

Сергей Израйлевич  
Вадим Цудикман

## **ОПЦИОНЫ**

Разработка,  
оптимизация  
и тестирование  
торговых стратегий



**альпина**  
ПАБЛИШЕР  
МОСКВА  
2020

# ОПЦИОНЫ

УДК 330.322  
ББК 65.264.18  
ИЗ9

**Израйлевич С., Цудикман В.**

ИЗ9 Опционы: Разработка, оптимизация и тестирование торговых стратегий / Сергей Израйлевич, Вадим Цудикман. — М. : Альпина Паблишер, 2020. — 340 с.

ISBN 978-5-9614-5975-3

До сегодняшнего дня все книги, посвященные автоматизированной торговле, фокусировались на традиционных биржевых инструментах, таких как акции, фьючерсы или валюты. Опционная торговля основывается на других фундаментальных принципах, логических и количественных методах. Авторы последовательно описывают все стадии построения автоматизированных торговых систем, ориентированных на эксплуатацию уникальных характеристик опционов.

В книге представлены базовые элементы создания и формализации стратегий, оперирующих сложно-структурированными портфелями, которые могут состоять из потенциально неограниченного количества опционных комбинаций. Дается детальное описание основных методов, применимых к оптимизации опционных стратегий. Особое внимание уделяется динамической оценке рисков стратегии на уровне портфеля (а не отдельно взятых опционных комбинаций). Предлагаемый подход к распределению капитала между элементами портфеля позволяет добиться максимизации прибыли при сохранении высокого уровня диверсификации. В заключение приводится пошаговый алгоритм тестирования стратегии, оценки ее надежности и устойчивости; особый акцент сделан на проблеме подгонки результатов тестирования к историческим данным.

УДК 330.322  
ББК 65.264.18

*Все права защищены. Никакая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, включая размещение в сети Интернет и в корпоративных сетях, а также запись в память ЭВМ, для частного или публичного использования, без письменного разрешения владельца авторских прав. По вопросу организации доступа к электронной библиотеке издательства обращайтесь по адресу [mylib@alpina.ru](mailto:mylib@alpina.ru)*

© Сергей Израйлевич, Вадим Цудикман, 2017  
© Оформление. ООО «Интеллектуальная Литература», 2020

ISBN 978-5-9614-5975-3



## 9 Предисловие

### 1. Разработка торговых стратегий

- 13 **1.1.** Философия построения торговых стратегий: научный и эмпирический подходы
- 14 **1.2.** Рациональный подход к построению торговых стратегий
- 16 **1.3.** Особенности опционных торговых стратегий
- 16 1.3.1. Нелинейность и особенности оценки опционов
- 18 1.3.2. Ограниченность периода обращения опционов
- 19 1.3.3. Многообразие опционов
- 20 **1.4.** Маркет-нейтральные стратегии
- 20 1.4.1. Основные элементы маркет-нейтральной стратегии
- 23 1.4.2. Базовая маркет-нейтральная стратегия
- 26 1.4.3. Построение точек и границ дельта-нейтральности
- 33 1.4.4. Анализ границ дельта-нейтральности
- 37 1.4.5. Количественные характеристики границ дельта-нейтральности
- 46 1.4.6. Анализ структуры портфеля
- 61 **1.5.** Частично-направленные стратегии
- 61 1.5.1. Отличительные особенности частично-направленных стратегий
- 62 1.5.2. Внедрение (введение) прогноза в структуру стратегии
- 68 1.5.3. Соотношение опционов колл и пут в портфеле
- 71 1.5.4. Базовая частично-направленная стратегия
- 73 1.5.5. Факторы, влияющие на соотношение опционов колл и пут в портфеле
- 80 1.5.6. Границы дельта-нейтральности частично-направленной стратегии
- 89 1.5.7. Анализ структуры портфеля
- 95 **1.6.** Дельта-нейтральный портфель, как основа опционной стратегии
- 95 1.6.1. Структура и свойства портфеля на границах дельта-нейтральности
- 99 1.6.2. Выбор дельта-нейтрального портфеля

### 2. Оптимизация

- 107 **2.1.** Обзор основных понятий
- 107 2.1.1. Параметрическая оптимизация
- 110 2.1.2. Оптимизационное пространство
- 113 2.1.3. Целевая функция

116	<b><u>2.2. Оптимизационное пространство</u></b> <u>дельта-нейтральной стратегии</u>
117	2.2.1. Размерность оптимизации
123	2.2.2. Область допустимых значений параметров
125	2.2.3. Шаг оптимизации
127	<b><u>2.3. Целевые функции и их применение</u></b> <u>для базовой дельта-нейтральной стратегии</u>
128	2.3.1. Оптимизационные пространства различных целевых функций
131	2.3.2. Взаимозависимость целевых функций
137	<b><u>2.4. Многокритериальная оптимизация</u></b>
137	2.4.1. Свертка
140	2.4.2. Оптимизация по методу Парето
144	<b><u>2.5. Выбор оптимального решения</u></b> <u>по признаку робастности</u>
145	2.5.1. Усреднение соседних ячеек
147	2.5.2. Отношение среднего к стандартному отклонению
149	2.5.3. Геометрия поверхности
153	<b><u>2.6. Устойчивость оптимизационного пространства</u></b>
154	2.6.1. Устойчивость по отношению к фиксированным параметрам
156	2.6.2. Структурная устойчивость
157	2.6.3. Устойчивость по отношению к периоду оптимизации
161	<b><u>2.7. Методы оптимизации</u></b>
163	2.7.1. Обзор основных методов целенаправленного поиска
177	2.7.2. Сравнение эффективности основных методов целенаправленного поиска
181	2.7.3. Случайный поиск
184	<b><u>2.8. Построение оптимизационной инфраструктуры:</u></b> <u>решения и компромиссы</u>

## **3. Управление рисками**

187	<b><u>3.1. Особенности оценки риска опционов</u></b>
188	3.1.1. Оценка риска линейных финансовых инструментов
190	3.1.2. Оценка риска опционов
193	<b><u>3.2. Индикаторы риска</u></b>
193	3.2.1. Value at Risk (VaR)
195	3.2.2. Индексная дельта
211	3.2.3. Коэффициент асимметрии
213	3.2.4. Вероятность убытка

- 215 **3.3. Взаимозависимость индикаторов риска**  
216 3.3.1. Методика тестирования взаимозависимости индикаторов риска  
216 3.3.2. Корреляционный анализ  
220 **3.4. Создание системы управления рисками**

## **4. Структура портфеля и управление капиталом**

- 221 **4.1. Классическая теория портфеля и ее применимость к опционам**  
221 4.1.1. Два уровня управления капиталом  
222 4.1.2. Классическая теория формирования портфеля  
224 4.1.3. Особенности опционных портфелей  
226 **4.2. Принципы формирования опционного портфеля**  
226 4.2.1. Размерность оценки  
229 4.2.2. Уровень оценки  
231 **4.3. Показатели, используемые для распределения капитала**  
231 4.3.1. Показатели не связанные с оценкой доходности и риска  
237 4.3.2. Показатели, выражающие оценку доходности и риска  
243 **4.4. Одномерная система распределения капитала**  
243 4.4.1. Факторы, влияющие на распределение капитала по различным показателям  
254 4.4.2. Мера концентрации капитала в портфеле  
259 4.4.3. Трансформации весовой функции  
270 **4.5. Многомерная система распределения капитала**  
270 4.5.1. Методика применения многомерной системы  
272 4.5.2. Сравнение многомерной и одномерной системы  
275 **4.6. Портфельная система распределения капитала**  
275 4.6.1. Особенности портфельной системы  
277 4.6.2. Сравнение портфельной и элементной системы  
282 **4.7. Выбор алгоритма распределения капитала**

## **5. Тестирование торговых стратегий**

- 285 **5.1. База данных**  
286 5.1.1. Поставщики данных  
287 5.1.2. Структура базы данных  
290 5.1.3. Оперативный доступ к данным

# СОДЕРЖАНИЕ

291	5.1.4. Рекуррентные вычисления
293	5.1.5. Проверка достоверности данных
296	<b><u>5.2. Сигналы на открытие и закрытие позиций</u></b>
296	5.2.1. Принцип генерирования сигналов
298	5.2.2. Разработка и оценка эффективности функционалов
299	5.2.3. Фильтрация сигналов
301	<b><u>5.3. Моделирование торговых заявок</u></b>
301	5.3.1. Моделирование объема
303	5.3.2. Моделирование цены
304	5.3.3. Комиссии
305	<b><u>5.4. Построение надежной системы тестирования</u></b>
306	5.4.1. In-sample оптимизация и out-of-sample тестирование
308	5.4.2. Адаптивная оптимизация
309	5.4.3. Проблема заоптимизированности (overfitting)
311	<b><u>5.5. Оценка прибыльности</u></b>
312	5.5.1. Единичное событие и элементарный период времени
313	5.5.2. Обзор показателей прибыльности стратегии
320	5.5.3. Пример бэктестинга опционной стратегии
324	<b><u>5.6. Построение эффективной системы бэктестинга: вызовы и компромиссы</u></b>
327	<b>Приложение. Основные понятия и термины</b>
337	<b>Список литературы</b>

*Выражаем искреннюю признательность сотрудникам НОУ СОШ «Академическая Гимназия», оказавшим неоценимую помощь при подготовке этой книги. Мы также благодарны нашим дочерям Израйлевич Ирис, Израйлевич Виктории, Цудикман Элизабет за помощь в подборе фактического материала, его обработке и графической визуализации.*

# благодарности



Эта книга посвящена построению автоматизированной системы для торговли опционами. Мы ориентировались на подготовленного читателя (трейдеров, инвесторов, портфельных менеджеров, исследователей), знакомого с основами статистики, теории вероятностей и базовыми понятиями в области финансового анализа. Читателям, впервые сталкивающимся с опционами, мы рекомендуем начать с Приложения, где приводятся основные определения, разъясняются понятия и термины, достаточные для понимания излагаемого в книге материала.

Природа опционов позволяет построить большое количество спекулятивных торговых стратегий, основанных на различных принципах.

Во многих стратегиях опционы используются в качестве вспомогательных инструментов, обеспечивающих хеджирование основных позиций. В этой книге мы не будем касаться данной области применения опционов, поскольку хеджирование является лишь одним из составных элементов таких торговых стратегий, но никогда не является их основой.

Опционы могут также использоваться для создания синтетических позиций по базовому активу. В этом случае инвестор стремится к тому, чтобы профили платежных функций опционной комбинации и базового актива совпадали. Это позволяет существенно увеличить торговый левередж. Однако, помимо левереджа, автоматизированная торговля синтетическими активами ничем не отличается от торговли самими базовыми активами. (За исключением некоторых особенностей исполнения торговых заявок, необходимости роллирования позиций и более высоких брокерских комиссий.) Поэтому мы не будем в дальнейшем останавливаться на стратегиях такого рода.

Большинство стратегий, ориентированных на торговлю обычными активами (не опционами), основываются на прогнозе направления движения цены актива (мы будем называть такие стратегии «направленными»). Опционы также могут использоваться в подобных стратегиях. Например, разного рода спреды позволяют извлекать прибыль при росте цены базового актива (бычий спред), либо при ее падении (медвежий спред). Несмотря на то что торговые стратегии на основе направленных спредов обладают многими особенностями, отличающими их от стратегий, использующих обычные активы, главным детерминантом успешности стратегии остается точность прогноза ценовых движений. Это свойство делает такие стратегии весьма

сходными с обычными торговыми стратегиями, и поэтому мы не будем рассматривать их в этой книге.

Основной акцент в этой книге будет сделан на такие классы стратегий, которые позволяют использовать специфические особенности опционов, свойственные только этим финансовым инструментам. Одним из ключевых отличий опционов от других инвестиционных активов является нелинейность их платежной функции. При торговле акциями, фьючерсами, валютой и другими линейными активами прибыль или убыток трейдера прямо пропорциональны росту или снижению цены актива. В случае опционов прибыльность позиции зависит не только от направления движения цены, но и от многих других факторов. Более того, комбинируя разные опционы на один и тот же базовый актив, можно получить практически любую форму платежной функции для итоговой комбинации.

Эти свойства опционов позволяют создавать позиции, зависящие не только от направления и амплитуды ценовых флуктуаций, но и от других параметров, среди которых основными являются подразумеваемая и историческая волатильность, а также время, остающееся до экспирации опционов. Основным предметом нашего рассмотрения будет целый класс стратегий, характеризующийся общим свойством, называемым «маркет-нейтральность». Применительно к опционам маркет-нейтральность означает, что: (1) небольшие изменения цены базового актива не приведут к существенным колебаниям в стоимости позиции, (2) при больших ценовых движениях стоимость позиции изменится на приблизительно одинаковую величину независимо от того, выросла ли стоимость базового актива или снизилась. В реальности эти условия выполняются не всегда, а являются лишь общим ориентиром для трейдера, стремящегося к соблюдению принципа маркет-нейтральности.

Основным аналитическим инструментом, применяемым для создания маркет-нейтральных позиций, служит дельта. Позиция считается маркет-нейтральной, если сумма дельт всех входящих в ее состав опционов и базовых активов равна или близка к нулю.

Другой класс стратегий, рассматриваемых в этой книге, представляет собой совокупность маркет-нейтральных стратегий с элементами направленности. В рамках этих стратегий опционные позиции формируются с учетом дельты (хотя приведение ее к нулю не является обязательным условием), но при этом также учитываются прогнозы направления будущих ценовых



движений. Эти прогнозы могут встраиваться в структуру стратегий в форме смещенных распределений вероятности либо в виде индикаторов технического и фундаментального анализа. Мы будем называть такие стратегии «частично-направленными».

Многие торговые стратегии ориентируются на торговлю одним или несколькими финансовыми инструментами (преимущественно фьючерсами на определенный базовый актив). Даже если одновременно торгуются несколько инструментов, в большинстве случаев позиции по ним открываются, закрываются и анализируются независимо друг от друга. Не составляют исключения и опционы. Многие трейдеры разрабатывают системы, ориентированные исключительно на торговлю OEX (опционы на фьючерс на S&P 100) или опционами на нефтяные фьючерсы. В этой книге мы будем рассматривать стратегии, ориентированные на одновременную торговлю опционами на потенциально неограниченное количество базовых активов. При этом все позиции, открываемые в рамках одной торговой стратегии, будут оцениваться и анализироваться во всей своей совокупности, как единый портфель.



## 1.1. Философия построения торговых стратегий: научный и эмпирический подходы

Существуют два основных подхода к разработке автоматизированных торговых стратегий. Первый подход базируется на априорных принципах и концепциях, определяемых разработчиком стратегии. Каждый элемент стратегии такого рода создается на основе предположений, вытекающих из экономических знаний, фундаментальных оценок инвестиционных активов, экспертных оценок, предположений о динамике рынка, закономерностей технического анализа и многих других факторов. Результатом формализации этих знаний, оценок и предположений является разработка комплекса торговых правил, составляющих основу торговой стратегии. Используя терминологию, предложенную Робертом Пардо, мы будем называть такой подход научным.

В предельном случае научный подход предполагает полный отказ от использования процедуры оптимизации. Все торговые правила и параметры торговой системы определяются исключительно исходя из знаний, предположений и прогнозов разработчика. Очевидно, вероятность создания прибыльной стратегии в условиях полного отказа от оптимизационной настройки системы на исторических данных крайне низка. Насколько нам известно, научный подход в чистом виде практически не используется в реальной торговле.

Альтернативный подход основывается на полном отказе от использования осмысленных априорных закономерностей и знаний в процессе разработки автоматизированных торговых стратегий. Этот подход предполагает массивное использование компьютерных технологий. В упрощенном виде его можно охарактеризовать, как поиск таких алгоритмов покупки и продажи активов, которые позволяют максимизировать задаваемые разработчиком функции полезности. Алгоритмы выбираются из большого числа готовых библиотек либо создаются самим разработчиком. При этом механизм построения алгоритмов не задается каким-либо разумным образом, основанным на предварительных предположениях, и не ограничивается никакими внесистемными соображениями. Выбор торговых алгоритмов осуществляется исключительно на основе их тестирования на исторических временных рядах. Получаемая в результате торговая стратегия представляет собой набор правил, лишенный определенной экономической и поведенческой

логики. Следуя терминологии Роберта Пардо, мы будем называть такой подход эмпирическим.

В предельном случае эмпирический подход основывается исключительно на оптимизации и целенаправленном поиске таких комбинаций алгоритмов и параметров, которые принесли бы максимальную прибыль (минимальный убыток либо удовлетворяли требованиям любой другой функции полезности) в прошлом. На сегодняшний день существует множество высокотехнологичных разработок, позволяющих осуществлять эффективный и достаточно быстрый поиск оптимальных алгоритмов и параметров, удовлетворяющих требованиям эмпирического подхода. В качестве примера можно привести нейронные сети и генетические методы, позволяющие находить оптимальные решения за счет построения самообучающихся систем.

Как правило, торговые стратегии, созданные на основе эмпирического подхода, показывают превосходные результаты в ходе тестирования на исторических временных рядах, однако приводят к провальным результатам в реальной торговле. Причиной этого является чрезмерная заоптимизированность (overfitting). Не спасает даже применение анализа на условно-будущем периоде (walk-forward), поскольку наличие большого числа степеней свободы при построении стратегии позволяет выбрать такой набор правил, который позволит получить приемлемые результаты не только на оптимизационном периоде, но и на условно-будущем периоде, не задействованном в ходе оптимизации (подробнее об этом будет рассказано в главе, посвященной бэктестингу). Поэтому практическое использование эмпирического подхода в его чистом виде весьма рискованно и малоприменимо в реальной торговле.

## **1.2. Рациональный подход к построению торговых стратегий**

Большинство трейдеров сочетают при разработке торговых стратегий элементы как научного, так и эмпирического подходов. Такой комбинированный подход мы будем называть рациональным.

На начальном этапе реализации рационального подхода, формируется набор правил, определяющих общую структуру будущей стратегии. Эти правила основываются на предварительных знаниях и предположениях о поведении рынка. На этом

этапе часто используются результаты статистических исследований, проведенных самим разработчиком, либо полученных из средств массовой информации, научных публикаций, частных источников. Закономерности, установленные в ходе подобных исследований, позволяют заложить в разрабатываемую стратегию определенную логику и экономический смысл. В то же время такие исследования могут выявлять зависимости, лишённые какой-либо логики и не поддающиеся объяснению с точки зрения экономических законов или известных особенностей биржевой динамики. К таким зависимостям следует относиться с большой осторожностью, поскольку они могут носить случайный характер или возникать в результате искусственной настройки на данные (data mining).

Начальный этап построения стратегии основывается по большей части на элементах научного подхода. На этом этапе необходимо определить следующее:

- ◇ принципы генерирования сигналов на открытие и закрытие торговых позиций;
- ◇ индикаторы, используемые для генерирования сигналов на открытие и закрытие торговых позиций;
- ◇ набор инвестиционных активов потенциально доступных для торговли;
- ◇ требования, предъявляемые к портфелю, и накладываемые на него ограничения;
- ◇ принципы управления капиталом (доля капитала инвестируемого в портфель);
- ◇ принципы распределения капитала между элементами портфеля;
- ◇ методы и инструменты управления рисками.

На следующем этапе построения торговой стратегии правила, отобранные на основе научных принципов, описываются в виде строго формализованных процедур. Данный этап характеризуется преимущественным использованием элементов эмпирического подхода. Для этого необходимо:

- ◇ ввести в систему определенное количество параметров;
- ◇ задать алгоритмы расчета параметров;
- ◇ установить порядок выбора числовых значений параметров.

Практически каждое правило, сформулированное на научной основе, может быть формализовано с использованием разного количества параметров. Алгоритмы расчета параметров могут быть самыми разными. И, наконец, порядок выбора числовых

значений параметров означает выбор определенной схемы оптимизации.

- Принятие решений о количестве параметров, методах их расчета и оптимизации, как правило, не зависит от экономических оценок разработчика, а определяется исходя из технических ограничений и требований, предъявляемых к общей структуре стратегии. В свою очередь, ограничения и требования задаются исходя из соображений надежности, устойчивости и прочих показателей создаваемой стратегии, среди которых не последнее место занимает решение проблемы возможной чрезмерной оптимизации.
- В результате рационального сочетания научного и эмпирического подходов получаются стратегии, основанные, с одной стороны, на осмысленных экономических принципах и закономерностях, а с другой стороны, использующие преимущества оптимизации и современных достижений в области IT-технологий.
- В этой книге мы будем придерживаться принципов рационального подхода к разработке торговых стратегий. При этом следует помнить, что основной задачей разработчика является разумное сочетание методов научного и эмпирического подходов. Для этого требуется взвешенное распределение базовых компонентов торговой стратегии между двумя основными категориями: [1] категорией компонентов, задаваемых исходя из смысловых соображений и [2] категорией компонентов, формируемых методами подбора и оптимизации.

### **1.3. Особенности опционных торговых стратегий**

#### **1.3.1. Нелинейность и особенности оценки опционов**

Как уже упоминалось выше, опционы, в отличие от многих других объектов инвестирования, обладают нелинейной платежной функцией. Поэтому оценка инвестиционной привлекательности опционов и получение торговых сигналов должны основываться на других принципах.

- В основе большинства стратегий, ориентированных на торговлю линейными активами, лежит использование определенных индикаторов, предназначенных для генерирования сигналов на открытие и закрытие позиций. В качестве индикаторов используются инструменты технического анализа, оценивающие ценовые тренды, динамику объема торговли, перекупленность/перепроданность рынка и многие другие параметры. Кроме

того, автоматизированная торговля линейными активами может базироваться на их фундаментальных показателях. Функция индикаторов состоит в прогнозировании направления будущих ценовых движений.

Рассматриваемые нами опционные стратегии не требуют предсказаний направления движения цены (хотя они и могут использоваться в качестве вспомогательных показателей). Поэтому для опционов в качестве индикаторов используются специальные критерии, призванные оценивать потенциальную прибыльность и риск позиций на основе других принципов. Как и в случае с линейными активами, основную задачу критериев можно сформулировать в общем виде как выявление недооцененных и переоцененных объектов инвестирования.

Справедливая стоимость опциона определяется мерой неопределенности относительно будущих колебаний цены его базового актива. Чем больше неопределенность, тем выше стоимость опциона. Строго говоря, стоимость опциона зависит от распределения вероятностей, приписываемых всем возможным реализациям цены базового актива.

Рынок некоторым образом оценивает меру неопределенности, что отражается в ценах опционов. Инвестор также может оценить величину неопределенности, исходя из своих собственных соображений, основанных на применении аппарата теории вероятности и других математических и статистических методов. Если оценка неопределенности, полученная инвестором, совпадает с оценкой рынка, то инвестор вправе предположить, что рассматриваемый опцион переоценен или недооценен. Соотношение этих двух неопределенностей является основным философским принципом, на котором основывается построение критериев. Соотношение неопределенностей может выражаться прямо или косвенно, но всегда в той или иной форме присутствует в алгоритме, вычисляющем значения критериев.

Критерии, построенные на соотношении двух неопределенностей, оценивают справедливость рыночной цены опционов. Расчетный алгоритм критерия должен выражать величины обеих неопределенностей в числовой форме, приводить их к единой размерности и сопоставлять между собой. Если их значения совпадают или близки, значит опционы оцениваются рынком справедливо. Если же неопределенность, оцененная разработчиком, существенно больше (меньше) рыночной, то опционы недооценены (переоценены). Эффективность критерия во многом зависит от его способности выражать зависимость

между степенью расхождения двух неопределенностей и мерой пере- и недооцененности опционов.

В своей предыдущей книге «Опционы: системный подход к инвестициям» мы описали алгоритмы расчета многих критериев, предназначенных для оценки опционов и их комбинаций. Мы также осветили основные этапы построения критериев, методы оптимизации их параметров и оценки эффективности.

### **1.3.2. Ограниченность периода обращения опционов**

Еще одной особенностью опционов является то, что, в отличие от прочих финансовых инструментов, деривативы имеют ограниченный срок жизни. Это накладывает определенные ограничения на продолжительность удержания позиции и требует в некоторых случаях осуществления процедур роллирования (что ведет к финансовым издержкам по причинам проскальзывания и дополнительных комиссий).

При торговле обычными активами любому сигналу на открытие позиции соответствует в будущем сигнал на закрытие этой позиции. В случае же с опционами закрывающих сигналов может не быть, поскольку торговая стратегия может предполагать удержание позиции до истечения опционов. В такой ситуации, если опцион истекает вне денег, сигнал на открытие позиции остается без закрывающего сигнала. Если же на дату экспирации опцион оказывается в деньгах, то сигналу, открывающему позицию по опциону, соответствует закрывающий сигнал по базовому активу. Причем оба сигнала могут иметь одну направленность — на покупку или на продажу.

Исполнение сигнала на открытие позиции по любому финансовому инструменту означает, что система обнаружила отклонение аналитически выведенной справедливой стоимости данного инструмента от его рыночной цены. Такое отклонение может сколько угодно долго сохраняться на рынке. Однако, даже если расчет был правильным, сближение рыночной и расчетной цен может не произойти в течение всего жизненного цикла стратегии. Вследствие этого разработчик никогда не сможет оценить, верен ли был расчетный алгоритм, заложенный в систему. В отличие от этого, опционы обладают жестко зафиксированной датой истечения. По прошествии этой даты можно со всей определенностью сделать выводы о корректности оценки справедливой стоимости. Такое свойство выгодно отличает опционы от других активов, для которых невозможно объективно определить период проверки расчетного значения справедливой стоимости.



### 1.3.3. Многообразие опционов

На каждый базовый актив существует множество опционов, соответствующих разным страйкам и датам истечения. При этом в любой момент времени часть из них может быть переоценена, а часть — недооценена. Это позволяет создавать большое количество опционных комбинаций с короткими позициями по недооцененным опционам и длинными позициями по переоцененным.

