высказывание типа «x имеет значение истинности i» является двухзначным. Таблицы истинности строятся аналогично двухзначным. Определяемые операции рассматриваются как обобщение операций двухзначной логики. Большинство операций, которые вводит Рейхенбах, были введены Постом, за исключением полного отрицания, альтернативной импликации, квазиимпликации, альтернативной эквивалентности. Последние вводятся для целей квантовой механики.

Обозначения функций, используемых Рейхенбахом, в принятой у нас системе записи таковы:

N^1x — циклическое отрицание x;
N^2x — диаметральное отрицание x;
N^3x — полное отрицание x;
Kxy — конъюнкция;
Axy — дизъюнкция;
C^1xy — стандартная импликация;
C^2xy — альтернативная импликация;
C^3xy — квазиимпликация;
R^1xy — стандартная эквивалентность;
R^2xy — альтернативная эквивалентность;

1, 3, 2 — соответственно истинность, ложность и неопределенность.

Эти функции определяются таблицами

x	N^1x	N^2x	N^3x
1	2	3	2
2	3	2	1
3	1	1	1

x	y	Kxy	Axy	C^1xy	C^2xy	C^3xy	R^1xy	R^2xy
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	2	3	2	2	3
1	3	3	1	3	3	3	3	3
2	1	2	1	1	1	2	2	3
2	2	2	2	1	1	2	1	1
2	3	3	2	3	1	2	2	3
3	1	3	1	1	1	2	3	3
3	2	3	2	1	1	2	2	3
3	3	3	3	1	1	2	1	1

Утверждаемыми являются высказывания, имеющие значение 1 при любых значениях аргументов (первичных высказываний). Чтобы высказать, что высказывание имеет значение, отличное от 1, используются отрицания. Так, N^1N^1x означает, что x неопределенно, N^1x — что x ложно, N^2x — что x ложно.

Среди высказываний (формул), построенных посредством введенных операторов, содержатся такие, которые всегда истинны, всегда ложны, всегда неопределенны, истинны или ложны, могут принимать все три значения и т. д. Важно отметить, что высказывания трехзначной логики содержат подкласс высказываний, имеющих двухзначный характер классической логики, то есть при любых значениях аргументов являются либо истинными, либо ложными. По мнению Рейхенбаха, законы квантовой механики помещаются именно в этот класс истинно-ложных высказываний. Ситуация, как видим, довольно оригинальная: законы квантовой механики двухзначны, но рассуждения, включающие их, подчиняются трехзначной логике. Это дало основание Рейхенбаху считать, что логика есть лишь средство усовершенствования языка науки, но не есть отображение некоторых общих свойств той или иной сферы действительности.

В системе Рейхенбаха имеют место следующие тавтологии (законы): R^1xx, $R^1xN^2N^2x$, $R^1xN^1N^1N^1x$, $R^1N^3xN^3N^3N^3x$, $R^1N^3xAN^1xN^1N^1x$ и т. д. Закон исключенного третьего для диаметрального отрицания не сохраняется. Для циклического отрицания имеет силу закон исключенного четвертого $AAxN^1xN^1N^1x$ и $R^1AxN^1N^1xN^3x$. Закон противоречия сохраняется в таких формах: N^3KxN^3x, N^3KxN^1x, N^3KxN^2x. Правила де Моргана сохранются только в форме $N^2Kxy = AN^2xN^2y$ и $N^2Axy = KN^2xN^2y$. Дистрибутивные законы сохраняются, как в двухзначной логике. Правило контрапозиции сохраняется в двух формах: $R^1C^1N^2xyC^1N^2yx$ и $R^1C^2N^3xyC^2N^3yx$. Разложение эквивалентности сохраняется в форме $R^1R^1xyKCxyCyx$ и $R^2R^2xyKKC^2xyC^2yxKC^2N^2xN^2yC^2N^2yN^2x$. Разложение импликации сохраняется в форме: $R^1C^2xyN^1N^2AN^3xy$. Приведение к абсурду сохраняется в форме: $C^1C^1xN^3xN^3x$ и $C^2C^2xN^3xN^3x$. Для высказываний, принимающих значения только истинно (1) и ложно (3), закон исключенного третьего сохраняется для диаметрального отрицания: если x есть такое истинно-ложное высказывание, то AxN^2x есть тавтология.

Два высказывания x и y называются дополняющими, если они удовлетворяют отношению (если в отношении их истинно) $R^2AxN^1xN^1N^1y$. Поскольку AxN^1x истинно тогда, когда x истинно и когда x ложно, то N^1N^1y должно быть истинным. А это имеет место тогда, когда y неопределенно. Таким образом, x и y дополняют друг друга, если в отношении их выполняется следующее: если x истинно или ложно, то y неопределенно. Выводится далее, что если x и y являются дополняющими, то $R^2AyN^1yN^1N^1x$, то есть условие дополнительности симметрично для x и y. Условие это, наконец, может быть сформулировано для трех и более высказываний. Для трех, например, оно имеет вид: $R^2AxN^1xN^1N^1y$ и $R^2AyN^1yN^1N^1z$.

Книга квантовых явлений, по мысли Рейхенбаха, написана на языке трехзначной логики. Говорить об истинности и ложности высказываний правомерно лишь тогда, считает Рейхенбах, когда возможно осуществить их проверку. Если это невозможно, то есть если нельзя ни верифицировать и ни фальсифицировать высказывания, они должны оцениваться третьим значением — неопределенно. К числу таких высказываний относятся высказывания о ненаблюдаемых объектах. И если физик придерживается привычных способов рассуждения, уместных для макроявлений, то при объяснении своих опытов в области микроявлений он приходит к «каузальным аномалиям». Например, к таким: частица производит одновременные воздействия на места, в которых она сама не находится, поле внезапно стягивается в точечный объект и т. п. Выход Рейхенбах видит в зачислении высказываний о ненаблюдаемых объектах (в данном случае о микроявлениях) в класс неопределенных.

Приведем пример использования трехзначной логики. Условие дополнительности используется Рейхенбахом для описания фактов взаимного ограничения точности измерения величин (соотношения неопределенностей Гейзенберга, например): $C^2A[(e^1, t) = u][N^1(e^1, t) = u]\ N^1N^1[(e^2, t) = v]$, что читается так: если верно или неверно, что значение e^1 во время t есть u, то высказывание о том, что значение e^2 во время t есть v, будет неопределенным.

Как видим, у Рейхенбаха многозначная система опирается на вполне определенные философские установки. Относительно этих установок надо заметить следующее. Хотя трехзначную логику Рейхенбаха можно представить как удобное средство рассуждений с двухзначными законами квантовой механики, это вовсе не снимает вопроса о том, чем обусловлено «удобство» этой логики. Очевидно, оно связано со свойствами самой изучаемой действительности и условиями ее познания. Иначе чем же объяснить «неудобство» двухзначной логики в таких случаях?

Из иных философских установок исходит Детуш-Феврие, давая и иное формальное построение. По мысли Детуш-Феврие, логическая теория есть теория бытия, отражающая общие свойства мира. Одна логическая теория может быть истинной для одной части мира и ложной для другой. Классическая двухзначная логика истинна для макромира, но не для микромира. Для последнего вместо двухзначной логики имеет силу трехзначная логика дополнительности. Тогда как по Рейхенбаху логическая теория не претендует на то, чтобы быть истинной общей теорией мира; она лишь используется для устранения логических трудностей, возникающих без ее применения (сравнение систем Рейхенбаха и Детуш-Феврие с формальной точки зрения осуществлено, например, в статье Торнебома [66]).

В концепции Детуш-Феврие подчеркивается, как видим, другая сторона дела — факт отражения логикою некоторых общих свойств действительности. Но эта концепция ставит в затруднительное положение при обсуждении следующих вопросов:

1) многозначная логика используется и в области макроявлений; значит она не есть нечто специфическое для рассуждений только в области микрофизики;

2) при описании ряда фактов использование многозначной логики возможно, не необходимо (не является это абсолютной вневременной необходимостью и в квантовой механике, если учесть, что последующее развитие физики может принести самые неожиданные сюрпризы).

Надо думать, что односторонность и прямолинейность в решении такого рода проблем не может дать положительных результатов по крайней мере на данной стадии их обсуждения.

§ 6. Работы Шестакова

О том, что многозначная логика может быть использована не только для описания языка квантовой механики (или для описания самих явлений микромира), а следовательно,— не является привилегией этой сферы действительности и описывающей ее науки, свидетельствуют, например, работы Шестакова [23, 24, 25], в которых обоснована возможность моделирования многозначных исчислений посредством релейных схем. Так, при моделировании трехзначного исчисления высказываний посредством трехпозиционных коммутаторов, управляемых трехпозиционными реле, трехзначным высказываниям ставятся в соответствие (однозначное) параметры схем, построенных из этих коммутаторов и реле. Правда, здесь процесс сложнее, он опосредствован арифметической интерпретацией исчисления и построением самого исчисления в такой форме, чтобы оно было удобно для целей моделирования. А это дело далеко не тривиальное.

С точки зрения нашей темы работы Шестакова интересны также и в плане решения вопроса о соотношении двухзначной и n-значной логики и вопроса о соотношении различных n-значных исчислений.

Во всех рассмотренных ранее случаях построения многозначных систем само построение осуществлялось посредством двухзначной логики (то есть язык, посредством которого осуществлялось построение n-значных исчислений, сам подчиняется обычной двухзначной логике). Правда, Россер и Тёркетт считают, что двухзначная логика достаточна, но не необходима для построения многозначной [60], — вопрос, требующий специального обсуждения. Однако факт остается фактом: пока во всех известных случаях дело обстоит именно так.

Пусть 1, 2,..., n — истинностные значения. Высказывание «высказывание x имеет значение истинности i» (сокращенно — xi) является двухзначным, то есть высказывание x либо на самом деле имеет значение истинности i, либо не имеет его (имеет какое-то другое значение из числа возможных 1, 2,..., n). Каждое высказывание n-значной логики, далее, принимает только одно из значений 1, 2, ..., n. Эти соображения явно или неявно лежат в основе построения n-значных логик, являются условием построения таблиц, адекватных им равенств значений и т. п. (запись xi означает то же самое, что и запись $x = i$). Учитывая сказанное и то обстоятельство, что высказывания xi суть, вместе с тем, высказывания n-значной логики, Шестаков показал, что любая функция n-значной логики может быть представлена через функции двухзначной логики.

Шестаков строит трехзначное исчисление, взяв в качестве основной функцию Вебба [68, 69] в ее трехзначном варианте. Если рассматривать 1 как ложность, 2 — как бессмысленность или неопределенность, 3 — как истинность, функция Вебба определится таблицей

x \ y	1	2	3
1	2	3	1
2	3	3	1
3	1	1	1

Функция Вебба, являющаяся обобщением двухзначной функции Шеффера, обладает тем свойством, что ее одной достаточно для построения (определения) всех возможных функций n-значной логики (в трехзначном случае — всех функций трехзначной логики). Определив через эту функцию ряд других функций, Шестаков доказал, что исчисление Бочвара полностью содержится в трехзначном исчислении Клини [25]. При этом «Бессмысленно» в смысле Бочвара соответствует «Не определено» в смысле Клини (впрочем, интерпретация третьего значения для доказательства того, что исчисление Клини сильнее, чем исчисление Бочвара, не требуется). Благодаря тому, что в качестве основной принимается функция Вебба (обозначим ее Wxy) и определяются функции F^1x, F^2x, Nx, Axy и Vx (смысл знаков N, A и V см. в § 3) соответственно как $F^1x = Wxx$, $F^2x = WF^1xF^1x$, $Nx = WWF^1xF^2xF^2WxF^2x$, $Axy = F^2Wxy$, $Vx = WF^1xF^2x$, построенное Шестаковым исчисление оказывается функционально полным (в нем могут быть охвачены все возможные функции трехзначного исчисления высказываний). Очевидно, что благодаря определениям $Kxy = NANxNy$, $Cxy = ANxy$ и т. д. и прочие функции системы Бочвара оказываются определенными через функцию Вебба (в конечном итоге).

§ 7. Система Аккермана

Отметим еще один источник идей многозначной логики — системы строгой импликации [28], [49]. Система Аккермана, например, может быть рассмотрена в шестизначной логике следующего вида. Значения истинности обозначаются через 0, 1, 2, 3, 4, 5. Значение 2 означает абсурд. В качестве доказанных формул (тавтологий) принимаются формулы, принимающие любое одно из значений 3, 4 и 5 при любых значениях аргументов. Как видим, здесь вместо одного значения для тавтологий в двухзначной логике принимается несколько. Отрицание определяется так же, как второе отрицание у Поста, т. е. $Nx = 5 - x$ (здесь не прибавляется 1 лишь постольку, поскольку счет значений ведется с 0). Импликация определяется так (мы используем символику Лукасевича):

1) $Cxy = 3$, если $x = y$, если $x = 0$, если $y = 5$, если $x = 1$ и $y = 2$, если $x = 1$ и $y = 4$, если $x = 3$ и $y = 4$;

2) $Cxy = 0$ в остальных случаях. Можно показать, что ряд тавтологий двухзначной логики не будет таковым в системе Аккермана. Например, $CxCyx = 0$, если $x = y = 2$. В самом деле, $C2C22 = C23 = 0$. Не будут тавтологиями также $CxCNxy$, $CKxNxy$ и т. п. К числу тавтологий

будут относиться, например, аксиомы Аккермана. Так, возьмем $CCx2Nx$.

Осуществив подстановки, получим: $CC02N0 = C3N0 = C35 = 3$, $CC12N1 = C3N1 = C34 = 3$ и т. д. для прочих случаев.

Система Аккермана должна по идее устранять так называемые парадоксы импликации: $CxAyNy$, $CxCNxy$ и т. п. И действительно, такого рода формулы не являются в ней тавтологиями. Однако в системе Аккермана не исключаются формулы вида $CKCxyNCxzy$ и т. п. Можно, например, построить такую четырехзначную интерпретацию системы строгой импликации, в которой исключаются (не являются тавтологиями) формулы такого рода: отрицание, конъюнкция и дизъюнкция определяются аналогично соответствующим функциям Лукасевича; импликация определяется матрицей

$x \diagdown y$	0	1	2	3
0	2	2	2	2
1	0	2	2	2
2	0	1	2	2
3	0	0	0	2;

в качестве тавтологии (или доказанной, утверждаемой и т. п. формулы) принимается формула, имеющая значение 2 или 3 при любых значениях аргументов. Таким образом, и здесь число значений, которые принимают тавтологии, более одного. Имеются и другие интерпретации систем строгой импликации (см., например, [60]).

Глава четвертая

Общие вопросы многозначной логики

§ 1. Функциональные построения

Выше мы видели, что возможны самые различные варианты многозначных логических систем. Опираясь на опыт их построения, можно сформулировать некоторые общие принципы их построения, как это сделано, например, в работах [60] и [65]. Надо сказать, что эти общие принципы могут быть изложены в самой различной терминологии, что не меняет сути дела и, разумеется, более строго и детально, чем это будет сделано ниже.

Обратимся прежде всего к истинностным (матричным, функциональным) построениям, многозначный характер которых выступает с самого начала с полной очевидностью. Кроме того, это естественно как с исторической точки зрения (многозначные исчисления зародились в функциональной форме), так и с логической.

Правда, в истории современной логики аксиоматические построения древнее функциональных: матричный метод был предложен Пирсом лишь в 1885 г., тогда как Фреге уже в 1879 г. опубликовал первую аксиоматику исчисления высказываний. Но тогда любые логические построения базировались на убеждении в двухзначном характере высказываний, и взаимоотношение рассматриваемых типов построений не превращалось в философский вопрос принципиальной важности.

Функциональные построения базируются на следующих основаниях (по крайней мере на этих). Любая конечная последовательность символов из некоторого заданного конечного или бесконечного счетного множества символов определяется как формула, а из множества формул выбирается некоторое непустое подмножество формул в качестве высказываний (или формул) данной строящейся логики. Например, в качестве высказываний данной логики могут быть выбраны следующие:

1) x, y, z,... (малые латинские буквы) с индексами или без них суть высказывания;

2) если x есть высказывание, то Nx и Tx суть высказывания;

3) если x и y суть высказывания, то Cxy есть высказывание;

4) остальные высказывания определяются путем определения их через эти.

Положительные целые числа 1,..., n, где n — целое число и $n \geqslant 2$, называются значениями истинности. Если в качестве значений истинности берутся числа от 0 до $n-1$, от 0 до 1 или другие пронумерованные знаки (t^0, t^1,...), то не представляет труда свести их к 1,..., n, пересчитав их (поставив им в соответствие) посредством 1,..., n.

Предполагается, что высказывания принимают значения из множества 1,..., n. Рассматривается (берется, задается) некоторое конечное (обычно — небольшое) число функций высказываний $F^i(x^1,\ldots,x^k)$, где $k \geqslant 1$. Различение функций высказываний и функций истинности, имеющее место в работе Россера и Тёркетта, для нас здесь не существенно. Эти функции высказываний суть сложные высказывания, значения истинности которых определяются в зависимости от значений истинности входящих в них высказываний (аргументов). Определение осуществляется посредством матриц или равенств значений истинности. Так, $F^1(x, y)$, $F^2(x)$ и $F^3(x)$ (соответственно Cxy, Nx и Tx) определяются равенствами: $F^1(x, y) = max\,(1, y - x + 1)$, $F^2(x) = n - x + 1$, $F^3(x) = 2$. Эти функции принимаются в качестве основных в работе [60], а также в работе [61] для трехзначной логики. В последней Cxy и Nx определяются, как у Лукасевича, а Tx определяется равенством $Tx = {}^1/_2$, поскольку в качестве значений истинности берутся 0, ${}^1/_2$ и 1. Функция Tx носит название функции Слупецкого.

В качестве построимых функций принимаются основные (заданные) F^i и функции, образующиеся путем их комбинирования и подстановок. В примере построимыми будут F^1, F^2 и F^3, а также функции типа $NCxTy$ $(F^2F^1xF^3y)$, $NCCxyNz$ и т. п.

Проблема непротиворечивости при функциональных построениях не представляется принципиально важной в том смысле, что непротиворечивость устанавливается самими способами построения: если высказыванию приписывается некоторое значение истинности, то одновременно оно не отвергается за ним. Это значит, что исключены по условиям построения случаи, когда $x = i = k$, где $i \neq k$, или когда в одной и той же клетке матрицы фигурируют i и k (что можно прочитать как «x имеет значение i и, в то же самое время, k, т. е. не i»). Но зато это обстоятельство важно в другом плане: непротиворечивость функциональных построений обеспечивается тем, что высказывания типа $x = i$ являются двухзначными и исключаются высказывания типа «x имеет и, вместе с тем, не имеет значения истинности i» (более общее выражение высказывания, приведенного выше). Точно так же не представляет принципиальной важности проблема независимости основных функций: если каким-либо путем выясняется, что одни из основных функций могут быть определены через другие, это может привести лишь к сокращению числа основных. Так, Axy и Kxy могут быть определены через Cxy и Nx. Но сведение одних функций к другим важно для выбора простейших аксиоматик, соответствующих данным функциональным построениям. Так, в аксиоматиках Вайсберга — Слупецкого и Россера — Тёркетта не используются символы A и K, поскольку они определены через C и N.

Число возможных функций в n-значных построениях огромно: для m аргументов при n значениях число возможных функций равно n^{n^m}. Потому проблема функциональной полноты исчисления (то есть содержит или нет совокупность построимых функций все возможные функции истинности) приобретает особый интерес. Выше мы уже сталкивались с несколькими случаями функционально полных многозначных исчислений высказываний: исчисление Поста, Вебба, Клини — Бочвара в построении Шестакова. Приведем еще несколько примеров того, что огромное число возможных функций не есть помеха к построению исчислений. При этом, конечно, следует иметь в виду, что вопросы о полноте и об удобстве исчисления для каких-либо целей суть вопросы принципиально различного порядка. Так, в исчислении Вебба достаточно одной функции в качестве основной, но это исчисление оказывается слишком громоздким.

Слупецкий показал, что система Лукасевича, в которой в качестве основных используются функции Nx и Cxy, не является функционально полной. В частности, с помощью только операторов C и N нельзя определить функцию Tx, для которой $Tx = {}^1/_2$ при любых значениях x. В n-значной логике (значения истинности $1, 2, \ldots, n$) эта функция, определяемая как $Tx = 2$, точно так же не сводится к N и C. Заметим кстати, что эта функция не имеет аналога в двухзначной логике. Поскольку она не единственная (возможны, например, $T^1x = 2$, $T^2x = 3, \ldots$, $T^{n-2}x = n - 1$ и т. п.), можно говорить о классе функций, не имеющих аналогов в двухзначной логике. И в этом смысле многозначные системы не могут быть сведены к двухзначным или только к обобщению последних, но выступают и как нечто существующее наряду с ними. Интерпретация операторов двухзначной логики, с другой стороны, как операторов n-значной логики не всегда дает полное n-значное исчисление.

Слупецкий далее показал, что логическая система, основанная на функциях Nx, Cxy и Tx, является функционально полной. Слупецкий сделал это для трехзначной логики. В работе Россера и Тёркетта доказано, что логическая система с основными функциями F^1x, F^2xy и F^3x (соответствуют Nx, Cxy и Tx), определенными так: если $1, 2, \ldots, n$ суть значения истинности, то $F^1x = n - x + 1$, $F^2xy = max(1, \ y - x + 1)$, $F^3x = 2$, является функционально полной. Системы аксиом, соответствующие этим функциональным построениям, приведем ниже.

Из числа $1, 2, \ldots, n$ выбирается далее s, такое, что $1 \leqslant s < n$. Значения истинности $1, \ldots, s$ называются отмеченными, а значения $s + 1, \ldots, n$ — неотмеченными. Высказывание, имеющее отмеченное значение истинности, называется утверждаемым, а имеющее неотмеченное — отрицаемым. Опять-таки выбор здесь относителен («логические координаты» относительны). Как видим, здесь имеет место аналогия с двухзначной логикой, а именно — с истинностью и ложностью, а также с утверждением и отрицанием.

Только здесь возможны случаи, когда высказывание будет утверждаемым или отрицаемым при двух и более значениях (см., например, у Аккермана). Частный случай — когда $n = 2$ и $s = 1$. Выбор s не влияет на внутреннюю структуру функционального исчисления. Он лишь определяет класс утверждаемых и отрицаемых высказываний, что особенно важно для аксиоматических построений. Хотя число отмеченных (и неотмеченных) значений истинности может быть больше одного, т. е. внутри класса утверждаемых (и отрицаемых) высказываний возможно дальнейшее деление, принцип двухзначной логики здесь полностью сохраняет значение в смысле: высказывание либо утверждаемо, либо отрицаемо (высказывание не может одновременно утверждаться и отрицаться). Выбор n, F^i и s определяет характер исчисления.

§ 2. К проблеме полноты функциональных построений (работы Яблонского)

Основная задача функциональных построений — свести исследование сложных функций к элементарным и отыскать критерии полноты исчислений, основанных на этих элементарных функциях. С этой точки зрения помимо работ Слупецкого и Россера и Тёркетта несомненный интерес представляют работы Яблонского, в особенности [26], и Кузнецова (ссылки на которого имеются в [26]). Охарактеризовать эти работы ввиду их узко специального характера здесь не представляется возможным. Ограничимся лишь кратким замечанием.

В работе [26] рассматривается множество (допустим, V) всех функций $F(x^1,\ldots x^n)$ от n аргументов таких, что аргументы и функции принимают значения из множества значений $0, 1, \ldots, k-1$. Рассматриваются далее функции, построенные из системы функций $F^1,\ldots, F^s$ (допустим, из системы V^*), взятых из числа функций V. Суперпозицией функций системы V^* называется функция, получающаяся в результате замены переменных (причем, на место переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ могут быть поставлены, в свою очередь, функции этой системы). Множество (допустим, W) функций из числа V называется функционально замкнутым, если вместе с функциями $F^1, \ldots, F^s$ этому множеству принадлежит и любая их суперпозиция.