Количество доступных для инвестора опционов, обращающихся на организованном рынке определяется по следующей формуле:

$$\text{options quantity} = \sum_{i=1}^n m_i ,$$

где  $n$  — количество базовых активов,  $m_i$  — количество опционов для  $i$ -го базового актива (равное произведению количества страйков на количество временных серий). Для одного базового актива можно построить  $3^m$  комбинаций (будем считать, что каждый опцион может не входить в комбинацию вообще или входить в нее только в единичном числе в «коротком» или «длинном» варианте). Соответственно, для  $n$  базовых активов число возможных опционных комбинаций равно:

$$\text{combinations quantity} = \sum_{i=1}^n 3^{m_i} .$$

Предположим, что инвестор работает всего с сотней базовых активов (а опционабельных активов на самом деле гораздо больше), на каждый из которых активно торгуется порядка 10 разных опционных контрактов. В этом случае на каждый момент времени существует теоретическая возможность построить более 6 млн комбинаций. И это при допущении, что все опционы входят в комбинации в равных пропорциях. Если же предположить вполне реальную возможность неравных соотношений для разных опционов в пределах одной комбинации, и учесть, что только на рынке акций США существует несколько тысяч акций с более или менее активно торгуемыми опционами, то получится воистину огромное количество потенциальных комбинаций.

Естественно, ни один инвестор не станет рассматривать все произвольно сгенерированные комбинации, а ограничится лишь теми, профиль платежной функции которых соответствует его торговой стратегии. Кроме того, потенциально приемлемые

комбинации должны пройти дополнительный отсев по ликвидности, спреду, предстоящим корпоративным событиям, фундаментальным показателям и многим другим параметрам. Тем не менее после применения всех фильтров останется порядка миллиона комбинаций, представляющих собой исходное множество для автоматизированной торговли. Подобное многообразие невозможно для акций, товаров, валют или любого другого физически существующего инструмента.

## 1.4. Маркет-нейтральные стратегии

### 1.4.1. Основные элементы маркет-нейтральной стратегии

Разработка торговых стратегий на основе рационального подхода начинается с определения общей структуры стратегии и ее основных параметров. Это делается как на базе научного подхода (используя знания и предположения, вытекающие из известных или установленных разработчиком закономерностей), так и на основе эмпирического подхода (методами подбора и оптимизации). Во многих случаях целесообразно вначале использовать научный подход для определения интервала допустимых значений того или иного параметра, а затем применять эмпирический подход для нахождения оптимального значения параметра в пределах заданного диапазона. Аналогично научный подход может быть использован для определения исходного множества определенных элементов (например, базовых активов, типов опционных комбинаций, критериев и т. п.), а эмпирические методы могут быть задействованы для выбора оптимального набора элементов в пределах данного исходного множества.

Ниже мы рассмотрим основные структурные элементы маркет-нейтральной опционной стратегии и укажем, какие из них желательно задавать научными методами, а какие — эмпирическими.

**Типы опционных комбинаций.** Разработчик должен решить, какие типы опционных комбинаций соответствуют разрабатываемой им торговой стратегии. Существует множество стандартных комбинаций, свойства которых хорошо изучены и описаны в литературе. К ним относятся стрэнглы, стрэддлы, различные спреды, кондоры, баттерфляи и многие другие. Кроме того, разработчик может самостоятельно создавать самые разнообразные вариации этих стандартных комбинаций.

Решение об использовании тех или иных комбинаций зависит от профиля их платежной функции и от его соответствия логике разрабатываемой торговой стратегии. В большинстве случаев типы используемых комбинаций выбираются научным методом.

**Длинные и короткие позиции.** Необходимо определить, допустимо ли использование коротких позиций, и, если они допустимы, существуют ли ограничения и требования к соотношению длинных и коротких позиций. Решение этой задачи определяется не только логикой создаваемой стратегии, но зависит также от соображений риск-менеджмента (поскольку короткие позиции по опционам имеют ограниченный потенциал прибыльности и практически неограниченный потенциал убыточности). Кроме того, устанавливая соотношение длинных и коротких позиций, разработчик должен учитывать принятую им систему распределения капитала (поскольку длинные опционы просто покупаются по рыночной цене, а открытие коротких позиций требует депонирования маржи, расчет которой зависит от многих факторов). Обычно вначале устанавливается диапазон допустимых соотношений длинных и коротких позиций (используя научный метод), после чего оптимизируется точное значение (эмпирический метод).

**Критерии.** Не будет преувеличением сказать, что выбор критериев для оценки, анализа и выбора опционных комбинаций является одним из важнейших решений при создании автоматизированной торговой системы. В первую очередь необходимо определиться, будет ли выбор комбинаций основываться на одном или на многих критериях. В случае если используется несколько критериев, следует выбрать метод многокритериального анализа (методы многокритериального анализа и особенности их практического применения были подробно рассмотрены нами в книге «Опционы: системный подход к инвестициям» и в статьях «Options and the Pareto set» и «Multi-criteria analysis: a practical approach», опубликованных в журнале *Futures* за 2010 г.). Выбор самих критериев зависит от их свойств и эффективности в решении определенных специфических задач. Определенный критерий может демонстрировать высокую эффективность в одной стратегии, но оказаться непригодным для другой. Важно отметить, что выбор критериев относится к задачам, решаемым методами научного подхода,

однако выбор их параметров и оптимизация относятся уже к эмпирической области.

**Пороговые значения критериев.** Для практического применения критериев необходимо определить их пороговые значения, превышение которых означает пригодность объектов оценки (опционных комбинаций) для данной стратегии. (Если используется Паретовский метод многокритериального анализа, то выбор пороговых значений не требуется.) В принципе, пороговые значения могут выбираться методами оптимизации. Однако, как мы покажем далее, этот параметр может оказывать большое влияние на другие параметры, определяемые не эмпирическими, а научными методами.

**Даты экспирации.** Общеизвестно, что опционы, относящиеся к разным временным сериям, обладают разными свойствами. Это касается не только скорости временного распада, но и чувствительности к изменениям цены базового актива (дельта), волатильности (вега) и многого другого. Кроме того, спред между ценой покупки и продажи обычно больше для более далеких серий, что приводит к большим проскальзываниям при исполнении. Ликвидность далеких серий также обычно ниже. Помимо всех перечисленных факторов, выбор временных серий влияет на свойства торговой стратегии еще и самым непосредственным образом, поскольку определяет максимально возможный период удержания позиций. Как и для соотношения длинных и коротких позиций, следует вначале установить диапазон допустимых значений, а затем применить оптимизацию.

**Диапазон страйков.** Этот параметр удобно задавать в виде процента от текущей цены базового актива. Например, диапазон 30% означает, что торговая стратегия может оперировать только теми опционами, страйки которых находятся в пределах от 70% до 130% от цены базового актива. Чем больше значение этого параметра, тем больше комбинаций можно построить для каждого базового актива и тем шире может быть расстояние между страйками в пределах каждой комбинации. Кроме того, необходимо учитывать, что использование более далеких страйков имеет тот же эффект на спреды и ликвидность, что и более далекие даты истечения. Значение диапазона, используемого в торговой системе, чаще всего определяется эмпирическим методом (хотя может применяться и научный подход).

**Дельта.** В принципе, дельта относится к инструментам риск-менеджмента. Однако для создания дельта-нейтральных позиций необходимо использовать этот показатель уже на начальном этапе формирования портфеля. Дельты опционов, относящихся к разным базовым активам, не обладают свойством аддитивности. Поэтому для портфеля, состоящего из опционов на разные базовые активы, невозможно рассчитать дельту портфеля методом простого суммирования дельт. В этом случае необходимо использовать индексную дельту. Этот показатель выражает меру чувствительности стоимости портфеля к небольшим колебаниям рыночного индекса. Другими словами, он позволяет определить, насколько упадет (или вырастет) стоимость портфеля, если значение индекса изменится на один пункт (или на 1%). Концепция индексной дельты будет подробно описана в главе посвященной управлению рисками.

После того как все параметры определены и зафиксированы, для того чтобы стратегия приобрела законченный вид, необходимо установить систему распределения капитала между элементами портфеля, определить систему управления общим капиталом (какая доля от суммарного капитала инвестируется в портфель в каждый момент времени), а также разработать систему оценки и управления рисками.

#### **1.4.2. Базовая маркет-нейтральная стратегия**

В этом разделе мы опишем наиболее простую форму маркет-нейтральной стратегии. Это будет полезно для дальнейшего более подробного изучения ее основных свойств, структурных элементов и параметров. Кроме того, такую базовую форму маркет-нейтральной стратегии будет удобно сравнивать с другими классами опционных торговых стратегий.

**Сигналы на открытие позиций.** Предположим, что сигналы на открытие торговых позиций генерируются по показателю единственного индикатора. В качестве индикатора будем использовать критерий «Математическое ожидание прибыли на основе лог-нормального распределения». Сигналом для открытия позиции является значение критерия, превышающее определенную пороговую величину. В качестве диапазона допустимых значений порогового параметра примем все значения математического ожидания, находящиеся в интервале от нуля до бесконечности. Точное значение порога будет определяться путем оптимизации.

Открывающие сигналы генерируются ежедневно и рассчитываются по котировкам закрытия предыдущего торгового дня. Позиции открываются по всем комбинациям, для которых получен сигнал (в объеме свободного, не инвестированного капитала). Для целей моделирования и бэктестинга цена открытия позиции рассчитывается по котировкам закрытия текущего дня.

**Сигналы на закрытие позиций.** Для базового варианта маркет-нейтральной стратегии будем считать, что все открытые позиции удерживаются до момента истечения опционов. После экспирации все позиции по базовым активам, возникшие в результате исполнения опционов, истекших «в деньгах», закрываются на следующий торговый день.

**Индикаторы, используемые для генерирования сигналов.** Алгоритм расчета критерия «Математическое ожидание прибыли на основе логнормального распределения» описан в нашей книге «Опционы: системный подход к инвестициям». Для вычисления значений этого критерия необходимо ввести два параметра — математическое ожидание, цены базового актива и дисперсия нормального распределения логарифма цены акции. Значение первого параметра обычно задается изначально разработчиком стратегии исходя из принципов научного подхода. Применительно к маркет-нейтральной стратегии будет естественным принять его равным текущей стоимости базового актива на дату вычисления критерия. Это означает, что текущая цена рассматривается как наиболее вероятная на будущую дату, для которой рассчитывается значение критерия. (Альтернативный подход состоит в придании данному параметру некоего значения, определяемого экспертным путем либо методами фундаментального анализа.) Значение второго параметра можно принять равным квадрату исторической волатильности базового актива. Данный параметр включает в себя дополнительный подпараметр, глубину исторического периода, используемого для расчета исторической волатильности. В большинстве случаев горизонт истории определяется эмпирически путем оптимизации (мы примем его равным 120 дням).

**Набор инвестиционных активов.** В качестве исходного множества активов, потенциально доступных для торговли, примем все опционы на акции, входящие в состав индекса S&P 500. Объемом инвестирования будем считать не отдельные опционы,

а комбинации опционов, относящихся к определенному базовому активу. В качестве допустимого исходного множества для типа опционных комбинаций примем длинные и короткие стрэнглы и стрэддлы. Далее будет показано, что доля различных типов комбинаций в портфеле будет зависеть от многих параметров стратегии.

**Требования и ограничения.** По соображениям ликвидности и потенциальным рискам проскальзывания допустимо использование только тех страйков, которые расположены не далее 50% от текущей цены базового актива (то есть если текущая цена акции \$50, то могут использоваться только страйки, находящиеся в диапазоне от \$25 до \$75). По тем же соображениям недопустимо использование временных серий, отстоящих более 200 дней от даты истечения. Указанные диапазоны, ограничивающие область допустимых значений, определены исходя из априорных предпосылок (использован научный подход). Точные значения параметров будут определяться путем оптимизации.

**Принципы управления капиталом.** Применительно к данной стратегии решение задачи управления капиталом сводится к распределению средств между безрисковыми инструментами денежного рынка и инвестиционным портфелем. В каждый момент времени необходимо определять, какая часть свободного капитала инвестируется в позиции, по которым получены открывающие сигналы. Для базового варианта маркет-нейтральной стратегии примем наиболее простой принцип, когда доля инвестируемого капитала всегда составляет 100% (то есть весь капитал участвует в игре и все средства, высвобождающиеся в результате закрытия позиций, немедленно реинвестируются).

**Распределение капитала между элементами портфеля.** Распределение капитала между комбинациями, вошедшими в состав портфеля, будет осуществляться по принципу эквивалентности позиции в акциях. В соответствии с этим принципом размер позиции по каждой комбинации выбирается таким образом, что в случае исполнения опционов сумма вложений во все базовые активы будет приблизительно равной (более подробно этот принцип будет рассмотрен далее). Если в определенный момент времени имеется  $S$  свободных средств и получено  $m$  сигналов на открытие позиций, то объем позиции по каждой комбинации определяется следующим образом:

$$N_c = N_p = \frac{2C}{m(S_c + S_p)},$$

где  $S_c$  и  $S_p$  — страйки опционов колл и пут,  $N_p$  и  $N_c$  — количество покупаемых или продаваемых опционов пут и колл соответственно. Применение данной формулы требует принятия допущения о бесконечной дробимости опционных контрактов. Хотя это допущение нереалистично (поскольку большинство опционных контрактов включают по 100 опционов), оно не влияет на результаты наших исследований.

#### Методы и инструменты управления рисками. Как следует из при-

роды дельта-нейтральной стратегии, основным ориентиром при управлении рисками данной стратегии является соблюдение принципа дельта-нейтральности портфеля. Соответственно, основным инструментом управления рисками является индексная дельта. Устанавливая значения различных параметров стратегии, необходимо стремиться к тому, чтобы индексная дельта портфеля равнялась нулю или находилась в близком к нулю и узком диапазоне допустимых значений этого показателя. Другие показатели риска, включающие в себя VaR, коэффициент асимметричности и вероятность убытка, могут использоваться в качестве вспомогательных инструментов управления рисками (эти показатели будут подробно описаны в главе, посвященной управлению рисками).

#### 1.4.3. Построение точек и границ дельта-нейтральности

В двух предыдущих разделах были описаны основные компоненты дельта-нейтральных стратегий. Нетрудно заметить, что даже наиболее простой базовый вариант стратегии содержит довольно большое количество параметров, для которых необходимо установить и зафиксировать определенные значения. Наличие даже нескольких параметров означает, что существует большое количество различных вариантов комбинирования их значений (увеличение идет по степенному закону). Следует отметить, что для большинства сочетаний значений параметров дельта-нейтральность недостижима.

Для базового варианта дельта-нейтральной стратегии можно выделить три основных параметра, которые непосредственно влияют на состав и структуру портфеля. К ним относятся:

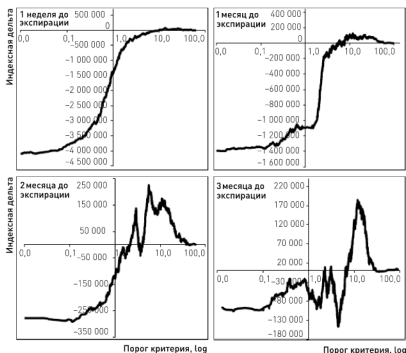
- ♦ пороговое значение критерия, используемое для генерирования сигналов на открытие позиций;



- ◇ диапазон страйков, разрешенных для использования при построении комбинаций;
  - ◇ разрешенные временные серии опционов (определяющие период времени, остающийся до даты экспирации).
- Фиксируя значения этих параметров, разработчик торговой стратегии должен принимать во внимание их влияние на такие важные характеристики портфеля, как соотношение длинных и коротких позиций, соотношение различных типов опционных комбинаций, диверсификацию портфеля и характеристики риска. Однако в первую очередь необходимо определить зависимость индексной дельты портфеля от величины каждого из трех параметров (и от их различных сочетаний). Ведь если для большинства допустимых значений параметров индексная дельта портфеля существенно отклоняется от нуля, то построение дельта-нейтральной стратегии в принципе недостижимо.

*Каждую комбинацию значений параметров, для которой соблюдается условие дельта-нейтральности (дельта портфеля равна нулю), мы будем называть точкой дельта нейтральности. А всю совокупность таких точек будем называть границей дельта нейтральности.*

Для начала рассмотрим на нескольких примерах процедуру нахождения точек дельта-нейтральности. Предположим, что с целью получения торговых сигналов мы оцениваем исходное множество комбинаций, построенных для всех акций индекса S&P500. Оценка производится по критерию «математическое ожидание прибыли на основе логнормального распределения» (в соответствии с процедурой, описанной выше, для базовой стратегии). Допустим, что параметр «диапазон страйков» зафиксирован на значении 10% от цены базового актива. Для параметра «время до экспирации» исследуем несколько значений: одна неделя, один, два и три месяца до экспирации. Для определения точек дельта-нейтральности 11 января 2010 г. были сгенерированы торговые сигналы для следующих дат экспирации: 15 января 2010 г. (одна неделя до экспирации), 19 февраля 2010 г. (один месяц до экспирации), 19 марта 2010 г. (два месяца до экспирации), 16 апреля 2010 г. (три месяца до экспирации). Определим точки дельта-нейтральности для всего диапазона значений параметра «порог критерия». Для этого необходимо рассмотреть зависимость индексной дельты портфеля от величины порога. На рис. 1.4.1 представлены такие зависимости для четырех дат экспирации (в этом примере использовались



**Рис. 1.4.1.** Зависимость индексной дельты портфеля от величины порога критерия. Параметр «диапазон страйков» зафиксирован на значении 10%. Каждый график представляет зависимость для одного из четырех значений параметра «время до экспирации». Каждое пересечение линии графика с горизонтальной осью является точкой дельта-нейтральности

страйки, лежащие в диапазоне 10% от цен базовых активов). Дельта-нейтральными являются точки, лежащие на пересечении линии графика с горизонтальной осью. Соответственно, каждая точка пересечения горизонтальной оси указывает на величину порога, для которой соблюдается условие дельта-нейтральности. (Порог критерия равен координате на горизонтальной оси.)

Для четырех частных случаев, представленных на рис. 1.4.1, дельта-нейтральность достигается при величине порога от 2% до 10% (значения критерия и порога выражаются как математическое ожидание прибыли в процентах от объема инвестиций). Так, для случая, когда до экспирации остается одна неделя, существует всего одна точка дельта-нейтральности, приходящаяся

на порог 9%. Это означает, что если для данной временной серии построить комбинации, используя опционы, страйки которых лежат в диапазоне (цена базового актива  $\pm 10\%$ ), и отобрать те из них, для которых значение критерия  $> 9\%$ , то мы получим дельта-нейтральный портфель.

В том случае, когда до экспирации остается месяц, существует множество точек дельта-нейтральности (поскольку линия дельты пересекает график в нескольких местах). Пересечения происходят в достаточно узком диапазоне значений порога, создавая своего рода отрезок дельта-нейтральности. На рис. 1.4.2 показан этот отрезок в более крупном масштабе, что позволяет рассмотреть каждую точку дельта-нейтральности по отдельности. Всего таких точек насчитывается 16, и они располагаются в интервале от 5 до 8%. (Другими словами, значения порога критерия, для которых соблюдается условие дельта-нейтральности, находятся в интервале 5–8%.) В том случае, когда значение параметра «время до экспирации» было принято равным двум месяцам, были обнаружены три точки дельта-нейтральности, а для трех месяцев — пять точек.

Заслуживает внимания тот факт, что для одной недели до экспирации линия индексной дельты является относительно гладкой и имеет форму классической логической кривой (верхний левый график на рис. 1.4.1). Для двух месяцев эта линия становится более ломанной, однако все еще сохраняет более-менее правильную форму (верхний правый график на рис. 1.4.1). В тех же случаях, когда портфель формировался из более далеких опционных серий (два и три месяца), линия дельты принимает все более хаотичный вид (нижние графики на рис. 1.4.1). Это означает, что дельта комбинаций, состоящих из опционов с близкой датой экспирации, приблизительно одинакова, если эти комбинации имеют приблизительно равные значения критерия. Если же комбинации строятся из дальних опционов, то их дельты гораздо более изменчивы даже в том случае, когда они оцениваются критерием приблизительно одинаково. Из этого следует, что выбор определенных сочетания значений параметров для построения дельта-нейтральных портфелей будет тем более надежен и устойчив, чем более близкие даты экспирации будут использоваться при создании опционных комбинаций.

Также следует отметить, что по мере роста значений параметра «порог критерия» индексная дельта портфеля, состоящего из опционов с близкой датой экспирации, изменяется в очень



**Рис. 1.4.2.** Зависимость индексной дельты портфеля от величины порога критерия для случая, когда до экспирации остается один месяц. Показана только та область значений порога критерия, где имеются точки дельта-нейтральности

широком диапазоне. При этом дельта портфеля, сформированного из дальних опционных серий, находится в гораздо более узком диапазоне (сравни верхний левый и нижний правый графики на рис. 1.4.1). Это объясняется тем, что при прочих равных условиях дельта опционов растет по мере приближения даты экспирации (если опцион находится в деньгах и до истечения остается немного времени, то его дельта приближается к +1 или -1). Для нас из этого следует важный вывод о том, что если при создании портфеля мы несколько отступили от заданной комбинации значений параметров (при которой портфель является дельта-нейтральным), то отклонение от дельта-нейтральности будет гораздо большим при использовании опционов с близкой датой экспирации.

Теперь перейдем к процедуре нахождения границ дельта-нейтральности. Для трех параметров, определенных нами как наиболее существенных, зафиксируем сначала «время до экспирации» и исследуем все возможные сочетания значений двух других параметров — «порог критерия» и «диапазон страйков». Для этого необходимо рассчитать величину

индексной дельты для каждого варианта (порог критерия  $\times$  диапазон страйков) во всем диапазоне их допустимых значений. Затем полученные данные следует представить в виде топографической карты, где горизонтальная и вертикальная оси соответствуют значениям исследуемых параметров, а каждая точка на карте выражает высотную отметку, соответствующую величине дельты. Точки с одинаковыми высотными отметками на такой карте соединяются изолиниями. Изолиния, проходящая по нулевой отметке, является искомой границей дельта-нейтральности.

На рис. 1.4.3 представлен пример топографической карты для значения параметра «время до экспирации», равного одной неделе (были использованы те же данные, что и при построении верхнего левого графика на рис. 1.4.1; дата создания портфеля — 11 января 2010 г., дата экспирации — 15 января 2010 г.). Граница дельта-нейтральности проходит по диагонали от верхнего левого угла карты к правому нижнему углу. Справа от границы находятся портфели с положительными значениями индексной дельты, а с левой стороны — портфели с отрицательной дельтой. При очень низких значениях порога критерия (левый край карты) дельта портфелей достигает очень больших отрицательных значений.

Заметьте, что верхний левый график на рис. 1.4.1 в точности соответствует горизонтальной линии на карте, проходящей через диапазон страйков, равный 10% [рис. 1.4.3]. То есть если провести мысленный разрез по данной горизонтали и представить себе боковой вид данного разреза, то мы получим профиль, полностью совпадающий с линией индексной дельты на рис. 1.4.1. Таким образом, совокупность точек дельта-нейтральности, полученных по описанной выше методике, формирует границы дельта-нейтральности.

Глядя на топографическую карту, представленную на рис. 1.4.3, легко определить, что дельта-нейтральный портфель может быть сформирован при достаточно большом количестве сочетаний параметров (порог критерия  $\times$  диапазон страйков). Например, можно построить портфель, состоящий из комбинаций, для которых значение критерия больше 5%, а диапазон страйков достаточно широк (цена  $\pm 20\%$ ). С другой стороны, можно предпочесть дельта-нейтральный портфель, включающий комбинации только с большими значениями критерия (например, больше 15%). Но тогда придется ограничиться довольно узким диапазоном страйков (цена  $\pm 6\%$ ). И так далее.

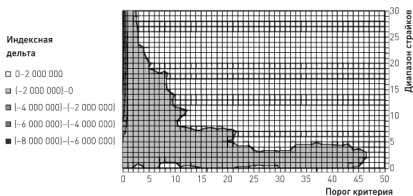


Рис. 1.4.3. Пример построения топографической карты для определения границы дельта-нейтральности

Описанная методика нахождения границ дельта-нейтральности представлена здесь в виде визуальных процедур. Это сделано исключительно для наглядности и простоты изложения материала. На практике визуализация границ не требуется, они могут быть определены расчетными методом, используя компьютерные алгоритмы. Вместе с тем построение подобных топографических карт может быть полезно для осмысления взаимозависимости параметров и выбора диапазонов их допустимых значений.

Необходимо отметить, что для целей создания автоматизированной торговой системы мы не можем ограничиться использованием карты подобной той, что изображена на рис. 1.4.3, поскольку она представляет собой единичный случай. Автоматизированная системная торговля характеризуется именно тем, что решения принимаются не по результатам изучения единственной карты, а на основе устойчивых закономерностей, установленных на достаточно широком фактическом материале. Кроме того, следует рассмотреть, зависит ли расположение границ дельта-нейтральности от состояния рынка. Логично предположить, что в периоды высокой волатильности границы выглядят иначе, чем во время спокойного рынка. Именно поэтому мы переходим теперь к изучению границ дельта-нейтральности, построенных на более широкой статистической базе, включающей как спокойные, так и экстремальные (кризисные) периоды.

#### 1.4.4. Анализ границ дельта-нейтральности

В этом разделе мы исследуем границы дельта-нейтральности для двух периодов времени, остающегося до экспирации опционов, и для двух состояний рынка базовых активов. В качестве временных интервалов рассмотрим недельный и двухмесячный периоды между моментом открытия позиций и датой экспирации. Для каждого из этих временных интервалов исследуем границы дельта-нейтральности в период спокойного рынка с низкой волатильностью и во время экстремальных рыночных колебаний. Для каждого из четырех вариантов (период времени  $\times$  состояние рынка) построим 12 границ дельта-нейтральности. Для спокойного рынка воспользуемся данными, относящимися к периоду с марта 2009 по февраль 2010 г. Для волатильного рынка используем данные соответствующие финансовому кризису (январь 2008 — декабрь 2008 г.).

Верхний график на рис. 1.4.4 представляет 12 границ дельта-нейтральности, относящихся к портфелям, составленным в спокойный период из опционов с ближайшей датой истечения. Хотя границы не совпадают между собой (что вполне естественно, поскольку все они относятся к разным датам экспирации), тем не менее общая картина достаточно ясна и позволяет сделать несколько важных выводов. Во-первых, все границы располагаются приблизительно в одной области. Во-вторых, почти все границы имеют схожую форму, более или менее вытянутую в сторону высоких значений порога критерия. В-третьих, большинство границ располагаются в зоне достаточно узкого диапазона страйков (хотя в некоторых случаях имеются «отростки» границ в сторону более широких диапазонов). Такая форма границ указывает на то, что в период спокойного рынка соблюдение условия дельта-нейтральности для портфелей, состоящих из опционов с близкой экспирацией, возможно в довольно широком диапазоне порога критерия, но требует использования достаточно узкого диапазона страйков.

Границы дельта-нейтральности, соответствующие портфелям, сформированным в спокойный период из опционов с относительно далекой датой истечения, выглядят принципиально иначе (нижний график рис. 1.4.4). В первую очередь следует отметить, что только в восьми из 12 случаев были получены границы. В оставшихся четырех случаях дельта-нейтральность оказалась недостижимой ни в одной точке. Кроме того, границы, относящиеся к разным датам экспирации, перекрываются в гораздо меньшей степени (не совпадают между

собой настолько, насколько это было отмечено для портфелей из опционов с ближайшей датой истечения). Это указывают на то, что по мере увеличения периода времени, остающегося до экспирации опционов, растет изменчивость в расположении границ дельта-нейтральности. Тем не менее можно выделить общую область, в которой располагается большинство границ. Она представляет собой довольно широкую полосу, идущую по диагонали от низких значений порога критерия и узкого диапазона страйков к высоким значениям порога и широкому диапазону страйков. Это заметно отличается от картины, наблюдавшейся для случая с ближайшей датой экспирации, когда область дельта-нейтральности шла приблизительно параллельно оси порога критерия (см. верхний график рис. 1.4.4). Такие характеристики границ свидетельствуют о том, что для портфелей, формируемых в период спокойного рынка из опционов с далекой датой экспирации, использование более высокого порога критерия требует расширения диапазона страйков.

Теперь обратимся к периоду высокой волатильности. Когда портфель формировался из опционов с ближайшей датой экспирации, дельта-нейтральность была достигнута в семи из 12 случаев (верхний график рис. 1.4.5). Для портфелей, состоящих из двухмесячных опционов, дельта-нейтральность оказалась еще менее достижимой — лишь в пяти из 12 случаев (нижний график рис. 1.4.5). При этом в одном из этих пяти случаев граница является очень короткой (экспирация, декабрь 2008 г.). В период высокой волатильности форма границ дельта-нейтральности зависит от времени, остающегося до экспирации, в меньшей степени, чем это было отмечено для периода спокойного рынка. Об этом свидетельствует схожесть верхнего и нижнего графиков на рис. 1.4.5 (графики, показанные на рис. 1.4.4, отличаются между собой гораздо больше). Единственным отличием является большая «приподнятость» границ портфелей с более далекой экспирацией (нижний график рис. 1.4.5) вдоль оси диапазона страйков. Это свидетельствует о том, что для более далеких опционов достижение дельта-нейтральности в условиях волатильного рынка возможно лишь при условии использования более широкого диапазона страйков.

В период экстремальных колебаний рынка границы дельта-нейтральности в целом напоминают по форме границы периода спокойного рынка. Однако они простираются не настолько далеко вдоль оси порога критерия (сравни рис. 1.4.4 и 1.4.5).



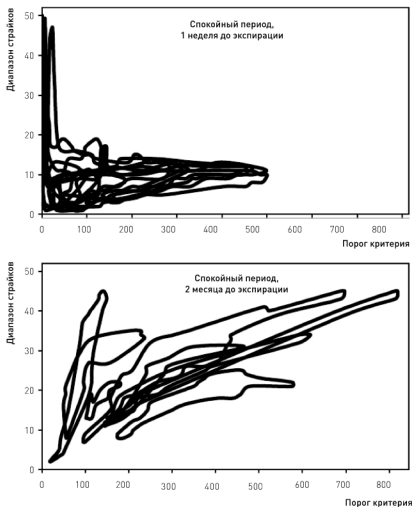


Рис. 1.4.4. Границы дельта-нейтральности для портфелей, сформированных в спокойный период. Верхний график представляет портфели, состоящие из опционов, до истечения которых остается одна неделя. На нижнем графике показаны портфели, составленные из двухмесячных опционов. Каждая граница относится к отдельной дате экспирации

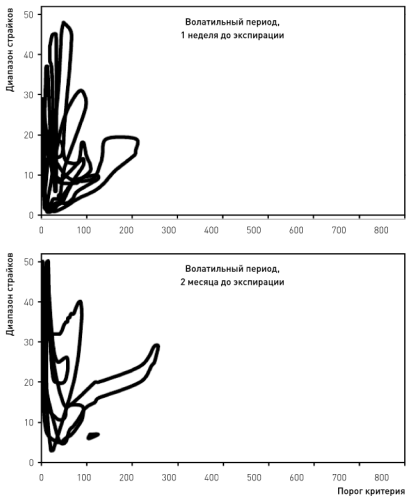


Рис. 1.4.5. Границы дельта-нейтральности для портфелей, сформированных в период волатильного рынка. Верхний график представляют портфели, состоящие из опционов, до истечения которых остается одна неделя. На нижнем графике показаны портфели, составленные из двухмесячных опционов. Каждая граница относится к отдельной дате экспирации

Это означает, что во время волатильного рынка построение дельта-нейтральных портфелей с использованием только таких опционных комбинаций, которые обладают исключительно высокими показателями критерия, невозможно.

#### 1.4.5. Количественные характеристики границ дельта-нейтральности

Исследование характеристик дельта-нейтральности, основанное на визуальном анализе границ, представленных на рис. 1.4.4 и 1.4.5, является наглядным, но неизбежно подвержено влиянию субъективных факторов, зависящих от индивидуальных особенностей исследователя. Кроме того, визуальный анализ ограничен человеческими возможностями и не может охватить большие объемы данных. Для создания автоматизированной торговой системы необходимо анализировать границы дельта-нейтральности на основе расчетных количественных характеристик.

Мы разработали методику, позволяющую описать каждую границу с помощью четырех характеристик:

1. Индекс порога критерия характеризует положение границы дельта-нейтральности относительно оси порога критерия. Этот показатель рассчитывается путем усреднения координат по горизонтальной оси топографической карты для всех точек, составляющих границу дельта-нейтральности.
2. Индекс диапазона страйков характеризует положение границы дельта-нейтральности относительно оси диапазона страйков. Этот показатель рассчитывается путем усреднения координат по вертикальной оси топографической карты для всех точек, составляющих границу дельта-нейтральности.
3. Протяженность границы дельта-нейтральности характеризует длину границы. Значение этого показателя равняется количеству точек, составляющих границу дельта-нейтральности.
4. Достижимость дельта-нейтральности характеризует принципиальную возможность создания дельта-нейтрального портфеля. Этот показатель выражает процент случаев, для которых дельта-нейтральность достижима, от общего количества исследованных случаев.

Применим эту методику к границам дельта-нейтральности, представленным на рис. 1.4.4 и 1.4.5. Индексы порога критерия и диапазона страйков показаны на рис. 1.4.6. Здесь каждая граница критерия, представленная на рис. 1.4.4 и 1.4.5, в виде

изолинии, обращена в единственную точку, являющуюся своего рода центром области, отделенной границей дельта-нейтральности. Представление границы в виде единственной точки, безусловно, снижает объем информации, содержащейся в исходных данных. Тем не менее почти все заключения, сделанные ранее на основании визуального анализа рис. 1.4.4 и 1.4.5, можно сделать, проанализировав данные, представленные на рис. 1.4.6.

Приведение границ дельта-нейтральности к точкам делает возможным одновременную обработку и сравнение большого количества границ в пределах одного анализа. Проиллюстрируем это на примере расширенного анализа, включающего данные за десятилетний период. Из базы данных, содержащей цены опционов с марта 2000 по апрель 2010 г., мы сделали две выборки. Одна выборка относилась к периоду низкой волатильности (когда подразумеваемая волатильность не превышала 15%), вторая — к периоду высокой волатильности (с подразумеваемой волатильностью свыше 40%). В пределах каждой выборки мы сформировали два варианта портфелей (в соответствии

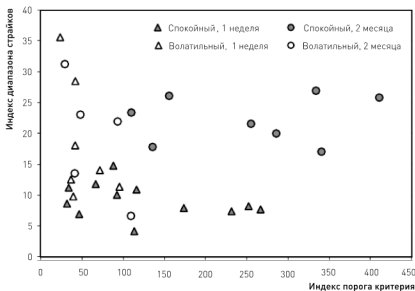


Рис. 1.4.6. Представление границ дельта-нейтральности в виде единственной точки с координатами, соответствующими индексам порога критерия и диапазона страйков. Каждая точка соответствует одной из границ показанных на рис. 1.4.4 и 1.4.5

с сигналами на открытие позиций, генерируемыми в рамках базовой дельта-нейтральной стратегии]. В одном варианте портфели состояли из близких опционов, истекающих через одну-две недели, во втором — из далеких опционов, до истечения которых остается два-три месяца. Оба варианта портфелей были построены для каждой даты экспирации.

Индексы порога критерия и диапазона страйков для каждого полученного портфеля представлены на рис. 1.4.7. Анализ этих данных (мы здесь основываемся на визуальном анализе, но на практике он может быть заменен компьютерным алгоритмом) позволяет сделать целый ряд важных выводов относительно зависимости границ дельта нейтральности от волатильности рынка и от времени, остающегося до истечения опционов:

- ◇ В спокойные периоды границы дельта-нейтральности располагаются в области низких значений порога критерия (независимо от периода времени, остающегося до экспирации). Этот вывод основан на расположении заполненных кружков и треугольников в крайней левой части рис. 1.4.7.
- ◇ В периоды высокой волатильности границы дельта-нейтральности весьма изменчивы по величине порога критерия, но в большинстве случаев также тяготеют к области низких значений. Этот вывод основан на расположении контурных кружков и треугольников вдоль горизонтальной оси рис. 1.4.7 [с преобладанием в районе левой части данной оси].
- ◇ Время, остающееся до экспирации опционов, не влияет на положение границ дельта-нейтральности относительно оси порога критерия. Дельта-нейтральность может быть достигнута в самом широком интервале значений порога. Этот вывод основан на расположении кружков и треугольников вдоль горизонтальной оси рис. 1.4.7.
- ◇ Для портфелей, состоящих из опционов с ближайшей датой истечения, дельта-нейтральность достижима только при условии использования узкого диапазона страйков. Этот вывод (справедливый как для спокойного, так и для волатильного рынков) основан на расположении заполненных и контурных треугольников в области низких значений относительно вертикальной оси рис. 1.4.7.
- ◇ Во время волатильного рынка при формировании портфелей из далеких опционов границы дельта-нейтральности располагаются преимущественно в районе средних

значений диапазона страйков. Этот вывод основан на расположении большинства контурных кружков приблизительно посередине вертикальной оси рис. 1.4.7.

- ♦ В период низкой волатильности дельта-нейтральными будут только те портфели (состоящие из далеких опционов), которые составлены с использованием широкого диапазона страйков. Этот вывод основан на расположении заполненных кружков в области высоких значений относительно вертикальной оси рис. 1.4.7.

Теперь рассмотрим протяженность границ дельта-нейтральности. Как было сказано выше, этот показатель выражает количество точек, составляющих границу. Чем длиннее граница, тем больше вариантов дельта-нейтрального портфеля можно построить, манипулируя значениями порога критерия и шириной диапазона страйков.

В первую очередь исследуем взаимозависимость протяженности и двух рассмотренных выше характеристик границы (индексов дельта-нейтральности и порога критерия). Рис. 1.4.8 демонстрирует зависимость протяженности границы от места ее

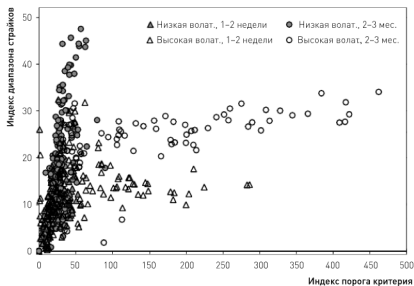
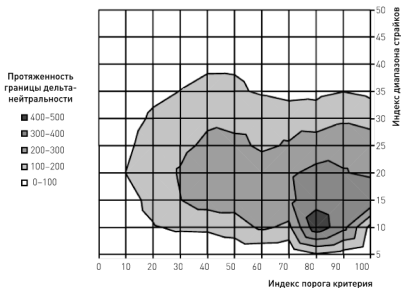


Рис. 1.4.7. Представление границ дельта-нейтральности в виде точки с координатами, соответствующими индексам порога критерия и диапазона страйков. Показаны данные, относящиеся к десятилетнему историческому периоду

расположения на топографической карте. Самыми длинными оказались границы, проходящие в области высоких значений порога критерия и низкого значения диапазона страйков. Это означает, что, используя узкий диапазон страйков и отбирая комбинации, имеющие высокие значения критериев, можно получить более протяженную границу дельта-нейтральности. Это обеспечит более широкий выбор вариантов дельта-нейтральных портфелей, что позволит выбрать такой вариант портфеля, характеристики которого наиболее соответствуют требованиям, предъявляемым разработчиком торговой системы.

Рассмотрим зависимость протяженности границ дельта-нейтральности от волатильности рынка и от времени, остающегося до истечения опционов. Из рис. 1.4.9 следует, что наибольшей длины граница достигает при высокой волатильности и относительно коротком промежутке времени до экспирации (около 20 дней). При использовании опционов, до истечения которых остается менее 20 дней, протяженность границы сокращается. Использование более долгосрочных опционов



**Рис. 1.4.8.** Зависимость протяженности границы дельта-нейтральности от индексов порога критерия и диапазона страйков. Представленные данные относятся к десятилетнему историческому периоду

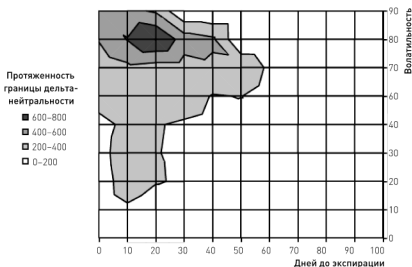


Рис. 1.4.9. Зависимость протяженности границы дельта-нейтральности от количества дней, остающегося до истечения опционов, и волатильности рынка базовых активов. Представленные данные относятся к десятилетнему историческому периоду

(более 20 дней до истечения) также приводит к сокращению границы дельта-нейтральности. Таким образом, в периоды волатильного рынка наибольшее количество вариантов дельта-нейтрального портфеля существует, когда от момента открытия позиций до экспирации опционов остается порядка 10–30 торговых дней.

По мере снижения волатильности протяженность границы дельта-нейтральности сокращается (рис. 1.4.9). Это происходит независимо от количества дней до экспирации. Однако в тех случаях, когда позиции открываются незадолго до экспирации, сокращение границы происходит не столь быстрыми темпами. Даже в условиях, когда подразумеваемая волатильность снижается до 20%, протяженность границ остается в пределах средних значений. При очень низкой волатильности границы дельта-нейтральности сокращаются до минимальных размеров на всем диапазоне значений периода времени до экспирации. Сокращение протяженности границ дельта-нейтральности приводит к тому, что в отдельных случаях вся граница может быть представлена лишь небольшой группой точек. Мы видели пример такой границы на нижнем графике рис. 1.4.5 (экспирация

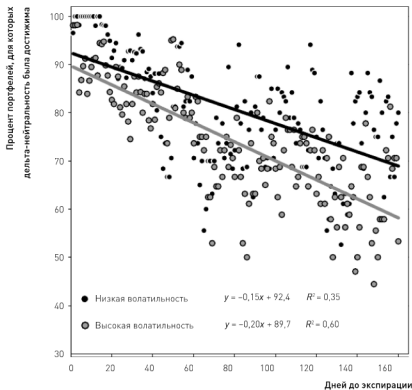


19 декабря 2008 г.), когда портфель был сформирован в кризисный период с использованием долгосрочных опционов.

В предельных случаях границы дельта-нейтральности могут сокращаться до нуля. В таких случаях мы будем говорить, что дельта-нейтральность недостижима. Рассмотрим, насколько достижимость дельта-нейтральности зависит от количества дней до экспирации и от волатильности рынка. Для этого мы вновь воспользовались десятилетней базой данных, сделав из нее две выборки, одна из которых относилась к спокойному периоду (подразумеваемая волатильность < 15%), а вторая — к периоду высокой волатильности (подразумеваемая волатильность > 40%). В пределах каждой выборки были сформированы два варианта портфелей, состоящих из близких и далеких опционов (первая-вторая неделя и два-три месяца до истечения соответственно). Согласно данному выше определению достижимость дельта-нейтральности была рассчитана как процент случаев, когда дельта-нейтральность была достигнута хотя бы в одной точке от общего количества случаев.

Нами были обнаружены статистически значимые зависимости достижимости дельта-нейтральности от количества дней, остающегося до истечения опционов (для спокойного периода  $t = 9,12$ ,  $p < 0,0001$ ; для волатильного периода  $t = 15,24$ ,  $p < 0,0001$ ; рис. 1.4.10). Дельта-нейтральность оказалась достижимой почти во всех случаях, когда портфели были сформированы за несколько дней до даты истечения. По мере удаления от экспирации достижимость дельта-нейтральности снижается. В тех случаях, когда для формирования портфелей использовались опционы, до истечения которых оставалось более 100 рабочих дней, дельта-нейтральность оказалась достижимой лишь в 40–80% случаев (в зависимости от волатильности рынка). Полученные значения коэффициентов детерминации (0,60 для периода высокой волатильности и 0,35 для спокойного периода) указывают на то, что от 35% до 60% изменчивости в достижимости дельта-нейтральности объясняется промежуток времени остающегося от момента открытия позиций до истечения опционов. Таким образом, использование близких опционов гарантирует, что, как минимум некоторые из рассматриваемых вариантов портфеля будут обладать свойством дельта-нейтральности.

Волатильность рынка также влияет на зависимость достижимости дельта-нейтральности от количества дней до экспирации. На это указывает распределение данных в двумерной системе



**Рис. 1.4.10.** Зависимость достижимости дельта-нейтральности от количества дней, остающегося до истечения опционов, в условиях спокойного и волатильного рынка. Представленные данные относятся к десятилетнему историческому периоду

координат и несовпадение линий регрессии, относящихся к обеим выборкам данных (рис. 1.4.10). Угловым коэффициентом, характеризующим рассматриваемую зависимость в условиях волатильного рынка, меньше коэффициента, соответствующего спокойному рынку. Данная разность наклонов линий регрессии статистически значима ( $t = 2,76$ ,  $p < 0,0065$ ). Следовательно, достижимость дельта-нейтральности зависит от состояния рынка: при высокой волатильности достижимость дельта-нейтральности менее вероятна. При этом влияние волатильности на достижимость

дельта-нейтральности усиливается по мере увеличения периода времени, остающегося до истечения опционов.

- Таблица 1.4.1 суммирует в сжатом виде все исследованные нами характеристики дельта-нейтральности, а также их зависимость от волатильности рынка и от промежутка времени от момента создания портфеля до экспирации опционов. Данную таблицу можно использовать следующим образом. Например, если на текущий момент рынок находится в состоянии высокой волатильности и, по тем или иным причинам, портфель формируется из опционов с близкой датой истечения, то с большой долей вероятности можно предположить, что:
- ◇ дельта-нейтральность может быть достигнута в самом широком интервале значений порога критерия (широкий диапазон значений порога критерия);

		Волатильность			
		Высокая		Низкая	
Время до истечения	Короткое	Расположение ГДН:	широкий диапазон значений порога критерия	Расположение ГДН:	широкий диапазон значений порога критерия
		Расположение ГДН:	узкий диапазон страйков	Расположение ГДН:	узкий диапазон страйков
		Протяженность ГДН:	большая	Протяженность ГДН:	средняя
	ДДН:	высокая	ДДН:	высокая	
	Длинное	Расположение ГДН:	широкий диапазон значений порога критерия	Расположение ГДН:	низкое значение порога критерия
		Расположение ГДН:	средний диапазон страйков	Расположение ГДН:	широкий диапазон страйков
Протяженность ГДН:		малая	Протяженность ГДН:	малая	
ДДН:	низкая	ДДН:	низкая		

Таблица 1.4.1. Зависимость характеристик границы дельта-нейтральности (ГДН) и достижимости дельта-нейтральности (ДДН) от промежутка времени (от момента создания портфеля до экспирации) и от состояния рынка (волатильности)

- ◇ для получения дельта-нейтрального портфеля следует использовать страйки, лежащие вблизи текущей цены базового актива (узкий диапазон страйков);
- ◇ существует большое множество доступных вариантов дельта-нейтрального портфеля (большая протяженность ГДН);
- ◇ среди доступных вариантов портфеля дельта-нейтральность принципиально достижима (высокая ДДН).

#### 1.4.6. Анализ структуры портфеля

В предыдущих разделах был рассмотрен вопрос достижимости условия дельта-нейтральности для базовой стратегии, и исследованы факторы, влияющие на положение и протяженность границ дельта-нейтральности. Мы установили, каким образом можно, манипулируя тремя основными параметрами стратегии, повлиять на количество доступных вариантов дельта-нейтрального портфеля. Влияние параметров было исследовано для условий волатильного и спокойного рынка.

Во многих случаях имеется как минимум несколько сочетаний параметров, каждое из которых позволяет построить дельта-нейтральный портфель. Однако структура и свойства этих портфелей будут разными. Поэтому возникает вопрос: каким образом выбрать такую комбинацию параметров, которая позволяет построить портфель, максимально соответствующий требованиям разработчика торговой стратегии?

К основным характеристикам, определяющим структуру и свойства портфеля относятся:

- ◇ количество комбинаций в составе портфеля (характеризует диверсификацию и количество сделок, а, следовательно, величину проскальзываний и размеры операционных издержек);
- ◇ количество разных базовых активов в составе портфеля (характеризует диверсификацию и количество сделок);
- ◇ соотношение длинных и коротких комбинаций в портфеле (характеризует структуру портфеля);
- ◇ соотношение стрэддлов и стрэнглов в портфеле (характеризует структуру портфеля);
- ◇ степень асимметричности портфеля (характеризует меру сбалансированности дельта-нейтрального портфеля);
- ◇ вероятность убытка и VaR (эти показатели характеризуют риск портфеля).

В первую очередь мы рассмотрим, как основные параметры стратегии влияют на эти характеристики. (Поскольку, как будет показано далее, многие характеристики меняются очень сильно

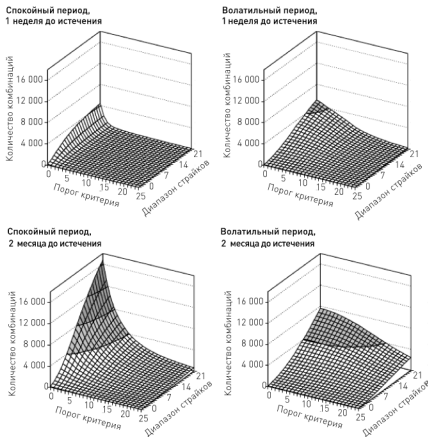
в зависимости от величины порога критерия и от диапазона страйков, мы ограничимся рассмотрением этих параметров в интервале значений от 0 до 25%. В противном случае тенденции в изменениях характеристик невозможно будет рассмотреть на графиках.) Затем определим, каким набором характеристик будут обладать различные доступные варианты дельта-нейтральных портфелей. И, наконец, опишем основные подходы к выбору оптимальных вариантов портфеля.

Приведенные ниже исследования основываются на данных, относящихся к периоду спокойного рынка с низкой волатильностью и к кризисному периоду с экстремальными рыночными колебаниями. Мы рассмотрим два временных интервала (недельный и двухмесячный) от момента создания портфеля до экспирации опционов. Дата создания портфелей, относящихся к спокойному рынку, 11 января 2010 г., даты экспирации — 15 января 2010 г. (для недельных опционов) и 19 марта 2010 г. (для двухмесячных опционов). Дата создания портфелей, относящихся к волатильному рынку, 17 ноября 2008 г., даты экспирации — 21 ноября 2008 г. (для недельных опционов) и 16 января 2009 г. (для двухмесячных опционов).

#### **Количество комбинаций в составе портфеля**

Из рис. 1.4.11 следует, что количество комбинаций, входящих в состав портфеля, достигает своего максимума при наименьших ограничениях, накладываемых на параметры стратегии: минимальный порог критерия (то есть используются все комбинации, для которых математическое ожидание прибыли больше нуля); широкий диапазон страйков (то есть для построения комбинаций используется максимальное количество страйков); длительный период до экспирации. Это справедливо как для спокойного, так и для волатильного рынка.

Форма поверхностей на графиках рис. 1.4.11 свидетельствует о степени влияния каждого из параметров на изучаемую характеристику портфеля. Так, из графиков, относящихся к спокойному рынку, следует, что увеличение порога критерия приводит к резкому, экспоненциальному снижению количества комбинаций в портфеле. Сужение диапазона страйков также ведет к снижению числа комбинаций, однако это снижение происходит более медленными темпами. Поверхность, относящаяся к портфелям, формируемым из ближайших опционов в период волатильного рынка, демонстрирует примерно равную степень влияния обоих параметров на диверсификацию портфеля. В том случае, когда в период кризиса используются более



**Рис. 1.4.11.** Зависимость количества комбинаций, входящих в состав портфеля, от порога критерия и диапазона страйков. Представлены данные, относящиеся к двум состояниям рынка (спокойному и кризисному) и к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации

долгосрочные опционы, увеличение порога критерия приводит к более плавному снижению количества комбинаций, чем сужение диапазона страйков.

Во время спокойного рынка наименьшее количество комбинаций получается для портфелей, создаваемых вблизи экспирации. При использовании более далеких опционов происходит значительный рост количества комбинаций. Во время волатильного рынка нами была отмечена похожая тенденция. Однако разница между портфелями, формируемыми вблизи

экспирации, и портфелями, состоящими из далеких опционов, не столь существенна, как в спокойный период (рис. 1.4.11). Кроме того, портфели, создаваемые из ближайших опционов, во время спокойного рынка содержат меньше комбинаций, чем в кризисный период. Обратная тенденция наблюдается для портфелей, формируемых из более далеких опционов: в спокойные периоды они состоят из большего числа комбинаций по сравнению с волатильными периодами (рис 1.4.11). Эти тенденции наблюдаются для всех значений порога критерия и диапазона страйков, однако наиболее ярко они проявляются при низких порогах критерия и широких диапазонах страйков.