Система функций из множества W называется полной в W, если каждая функция из W является суперпозицией функций этой системы.

Приведенные определения в иной форме и в иной терминологии выражают то, о чем говорилось в предшествующем параграфе: из множества возможных функций выбирается некоторое число в качестве основных, указывается путь образования новых функций (замена переменных) и в качестве полной принимается система, множество построимых функций в которой совпадает со множеством всех возможных функций (для n аргументов при k значениях).

Работа [26] является, пожалуй, наиболее обстоятельной работой по рассматриваемой проблеме. В ней развита система теорем, касающихся функциональной полноты, и дано исчерпывающее решение этой проблемы для случая трехзначной логики. В частности, доказывается, что функционально полной является следующая система функций:

1) $Fx^1 = 0$; $Fx^2 = 1$; ..., $Fx^k = k - 1$; $Q^1(x,y) = \max(x,y)$, $Q^2(x,y) = \min(x,y)$; $J^i x = k - 1$ при $x = i$ и $J^i x = 0$ при $x \neq i$. Точно так же полными являются следующие системы:

2) $F^1 = (x,y) = \max(x,y), F^2(x) = x + 1 \pmod{k}$;

3) $F(x,y) = [\max(x, y) + 1] \pmod{k}$, где функция F есть функция Вебба, являющаяся аналогом функции Шеффера.

§ 3. Отрицание в многозначной логике

Изложим некоторые общие соображения относительно отрицания в многозначных построениях. Если в качестве отрицания x брать всякую одноаргументовую функцию Fx, такую, что по крайней мере для одного значения истинности $Fx \neq x$, то возможно $(n^n - 1)$ отрицаний для n значений. Тогда в двухзначной логике возможно не одно, а три отрицания.

1) $N^1 x = 3 - x$

2) $N^2 x = 2$

3) $N^3 x = 1$.

Выше мы видели разнообразные типы отрицаний, примененных в различных логических системах.

Обзор всевозможных отрицаний, понимаемых таким образом, есть часть вопроса о полноте исчисления: если исчисление функционально полно, то охватываются и все одноаргументовые функции. Известны случаи, когда этот охват осуществляется с помощью исключительно одноаргументовых функций. Например, все функции одного переменного могут быть определены через три следующие (если $n = 0,1,\ldots,\ k-1$):

1) $F^1x = (x-1)(\mathrm{mod}\ k)$

2) $F^2x = x$, если $0 \leqslant x \leqslant k-3$; $F^2x = k-1$, если $x = k-2$; $F^2x = k-2$, если $x = k-1$;

3) $F^3x = 1$, если $x = 0$; $F^3x = x$, если $x \neq 0$ (предполагается, что $k \geqslant 3$) [26].

Но к отрицанию x предъявляется не только то требование, что оно есть одноаргументовая функция x, но еще ряд дополнительных требований. Рассмотрим их сначала для двухзначной логики. В последней N^2x и N^3x суть соответственно всегда ложное и всегда истинное высказывания. В конечном счете $N^2x = N^1AxN^1x = N^1N^1KxN^1x$, $N^3x = N^1KxN^1x = N^1N^1AxN^1x$. Поэтому в качестве отрицания принимается только N^1 (будем писать просто N). Оно выполняет следующие функции, которые в силу двухзначности логики выступают слитно:

1) в формулировках законов $Kxy = NANxNy$, $NNx = x$, $Cxy = CNyNx$ и т. п., то есть для выражения одних функций через другие (x можно рассматривать как некоторую тождественную функцию);

2) для выражения того, что Nx утверждается тогда и только тогда, когда x имеет значение «ложно» (в общем, значение, соответствующее ложности);

3) N превращает утверждаемое высказывание в неутверждаемое (отрицаемое).

В n-значной логике эти функции дифференцируются. Оставив за N ту роль, которая указана в пункте 1, его можно определить, в частности, как $Nx = n - x + 1$. В таком виде N позволяет дать обобщения двухзначных принципов (операторов C и N достаточно для обобщения всех функций двухзначной логики). Для описаиия второй функции должен быть введен новый оператор, допустим — J_x^k, где $1 \leqslant k \leqslant n$, такой: J_x^k утверждается тогда и только тогда, когда x имеет значение k. Таким образом имеется несколько функций $J_x^{s+1}, J_x^{s+2}, \ldots, J_x^n$, играющих указанную роль в n-значной логике. Причина этого ясна: в n-значной логике возможно не одно, а несколько неотмеченных значений. Например, если $n = 3$ и $s = 1$, то J_x^2 будет утверждаться тогда, когда $x = 2$. Очевидно, что $J_x^1, \ldots, J_x^s$ играют роль, какую в двухзначной логике играет тождественная функция x: J_x^1 утверждается тогда, когда $x = 1$, т. е. когда x утверждается, и т. д. Таким образом, $J_x^1 A J_x^2 A \ldots A J_x^n$ или в другой записи $AA \ldots AJ_x^1 J_x^2 \ldots J_x^n$, где A записано $n - 1$ раз, есть обобщение двухзначного $AxNx$.

Для роли отрицания, указанной в третьем пункте, должен быть введен новый оператор, допустим — Lx, определенный так (у Россера и Тёркетта — черточка над x): $Lx = J_x^{s+1} A J_x^{s+2} A \ldots A J_x^n$ или в другой форме $Lx = AA \ldots A J_x^{s+1} J_x^{s+2} \ldots J_x^n$, где A записано $n - s + 1$ раз. Словами: x отрицаемо, если утверждаемо либо J_x^{s+1}, либо $J_x^{s+2}, \ldots$, либо J_x^n.

Высказывание $AxLx$ будет, очевидно, всегда утверждаемым, как и в двухзначной логике (оно выражает двухзначный принцип «x либо отрицаемо, либо утверждаемо»). Определив с использованием L импликацию $C^{**}xy$ равенством $C^{**}xy = ALxy$, получим функцию, для которой будет иметь силу *modus ponens* в общем виде: если $C^{**}xy$ и x оба утверждаемы, то утверждаемо и y. Оператор C Лукасевича—Тарского в общем случае этому требованию не удовлетворяет. Пусть, например, $n > 2$ и $s > 1$. Тогда при $x = s$ и $y = s + 1$ получим, что $Cxy = \max(1, y - x + 1) = \max(1, s + 1 - s + 1) = 2$, то есть Cxy и x будут утверждаемыми, но y будет неутверждаемым.

Хотя рассмотренные функции отрицания дифференцируются, связь их можно установить по крайней мере в отдельных случаях. Так, отрицание N, определенное равенством $Nx = n - x + 1$, выполняет в некоторых случаях и функции J. Так, при $n = 4$ и $s = 2$ будет иметь место следующее соотношение: если x утверждаемо (отрицаемо), то Nx неутверждаемо (утверждаемо). В общем виде, если выполняются условия:

1) $n - x + 1 > s$ и $x \leqslant s$

2) $n - x + 1 \leqslant s$ и $x > s$, то N выполняет и функции

J. Возможны и другие типы отрицаний, отличные от N, где связь примет другие формы и более общий характер.

§ 4. Аксиоматические построения

Функциональные исчисления строить сравнительно легко, раз доказана их возможность для n значений истинности. Однако аксиоматические построения имеют то преимущество, что они дают метод систематического обзора утверждаемых (приемлемых, доказуемых и т. п.) высказываний (или формул). Отсюда естественно стремление к аксиоматизации первых.

Фактическое положение в многозначной логике таково, что аксиоматические построения в той или иной форме базируются на функциональных, раз они берутся как исчисления высказываний, а не просто наборы данных знаков и правил образования новых знаков. Это выражается в следующем:

1) выбор аксиом осуществляется из числа утверждаемых высказываний функционального построения; выбираются также правила вывода новых утверждаемых высказываний, что опять-таки предполагает функциональное построение; аксиомы утверждаются в некоторых матрицах или адекватных им формах; обоснование аксиоматики может производиться путем матричной интерпретации или вообще интерпретации, адекватной некоторому матричному построению, и т. д.;

2) сами свойства аксиоматических систем рассматриваются в отношении к функциональным построениям, как относительные.

Примеры для первого пункта уже приводились выше. Приведем еще два, на которые придется еще сослаться в дальнейшем. Слепецкий сформулировал [64] следующую систему аксиом для трехзначной логики:

1. $CxCyx$
2. $CCxyCCyzCxz$
3. $CCCxNxxx$
4. $CCNyNxCxy$
5. $CTxNTx$
6. $CNTxTx$.

Как видим, эта аксиоматика отличается от аксиоматики Вайсберга тем, что последняя здесь дополнена двумя аксиомами 5 и 6, содержащими оператор T. Все операторы, фигурирующие в аксиомах, должны быть естественно определены. И раз мы имеем дело с аксиоматикой исчисления высказываний, эти определения будут иметь функциональный характер: Cxy, Nx и Tx должны рассматриваться при этом как функции x (Слупецкий определяет именно так). Кроме того, при доказательстве непротиворечивости и независимости, например, аксиоматики Слупецкий дает табличные построения. Аналогично в системе Россера и Тёркетта предварительно предполагается определение некоторых функций высказываний в терминах основных функций (в частности, в терминах F^1 и F^2). Аксиоматику (вернее, систему схем аксиом) Россера и Тёркетта мы здесь не приводим потому, что это потребовало бы довольно пространных разъяснений.

Как уже говорилось, система Слупецкого из трех основных функций C, N и T достаточна для определения всех функций трехзначной логики высказываний с конечным числом аргументов. Приведенная же система аксиом Слупецкого—Вайсберга является полной в следующем смысле: каждое высказывание, сформулированное посредством операторов C, N и T и знаков переменных высказываний является либо следствием аксиом, либо, будучи присоединено к аксиомам, ведет к противоречиям (мы не касаемся здесь различных пониманий полноты — равносильность всех интерпретаций системы, выводимость всех тавтологий и т. д.,— поскольку это выходит за рамки темы).

В качестве иллюстрации ко второму пункту приведем несколько определений (это — только иллюстрация, а не изложение всевозможных определений свойств формальных построений; в частности, имеются различные определения полноты, непротиворечивости и т. д., тогда как мы ограничиваемся одними из возможных определений). Одно построение так же сильно, как другое, если все утверждаемые высказывания второго суть утверждаемые высказывания первого. Если аксиоматическое построение так же сильно, как некоторое истинностное построение, то оно дедуктивно полно относительно последнего. Если истинностное построение так же сильно, как некоторое аксиоматическое, то последнее допустимо относительно первого. Если аксиоматическое построение дедуктивно полно и допустимо относительно истинностного, они эквивалентны, то есть определяют одно и то же множество утверждаемых высказываний. Как мы видели, строятся аксиоматические построения, не имеющие эквивалентных истинностных (интуиционистская логика, система строгой импликации), и имеющие эквивалентные истинностные построения (аксиоматическое построение Россера и Тёркетта, например). Для каждого истинностного построения существует хотя бы одно эквивалентное аксиоматическое [60], но не наоборот.

Факт отнесенности аксиоматических построений к истинностным не случаен. В двузначной логике этот факт остается скрытым или, наоборот, представляется чем-то несущественным и очевидным в силу того, что двузначный характер исчисления молчаливо предполагается как нечто само собой разумеющееся. Впрочем, и здесь при определении знаков функций, утверждаемых формул и т. п. и при доказательстве непротиворечивости, независимости, полноты (или неполноты) и т. д. системы аксиом прибегают к интерпретациям, адекватным истинностным построениям. Кроме того, с точки зрения отношения аксиоматических и истинностных построений в двузначной логике имеется одно единственное истинностное построение (варианты в этом плане несущественны [60]), что опять-таки создает видимость абсолютной независимости этих построений. В многозначной логике хотя бы уже в силу множественности истинностных построений эта иллюзия абсолютности рушится. Кроме того, имеется еще ряд соображений в пользу рассматриваемого тезиса.

В аксиоматических построениях многозначный характер исчисления непосредственно не заметен. Например, об аксиоматике Тарского—Бернайса еще нельзя сказать, двузначна она или нет; в работе Расёвой она оказалась четырехзначной. Более того, раз высказывания разделяются на утверждаемые и отрицаемые (приемлемые и неприемлемые, доказуемые и недоказуемые), то эти построения все без исключения вообще представляются двузначными. В случае, когда в данном исчислении относительно некоторого высказывания нельзя доказать, является оно утверждаемым или отрицаемым (высказывание неразрешимо относительного данного построения), это просто оценивается как характеристика исчисления, не предполагающая факта многозначности самих высказываний.

Это обстоятельство создает видимость, что многозначная логика возможна только на функциональной, но не аксиоматической основе. Однако это не аргумент против многозначной логики. Тот факт, что в числе аксиом некоторого исчисления (интуиционистская логика) не фигурирует закон исключенного третьего, говорит о нем как о неклассическом исчислении; аналогично — наличие в аксиомах операторов, не имеющих аналогов в двухзначной логике (оператор T Слупецкого, например). Кроме того, если учесть, что аксиоматические построения рассматриваются относительно некоторых истинностных, то отрицание многозначных аксиоматических построений отпадет само собой. Наконец, наличие в самой системе аксиом указания на возможность трех и более значений истинности отвергает критикуемую точку зрения. Так, в аксиоме $\Gamma_1^n\{C[J^i(x)]y\}y$ аксиоматики Россера –Тёркетта указана возможность того, что $n>2$ (Γ — цепной символ, смысл которого поясним примером: $\Gamma_3^4x^3y = Cx^4Cx^3y$).

Убеждение, что аксиоматическое построение многозначной логики невозможно (см., например, [35]), базируется на смешении строящейся логики и средств ее построения (метаязыка данной логики), то есть того факта, что для построения n-значной логики достаточно двухзначной, и того факта, что строящаяся логика n-значна (в ней допускается n значений истинности). Ведь и аксиоматика обычной двухзначной логики может быть истолкована как аксиоматика n-значной логики (см., например, доказательство независимости системы аксиом в [57]).

Таким образом, возможность истолковать как двухзначные те аксиоматики, которые по идее должны быть многозначными, и как многозначные те аксиоматики, которые считаются двухзначными, достаточно убедительно говорит в пользу того, что имеется существенная связь рассмотренных типов построений.

Надо, однако, сказать, что только что отмеченная возможность не является безграничной. Аксиоматика двухзначной логики, основанная, например, на операторах C и N, не будет дедуктивно полной, если ее интерпретировать как аксиоматику трех и более значной логики (то есть не все интерпретации этой аксиоматики будут равносильными). Так что здесь имеются относительные критерии различения. Установить какой-то один абсолютный критерий, который позволил бы по виду аксиоматики, взятой изолированно (взятой вне контекста, без соответствующих определений и обоснования), сказать: двухзначна она или многозначна, судя по всему нельзя. Да, поиски такого критерия вообще лишены смысла, поскольку аксиоматическое построение есть лишь удобное средство осуществить обзор утверждаемых (принимаемых, доказуемых) высказываний (формул, выражений) в заданных условиях. Единственное, что можно сказать относительно такого «абсолютного» критерия, это следующее: мы имеем дело с двухзначной (многозначной) логикой тогда, когда высказываниям приписывается два (более двух) истинностных значений; или в более общей форме — когда аргументы и функции принимают два (три и более) значения из заданного множества значений; перейдя в более общий онтологический план — когда предметы могут иметь одно из двух (трех и более) точно учитываемых свойств (возможность такого обобщения рассмотрим в V главе).

§ 5. О проблеме выводимости в конструктивистском исчислении высказываний

Как отмечалось в предшествующем параграфе, основная задача аксиоматических построений — определить класс выводимых (доказуемых, утверждаемых) высказываний (или формул, в зависимости от употребляемой терминологии), указать методы отличения выводимых формул от невыводимых. Остановимся кратко на решении этой проблемы в конструктивистском исчислении высказываний (это даст некоторое представление о конструктивистской логике как неклассической логике) [4], [6], [20]. Обозначим это исчисление через II (система аксиом и правило вывода приведены во второй главе).

Выводом в II называется последовательность формул (формула — знаки переменных высказываний и выражения вида Cxy, Kxy, Axy и Nx, где x и y суть формулы) x^1, ..., x^k, в которой каждая из x^i ($i = 1$, ..., k) есть либо одна из аксиом, либо формула, полученная по схеме

$$\frac{x^{i1} \quad x^{i2}}{x^{i}},$$

где $i1<i$, $i2<i$ и $x^{i2}=Cx^{i1}x^{i}$. Формула выводима в П, если существует такой вывод в П, последней формулой которого она является.

Проблема выводимости заключается в решении задачи о возможности обнаружения всех выводимых формул. Решение ее предполагается как указание алгорифма, некоторого единообразного способа различения выводимых и невыводимых формул. Построено несколько алгорифмов такого рода, в частности — Воробьевым [4, 5, 6] и Пильчак [20] (о положительном решении проблемы говорил еще Жегалкин [9]). Это обстоятельство важно с той точки зрения, что относительно формул конструктивистского исчисления высказываний имеет силу закон исключенного третьего в следующем смысле: всякая формула является либо выводимой, либо не выводимой в П. Но это — не априорная логическая предпосылка, а результат конкретного решения проблемы, как и вообще в отношении любых логических исчислений: разрешима проблема разрешимости для некоторого исчисления или нет, ответ на этот вопрос не зависит от одного того факта, что данное исчисление является классическим или неклассическим.

§ 6. Многозначная и двухзначная логика

Мы рассмотрели разнообразные формы отношения двухзначной и многозначной логики. И этого, надо думать, вполне достаточно для того, чтобы воздержаться от какой-либо односторонней точки зрения в данном вопросе. Приведем еще пример многозначной логики, вообще не имеющей аналогов в двухзначной и не являющейся обобщением двухзначной. Пусть 1, 2, 3 и 4 суть истинностные значения. Введем следующие функции:

1) $F^1xy=2$, если $x+y$ есть нечетное число и $F^1xy=3$, если $x+y$ есть четное число;

2) $F^2xy=1$, если $x+y$ есть нечетное число и $F^2xy=4$, если $x+y$ есть четное число;

3) $F^3x=5-x$.

Такая система абстрактно мыслима для каких-либо целей. Однако определить в этой системе функции Cxy, Kxy и Axy невозможно, так как в определении последних в таблице их должны фигурировать все значения истинности. А оперируя функциями F^1, F^2 и F^3, мы может определить лишь узкий класс функций, в столбце значений которых будут фигурировать либо все одинаковые значения, либо два чередующиеся значения.

Сошлемся еще раз на случаи многозначной интерпретации двухзначной логики при обосновании систем аксиом. Например, независимость системы аксиом Тарского—Бернайса:

1. $CCxyCCyzCxz$
2. $CyCxCxy$
3. $CCCxyCCxyxx$

может быть доказана так (см. [57]):

1) для доказательства независимости первой аксиомы от остальных строим матрицу

C	0	1	2
0	1	1	2
1	0	1	2
2	0	2	1,

вторая и третья аксиомы удовлетворяют ей (принимают всегда значение 1), а первая — нет, так как в случае $x=0$, $y=2$ и $z=0$ аксиома 1 принимает значение 2;

2) для доказательства независимости второй аксиомы от остальных строим матрицу

C	0	1	2	3
0	1	1	2	2
1	0	1	2	2
2	0	1	1	1
3	0	0	0	1,

аксиомы первая и третья удовлетворяют ей, а аксиома вторая при $x=1$ и $y=3$ принимает значение 0;

3) независимость третьей аксиомы проверяется матрицей

C	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	0	1	1,

которой удовлетворяют первая и вторая аксиомы, а третья в случае $x = 2$ и $y = 0$ принимает значение 2.

Но независимо от рассмотренных отношений встают следующие два общие вопроса:

1) Возможно ли построение n-значных исчислений, в которых в качестве законов принимались бы или выводились отрицания законов двухзначной логики, и прежде всего — законов исключенного третьего и противоречия?

2) Является ли двухзначная логика необходимой, а не только достаточной для построения n-значной?

Ответ на эти вопросы с необходимостью будет связан с ответом на вопрос: в каком смысле законы двухзначной логики сохраняются в n-значных и при построении их и в каком смысле не сохраняются?

На первый вопрос ответ может быть дан в рамках самой логики. Если n-значная логика строится как обобщение двухзначной (так, чтобы при $n = 2$ мы получили двухзначную), то само собой разумеется, что отрицания указанных законов будут иметь значения, соответствующие ложности, если x имеет значение, соответствующее истинности. Однако независимо от этих соображений отрицания этих законов не будут законами n-значной логики.

Определим операторы A и K, посредством которых формулируются рассматриваемые законы, так:

1) Axy утверждаемо, когда по крайней мере одно из x и y утверждаемо, и неутверждаемо, когда x и y оба неутверждаемы;

2) Kxy утверждаемо тогда и только тогда, когда утверждаемы оба x и y.

Возьмем $NAxNx$, где Na есть любая одноаргументная функция от a. По идее это высказывание должно быть утверждаемым при любых значениях x. При таком предположении возможны два случая:

1) N превращает a из неутверждаемого в утверждаемое;

2) N оставляет a утверждаемым.

В первом случае очевидно, что $AxNx$ должно быть неутверждаемым. А это означает, что оба x и Nx неутверждаемы. Тогда $Na = l$, где $s \leqslant l \leqslant n$, то есть Na имеет всегда неотмеченное значение (всегда неутверждаемо). Значит N не превращает a в утверждаемое, что противоречит условию. Также получим противоречие по другой линии: $NAxNx = l$, то есть будет неутверждаемым в силу свойств N, что противоречит условию. Во втором случае утверждаемым должно быть и $AxNx$, а значит $Na = k$, где $1 \leqslant k \leqslant s$. Но здесь отрицание не выполняет функций, аналогичных двухзначному. Здесь N не есть отрицание в собственном смысле слова. Аналогичное рассуждение можно построить для второго закона.

Сказанным можно ограничиться. Если вспомнить еще то, что к многозначным построениям предъявляется требование непротиворечивости (а последнее определяется, в частности, как недопустимость совместного отрицания x и Fx), то картина станет достаточно полной. Содержательно рассуждая, признание в качестве утверждаемых отрицаний рассматриваемых законов равносильно допущению того, что в логике допускается одновременное утверждение x и его отрицания.

В работе [60], например, непротиворечивость построения определяется так: построение F — непротиворечиво, если нет такого x, чтобы x и Fx были вместе отрицаемы, где Fx есть некоторая функция высказываний, построенная из основных F_i; построение непротиворечиво, если существует высказывание, отрицаемое согласно данному построению. Эти определения суть обобщения соответствующих двухзначных. Если же допустить отрицания рассматриваемых законов двухзначной логики, то в таком построении не будет отрицаемых высказываний и, вместе с тем, будут отрицаться x и Fx одновременно, что приведет к невероятной путанице и к невозможности дать интерпретацию исчисления на какую бы то ни было предметную область.

Таким образом, относительный характер законов логики не следует понимать вульгарно, т. е. как возможность их отрицания в каких-то случаях.

§ 7. Многозначная и двухзначная логика (продолжение)

Второй из вопросов, поставленных в предшествующем параграфе, выводит нас за рамки внутренних проблем логики.

В каких бы терминах мы ни строили n-значные логические системы (в математических, в логических традиционных или в онтологических терминах), для построения их требуется обычный язык и достаточна двухзначная логика. Что касается обычного языка, то роль его очевидна. О том, что двухзначная логика достаточна, об этом говорят факты, опыт построения n-значных систем. Но здесь есть одно «но», которое мы разъясним прежде всего.

Говоря о достаточности двухзначной логики для построения n-значной, мы имеем в виду, во-первых, то, что любая функция n-значной логики может быть описана посредством высказываний, имеющих двухзначный характер (см. также [60], [23]). Возьмем, например, функцию Fxy, задаваемую таблицей

$x \diagdown y$	1	2	3
1	2	1	2
2	1	1	3
3	3	3	3

Сама эта запись означает, что если высказывание имеет значение i, то неверно, что оно этого значения не имеет (вписав в клетку i, мы его не вычеркиваем тут же, а фиксируем). Вместо таблицы мы можем эту функцию описать равенствами:

1) $Fxy = 1$, если либо $x = 1$ и $y = 2$, либо $x = 2$ и $y = 1$, либо $x = 2$ и $y = 2$;

2) $Fxy = 2$, если либо $x = 1$ и $y = 1$, либо $x = 1$ и $y = 3$;

3) $Fxy = 3$ в остальных случаях.

При этом все высказывания типа $a = i$ являются двухзначными: либо действительно так, либо a равно другому значению истинности, отличному от i. Наконец, записывая знаком ai тот факт, что высказывание a имеет значение i, мы можем эту функцию записать в форме (для наглядности мы знаки функций ставим между высказываниями): $\{[(x1Ky2)\ B(x2Ky1)B(x2Ky2)]C(Fxy)1\}K\{[(x1Ky1)B$ $(x1Ky3)]\ C(Fxy)2\}K\{\ [(x2Ky3)B(x3Ky1)B\ (x3Ky2)\ B(x3Ky3)]$ $C(Fxy)3\}$, где K, B и C суть знаки соответственно двухзначных конъюнкций, строгой дизъюнкции и импликации. Поскольку «$x1$ истинно $= x1$», «$x1$ ложно $= x2Bx3$», «$Nx1 = x1$ ложно», $Nx2KNx3 = x1$, и т. д., то перебирая всевозможные комбинации значений истинности x и y и используя правила:

1) если Kab истинно, то истинно a (и b);

2) если Cab и a истинны, то b истинно, мы можем восстановить таблицу (строгая дизъюнкция, напоминаем, истинна в том и только в том случае, если истинен только один ее член). Например, пусть $x = 1$ и $y = 1$; из приведенной полной записи функции следует $[(x1Ky1)B(x1Ky3)]$ $C(Fxy)2$; поскольку при $y1$ будет ложным $y3$, будет ложным и $x1Ky3$; $x1Ky1$ будет истинным, значит истинна дизъюнкция, значит истинно $Fxy = 2$. Несколько иной вид имеет сказанное здесь в [23] и [60] (в последней метод «частичных нормальных форм» оперирует не исключающей дизъюнкцией B, а дизъюнкцией A).

И более сложные случаи, когда в одной клетке таблицы допускается возможность различных значений, не меняют сути дела. Например, возможна функция, при описании которой будут встречаться выражения вроде $[(x1Ky2)$ $B(x2Ky1)]C[(Fxy)1B(Fxy)2]$ или, в другой форме, $Fxy = 1$ либо 2, если либо $x = 1$ и $y = 2$, либо $x = 2$ и $y = 1$.

Абстрактно рассуждая, нетрудно сказать, что можно построить n-значное исчисление, оперируя языком, подчиняющимся m-значной логике, где $m>2$. Но поскольку оперирование m-значной логикой не есть дело привычное, она должна быть предварительно построена. Решение же этой последней задачи опять-таки должно осуществляться с помощью какой-то логики и т. д., пока наконец мы не откажемся от безнадежной попытки завершить бесконечное и не положимся на здравый смысл, на навыки мышления, приобретенные вместе с опытом жизни, познанием вещей, образованием и т. д. Кроме того, возникает законный вопрос: в какого типа m-значной логике строить n-значную?

Построение n-значной логики есть решение содержательной задачи. Как и во всяком научном исследовании, здесь вводятся определения и принимаются утверждения, на базе которых развивается система утверждений. Последние принимаются в качестве истинных, поскольку они доказываются. Если допускается ошибка, то соответствующие суждения оцениваются как неверные. При этом выясняется и суть ошибки, раз доказывается некоторое верное суждение. Бессмысленные выражения отбрасываются с самого начала самими определениями. Например, последовательность символов xyK отбрасывается, поскольку по определению высказывания (или формулы) она в число высказываний не включается. Если мы имеем такое n-значное построение, в котором обнаруживается класс высказываний следующего рода: в исчислении нельзя доказать ни того, что эти высказывания утверждаемые, ни того, что они отрицаемые, то не возникает потребности в дополнительных значениях истинности. Аналогично — в случае, когда сама эта проблема (проблема разрешимости) оказывается неразрешимой. Чисто содержательной характеристики высказываний и свойств исчисления здесь вполне достаточно (разумеется, пока такого рода проблемы не становятся предметом обобщенного исследования). Так что можно высказать более сильное суждение, нежели суждение о достаточности обычной двухзначной логики: построение n-значного исчисления посредством m-значной логики вообще означало бы ничем неоправданное усложнение задачи.

Говоря о достаточности двухзначной логики при построении многозначной, мы имеем в виду, во-вторых, привычное оперирование правилами логики,— оперирование, имеющее место и в исследованиях тех ученых, которые никогда не изучали логики (исчисления высказываний в том числе), и являющееся необходимым при построении самой логики (классического исчисления высказываний в том числе). Здесь о двухзначной логике речь идет, очевидно, в другом смысле [41]. Остановимся на этом подробнее.

§ 8. Двоякое понимание двузначности

Затронутый в предшествующем параграфе вопрос выходит за рамки нашей темы, — это философский вопрос, касающийся построения логики вообще и ее природы. Кроме того, он слишком многосторонен, чтобы охватить его здесь систематически. Поэтому мы ограничимся лишь отдельными фрагментарными замечаниями, имеющими прямое отношение к нашей теме.

Известный «парадокс» логики (для построения логической теории необходимо владеть логической теорией) оказывается затруднительным лишь в том случае, если в качестве единственного метода построения логики признается дедуктивный метод. Но для фактической истории науки это затруднение является мнимым. В самом деле, в большинстве случаев при построении различных наук ссылок на логику не делают, а опираются на приобретенные навыки мышления, которые навязываются людям в конечном счете как нечто объективное, обусловленное свойствами самих отражаемых вещей и отражающих их органов и средств мышления. Так что явно или неявно в фундаменте логики лежат некоторые эмпирические соображения и наблюдения. Стремление оформить их в теоретическом виде составляло существенную часть традиционной логики, понимавшейся как философская дисциплина.

Пренебрежение к такого рода вещам в современной логике связано с различного рода ошибочными философскими положениями вроде положений об априорном (доопытном) характере классической логики и о произволе в выборе логики. Возникновение многозначной логики нанесло удар по априоризму в логике [54], как в свое время геометрия Лобачевского в математике, показав возможность логических систем, отличных от классической логики. Что же касается произвольности в выборе логики, то критика этого убеждения означает анализ фактов интерпретации логических теорий и обсуждение поставленного выше вопроса.

Пренебрежение к эмпирическому характеру оснований логики можно считать оправданным лишь в той мере, в какой развитые в современной логике теории (развитые при том необходимом условии, что эмпирические основы логики явно или неявно сыграли свою роль) позволяют выявить в строгой форме, эксплицировать интуитивные соображения, опирающиеся на эту эмпирическую базу. Так, например, законы тождества, противоречия и исключенного третьего классического исчисления высказываний являются экспликацией соответствующих законов традиционной логики.

С чисто формальной точки зрения здесь нетрудно усмотреть порочный круг, поскольку определение функций истинности, посредством которых формулируются эти законы, само опирается на признание двузначного характера высказываний. Но с точки зрения развития науки здесь никакого порочного круга нет. Рассмотрение низших разделов науки средствами высших является обычным делом, дающим полезные результаты, поскольку оно опирается на накопленные уже знания и навыки мышления.

Но всякая экспликация односторонняя, поскольку она в качестве средства использует формальную модель эксплицируемого материала [13]. Так, в случае законов традиционной логики отвлекается лишь определенная связь высказываний, а отношение высказываний к действительности исключается: истинность и ложность принимаются без определения (эти определения затруднены здесь, между прочим, и тем обстоятельством, что структура атомарных высказываний не принимается во внимание). Благодаря этому достигается бо́льшая общность, чем в традиционной логике: берется истинность и ложность любых форм высказываний, тогда как в традиционной логике понимание их тяготело к определенной структуре высказываний — к атрибутивной (атрибутивность понимается не как свойство ограниченного класса высказываний, но как свойство высказываний вообще [10]), да к тому же взятой в простейшем виде (применительно к высказываниям о наличии или отсутствии одного свойства у предмета). Но это достигается, повторяем, за счет того, что исключается интуитивное или описательное понимание самих значений истинности в традиционной логике.

Всякая экспликация, далее, предполагает, что подлежащий ей материал дан и может быть как-то описан. Какой характер имеет логика на эмпирическом, так сказать, уровне, для которой вводятся формальные модели, которая эксплицируется? При ответе на этот вопрос нужно считаться с реальными фактами, а не с абстрактно мыслимыми возможностями.

В числе общих свойств вещей и средств их отражения имеются такие, которые лежат в основе законов логики, понимаемой так, как говорилось выше. В частности, это суть следующие факты, исключающие полный произвол в выборе логики: не может быть, чтобы в одно и то же время предмет имел некоторое свойство и не имел его (существование можно рассматривать как частный случай свойства с соответствующими дополнительными коррективами) или, другими словами, чтобы имеющий некоторое свойство предмет не имел его (или не имеющий некоторого свойства предмет имел это свойство); предмет либо имеет некоторое свойство, либо нет и т. д. Уже одно то, что мы исключаем из числа разумных высказываний высказывания, например, типа «четное число не является четным», говорит о действии принципов, отображающих такого рода факты повседневного опыта.

Дело вовсе не в том, что мы здесь имеем дело с абсолютными законами: объективность не есть абсолютность. Дело в том, что здесь мы имеем дело с простейшими обобщениями, так или иначе навязываемыми человеку в его повседневной деятельности [17]. Исследование более сложных случаев, в котором обнаруживается потребность в обобщениях иного рода, опирается на простейшие обобщения. Такими более сложными случаями являются, например, случаи, когда трудно (невозможно или нецелесообразно) установить наличие или отсутствие свойств у предметов при рассмотрении самих переходных или пограничных состояний предметов (подробно пример этот рассмотрен в [60]), когда учитывается более двух возможных состояний предметов, и т. д.

Таким образом, следует различать чисто негативное отношение к многозначной логике, стремящееся под тем или иным предлогом отвергать очевидные факты, и отношение к ней как к закономерному этапу (или, лучше сказать, факту) в развитии мышления и разделу в системе науки логики в целом.

Если установить соответствие свойств и множеств (принять, что приписывание предмету свойства и включение предмета в некоторое множество предметов, обладающих этим свойством, суть различные формы выражения того же содержания), то сказанное можно представить следующей простой и наглядной схемой. Деление некоторого данного непустого множества предметов на два непересекающиеся подмножества, исчерпывающие его, является простейшим случаем при рассмотрении отношения множеств. Этот принцип деления сохраняет силу во всех прочих случаях. Но не в том смысле, что все отношения множеств таковы, а в том смысле, что любые отношения их можно представить как комбинации таких двучленных делений.

Пусть, например, выделено (задано) множество предметов A и отношения множеств рассматриваются в рамках этого множества. Во-первых, говоря, что дано некоторое множество предметов A, мы тем самым разбиваем множество предметов именно таким образом: выделение чего-либо есть отличение выделяемого от всего прочего. При этом мы либо зачисляем какой-то предмет в это множество, либо не зачисляем (либо приписываем предмету некоторое свойство, либо не приписываем). Возьмем, далее, разбиение A на два пересекающиеся подмножества B и C. Получим три подмножества предметов A, принадлежащих (1) только к B, (2) только к C и (3) к B и C. Но это в двучленном делении будет выглядеть так: а) Множество A делится на два множества предметов, принадлежащих к множеству предметов (1) и не принадлежащих к нему; b) аналогично для (2); с) аналогично для (3). Точно так же мы можем поступить во всех прочих случаях и убедиться в том, что двузначный принцип соблюдается в следующей форме: предмет либо зачисляется в некоторое множество A, либо не зачисляется (последнее можно рассматривать как зачисление в множество не-A). При этом зачисление и незачисление понимается не как осуществление или неосуществление возможности высказать что-то о предмете, а как нечто объективное: предмет либо принадлежит к множеству A, либо нет (то есть принадлежит к множеству не-A). При этом следует учитывать также и то, что если даны какие-то два множества A и B, отношения которых неизвестны (а здесь это безразлично), то принадлежность предмета к B вовсе еще не означает, что он не принадлежит к A (как в терминах свойств наличие у предмета одного свойства еще не означает отсутствие другого свойства).

В применении к значениям истинности n-значной логики сказанное означает (в самом общем виде): если $x = i$ ($i = 1, 2,\ldots,n$), то неверно, что значение x не равно i. Приписав, например, x значение 1 в некотором сложном выражении, мы в этом же самом акте проверки (одновременно) не приписываем ему значение, отличное от 1. Если это допустить, то и все выражение может оказаться неоднозначным. Короче говоря, если допустить такого рода возможности, то исчезнет всякая определенность мышления. Мысль вообще не может быть тогда фиксирована.

Общий принцип, далее, детализируется в таких, например, положениях:

1) если $x = i$, то $x \neq k$, где $i \neq k$;

2) если $x = i$ или $x = k$, то $x \neq l$, где $i \neq l$ и $k \neq l$;

3) если $x \neq i$, то $x = k$, где k = одно из $1,\ldots, n$ и $i \neq k$ и т. д. А все положения такого рода суть не что иное, как проведение общего двузначного принципа применительно к случаям, когда по крайней мере одна из двух возможностей дифференцирована. Классическая логика этого не учитывала.

Если между значениями истинности установлены, в свою очередь, какие-то отношения, то опять-таки можно, перенумеровав их, прийти к тем же результатам. Например, имея значения 1^*, 2^*, ..., n^* такие, что $1^* = A23$, $2^* = C34$ и т. п., мы для i^* строим систему на общих основаниях, а какой будет эта система в переводе на i, зависит от отношений i (естественно, эти отношения должны удовлетворять требованию непротиворечивости).

Такое очень общее понимание двухзначности, по отношению к которому сама n-значность выступает как частный случай (в смысле возможности изобразить вторую как дифференциацию первой), не всегда согласуется с двухзначностью в традиционном смысле. Остановимся на некоторых оттенках этих понятий.

Двухзначный принцип, понимаемый в самом общем смысле, получает в логике различные выражения. Во-первых, высказывания, отображающие эти предметы, естественно, делятся на два класса, если будем рассматривать их отношение к предметам, о которых в них говорится: 1) истинные, если в них предметы зачисляются именно в то множество, к которому они принадлежат (если положение вещей таково, как об этом говорится в высказываниях), и 2) неистинные или ложные, если в них предметы зачисляются не в то множество, к которому они принадлежат (если положение вещей не такое, как об этом говорится в высказываниях). Во-вторых, множество высказываний просто как частный случай множества делится по принципу двузначности на два подмножества, из которых одно называется истинными, а другое — неистинными (ложными) высказываниями. При этом, как это делается в исчислении высказываний, не задумываются над определением самих этих свойств высказываний как отношений их к предметам.

В обоих случаях одно из двух множеств считается отрицанием другого и имеет силу правило двойного отрицания (отрицание однозначно). Фактическое положение вещей на этом уровне учитывается лишь в той мере, в какой предметы зачисляются в то или другое множество. Например, утверждая, что данный контакт не находится в положении 1, мы описываем фактическое положение вещей. При этом оно, в свою очередь, может быть различным: отрицание положения 1 означает утверждение положения 2 (из двух возможных) или утверждение какого-то положения, отличного от 1, в случае трех и более возможностей. Общим остается одно: либо положение 1, либо не 1, а какое-то другое.

Но прогресс познания (с точки зрения обсуждаемой темы) идет так, что внутри каждой или одной из двух возможностей устанавливаются свои градации, учет которых оказывается важным для познания. Возьмем такой пример. Пусть в соответствии с двухзначным принципом деления некоторое данное множество предметов разбито на A и не-A (заметим, кстати, что слова «данное множество» соответствуют тому фактическому положению дел в познании, когда исследуемая предметная область как-то выделена, ограничена). Пусть не-A таким же образом разбито на B и не-B. Пусть, далее, высказывание x зачисляет некоторый предмет в A. Берем обычное двухзначное отрицание x (обнаруживаем, что предмет не является элементом A, не имеет приписываемого ему свойства). Это Nx будет описывать фактическое положение вещей, поскольку зачислит предмет в не-A. Но если это не удовлетворяет и требуется установить, принадлежит предмет к B или не-B, то двухзначное отрицание без дополнительных исследований не может дать описания факта: относительно В и не-B оно не однозначно в том смысле, что Nx = либо y, либо Ny, где y — высказывание, зачисляющее предмет в B, «либо» — строгая дизъюнкция. Аналогично будем иметь $Ny = x$ или y. Аналогично для случаев, когда разделено A на C и не-C, разделены B, не-B, C и не-C и т. д.

По той же схеме идет и учет усложнения структуры высказываний. Двухзначная логика в основном тяготела к простейшим атрибутивным высказываниям «предмет a имеет свойство P» и «предмет a не имеет свойства P». Такое членение вполне изоморфно делению множества на два дополняющих подмножества P и не-P, поскольку сохраняется двойное отрицание. Но возьмем высказывание Kxy и его отрицание в смысле: дело обстоит не так, как говорится в нем. Множество событий, очевидно, мы должны разбить так:

1) множество событий, описываемых Kxy;

2) множество событий, описываемых $NKxy$.

Последнее, в свою очередь, разобъется так:

a) множество событий, описываемых $KNxy$;

b) множество событий, описываемых $KxNy$;

c) множество событий, описываемых $KNxNy$.

Во всех таких случаях требуется дополнительное определение отрицания применительно к структуре высказывания, не полагающееся на здравый смысл.

В традиционной логике аналогичные вопросы обсуждались в связи с установлением неэквивалентности различных типов отрицаний. Возьмем, например, суждение: «Иван читает книгу». Будем отрицать это суждение, сказав, что это неверно. Что означает отрицание? Очевидно, ряд возможностей:

1. Читает кто-то, но не Иван.

2) Иван не читает вообще.

3. Иван читает, но не книгу, а, допустим, журнал.

Ставя вопрос о логическом ударении, фактически создавали условия для одного определенного отрицания. Но во всех случаях верным остается одно: если истинно исходное суждение, то не являются истинными все его возможные отрицания.

Из сказанного видно, что в рамках классической логики имеет место двоякое понимание двухзначности и отрицания:

1) отрицание понимается как неопределенное (будем говорить), то есть Nx означает: не так, как говорится в x; принцип исключенного третьего имеет вид: либо высказывание x имеет значение истинности $i (x = i)$, либо нет $(x \neq i)$;

2) отрицание понимается как определенное (отрицание утверждает второе из точно определенных положений); принцип исключенного третьего принимает вид: либо $x = i$, либо $x = k$.

Обычно двухзначность связывают со вторым пониманием, хотя в традиционной логике строго различали эти вещи. Двухзначность во втором смысле есть частный случай первой (еще более частный вид она принимает, когда формулируется в терминах «Истинно» и «Ложно»). Двухзначность в первом смысле сохраняет полную силу и при построении n-значных логик. Более того, она необходима как естественное условие всякого научного мышления.

Резонно спросить, а почему бы не начать с логики однозначной, с логики без отрицаний? В известном смысле так и происходит на самом деле: определение таких понятий, как соответствие, истина и т. д. не предполагает двухзначности (ложность сама может быть определена через истинность). Во всяком случае, соответствие знаний действительности есть столь же очевидная и эмпирическая предпосылка логики, как и последующий учет фактов несоответствия.

§ 9. Множественность и единство логики

Выяснение взаимоотношений двухзначной логики и многозначной, взаимоотношений различных многозначных систем между собою, взаимоотношений между различными способами построения логических систем,— все это в совокупности составляет решение общего вопроса о множественности и единстве логики.

Множественность логики есть факт, выражающийся в наличии большого числа разнообразных логических систем,— факт, не свойственный традиционной (доматематической) логике, если не принимать во внимание различие в способе изложения, в полноте охвата и в трактовке одного и того же материала. Возникновение многозначной логики сделало эту множественность еще более ощутимой. Естественно, встает проблема единства логики как науки.

Единство логики, как и всякой науки, не может быть установлено на базе каких-то чисто априорных постулатов и установлено раз и навсегда. Оно может быть установлено лишь на базе конкретного исследования логических теорий на том или ином этапе развития логики. В порядке подведения некоторых итогов тому, что говорилось выше, сделаем несколько общих замечаний на этот счет.

Прежде всего следует сказать, что единство логики базируется на соблюдении (в качестве нормы, разумеется) требования непротиворечивости не только внутри отдельных ее теорий, но и в сравнении различных теорий. Здесь имеет место следующее положение. Пусть x есть аксиома в одной логической теории и не есть аксиома в другой. Это обстоятельство означает, что логические теории имеют различное содержание, различно ориентированы (если они не равносильны) и т. д., но ни в какой мере не говорит о наличии логического противоречия. Последнее получим тогда, когда в одной логической теории аксиомой будет x, а в другой — Nx, являющееся отрицанием x, так что конъюнкция x и Nx образует противоречие (не имеет интерпретации, не является образом чего-то существующего и т. д.). Стоит допустить такую ситуацию, как придется допустить правомерность логической противоречивости как отражение чего-то реального: аксиоматики различных теорий можно соединить, получив новую систему, которая по идее должна иметь интерпретацию на некоторую предметную область. Впрочем, никому не возбраняется строить теории, в которых аксиомами являются отрицания аксиом теорий, проверенных практически и теоретически или допускающих возможность разумных интерпретаций. Но эти теории заведомо окажутся пустыми. Логика исключает такого рода теории на тех же основаниях, на каких всякая наука исключает фантастические вымыслы, лишенные в принципе реального содержания.

Мы видели выше, что сказанное выполняется как во взаимоотношении двухзначной и многозначной логик, так и во взаимоотношениях логических теорий внутри многозначной логики. Более того, лишь на базе соблюдения требования непротиворечивости (оно, как мы видели, может быть обобщено в многозначном смысле) возможно установление таких отношений логических теорий, как отношение обобщения (например, в работе Россера и Тёркетта обобщаются работы Слупецкого), включения (например, логика Бочвара включается в логику Клини), равносильности (например, различные аксиоматики интуиционистской логики), изоморфизма (например, аксиоматика двухзначной логики и некоторая система следствий логики Бочвара) и т. д. Именно выяснение отношений такого рода составляет решение одной из сторон проблемы единства логики.

Единство логики, далее, выражается в том, что сами логические теории становятся предметом обобщающего исследования, — изучаются принципы их построения, их различия и отношения, общие свойства и особенности отдельных их групп и т. д. (например, это делается в работах Россера и Тёркетта, Слупецкого, Яблонского, Супко и многих других). Двухзначные логические системы при этом охватываются как частный случай n-значных логических систем.

Единство логики, наконец, выражается в том, что имеются некоторые общие понятия и принципы, лежащие в основаниях двухзначной и многозначной логики, в основаниях разнообразных логических систем. Мы имеем в виду при этом отнюдь не некоторое стабильное и общепризнанное состояние науки логики, а необходимую тенденцию развития логики, не исключающую разнообразия точек зрения на логику, способов построения, широты охвата материала и т. д. Одно то, что в самых различных логических системах приходится иметь дело с понятиями высказывания, истинности, ложности, значений истинности вообще, вывода и т. п. (или с соответствующими им понятиями формулы, аргумента, функции, значения, преобразования и т. д.), говорит о том, что логические теории объединяются в нечто цельное, а именно — в науку о структуре знаний, о выводном знании, о доказательстве и т. д.

В логике достаточно хорошо выяснен вопрос о невозможности свести такое объединение к объединению в рамках одной аксиоматической системы (работы Гёделя, Чёрча, Россера и др.). Достаточно взять, например, аксиоматику двухзначной логики и аксиоматику некоторой многозначной логики, не являющиеся равносильными, то объединение их привело бы, очевидно, к утрате специфических задач каждой. Мы уже не говорим о том, что в рамках одного аксиоматического построения невозможно (его же средствами) исследование свойств самих логических теорий (непротиворечивости, независимости и т. п.). Единство логики в рассматриваемом плане достигается самыми различными путями, о которых неоднократно говорилось выше, и вообще так, как достигается единство различных теорий и разделов науки на базе единства исследуемой предметной области.