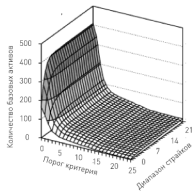
#### **Количество базовых активов**

Данная характеристика является важным показателем диверсификации портфеля. Поскольку ценовые движения базовых активов являются одним из основных факторов, определяющих прибыли и убытки дельта-нейтральных опционных портфелей (наряду с колебаниями подразумеваемой волатильности), диверсификация позволяет существенно снизить уровень несистемного риска. Вместе с тем избыточная диверсификация может оказать негативное влияние, так как она, принося лишь незначительное дополнительное снижение риска, требует большого количества операций по открытию и закрытию позиций (что увеличивает размеры потерь за счет проскальзываний и операционных издержек).

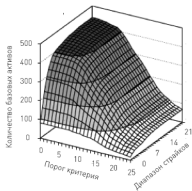
В спокойные периоды количество базовых активов в портфеле зависит только от порога критерия и времени, остающегося до истечения опционов. Ширина диапазона страйков, используемых при построении комбинаций, никак не влияет на диверсификацию портфеля, состоящего из ближайших опционов и лишь незначительно влияет в случае использования дальних опционов (рис. 1.4.12). Если для формирования портфеля используются опционы с ближайшей датой истечения, то при самых низких значениях порога критерия количество базовых активов может быть очень большим. Для величины порога 1% это количество достигает 400 из 500 возможных (напоминаем, что в данном исследовании выбор ограничен списком акций, входящих в индекс S&P 500). Однако даже незначительное увеличение порога критерия приводит к резкому нелинейному снижению количества базовых активов. Для порога 3% число базовых активов падает до 50, а для порога 8% — уже не превышает 20. Качественно схожая картина наблюдается и в том случае, когда портфель формируется из дальних опционов. Однако

в этом случае несколько больше базовых активов приходится на каждое сочетание (порог критерия  $\times$  диапазон страйков). На это указывает менее вогнутая форма поверхности графика на рис. 1.4.12. Также следует отметить, что при использовании двухмесячных опционов в спокойный период, расширение диапазона страйков способствует (хотя и очень незначительно) увеличению числа базовых активов.

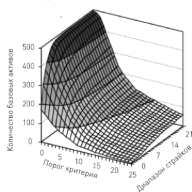
Спокойный период,  
1 неделя до истечения



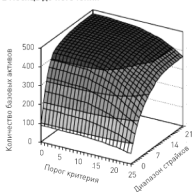
Волатильный период,  
1 неделя до истечения



Спокойный период,  
2 месяца до истечения



Волатильный период,  
2 месяца до истечения



**Рис. 1.4.12.** Зависимость количества базовых активов от порога критерия и диапазона страйков. Представлены данные, относящиеся к двум состояниям рынка (спокойному и кризисному) и к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации



В периоды высокой волатильности наблюдается иная картина. При формировании портфеля из ближайших опционов порог критерия и диапазон страйков оказывают приблизительно одинаковое влияние на количество базовых активов. Диверсификация достигает своего максимума при более низких порогах критерия и более широких диапазонах страйков. (Об этом свидетельствует плоское плато на соответствующем графике рис. 1.4.12.) Увеличение порога критерия и сужение диапазона страйков приводят к резкому падению количества базовых активов. В том случае, когда комбинации создаются из долгосрочных опционов, влияние порога критерия на диверсификацию очень незначительно. Зато ширина диапазона страйков является в этом случае основным параметром, определяющим количество базовых активов. Сужение диапазона приводит к резкому снижению диверсификации (рис 1.4.12).

#### **Соотношение длинных и коротких комбинаций**

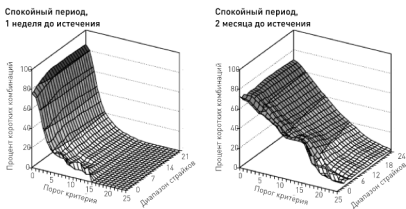
Данный показатель выражает одну из основополагающих характеристик портфеля. С одной стороны, соотношение длинных и коротких позиций влияет самым непосредственным образом как на риск, так и на потенциал прибыльности портфеля. (Напомним, что потенциал прибыльности коротких комбинаций ограничен, а их потенциальный убыток безграничен. Для коротких комбинаций, наоборот, свойственны ограниченные убытки и безграничная прибыль.) С другой стороны, диапазон допустимых значений этого показателя определяется не только его потенциальным влиянием на соотношение риск/доходность, но зависит еще и от многих внешних факторов. К последним относятся лимиты, устанавливаемые финансовыми организациями и регулируемыми органами (что можно условно отнести к объективным ограничивающим факторам), а также лимиты, определяемые психологическим комфортом разработчика стратегии (субъективный ограничивающий фактор).

В период высокой волатильности все портфели состоят исключительно из коротких комбинаций (за редкими исключениями, когда менее 5% портфеля приходится на длинные комбинации). По этой причине мы не показываем на рис. 1.4.13 графики, соответствующие кризисному периоду. В целом преобладание коротких комбинаций во время экстремальных рыночных движений является обычным явлением. Происходит это потому, что в период кризиса опционные премии (подразумеваемая волатильность) быстро растут, а историческая волатильность, оцениваемая на определенном историческом

периоде, растет более медленными темпами. В результате короткие комбинации имеют более высокие показатели по большинству критериев. Однако даже в периоды высокой волатильности дельта-нейтральные портфели могут включать в себя определенное (пусть даже ограниченное) количество длинных комбинаций. (В конечном итоге примеры, рассматриваемые в данном разделе, ограничены всего двумя датами экспирации.)

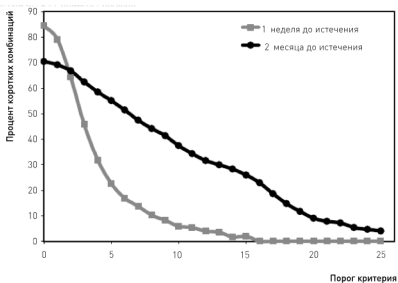
В период спокойного рынка процент коротких комбинаций от общего количества комбинаций в портфеле зависит только от величины порога критерия. Ширина диапазона страйков почти не оказывает влияния на интересующий нас показатель (рис. 1.4.13). Поэтому, для того чтобы лучше проследить указанную зависимость и сравнить между собой разные интервалы времени до истечения опционов, будет удобно представить поверхности, показанные на рис. 1.4.13, в виде линий. Это можно сделать путем усреднения данных, относящихся к разным диапазонам страйков. Поскольку данный параметр не влияет на соотношение длинных и коротких комбинаций, усреднение не приведет к потере информации.

Усредненные данные, представленные на рис. 1.4.14, указывают на то, что доля коротких комбинаций в составе портфеля



**Рис. 1.4.13.** Зависимость процента коротких комбинаций от порога критерия и диапазона страйков. Представленные данные относятся к спокойному рынку и к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации

достигает своего максимума при низких значениях порога критерия. В портфелях, состоящих из краткосрочных опционов эта доля выше (более 80%), чем в портфелях, сформированных из опционов с более далекой датой экспирации (около 70%). Увеличение порога критерия приводит к снижению доли коротких комбинаций. Причем, если портфель состоит из опционов с ближайшей датой экспирации, снижение происходит гораздо более высокими темпами (по экспоненте). Превышение порогом критерия величины 15% приводит в этом случае к снижению доли коротких комбинаций до нуля. (Это означает, что если в портфель включаются только те комбинации, для которых значение критерия превышает 15%, то происходит полное исчезновение коротких комбинаций из состава портфеля.) В том случае, когда портфель формируется из опционов с более далекой датой экспирации, снижение доли коротких комбинаций происходит постепенно (почти линейно). При значении порога критерия 15% более четверти портфеля все еще составляют короткие комбинации.



**Рис. 1.4.14.** Зависимость процента коротких комбинаций от порога критерия. Представленные данные (усредненные для всего диапазона страйков) относятся к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации

### Соотношение стрэддлов и стрэнглов

Настоящее исследование показало, что соотношение различных типов опционных комбинаций (в данном случае — стрэддлов и стрэнглов) не зависит от величины порога критерия. С другой стороны, ширина диапазона страйков оказывает существенное влияние на этот показатель. Похожая (но противоположная) ситуация была рассмотрена в предыдущем разделе, где соотношение длинных и коротких комбинаций не зависело от диапазона страйков, а определялось только величиной порога критерия. По аналогии с предыдущим исследованием мы усредним данные, относящиеся к разным значениям порога критерия. Это позволит лучше проследить зависимость доли стрэддлов в составе портфеля от ширины диапазона страйков и сравнить данную зависимость между разными интервалами времени до истечения опционов и между разными состояниями рынка.

Во всех ситуациях доля стрэддлов в составе портфеля снижается по мере роста диапазона страйков (рис. 1.4.15). Это объясняется тем, что если разрешен лишь очень узкий диапазон, то туда может попасть только несколько страйков (а может быть — всего

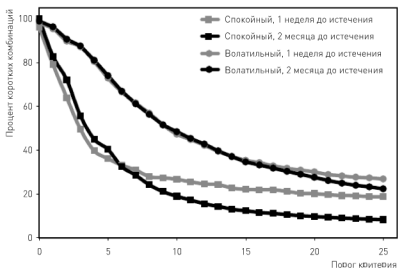


Рис. 1.4.15. Зависимость процента стрэддлов от ширины диапазона страйков. Представлены данные, относящиеся к двум состояниям рынка (спокойному и кризисному) и к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации

един). Чем меньше страйков доступно для построения комбинаций, тем меньше вариантов стрэнглов можно из них построить (и тем выше доля стрэддлов в составе портфеля). Во время спокойного рынка снижение доли стрэддлов происходит нелинейно: при расширении диапазона страйков до 8–10% доля стрэддлов снижается очень быстрыми темпами, после чего дальнейшее расширение диапазона не оказывает заметного влияния. При расширении диапазона страйков до 25% стрэддлы составляют лишь 8% для портфелей, состоящих из двухмесячных опционов, и 19% для портфелей, сформированных из недельных опционов. В период высокой волатильности расширение диапазона страйков приводит к более плавному (почти линейному) снижению доли стрэддлов в составе портфеля (рис. 1.4.15). При этом период времени, остающийся до экспирации опционов, не оказывает почти никакого влияния на динамику данного показателя.

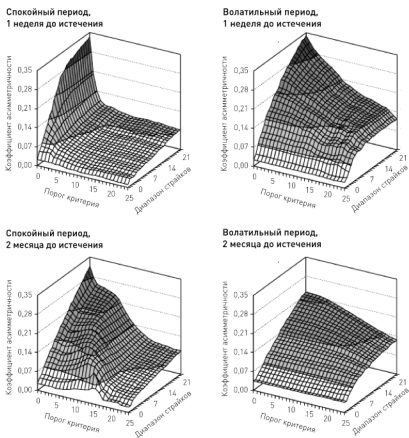
#### **Асимметричность портфеля**

Этот показатель представляет собой специальный коэффициент (описанный в главе, посвященной оценке рисков). Он выражает степень асимметричности платежной функции портфеля относительно текущего значения определенного индекса. Симметричность платежной функции означает, что как при росте, так и при падении рынка, стоимость портфеля будет изменяться приблизительно одинаково (разумеется, при равных величинах роста и падения). Если же симметричность нарушена, то платежная функция будет смещенной относительно текущего значения индекса, а коэффициент асимметричности будет выражать меру этого смещения. Поскольку концепция, лежащая в основе дельта-нейтральных стратегий, основывается на принципах нейтральности по отношению к рынку, коэффициент асимметричности является важным показателем, характеризующим сбалансированность дельта-нейтрального портфеля.

В период спокойного рынка асимметричность портфелей, построенных из ближайших опционов, была достаточно низкой почти для всех сочетаний (порог критерия  $\times$  диапазон страйков). Однако при низком значении порога критерия и широком диапазоне страйков коэффициент асимметричности оказался очень высоким (рис. 1.4.16). При переходе к более долгосрочным опционам поверхность графика превращается из вогнутой в выпуклую. Это означает, что асимметричность портфелей становится высокой и при средних значениях порога критерия и диапазона страйков. В этом случае низкая симметричность сохраняется в двух областях: (1) почти на всем интервале

порога критерия (при условии, что диапазон страйков достаточно узок) и (2) почти при всех значениях диапазона страйков (при условии, что порог критерия достаточно высок).

Во время высокой волатильности наиболее асимметричные портфели также получаются при минимальных значениях порога критерия и максимальных диапазонах страйков (рис. 1.4.16). Однако если во время спокойного рынка асимметричность портфелей, состоящих из ближайших опционов, была в целом ниже, чем у портфелей, построенных из долгосрочных опционов, то в период



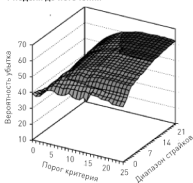
**Рис. 1.4.16.** Зависимость коэффициента асимметричности от порога критерия и диапазона страйков. Представлены данные, относящиеся к двум состояниям рынка (спокойному и кризисному) и к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации

кризиса наблюдается иная картина. Портфели, формируемые из недельных опционов, менее симметричны, чем портфели, для построения которых использовались двухмесячные опционы.

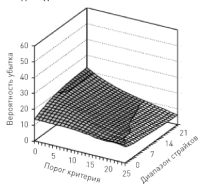
### Вероятность убытка

Данный показатель является важной характеристикой риска опционного портфеля (методика расчета и особенности применения описаны в главе, посвященной оценке рисков). Рассмотрим для начала портфели, сформированные во время спокойного рынка из ближайших опционов. На рис. 1.4.17 поверхность,

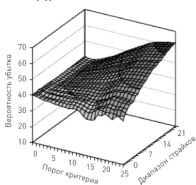
Спокойный период,  
1 неделя до истечения



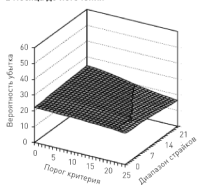
Волатильный период,  
1 неделя до истечения



Спокойный период,  
2 месяца до истечения



Волатильный период,  
2 месяца до истечения



**Рис. 1.4.17.** Зависимость вероятности убытка от порога критерия и диапазона страйков. Представлены данные, относящиеся к двум состояниям рынка (спокойному и кризисному) и к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации

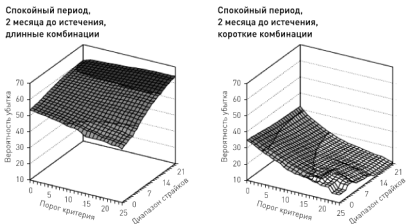
соответствующая данным условиям, образует довольно широкое плато. Это указывает на высокую вероятность убытка для портфелей, составляемых из комбинаций с высокими показателями критерия (порог критерия > 15%) и широким диапазоном страйков (более 18%). По мере снижения порога критерия и сужения диапазона страйков вероятность получения убытка уменьшается. Однако, даже при наиболее благоприятных значениях параметров, вероятность убытка не опускается ниже 40%.

Теперь сравним только что описанную поверхность с графиком, соответствующим спокойному рынку и опционам с далекой датой истечения. Несмотря на общую схожесть двух поверхностей, между ними существует одно важное отличие. Широкое плато, соответствующее области с наибольшей вероятностью убытка, превращается при использовании долгосрочных опционов в небольшой пик. Это означает, что в данном случае существует гораздо меньше сочетаний (порог критерия × диапазон страйков), для которых вероятность убытка максимально высока. «Спуск» с вершины наиболее вероятного убытка является более крутым, чем для портфелей, сформированных из ближайших опционов. В результате формируется достаточно широкая область относительно низких значений вероятности убытка. Эта область соответствует порогу критерия от 0 до приблизительно 8% и диапазону страйков 0–5%.

Особого внимания заслуживает тот факт, что в период кризиса вероятность убытка существенно ниже, чем во время спокойного рынка (рис. 1.4.17). На первый взгляд это противоречит логике и наводит на мысль о возможной ошибке в оценках вероятностей. Однако данный феномен объясняется тем, что во время кризиса портфель состоит преимущественно из коротких позиций. А для коротких опционных комбинаций вероятность убытка значительно ниже, чем для длинных (рис. 1.14.18). Кроме того, из рис. 1.14.18 следует, что вероятность убытка коротких комбинаций зависит от величины порога критерия (чем выше порог, тем ниже вероятность) и не зависит от ширины диапазона страйков. Для длинных комбинаций нами были отмечены прямо противоположные закономерности: вероятность убытка не зависит от величины порога критерия, но зависит от ширины диапазона страйков (чем шире диапазон, тем выше вероятность убытка).

В периоды высокой волатильности вероятность убытка портфелей, построенных из ближайших опционов, достигает своего максимума при низких значениях порога критерия и широком





**Рис. 1.4.18.** Зависимости вероятности убытка от порога критерия и диапазона страйков, представленные отдельно для длинных и коротких комбинаций. Данные относятся к спокойному рынку и к двухмесячному периоду времени от момента создания портфеля до экспирации

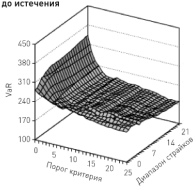
диапазоне страйков (рис. 1.4.17). Это отличается от картины, наблюдаемой во время спокойного рынка (когда наибольшая вероятность убытка приходится на высокие значения порога критерия). Вероятность убытка портфелей, формируемых в волатильный период из далеких опционов, практически не зависит ни от порога критерия, ни от диапазона страйков. Об этом свидетельствует горизонтальное расположение и плоская форма поверхности на соответствующем графике рис. 1.4.17.

#### VaR

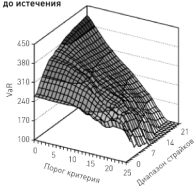
Этот широко известный показатель риска не нуждается в специальном представлении, хотя его вычисление требует принятия в расчет целого ряда особенностей, специфических для опционных портфелей. Из данных, представленных на рис. 1.4.19, следует, что, независимо от волатильности рынка и от времени, остающегося до экспирации опционов, VaR портфеля выше при более низких порогах критерия. Это утверждение справедливо почти для всех диапазонов страйков, хотя имеются и некоторые исключения. В частности, когда портфели формируются из долгосрочных опционов (независимо от волатильности рынка) и для построения комбинаций используются страйки, лежащие в узком диапазоне от текущей цены базового актива, порог критерия не влияет на уровень VaR.

Если сравнить портфели, создаваемые из ближайших опционов, в спокойный и кризисный периоды, то в последнем случае VaR оказывается несколько выше при сочетании (низкий порог критерия × широкий диапазон страйков). Однако при высоких значениях порога критерия VaR в период кризиса ниже, чем в спокойный период. В том случае, когда портфели создаются из более дальних опционов, влияние рыночной волатильности проявляется более отчетливо. При всех сочетаниях (порог критерия × диапазон страйков) VaR портфелей, создаваемых в период кризиса, выше, чем VaR портфелей, создаваемых в спокойный период (рис. 1.4.19).

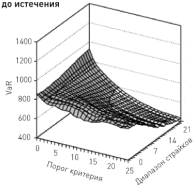
Спокойный период,  
1 неделя  
до истечения



Волатильный период,  
1 неделя  
до истечения



Спокойный период,  
2 месяца  
до истечения



Волатильный период,  
2 месяца  
до истечения

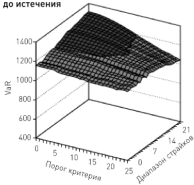


Рис. 1.4.19. Зависимость VaR от порога критерия и диапазона страйков. Представлены данные, относящиеся к двум состояниям рынка (спокойному и кризисному) и к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации

Удивительным является тот факт, что влияние волатильности на VaR портфелей гораздо слабее, чем влияние периода времени, остающегося до экспирации опционов. При использовании двухмесячных опционов вместо недельных VaR всех портфелей увеличивается в несколько раз (это происходит как в спокойный, так и в кризисный периоды).

## 1.5. Частично-направленные стратегии

### 1.5.1. Отличительные особенности частично-направленных стратегий

Главное отличие частично-направленной от маркет-нейтральной стратегии заключается в том, что прогноз величины и направления будущего движения цены базового актива является одним из основных элементов стратегии. Вместе с тем индексная дельта также является составным элементом частично-направленной стратегии. Хотя приведение дельты к нулю не является обязательным условием, возможности соблюдения дельта-нейтральности (или минимизации дельты, если дельта-нейтральность недостижима) учитываются при формировании портфеля.

На первый взгляд одновременное применение этих двух элементов противоречит их внутренней логике. С одной стороны, частично-направленная стратегия строится таким образом, чтобы стоимость опционного портфеля увеличивалась в результате изменения цен базовых активов (в случае если прогнозы ценовых движений оказываются правильными). С другой стороны, стремление к соблюдению принципа дельта-нейтральности означает, что стратегия стремится к построению портфеля, нечувствительного к изменениям цен базовых активов. Это противоречие легко устраняется, если прогнозы используются на уровне отдельных комбинаций, а индексная дельта — на уровне портфеля. Применение прогнозов к отдельным базовым активам, безусловно, приведет к созданию маркет-не-нейтральных («перекосенных») комбинаций. Тем не менее, объединяя индивидуальные комбинации, можно получить портфель, нейтральный по отношению к рынку. (Если перекосы отдельных комбинаций разнонаправлены, то их объединение вполне может привести к созданию маркет-нейтрального портфеля.)

Кроме того, противоречие между использованием прогнозов и стремлением к маркет-нейтральности легко разрешимо, если подойти к вопросу изменения цены дифференцировано

(в зависимости от масштаба ценовых движений). Напомним, что приведение дельты к нулю минимизирует чувствительность портфеля к небольшим изменениям цен базовых активов. Прогнозы ценовых движений, напротив, ориентированы на предсказание средних и крупных изменений цены. Таким образом, минимизация дельты обеспечивает нечувствительность портфеля к небольшим хаотическим и трудно прогнозируемым ценовым флуктуациям. А использование прогнозов позволяет извлекать прибыль из средне- и долгосрочных ценовых трендов. Это отличает частично-направленные стратегии от маркет-нейтральных, для которых большие ценовые движения изменяют стоимость портфеля на приблизительно одинаковую величину, независимо от того, выросла ли стоимость базовых активов или снизилась.

Существует множество способов прогнозирования будущей цены базового актива. Условно их можно разделить на две категории — прогнозы, основанные на техническом и фундаментальном анализе. Прогнозы, основанные на техническом анализе, могут использовать различные технические индикаторы, статистический анализ и аппарат теории вероятности. Отличительной особенностью этих методов является использование исторических данных (таких как ценовые ряды, объемы торгов и т. п.) для построения прогнозов.

Ко второй категории относятся методы прогнозирования, базирующиеся на различных макро- и микроэкономических показателях. Когда в качестве базовых активов используются акции (большинство примеров, рассматриваемых в этой книге, использует именно этот класс базовых активов), фундаментальный анализ основывается на финансовой отчетности, на изучении конъюнктуры рынка и конкурентоспособности производимых товаров и услуг, на оценках перспективы роста и развития компании и на многих других факторах. К этой же категории относятся различные формы экспертных прогнозов, основанные на профессиональных суждениях специалистов.

#### **1.5.2. Внедрение (введение) прогноза в структуру стратегии**

Какой бы метод фундаментального или технического анализа ни применялся, получаемый на выходе прогноз должен иметь определенное числовое выражение. В частности, прогноз может быть представлен как:

- ♦ указание наиболее вероятного направления движения цены;
- ♦ определение диапазона будущих цен;

- ◇ определение нескольких ценовых диапазонов с указанием вероятности попадания цены в каждый из них;
- ◇ указание вероятности реализации каждого возможного значения цены.

В последнем случае прогноз представляет собой распределение вероятностей, для построения которого необходимо оценить вероятности дискретного ценового ряда. (Для непрерывного ценового ряда прогноз может быть представлен в виде функции плотности вероятности.) Данный вид прогноза является предпочтительным, поскольку включает в себе наиболее полный объем информации о предполагаемом поведении цены базового актива. Поэтому в дальнейшем мы будем основываться на прогнозах, представленных в виде распределения или функции плотности вероятности.

Можно использовать несколько способов введения прогноза в структуру стратегии. Напомним, что сигналы на открытие позиций генерируются на основе показателей критериев, большинство из которых представляет собой интеграл платежной функции опционной комбинации по некоторому распределению. Следовательно, для того чтобы прогноз был учтен при генерировании сигнала можно пойти одним из двух путей:

- 1) скорректировать распределение (или в функцию плотности вероятности) в соответствии с прогнозом;
- 2) изменить структуру комбинации таким образом, чтобы форма ее платежной функции максимально соответствовала прогнозу.

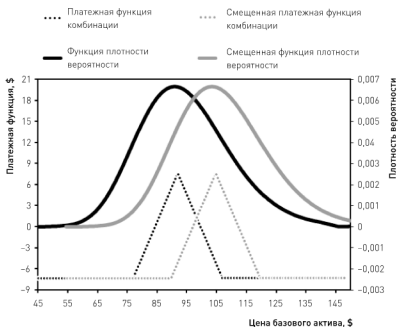
Возможно также комбинированное использование этих двух методов.

Первым способом внедрения прогноза является внесение в распределение корректировок, соответствующих прогнозу. Например, разработчик стратегии прогнозирует рост цены базового актива на 10%. Предположим, он использует критерий, основанный на логнормальном распределении, одним из параметров которого является математическое ожидание цены базового актива. Ранее мы говорили, что для маркет-нейтральной стратегии значение данного параметра обычно принимается равным текущей цене на дату вычисления критерия. В случае частично-направленной стратегии данный параметр может быть рассчитан как текущая цена плюс 10%. Это обеспечит смещение всей функции плотности вероятности вправо.

Внедрение прогноза в структуру стратегии методом корректировки распределения представлено на рис. 1.5.1. Черными линиями показаны функция плотности вероятности логнормального распределения и платежная функция комбинации «бабочка».

Предположим, что данная комбинация имеет наибольшее значение критерия. Введение прогноза смещает функцию плотности (серая линия на рис. 1.5.1). В результате значение критерия более не является максимальным для этой комбинации. Теперь уже другая комбинация (серая пунктирная линия), чья платежная функция более соответствует новому распределению, имеет максимальное значение критерия. Таким образом, использование прогноза путем видоизменения распределения приводит к выбору других комбинаций (по сравнению с теми, которые были бы выбраны без применения прогноза) при формировании опционного портфеля.