Глава пятая

Проблема интерпретации многозначных систем

§ 1. Интерпретации многозначных систем

Вопрос об интерпретации многозначных логических систем органически связан с вопросом о гносеологической природе этих систем (в смысле: отражают они свойства действительности или нет) и с пониманием самих истинностных значений. Логические системы, если их брать в контексте развития познания в целом, строятся не просто для удовлетворения любознательности некоторого круга людей, а с целью использования их для решения конкретных научных задач, и вопрос «отражают или нет?» при этом обойден быть не может. А при желании применять логику (или при обсуждении вопроса о возможности применения) совершенно необходимо выяснить смысл терминов «истинно», «ложно» и т. д. [44] или вообще знаков, обозначающих истинностные значения. Если в двухзначной логике еще можно в какой-то мере сослаться на интуитивную ясность, привычность и т. д. этих терминов (хотя и здесь дело не так просто обстоит, как кажется на первый взгляд), то в n-значной логике такие ссылки невозможны: что означает, например, истинностное значение, которому присвоен номер 20, ответить на этот вопрос без специальной договоренности невозможно.

Хотя многие (если не большинство) авторы работ по многозначной логике стараются избежать интерпретации своих построений, однако накопился достаточно разнообразный фактический материал и по этой линии, чтобы обсудить на его основе проблему интерпретации многозначных логических систем в общем виде.

Имеющиеся интерпретации весьма разнообразны не только по предметной области — модальные высказывания, нормативные высказывания (например, Калиновский [46]), релейно-контактные схемы (Шестаков, Яблонский), математические рассуждения (Бочвар, интуиционистская логика, конструктивистская логика), язык квантовой механики (Рейхенбах), явления микромира (Детуш — Феврие), теория вероятности (Лукасевич, Рейхенбах), проблема следования (Люис и Ленгфорд, Аккерман) и т. п., но и по некоторым общим чертам. Очевидно, и в этом вопросе односторонний подход вряд ли принесет пользу делу.

Мы здесь рассмотрим два основных типа интерпретаций, интерес которых с философской точки зрения существенно различен.

Под интерпретацией многозначных логических систем имеется в виду, во-первых, установление соответствий элементов логической системы и конкретной предметной области,— знаков переменных высказываний, их значений истинности и функций высказываний, с одной стороны, и предметов, их свойств и взаимоотношений предметов, с другой стороны. В этом случае логическая система играет роль модели (в смысле [13]) для данной предметной области, роль имитации последней. Поскольку предметная область здесь безразлична (в том смысле, что это может быть языковая система, техническое устройство, поведение микрочастицы и т. п.), смысл знаков истинностных значений здесь точно также безразличен (здесь возможно лишь обобщение, о котором скажем ниже). Поэтому здесь значения истинности обычно определяются как множество знаков (обычно — чисел), но какой смысл имеет каждый из этих знаков сам по себе безотносительно к возможным интерпретациям и к удобствам вычислений, этот вопрос является праздным.

Следующий пример показывает достаточно ясно, что термины «истинно», «ложно», «неопределенно» и т. д. здесь не определяются, а лишь заменяются терминами конкретной области. Высказыванию x поставим в соответствие контакт a, а истинности — одно из возможных его положений (безразлично, какое) i. Так что выражение «x истинно» при рассматриваемой интерпретации переведется на язык данной предметной области выражением «контакт a находится в положении i». Причем, дело нашего произвола — какое значение истинности поставить в соответствие с i: с таким же успехом можно выбрать ложность.

Под интерпретацией многозначных логических систем, во-вторых, имеется в виду такое их использование, опирающееся на определение истинностных значений (пока это касается трехзначных логик), при котором во внимание не принимается конкретная природа той или иной предметной области и термины (знаки вообще), соответствующие значениям истинности, определяются как понятия, характеризующие процесс познания (о различии этих двух типов интерпретации см. также [12]). Было бы неточным видеть различие этих интерпретаций в различии предметных областей: в одном случае — физические предметы, в другом — высказывания. Ниже мы приведем пример интерпретации многозначной системы в терминах, описывающих высказывания, но это будет интерпретация первого типа, тогда как подход к той же области Лукасевича и Тарского может быть отнесен к интерпретации второго типа. Различие здесь в ином, а именно — в том, о чем мы говорили выше (из дальнейших примеров это станет яснее). Разумеется, это различие не всегда является резким и безусловным (как, например, это различие в сравнении работ Рейхенбаха и Детуш-Феврие обнаруживается лишь при условии ряда абстракций, т. е. при одностороннем сравнении), однако оно все же имеет место как факт. Возьмем, например, высказывание «Контакт a замкнут». Оно определяется как истинное, если на самом деле контакт a замкнут. Вместо термина «Истинно» можно взять какой-либо другой, но суть дела остается: само отношение высказывания к действительности. Аналогично высказывание «Высказывание x истинно» оценивается как истинное, если на самом деле x истинно. Здесь, как видим, не происходит перевода такого рода, как в случае интерпретации первого типа.

В рамках каждого из указанных типов интерпретаций можно установить свои градации. Здесь это сделать не представляется возможным. Ограничимся тем, что приведем несколько примеров, разъясняющих сказанное выше.

§ 2. Примеры интерпретации многозначных систем

Обратимся прежде всего к логике модальных высказываний. Мы не собираемся здесь заниматься исследованием этих высказываний, хотя это и имеет тесную связь с многозначной логикой (см, например, [70], [56], [28]). Мы здесь изложим в качестве иллюстрации общих положений очень простую формальную трехзначную систему, которую можно будет интерпретировать как теорию модальных высказываний [40]. Эта система базируется на основных понятиях логики Лукасевича. Разумеется, посредством нее можно дать лишь одностороннее, частичное описание модальных высказываний. При этом ни в какой мере не отрицается возможность исследования их в двухзначной логике, в какой-либо иной многозначной системе (например, в шестизначной [28]) и т. п. Так что в решении по крайней мере ряда научных проблем,— обстоятельство, заслуживающее внимания,— многозначная логика или какой-то ее определенный вариант является не фатальной необходимостью, но лишь одним из возможных средств.

Насколько это средство эффективно, критерием этого в конечном итоге является практическая ценность теоретических результатов.

Итак, в качестве первичных выражений примем следующие:

1) $0, {}^1/_2, 1$ — истинностные значения

2) $x, y, z\ldots$ — первичные высказывания.

Определим оператор N так, как он определен у Лукасевича, и операторы N^1 и N^2 определим матрицей:

x	N^1x	N^2x
0	0	1
$^1/_2$	1	0
1	1	0

Через них определим N^3 и N^4: $N^3x = N^2Nx$, $N^4x = N^1Nx$. Определим оператор C как у Лукасевича и через него операторы A и K (как это сделано выше в § 2), а также R: $Rxy = KCxyCyx$. Определив утверждаемое высказывание как высказывание, принимающее значение 1 при любых значениях первичных высказываний, из которых оно построено, можно обнаружить целый ряд высказываний, сформулированных посредством знаков первичных высказываний и введенных операторов, которые суть утверждаемые в данной системе высказывания. Например, Cxx, AN^2xN^1x, AN^3NxN^3x и т. п. (см. [40]).

Если теперь будем понимать Nx как «не-x», N^1x — как «возможно, что x», N^2x — как «невозможно, что x», N^3x — как «необходимо, что x», N^4x — как «не необходимо, что x», то утверждаемые положения данной системы и определения будут описывать свойства модальных функторов и взаимоотношения содержащих их высказываний. В частности, определение N^3 будет означать: «необходимо, что x,— значит невозможно, что не-x»; утверждение AN^2xN^1x будет означать: «невозможно, что x, или возможно, что x», и т. п.

Как видим, формальное построение (в примере мы упростили, конечно, его) многозначных систем и использование их путем интерпретации в терминах определенной предметной области ничем с философской точки зрения не отличается от таковых в двухзначной логике. Вследствие того, что приходится иметь дело с любым числом истинностных значений, возникают новые проблемы. Но они возникают совсем в ином плане, а именно — в плане отношения многозначных логик к двухзначной, в плане содержательного понимани дополнительных истинностных значений, в плане природы логики вообще.

В рассмотренном примере многозначное построение играет роль формальной модели для модальных высказываний (о понятиях модели и интерпретации см. [13], где говорится о необходимости дифференциации этих понятий). Использование этой модели (интерпретация формального построения) заключается здесь не в том, что значения истинности получают определения, а в установлении соответствия знаков N, N^1, N^2 и т. д., с одной стороны, и отрицания «не» и модальных функторов «возможно», «невозможно» и т. д., с другой стороны. В других случаях интерпретация осуществляется как установление соответствия знаков истинностных значений и возможных состояний объектов (в теории электрических сетей), что точно так же не означает определения истинностных значений, так как в каждом случае им будет придаваться другой смысл.

Так, если мы перейдем к устройствам дискретного действия, то значениям истинности будут поставлены в соответствие состояния элементов этих устройств, а высказываниям — сами эти элементы. В работе [26], например, дается такая иллюстрация: пусть дано некоторое устройство, имеющее k входов и l выходов, причем, каждый может находиться в конечном числе состояний; работа устройства может быть описана функциями $F^1(x^1, \ldots, x^k)$, $\ldots$, $F^c(x^1, \ldots, x^k)$, являющимися функциями многозначного исчисления высказываний.

Интерпретации второго типа приведены, как уже отмечалось в предшествующих главах, в работах Лукасевича — Тарского, Бочвара, Рейхенбаха, Шестакова, Клини (работы Шестакова являются, конечно, примером интерпретации первого плана, но в [25] изложены и соображения Бочвара и Клини). В этих случаях принимаются обычные истинность и ложность, а третье значение определяется как возможность или нейтральность, как неопределенность (нельзя высказывание ни верифицировать, ни фальсифицировать), бессмысленность (высказывание лишено смысла, не может быть поэтому отнесено ни к числу истинных, ни к числу ложных), несущественность (не имеет значения, истинно или ложно), алгорифмическая неразрешимость и т. д.

Как видим, здесь понимание значений истинности не привязано к конкретной предметной области, здесь даются определения.

Тарский [52], опираясь на работы Лукасевича, дал такое определение возможности: $Mx = CNxx$, где C и N — трехзначные операторы Лукасевича. Проверка показывает, что $M0 = 0$, $M{}^1/_2 = 1$, $M1 = 1$. На основе этого определения можно показать непротиворечивость утверждений $CNMxNx$, $CNxNMx$, $(\Sigma x)KMxMNx$. Например. $CNM0N0 = CN0N0 = C11 = 1$, $CNM{}^1/_2N{}^1/_2 = CN_1N{}^1/_2 = C0{}^1/_2 = 1$, $CNM1N1 = CN_1N1 = C00 = 1$, $\Sigma xKMxMNx = (KM0\,MN0)A(KM{}^1/_2MN{}^1/_2)A\,A(KM1\,MN1) = (K01)A(K11)A\;(K10) = 0A1A0 = 1$. Как видим, здесь не устанавливается соответствия типа первой интерпретации. Здесь Mx определяется в рамках трехзначной логики, здесь для самого Mx устанавливаются значения истинности в зависимости от значений x:

x	Mx
0	0
$^1/_2$	1
1	1

Приведем еще пример (взят из [26]), показывающий, что рассматриваемые типы интерпретаций имеют точки соприкосновения. Пусть некоторый отрезок разбит на n равных частей. Рассмотрим положение частицы, имеющей конечные размеры, на нем. Высказывание $xi (1 \leqslant i \leqslant n)$ есть высказывание о том, что частица находится внутри отрезка с номером i. Примем утверждения:

1) xi истинно, если частица находится внутри отрезка с номером i;

2) xi ложно, если частица не имеет точек в отрезке с номером i;

3) xi неопределенно в остальных случаях (то есть когда частица имеет точки в двух смежных отрезках или покрывает пограничную точку отрезка).

Этот пример можно рассматривать как пример к обоим интерпретациям: к первой, если приведенные утверждения рассматривать просто как установление соответствия знаков «истинно», «ложно» и «неопределенно», с одной стороны, и возможных положений частицы, с другой стороны; ко второй, если термины «истинно» и «ложно» употреблять как характеризующие отношение высказываний к действительности в общем виде, например — в таком: истинность и ложность относят высказывание к двум возможным различным состояниям предмета, а неопределенность — к переходному состоянию. Сходный пример, на который мы уже ссылались, разобран в [60].

Выше мы отмечали, что многие авторы работ по многозначной логике весьма сдержанны в отношении интерпретации многозначных систем. И это не случайно. И причина здесь вовсе не в том, что трудно подобрать примеры,— это как раз дело не хитрое. Причина, скорее всего, состоит в том, что интерпретация понимается, во-первых, не просто как интерпретация отдельно взятого многозначного высказывания (здесь интерпретация сводится к наглядному примеру для общей мысли), но как интерпретация целостного исчисления, и, во-вторых, как средство решения конкретных научных задач. А доказательство эффективности многозначных построений и преимущества их перед классическими — это дело времени. С этой точки зрения многозначная логика не есть фатальная, слепая необходимость, но представляет собою один из сознательных рычагов научного процесса. И приходится согласиться с тем, что разработка ее как формального аппарата является важнейшей задачей, не исключающей, конечно, поисков ее приложений.

Факты интерпретации многозначных исчислений дают вполне убедительный ответ на вопрос о том, отражают эти исчисления свойства, отношения и связи вещей или нет,— утвердительный ответ. Так что общая философская позиция Рейхенбаха в этом вопросе не может быть признана верной. Если даже допустить, что многозначная логика описывает лишь язык квантовой механики, в силе остается вопрос: почему именно такая логика удобна, а не иная? Очевидно, в науке сложились именно такие условия познания, что оказывается возможным использование трехзначной логики, а эти условия — факт объективный.

§ 3. Определения значений истинности

Интерпретация второго типа представляет, несомненно, бóльший интерес для философии, чем первого типа: здесь речь идет об определении значений истинности.

Возьмем такой пример (см. [33]). Пусть на шкале некоторого измерительного прибора нанесены деления 1, 2 и 3, и стрелка может показывать эти и только эти деления (исключим для простоты все промежуточные положения). Возьмем, далее, такие высказывания:

1) Стрелка показывает деление 1.

2) Стрелка показывает деление 4.

3) Стрелка показывает одно из делений 1, 2 и 3.

Первое будет истинным, если стрелка показывает 1, и ложным, если стрелка показывает 2 или 3. И то и другое может случиться. Но второе высказывание никогда не будет истинным, так как такого деления на шкале прибора вообще нет. Третье высказывание будет всегда истинным, так как стрелка обязательно показывает одно из 1, 2 и 3. Как видим, в данном случае значения истинности высказываний определяются путем их сопоставления с действительностью, которую они отражают, и возможны четыре случая, которые можно назвать так: абсолютно истинно (третье высказывание), абсолютно ложно (второе высказывание), возможно истинно и возможно ложно (первое высказывание). Какая выбрана терминология, это не существенно. Важен общий принцип определения, выводящий нас уже в сферу логической семантики.

Второй пример. Пусть $P(a)$ есть знак высказывания о том, что некоторый предмет (называемый a) имеет некоторое свойство (называемое P),— «контакт a замкнут», «число a простое», «число a не является четным» и т. п. Будем сопоставлять такого рода высказывания с некоторой данной ситуацией. Прежде всего встает вопрос: имеется ли в данной ситуации предмет a? Если не имеется, то как оценить высказывание? Очевидно, его нельзя оценить ни как истинное, ни как ложное. Оно бессмысленно для данной ситуации, неопределенно и т. п. Во всяком случае, его значение отлично от истинности и ложности, если последние понимать так: высказывание истинно, если a в данной ситуации имеется и действительно имеет свойство P; высказывание ложно, если a в данной ситуации имеется, но свойство P у него отсутствует. Очевидно также, что ложность можно определить так: $P(a)$ ложно, если истинно $NP(a)$, где N означает, что a не имеет свойства P. Так, высказывание «число a простое» ложно, если истинно, что число a не является простым.

Третий пример. Возьмем высказывания типа «Если x, то y», выражающие связь различных предметов. Возможны следующие ситуации, с которыми сопоставляется это высказывание, описываемые высказываниями «x и y», «не-x и y» «x и не-y» и «не-x и не-y». Очевидно, и здесь можно ввести несколько (более двух) оценок, именуемых значениями истинности.

Несмотря на различия приведенных примеров (а число их можно было бы продолжить, что не представляет труда), общим для них является следующее:

1) высказывания сопоставляются с той ситуацией, о которой (предположительно) в них говорится, или вообще с некоторой ситуацией, с некоторой областью действи-

тельности; если даже высказывание построено из других высказываний и определено как функция последних, в конечном итоге оно точно так же сопоставляется с некоторой ситуацией через сопоставление с нею составляющих его высказываний в определенном (или в безразличном, что есть частный случай) порядке;

2) сопоставление осуществляется в соответствии со структурой высказываний, как некоторая упорядоченная процедура;

3) поскольку речь идет о высказываниях, возможны по крайней мере два шага в этой процедуре (простые высказывания, включая высказывания с отрицаниями, имеют по крайней мере субъекты и предикаты; сложные — состоят по крайней мере из двух высказываний или получены из них); значит возможны по крайней мере четыре различных оценки высказывания по его отношению к данной ситуации (вообще — 2^n оценок, где n — число шагов);

4) уже в рамках обычного языка возможно прибегать к n-значной оценке высказываний;

5) все n значений высказывания могут быть определены через истинность других высказываний, а истинность - через соответствие высказывания и ситуации, с которой оно сопоставляется.

Из сказанного вовсе не следует необходимость так поступать в отношении обычного языка и языка той или иной конкретной науки. Это все — лишь возможность, для реализации которой требуются веские причины (см. Бочвара, Рейхенбаха и др.) В подавляющем же большинстве случаев достаточно знать, соответствует или нет высказывание действительности. Характер же соответствия или несоответствия (их различные градации) устанавливается проверкой, так что специальная усложняющая язык терминология не требуется. Так, если выяснилось, что предмет a не существует в данной ситуации или вообще не существует, то указание на этот факт при оценке высказывания $P(a)$, отличного от высказывания «a не существует», будет равносилен оценке его как ложного, если $P(a)$ есть высказывание «a существует», или каким-то третьим значением, если речь идет не о существовании.

Самое важное, пожалуй, соображение, обнаруживаемое на этом пути, состоит в том, что все $n - 1$ значений могут быть определены через одно, а именно — через истинность. Таким образом, здесь многозначность выступает как следствие однозначности (потенциальной или в тенденции) познания. Но многозначная логика в своей специфике многозначной выступает именно тогда, когда предполагается n различных значений истинности и когда на основе этого предположения строится логическая система, рассматривающая связи многозначных высказываний.

§ 4. Многозначная логика как теория особого рода связей предметов

Анализ фактов интерпретации многозначных систем показывает, что они выступают в роли именно многозначных в собственном смысле этого слова лишь тогда, когда используются в качестве аппарата исследования связей предметов. Естественно, что изображение многозначных функциональных построений (и, возможно, соответствующих им аксиоматических) как фрагмента теории связей предметов [10, 11] представляет некоторый интерес.

Для этого необходимо дать следующую интерпретацию высказываниям и значениям истинности:

1) знаки высказываний рассматривать как знаки предметов;

2) знаки истинностных значений рассматривать как знаки возможных свойств (или состояний) предметов;

3) выражения типа «$x = i$» читать как выражения типа «Предмет x имеет свойство i»;

4) прочие выражения интерпретировать в зависимости от определений; например, Nx в зависимости от $Nx = \alpha$, где α есть определяющая часть, будет означать иную комбинацию свойств сравнительно с x. Разумеется, при такой интерпретации потребуется введение ряда предварительных понятий («предмет», «свойство» и т. п.). Такая интерпретация имеет ряд достоинств, ведущих по линии устранения двусмысленности ряда понятий, поскольку исчисления строятся в крайне общей терминологии, допускающей одно из применений к такому частному случаю, как связи высказываний.

При такой интерпретации, далее, сложное высказывание, образованное из простых посредством операторов A, K, C..., придется рассматривать как предмет, отличный от предметов, обозначаемых знаками простых высказываний, и ввести понятие упорядоченности предметов. Например, вместо определения $Kxy = min\,(x,y)$ можно ввести определение $z = \min\,(x,y)$, в котором речь идет о связи x и y, с одной стороны, и z, с другой стороны. Упорядоченность x, y и z видна из того, что (в примере) можно определение читать двояко:

1) если x и y имеют такие-то свойства (находятся в таких-то состояниях; указываются комбинации), то z имеет такие-то свойства;

2) если z имеет такие-то свойства, то x и y имеют такие-то свойства, то есть (в примере) $min\ (x,\ y) = z$. Безразличие порядка для x и y есть частный случай упорядоченности, который в каждом случае оговаривается. Другими словами, упорядоченность x, y и z выражается в порядке чтения таблицы

a) $\begin{array}{cc|c} x & y & z \\ \hline & & \\ & & \end{array}$ b) $\begin{array}{c|cc} z & x & y \\ \hline & & \\ & & \end{array}$

Рассмотренный пример есть пример сложной связи (связь трех предметов). Простейшим случаем связи является связь двух предметов, описываемая одноаргументными функциями. При этом Fx рассматривается как предмет, отличный от x. В таблице это имеет вид

x	y
1	α^1
2	α^2
.	.
n	α^n

где каждое из α^1, α^2, ..., α^n равно одному из чисел 1, 2,..., n; кроме того, возможно, что $\alpha^i = \alpha^k$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$.

При таком понимании Fx придется, очевидно, вводить дополнительные знаки отрицаний. Например, возможно понимание отрицания N^* как такой перенумерации α^1, α^2, ..., α^n, что $N^*x = x + 1$, и если $x = n$, то $N^*x = 1$. Потребуется вводить также отрицания связей с учетом упорядоченности предметов. Например, возможно следующее определение: «Неверно, что если x, то y = Если x то не-y».

Сами определения функций исчисления высказываний имеют задачей указать, какие значения истинности принимают одни высказывания в зависимости от значений других. В данной интерпретации они будут определять, какие из возможных строго учитываемых свойств (состояний) будут принимать одни предметы в зависимости от данных свойств других предметов. Тот факт, что логические исчисления отражают определенные свойства вещей, в этой интерпретации выступает с полной очевидностью.

Наконец, при такой интерпретации придется различать уточнение логических связок «и», «или», «если..., то...» и т. д., как оно осуществляется в исчислении высказываний (в функциональных построениях) и как оно может быть осуществлено без интерпретации в функциональном построении (можно сказать, смысловым образом): если функции исчисления высказываний будут интерпретироваться как описание связей предметов, то должен быть уточнен язык, посредством которого должно быть осуществлено это описание.

В работах [10, 11] предложен следующий путь, на этот счет. Первый этап — в некоторой системе аксиом определить основные логические связки «и» («каждое из того, о чем говорится»), «или» (исключающее «или»), «не» и «значит» («следовательно») [15]. При этом система аксиом должна давать правила оперирования этими связками, которые (связки) предварительно должны быть разъяснены на примерах, путем сравнения и т. д., в общем — на уровне привычки оперировать ими. Например, среди аксиом такого рода могут быть аксиомы вида: C^*K^*xyx, $C^*K^*A^*xyzA^*K^*xzK^*yz$, $C^*N^*A^*xyA^*K^*xyK^*N^*xN^*y$ и т. д., где K^*, A^*, N^* и C^* соответственно суть «и», «или», «не» и «значит». Смысл такого рода аксиом легко разъясняется: например, если мы высказали x и y, то мы тем самым высказали x. Затруднения со знаком «Значит» являются (в данном случае, конечно) мнимыми: его можно понимать так, что имеются какие-то правила вслед за некоторой записью писать другую, определенную этими правилами. Аксиомы, собственно, и дают такие правила. Отметим, наконец, что система аксиом в совокупности должна определить эти знаки (в примере все аксиомы являются элементами определения всех употребляемых знаков).

Второй этап — используя построенный на первом этапе символический язык (отличающийся от обычного лишь краткостью, однозначностью, оперативностью) для построения общей теории связей, теория функций исчисления высказываний, по отношению к которой является лишь ее фрагментом. В этом случае операторы N, K, A, C и другие будут выступать уже не как экспликация логических знаков обычной речи, а в новой роли — в роли знаков связей различного рода. Новое, в частности, здесь состоит в том, что как в таблицах, так и в соответствующих им равенствах значений, служащих для определения этих операторов, появляется учет порядка, раз мы различаем определяющую и определяемые части (аргументы и функции вообще). Например, записывая $Axy = min\,(x,y)$, мы указываем, что Axy принимает такие-то значения в зависимости от зачений x и y, а не наоборот.

С этой точки зрения рассматриваемые операторы (в частности) могут быть определены так:

1) если $z = min\,(x,y)$, то $A(x,\ y)z$
2) если $z = max\,(x,\ y)$, то $K(x,y)z$
3) если $z = max\,(1,\ y - x + 1)$, то $C(x,\ y)z$
4) если $z = n - x + 1$, то Nxz
5) если $z = x$, то Rxz

и т. п. (если x, y, z, ... высказывания, то 1, 2, ..., n — их истинностные значения; если x, y, z, ... знаки предметов вообще, то 1, 2, ..., n — знаки их возможных состояний).

Если теперь становится возможным (до известной степени) на место z ставить Axy, Kxy, Cxy, Nx и т. д. в смысле A^*xy, K^*xy, N^*x и т. д., то это принципиально не меняет сути дела. Рассмотренная интерпретация, конечно, не может претендовать на единственность и особые привилегии , однако она, как нам кажется, разъясняет некоторые новые свойства современной логики сравнительно с традиционной и, в частности, некоторые стороны многозначной логики. Так что слова Гильберта, относящиеся к исчислению предикатов [7], можно отнести уже (и, пожалуй, в первую очередь) к лежащему в его основе исчислению высказываний: аристотелевский формализм не мог служить там, где речь шла о символическом отображении соотношений между несколькими предметами (а связи суть частный случай таких соотношений).

§ 5. Критика классической логики в диалектике

В связи с интерпретацией многозначных логических систем несомненный интерес представляет критика принципов классической логики с позиций диалектики. Мы не указали ее в числе первоисточников многозначной логики потому, что она выходила (и выходит) за рамки формальной логики вообще и потому не оказала сколько-нибудь заметного влияния на возникновение многозначной логики. Употребление термина «формальная логика» обусловлено здесь исключительно тем, что часто о диалектике вообще или о том или ином ее разделе говорят как о «диалектической логике». С другой стороны, сказанного выше достаточно, чтобы сделать следующий вывод: возникновение многозначной логики ни в какой мере не превращает логику (логику формальную) в диалектику или в раздел диалектики (в логику диалектическую).

Критика принципов классической логики в диалектике велась по существу (см., например, [18, 19]) в плане выяснения недостаточности формальной логики вообще при исследовании исторически сложившихся и развивающихся сложных систем связей (вроде социальных систем), в плане выяснения непригодности ее в качестве методологии такого рода исследования. Причем положительный ответ в данном случае вовсе не означал отрицания принципов формальной логики. Он означал одно: само соблюдение этих принципов предполагает в качестве необходимого условия определенную методологию процесса исследования. В частности (здесь это понимание выступает наиболее отчетливо), устранение многочисленных антиномий, возникших в политической экономии, обнаружилось не просто в приведении имеющихся сведений о буржуазной экономике в соответствие с законами противоречия и исключенного третьего, а в коренной перестройке всего процесса исследования предмета, в качестве одного из следствий которой и должно явиться устранение логически противоречивых ситуаций (вроде антиномии стоимости, антиномии возникновения прибыли и т д.).

При исследовании исторически сложившихся многократно расчлененных и изменчивых систем связей приходится прибегать к различного рода методическим приемам, необходимым для построения теорий этих систем: исключать одни связи при изучении других; соединяя полученные при этом знания по определенным логическим правилам, давать тем самым теоретическую картину (более или менее полную и приближенную) взаимодействия этих связей; учитывать противоположные воздействия на предметы; учитывать изменение системы и ее структурных компонентов во времени и т. д. (см. об этом, например, [72, [73], [74]). Естественно, при этом приходится иметь дело с суждениями, которые, будучи вырваны из контекста, представляются противоречащими друг другу. Однако к такого рода суждениям нельзя подходить с меркой логики, игнорируя совокупность знаний, внутри которой они получены и имеют смысл. Исследование обнаруживает здесь отсутствие условий для принципов логики: либо не выполняется тождество времени, либо не выполняется тождество смысла понятий, либо суждения имеют смысл в различных ситуациях (например, суждение x фактически является частью суждения «если y, то x», а Nx — частью суждения «если Ny, то Nx» и т. п.). И по этой линии конфликты с формальной логикой оказываются мнимыми: принципы ее не отвергаются, но ставится вопрос о правильности хода сложного процесса исследования.

Оценка суждений (высказываний) по их значениям истинности только понятиями «истинно» и «ложно» при этом оказывается недостаточной: здесь приходится говорить о большей или меньшей степени абстрактности и конкретности, приближения, полноты и т. д. суждений,— а это все оценка суждений по их отношению к действительности. Однако намечающаяся здесь многозначность суждений не нуждается для своего описания и осознания в многозначной логической теории: все указанные (и другие) случаи оценки значения истинности суждений вполне охватываются понятиями «истинно» и «ложно» с дополнительными содержательными утверждениями, которые в общем виде можно выразить так: «высказывание x истинно (ложно) при условии, что y».

Следует обратить внимание на то, что возможность интерпретировать (а такая возможность не исключается) значения истинности многозначной логики как степени абстрактности, конкретности, полноты, приближения, относительности и т. д. скорее всего так и останется абстрактной возможностью по следующей причине. Когда говорится о многозначном характере высказываний, предполагается, что одно и то же высказывание x может принять значение из числа возможных значений 1, 2, ..., n. Здесь же имеются в виду различные суждения, вернее — отношения различных суждений (различных по содержанию). Это обстоятельство чрезвычайно важно учитывать во избежание бесплодных попыток представить ход исследования рассматриваемого рода в виде логического исчисления и во избежание путаницы, основанной на безотчетном оперировании понятиями. Дело в том, что когда суждение оценивается как абстрактное, конкретное, более абстрактное, более конкретное, более полное (в смысле более полного описания предмета) и т. д., то всегда имеется в виду отношение различных суждений, различных по содержанию и по способу получения. Например, уравнение Клапейрона более полно, более точно (более конкретно, вообще говоря) описывает состояние газа, чем закон Гей-Люссака, а уравнение Ван-дер-Ваальса — конкретнее уравнения Клапейрона. Очевидно, здесь речь идет об этапах хода исследования и рассуждений, а не о возможных значениях истинности отдельно взятых высказываний.

Иное дело — когда речь идет о рассмотрении самих переходных состояний предметов, самого акта их изменения. В этом случае, очевидно, ответы на вопросы по принципу «да — нет» представляются слишком грубыми, не дающими точного описания действительности. Заметим кстати, что такого рода факты фигурируют в некоторых работах по многозначной логике. Так, в книге [60] подробно разбирается простой пример с человеком, входящим в комнату, и показывается, какие логические трудности здесь возникают при подведении такого переходного состояния под принципы классической логики.

Еще большие затруднения вызывает известный парадокс Зенона, дискуссия вокруг которого продолжается до сих пор. Точка зрения автора в этом вопросе подробно изложена в [72]. Коротко говоря, суть ее сводится к следующему:

1) парадокс Зенона можно обобщить высказыванием «изменяющийся предмет одновременно имеет некоторое свойство и не имеет его»;

2) это высказывание выводится путем рассуждений, базирующихся на логических принципах, но не является результатом эксперимента или наблюдения (почему, станет ясно из следующего пункта);

3) оно не противоречит законам логики, так как понятия «одновременно», которые фигурируют в принципах логики (если их, допустим, формулировать в форме «предмет не может одновременно иметь и не иметь некоторое свойство» и т. п.) и в этом высказывании, имеют различный смысл; в первом случае имеется в виду временной интервал, не равный нулю, во втором — момент времени, граница двух временных интервалов; поскольку величина его равна нулю, то с точки зрения практической проверки значение истинности высказывания установить нельзя.

Здесь, таким образом, возможно рассмотреть дело с точки зрения трех значений: истинно, ложно и неопределенно. Можно ограничиться и констатацией того факта, что имеется в виду чисто логическое рассуждение, касающееся нулевого интервала. Однако нам здесь более важна другая сторона дела: «парадокс» изменения и нежелание разобраться в антиномиях, возникающих при исследовании сложной и изменчивой действительности, породили тенденцию, идущую от Гегеля, критиковать классическую логику таким путем, что последней противопоставляется допущение одновременной истинности и ложности для ряда привилегированных суждений. Поскольку при этом сохраняется классическое отношение истинности и ложности, то это допущение равнозначно допущению, что высказывание не является истинным и не является ложным. В общем, высказывания типа $KxNx$ считаются в ряде случаев приемлемыми. Отдельные рецидивы такой критики встречаются до сих пор.

Имеют место и попытки примирить указанное допущение с законом противоречия и исключенного третьего таким путем: хотя в ряде случаев правомерно $KxNx$, но и в этих случаях законы логики сохраняются, например, в форме $NKKxNxNKxNx$. Однако здесь решение проблемы является явно иллюзорным.

Для формальной логики рассматриваемое допущение неприемлемо: поскольку ложность есть отрицание истинности, а истинность — отрицание ложности, это допущение означает, что в ряде случаев истинные высказывания оказываются неистинными (ложными), а ложные — неложными (истинными). Оперируя только понятиями истинности и ложности в классическом смысле, в рамках формальной логики можно допустить лишь ситуации, для которых нельзя проверить или доказать, истинно высказывание или ложно, или для которых значение истинности не существенно. Но в таком случае третье значение исключает два других: если $x=3$, то $x\neq1$ и $x\neq2$, тогда как в противном случае, если $x=3$, то $x=1$ и $x=2$ ($x=1=2$).

К любопытным результатам ведет попытка интерпретировать третье значение истинности как конъюнкцию истинности и ложности (утверждения и отрицания) при построении соответствующего исчисления.

Допущение, что в ряде случаев приемлемо $KxNx$, можно записать в форме $\Sigma xKxNx$, что читается так: существует x такое, что истинна конъюнкция x и не-x. Через значения истинности это выразится так: $(\Sigma x)KxNx=(K1N1)A\ldots$ $\ldots A(KnNn)$, а для трехзначного случая, $(\Sigma x)KxNx=$ $=(K1N1)A(K2N2)A(K3N3)$, где A есть знак дизъюнкции.

Понимая K как уточнение обычного «*и*» и принимая за истину значение 1, поставим следующий вопрос: когда $(\Sigma x)KxNx$ будет истинным? Поскольку $KxNx=max$ (x, Nx), то $(\Sigma x)KxNx=1$ лишь в том случае, когда $K1N1=1$, так как $K2N2\geqslant2$ и $K3N3\geqslant3$. Но если $K1N1=1$, то это возможно лишь тогда, когда $N1=1$. Если $N1=2$ или $N1=3$, то соответственно $K1N1=2$ или $K1N1=3$. Таким образом, возможен только один случай, удовлетворяющий рассматриваемому допущению, а именно — когда отрицание истины есть истина, что не соответствует самому понятию отрицания.

Возможно, конечно, такое построение, в котором третье значение есть конъюнкция двух других. Например, если из «$x=1$» следует «$x=2$» или из «$x=2$» следует «$x=1$», т. е. $x1{,}2=ACx1x2Cx2x1$, то получим:

$$\begin{array}{ccccccc} Cx1x2 & & Cx1x1 & & Cx2x1 & & Cx2x2 \\ \dfrac{x1}{x2} & \text{и} & \dfrac{x1}{x1} & \text{или} & \dfrac{x2}{x1} & \text{и} & \dfrac{x2}{x2}, \end{array}$$

то есть $x = 1 = 2$. Но интерпретируя в таком случае 1 как истинность, а 2 как ложность, мы получим, что из истины следует ложь или из лжи следует истина, — то есть обычную парадоксальную ситуацию.

Нет необходимости разбирать другие возможности решения и стороны проблемы. Из сказанного напрашивается один вывод, который самими специалистами по диалектике в большинстве случаев осознается вполне отчетливо: диалектика по самому своему существу не поддается формализации в виде логического исчисления, она имеет другие задачи, нежели логика, решаемые иными методами. И всякие попытки построить ее в виде исчисления могут привести лишь к парадоксальным ситуациям. Это, конечно, не исключает того, что при решении отдельных проблем диалектики будут использованы идеи и принципы логики, в частности, логические модели.

Из сказанного напрашивается вывод, что рассматривать критику формальной логики с позиций диалектики в русле идей многозначной логики было бы ошибочно. Диалектика действительно указала на факты ограниченности классической логики, но этой ограниченностью страдает и многозначная логика, раз она исключает ситуации вроде $(\Sigma x)KxNx$.

§ 6. Проблема универсальности логики

Попытки рассмотреть логический строй конкретных наук (квантовой механики в первую очередь) с позиций многозначной логики привели к постановке проблемы универсальности (или скорее неуниверсальности) логики.

Если в случае проблемы множественности и единства логики имелось в виду взаимоотношение логических теорий внутри науки логики безотносительно к тем или иным их приложениям, то в случае проблемы универсальности логики имеется в виду другое. Логические теории можно не только интерпретировать в терминах некоторой конкретной предметной области (рассматривать как формальную модель этой области, как аппарат решения частных ее задач), но и оценивать как теорию мышления, как описание правил научного мышления. Являются правила мышления, описываемые этими теориями, универсальными или нет?

Утвердительный ответ на этот вопрос как будто напрашивается сам собой: мы видели выше, что в области математики накладывается ограничение на закон исключенного третьего; в области микрофизики приходится считаться с фактами неопределенности высказываний и т. д. Однако в силу двусмысленности самих понятий универсальности и неуниверсальности категоричность суждений по данному вопросу является сомнительной.

Возможно рассуждать таким образом: логика отражает некоторые свойства действительности, опирается на онтологические обобщения; следовательно, различие свойств различных областей действительности (например, макромира и микромира, конечных и бесконечных множеств) порождает различие систем логических правил для наук, отражающих эти области (см., например, [33], [34]). Но можно рассуждение построить иначе: несмотря на различие свойств различных сфер действительности, имеются некоторые общие свойства, отображаемые правилами логики; таким образом, делить мир на сферы, требующие для своего отображения различных правил логики, будет нелепым.

Возьмите, далее, такой пример: в некотором рассуждении используется, допустим, умозаключение по схеме modus ponens, а в другом — по схеме первой фигуры силлогизма; спрашивается, универсальны или нет эти схемы? Ясно, что само понятие универсальности здесь двусмысленно, а это исключает однозначный ответ по принципу «да — нет». Наличие в одной и той же логической теории описаний различных правил мышления говорит о том, что логика не универсальна в следующем смысле: различные условия познания могут потребовать различных логических правил. Однако в стандартных условиях реализуются и стандартные правила, и в этом смысле слова логика универсальна.

Многозначная логика не составляет на этот счет исключения.

Наконец, из рассмотренного в данной работе материала следует, что законы двухзначной логики не отрицаются законами многозначной логики, как и законы второй не отрицаются законами первой. Так что понимать неуниверсальность законов логики как членение мира на сферы, в одних из которых действуют одни логические законы, а в других — их отрицания, будет грубейшей ошибкой. Неуниверсальность законов логики следует, очевидно, понимать с учетом фактического взаимоотношения логических систем, дающих им описание. Решение же вопроса о том, как это проявляется в научном исследовании, предполагает конкретный анализ содержания и истории тех наук, где предпринимаются попытки использований идей и аппарата многозначной логики. Оставаясь в рамках логики и общих философских установок, согласно которым правила логики в конечном счете отражают некоторые общие свойства вещей и исторически сложившиеся объективные условия их познания, можно сказать лишь следующее: неуниверсальность правил (законов) логики выражает различие в ориентации исследования, более или менее широкий охват предметов действительности, большую или меньшую дифференцированность в оценке отношения высказываний к действительности, проникновение в более сложные отношения и связи предметов и т. д. Что касается возникновения многозначной логики, то она (среди других задач) стремится дать более общее и точное описание законов научного мышления, а также учесть прогресс науки в этом отношении, но ни в коем случае не отрицает законов классической логики. Она отрицает лишь претензии некоторых представителей традиционной логики на окончательную завершенность формальной логики и на независимость ее законов от прогресса познания.

Несколько слов об оценке научных теорий с точки зрения характера логики. Всякая научная теория является однозначной в том смысле, что все ее высказывания по идее должны быть истинными, а правила определений и вывода выступают как алгорифмы построения новых знаков и высказываний из имеющихся. С этой точки зрения и логические теории однозначны: двухзначность и многозначность являются здесь содержанием теорий, свойствами рассматриваемых в логических теориях высказываний.

Всякая научная теория двухзначна или вообще n-значна в том смысле, что употребляемые в ней логические знаки «и», «или», «если..., то...» и т. д. и правила вывода могут быть определены и обоснованы в логических теориях, в которых высказываниям приписывается два или вообще n истинностных значений. Причем выбор той или иной системы определений зависит от свойств изучаемой предметной области и условий ее познания. Так, если в данной науке возможно образование высказываний, которые нельзя в данных условиях доказать или опровергнуть, то введение третьего значения истинности является вполне естественным, как и учет этого обстоятельства в формулировке логических правил. Что касается выбора «лучшего» варианта, то это зависит от конкретных условий науки и от того, насколько адекватно их отражает та или иная логическая теория.

Глава шестая

Проблема квантификации в многозначной логике

§ 1. Субъектно-предикатная структура высказываний

В исчислении высказываний строение высказываний рассматривается лишь в той мере, в какой оно охватывается функциями истинности: сложные высказывания разлагаются на простые (в конечном счете) высказывания же, соединенные определенными знаками в целое. Простые высказывания берутся как нечто элементарное, не расчленяются на составные части, которые уже не являются высказываниями. Это касается любых исчислений высказываний, то есть двухзначных и многозначных.

В исчислении предикатов эта ограниченность несколько снимается: здесь учитывается субъектно-предикатная структура высказываний. Мы сказали «несколько снимается», так как исчисление предикатов не исчерпывает проблемы строения фактически употребляющихся в обычной и научной речи высказываний.

Мы здесь будем исходить из следующего эмпирического факта: каждое высказывание можно расчленить на две части, и читатель имеет навык такого рода членения. В одну из этих частей включаются знаки (термины), обозначающие предметы (то есть то, о чем совершается высказывание). В другую из этих частей включаются знаки, обозначающие свойства предметов (то есть то, что говорится о предметах, что им приписывается). Первые называются субъектами, вторые — предикатами. Смешение предметов и свойств, с одной стороны, и субъектов и предикатов, с другой стороны, недопустимо. Оно не ведет к путанице (как, например, в [7]) лишь постольку, поскольку предполагается соответствие тех и других.

Указанное расчленение высказываний не всегда есть результат непосредственного наблюдения, как в случае высказываний типа «число 29 простое», «электрон заряжен отрицательно» и т. п. Это — результат достаточно высокого уровня абстракции. Например, в высказывании «число 5 больше числа 3, тогда как число 2 меньше числа 3» субъекты «число 5», «число 3» и «число 2» разделены пространственно другими словами, а субъект «число 3» встречается дважды. Однако мы их включаем в одну часть и не принимаем во внимание повторения. Предикат этого высказывания, соответствующий высказываемому свойству чисел, взятых совместно, вообще не может быть пространственно отграничен от субъектов без дополнительной абстракции, которую поясним ниже.

В высказываниях содержится также указание на принадлежность или на непринадлежность свойств предметам,— знак аттрибутивности. Это — точно так же эмпирический факт, определенный навык. Он может выражаться различными способами — порядком слов, грамматической формой слов, особыми словами. Мы его будем изображать, записывая субъекты и предикаты совместно и в определенном порядке, как это принято в современной логической литературе. Субъекты будем обозначать малыми латинскими буквами a, b, c,..., предикаты — большими латинскими буквами. P, Q, R,.... Высказывания будем изображать символами типа $P(a)$, $Q(a)$, $P(a, b)$, $Q(a, b, c)$, $NP(a)$, $NQ(a)$, $NP(a, b)$, $NQ(a, b, c)$ и т. д. Эти символы будут читаться так: «Предмет a имеет свойство P» (или просто «a имеет P», «а характеризуется тем, что P» и т. п.), «a не имеет P», «a и b характеризуются тем. что P» и т. д. Выражения вида «предмет a», «a», «свойство P», «P» означают соответственно «предмет, обозначаемый знаком a» («предмет, называемый a») и «свойство, обозначаемое знаком P». Знак N в данном разделе означает отрицание принадлежности свойств предметам, причем NP есть точно так же предикат. Для него примем утверждение $NNP(\alpha) = P(\alpha)$, где α означает любое непустое множество субъектов.

Атрибутивность не выражается особым знаком наряду со знаками субъектов и предикатов лишь по той причине, что в исчислении предикатов она выполняет одну единственную функцию — закрепляет относительное расположение субъектов и предикатов. Так что членение высказываний здесь на две части никакого отношения не имеет к вопросу о числе частей высказываний, поставленному безотносительно к цели расчленения высказываний.

Рассмотренный способ записи высказываний для высказываний с одноместными предикатами (с одним субъектом) затруднений для понимания не представляет, так как он непосредственно совпадает со структурой часто встречающихся высказываний типа «число 11 простое», «окно открыто» и т. п. Что касается высказываний с двух и более местными предикатами (с двумя и более субъектами), то здесь приходится осуществлять дополнительную абстракцию для вычисления предикатов. Эта абстракция заключается в том, что высказываниям вида «число a больше числа b», «точка a не лежит между точками b и c», «явление a есть причина явления b» и т. п. придается соответственно вид «числа a и b характеризуются тем, что первое (по порядку написания) больше второго», «точки a, b и c имеют то свойство, что первая не лежит между второй и третьей», «явления a и b таковы, что первое есть причина второго» и т. д. [10]. Эта абстракция, нисколько не влияя (по договоренности) на содержание высказываний, позволяет охватить (с определенной точки зрения, конечно) все возможные высказывания, так что рассмотренный путь абстрагирования такого рода структур из эмпирических фактов речи можно принять за путь введения самого понятия о высказывании.

Изложенный способ выделения предикатов вполне адекватен способу, изложенному, например, в работе [7]· $P(\ )$, $P(\ ,\ )$, $Q(\ ,\ ,\ )$ и т. д., где пустые места могут быть заполнены субъектами. Однако в такой записи не учитывается упорядоченность субъектов, играющая существенную роль, так что в каждом случае приходится относительно этого договариваться.

Мы до сих пор не различали свойства и отношения: последние в рамках принятого словоупотребления суть частный случай свойств, обозначаемых многоместными предикатами. При этом, подчеркиваем, отношения обозначаются не просто словами «больше», «меньше», «причина», «между» и т. п., а выражениями типа «такой-то (такие-то) по порядку больше такого-то (таких-то) по порядку», «такие-то по порядку являются причиной таких-то по порядку» и т. п. Возможен другой путь: под свойствами и отношениями понимать соответственно то, что обозначается одноместными и многоместными предикатами. Но этот путь ничем не лучше первого, так как различие их чисто словесное.

В некоторых работах (например, в [60]) предикатами считаются высказывания $P(a)$, $Q(a, b)$ и т. п. В нашем словоупотреблении предикаты, как и предметные знаки, суть лишь части высказываний, но сами высказываниями не являются (в большинстве случаев принято такое словоупотребление).