Вторым способом внедрения прогноза в стратегию является изменение структуры комбинации. Предположим, что торговая стратегия сгенерировала сигнал на открытие короткой позиции по комбинации длинный стрэнгл, и при этом имеется прогноз,



**Рис. 1.5.1.** Функция плотности вероятности логнормального распределения и платежная функция соответствующей ей комбинации с максимальным значением критерия [черные линии]. Применение прогноза смещает функцию плотности, что приводит к выбору критерием другой комбинации (серые линии)

указывающий на высокую вероятность роста цены базового актива. Данный прогноз может быть учтен путем смещения страйка продаваемого опциона колл в сторону предполагаемого роста цены. Это позволит снизить возможные убытки по данному опциону в случае, если прогноз окажется верным. В то же время уменьшается размер премии, получаемой от продажи данного опциона. Поэтому эффективность такого метода будет зависеть от того, какой из двух эффектов окажется более сильным. Другим способом изменения структуры комбинации является создание асимметричной комбинации, где количество продаваемых опционов колл меньше, чем количество продаваемых путов.

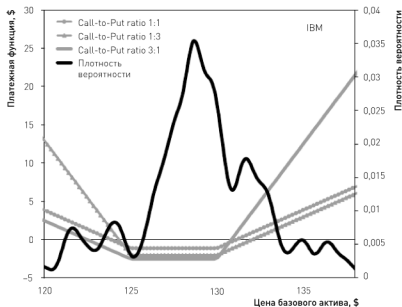
Если торговый сигнал требует создания длинной комбинации, то все происходит наоборот — страйк колла смещается в противоположную сторону от ожидаемого роста цены. Это позволит увеличить возможную прибыль по данному опциону (хотя стоимость его покупки будет выше). При создании асимметричной комбинации количество покупаемых опционов колл должно быть больше, чем количество покупаемых путов.

Можно изобрести множество способов внедрения прогноза путем сочетания корректировки распределения с изменением структуры комбинации. Рассматриваемые в этом разделе примеры частично направленной стратегии, основываются на следующих принципах. Предположим, что прогноз будущих ценовых движений строится на основе анализа исторических ценовых рядов. При этом предполагается, что для каждого базового актива вероятность определенного движения цены (например, роста на 5% либо падения на 7% и т. д.) зависит от частоты реализации движений такого размера в прошлом. Собирая вместе все прошлые ценовые движения, мы предполагаем, что в прогнозируемом будущем движения могут реализоваться с такими вероятностями, каковы были реальные частоты их наблюдений в прошлом. По сути, такая форма прогноза реализуется в виде эмпирического распределения. Свойства эмпирического распределения и методика его построения описаны в нашей предыдущей книге «Опционы: системный подход к инвестициям» и в статье «An empirical solution to option pricing» (Futures, 2009).

В отличие от логнормального, эмпирическое распределение в большинстве случаев является асимметричным и имеет неправильную форму с многочисленными локальными пиками и впадинами (рис. 1.5.2). Эти иррегулярности отражают прошлые ценовые тренды. Например, смещение распределения вправо или наличие локальных пиков с правой стороны распределения

указывают на преобладание в прошлом трендов повышения цены. Таким образом, представление прогноза в форме эмпирического распределения уже само по себе является корректировкой стандартного логнормального распределения.

Как было сказано выше, изменить структуру комбинации можно несколькими способами. Мы будем использовать простой подход, который, по нашему мнению, лучше всего подходит в сочетании с эмпирическим распределением, — создание асимметричных комбинаций. Для того чтобы применить этот подход на практике, необходимо для каждой комбинации построить несколько вариантов, отличающихся друг от друга соотношением опционов колл и пут (до сих пор во всех примерах, рассмотренных для маркет-нейтральной стратегии, мы использовали равное соотношение). После этого следует рассчитать значение критерия для каждого варианта данной комбинации и выбрать тот из них, для которого значение критерия будет максимальным.

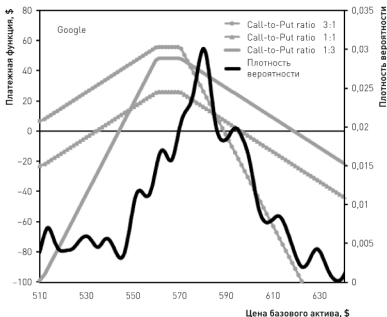


**Рис. 1.5.2.** Функция плотности вероятности эмпирического распределения цены акции IBM и платежные функции трех вариантов комбинации «длинный стрэнгл». Варианты комбинаций отличаются количественным соотношением опционов колл и пут. Наилучшая комбинация (с наибольшим значением критерия) показана толстой серой линией



Рассмотрим несколько примеров. Ограничим количество рассматриваемых вариантов тремя: (1) количество коллов втрое превышает количество путов (соотношение Call-to-Put равно 3); (2) равное соотношение коллов и путов (соотношение Call-to-Put равно 1), (3) количество коллов втрое меньше количества путов (соотношение Call-to-Put равно 0,33). Предположим, что для акции IBM необходимо выбрать наилучший вариант для комбинации «длинный стрэнгл». (Говоря «выбрать», мы подразумеваем генерирование сигнала на открытие торговой позиции.) На рис. 1.5.2 показана функция плотности вероятности эмпирического распределения и платежные функции трех вариантов длинного стрэнгла. Распределение было построено 1 апреля 2010 г. на основе 120-дневного исторического периода. Комбинации построены из опционов, истекающих 16 апреля 2010 г., используя страйки Put 125 и Call 130. В данном случае наибольшее значение критерия «математическое ожидание прибыли на основе эмпирического распределения» было получено для комбинации, в которой количество коллов втрое превышает количество путов. Выбор именно этого варианта комбинации объясняется формой эмпирического распределения. В целом данное распределение имеет правое смещение (кроме того, имеется локальный пик в районе цены \$132). Такая форма распределения прогнозирует рост цены базового актива. Следовательно, комбинация, в которой количество опционов колл превышает количество путов имеет больший потенциал прибыльности (в случае если прогноз окажется верным).

Во втором примере мы использовали другой базовый актив (акция Google), для которого необходимо выбрать наилучший вариант комбинации «короткий стрэнгл». Функция плотности вероятности эмпирического распределения и платежные функции трех вариантов короткого стрэнгла показаны на рис. 1.5.3. Так же как и в предыдущем примере, распределение было построено 1 апреля 2010 г. Комбинации также были созданы из опционов, истекающих 16 апреля 2010 г. (страйки Put 560 и Call 570). В данном случае, хотя форма эмпирического распределения отличается от распределения, полученного в предыдущем примере (сравни рис. 1.5.2 и 1.5.3), оно также смещено в правую сторону. Это означает, что прогноз, внедряемый в структуру частично направленной стратегии, указывает на высокую вероятность роста цены базового актива. В такой ситуации целесообразно продать больше опционов пут. Если прогноз действительно реализуется на практике, то цена акции вырастет, и убыток может



**Рис. 1.5.3.** Функция плотности вероятности эмпирического распределения цены акции Google и платёжные функции трех вариантов комбинации «короткий стрэнгл». Варианты комбинаций отличаются количественным соотношением опционов колл и пут. Наилучшая комбинация (с наибольшим значением критерия) показана толстой серой линией

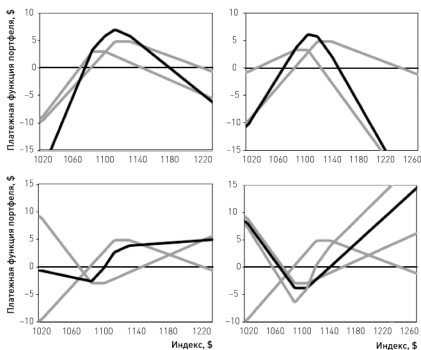
быть понесен по проданному (в меньшем количестве) колу. Проданные же путы скорее всего истекнут вне денег и принесут повышенную прибыль (поскольку были проданы в большем количестве). В полном соответствии с этими рассуждениями значение критерия оказалось наибольшим для комбинации, в которой количество колов втрое меньше количества путов.

### 1.5.3. Соотношение опционов колл и пут в портфеле

До сих пор мы рассматривали соотношение коллов и путов на уровне отдельных комбинаций. При неравном соотношении коллов и путов платёжная функция комбинации становится асимметричной (рис. 1.5.1 и 1.5.2). Соответственно, объединение нескольких комбинаций может привести к существенным изменениям формы платёжной функции портфеля. Причем изменения эти могут быть самые разные. Говоря о платёжной

функции портфеля, мы подразумеваем зависимость прибыли/убытка портфеля от некоторого индекса. Для построения такой платежной функции необходимо рассчитать зависимость прибыли/убытка каждой отдельно взятой комбинации от значений индекса. Это делается с помощью беты (более подробно этот вопрос будет освещен при описании концепции индексной дельты). Полученные таким образом платежные функции комбинаций обладают свойством адитивности. Простое их суммирование позволяет получить платежную функцию портфеля.

При объединении однотипных комбинаций с одинаковым соотношением коллов и путов результирующая платежная функция будет напоминать по форме функции исходных комбинаций. На верхнем левом графике рис. 1.5.4 серыми линиями показаны платежные функции двух коротких стрэнглов с соотношением



**Рис. 1.5.4.** Влияние асимметричности комбинаций (вызванной различными соотношениями коллов и путов) и соотношения длинных и коротких комбинаций на платежную функцию итогового портфеля. Платежные функции отдельных комбинаций показаны серыми линиями, платежные функции портфелей показаны черными линиями

колов и путов 1:3. Такое соотношение приводит к тому, что левое плечо обеих функций имеет гораздо больший угол наклона по сравнению с правым плечом (это означает, что снижение индекса приводит к большим убыткам, чем его рост). Так же выглядит и платежная функция портфеля (черная линия), состоящего из этих двух комбинаций.

Если соотношения колов и путов разные, то платежная функция портфеля будет представлять собой некое усреднение исходных соотношений. Например, объединение двух коротких стрэнглов, имеющих соотношения колл-пут 3:1 и 2:3, приводит к созданию портфеля с соотношением 5:4. Серыми линиями на верхнем правом графике рис. 1.5.4 показаны два коротких стрэнгла, имеющие соотношения 1:3 и 3:1. Обе комбинации асимметричны, но перекошены в разные стороны. Объединение таких комбинаций (перекошенных довольно сильно, но разнонаправлено) позволяет получить почти симметричную платежную функцию (черная линия на графике). В рамках частично-направленной стратегии такой подход позволяет, используя прогнозы, строить опционный портфель, каждый элемент которого является асимметричной комбинацией, но при этом сам портфель остается маркет-нейтральным (или близким к маркет-нейтральности).

Ранее мы уже говорили о том, что соотношение длинных и коротких комбинаций не только определяет общую структуру портфеля, но и оказывает существенное влияние на его основные свойства. При использовании асимметричных комбинаций это утверждение приобретает особый смысл. Различные соотношения колов и путов в сочетании с различными соотношениями длинных и коротких комбинаций позволяют получить самые разные (порой весьма причудливые) формы платежной функции итогового портфеля. Например, объединение длинного и короткого стрэнглов, имеющих соотношения колл/пут 1:3, может привести к итоговой платежной функции, напоминающей по форме комбинацию «бычий спред» (левый нижний график рис. 1.5.4). Другие соотношения колл/пут для тех же комбинаций или добавление еще одной длинной или короткой комбинации (то есть изменение соотношения длинных и коротких комбинаций) может привести к принципиальному изменению платежной функции портфеля. Например, добавление к тем же двум комбинациям еще одной длинной комбинации с соотношением колл/пут 2:3 трансформирует форму платежной функции портфеля и делает ее похожей на комбинацию «длинный стрэддл» (правый нижний график рис. 1.5.4).

#### 1.5.4. Базовая частично-направленная стратегия

**Сигналы на открытие и закрытие позиций.** Сигналы на открытии торговых позиций генерируются по показателю критерия «математическое ожидание прибыли на основе эмпирического распределения». Как было сказано выше, использование эмпирического распределения рассматривается в данном случае как один из двух способов введения прогноза в структуру стратегии (второй способ, который мы используем в базовом варианте стратегии — построение асимметричных комбинаций). Открывающий сигнал генерируется, когда значение критерия превышает заданную пороговую величину. Диапазон допустимых значений порогового параметра находится в интервале от нуля до бесконечности. Точное значение порога будет определяться путем оптимизации. В базовом варианте частично-направленной стратегии будем удерживать открытые позиции до момента истечения опционов. После экспирации все позиции по базовым активам, возникшие в результате исполнения опционов, закрываются на следующий торговый день.

**Параметры критерия.** Алгоритм расчета критерия «математическое ожидание прибыли на основе эмпирического распределения» описан в книге «Опционы: системный подход к инвестициям». В отличие от логнормального, эмпирическое распределение включает в себя всего один активный параметр — горизонт истории (размер истории цен, которая служит материалом для построения распределения). Второй параметр, горизонт прогноза (количество дней от текущего момента до будущей даты, для которой строится распределение), самоопределяется в момент принятия решения о дате, на которую производится расчет критерия. Так же как и в базовой маркет-нейтральной стратегии, мы примем значение параметра горизонт истории равным 120 дням.

**Выбор опционных комбинаций.** Исходное множество базовых активов, доступных для построения комбинаций, включает все акции, входящие в состав индекса S&P 500. В качестве допустимого исходного множества для типа опционных комбинаций примем длинные и короткие стрэнглы и стрэддлы. Для каждой комбинации создаются пять вариантов соотношения коллов и путов (один симметричный и четыре асимметричных): 3 : 1, 3 : 2, 1 : 1, 2 : 3, 1 : 3. Для каждого варианта рассчитывается значение критерия, после чего выбирается вариант с наибольшим

значением. Если значение критерия, полученное для наилучшего варианта, превышает пороговую величину, то для этой комбинации генерируется открывающий сигнал. При таком подходе соотношение коллов и путов в портфеле не задается изначально, а зависит от соотношений, полученных для отдельных комбинаций. Следовательно, степень отклонения портфеля от маркет-нейтральности не определяется разработчиком стратегии изначально, а индексная дельта не используется для активного формирования портфеля (только для мониторинга и выбора наиболее оптимального варианта портфеля).

### Управления капиталом и распределение капитала между элементами портфеля.

Для базового варианта частично-направленной стратегии доля инвестируемого капитала всегда составляет 100%. Это означает, что весь капитал инвестируется в портфель и все средства, высвобождающиеся после закрытия позиций, реинвестируются. Распределение капитала между элементами портфеля осуществляется по принципу эквивалентности позиции в акциях (размер позиции по каждой комбинации выбирается таким образом, что в случае исполнения опционов сумма вложений во все базовые активы будет приблизительно равной). Применение этого принципа для частично-направленной стратегии осложняется неравным количеством коллов и путов в одной комбинации. Для асимметричных комбинаций объем средств, необходимых для исполнения опционов, зависит от того, какая сторона комбинации (колл или пут) окажется в деньгах. Если в определенный момент времени имеется  $C$  свободных средств и получено  $m$  сигналов на открытие позиций, то объем позиции по каждой комбинации определяется как:

$$N_c = \frac{4Cr}{m(S_c + S_p)(1+r)}, \quad N_p = \frac{4C}{m(S_c + S_p)(1+r)},$$

где  $S_c$  и  $S_p$  — страйки опционов колл и пут,  $r$  — соотношение коллов и путов,  $N_p$  и  $N_c$  — количество покупаемых или продаваемых опционов пут и колл соответственно.

**Методы и инструменты управления рисками.** В отличие от маркет-нейтральных стратегий соблюдение принципа дельта-нейтральности портфеля не является обязательным условием при управлении рисками частично-направленной стратегии. Тем не менее индексная дельта и в этом случае остается основным

инструментом управления рисками. Индексная дельта позволяет оценить меру неуравновешенности портфеля, степень асимметричность платежной функции портфеля, а также размеры потенциальных убытков, которые могут возникнуть при неблагоприятных обстоятельствах (если большинство прогнозов окажутся неверными). Другие показатели (VaR, коэффициент асимметричности, вероятность убытка) также могут использоваться для оценки и управления рисками.

#### 1.5.5. Факторы, влияющие на соотношение опционов колл и пут в портфеле

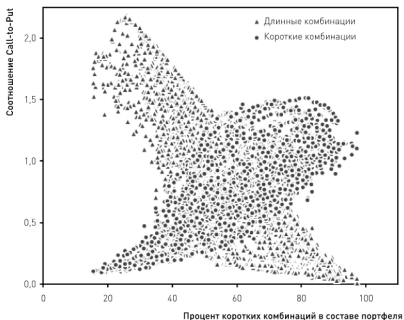
Соотношение опционов колл и пут оказывает большое влияние на форму платежной функции портфеля, которая, в свою очередь, определяет основные свойства торговой стратегии. Существует множество факторов, одновременно воздействующих на соотношение колл/пут в портфеле. Влияние некоторых из них мы продемонстрируем на примере базовой частично-направленной стратегии. Для этого мы провели статистический анализ, основанный на данных опционного рынка за десятилетний период (с марта 2000 по апрель 2010 г.). На протяжении всего периода мы моделировали формирование портфелей в соответствии с принципами, описанными для базовой стратегии. Параметр «порог критерия» был зафиксирован на нулевой отметке (то есть открывающий сигнал генерировался для всех комбинаций с положительным значением критерия), а для параметра «диапазон страйков» мы приняли равным 50%. Сигналы рассчитывались по котировкам закрытия предыдущего торгового дня.

Соотношение опционов колл и пут в портфеле можно представить тремя разными способами. Объясним это на примере, представленном на нижнем правом графике рис. 1.5.4. В этом случае одна короткая комбинация с соотношением 1:3 объединяется с двумя длинными, имеющими соотношения 1:3 и 2:3. Если суммировать все коллы и путы, то получим соотношение 4:9 (или 0,44). Этот способ не учитывает тот факт, что влияние на платежную функцию коллов, входящих в состав короткой комбинации, в определенной мере компенсируется влиянием коллов, относящихся к длинным комбинациям. (То же можно сказать и о путах.) Второй способ заключается в представлении количества коротких опционов в качестве отрицательной величины. Используя этот принцип расчета, получаем соотношение 2:3 (или 0,67). В этом случае короткая комбинация

с соотношением 1:3 и длинная комбинация с таким же соотношением полностью компенсируют друг друга. Этот метод, в котором соотношение может быть отрицательной величиной, также обладает существенным недостатком. Если портфель состоит из большого количества длинных и коротких комбинаций, то их взаимное сокращение исказит информацию о соотношении колл/пут портфеля. Например, если в портфель входят 10 коротких стрэнглов с соотношением 1:1, 10 длинных стрэнглов с таким же соотношением и один длинный стрэнгл с соотношением 1:2, то результирующим будет соотношение колл/пут 0,5. Отражает ли такой показатель истинное положение дел? Весьма сомнительно.

- С нашей точки зрения, предпочтительно использовать третий способ выражения соотношения коллов и путов, когда данный показатель рассчитывается отдельно для длинных и коротких позиций. При этом следует учитывать также долю длинных и коротких комбинаций в составе портфеля. Такой подход позволяет более точно описать структуру портфеля и оценить влияние отдельных опционов на его платежную функцию. Ситуация усложняется тем, что, как показали наши исследования, эти две величины (соотношение колл/пут и доля коротких комбинаций в составе портфеля) взаимосвязаны.
- В качестве первого фактора, оказывающего влияние на соотношение опционов колл и пут, рассмотрим именно долю коротких комбинаций в составе портфеля. Следует сразу оговориться, что эта величина не является «фактором» в традиционном понимании данного термина. Говоря о факторах, оказывающих то или иное воздействие на исследуемую величину, мы обычно подразумеваем некую переменную, внешнюю по отношению к изучаемой системе и, в большинстве случаев, от нее не зависящую. Соотношение длинных и коротких комбинаций не является независимой переменной, оно определяется в процессе формирования портфеля и зависит исключительно от правил генерирования открывающих сигналов и прочих параметров торговой стратегии. Помимо этого, доля коротких комбинаций зависит от условий рынка, преобладающих в момент создания портфеля. Поэтому правильнее будет говорить не о влиянии доли коротких комбинаций, а о взаимозависимости этой величины и соотношения колл/пут.
- Из рис. 1.5.5 следует, что чем больше доля коротких комбинаций в составе портфеля, тем больше соотношение колл/пут в этих коротких комбинациях. В тех случаях, когда короткие



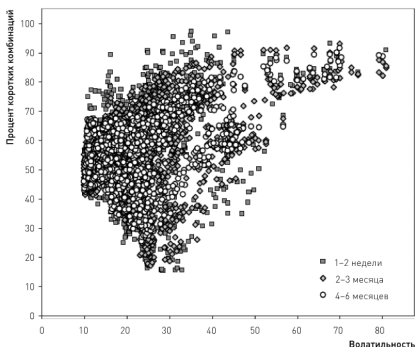


**Рис. 1.5.5.** Зависимость соотношения опционов колл и пут от доли коротких комбинаций в составе портфеля. Данные относятся к десятилетнему историческому периоду и представлены отдельно для длинных и коротких комбинаций

комбинации составляли менее 60–70%, они были существенно перекошены в сторону путов. Однако эта ситуация менялась, когда короткие комбинации были более многочисленны. В этих случаях коллы составляли большинство в составе коротких комбинаций. В случае с длинными комбинациями зависимость оказалась прямо противоположной: чем больше коротких комбинаций было в портфеле, тем меньше оказывалось соотношение коллов и путов в длинных комбинациях. Когда доля длинных и коротких комбинаций в портфеле была приблизительно одинаковой, в длинных комбинациях коллов оказывалось в 1,5 раза больше, а в коротких в 2 раза меньше, чем путов.

Для того чтобы осмыслить, какое значение имеют зависимости, представленные на рис. 1.5.5, для качеств базовой частично-направленной стратегии, следует обратиться к еще одной зависимости. Исследуя свойства базовой дельта-нейтральной стратегии, мы уже отмечали, что в периоды высокой волатильности все

портфели состояли почти полностью из коротких позиций. Для частично направленной стратегии мы также обнаружили положительную зависимость доли коротких комбинаций от волатильности рынка (рис. 1.5.6). Причем эта зависимость была достаточно слабой для портфелей, создаваемых вблизи экспирации ( $R^2 = 0,06$ ), однако усиливалась по мере увеличения периода времени, остающегося до истечения опционов ( $R^2 = 0,18$  для периода два-три месяца,  $R^2 = 0,30$  для периода четыре-шесть месяцев). Основываясь на зависимостях, представленных на рис. 1.5.5 и 1.5.6, можно построить следующую цепочку рассуждений. В кризисные периоды, когда волатильность рынка существенно возрастает, критерий генерирует в основном сигналы на открытие коротких позиций. (Происходит это в силу того, что в кризисные периоды опционные премии резко возрастают.) В принципе это выглядит достаточно рискованно, поскольку в период кризиса



**Рис. 1.5.6.** Зависимость доли коротких комбинаций в составе портфеля от волатильности рынка базовых активов. Данные относятся к десятилетнему историческому периоду и распределены между тремя интервалами значений периода времени, остающегося до истечения опционов

существует большая вероятность резких ценовых обвалов, что чревато существенными убытками для коротких позиций. Однако этот риск в значительной степени компенсируется за счет того, что в периоды высокой волатильности короткие комбинации строятся с преобладанием коллов. Поскольку риск резкого роста цены в период кризиса меньше, чем риск падения, премия, получаемая от продажи дополнительных опционов колл, может частично компенсировать убытки, возникающие при неблагоприятном развитии событий (резкий обвал цены). В длинных позициях (которых в периоды кризисов открывается мало, но все-таки они присутствуют) количество путов существенно преобладает над количеством коллов. Это также способствует снижению риска портфеля, поскольку при обвале рынка избыточные опционы пут принесут дополнительную прибыль, которая позволит снизить убытки от снижения цены.

Приведенные выше рассуждения указывают на то, что структура частично-направленной стратегии содержит в себе встроенный механизм, обеспечивающий перекосы платежных функций комбинаций в ответ на изменение состояния рынка (скачки волатильности). Для того чтобы проверить эти предположения, следует проанализировать непосредственную зависимость соотношения коллов и путов от уровня волатильности. (До сих пор мы рассматривали лишь опосредованное влияние волатильности через долю коротких комбинаций.) Для длинных комбинаций нами была обнаружена обратная нелинейная зависимость соотношения колл/пут от волатильности (левый график рис. 1.5.7). Интересно, что при низкой волатильности (в условиях спокойного рынка) исследуемое соотношение находилось в очень широком диапазоне значений, однако в кризисные периоды количество путов в длинных комбинациях всегда превышало количество коллов (это обеспечивает один из двух описанных выше механизмов регулирования риска). Как и следовало ожидать, для коротких комбинаций была установлена прямая (также нелинейная) зависимость соотношения колл/пут от волатильности (правый график рис. 1.5.7). При низкой волатильности соотношение опционов колл и пут колеблется в широком диапазоне, но, как правило, не превышает единицы (это означает, что короткие комбинации были перекошены в сторону путов). Однако рост волатильности приводит к резкому росту соотношения колл/пут. При экстремальных значениях волатильности данное соотношение превышает единицу в большинстве случаев. Таким образом, мы получили

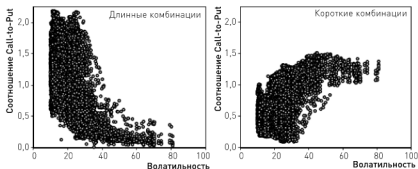


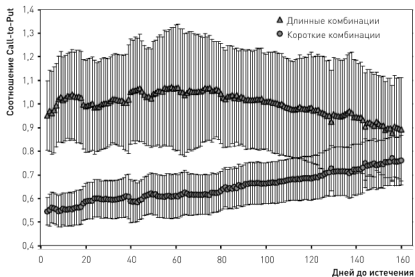
Рис. 1.5.7. Зависимость соотношения коллов и путов в составе портфеля от волатильности рынка базовых активов. Данные относятся к десятилетнему историческому периоду и представлены отдельно для длинных и коротких комбинаций

достаточно веские основания утверждать, что *изменяемое в зависимости от состояния рынка, соотношение коллов и путов представляет собой автоматический (способный запускаться самостоятельно в периоды кризисов) регулятор риска опционного портфеля.*

В завершение рассмотрим влияние еще одного важного фактора, количества дней, остающегося до истечения опционов. Влияние этого фактора на многочисленные аспекты дельта-нейтральной стратегии было неоднократно продемонстрировано в предыдущем разделе. Не менее значимо его влияние и в случае частично-направленной стратегии. Вблизи экспирации соотношение колл/пут для длинных комбинаций существенно превышало данное соотношение в коротких комбинациях (рис. 1.5.8). В то время, как длинные комбинации в этот период были в среднем симметричны (равное соотношение коллов и путов), в коротких комбинациях количество путов приблизительно вдвое превышало количество коллов. Такая структура коротких комбинаций, позволяющая извлечь большую прибыль (или понести меньшие убытки) в случае роста рынка, отражает общую бычью направленность рынка акций на исследованном периоде. (Напоминаем, что в базовом варианте частично-направленной стратегии прогноз строится на основе эмпирического распределения, отражающего тренды, преваляровавшие на рынке в недавнем прошлом.) Даже финансовый кризис не повлиял на бычий перекоп средней короткой комбинации, формируемой

из опционов с близкой датой истечения, хотя он, безусловно, отразился на изменчивости соотношения колл/пут.