§ 2. Постоянные и переменные субъекты и предикаты

Субъекты и предикаты различаются по степени общности. В отношении субъектов это очевидно («предмет» — «число» — «действительное число» — «целое число» — «5»). Что касается предикатов, поясним таким примером: частным случаем свойства предметов изменяться является свойство уменьшаться, частным случаем последнего — свойство уменьшаться вдвое; обозначающие их предикаты будут, соответственно, обладать меньшей степенью общности.

Степень общности не препятствует тому, чтобы какой-либо знак стал субъектом или предикатом. Поскольку мы исходим из понимания высказывания как некоторой знаковой структуры, то даже выражения вроде «предмет имеет свойство», «предмет не имеет свойства», «два предмета характеризуются свойством (находятся в отношении)» и т. п. являются высказываниями. Семантические соображения для нас здесь не существенны, поскольку для выяснения интересующих нас вопросов всегда можно ради упрощения допустить, что знаки свойств и предметов не являются пустыми по своему значению.

Различия субъектов и предикатов по степени общности в исчислении предикатов обобщаются понятиями постоянных и переменных субъектов и предикатов. Эти понятия несут дополнительную еще нагрузку, о которой скажем ниже. А пока сделаем два замечания к сказанному. В логической литературе часто в силу терминологического смешения предметов и свойств, с одной стороны, и субъектов и предикатов, с другой стороны, происходит соответствующее смешение и в отношении переменных и постоянных. Мы эти характеристики будем относить исключительно к субъектам и предикатам. В самом деле, на место переменного субъекта, например, можно поставить постоянный субъект, но на место стола вообще, например, поставить стол, относящийся к какому-то более узкому классу, или индивидуальный стол невозможно, так как первый не существует вообще наряду со вторыми. Второе замечание касается понимания постоянных субъектов как знаков индивидуальных предметов,— понимание весьма распространенное. Это понимание явно не является точным, так как в качестве постоянных могут выступать и общие знаки. Например, если предметная область задана как область чисел, то слово «число» будет играть роль переменной в высказывании, допустим, «Число не является простым»; в качестве постоянной может выступить не только знак конкретного числа, но и знак класса чисел; в частности, если в качестве постоянной возьмем выражение «число x^n (где x и n суть целые числа, большие единицы)», то получим в результате подстановки ее на место слова «число» определенное (по терминологии Гильберта) высказывание, а именно — истинное.

Возьмем высказывание «число a является простым», где выражение «число a» относится к любым числам. Является ли это высказывание истинным или ложным? Очевидно, все зависит от того, с каким числом будем сопоставлять это высказывание (или знак какого числа поставим на место выражения «число a»). Если это одно из чисел 11 и 13, то высказывание будет оценено как истинное, а если одно из чисел 8 и 9 — как ложное. Таким образом, наличие общих знаков позволяет строить высказывания, которые будут истинны в отношении одних предметов и свойств и ложны в отношении других (для случая двух значений истинности). Подстановка постоянных субъектов и предикатов на место переменных и придает высказываниям такого типа определенное значение истинности.

Переменные и постоянные субъекты и предикаты, собственно говоря, и можно определить так: переменные суть знаки предметов и свойств такой степени общности, что содержащие их высказывания имеют различные значения истинности в зависимости от того, с какими предметами и их свойствами они сопоставляются; постоянные суть такие знаки предметов и свойств, подстановка которых на место переменных придает высказываниям определенные значения истинности. Высказывание, содержащее переменные субъекты и предикаты, неопределенно в том смысле, что значения истинности его может меняться в зависимости от ситуации, с которой оно сопоставляется. Подстановка постоянных субъектов и предикатов на место переменных (предполагается подстановка на место всех переменных) и выражает это сопоставление, поскольку посредством постоянных описывается эта фактическая ситуация.

Если высказывание содержит несколько переменных, то превращение его в определенное высказывание происходит лишь в случае подстановки постоянных на место всех переменных . Так что различение постоянных и переменных для конкретных случаев высказываний оказывается весьма относительным: один и тот же субъект (и предикат) в одной комбинации подстановок может оказаться постоянным, а в другой — переменным. Например, если в высказывании «целое число *a* делится на целое число *b* без остатка» на место *b* поставить единицу, то получим определенное высказывание, и *a* будет оцениваться как постоянная; если же поставить на место *b* число 2, то *a* остается переменным. Поэтому приведенное определение постоянных и переменных субъектов и предикатов не даст абсолютного критерия различения их (переменных и постоянных) в конкретных высказываниях. Здесь можно сказать лишь следующее: если подстановка какого-либо субъекта (или предиката) на место имеющегося в высказывании дает определенное высказывание, то он является единственным переменным; если высказывание остается неопределенным, то либо имеются другие переменные, либо сам подставляемый субъект (предикат) является, в свою очередь, переменным. Так что логика не навязывает какого-либо одного единственно возможного толкования того или иного данного высказывания, полагая, что то или иное толкование зависит от познавательного контекста, в котором оно фигурирует.

Выражения, содержащие переменные, можно рассматривать как схемы или матрицы высказываний (см., например,

[7], [60]), которые лишь в случае подстановки постоянных превращаются в высказывания. В этом случае молчаливо предполагается определение высказывания через значения истинности (в двухзначной логике высказыванием считается то, что может быть истинным или ложным). Этот путь содержит, на наш взгляд, порочный круг: определение терминов «истинно», «ложно» и т. д. предполагает имеющееся уже понятие о высказывании как об определенной знаковой структуре (если имеется в виду именно определение терминов). Кроме того, обычная и научная речь полна высказываний с переменными субъектами и предикатами, не содержащими кванторов, и исключать их из числа высказываний просто нет смысла. Наконец, можно показать, что системы терминов, вводимых на этих различных путях, окажутся изоморфными: матрица высказывания будет соответствовать неопределенному (в указанном здесь смысле) высказыванию, высказывание — определенному высказыванию.

Сказанное выше охватывает не только случай двухзначных высказываний, но и вообще случаи любого числа значений истинности. Так что неопределенные высказывания можно рассматривать как n-значные в полном смысле этого слова. Правда, пока это — абстрактно мыслимая возможность получать в результате подстановки различные постоянные субъекты и предикаты на место переменных n типов высказываний, различающихся по значениям истинности. Однако можно привести и содержательные иллюстрации для этого.

Множество постоянных субъектов и предикатов, подстановка которых на место переменных придает высказываниям определенное значение истинности, назовем областью значений переменных субъектов и предикатов, а каждую из этих постоянных — значением соответствующей переменной. Рассмотрим высказывание с одноместным предикатом. Пусть P — постоянный предикат, а a — переменный субъект. Возможна такая картина:

1) $P(a) = 1$ для одних значений a;
2) $P(a) = 2$ для других значений a;

. . . .

n) $P(a) = n$ для n-ой группы значений a. В общем для некоторого множества значений a из всех возможных его значений $P(a) = i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Аналогично для переменного P, для переменных P и a, для двух и более переменных субъектов. Случай, когда сложное высказывание содержит несколько различных переменных предикатов (предикаты второго, третьего и т. д. порядка [7]), мы не рассматриваем. Однако сказанное в общей форме относится и к нему, поскольку и в этом случае значения истинности высказывания можно записать системой равенств значений.

В традиционной логике переменные и постоянные в неявной форме точно так же фигурировали. Аксиома «признак признака есть признак вещи» в какой-то мере выражает факт подстановки, если ее представить в следующей форме: Если верно, что $P(a)$, и если b есть значение a, то верно и $P(b)$. Для предикатов, однако, такую аксиому принять нельзя. Так, если в качестве значений предиката высказывания «температура данной массы газа увеличилась» принять знаки количественных градаций увеличения (например, «увеличилась вдвое»), то из истинности этого высказывания нельзя делать вывод «температура данной массы газа увеличилась вдвое». Вывод, очевидно, будет верен лишь в обратном направлении. Так что если верно $Q(a)$ и Q есть значение P, то верно и $P(a)$. Однако здесь можно установить терминологическое единообразие, приспособив определение значения переменного предиката к определению значения переменного субъекта. По рассматриваемой линии, то есть по линии выводов от общего к частному (и наоборот) многозначная оценка высказываний не затрагивает традиционной логики, оставляя ее в качестве самостоятельного фрагмента логики.

Многозначная оценка высказываний ни в какой мере не затрагивает структуру высказываний. С точки зрения содержания данного параграфа она говорит лишь о различном соотношении между высказываниями с переменными субъектами и предикатами и ситуациями, с которыми они сопоставляются, что и выражается в классификации значений переменных. Приведем два простых примера. Возьмем высказывание «число 4 имеет то свойство, что P». Пусть область значений P не ограничена. В таком случае возможны три класса значений.

1) значения P, превращающие данное высказывание в истинное («число 4 целое», «число 4 четное» и т. п.);

2) значения P, превращающие это высказывание в ложное («число 4 иррационально», «число 4 нечетное» и т. п.);

3) значения P, превращающие это высказывание в бессмысленное («число 4 желтое», «число 4 буржуазное» и т. п). Бессмысленность можно здесь рассматривать как третье значение истинности. Возьмем, далее, высказывание «предмет a имеет положительный заряд». Здесь точно так же возможны по крайней мере три класса значений a:

1) превращающие высказывание в истинное («протон»);

2) превращающие высказывание в ложное («электрон»);

3) превращающие высказывание в неопределенное, бессмысленное, в неподдающееся подтверждению и опровержению («кентавр»).

Мы привели бытовые, так сказать, примеры. Но и в науке такие случаи встречаются (см., например, [2]).

§ 3. Квантификация

Имеется другой способ придать высказываниям, содержащим переменные, определенные значения истинности. Это — связывание переменных посредством кванторов, то есть особых знаков, указывающих на число предметов и свойств, охватываемых субъектами и предикатами. Речь идет не буквально о пересчете, а об учете количественной стороны весьма «грубым» образом — посредством кванторов общности («все», «для всех») и существования («существует», «некоторые», «для некоторых»), обозначаемых (в частности) знаками Π и Σ. Смысл их предполагается привычно ясным. Отрицания их $N\Pi$ и $N\Sigma$ означают соответственно «не все» и «не существует» («ни один», «ни для одного»). Высказывания принимают вид: $(\Pi a)P(a)$, $(\Pi P)P(a)$, $(N\Pi a)(\Sigma b)P(a, b)$ и т. п., что читается так: «все a имеют P», «для всех P, a имеет P», «не для всех a существует b такой, что $P(a, b)$» и т. д. Приняв Π и $N\Pi$ за основные, можно через них определить Σ и $N\Sigma$: $(\Sigma a)P(\alpha) = (N\Pi a)NP(\alpha)$, $(N\Sigma a)P(\alpha) = (\Pi a)NP(\alpha)$; аналогично для ΣP и $N\Sigma P$; α содержит a или есть a. Из определений выводится, что $NN\Pi = \Pi$ и $NN\Sigma = \Sigma$.

Высказывание, содержащее переменные субъекты и предикаты, превращается в определенное высказывание, если все переменные либо замещаются постоянными, либо связываются кванторами, либо часть переменных связывается кванторами, а другая замещается постоянными. Важно здесь одно: каждый квантор связывает только один переменный субъект или предикат. Например, высказывание «число a четное» содержит один переменный субъект «число a». Эту переменную можно связать кванторами Π и Σ, получив высказывания: (Πa) (a четное), (Σa)(a четное). Первое ложно, так как не все числа четные, второе истинно, так как имеются четные числа. Высказывание «четное число имеет свойство P» содержит один переменный предикат «свойство P». Связав его кванторами, получим: (ΠP) (четное число имеет свойство P), (ΣP) (четное число имеет свойство P). Первое ложно, так как имеется P, которым не обладает четное число, например — свойство не делиться на два. Второе истинно, так как существуют такие P, например — свойство делиться на два. Высказывание с двумя переменными «число a делится на число b без остатка» может быть с помощью кванторов превращено в определенное по крайней мере четырьмя способами (Q — предикат высказывания): $(\Pi a)(\Pi b)$ $Q(a, b)$, $(\Pi a)(\Sigma b)$ $Q(a, b)$, $(\Sigma a)(\Pi b)$ $Q(a, b)$, $(\Sigma a)(\Sigma b)$ $Q(a, b)$. Только четвертое высказывание истинно, остальные же ложны.

Закон исключенного третьего для высказываний $P(a)$ имеет следующий вид: $(\Pi a)(\Pi P)$ $\{$либо $P(a)$, либо $NP(a)\}$ или, с учетом понятий исчисления высказываний, $(\Pi a)(\Pi P)$ $\{A[P(a)][NP(a)]\}$, то есть содержит два квантора и предикат A (аналогично закон противоречия можно сформулировать с учетом строения высказываний).

В традиционной логике кванторы выполняют и другую функцию, а именно — служат для выражения отношений общих и частных высказываний. Так, в традиционной логике известны такие, например, законы:

1) Если верно $(\Pi a)P(a)$, то верно и $(\Sigma a)P(a)$
2) Если верно $(\Pi a)NP(a)$, то верно и $(\Sigma a)NP(a)$
3) Если верно $(\Sigma a)P(a)$, то неверно $(\Pi a)NP(a)$
4) Если верно $(\Sigma a)NP(a)$, то неверно $(\Pi a)P(a)$
5) Если b есть значение a и верно $(\Pi a)P(a)$, то верно $P(b)$.

В исчислении предикатов они частично охватываются правилами подстановки, частично — другими правилами вывода, частично — определениями кванторов и выводимыми из них утверждениями; частично-выводимыми из аксиом утверждениями. Например, если приняты аксиомы (см. [7])

1) $C\{(\Pi a)P(a)\}\{P(b)\}$

2) $C\{P(b)\}\{(\Sigma a)P(a)\}$,

то используя правила вывода, получим: если верна аксиома 1 и верно $(\Pi a)P(a)$, то верно $P(b)$; если верна аксиома 2 и верно $P(b)$, то верно $(\Sigma a)P(a)$; значит, верно первое из приведенных выше утверждений $C\{(\Pi a)P(a)\}$ $\{(\Sigma a)P(a)\}$. Аналогично (или используя двойное отрицание) получим и второе из приведенных утверждений традиционной логики. В общем, принципы традиционной логики, связанные с отношением общего и частного (и отдельного), так или иначе охватываются в исчислении предикатов. И проблема, следовательно, сводится к следующему: исчерпывают или нет классические кванторы все возможности квантификации?

Каждый классический квантор, говорили мы, связывает только один переменный субъект или предикат. По самому смыслу кванторов очевидно, что выполняются двучленные отношения «либо все..., либо не все...» и «либо существует..., либо не существует...» (в смысле «либо некоторые..., либо ни один...»). Пусть x есть высказывание, все переменные которого, за исключением одной переменной α, связаны кванторами или замещены постоянными, так что превращение x в определенное высказывание зависит исключительно от α. Сказанное выше можно записать также в таком виде: $A\{(\Pi\alpha)x\}\{(N\Pi\alpha)x\}$, $A\{(\Sigma\alpha)x\}$ $\{(N\Sigma\alpha)x\}$. Так что связывание α любым из кванторов превращает высказывание либо в истинное, либо в ложное. И в этом (и только в этом) смысле кванторы Π и Σ двузначны.

§ 4. Обобщенная квантификация

Вопрос о введении кванторов, по отношению к которым классические кванторы являются лишь частным случаем, а также вопрос об аксиоматизации исчисления предикатов с такого рода кванторами, более или менее обстоятельно рассмотрен в работе [60]. Мы здесь рассмотрим только один вопрос, а именно — вопрос о возможности введения многозначных кванторов (будем использовать идеи только работы [60]).

Путь обобщения опирается на следующие идеи:

1) высказывание может принимать более двух значений истинности в зависимости от значений переменных субъектов и предикатов;

2) возможно построение кванторов, связывающих более одной переменной сразу.

В работе [60] исходным является предположение функций вида $F^i(a^1, \ldots, a^m, x^1, \ldots, x^k)$, где $m \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$, a — переменные субъекты, x — высказывания. Частный случай таких функций — функции двухзначной логики: $F^1(a, x) = (\Pi a)x$, $F^2(a, x) = (\Sigma a)x$, где a есть переменный субъект (по крайней мере один из субъектов) x. Как утверждается в [60], никто не обнаружил необходимости в кванторах с $m > 1$ или $k > 1$, но они возможны.

Рассмотрим следующий пример. Пусть даны следующие условия:

1) a и b — переменные субъекты;

2) $x = P(a, b, c^1, \ldots, c^m)$, $y = Q(a, b, c^1, \ldots, c^m)$;

3) x и y принимают различные значения истинности от 1 до n в зависимости от значений переменных a, b, $c^1 \ldots, c^m$; значение истинности x и y может зависеть только от части из них;

4) высказывание вида $F(a, b, x, y)$.

Определим значение истинности этого высказывания следующими предписаниями:

1) $F(a, b, x, y) = 1$ для данного множества значений $c^1, \ldots, c^m$, если и только если имеется такое значение a, что для данных значений $c^1 \ldots, c^m$ и для всех значений b (из данной предметной области) $Cxy = 2$;

2) $F(a, b, x, y) = 2$ для данного множества значений $c^1, \ldots, c^m$, если и только если для каждого значения a и b из данной предметной области и данного множества значений $c^1 \ldots, c^m$ $Kxy = 1$;

3) $F(a, b, x, y) = 3$ для данного множества значений $c^1, \ldots, c^m$, если и только если для каждого a и данных значений $c^1, \ldots, c^m$ имеется значение b из данной предметной области такое, что $Cxy = 3$;

4) $F(a, b, x, y) = 4$ для значений $c^1, \ldots, c^m$ во всех случаях, кроме указанных в предшествующих пунктах.

5) $F(a, b, x, y)$ не принимает значений $5, \ldots, n$.

Определенный таким образом знак F обладает всеми свойствами квантора: он учитывает число значений переменных и связывает их. Но он обладает рядом особенностей сравнительно с классическими Π и Σ:

1) он связывает две и более, переменных;

2) он превращает высказывание в n-значное (т. е. в высказывание, принимающее одно из n значений, где $n>2$);

3) он определен через классические кванторы, связывающие лишь по одной переменной; так что усмотреть противоречие между многозначной логикой и двузначной и по этой линии невозможно.

При введении кванторов, подобных F, можно воспользоваться символами двузначного исчисления высказываний (помимо знаков классических кванторов), так что и при построении многозначных исчислений предикатов двузначная логика достаточна. Приведем пример для случая $n = 4$. Пусть xi означает, что $x = i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. В таком случае $F(a, b, x, y)$ определится следующими положениями (каждая строка есть частичная нормальная форма, т. е. указывает, когда высказывание принимает значение истинности, равное номеру строки):

1) $(\Sigma a)(\Pi b)\ \{(x1Ky2)A(x2Ky3)A(x3Kx4)\}$

2) $(\Pi a)(\Pi b)\ \{x1Ky1)\}$

3) $(\Pi a)(\Sigma b)\ \{(x1Ky3)A(x2Ky4)\}$

4) $N\{(1)A(2)A(3)\}$,

то есть во всех случаях, кроме указанных в первых трех строках. В такой форме связь многозначных кванторов с двузначными и с двузначной логикой вообще очевидна.

Такого рода обобщение охватывает и двузначную логику в качестве частного случая также в следующем плане, который поясним примером. Пусть $F(a, b, x, y)$ определено так:

1) $(\Pi a)(\Pi b)Kx1y1$

2) в остальных случаях.

Здесь Π будет связывать несколько переменных. С другой стороны, оно распространяется и на случай одного переменного субъекта. Возьмем, например, $F\{a,P(a)\}$ и определим его так: $F\{a,P(a)\} = i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, если и только если существует такой a, что $P(a) = i$, и для каждого a $P(a) = k$, где $k \leqslant i$. Методом частичных нормальных форм определение запишется так (для упрощения записи пусть $P(a) = y$):

1) $\{(\Sigma a)y1\}K\{(\Pi a)y1\}$

2) $\{(\Sigma a)y2\}K\{(\Pi a)(y1Ay2)\}$

. . . .

n) $\{(\Sigma a)yn\}K\{(\Pi a)(y1Ay2A\ldots Ayn)\}$.

Таким образом, обобщение классических кванторов означает не изобретение новых кванторов, существующих наряду с ними, не ликвидацию принципов вроде «либо все..., либо не все...», «либо существует..., либо не существует...» и т. п. привычных, очевидных принципов, а обобщение отдельных функций кванторов — связывание любого числа переменных (в частности, одного) и введение при этом знаков, которые могут при связывании переменных превращать высказывание в n-значное (в такое, которое может принимать одно из n значений истинности).

Несколько слов об отрицании кванторов. Пусть x и y различаются только тем, что x содержит некоторый квантор, а y — его отрицание, и значение истинности x и y зависит только от квантора и его отрицания (мы тем самым взяли простейший случай). При таком предположении y можно рассматривать как функцию истинности от x и распространить на их взаимоотношения (на взаимоотношения квантора и его отрицания) положения исчисления высказываний. В классической логике имеют силу принципы: 1) «либо $\Pi\ldots(x)$, либо $N\Pi\ldots$ (y)», «либо $\Sigma\ldots$ (x), либо $N\Sigma\ldots$ (y)»; 2) «если одно из x и y истинно (ложно), то другое ложно (истинно)» и базирующийся на этом закон Axy $(y = Nx)$. Как будет обстоять дело с многозначными кванторами? Пусть F — многозначный квантор. Если N есть неопределенное отрицание (означает: «положение вещей не такое, как говорится в x»), то будет иметь силу более общий принцип «либо $F\ldots(x)$, либо $NF\ldots$ (y)». Что касается второго пункта, то здесь возможны различные определения N. В частности, N может быть определено таблицей, в которой y выступает как интуиционистское отрицание x. В таком случае по определению A и N не будет законом Axy. Возьмем еще один простой пример. Пусть C — импликация в смысле Лукасевича, $x = P(a, b)$, $y = Q(a,b)$. Определим $F(a, b, x, y)$ так:

1) $F(a, b, x, y) = 1$, если $Cxy = 1$ для всех a и для всех b;

2) $F(a, b, x, y) = 2$, если существуют a такие, что для всех b $Cxy = 2$;

3) $F(a, b, x, y) = 3$ в остальных случаях.
Легко видеть, что здесь как и в разобранных выше примерах, F выступает как сокращенное (по определению) обозначение условий истинности некоторого высказывания, содержащего переменные. И включая F в него, мы (согласно определению) превращаем его в определенное с точки зрения значения истинности. И только потому, что F связывает переменные и определяется посредством кванторов «все» и «существует», но оценивается как квантор.

В классической логике такого рода сокращение не требуется, поскольку для одной переменной и для двух значений истинности F^1 совпадает с Π, а F^2 — с Σ, например, определив F^1 таким образом:

1) $F^1\{a, P(a)\} = 1$, если для всех a $P(a) = 1$;

2) $F^1\{a, P(a)\} = 2$, если существует a такой, что $P(a) = 2$ (или если не для всех a $P(a) = 1$), мы фактически «определяем» квантор общности (здесь получается тавтологическое определение). Но достаточно взять две и более переменных или два или более значения истинности, как становится возможным введение посредством определений особых знаков F, обладающих свойствами кванторов. И эти знаки имеют смысл лишь в силу определений. Очевидность, характерная для кванторов классической логики, здесь отсутствует.