Чем более далекие опционы использовались для открытия позиций, тем меньшей была разница в структуре длинных и коротких комбинаций. Это, по всей видимости, объясняется ограниченностью горизонта истории, используемого для расчета эмпирического распределения (120 дней). На рис. 1.5.8 четко прослеживаются два противоположных тренда: в длинных комбинациях соотношение коллов и путов уменьшается по мере роста периода времени до экспирации, а в коротких комбинациях этот показатель, напротив, увеличивается. Кроме того, обращает на себя внимание тот факт, что изменчивость соотношения колл/пут (показанная на рис. 1.5.8 с помощью стандартных отклонений) существенно выше в длинных комбинациях по сравнению с короткими. Данная разница сохраняется на всем диапазоне значений периода времени до экспирации. Все эти закономерности имеют большое значение для оптимизации параметров частично-направленной стратегии.



**Рис. 1.5.8.** Зависимость соотношения коллов и путов (среднее  $\pm$  стандартное отклонение) от периода времени, остающегося до истечения опционов. Данные относятся к десятилетнему историческому периоду и представлены отдельно для длинных и коротких комбинаций

### 1.5.6. Границы дельта-нейтральности частично-направленной стратегии

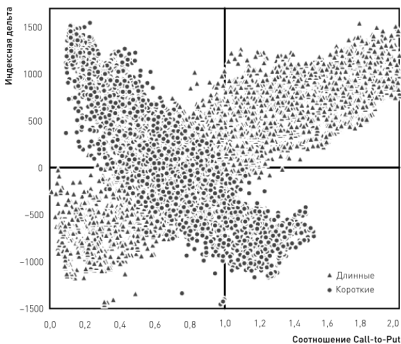
Хотя соблюдение принципа дельта-нейтральности не является обязательным условием (ключевой элемент стратегии — это прогноз ценовых движений базовых активов), минимизация дельты представляет собой второй по степени важности элемент частично-направленной стратегии. Вследствие применения прогноза количественные соотношения коллов и путов отклоняются от паритета, что приводит к асимметричности платежных функций отдельных комбинаций. Такие комбинации по определению не могут быть маркет-нейтральными. Тем не менее портфель, составленный из асимметричных комбинаций, может быть дельта-нейтральным (если индексные дельты отдельных комбинаций имеют разные знаки, то их сумма может равняться или быть близкой к нулю). В идеале разработчик частично-направленной стратегии должен стремиться к тому, чтобы прогноз был максимально эффективно внедрен в структуру стратегии, но при этом дельта портфеля стремилась к нулю. Здесь необходим поиск разумного компромисса, от эффективности которого будет зависеть качество создаваемой стратегии.

В тех случаях, когда соотношение коллов и путов в портфеле было паритетным, индексная дельта коротких комбинаций несколько отклонялась от нуля в сторону отрицательных значений, а индексная дельта длинных комбинаций отклонялась в положительную сторону (рис. 1.5.9). Следовательно, в условиях паритетного соотношения коллов и путов и приблизительно равного соотношения длинных и коротких позиций, объединение всех комбинаций в единый портфель может привести к созданию дельта-нейтрального портфеля. Этим, однако, не ограничивается количество ситуаций, когда дельта-нейтральность частично-направленного портфеля может быть достижима.

Существует прямая зависимость между соотношением колл/пут в длинных комбинациях и индексной дельтой длинной части портфеля. Причем преобладание путов ( $\text{колл/пут} < 1$ ) приводит к отрицательной дельте, а преобладание коллов ( $\text{колл/пут} > 1$ ) — к положительной (рис. 1.5.9). Для коротких комбинаций все эти зависимости меняются на противоположные: обратная зависимость между соотношением колл/пут и индексной дельтой короткой части портфеля; преобладание путов приводит к положительной дельте, а преобладание коллов — к отрицательной. Разнонаправленность данных зависимостей указывает на то, что объединение длинных и коротких позиций может

во многих случаях привести к дельта-нейтральности результирующего портфеля (несмотря на существенные отклонения от нуля дельт длинных и коротких позиций).

Ниже представлен расширенный анализ границ дельта-нейтральности, аналогичный тому, который был проведен для дельта-нейтральной стратегии. Из десятилетней базы данных были сделаны две выборки, относящиеся к периодам низкой и высокой волатильности. В пределах каждой выборки были сформированы портфели, состоящие из близких и далеких опционов (истекающих через одну-две недели и два-три месяца соответственно). Каждая граница дельта-нейтральности описывается с помощью четырех характеристик: индекс порога критерия (характеризует положение границы относительно диапазона допустимых значений параметра «порог критерия»); индекс диапазона страйков (характеризует положение границы



**Рис. 1.5.9.** Зависимость индексной дельты портфеля от соотношения коллов и путов в составе этого портфеля. Данные относятся к десятилетнему историческому периоду и представлены отдельно для длинных и коротких комбинаций

относительно диапазона допустимых значений параметра «диапазон страйков»); протяженность границы дельта-нейтральности (характеризует длину границы); достижимость дельта-нейтральности (характеризует принципиальную возможность создания дельта-нейтрального портфеля).

На рис. 1.5.10 представлены индексы порога критерия и диапазона страйков. Визуальный анализ этих данных приводит к следующим выводам:

- ♦ В спокойные периоды границы дельта-нейтральности располагаются в очень широком диапазоне значений порога критерия. Этот вывод основан на расположении заполненных кружков и треугольников вдоль горизонтальной оси рис. 1.5.10.
- ♦ В кризисные периоды границы дельта-нейтральности менее изменчивы по величине порога критерия, чем в периоды высокой волатильности. Этот вывод основан на расположении контурных кружков и треугольников вдоль горизонтальной оси рис. 1.5.10.
- ♦ Границы дельта-нейтральности портфелей, состоящих из опционов с ближайшей датой истечения, располагаются

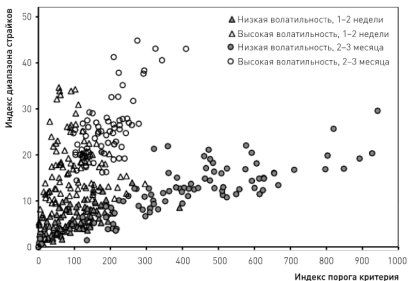


Рис. 1.5.10. Представление границ дельта-нейтральности в виде точки с координатами, соответствующими индексам порога критерия и диапазона страйков. Показаны данные, относящиеся к десятилетнему историческому периоду



в области более низких значений порога критерия, чем границы портфелей, сформированных из далеких опционов. Этот вывод (справедливый как для спокойного, так и для волатильного рынков) основан на том, что кружки располагаются левее треугольников относительно горизонтальной оси рис. 1.5.10.

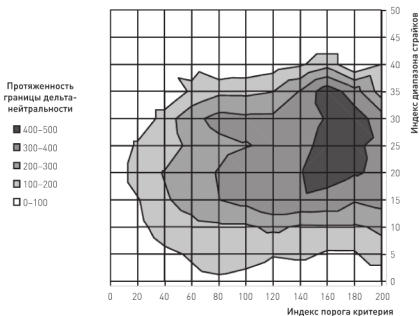
- ◇ Время, остающееся до экспирации опционов, влияет также на положение границ дельта-нейтральности относительно оси диапазона страйков. Границы портфелей, состоящих из ближайших опционов, располагаются в области более низких значений диапазона страйков, чем границы портфелей, сформированных из далеких опционов. Этот вывод (справедливый как для спокойного, так и для волатильного рынков) основан на том, что кружки располагаются ниже треугольников относительно вертикальной оси рис. 1.5.10.
- ◇ Во время волатильного рынка границы дельта-нейтральности располагаются в области более низких значений диапазона страйков, чем во время спокойного рынка. Этот вывод (справедливый как для портфелей, состоящих из ближайших опционов, так и для портфелей, сформированных из дальних опционов) основан на более низком расположении большинства заполненных кружков и треугольников относительно контурных кружков и треугольников по вертикальной оси рис. 1.5.10.

Обращает на себя внимание тот факт, что выводы, сделанные ранее на основании подобного анализа, проведенного для дельта-нейтральной стратегии (рис. 1.4.7), отличаются от выводов настоящего анализа по очень многим позициям. Это означает, что влияние факторов, определяющих положение границ дельта-нейтральности, может меняться в зависимости от класса опционной стратегии. Следовательно, одновременное использование нескольких стратегий, позволяет построить автоматизированную торговую систему, имеющую достаточно большие шансы создания и поддержания дельта-нейтральных портфелей в разных условиях (для разных сочетаний влияющих факторов).

Теперь мы переходим к рассмотрению протяженности границ дельта-нейтральности. Эта характеристика очень важна, поскольку более длинные границы обеспечивают возможность построения большего количества вариантов дельта-нейтрального портфеля (путем манипуляции значениями параметров «порог критерия» и «диапазон страйков»). Зависимость длины границы от индексов дельта-нейтральности и порога критерия показана

на рис. 1.5.11. Самые длинные границы находятся в области высоких значений порога критерия и среднего значения диапазона страйков. Это означает, что, для получения более протяженной границы дельта-нейтральности следует использовать средний диапазон страйков и выбирать комбинации, имеющие высокие значения критериев. Снижение величины порога критерия приводит к сокращению границы. Тот же эффект возникает как при сужении, так и при расширении диапазона страйков.

Сопоставление рис. 1.5.11 и 1.4.8 позволяет сравнить две опционные стратегии с точки зрения влияния параметров «порог критерия» и «диапазон страйков» на протяженность границ дельта-нейтральности. В целом, топографические карты, представленные на двух рисунках выглядят достаточно похоже. Единственное незначительное отличие состоит в эффекте диапазона страйков. Для дельта-нейтральной стратегии наибольшая протяженность границы достигается при использовании узкого диапазона страйков, а для частично-направленной

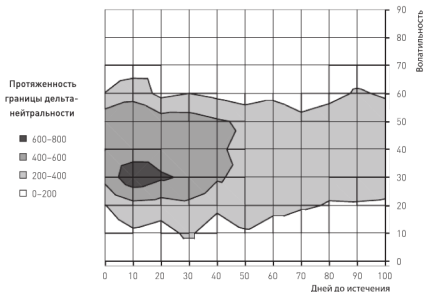


**Рис. 1.5.11.** Зависимость протяженности границы дельта-нейтральности от индексов порога критерия и диапазона страйков. Представленные данные относятся к десятилетнему историческому периоду

стратегии максимизация границы требует расширения диапазона страйков до средних значений.

Зависимость протяженности границ дельта-нейтральности от волатильности рынка и от времени, остающегося до истечения опционов, показана на рис. 1.5.12. Наибольшей длины граница достигает при средней волатильности и коротком промежутке времени до экспирации. При использовании опционов, до истечения которых остается менее 10 дней, протяженность границы сокращается. Использование более долгосрочных опционов (более 20 дней до истечения) также приводит к сокращению границы дельта-нейтральности. Независимо от количества дней, остающихся до экспирации, протяженность границы дельта-нейтральности сокращается как при снижении, так и при росте волатильности.

Сопоставление рис. 1.5.12 и 1.4.9 позволяет сравнить две опционные стратегии с точки зрения влияния волатильности и периода времени до экспирации на протяженность границ дельта-нейтральности. Основное отличие топографических

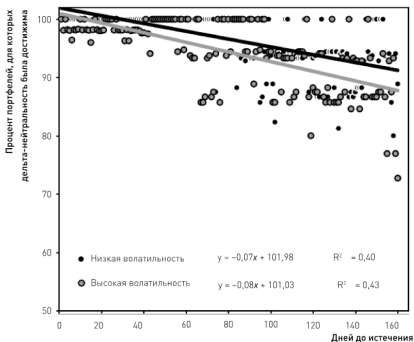


**Рис. 1.5.12.** Зависимость протяженности границы дельта-нейтральности от количества дней, остающегося до истечения опционов, и волатильности рынка базовых активов. Представленные данные относятся к десятилетнему историческому периоду

карт, представленных на двух рисунках, состоит в эффекте волатильности. Для дельта-нейтральной стратегии наибольшая протяженность границы достигается при высокой волатильности, а для частично-направленной стратегии максимальная граница получается в условиях умеренно волатильного рынка. В остальном эффекты волатильности и периода времени до экспирации не имеют существенных отличий между двумя стратегиями. Таким образом, хотя характеристики положения границ дельта-нейтральности весьма специфичны для дельта-нейтральной и частично-направленной стратегий (сравни рис. 1.5.10 и 1.4.7), протяженность границ мало отличается между этими двумя опционными стратегиями (сравни рис. 1.5.11 с 1.4.8 и 1.5.12 с 1.4.9).

Рассмотрим, насколько дельта-нейтральность достижима в условиях применения частично-направленной стратегии. В соответствии с определением, данным в разделе 1.4.5, достижимость дельта-нейтральности выражается как процент случаев, когда дельта-нейтральность достигается хотя бы в одной точке от общего количества случаев. На рис. 1.5.13 представлена зависимость достижимости дельта-нейтральности от количества дней до экспирации и от волатильности рынка. Как и в случае дельта-нейтральной стратегии, для частично-направленной стратегии были обнаружены статистически значимые зависимости достижимости дельта-нейтральности от количества дней, остающегося до истечения опционов (для спокойного периода  $t = 10,29$ ,  $p < 0,0001$ ; для волатильного периода  $t = 10,89$ ,  $p < 0,0001$ ; рис. 1.5.13).

Дельта-нейтральность оказалась достижимой во всех случаях, когда портфели были сформированы менее чем за 40 дней до даты истечения опционов. При использовании более долгосрочных опционов достижимость дельта-нейтральности снижается. Однако это снижение происходит более медленными темпами, чем в случае дельта-нейтральной стратегии (сравни рис. 1.5.13 и 1.4.10). Волатильность рынка не оказывает статистически значимого влияния на зависимость достижимости дельта-нейтральности от количества дней до экспирации. Это подтверждается несовпадением линий регрессии (и близостью их углов наклона), соответствующих низковолатильному и кризисному периодам. Разность наклонов линий регрессии статистически незначима ( $t = 1,65$ ,  $p = 0,10$ ). В этом отношении частично-направленная стратегия также отличается от дельта-нейтральной, для которой достижимость дельта-нейтральности



**Рис. 1.5.13.** Зависимость достижимости дельта-нейтральности от количества дней, остающегося до истечения опционов, в условиях спокойного и волатильного рынка. Представленные данные относятся к десятилетнему историческому периоду

зависит от состояния рынка (при высокой волатильности достижимость дельта-нейтральности ниже).

Все описанные выше характеристики границ дельта-нейтральности суммируются в таблице 1.5.1. Аналогичная таблица была приведена ранее для дельта-нейтральной стратегии (таблица 1.4.1). Сравнивая эти две таблицы, легко определить отличия между двумя стратегиями. Рассмотрим различные сочетания значений (волатильность рынка  $\times$  период времени до экспирации опционов) и сравним их влияние на характеристики границ дельта-нейтральности для двух стратегий. Влияние более половины сочетаний неодинаково для двух стратегий. В частности, можно отметить следующие отличия.

- Если рынок находится в состоянии высокой волатильности и портфель формируется из опционов с ближайшей датой истечения, то для дельта-нейтральной стратегии граница

		Волатильность			
		Высокая		Низкая	
Время до истечения	Короткое	Расположение ГДН:	широкий диапазон значений порога критерия	Расположение ГДН:	широкий диапазон значений порога критерия
		Расположение ГДН:	средний диапазон страйков	Расположение ГДН:	узкий диапазон страйков
		Протяженность ГДН:	малая	Протяженность ГДН:	средняя/большая
		ДДН:	высокая	ДДН:	высокая
	Длинное	Расположение ГДН:	широкий диапазон значений порога критерия	Расположение ГДН:	очень широкий диапазон значений порога критерия
		Расположение ГДН:	средний/широкий диапазон страйков	Расположение ГДН:	узкий/средний диапазон страйков
		Протяженность ГДН:	малая	Протяженность ГДН:	малая
		ДДН:	средняя	ДДН:	средняя

Таблица 1.5.1. Зависимость характеристик границы дельта-нейтральности (ГДН) и достижимости дельта-нейтральности (ДДН) от промежутка времени (от момента создания портфеля до экспирации) и от состояния рынка (волатильности)

дельта-нейтральности находится в области низких значений диапазона страйков, а для частично-направленной стратегии — в области средних значений данного параметра. Кроме того, в первом случае протяженность границы велика, а во втором случае — мала.

- Если рынок находится в состоянии низкой волатильности и портфель формируется из опционов с ближайшей датой истечения, то для дельта-нейтральной стратегии граница дельта-нейтральности находится в области низких значений порога критерия, а для частично-направленной стратегии — в широком диапазоне значений данного параметра. Кроме того, в первом случае граница имеет среднюю протяженность, а во втором случае

граница может быть достаточно протяженной (от средней до длинной).

- Если рынок находится в состоянии высокой волатильности и портфель формируется из опционов с далекой датой истечения, то для дельта-нейтральной стратегии граница дельта-нейтральности находится в области средних значений диапазона страйков, а для частично-направленной стратегии — в области средних и более высоких значений данного параметра. Кроме того, достижимость дельта-нейтральности в первом случае низкая, а во втором случае — средняя.
- Если рынок находится в состоянии низкой волатильности и портфель формируется из опционов с далекой датой истечения, то для дельта-нейтральной стратегии граница дельта-нейтральности находится в области низких значений порога критерия, а для частично-направленной стратегии — значение данного параметра весьма изменчиво (от низких до очень высоких значений). Кроме того, в первом случае граница дельта-нейтральности находится в области высоких значений диапазона страйков, а во втором случае — в области низких и средних значений. Достижимость дельта-нейтральности для дельта-нейтральной стратегии низкая, а для частично-направленной стратегии — средняя.

#### **1.5.7. Анализ структуры портфеля**

В этом разделе мы применим те же подходы и используем те же характеристики, которые были использованы ранее (раздел 1.4.6) для описания структуры портфелей, формируемых в рамках дельта-нейтральной стратегии. Как и ранее, мы ограничим рассмотрение параметров «порог критерия» и «диапазон страйков» интервалом значений от 0 до 25%. Основные характеристики частично-направленного портфеля будут исследованы в условиях низкой и высокой волатильности. Будут рассмотрены два временных интервала [недельный и двухмесячный] от момента создания портфеля до экспирации опционов. Для того чтобы сравнить структуру частично-направленного портфеля с дельта-нейтральным, мы используем те же даты создания портфелей и те же даты экспирации, которые использовались в разделе 1.4.6. Поскольку различные аспекты структуры были подробно описаны применительно к дельта-нейтральной стратегии, мы ограничимся в этом разделе указанием отличий в структуре портфелей, создаваемых в рамках частично-направленной стратегии.

**Количество комбинаций в составе портфеля.** Зависимость количества комбинаций, входящих в состав портфеля, от порога критерия и диапазона страйков очень похожа на зависимость, описанную для дельта-нейтральной стратегии (рис. 1.4.11). Основное отличие состоит в меньшем количестве комбинаций для каждого варианта сочетания (диапазон страйков  $\times$  порог критерия). Уменьшение количества комбинаций указывает на снижение уровня диверсификации портфеля. Однако такое снижение может быть критичным лишь при использовании ближайших опционов и при существенных ограничениях, накладываемых на параметры стратегии (высокий порог критерия и узкий диапазон страйков). Во всех прочих случаях количество комбинаций является достаточным для достижения приемлемого уровня диверсификации.

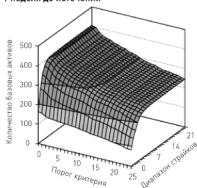
**Количество базовых активов.** Эта характеристика является другим важным показателем диверсификации портфеля. В период высокой волатильности (независимо от периода времени до истечения опционов) зависимость количества базовых активов от порога критерия и диапазона страйков не отличается от зависимости, установленной для дельта-нейтральной стратегии (рис. 1.4.12). В спокойный период для частично-направленной стратегии была получена другая форма зависимости (сравни рис. 1.4.12 и 1.5.14). Если для дельта-нейтральной стратегии (при использовании ближайших опционов) количество базовых активов не зависит от диапазона страйков и экспоненциально уменьшается с ростом порога критерия, то в случае частично-направленной стратегии расширение диапазона страйков ведет к росту количества базовых активов, а снижение их числа по мере роста порога критерия происходит более медленными темпами (рис. 1.5.14). При использовании долгосрочных опционов разница между двумя стратегиями еще более очевидна. Если в случае дельта-нейтральной стратегии количество базовых активов было очень большим при низком пороге критерия и почти не зависело от диапазона страйков, то для частично-направленной стратегии это количество оказалось небольшим (независимо от порога критерия) и опускалось до очень низких значений при использовании узкого диапазона страйков (рис. 1.5.14).

Соотношение длинных и коротких комбинаций. Как и в случае дельта-нейтральной стратегии, в период высокой волатильности все портфели, построенные в рамках частично-направленной

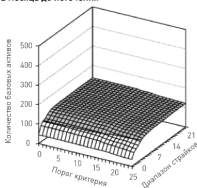


стратегии, состоят преимущественно из коротких комбинаций. В период спокойного рынка процент коротких комбинаций от общего количества комбинаций в портфеле зависит от величины порога критерия и не зависит от ширины диапазона страйков (это также совпадает с паттернами, наблюдавшимися для дельта-нейтральной стратегии, см. рис. 1.4.13). Поэтому, чтобы лучше отобразить зависимость доли коротких комбинаций от порога критерия и сравнить между собой две стратегии, мы усреднили данные, относящиеся к разным диапазонам страйков (что позволяет свести поверхности графиков к линиям). Независимо от периода времени, остающегося до истечения опционов, доля коротких комбинаций в портфеле падает по мере роста порога критерия. Причем в портфелях, сформированных из ближайших опционов, это падение происходит более быстрыми темпами, а доля коротких комбинаций ниже, чем в портфелях, состоящих из дальних опционов. Такие же тенденции наблюдались и для дельта-нейтральной стратегии (рис. 1.5.15). Основное отличие двух стратегий состоит в том, что при использовании краткосрочных опционов, доля коротких комбинаций в портфелях, сформированных в рамках частично-направленной стратегии, всегда ниже, чем в дельта-нейтральных портфелях (независимо от величины порога критерия). При использовании долгосрочных опционов доля коротких комбинаций в частично-направленных

Спокойный период,  
1 неделя до истечения



Спокойный период,  
2 месяца до истечения



**Рис. 1.5.14.** Зависимость количества базовых активов от порога критерия и диапазона страйков. Представлены данные, относящиеся к спокойному и волатильному рынкам

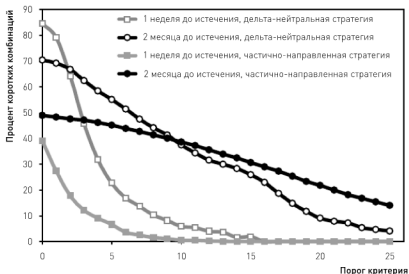


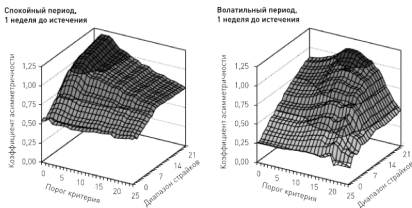
Рис. 1.5.15. Зависимость процента коротких комбинаций от порога критерия. Представленные данные относятся к двум опционным стратегиям и к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации

портфелях ниже для низких значений порога критерия, но становится выше, чем в дельта-нейтральных портфелях, когда порог критерия превышает 10%.

**Асимметричность портфеля.** Этот показатель выражает степень асимметричности платежной функции портфеля относительно текущего значения индекса. Поскольку концепция, лежащая в основе частично-направленной стратегии, включает в себя элемент прогноза и не требует нейтральности по отношению к рынку, коэффициент асимметричности может достигать достаточно больших значений. Если в случае дельта-нейтральной стратегии коэффициент асимметричности не превышал 0,35 (для всех значений порога критерия, диапазона страйков, волатильности рынка и периода времени до истечения опционов, см. рис. 1.4.16), то для частично-направленной стратегии этот показатель находится в диапазоне 0,4–1,4. Тем не менее сведение асимметричности к минимуму (при сохранении элемента прогноза) является важной задачей при разработке частично-направленных стратегий. Поэтому необходимо

производить поиск таких сочетаний параметров, которые позволяют снизить асимметричность портфеля. Пример зависимости коэффициента асимметричности от значений порога критерия и диапазона страйков для двух уровней волатильности (при построении портфеля из краткосрочных опционов) представлен на рис. 1.5.16. Во время спокойного рынка асимметричность портфеля достигает максимума при наименьших ограничениях, накладываемых на параметры (низкий порог критерия и широкий диапазон страйков). В период высокой волатильности максимум асимметричности смещается в область более высоких значений порога критерия. Наибольшее значение имеет тот факт, что как во время спокойного рынка, так и в периоды кризиса существует достаточно большое количество сочетаний (порог критерия  $\times$  диапазон страйков), для которых асимметричность портфеля находится на приемлемо низком уровне.

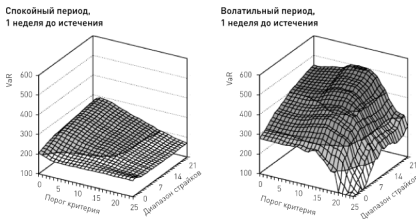
**Вероятность убытка.** Зависимость вероятности убытка от порога критерия и диапазона страйков похожа по форме на зависимость, описанную для дельта-нейтральной стратегии. Такое подобие наблюдается для обоих уровней волатильности (рис. 1.4.17). Единственное отличие (наблюдаемое только в спокойный период и лишь при построении портфелей из долгосрочных опционов) состоит в том, что если для



**Рис. 1.5.16.** Зависимость коэффициента асимметричности от порога критерия и диапазона страйков. Представлены данные, относящиеся к двум состояниям рынка, спокойному и кризисному

дельта-нейтральной стратегии вероятность убытка увеличивается по мере расширения диапазона страйков, то для частично-направленной стратегии данный параметр не влияет на вероятность убытка. Для всех вариантов сочетания (диапазон страйков × порог критерия) абсолютное значение вероятности убытка частично-направленных портфелей несколько выше по сравнению с дельта-нейтральными.

**VaR.** Для дельта-нейтральной стратегии было отмечено, что период времени, остающийся до экспирации опционов, влияет на VaR портфелей гораздо сильнее, чем волатильность рынка (рис. 1.4.19). Такой же феномен был отмечен нами и для частично-направленной стратегии (при использовании двухмесячных опционов вместо недельных VaR увеличивается в несколько раз). Для дельта-нейтральной стратегии VaR достигал максимума при самых низких значениях порога критерия и при наиболее широких диапазонах страйков. В случае частично-направленной стратегии пик VaR несколько смещается в область более высоких значений порога критерия; особенно это заметно в период высокой волатильности (рис. 1.5.17).



**Рис. 1.5.17.** Зависимость VaR от порога критерия и диапазона страйков. Представлены данные, относящиеся к двум состояниям рынка, спокойному и кризисному

## 1.6. Дельта-нейтральный портфель как основа опционной стратегии

### 1.6.1. Структура и свойства портфеля на границах дельта-нейтральности

В предыдущих разделах мы описали два основных аспекта дельта-нейтральной и частично-направленной опционных стратегий: (1) расположение и протяженность границ дельта-нейтральности, (2) характеристики, определяющие структуру и свойства доступных опционных портфелей. Теперь необходимо объединить эти два аспекта в общую концепцию построения и выбора оптимального дельта-нейтрального портфеля.

Границы дельта-нейтральности представляют собой множество портфелей, объединенных одним общим признаком — их дельта равна нулю. В этом отношении все они одинаковы. Однако эти портфели очень сильно разнятся по многим другим важным характеристикам. По сути, эти характеристики определяют целый комплекс качеств, от которых зависят риски и доходность создаваемой торговой стратегии. В этом разделе мы продемонстрируем методику определения структуры и свойств портфелей, находящихся на границах дельта-нейтральности. Хотя формально все портфели, расположенные на этой границе, пригодны для использования в рамках любой опционной стратегии, необходимо выбрать из них единственный вариант (или несколько равнозначных альтернатив), обладающий наилучшими характеристиками. В этом разделе мы будем использовать примеры, относящиеся к дельта-нейтральной торговой стратегии. Однако описанная ниже методика может быть в равной мере применена к любой опционной стратегии. (Проблеме выбора оптимального портфеля будет посвящен следующий раздел.)

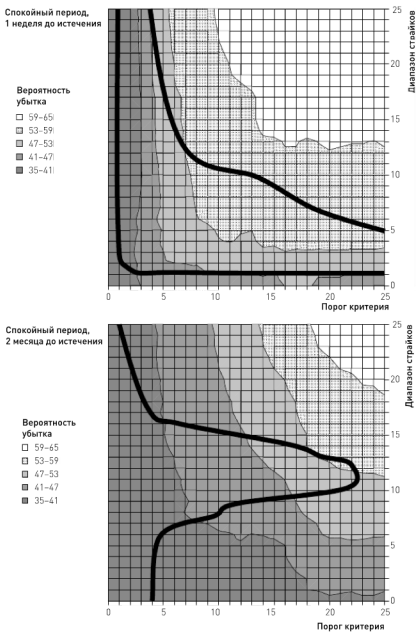
Для того чтобы определить характеристики дельта-нейтральных портфелей, необходимо выполнить следующие процедуры:

1. Представить границу дельта-нейтральности в виде последовательности точек, каждая из которых задается парой координат на плоскости (порог критерия  $\times$  диапазон страйков). Поскольку теоретически граница может состоять из бесконечного количества точек, необходимо определить некий дискретный шаг для определения координат точек. Для обоих параметров, «порог критерия» и «диапазон страйков», мы примем этот шаг равным 1%.

2. Представить зависимость исследуемой характеристики от порога критерия и диапазона страйков в виде топографической карты. (Ранее эти зависимости были представлены в виде трехмерных графиков, см. рис. 1.4.11–1.4.13 и 1.4.16–1.4.19.) Горизонтальная и вертикальная оси карты соответствуют значениям параметров «порог критерия» и «диапазон страйков», а высотная отметка каждой точки на карте выражает значение характеристики, соответствующее определенному портфелю.
3. Нанести на топографическую карту соответствующую ей границу дельта-нейтральности. Координаты точек, составляющих границу, будут соответствовать координатам дельта-нейтральных портфелей. Высотные отметки карты в месте нахождения точек будут соответствовать значениям, принимаемым исследуемой характеристикой.
4. Повторяя последовательно процедуры 1–3 для каждой характеристики, мы получим набор всех характеристик для каждого дельта-нейтрального портфеля.

На рис. 1.6.1 показан результат выполнения первых трех процедур для характеристики «вероятность убытка». В этом примере использовались те же данные, что и в предыдущем разделе: дата создания портфелей 11 января 2010 г., даты экспирации — 15 января 2010 г. (для недельных опционов) и 19 марта 2010 г. (для двухмесячных опционов). Точки и границы дельта-нейтральности были определены с помощью методики, описанной в разделе 1.4.3. Топографическая карта была построена, основываясь на принципах, применявшихся ранее для построения рис. 1.4.3 и 1.4.8. И, наконец, границы и карты были построены в общей системе координат (рис. 1.6.1), что позволит нам определить величину характеристики «вероятность убытка» для каждого дельта-нейтрального портфеля. Высотные отметки топографической карты показывают вероятность убытка для каждого портфеля, находящегося на границе дельта-нейтральности (равно как и для всех прочих, не интересующих нас портфелей, находящихся вне этой границы).

Рис. 1.6.1 визуально представляет процедуры определения характеристик дельта-нейтральных портфелей, однако он не позволяет получить точные значения этих характеристик (поскольку высотные отметки на топографической карте представляются в виде интервалов значений). Кроме того, создание автоматизированной торговой стратегии исключает визуальный анализ и требует разработки расчетного алгоритма. Продемонстрируем процедуру определения точных значений характеристики



**Рис. 1.6.1.** Нанесение границ дельта-нейтральности (толстые линии) на топографическую карту характеристики «вероятность убытка». Представленные данные относятся к спокойному рынку и к двум периодам времени (недельному и двухмесячному) от момента создания портфеля до экспирации

«вероятность убытка» на примере данных, представленных на верхней карте рис. 1.6.1 (когда портфели формировались из опционов с ближайшей датой истечения).

В этом случае были получены две границы дельта-нейтральности. Одна из них проходит сначала параллельно оси диапазона страйков, а затем резко поворачивает и идет вдоль оси порога критерия (мы не будем рассматривать эту границу, поскольку все портфели на ней имеют очень низкие значения либо одного,

		Диапазон страйков																									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Порог критерия	25	33	37	43	48	52	54	56	57	58	59	60	61	61	62	62	63	63	62	63	63	63	63	63	63	63	62
	24	33	37	43	48	52	54	55	57	58	59	60	61	61	62	62	63	63	62	63	63	63	63	63	63	63	62
	23	33	37	42	48	52	54	55	57	58	59	60	60	61	62	62	62	62	62	62	62	63	63	63	62	62	62
	22	33	36	42	48	52	54	55	57	58	59	60	60	61	61	62	62	62	62	62	62	63	63	63	62	62	62
	21	33	36	42	47	51	53	55	56	58	59	59	60	60	61	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62
	20	33	36	42	47	51	53	55	56	57	58	59	60	60	61	61	62	61	61	61	62	62	62	62	62	62	61
	19	33	36	42	47	51	53	55	56	57	58	59	59	60	61	61	62	61	61	61	62	62	62	62	62	62	61
	18	33	36	42	47	51	53	54	55	56	58	58	59	59	60	60	61	61	61	61	61	61	61	61	62	61	61
	17	33	36	41	46	50	52	54	55	56	57	58	58	59	60	60	60	60	60	60	61	61	61	61	61	60	60
	16	33	36	41	46	50	52	54	55	56	57	58	58	59	60	60	60	60	60	60	61	61	61	61	61	60	60
	15	33	36	41	46	50	52	54	55	56	57	57	58	59	60	60	60	60	60	60	61	61	61	61	61	60	60
	14	33	36	41	46	50	52	53	55	56	57	57	58	58	59	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
	13	33	36	41	46	49	52	53	55	55	56	56	57	58	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59
	12	34	36	41	46	49	51	53	54	55	56	56	57	57	58	58	59	59	58	58	58	58	58	58	58	58	58
	11	34	36	41	45	49	51	53	54	55	56	56	57	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58
	10	34	36	41	45	48	51	52	54	54	55	55	56	56	57	57	58	58	57	58	58	58	58	58	57	57	57
	9	35	37	41	45	48	50	52	54	54	55	55	56	56	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57
	8	35	37	41	45	48	50	52	53	54	55	55	56	56	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57
	7	36	37	42	45	48	50	51	53	54	55	55	55	56	56	55	55	55	55	55	55	55	55	55	56	56	
	6	37	39	43	46	49	50	51	53	53	55	55	55	55	54	55	55	56	55	55	56	56	55	55	55	55	56
	5	37	38	42	45	47	49	50	52	52	53	54	53	53	54	54	55	54	55	55	55	55	54	54	54	54	54
	4	37	39	43	46	48	49	50	51	52	53	53	53	52	54	54	55	54	55	55	55	55	54	54	54	54	54
	3	38	40	43	46	47	48	49	50	50	50	51	51	51	52	52	53	53	53	52	53	53	53	53	53	53	52
	2	38	39	42	45	46	47	47	47	48	48	48	49	49	50	49	50	50	49	49	49	48	48	48	48	48	49
	1	38	39	42	45	46	46	46	46	47	47	47	47	47	47	48	48	48	48	48	47	47	47	47	47	47	47

Таблица 1.6.1. Вероятности убытка портфелей, сформированных в период спокойного рынка из опционов, до истечения которых остается одна неделя. Каждая ячейка представляет один портфель с определенным сочетанием параметров «порог критерия» и «диапазон страйков». Серым цветом отмечены ячейки, соответствующие точкам дельта-нейтральности



либо другого параметра). Вторая граница пересекает топографическую карту от верхней левой части к правой нижней области (портфели на этой границе имеют самые разнообразные сочетания значений двух параметров). Заменяем топографическую карту таблицей, ячейки которой отображают вероятности убытка, соответствующие всем возможным вариантам (порог критерия  $\times$  диапазон страйков). В таблице 1.6.1 ячейки, соответствующие точкам дельта-нейтральности, отмечены серым цветом. Обратите внимание, что расположение серых ячеек повторяет форму границы дельта-нейтральности на верхнем рис. 1.6.1. Значения серых ячеек выражают вероятности убытков соответствующих им дельта-нейтральных портфелей. Такой способ определения характеристик портфелей достаточно прост, легко программируем и исключает влияние субъективного фактора, неизбежного при визуальном анализе графиков.

### **1.6.2. Выбор дельта-нейтрального портфеля**

В предыдущих разделах мы разобрали методику нахождения множества дельта-нейтральных портфелей и научились определять их характеристики. Теперь необходимо сделать следующий шаг — из доступного множества портфелей, удовлетворяющих основному условию (дельта-нейтральности), выбрать такой вариант, характеристики которого наилучшим образом соответствуют требованиям разработчика торговой стратегии. Забегая вперед, заметим, что достичь полного соответствия почти никогда не удастся. Поэтому задачу выбора портфеля следует сформулировать следующим образом: из множества доступных альтернатив выбрать такую, характеристики которой наиболее близки к некоему эталону, определяемому разработчиком стратегии.

Для того чтобы продемонстрировать основные подходы к решению задачи выбора, рассмотрим полный комплекс характеристик всех дельта-нейтральных портфелей, полученных в двух случаях. В одном случае портфели формируются во время спойного рынка из недельных опционов, в другом случае — из двухмесячных опционов. Ранее мы определили значения характеристики «вероятность убытка» для этих двух случаев (рис. 1.6.1). Теперь рассмотрим все прочие характеристики. Для каждой характеристики необходимо построить таблицу (аналогичную таблице 1.6.1) и зарегистрировать значения «серых» ячеек, соответствующих точкам дельта-нейтральности. Обратите внимание, что границы дельта-нейтральности

для месячных и недельных опционов заметно отличаются (рис. 1.6.1). Соответственно, отличаются и распределения «серых» точек дельта-нейтральности в пределах таблиц, относящихся к ближайшим и дальним опционам.

Чтобы не перегружать изложение материала избыточным объемом промежуточных таблиц, мы не будем приводить здесь отдельные таблицы для каждой характеристики. Вместо этого, сведем в единую таблицу характеристики, относящиеся только к дельта-нейтральным портфелям (только «серые» ячейки). Это позволит получить общее представление о полном комплексе характеристик, относящихся ко всем доступным вариантам дельта-нейтральных портфелей.

Характеристики дельта-нейтральных портфелей показаны в таблицах 1.6.2 (портфели формировались из краткосрочных опционов) и 1.6.3 (портфели формировались из долгосрочных опционов). Для того чтобы приступить к анализу характеристик и выбору на их основе оптимального портфеля, следует определить для каждой характеристики интервалы ее допустимых значений. Данные интервалы зависят от требований, предъявляемых к разрабатываемой стратегии, а также от индивидуальных предпочтений разработчика и от накладываемых на него внешних ограничений. Поэтому в каждом конкретном случае интервалы допустимых значений могут быть разными. В нашем случае мы будем использовать следующие интервалы:

- ◇ Количество комбинаций: от 20 до 200;
- ◇ Количество базовых активов: от 20 до 100;
- ◇ Соотношение длинных и коротких комбинаций: от 20 до 80% коротких комбинаций;
- ◇ Вероятность убытка: менее 50%;
- ◇ Асимметричность портфеля: коэффициент асимметричности не более 0,1.
- ◇ VaR: не более 600.

В таблицах 1.6.2 и 1.6.3 мы использовали серый цвет для обозначения интервалов допустимых значений. В пределах каждой колонки таблицы серый цвет обозначает приемлемые интервалы для каждой отдельно взятой характеристики. В пределах каждой строки серый цвет показывает, являются ли значения характеристик данного портфеля допустимыми.

В том случае, когда портфели формировались из ближайших опционов, ни один из них не обладал таким набором характеристик, который полностью удовлетворял бы нашим требованиям (таблица 1.6.2). Не нашлось даже ни одного портфеля,

Параметры		Характеристики					
Порог критерия	Диапазон страйков	Кол-во комбинаций	Кол-во базовых активов	% коротких комбинаций	Вероятность убытка	Кoeffициент асимметричности	VaR
4	25	459	85	31	48	0,10	220
4	24	458	85	31	48	0,10	220
4	23	454	85	31	48	0,10	220
4	22	452	85	31	48	0,09	221
4	21	447	85	32	47	0,09	220
4	20	441	85	32	47	0,09	210
5	19	341	66	22	51	0,09	212
5	18	331	66	22	51	0,08	212
5	17	321	66	23	50	0,08	215
5	16	321	66	23	50	0,08	215
6	15	264	57	17	52	0,08	214
6	14	259	57	17	52	0,08	212
6	13	243	56	16	52	0,07	216
7	12	200	51	13	53	0,07	213
8	11	176	47	9	54	0,06	216
9	11	194	44	8	55	0,05	214
10	10	134	40	6	55	0,05	214
11	10	122	37	6	55	0,05	211
12	10	110	32	4	56	0,05	215
13	10	104	31	3	56	0,05	217
14	10	92	26	1	57	0,05	213
15	9	79	21	1	57	0,05	206
16	8	70	19	0	57	0,04	211
17	8	68	18	0	57	0,05	212
18	7	56	18	0	55	0,04	220
19	7	51	16	0	56	0,04	214
20	6	47	16	0	56	0,04	207
21	6	46	16	0	55	0,04	209
22	6	41	15	0	55	0,04	206
23	5	37	13	0	54	0,04	216
24	5	36	13	0	54	0,04	215
25	5	33	12	0	54	0,04	214

**Таблица 1.6.2.** Характеристики дельта-нейтральных портфелей, построенных в спокойный период из недельных опционов. Каждая строка таблицы представляет отдельный портфель, задаваемый уникальной комбинацией двух параметров. Интервал допустимых значений каждой характеристики показан серым цветом. Толстыми рамками показаны девять портфелей, удовлетворяющих четырем из шести требований, предъявляемых к интервалам допустимых значений

удовлетворяющего хотя бы пяти из шести требований, предъявляемых к интервалам допустимых значений. Зато сразу девять портфелей обладают характеристиками, четыре из которых удовлетворяют предъявляемым требованиям. Эти портфели обозначены толстыми рамками в таблице 1.6.2. Подходит ли из этих девяти портфелей хотя бы один для закрытия позиций, зависит от алгоритма выбора, принятого разработчиком стратегии (ниже мы коснемся этого вопроса подробнее).

В том случае, когда портфели создавались на основе далеких опционов, также ни один из них не обладал полностью удовлетворительным набором характеристик (таблица 1.6.3). Зато пять из шести характеристик одного портфеля удовлетворяли требованиям, предъявляемым к интервалам допустимых значений. Этот портфель обозначен толстой рамкой в таблице 1.6.3. Если, в соответствии с алгоритмом выбора, этого достаточно, то такой портфель может быть использован для открытия торговых позиций.

Можно предложить большое количество алгоритмов выбора оптимального портфеля. По существу, все они являются вариантами решения задачи многокритериального анализа, в которой каждая характеристика представляет собой отдельный критерий.

Самый суровый алгоритм может иметь следующий вид. На первом этапе выбираются только те портфели, все характеристики которых удовлетворяют априорно установленным требованиям. (В наших двух примерах не нашлось ни одного такого портфеля.) На втором этапе существует несколько вариантов действий. Можно ранжировать все характеристики по степени их значимости. После чего из множества портфелей, отобранных на первом этапе, выбирается один с наилучшим значением первой по важности характеристики. Если таких портфелей окажется несколько, то дальнейший отбор производится с помощью второй по важности характеристики. И так далее. Недостаток такого подхода заключается в том, что весьма затруднительно упорядочить все характеристики по степени их важности (многие из них равнозначны). Другой вариант второго этапа заключается в применении Паретовского метода многокритериального отбора. Однако в этом случае мы будем лишены возможности контролировать количество выбираемых опционных портфелей. Этот недостаток может оказаться весьма существенным, поскольку выбор нескольких портфелей вместо одного означает необходимость открытия гораздо

Параметры		Характеристики					
Порог критерия	Диапазон страйков	Кол-во комбинаций	Кол-во базовых активов	% коротких комбинаций	Вероятность убытка	Коэффициент асимметричности	VaR
4	0	1516	441	70	40	0,08	837
4	1	1362	411	69	40	0,08	815
4	2	1199	362	68	39	0,08	800
4	3	992	313	65	39	0,08	800
4	4	858	275	62	39	0,08	796
4	5	737	242	60	39	0,08	791
5	6	775	219	54	40	0,10	780
7	7	1028	191	48	41	0,13	761
10	8	1423	179	38	42	0,18	718
14	9	1884	167	39	44	0,19	654
20	10	2278	158	35	46	0,18	578
21	11	2073	141	30	48	0,16	561
21	12	1822	126	27	50	0,14	548
18	13	1403	118	26	49	0,12	553
16	14	1094	106	24	49	0,11	558
11	15	586	78	25	46	0,10	614
7	16	248	52	25	43	0,08	692
4	17	144	36	33	42	0,06	713
3	18	61	28	18	43	0,06	720
3	19	52	23	10	45	0,04	715
3	20	47	19	6	45	0,04	718
2	21	25	12	9	43	0,03	731
2	22	23	11	9	43	0,04	728
2	23	22	9	6	43	0,03	731
1	24	12	8	8	43	0,02	728
1	25	10	7	8	42	0,02	726

**Таблица 1.6.3.** Характеристики дельта-нейтральных портфелей, построенных в спокойный период из двухмесячных опционов. Каждая строка таблицы представляет отдельный портфель, задаваемый уникальной комбинацией двух параметров. Интервал допустимых значений каждой характеристики показан серым цветом. Толстыми линиями показан единственный портфель, удовлетворяющий почти всем требованиям (пяти из шести), предъявляемым к интервалам допустимых значений

большого количества позиций, что негативно скажется на потерях за счет проскальзывания и операционных издержек.

Менее суровый алгоритм может выглядеть так. На первом этапе выбираются все портфели,  $n$  из  $m$  характеристик которых удовлетворяют требованиям, предъявляемым к интервалу их допустимых значений. В наших примерах число характеристик равно 6 ( $m = 6$ ). Если принять  $n = 5$ , то в примере, представленном таблицей 1.6.3, найдется единственный портфель, прошедший первый этап отбора, а в таблице 1.6.2 не окажется ни одного такого портфеля. Зато если принять  $n = 4$ , то в таблице 1.6.2 будет сразу девять портфелей, прошедших первый этап отбора (обозначены толстыми рамками в таблице). Второй этап может быть реализован теми же двумя путями, что были описаны для сурового алгоритма. Например, если считать наиболее важной характеристикой «количество комбинаций» (чем их меньше, тем лучше, но не менее 20), то из девяти альтернатив на втором этапе будет выбран портфель, определяемый параметрами (порог критерия = 15, диапазон страйков = 9). Можно пойти и другим путем. Из множества вариантов, прошедших первый этап отбора, на втором этапе можно выбрать портфель, имеющий наилучшие значения по тем характеристикам, которые не попали в интервал допустимых значений. В таблице 1.6.2 все девять портфелей имеют неудовлетворительные значения по характеристикам «процент коротких комбинаций» и «вероятность убытка». Однако портфель, определяемый параметрами (порог критерия = 7, диапазон страйков = 12), имеет по этим характеристикам лучшие показатели, чем остальные восемь портфелей. Этот портфель и может быть выбран в качестве оптимального.

Как для сурового, так и для более мягкого алгоритма реализация второго этапа может основываться на другом принципе. Вместо априорного ранжирования характеристик по степени их важности, можно принять в качестве основной ту характеристику, значения которой изменяются в более широком диапазоне, чем значения других характеристик. Например, в таблице 1.6.2 все значения характеристик «коэффициент асимметричности» и VaR лежат в очень узком интервале значений. Поэтому все девять портфелей, прошедших первый этап отбора, почти не отличаются друг от друга по этим характеристикам. Следовательно, не имеет никакого смысла выбирать их в качестве основных ориентиров для второго этапа выбора. С другой стороны, значения характеристик «количество комбинаций»

и «количество базовых активов» варьируют в широком диапазоне значений (от 79 до 200 и от 21 до 51 соответственно). Поэтому в данном конкретном случае будет естественным использовать эти характеристики в качестве основных для окончательного выбора оптимального портфеля.

Необходимо подчеркнуть, что какой бы алгоритм выбора оптимального портфеля ни был принят к реализации при разработке автоматизированной торговой стратегии, от него во многом зависит, какой из вариантов дельта-нейтрального портфеля будет в конечном итоге использован для открытия позиций.





## 2.1. Обзор основных понятий

Проблема выбора наилучшего решения возникает во всех сферах человеческой деятельности. Поиск оптимальных решений постоянно производится как на индивидуальном уровне, так и в масштабах различных финансовых, производственных и общегосударственных структур. Несмотря на многочисленный арсенал методов, разработанных для поиска оптимальных решений, единственного подхода, одинаково пригодного для всех случаев, не существует. Это связано и с разнообразием задач, и с ограниченностью средств для их решения (машинного времени, памяти и т. п.). Дать строго определенные, формализованные методы решения задач оптимизации может только синтетический подход, основанный на комбинированном применении достижений различных разделов математики.

Задача оптимизации может заключаться в поиске определенной структуры объекта (структурной оптимизации) или последовательности действий (календарной оптимизации). Однако в контексте построения автоматизированных торговых стратегий наибольший интерес представляет параметрическая оптимизация. В этом случае поиск наилучшего решения осуществляется путем выбора значений для величин, составляющих совокупность числовых параметров.

### 2.1.1. Параметрическая оптимизация

В зависимости от постановки задачи параметры могут быть действительными числами (например, доля капитала, инвестируемого в определенную стратегию), цельми числами (например, количество дней от момента открытия позиции до истечения опционов или количество базовых активов) или величинами нечисловой природы, но сводимыми к числовым (например, если параметр имеет смысл решения использовать или не использовать определенный тип опционной комбинации, он может быть представлен целым числом со значениями 1 и 0 соответственно). Количество параметров может быть ограничено одним (одномерная оптимизация), но в большинстве случаев их больше (многомерная оптимизация).

Постановка задачи оптимизации может быть безусловной или содержать определенные ограничения. В частности, не все возможные комбинации значений параметров являются допустимыми. В силу существующих ограничений некоторые из них могут быть неприемлемы либо нереализуемы. Такие

узлы исключаются из оптимизации. В этом случае говорят об условной оптимизации. Такого рода ограничения могут иметь вид равенств:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = M,$$

где  $x$  принимает значение 0 или 1 в зависимости от того, открывается ли торговая позиция для  $i$ -го базового актива. Смысл ограничения в том, что общее число базовых активов в точности равно  $M$ .

Ограничения могут принимать вид неравенств:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \leq K.$$

Здесь  $c_i$  — это цена соответствующего опциона, а  $x_i$  — количество проданных или купленных опционов. При этом знак может указывать, является ли данная позиция длинной (плюс) или короткой (минус). Смысл ограничения в том, что общая стоимость опционного портфеля не превышает установленной величины  $K$ .

Ограничения также могут накладываться на диапазон значений, которые может принимать тот или иной параметр (в предыдущей главе мы часто пользовались понятием «область допустимых значений»). Такие ограничения часто используются при разработке автоматизированных торговых стратегий. Они могут накладываться исходя из практических соображений, поскольку сокращение множества допустимых значений позволяет уменьшить количество вычислений и время оптимизации. Кроме того, ограничения могут быть вызваны особенностями разрабатываемой стратегии или требованиями системы управления рисками (например, доля коротких комбинаций в составе портфеля может быть ограничена определенной пороговой величиной). И наконец, ограничения на область допустимых значений могут возникать по причине недоступности данных, необходимых для расчета целевой функции, или невозможности такого расчета для определенных значений параметра.