В случае двух и более переменных для классической логики введение F, связывающих несколько переменных, точно также возможно. Возьмем высказывание «$a > b$». Легко ввести F, связывающий сразу a и b: пусть $F\{a, b, (a > b)\}$ истинно, если $(\Pi a)(\Pi b)(a > b)$, и ложно, если $(\Sigma a)(\Sigma b)(a \leqslant b)$. Но здесь, как видим, не прибавляется ничего принципиально нового. Все дело упирается, очевидно, в многозначный характер высказываний $P(a)$, $P(a, b)$, $P(a, b, c)$ и т. д., а с философской точки зрения — в нахождение разумных интерпретаций для значений истинности во втором из рассмотренных выше смыслов, т. е. в нахождение определений значений истинности высказываний с учетом их структуры. Вопрос о том, насколько это целесообразно для практических целей науки, остается пока открытым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы далеко не исчерпали круга вопросов, относящихся к особенностям многозначных логических систем, к способам их построения, к их взаимоотношениям, к отношениям их к классической логике и т. д. Однако и на основе сказанного можно сделать тот вывод, что возникновение многозначной логики открывает более широкий подход к решению логических проблем, чем это давала классическая логика.

В заключение мы хотим подчеркнуть следующие два важных с философской точки зрения вывода, вытекающие из фактического рассмотрения многозначных логических систем и из сравнения их с двузначными системами. Первый состоит в том, что многозначная логика ни в коей мере не отвергает принципов классической логики, не вступает с ними в противоречие. Она лишь разрушает философские иллюзии абсолютности и априорности классической логики, способствуя уяснению природы ее и места в системе науки логики вообще. Второй вывод состоит в том, что несмотря на более тонкий подход к оценке человеческих знаний и правил мышления многозначная логика не превращается в диалектику или какой-то ее раздел. И всякие попытки представить возникновение многозначной логики как своего рода диалектизацию логики могут привести лишь к путанице, к бесплодным терминологическим спорам. Взять хотя бы проблему истины. Многозначная логика стимулирует постановку логико-семантической проблемы определения терминов (знаков вообще), обозначающих значения истинности, отличные от истинности и ложности, а также самих терминов «истинно» и «ложно» в этих условиях. Но отличие этой проблемы от проблемы истины в диалектике достаточно очевидно, чтобы допускать здесь какие бы то ни было смешения. Аналогично обстоит дело и с рядом других вопросов, которые рассматривались в данной работе.

Обсуждение философских вопросов логики вообще (и многозначной логики в частности) сталкивается с той трудностью, что логика, в отличие от других конкретных наук, в значительной своей части выступает как дисциплина философская. На протяжении всей работы мы стремились рассматривать философские вопросы многозначной логики на том уровне, на каком рассматриваются философские вопросы других наук, и по возможности избежать указанной трудности. Обсуждение этих вопросов, специфически ориентированное на указанную особенность логики, требует специальной работы более широкого содержания.

ПРИЛОЖЕНИЯ

This page intentionally left blank

К гл. I § 2

Инвариантность законов логики относительно формы записи имеет силу и для многозначной логики. Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется два варианта записи. Первый вариант: $1, \ldots, n$ — значения истинности ($n \geqslant 2$); $Axy = min\,(x, y)$; $Cxy = max\,(1, 1 - x + y)$; 1 соответствует истинности, n — ложности (в общем, чем меньше значение истинности, тем оно ближе к истинности). Второй вариант: $1, \ldots, 0$ — значения истинности; $Axy = max\,(x, y)$; $Cxy = min\,(1, 1 - x + y)$; 1 соответствует истинности, 0 — ложности. В обоих случаях имеет силу утверждение $Axy) = CCxyy$. Для первого варианта: $min(x, y) = max\,(1, 1 - max\,(1, 1 - x + y) + y)$; пусть $x = y$; тогда $y = max\,(1, 1 - 1 + y) = y$, так как $y \geqslant 1$; пусть $x > y$, тогда $y = max\,(1, 1 - 1 + y) = y$; пусть $x < y$; тогда $x = max\,(1, 1 - 1 + x - y + y) = x$. Для второго варианта: $max\,(x, y) = min\,(1, 1 - min\,(1, 1 - x + y) + y)$; пусть $x = y$, тогда $y = min\,(1, 1 - 1 + y) = y$, так как $y \leqslant 1$; пусть $x > y$; тогда $x = min\,(1, 1 - min\,(1, 1 - x + y) + y) = min\,(1, 1 - 1 + x - y + y) = x$, так как $x \leqslant 1$; пусть $x < y$; тогда $y = min\,(1, 1 - min\,(1, 1 - x + y) + y) = min\,(1, 1 - 1 + y) = y$.

Следует, однако, иметь в виду, что, когда речь идет об инвариантности законов логики, предполагается изоморфизм знаков, посредством которых они формулируются и определения которых принимаются во внимание при доказательствах. В приведенном примере имеет место взаимно однозначное соответствие множеств $1, \ldots, n$ и $1, \ldots, 0$ ($1 - 1, \ldots, n - 0$), а также определений A и C. Если это условие не выполняется, то ни о какой инвариантности законов логики речи быть не может. Возьмем, например, два таких варианта: 1) 1, 2, 3 — значения истинности; A и C определены так, как выше в первом варианте; $Nx = 4 - x$; 1 и 2 — отмеченные значения (высказывания, всегда принимающие значения 1 или 2, являются законами); 3 — неотмеченное; 2) 1, $^1/_2$, 0 — значения истинности; A и C определены так, как выше во втором варианте; $Nx = 1 - x$; 1 — отмеченное значение; 2 и 3 — неотмеченные. Определения N соответствуют друг другу в обоих вариантах, раз имеет место соответствие $1 - 1$, $2 - {}^1/_2$, $3 - 0$. Однако в силу того, что нет соответствия отмеченных (и следовательно, неотмеченных) значений, мы имеем здесь две различные логическое системы, а не две различные формы записи одной и той же. В самом деле, в первой, например, $AxNx$ будет законом, во второй же — нет (см. об этом гл. II § 2).

К гл. II § 1

Термины «классическая логика» и «неклассическая логика» не являются однозначными и не всегда употребляются как синонимы терминов соответственно «двухзначная логика» и «многозначная логика». Иногда классическими называют логические системы с законом исключенного третьего ($AxNx$, $KCNNxxCxNNx$), а неклассическими — без этого закона. Поскольку возможны многозначные логические системы, в которых сохраняется $AxNx$ (например, четырехзначная логика Лукасевича, получающаяся путем умножения матриц двузначной логики самих на себя и сохраняющая двузначное исчисление высказываний), то эти системы попадут в число классических в этом смысле слова. Иногда классическими называют истинностные построения логических систем, а неклассическими — логические системы, выходящие за рамки таких построений (модальная логика, системы строгой импликации и т. д.). Но в таком словоупотреблении истинностные построения многозначной логики попадут в число классических, сами же неклассические системы, будучи интерпретированы как истинностные многозначные (модальная логика Лукасевича, система строгой импликации Аккермана и т. д.), должны быть также зачислены в число классических. Встречаются и другие словоупотребления, ведущие к аналогичным недоразумениям.

Дело, конечно, не в названиях. Но за тем или иным словоупотреблением скрываются порой принципиальные оценки отдельных направлений логической мысли. Поскольку речь идет о многозначной логике, то различные течения логики, выступавшие и выступающие под именем неклассических в любом смысле слова, служили источником формирования идей многозначной логики как логики, исходящей из допущения возможности более двух значений истинности. И лишь с этой точки зрения можно говорить о многозначной логике как неклассической в различных употребляющихся смыслах этого слова, если заранее не оговорена, как это сделано у нас, синонимичность выражений «многозначная логика» и «неклассическая логика». Подчеркиваем, что здесь имеется в виду лишь одна определенная точка зрения на взаимоотношения логических систем, не исключающая другие. В частности, логические системы можно различать по способу построения как аксиоматические и истинностные. Здесь же принимаются во внимание исходные содержательные гипотезы о числе значений истинности высказываний (о числе значений аргументов и функций, если пользоваться более общей терминологией) и рассматриваются вытекающие из них следствия.

К гл. II § 2

В работе «Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики» (перевод с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959) Я. Лукасевич пересмотрел свою точку зрения на модальную логику и применил к ней вместо трехзначной логики четырехзначную, в которой сохраняются принципы классического исчисления высказываний. Однако это обстоятельство не влияет на изложенное в данной работе, так как здесь речь идет лишь об иллюстрации для общей идеи, а не о достоинствах и недостатках того или иного подхода к модальной логике. Кроме того, ранние работы Лукасевича, на которые мы ссылались, никогда не утратят своего значения как источник самой идеи многозначной логики независимо от того, удачно или неудачно в них решались проблемы модальной логики.

Четырехзначная логика, которая применяется Лукасевичем в упомянутой здесь работе, строится путем умножения двузначных матриц импликации и отрицания каждой на саму себя. Метод умножения матриц рассмотрен нами во втором параграфе третьей главы. Остановимся на этом еще раз, поскольку это дополнит решение вопроса о взаимоотношении двузначной и многозначной логики, а также о взаимоотношении различных вариантов многозначных логических построений.

Пусть 1 и 0 — значения истинности. Из них можно образовать упорядоченные пары значений (1,1), (1,0), (0,1) и (0,0). Условимся, что $C(a, b)(c, d) = (Cac, Cbd)$ и $N(a, b) = (Na, Nb)$, где $a, b, c, d = 1,0$. Выяснив, какие пары значений будут соответствовать $C(a, b)(c, d)$ и $N(a, b)$ в каждом случае и заменив пары (1,1), (1,0), (0,1) и (0,0) соответственно знаками 1, 2, 3 и 0, мы получим определения четырехзначных C и N. Таким же методом можно определить восьмизначные, шестнадцатизначные и т. д. C и N, взяв тройки, четверки и т. д. значений.

Аналогично определяются A и K, а именно по принципу: $A(a, b)(c, d) = (Aac, Abd)$, $K(a, b)(c, d) = (Kac, Kbd)$. Нетрудно убедиться в том, что законы классического исчисления высказываний сохраняются. Если закон есть высказывание, всегда принимающее значение 1 (истинно), то сохраняют силу законы исключенного третьего $AxNx$ и противоречия $NKxNx$. Сохраняются и равнозначности $Cxy = ANxy$ и $Cxy = NKxNy$. В общем получаемые таким методом многозначные логические построения можно рассматривать как многозначные интерпретации принципов классической логики высказываний. Как видим, многозначная логика не обязательно должна отвергать законы классической логики. Это имеет значение при определении многозначной логики; определение ее как логики, в которой высказываниям может приписываться более двух значений истинности, является наиболее подходящим.

Если в многозначной логике, строящейся путем умножения двухзначных матриц, можно в качестве основных функций вместо C и N взять A и N (или K и N), поскольку C может быть определена через A и N (или через K и N), то в трехзначной логике Лукасевича это сделать невозможно. Дело в том, что здесь $Cxy = 1$ в случае, если $x = {}^1/_2$ и $y = {}^1/_2$: $C{}^1/_2{}^2/_2 = min\,(1,1 - {}^1/_2 + {}^1/_2) = 1$. А любое высказывание, построенное из знаков x, y, K и N (или x, y, A и N), при $x = {}^1/_2$ и $y = {}^1/_2$ будет иметь значение ${}^1/_2$, так как $N{}^1/_2 = {}^1/_2$.

К гл. III § 5

Систему Рейхенбаха мы привели исключительно потому, что в ней, помимо рассмотренных ранее взаимоотношений многозначной и двузначной логик, а также ориентации ее на определенную интерпретацию, обращено внимание на следующее важное обстоятельство: в рамках многозначной логики не исключаются двузначные высказывания, которые принимают соответствующие истинности и ложности значения. Это обстоятельство важно с точки зрения методологии науки, поскольку многозначность при этом интерпретируется как ограничение на рассуждения с обычными двузначными высказываниями, накладываемое в определенных условиях познания.

Наличие в рамках многозначной логики двузначных высказываний объясняется просто. Во-первых, во всяком n-значном ($n \geqslant 2$) построении содержится класс функций, принимающих только два значения, хотя аргументы могут принимать более двух значений. К числу таких функций относятся, например, отрицание в системе Гейтинга, альтернативная импликация и альтернативная эквивалентность в системе Рейхенбаха и т. п. Во-вторых, двузначные высказывания можно построить посредством знаков многозначных функций. Например, в трехзначной логике Лукасевича Cxy, Kxy, Axy и Nx принимают все три значения истинности 1, $^1/_2$ и 0, но с помощью знаков функций C, K, A и N можно построить высказывания, принимающие только два значения 1 и 0. Таким является $CAxNxKxNx$, в чем легко убедиться: $CA1N1K1N1 = CA10K10 = C10=0$, $CA0N0K0N0 = CA01K01 = C10=0$, $CA^1/_2N^1/_2K^1/_2N^1/_2 = C^1/_2{}^1/_2 = 1$.

Можно указать еще третий путь: берется любое высказывание, построенное посредством знаков многозначных функций, и накладывается ограничение на принимаемые им значения истинности; выясняется затем, каким значениям аргументов соответствует это ограничение, то есть при каких условиях высказывание становится двузначным. Например, если 1, 2, ..., n суть значения истинности, $Cxy = max\ (1,1 - x + y)$, $Axy = max\ (x, y)$ и $Nx = (x + 1)$ $(n + 1 = 1)$, то $CAxNxNNy = 1$, если $x \geqslant y + 1$, и $CAxNxNNy = n$, если $y = n - 3 + x$ или $y = n - 2 + x$. Для $n = 3$ это высказывание будет иметь значение 2 только в случае, если $x = 1$ и $y = 3$. Ограничение, о котором говорится здесь, означает исключение этого случая из числа возможных.

К гл. IV § 1

Можно привести еще следующий пример функционально полного трехзначного исчисления. Пусть 1, 2 и 3 — значения истинности. Примем следующие функции в качестве основных: 1) $Axy = min\ (x, y)$; 2) $Bxy = 2$, если $x = y = 2$; $Bxy = 3$, если $x = y = 3$; $Bxy = 1$ в остальных случаях; Bxy есть своеобразное обобщение двузначной дизъюнкции, отличное от Axy; 3) $Nx = 4 - x$; 4) $Mx = (x + 1)$ $(1+3=1)$. Через эти функции можно определить Cxy в смысле $Cxy = max\ (1,1 - x + y)$ и Tx в смысле $Tx = 2$, таким образом: $Cxy = AANxyMMBxy$, $Tx = MBxMx$. Поскольку построение $C - N - T$ функционально полно, таким же будет и построение $A - B - M - N$. Приведенные определения легко проверить: $T1 = MB1M1 = MB12 = M1=2$, $T2 = MB2M2 = MB23 = M1=2$, $T3 = MB3M3 = MB31 = M1=2$. Аналогичную проверку можно произвести для C. Дело в том, что матрица для $ANxy$ отличается от матрицы Cxy только тем, что при $x = y = 2$ $Cxy = 1$, а $ANxy = 2$; $MMB22 = MM2 = 1$, $MMB33 = MM3 = 2$ и $MMBxy$ в остальных случаях имеет значение 3, так что в случае $x = y = 2$ $AANxyMMBxy = 1$, а в прочих случаях сохраняется значение $ANxy$.

Мы привели пример с исчислением $A - B - M - N$ не только для того, чтобы проиллюстрировать возможность выбора различных вариантов основных функций, но также для того, чтобы обратить внимание на следующее важное обстоятельство. Функции B и M можно рассматривать как своеобразное обобщение двузначных дизъюнкции и отрицания, отличное от обобщения их соответственно функциям A и N. В этом легко убедиться: при $n = 2$ $M1 = 2$, $M2 = 1$, $B11 = 1$, $B12 = 1$, $B21 = 1$, $B22 = 2$.

Таким образом, в рамках одного и того же многозначного логического построения возможны различные обобщения двузначной логики, так что судьба двузначных законов может оказаться многоплановой. В рассмотренном примере $BxMx$ выступает как обобщение закона исключенного третьего. При этом $BxMx = 1$ при $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$, так что, если в качестве законов (тавтологий) принимаются высказывания, всегда имеющие значение истинности 1, $BxMx$ оказывается законом и в трехзначной логике, чего нельзя сказать об $AxNx : A2N2 = A22 = 2$. Таким образом, говоря о сохранении или несохранении того или иного закона двузначной логики в некотором многозначном построении, необходимо точно указывать, какого рода обобщение двузначных функций имеется в виду (множество примеров на этот счет приведено в гл. III § 5).

Это замечание очень важно. Дело в том, что среди возможных функций любого n-значного исчисления высказываний найдется по крайней мере по одной функции A^* и N^* таких, что эти функции суть соответственно обобщения двузначных A и N, и при любом определении закона (при любом выборе значений, при которых высказывания считаются утверждаемыми) A^*xN^*x будет законом. Для обобщения A и N необходимо следующее условие: если значение a $(1 \leqslant a \leqslant n)$ соответствует истинности, а значение b — ложности, то $N^*a = b$, $N^*b = a$, $A^*aa = A^*ab = A^*ba = a$ и $A^*bb = b$. Таким образом, в рассматриваемом смысле закон исключенного третьего сохраняет силу в любом n-значном исчислении высказываний (в форме A^*xN^*x). Сказанное относится и к прочим основным законам двузначной логики (с соответствующими коррективами на определения функций). Того, что говорилось выше, достаточно для возникновения сомнений в целесообразности употребления выражения «закон исключенного третьего» в применении к законам логических исчислений (ниже мы к этому еще вернемся).

К гл. IV § 4

Аксиоматические построения имеют, конечно, и самостоятельное, независимое от функциональных построений значение. Но в данном случае речь идет о многозначной логике, а каким с этой точки зрения является то или иное аксиоматическое построение исчисления высказываний, по самому виду аксиоматики не всегда можно определить. А если учесть, что возможны различные функциональные интерпретации одной и той же аксиоматической системы, то общие критерии такого определения исключаются. Кроме того, в силу самой задачи аксиоматических построений определить класс выводимых высказываний (дать метод различения выводимых и невыводимых высказываний) деление высказываний по значениям истинности отступает на задний план. Высказывания здесь делятся, например, на две (выводимые и невыводимые) или на три группы (если имеются высказывания, относительно которых в данном исчислении нельзя сказать, выводимы они из аксиом или нет) по отношению к данным аксиомам и правилам вывода. Утверждаемые высказывания вообще могут быть определены как аксиомы и выводимые из них следствия, т. е. без ссылок на значения истинности, так что аксиоматические построения не сами по себе являются мнозначными, а лишь как средство решения определенных задач многозначной логики.

К гл. IV § 6, 7, 8

Интерес к закону исключенного третьего, в связи с вопросом о взаимоотношении двузначной и многозначной логики, обусловлен не только тем, что сомнения в его абсолютности послужили одним из источников идеи многозначной логики, но и по самому существу этого закона: здесь наиболее отчетливо выступают рассматриваемые взаимоотношения.

Прежде всего необходимо учитывать, что закон исключенного третьего может быть сформулирован в нескольких различных формах: 1) каждое высказывание либо истинно, либо ложно; 2) каждое высказывание либо имеет некоторое значение истинности, либо не имеет его (имеет какое-то другое значение истинности из числа возможных, исключающее первое); 3) $AxNx$. Возможны и другие формулировки. Мы здесь ограничимся этими.

Вторая формулировка применима к истинности и ложности в следующем смысле: каждое высказывание либо истинно (ложно), либо не является истинным (ложным). И лишь постольку, поскольку число значений истинности ограничивается двумя, мы получаем в качестве частного случая первую формулировку, так что вторая формулировка является более общей. Она сохраняет силу и для многозначной логики. Первая же по самому исходному допущению других значений истинности, кроме истины и лжи, теряет характер общности.

Третья формулировка является следствием допущения, указанного в первой формулировке, следствием определения A и N. Но, с другой стороны, третья формулировка является более общей, чем вторая; во второй имеется в виду высказывание x конкретного содержания: «Высказывание a имеет значение i», а также его конкретное отрицание Nx: «Высказывание a не имеет значения i»; в третьей же имеется в виду любое x. Получающийся здесь «парадокс», как и вообще упоминавшийся в данной работе «парадокс» построения логики, разрешается, как уже говорилось, наличием некоторых практических навыков мышления. Но здесь важно другое.

Судьба двузначного закона $AxNx$ в том или ином многозначном функциональном построении всецело зависит от определений A

и N, а также тавтологии (закона). Здесь, как мы видели, возможны самые различные определения, хотя во всех этих определениях A и N выступают как обобщения двузначных (без этого всякое сравнение лишено смысла). Для одних определений $AxNx$ останется законом (например, четырехзначная логика Лукасевича), для других — нет (например, трехзначная логика Лукасевича). Зависимость от определения закона можно проиллюстрировать следующим примером. Возьмем трехзначную логику Лукасевича, но определим тавтологию как высказывание, всегда принимающее одно из значений 1 и $^1/_2$. В таком случае $AxNx$ окажется тавтологией: $A1N1 = 1$, $A0N0=1$, $A^1/_2N^1/_2 = {}^1/_2$.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Если A и N интерпретируются в некоторой многозначной логике и при этом $AxNx$ является законом, то $AxNx$ не будет уже законом исключенного третьего в собственном смысле этого слова: здесь выражение «Закон исключенного третьего» выступает лишь как название для $AxNx$, но не как название соответствующего закона. В двузначной логике имеет место совпадение, но оно обусловлено тем, что $AxNx$, действительно, в некотором смысле есть экспликация закона исключенного третьего.

Говоря о том, что в некотором данном логическом построении не имеет силы закон исключенного третьего, надо точно указывать, что имеется в виду: экспликация этого закона в форме $AxNx$ (или $KCNNxxCxNNx$) или иная его формулировка. Иначе неизбежна путаница. Возьмем, например, четырехзначную логику Лукасевича. Утверждение «каждое высказывание либо истинно, либо ложно» здесь будет ошибочным. Здесь будет иметь силу утверждение «каждое высказывание либо имеет значение истинности 1, либо 2, либо 3, либо 0». Однако утверждение $AxNx$ сохраняет силу. Сохраняет силу и утверждение «каждое высказывание либо имеет значение истинности i ($i = 1, 2, 3, 0$), либо не имеет его (имеет какое-то другое из числа четырех возможных». Все сказанное выше относится и к другим законам логики.

Отметим, наконец, что сам термин «закон» употребляется как синоним аксиомы и тавтологии. В функциональных построениях $AxNx$ не есть аксиома, если даже и доказывается его тавтологичность; последняя именно доказывается. Если в этих построениях выделить исходные положения, принимаемые аксиоматически, то в числе их должны быть названы предположения о числе взаимоисключающих значений истинности. В двухзначной логике предположение двузначности высказываний тесно связано с определением N. Однако определение N не всегда выражает гипотезу двузначности, если даже $AxNx$ есть тавтология (примеры приводились). В многозначных построениях вообще гипотеза о числе значений истинности не совпадает с определением N, так как здесь возможны различные обобщения отрицания. В аксиоматических построениях $AxNx$ не обязательно фигурирует в числе аксиом, если даже оно приемлемо (например, в системах C — N), так что вообще проблема «закона исключенного третьего» есть совокупность различных проблем, решаемых на пути дифференциации и уточнения ряда терминов и рассмотрения фактических взаимоотношений логических теорий и их отдельных положений.

Для закона противоречия возможны по крайней мере такие формулировки: 1) не может быть, чтобы высказывание было истинно и одновременно ложно; 2) не может быть, чтобы высказывание имело и одновременно не имело некоторое значение истинности из числа возможных; 3) $NKxNx$. В отличие от закона исключенного третьего первая формулировка закона противоречия сохраняет силу и в многозначной логике. Рассуждения относительно третьей формулировки аналогичны рассуждениям о $AxNx$: судьба ее зависит от определений K, N и закона (тавтологии). Соотношения $AxNx$ и $NKxNx$ также возможны разнообразные: в зависимости от определений они могут быть равнозначными и неравнозначными.

К гл. V § 1, 2

Понимание значений истинности высказываний при условии допущения любого конечного или счетного бесконечного множеств таких значений является, пожалуй, одной из центральных философских проблем современной логики. Напоминаем, что речь здесь идет не об интерпретации выражений «высказывание x имеет значение истинности i» в терминах той или иной конкретной отрасли науки, а об общих определениях условий, когда высказывание x оценивается как имеющее значение истинности i.

Существующие точки зрения на этот счет, о которых мы частично говорили, можно разбить на две группы (см. об этом [12]). К первой группе относятся такие толкования дополнительных, кроме истинности и ложности, значений истинности, согласно которым эти значения ставятся в зависимость от осуществления, осуществимости или важности проверки высказываний. При этом охватывается лишь трехзначная логика, где третье значение определяется так: неизвестно (нельзя установить, безразлично и т. п.), истинно или ложно высказывание. Кроме того, при таком подходе остается неясным характер высказывания: может оказаться, что либо оно имеет одно из двух значений истинности, либо оно истинно для одних условий и ложно для других, либо оно не истинно и не ложно в одних и тех же условиях в силу самих определений истинности и ложности и т. п.

Ко второй группе относятся такие толкования, согласно которым значения истинности рассматриваются как не зависящие от осуществления, осуществимости или важности проверки высказываний. Различные варианты их перечислены также в [12]. В большинстве из них значения истинности сводятся к вероятности или модальности, так что проблема дополнительных значений истинности утрачивает свою специфику. В ряде работ этой группы (Бочвар, Рейхенбах и др.) третье значение истинности не сводится к истинности и ложности, а также к модальности и вероятности: если высказывание имеет третье значение истинности, оно не является ни ложным, ни истинным. Однако и в этих работах авторы понимают третье значение как бесмысленность, как невозможность подтверждения и опровержения и т. п., что еще далеко от требования общности определений.

Характерно, что в подавляющем большинстве случаев высказывания берутся как нечто элементарное, не расчленяемое на части.

В тех же случаях, когда структура высказываний затрагивается, учет ее в истолковании значений истинности и во введении их определений не осуществляется. Так, в работе Рейхенбаха в число неопределенных зачисляются высказывания о ненаблюдаемых объектах и потому не поддающиеся проверке (если предмет невозможно наблюдать, то нельзя установить, имеет он некоторое свойство или нет); в работе Россера и Тёркетта при рассмотрении основ квантификации в многозначной логике допускается возможность, что высказывания P $(a, b,...)$ могут принимать n значений истинности в зависимости от значений переменных. В первом случае косвенно, а во втором прямо затрагивается строение высказываний, однако оно не поставлено в связь с возможностью значений истинности, кроме классических (во втором случае значения истинности интерпретируются через классификацию значений переменных).

Мы не утверждаем, что учет структуры высказываний для понимания значений истинности является единственным приемлемым путем. Наоборот, чем разнообразнее будут поиски на этот счет, тем шире будут возможности использования идей и аппарата многозначной логики. Однако и этот путь целесообразно было бы использовать как один из возможных. Реализация его связана с преодолением ряда трудностей, касающихся разработки общей теории знаков, теории связей соответствия и т. п., поскольку при этом высказывания берутся как упорядоченные определенным образом совокупности различного рода знаков, а процесс установления характера их соответствия действительности (их значения истинности) — как упорядоченная процедура сопоставления элементов высказываний с предметами, свойствами, отношениями и связями данной ситуации. Мы имеем здесь в виду не эмпирическую проверку высказываний, а принципиальную схему определений, которые позволяли бы делать выводы типа: x имеет значение истинности i, значит, согласно определению i, истинно y. Собственно говоря, это лишь усложнение двузначной схемы для ложности: x ложно, значит, по определению, истинно Nx.

Следовало бы, пожалуй, от интерпретаций многозначных логических систем отличать такое их использование, которое само нуждается в какой-то интерпретации. Приводившийся пример с определением Mx через $CNxx$ характерен в этом отношении. Это определение позволяет установить непротиворечивость некоторых интуитивных предписаний для Mx и определить Mx как трехзначную функцию x. Однако сама трехзначность при этом останется без интерпретации. Сказанное относится вообще к использованию многозначной логики для решения проблем самой логики — вопрос, требующий специального обсуждения.

К гл. VI § 2

В некоторых работах (например, в работе Я. Лукасевича «Аристотелевская силогистика...») различие переменных и постоянных понимается как различие употребляемых в логике символов и любых конкретных терминов, подставляемых на их место. Это понимание вряд ли можно считать удачным. Дело в том, что в логике приходится вводить символы не только для переменных, но и для постоянных, так что обнаруживается неясность такого понимания: символы переменных и постоянных все попадают в число переменных. Кроме того, при таком понимании возникают трудности, которые поясним примером. Пусть имеется выражение «*a* есть простое число», где *a* — переменная. Поставим на место *a* термин «действительное число», который по идее должен быть постоянной, то есть превращать это высказывание в определенное по значению истинности. Но что получается на деле? Выражение «Действительное число есть простое число» в двузначной логике либо должно трактоваться как «всякое действительное число есть простое число» (т. е. должен добавляться еще квантор, связывающий... постоянную!), либо как выражение с переменной «действительное число». В изложенном нами понимании такие недоразумения устраняются, а случай, когда в качестве переменных берутся любые символы (или пустые места в выражениях), охватывается как предельный. Например, при интерпретации значений истинности высказываний как классификации значений переменных выражения вроде «действительное число» можно рассматривать как постоянные, если из них образован особый класс, соответствующий некоторому значению истинности, отличному от истинности и ложности.

К гл. VI § 4

В рассмотренных примерах речь шла о переменных субъектах. Но можно охватить обобщенной квалификацией и предикаты, построив более общие рассуждения. Эти примеры приводились исключительно с целью иллюстрации самой возможности введения обобщенных кванторов. Но задача заключается во введении таких кванторов, с помощью которых можно было бы построить многозначное обобщение классического исчисления предикатов (как это сделано, например, в работе [60]). Многозначное исчисление предикатов точно так же не вступает в конфликт с классическим: оно само строится средствами классической логики, а по содержанию не противоречит ей.

В примере, который приводился в § 4 гл. VI, при определении многозначного квантора в определяющей части фигурировали функции исчисления высказываний (C и K). Причем эти функции принимали только два значения истинности. Возможно ли в таком случае первую предпосылку, т. е. многозначный характер высказываний $P(a, b, \ldots)$ и $Q(a, b, \ldots)$, исключить из числа необходимых для обобщенной квантификации? Дело в том, что исчисление предикатов есть надстройка над исчислением высказываний (аксиомы первого присоединяются к аксиомам второго), так что, хотя Cxy, Kxy и другие функции могут в определениях принимать лишь два значения истинности, это не устраняет их многозначного характера как функций соответствующего многозначного исчисления высказываний. Таким образом, первая предпосылка обобщенной квинтификации (допущение, что высказывания могут принимать n значений истинности в зависимости от значений переменных) существенно важна.

Как отмечалось, одна из задач обобщенных кванторов — возможность связывать более одной переменной. К этому надо добавить еще, что обобщенные кванторы могут связывать более одного высказывания в процессе квантификации (относиться более чем к одному высказыванию). Это видно из приводившихся примеров.

В определениях рассмотренного типа обобщенные кванторы определяются через классические. Но принципиально допустим другой путь: произвести обобщение классических кванторов только по линии числа значений истинности высказываний, а затем с помощью обобщенных таким образом кванторов определить кванторы, связывающие более одной переменной.

Пусть x есть высказывание с одной единственной переменной a. Классические кванторы содержательно можно интерпретировать таким образом: 1) $(\Pi a)x = K(x^1, x^2, \ldots)$, где $x^1, x^2, \ldots$ суть высказывания, образующиеся путем подстановки на место a всех возможных ее значений, а K — двузначная конъюнкция; 2) $(\Sigma a)x = A(x^1, x^2, \ldots)$, где A — двузначная дизъюнкция. Если 1 есть истинность, а 2 — ложность, то $K(x^1, x^2, \ldots) = max\ (x^1, x^2, \ldots)$ и $A\ (x^1, x^2, \ldots) = min\ (x^1, x^2, \ldots)$. Поскольку множество значений a делится на два подмножества, из которых одно соответствует истинности, а другое — ложности, то высказывания $(\Pi a)x$ и $(\Sigma a)x$ двузначны.

Но множество значений a можно разбить на n подмножеств, соответствующих значениям истинности $1, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$. В таком случае, сохраняя определения K и A, мы получим многозначные Π и Σ: высказывания $(\Pi a)x$ и $(\Sigma a)x$ принимают значение истинности из числа $1, \ldots, n$ в зависимости от классификации значений a.

Между классическими кванторами и их отрицаниями имеют место определенные отношения, например такие: если $(\Pi a)x = 1$, то $(\Sigma a)x = 1$; если $(\Pi a)x = 2$, то $(\Sigma a)x = 1$ или 2; если $(\Pi a)x = 1$, то $(N\Pi a)x = 2$; если $(\Pi a)x = 2$, то $(N\Pi a)x = 1$ и т. п. Аналогичные и вместе с тем обобщающие отношения можно установить и между многозначными Π и Σ, например: если $(\Pi a)x = 1$, то $(\Sigma a) x = 1$; если $(\Pi a)x = 2$, то $(\Sigma a)x = 1$ или 2; если $(\Pi a)x = 3$, то $(\Sigma a)x = 1$ или 2 или 3;...; если $(\Pi a)\, x = n$, то $(\Sigma a)\, x = 1$ или 2 или ... или n; если $(\Pi a)x = i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то $(N\Pi a)x = n - i + 1$ и т. д. Теперь обобщенные Π и Σ могут фигурировать в определениях кванторов, связывающих более одной переменной.

Рассмотренное обобщение классических кванторов можно выразить и через классические кванторы: 1) $(\Pi^* a)x = i$, если $(\Sigma a) \cdot x = i$ и $(\Pi a)x \leqslant i$; 2) $(\Sigma^* a)x = i$, если $(\Sigma a)x = i$ и $(\Pi a)x \geqslant i$ (Π^* и Σ^* — обобщенные кванторы). Это можно сделать и для двоек, троек и т. д. переменных. Например, $(\Pi^* a, b)x = i$, если $(\Sigma a, b)x = i$ и $(\Pi a, b)x \leqslant i$, где $(\Sigma a, b)$ и $(\Pi a, b)$ означают соответственно «существует двойка значений a и b» и «для всех двоек значений a и b».

ЛИТЕРАТУРА

[1] Биркгоф Г. Теория структур. М. Издательство иностранной литературы, 1952.

[2] Бочвар Д. А. Об одном трехзначном исчислении. Математический сборник, т. 4 (46), № 2, 1938.

[3] Бочвар Д. А. К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления. Математический сборник, т. 12 (54), № 3, 1943.

[4] Воробьев Н. Н. Проблема выводимости в конструктивном исчислении высказываний с сильным отрицанием. Доклады Академии наук СССР, т. LXXXV, № 4, 1952.

[5] Воробьев Н. Н. Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием. Доклады Академии наук СССР, т. LXXXV, № 3, 1952.

[6] Воробьев Н. Н. Новый алгорифм выводимости в конструктивном исчислении высказываний. Труды Математического института Академии наук СССР, т. LII, 1958.

[7] Гильберт Д. и Аккерман В. Основы теоретической логики. Издательство иностранной литературы, 1947. Изд. 2. М.: КомКнига/URSS, 2010.

[8] Гливенко В. Кризис основ математики на современном этапе ее развития. Фронт науки и техники, № 4, 1934.

[9] Жегалкин И. И. О проблеме разрешимости в броуэровской логике предложений. Труды II Всесоюзного математического съезда, т. 2, 1934.

[10] Зиновьев А. А. Логическое строение знаний о связях. Логические исследования. Изд-во АН СССР, 1959.

[11] Зиновьев А. А. Следование как свойство высказываний о связях. Научные доклады высшей школы, философские науки, № 3, 1959.

[12] Зиновьев А. А. Проблема значений истинности в многозначной логике. Вопросы философии, № 3, 1959.

[13] Зиновьев А. А. и Ревзин И. И. Логическая модель как средство научного исследования. Вопросы философии, № 1, 1960.

[14] Клини С. К. Введение в метаматематику. Издательство иностранной литературы, 1957. Изд. 2. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2009.

[15] Колмогоров А. Н. О принципе tertium non datur. Математический сборник, № 32, 1925.

[16] Кузнецов Б. Г. Основы квантово-релятивистской логики. Логические исследования. Изд-во АН СССР, 1959.
[17] Ленин В. И. Философские тетради.
[18] Маркс К. Капитал.
[19] Маркс К. Теории прибавочной стоимости.
[20] Пильчак Б. Ю. О проблеме разрешимости для исчисления задач. Доклады Академии наук СССР, т. LXXV, № 6, 1950.
[21] Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. Издательство иностранной литературы, 1948.
[22] Шанин Н. А. О конструктивном понимании математических суждений. Труды Математического института Академии наук СССР, т. LII, 1958.
[23] Шестаков В. И. Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами. Известия Академии наук СССР, серия математическая, № 10, 1946.
[24] Шестаков В. И. Моделирование операций исчисления предложений посредством простейших четырехполосных схем. Вычислительная математика и вычислительная техника, сборник 1, 1953.
[25] Шестаков В. И. О двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний. Применение логики в науке и технике (готовится к печати в Издательстве Академии наук СССР).
[26] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике. Труды Математического института Академии наук СССР, т. LI, 1958.
[27] Яновская С. А. Математическая логика. Математика в СССР за сорок лет. Москва, 1959.
[28] Ackermann W. Die Begründung der strenge Implikation. The Journal of Symbolic logic, v. 21, № 2, 1956.
[29] Birkhoff G. and I. V. Neumann. The logic of quantum Mechanics. Annals of Mathematics, v. 37, № 4, 1936.
[30] Borkowski L. Z nowych badań nad rachunkiem zbań. Studia Logica, t. 5, 1957.
[31] Brouwer L. E. I. Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. 33, 1925.
[32] Brouwer L. E. I. Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 154, Heft 1, 1924.
[33] Destouches-Février P. La structure des théories physiques. Paris, 1951.
[34] Destouches I. L. Principes fondamenteaux de physique théorique. Paris, 1942.

[35] Frey G. Bemerkungen zum Problem der mehrwertigen Logiken. Proceedings of the second international congress of the international Union for the Philosophy of Science. Zürich, 1954. Neuchatel, 1955.

[36] Gentzen G. Untersuchengen über das logische Schliessen. Mathematische Zeitschrift, № 39, 1934—35.

[37] Glivenko V. M. Sur la logique de M. Brouwer. Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5 série, t. XIV, 1928.

[38] Glivenko V. M. Sur quelques points de la logique de M. Brower. Ibid., t. XV, 1929.

[39] Gödel K. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, № 69, 1932.

[40] Greniewski H. Elementy Logiki Formalnej. Warszawa, 1955.

[41] Greniewski H. 2^{n+1} Wartości logicznuchy. Studia filozoficzne, № 2, № 3, 1957.

[42] Günter G. Die aristotelische Logik des Seins und die nichtaristotelische Logik der Reflexion. Zeitschrift für philosophische Forschung, B. XII, H. 3, 1958.

[43] Heyting A. Die formale Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, 1930.

[44] Heyting A. La conception intuitioniste de la logique. Les études philosophique, № 2, 1956.

[45] Heyting A. Intuitionism. Amsterdam, 1956.

[46] Kalinowski J. Teoria zdań normatywnych. Studia logica. t. I, 1953.

[47] Kolmogoroff A. Zur Deutung der intuitionistischer Logik. Mathematische Zeitschrift, B. 35, № 1, 1932.

[48] Kotarbiński T. Wykłady z dziefów Logiki. Lódź, 1957.

[49] Lewis C. Y. and Langford C. H. Symbolic Logic. New York, 1932.

[50] Łukasiewicz J. Logika tzójwartościowa. Ruch Filozoficzny. r. V, nr. 9, Lwów, 1920.

[51] Łukasiewicz J. O pojęciu możliwości. Ibid.

[52] Łukasiewicz J. Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen System des Aussagenkalküls. Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, r. XXIII, Warszawa, 1930.

[53] Łukasiewicz J. i Tarski A. Untersuchengen über den Aussagenkalkül. Ibid.

[54] Mostowski A. Logika matematyczna. Warszawa-Wrocław, 1948.

[55] P o s t E. L. Introduction to a General Theory of Elementary propositions. American Journal of Mathematics, v. XLIII, № 3, 1921.

[56] P r i o r A. N. Time and Modality. Oxford, 1957.

[57] R a s i o w a H. O pewnym fragmencie implikacyjnego rachunku zdań. Studia logica, t. III, 1955.

[58] R e i c h e n b a c h H. Warscheinlichkeitslehre. Leiden, 1935.

[59] R e i c h e n b a c h H. Philosophic Foundations of Quantum Mechanics. Berkeley and Los Angeles, 1946.

[60] R o s s e r J. B. and T u r q u e t t e A. R. Many-valued logics. Amsterdam, 1952.

[61] S ł u p e c k i J. Pełny trójwartościowy rachunek zbań. Comptes rendus des séances de la société des sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, XXIII Année, 1930 (Sprawozdania z posiedzeń towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, Rok XXIII, 1930).

[62] S ł u p e c k i J. Pelny trójwartościowy rachunek zbań. Ibid., Wydział III, Rok XXIX, 1936.

[63] S ł u p e c k i J. Kryterium pelnosci wielowartosciowych Systemów logiki zdań. Ibid., Wydział III, Rok XXIX, 1939.

[64] S ł u p e c k i J. Pełny Trójwartościowy Rachunek Zdań. Roczniki Uniwersytetu Marii Curie-Składowskiej, Dział F., t. 1, Lublin, 1946.

[65] S u s z k o R. Formalna Teoria wartości Logicznych. Studia logica, t. VI, 1957.

[66] T ö r n e b o h m H. On two logical systems proposed in the philosophy of quantum Mechanics. Theoria, № 3, 1957.

[67] W a j s b e r g M. Aksiomatyzacja trójwatrościowego rachunku zdań. Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Année XXIV, 1936.

[68] W e b b D. L. The algebra of n-valued logic. Ibid., Wydział III, Rok XXIX, 1936.

[69] W e b b D. Generation of any n-valued logic by one binary operator. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 21, 1935.

[70] W r i g h t G. H. An Essay in Modal Logic. 1951.

[71] Z a w i r s k i Z. Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej. Kwartalnik Filozoficzny, tom XVI, zeszyt 2—4, Kraków, 1946.

[72] Z i n o w i e w A. A. O logicznej niespzeczności sądów pradziwych. Studia filozoficzne, № 1, 1959.

[73] Z i n o v ě w A. A. K problému abstraktního a konkrétního poznatku. Filosofický Časopis, № 2, 1958.

[74] Z i n o v ě w A. A. K otárce hodnocení soudů jako abstraktních a konkrétních. Filosofický Časopis, № 1, 1959.

О ЛОГИЧЕСКИХ РАБОТАХ А. А. ЗИНОВЬЕВА

Александр Александрович Зиновьев — большое явление русской культуры второй половины XX века.

Человек ренессансного таланта — философ, социальный теоретик, глубокий исследователь современной цивилизации, писатель, художник, публицист, общественный деятель, — он прожил сложную, драматическую жизнь и остался верным своим убеждениям.

Однако широкая публика не всегда знает, что А. А. Зиновьев начинал свои исследования с логики. Именно эти проблемы были в течение длительного времени в центре его интересов. В этой области им высказано множество идей, некоторые из которых были сразу же подхвачены коллегами в нашей стране и за рубежом, другие первоначально были не поняты, хотя постепенно стали использоваться (нередко без ссылки на автора), третьи все еще ожидают признания.

Я хочу подчеркнуть, что логика была не просто той областью, в которой А. А. Зиновьев начинал свою исследовательскую деятельность и которую он затем оставил ради других занятий. В действительности логика лежит в основе всех его социальных и философско-этических построений. Не случайно одна из его важнейших книг называется «Логическая социология». Но саму логику он понимал по-своему, нередко в противоречии с тем, что считалось общепринятым.

Для А. А. Зиновьева смысл логики не в конструировании формальных исчислений, а в использовании формальных методов для выработки приемов научного познания. Так было начиная с первых его работ, посвященных исследованию логического метода в «Капитале» К. Маркса и кончая работами по логической физике и логической социологии. Именно этот смысл имеют работы А. А. Зиновьева по комплексной логике. В последние годы жизни он разрабатывал программу интеллектологии, которая должна объединить логику, гносеологию и онтологию.

Вклад А. А. Зиновьева в логику значителен и далеко не освоен современными исследователями. Многие поставленные им проблемы не только не исчезли, а стали более острыми. Многие его идеи исключительно актуальны. Я надеюсь, что переиздание основных логических работ Александра Александровича привлечет к ним то внимание, которое они заслуживают.

Академик В. А. Лекторский

СОДЕРЖАНИЕ

ББК 87.4

Зиновьев Александр Александрович

Философские проблемы многозначной логики / Вступ. ст. В. А. Лекторского. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 144 с. (Из наследия А. А. Зиновьева.)

В настоящей книге, написанной выдающимся отечественным философом А. А. Зиновьевым, рассмотрен ряд интересных философских проблем, связанных с возникновением и развитием многозначной логики. Даны краткие замечания о двухзначной логике и о системе записи, рассмотрены условия возникновения первых многозначных логических систем и особенности этих систем. Исследуются философские вопросы многозначных исчислений высказываний; отдельная глава посвящена исчислению предикатов.

Книга рассчитана на широкий круг философов и логиков, интересующихся философской и логической проблематикой современной науки.

Ответственный редактор
доктор философских наук П. В. Таванец

Издательство ЛКИ. 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 9. Зак. № 3504.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-382-01173-8

Александр Александрович ЗИНОВЬЕВ

(1922–2006)

Всемирно известный логик, социолог, писатель, публицист. Родился в деревне Пахтино Чухломского района Костромской области. Участник Великой Отечественной войны с первого до последнего дня, удостоен боевых наград. В 1951 г. окончил философский факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, затем там же аспирантуру. В 1954 г. защитил кандидатскую диссертацию «Логика “Капитала” Маркса»; через шесть лет — докторскую диссертацию «Философские проблемы многозначной логики». Они снискали автору репутацию яркого, смелого, независимого ученого.

С 1959 по 1976 гг. А. А. Зиновьев — научный сотрудник Института философии АН СССР; одновременно в 1963–1969 гг. — профессор, заведующий кафедрой логики философского факультета МГУ. Разработал оригинальную концепцию логики (комплексная логика). Опубликовал ряд монографий по логике и методологии науки («Философские проблемы многозначной логики», «Логика высказываний и теория вывода», «Основы логической теории научных знаний», «Комплексная логика», «Логика науки», «Логическая физика»). Многие из них переведены на иностранные языки. Получил признание в международном научном сообществе как один из крупнейших логиков XX века.

Параллельно занимался изучением реального коммунизма, построенного в Советском Союзе. Результатом этих исследований стали вышедшие за рубежом социологические романы «Зияющие высоты» (1976) и «Светлое будущее» (1978). Они имели огромный резонанс во всем мире.

После выхода этих книг А. А. Зиновьев был лишен советского гражданства и выслан вместе с семьей из СССР; 21 год жил в Мюнхене. В период вынужденной эмиграции разрабатывал логику и методологию социального познания, создал теорию коммунистического строя, теорию формирующегося на Западе сверхобщества. Он стал первым, кто с научных позиций подверг критике горбачевскую перестройку, точно предсказал ее исход, проанализировал постсоветский этап в новейшей истории России. Удостоен ряда научных наград и званий, включая премию А. де Токвиля — высшую международную премию в области социологии. А. А. Зиновьев — единственный в России обладатель этой премии. Активно занимался публицистической деятельностью. Всего им написано около 50 книг и сотни статей.

В 1999 г. А. А. Зиновьев вернулся в Москву. В последние годы он активно вел научную работу, выпустил ряд книг, в числе которых «Очерки комплексной логики» (URSS, 2000), «Логическая социология» (2002) и «Фактор понимания» (2006), преподавал в вузах, занимался общественной деятельностью. А. А. Зиновьев скончался в 2006 году после тяжелой болезни и был похоронен в Москве на Новодевичьем кладбище.

8781 ID 112283

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

E-mail: URSS@URSS.ru