Для того чтобы избежать путаницы в применении некоторых понятий, часто используемых в литературе при описании оптимизационных процедур, ниже приводится краткое описание смысла, который мы вкладываем в некоторые термины.

- ♦ Оптимизационное пространство (иногда называемое сеткой) — совокупность всех возможных комбинаций значений параметров формирует полное оптимизационное пространство.

- ◇ Узел (junction) — наименьшая структурная единица оптимизационного пространства, определяемая уникальной комбинацией значений параметров.
- ◇ Вычисление — все процедуры, необходимые для расчета целевой функции для одного узла оптимизационного пространства.
- ◇ Полный оптимизационный цикл — совокупность всех вычислений, производимых в процессе поиска оптимального решения (от старта процедуры оптимизации до остановки алгоритма).
- ◇ Целевая функция — количественный показатель, выражающий меру полезности определенной комбинации значений параметров с точки зрения разработчика торговой системы (может рассчитываться аналитически или алгоритмически).
- ◇ Глобальный максимум — узел, имеющий наибольшее значение целевой функции. Глобальных максимумов может быть несколько.
- ◇ Локальный максимум — узел, расположенный на одной из вершин оптимизационного пространства, но имеющий меньшее значение целевой функции, чем глобальный максимум. Локальных максимумов может быть несколько.
- ◇ Оптимальное решение — значение параметров и целевой функции узла, на котором остановился алгоритм оптимизации. Оптимальное решение не всегда совпадает с глобальным максимумом. Чем эффективнее методика, тем ближе оптимальное решение к глобальному максимуму.
- ◇ Робастность оптимального решения — степень изменчивости целевой функции в той области оптимизационного пространства, которая окружает узел оптимального решения. Робастным считается такое решение, вокруг которого располагаются узлы, не уступающие ему (или уступающие лишь незначительно) по значению целевой функции. Хотя понятие «робастность» имеет широкое применение в статистике, экономике и даже биологии, применительно к оптимизации оно не имеет строгой математической формализации.
- ◇ Оптимальная область — область оптимизационного пространства, все узлы которой имеют достаточно высокое значение целевой функции (выше определенного порога). Оптимальных областей может быть несколько. Как правило, данные области располагаются вокруг узлов глобального и/или локального максимума. В отдельных случаях оптимальная область представляет собой приподнятое ровное плато без явно выраженных экстремумов.

### 2.1.2. Оптимизационное пространство

Оптимизационное пространство представляет собой совокупность всех возможных комбинаций значений параметров. Оно определяется тремя факторами:

- 1) количеством оптимизируемых параметров (размерность);
- 2) диапазоном допустимых значений для каждого параметра;
- 3) шагом оптимизации.

Большинство задач оптимизации, представляющих практический интерес для построения автоматизированных торговых систем, являются многомерными. Это означает, что целевая функция рассчитывается на основе многих параметров (то есть имеет более одного аргумента). В отдельных случаях количество оптимизируемых параметров может быть очень большим (хотя в этих случаях многократно возрастает риск переоптимизации, о чем речь пойдет в следующих главах). Поскольку нас интересуют только прямые методы оптимизации (когда значения целевой функции рассчитываются алгоритмически), сложность алгоритма напрямую зависит от размерности целевой функции. Соответственно, сложность решения задачи оптимизации определяется количеством аргументов этой функции, то есть количеством параметров.

Диапазон допустимых значений определяется теми ограничениями, которые разработчик торговой системы накладывает на параметры, участвующие в расчете целевой функции. Например, в главе 1 нами исследовались два параметра — порог критерия и диапазон страйков. В качестве диапазона допустимых значений для первого параметра использовался интервал от нуля до бесконечности. Логика выбора именно такого диапазона заключается в следующем. Поскольку в качестве критерия мы использовали математическое ожидание прибыли, то было вполне естественным не рассматривать ту часть диапазона значений параметра, где ожидаемая прибыль отрицательна. Для параметра «порог критерия» диапазон значений был определен от 0 до 50%. Нижний предел обусловлен тем, что данный параметр не может быть отрицательным. Верхний же предел объясняется невозможностью практического использования страйков, отстоящих слишком далеко от текущей цены базового актива (в силу их низкой ликвидности и широких спредов).

Наилучшим методом прямой оптимизации является расчет целевой функции для всех допустимых значений параметра [метод полного перебора]. Однако на практике такой подход оказывается в большинстве случаев нереализуем по причине того, что

количество допустимых значений может быть слишком большим. Если параметр является целочисленным, то количество его значений конечно (в пределах допустимого диапазона, не включающего бесконечности). Тем не менее даже в этом случае полный перебор всех значений может потребовать неоправданно большого количества расчетов и времени. В случае же если параметр является непрерывной величиной, то количество принимаемых им значений бесконечно вне зависимости от диапазона допустимых значений. В такой ситуации необходимо задать некоторый шаг изменения его значения (мы будем называть его «шагом оптимизации») и исследовать параметр, каждый раз изменяя его на величину шага. Чем больше величина шага, тем меньше времени потребует для оптимизации. Однако при использовании слишком широкого шага возрастает риск пропуска глобального максимума (острый пик может оказаться в промежутке между двумя значениями параметра).

- Форма оптимизационного пространства влияет самым непосредственным образом на результаты процедуры оптимизации и на ее эффективность. При одномерной оптимизации (когда имеется всего один параметр) оптимизационное пространство может быть представлено в виде линии с координатами, соответствующими значениям параметра (ось  $X$ ) и целевой функции (ось  $Y$ ). Если эта линия имеет единственный глобальный максимум, то целевая функция (и оптимизационное пространство) является унимодальной. Если, помимо глобального максимума, целевая функция имеет один или несколько локальных максимумов, то она называется полимодальной. Если целевая функция имеет приблизительно одинаковые значения на всем диапазоне значений параметра, то она является безмодальной и вряд ли может быть эффективно использована для оптимизации данного параметра.
- В случае двумерной оптимизации (когда имеются два параметра) оптимизационное пространство может быть легко представлено в виде поверхности. Такую поверхность удобно изображать в виде топографической карты, оси которой соответствуют параметрам, а высотные отметки — целевой функции. Унимодальная поверхность будет иметь одну вершину, а полимодальная — множество таких возвышений. Более или менее плоская поверхность является безмодальной и малопригодной для оптимизации.
- В трехмерном случае моды представляют собой области высоких значений всех трех параметров. Их можно изобразить

в трехмерном пространстве, как участки с повышенной плотностью. (Хотя такое представление является достаточно условным и не совсем точным.) В случаях с более высокой размерностью невозможно представить оптимизационное пространство топологически, но это и необязательно, поскольку расчетные алгоритмы не нуждаются в нашем воображении.

Большинство методов оптимизации лучше всего приспособлены к поиску глобального максимума унимодального пространства. При наличии в пространстве параметров локальных максимумов, многие методы достигают решения, которое может не оказаться наилучшим.

Оптимизационное пространство обладает рядом свойств, оказывающих существенное влияние на поиск оптимальных решений. Среди них следует отметить два основных. Первое — это гладкость оптимизационного пространства. В двумерном случае гладкость обозначает отсутствие большого количества небольших локальных максимумов, делающих поверхность «холмистой». В предельных случаях оптимизационное пространство может быть либо абсолютно гладким (с единственным экстремумом), либо полностью изломанным с большим количеством острых пиков и впадин (в двумерном случае). Очевидно, гладкое пространство является предпочтительным с точки зрения эффективности оптимизации. Холмистое пространство повышает риск остановки процедуры оптимизации на локальном экстремуме. Далее мы покажем (раздел 2.7.2), что чем более гладким является пространство, тем выше эффективность применения различных методов оптимизации и тем больше вероятность нахождения наилучшего решения.

Второе важное свойство — это устойчивость оптимизационного пространства. Под устойчивостью мы понимаем нечувствительность рельефа пространства (или, другими словами, неизменность формы пространства) к небольшим изменениям параметров, которые не участвуют в оптимизации, а фиксируются исходя из определенных соображений разработчика торговой стратегии. Сюда же можно отнести и устойчивость к небольшим изменениям в структуре стратегии. Другой, не менее важный аспект устойчивости, — это степень чувствительности оптимизационного пространства к протяженности исторических ценовых рядов, используемых для расчета значений целевой функции. Слишком короткие ценовые ряды приводят к тому, что торговая система настраивается только на недавние рыночные тренды. С другой стороны, длинные ценовые ряды

настраивают систему на возможно устаревшие данные. Кроме того, желательно, чтобы исторические данные, используемые в оптимизации, отражали различные состояния рынка (то есть спокойные и кризисные периоды). Все эти соображения приводят к тому, что при настройке торговой системы приходится экспериментировать с историческими рядами разной протяженности. В таких ситуациях желательно, чтобы форма оптимизационной поверхности не очень изменялась (то есть была устойчивой) при относительно небольших изменениях длины исторических рядов.

### 2.1.3. Целевая функция

Все задачи оптимизации сводятся к отысканию наибольшего или наименьшего значения некоторой функции, которую принято называть целевой функцией. Она представляет собой отображение вектора значений параметров (которые являются аргументами функции) на число, являющееся значением функции в определенной точке оптимизационного пространства. Целевая функция может быть задана формулой или расчетным алгоритмом (который по заданному набору параметров вычисляет значение оптимизируемой величины) или браться из эксперимента. Методы поиска оптимальных решений зависят от свойств целевой функции и той информации о ней, которая является доступной в процессе решения задачи.

В соответствии со сложившимися научными традициями, задачи оптимизации принято решать путем определения наименьшего значения целевой функции. Несмотря на то что с практической точки зрения нахождение максимального и минимального значений — это противоположные задачи, для их решения могут применяться одни и те же методы. Для этого следует переформулировать задачу таким образом, чтобы минимум исходной задачи соответствовал максимуму переформулированной (например, взяв целевую функцию с противоположным знаком или взяв обратную к ней величину в качестве новой целевой функции). Тогда алгоритм, отыскивающий максимум новой задачи, тем самым найдет минимум первоначальной (и наоборот). Несмотря на сложившиеся традиции, мы будем формулировать оптимизационные задачи как поиск максимумов. Это объясняется тем, что одной из основных целевых функций при оптимизации торговых стратегий является прибыль и различные производные от нее. Поэтому с психологической точки зрения комфортнее максимизировать прибыль, а не минимизировать ее.

Исторически теория оптимизации работала почти исключительно с целевой функцией, задаваемой аналитической формулой. В наиболее простых с математической точки зрения случаях формула представляет собой дифференцируемую функцию. Для исследования ее свойств (участки возрастания и убывания, точки экстремума) может использоваться производная, что позволяет строить эффективные алгоритмы поиска оптимального решения. Приравнивание к нулю производных по всем параметрам и решение полученной системы уравнений позволяет получить изящное решение в общем виде.

Современные потребности, поддерживаемые впечатляющими достижениями научно-технического прогресса, привели к существенному расширению круга решаемых прикладных задач. Во многих из них целевая функция не задана аналитически и не может исследоваться с помощью производных. В этих условиях значения функции могут быть получены только путем алгоритмических расчетов.

Методы, использующие алгоритмические расчеты и не требующие вычисления производных целевой функции, называются прямыми методами. Несомненным достоинством прямых методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости. Более того, она может быть не задана в аналитическом виде. Единственное на чем основаны алгоритмы прямых методов, это возможность определения значений целевой функции. Практически все задачи, требующие оптимизации торговых систем, решаются на основе применения алгоритмических моделей. Поэтому в настоящей главе мы будем заниматься только прямыми методами оптимизации.

Решение задачи оптимизации существенно осложняется в тех случаях, когда необходимо использовать более одной целевой функции. При оптимизации торговых стратегий эта проблема возникает почти всегда. Основная целевая функция для таких стратегий — прибыль. Однако невозможно ограничиться только этим показателем. Необходимо принимать во внимание также изменчивость прибыли, максимальные просадки, долю прибыльных сделок, показатели риска и многие другие важные факторы, каждый из которых является отдельной целевой функцией.

Особенность использования нескольких целевых функций заключается в том, что максимум одной функции редко совпадает максимумом другой. Напротив, разные целевые функции, как правило, оказываются противоречащими друг



другу — оптимальные значения одной из них могут оказаться сколь угодно плохими с точки зрения другой. (Подобная ситуация уже рассматривалась нами в разделе 1.6.) Поиск путей эффективного использования нескольких целевых функций составляет предмет теории многокритериальной оптимизации. Можно выделить три основных подхода к многокритериальной оптимизации:

1. Выделение одного из критериев как основного с превращением прочих в ограничения (фильтры). После получения оптимального решения по основному критерию вычисляют значения прочих критериев в точке оптимума. Если решение, найденное по основному критерию удовлетворяет ограничениям, наложенным на второстепенные критерии, то их наличие не влияет на результат. Если же величины этих критериев оказываются неприемлемо низкими или высокими, то данное решение отбрасывается.
2. Построение комбинированного критерия (свертки). Он может быть образован как простое или взвешенное среднее арифметическое (веса могут отражать важность критериев или просто учитывать различный разброс их числовых значений) или среднее геометрическое [также простое или взвешенное]. Кроме этого, существует еще несколько вариантов свертки.
3. Оптимизация по методу Парето. В большинстве случаев этот способ приводит к получению нескольких оптимальных решений, даже если по каждому критерию существует единственный максимум. Результатом оптимизации становится совокупность решений, представляющая собой множество Парето. В него входят такие решения, которые доминируют над всеми прочими вариантами, не вошедшими в оптимальное множество. При этом ни один из вариантов, отнесенных к паретовскому множеству, не доминирует над другими вошедшими в него вариантами.

Все методы многокритериальной оптимизации приводят к приращению в систему определенного субъективного элемента. В первом случае он состоит в выборе одного из критериев в качестве главного и в задании ограничений для второстепенных. В случае свертки субъективным является выбор способа комбинирования критериев и определение весов (особенно если они вводятся для учета важности критериев). Необходимость выбора единственного решения из множества равнозначных альтернатив (метод Парето) также обременена влиянием субъективных факторов. В разделе 2.4 мы рассмотрим основные

особенности многокритериальной оптимизации применительно к разработке автоматизированных торговых систем.

## 2.2. Оптимизационное пространство дельта-нейтральной стратегии

Форма и свойства оптимизационного пространства зависят от многих факторов, большинство из которых было названо в предыдущем разделе. Бесспорно, форма оптимизационного пространства специфична для разных опционных стратегий. Каждая стратегия имеет свой уникальный набор параметров, области их допустимых значений и шаг оптимизации. Поэтому совершенно естественно, что разные стратегии будут иметь весьма различные оптимизационные пространства. Однако даже в тех случаях, когда параметры, области допустимых значений и шаг являются одинаковыми для двух разных стратегий (например, такая ситуация вполне реальна для дельта-нейтральной и частично-направленной стратегий), их оптимизационные пространства могут быть (и в большинстве случаев бывают) очень разными.

В этой главе мы ставим себе целью рассмотреть форму и свойства некоего типичного пространства, взяв в качестве примера базовую дельта-нейтральную стратегию. Два основных параметра этой стратегии (которые широко обсуждались в главе 1) зафиксируем на следующих значениях: порог критерия  $> 1\%$ , диапазон страйков  $10\%$ . В предыдущей главе мы уже частично касались темы оптимизации, когда обсуждали эти параметры. Однако в разделе 1.6 мы находили оптимальные значения, полагаясь по большей части на научный подход, а не используя технические приемы оптимизации, которым посвящена эта глава.

Далее мы будем рассматривать оптимизационное пространство, соответствующее двум параметрам базовой дельта-нейтральной стратегии: «количество дней до экспирации опционов» и «горизонт истории для расчета HV». Смысл первого из двух параметров уже частично обсуждался нами в главе 1. Значение этого параметра оказывает самое прямое воздействие на структуру формируемого портфеля. Второй параметр относится к длине исторического периода, используемого для расчета исторической волатильности. В свою очередь, историческая волатильность используется для расчета значений критерия «математическое ожидание прибыли на основе

логнормального распределения», на основании которого генерируются сигналы на открытие торговых позиций. Несмотря на то что влияние данного параметра не прямое, он также является одним из самых важных в данной стратегии, поскольку от его значений в большой степени зависит, какие опционные комбинации войдут в состав портфеля.

### **2.2.1. Размерность оптимизации**

Одним из основных факторов, определяющих форму оптимизационного пространства, является набор параметров. При определении этого набора, первый и один из главных вопросов, на которые должен ответить разработчик, — это количество параметров, требующих оптимизации. В принципе, необходимо придерживаться правила минимизации числа параметров. Для этого есть две основные причины. Во-первых, чем больше параметров участвует в оптимизации, тем больше степеней свободы имеет оптимизируемая система и тем больше риск оверфитинга. Во-вторых, большая размерность оптимизации требует чрезмерного количества вычислений, что может быть технически нереализуемо. С другой стороны, чрезмерное сокращение количества оптимизируемых параметров может не позволить найти удовлетворительное решение, в результате чего потенциально прибыльная торговая стратегия может быть отвергнута как бесперспективная. По этим соображениям при построении автоматизированных торговых стратегий обычно используют от двух до четырех параметров.

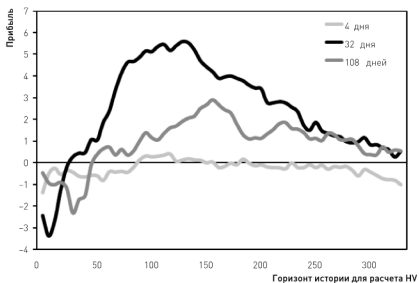
#### **Одномерная оптимизация**

Хотя задача одномерной оптимизации наиболее проста (и редко используется на практике), ее можно рассматривать как частный случай более сложной многомерной оптимизации. С ее помощью легче понять постановку задачи, методы решения и трудности, возникающие при исследовании сложных оптимизационных пространств. Алгоритмы решения многомерных задач часто сводятся к последовательному многократному решению одномерных задач и не могут быть поняты без умения их решать.

На рис. 2.2.1 показаны три примера одномерного оптимизационного пространства. Каждая линия на графике демонстрирует оптимизацию параметра «период истории для расчета HV» базовой стратегии для трех вариантов фиксированного значения второго параметра «число дней до экспирации опционов». Область допустимых значений для оптимизируемого параметра

составляет диапазон от пяти до 300 дней, шаг оптимизации — пять дней. Полное оптимизационное пространство в этом случае состоит из 60 узлов. Данная оптимизация проводилась на исторических данных за 10-летний период. В качестве функции полезности используется показатель прибыли (среднее значение за весь период оптимизации). Ни одно из трех оптимизационных пространств, представленных на рис. 2.2.1, не является гладким. Это неудивительно, поскольку данный рисунок построен на реальных рыночных данных, а абсолютно гладкими могут быть только пространства, построенные с помощью аналитически заданных формул. Тем не менее неизбежный статистический «шум» не мешает рассмотреть основные паттерны, характерные для каждой из линий и классифицировать эти оптимизационные пространства в соответствии с их модальностью.

Каждая линия на рис. 2.2.1 иллюстрирует одну из трех основных форм оптимизационного пространства. Когда параметр «число дней до экспирации» был зафиксирован на значении «32 дня»,



**Рис. 2.2.1.** Три вида одномерного оптимизационного пространства. Оптимизируемый параметр — «горизонт истории для расчета HV». Каждая линия соответствует одному из трех значений зафиксированного (неоптимизируемого) параметра «количество дней до экспирации опциона»

оптимизационное пространство оказалось унимодальным. В этом случае целевая функция имеет единственный глобальный максимум, соответствующий значению «120 дней», оптимизируемого параметра «период истории для расчета HV». Локальные максимумы отсутствуют. Необходимо оговориться, что утверждение об отсутствии локальных максимумов и унимодальности данного оптимизационного пространства является в определенном смысле субъективным мнением. Поскольку данная линия не является гладкой, то в принципе можно утверждать, что локальные максимумы имеются, например, в точках «105 дней» (слева от глобального максимума) и «230 дней». Тем не менее, поскольку в масштабе всего пространства данные пики очень невелики, мы склонны относить их категории «статистического шума». При необходимости процесс определения модальности может быть формализован, что позволит избежать субъективных суждений.

Примером полимодального оптимизационного пространства может служить линия, полученная в том случае, когда параметр «число дней до экспирации» был зафиксирован на значении «108 дней». Глобальный максимум этой оптимизации приходится на значение «145 дней» параметра «период истории для расчета HV». В отличие от предыдущего примера целевая функция этого оптимизационного пространства имеет явно выраженный локальный максимум, приходящийся на «205 дней» параметра «период истории для расчета HV».

И, наконец, третья линия на рис. 2.2.1 является примером безмодального оптимизационного пространства. В том случае, когда сигналы на открытие торговых позиций генерировались только для краткосрочных опционов (параметр «число дней до экспирации» зафиксирован на значении «четыре дня»), целевая функция оказалась приблизительно нулевой почти для всего диапазона параметра «горизонт истории».

Поскольку в примерах, приведенных на рис. 2.2.1, целевая функция была исследована на всем диапазоне допустимых значений параметра (так называемый метод полного перебора), то выбор оптимального решения на первый взгляд кажется очевидным. Для унимодальной функции — это 120 дней, для полимодальной — 145 дней. Однако оптимальное решение не обязательно должно совпадать с глобальным или локальным экстремумом. Существует дополнительный, не менее важный критерий выбора оптимального решения — его робастность. Принимая во внимание понятие робастности, выбор 120 дней в качестве

оптимального решения может оказаться не самым лучшим. Увеличение параметра (до 125, 130 и т. д.) ведет к достаточно резкому падению целевой функции. В то же время если в качестве оптимального решения выбрать 195 дней, то все соседние значения параметра (как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения) имеют достаточно высокие значения целевой функции. В данном примере глобальный максимум унимодальной функции полезности является более робастным оптимальным решением (он находится на более широком возвышении), чем глобальный максимум полимодальной функции (который расположен на достаточно узком пике).

### **Двумерная оптимизация**

В дальнейшем мы будем рассматривать примеры, относящиеся к двумерной оптимизации. Будем использовать те же два параметра, что и в предыдущем примере: период истории для расчета HV (параметр, который оптимизировали в предыдущем примере) и количество дней до экспирации опционов (значения этого параметра были зафиксированы). Для первого параметра область допустимых значений находится в диапазоне от пяти до 300 дней, шаг оптимизации — пять дней. Для количества дней до экспирации диапазон значений составляет от двух до 120 дней, шаг оптимизации — два дня. Таким образом, полное оптимизационное пространство состоит из 3600 узлов (60 × 60).

На рис. 2.2.2 показано двумерное оптимизационное пространство целевой функции «средняя прибыль». Одномерные пространства, обсуждавшиеся ранее, представляют собой три частных случая этого двумерного пространства. Поскольку рис. 2.2.2 представляет собой топографическую карту, то вертикальные разрезы, проведенные по значениям 4, 32 и 108 параметра «число дней до экспирации», совпадают с профилями одномерных пространств, показанных на рис. 2.2.1. Несомненно, двумерное оптимизационное пространство позволяет получить лучшее представление о целевой функции и обо всей торговой стратегии в целом.

Глобальный максимум оптимизационного пространства, представленного на рис. 2.2.2, имеет координаты 30 по горизонтальной оси и 105 по вертикальной. Это означает, что средняя прибыль (то есть целевая функция) достигает своего максимума в том случае, когда позиции открываются, используя опционы, до истечения которых остается 30 дней, а историческая волатильность, используемая для расчета критерия, оценивается

на историческом периоде длиной 105 дней. Данный глобальный максимум расположен на вершине небольшого «хребта», протянувшегося вдоль 30-й вертикали (параметр «число дней до экспирации») в диапазоне от 80 до 125 (параметр «горизонт истории для расчета IV»).

Данный хребет можно рассматривать, как оптимальную область, поскольку все узлы, расположенные в пределах этой зоны, имеют высокое значение целевой функции (> 6%). Сама оптимальная область также окружена достаточно широкой областью, состоящей из узлов с относительно высокими значениями целевой функции. Поэтому найденное оптимальное решение можно

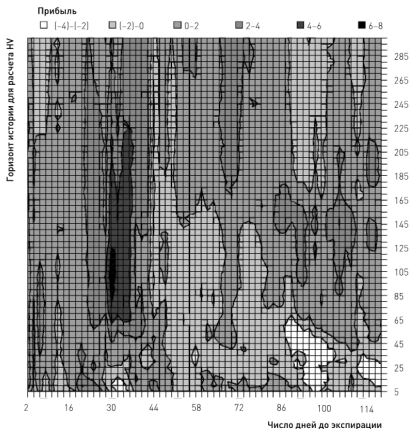


Рис. 2.2.2. Двумерное оптимизационное пространство, построенное для базовой дельта-нейтральной стратегии. Целевая функция — средняя прибыль

в принципе считать робастным. Однако следует оговориться, что робастность оптимального решения неодинакова по двум параметрам. Изменения значений параметра «период истории для расчета HV» в пределах оптимальной зоны и вокруг нее приводят к меньшим изменениям целевой функции, чем изменения параметра «число дней до экспирации» (при отступлении от оптимального значения этого параметра [30 дней] в большую или меньшую сторону происходит резкое снижение целевой функции). Следовательно, робастность первому параметру выше робастности по второму.

Рассматриваемое оптимизационное пространство можно условно считать унимодальным. Это утверждение основывается на том, что оптимальная область возвышается достаточно высоко над остальной поверхностью (в случае двумерной оптимизации пространство можно называть поверхностью). Вместе с тем, поскольку данная поверхность не является гладкой, утверждение об унимодальности можно вполне оспорить. Помимо оптимальной области, данная поверхность содержит еще множество участков, в которых значение целевой функции не просто положительно, а колеблется в пределах довольно неплохого диапазона (2–4%). По этой причине данную поверхность можно в принципе считать полимодальной. Хотя вопрос классификации не является для нас первостепенным, сам факт наличия локальных максимумов заставляет задуматься о том, что глобальный максимум может оказаться не самым лучшим решением. Если какой-нибудь локальный максимум имеет значение целевой функции, не слишком уступающее глобальному максимуму, но при этом его робастность существенно выше робастности глобального максимума, то вполне может оказаться, что наилучшим решением будет выбрать такой локальный максимум в качестве оптимального решения. Сделать объективный выбор можно, только применив какую-нибудь количественную методику, чему будет посвящен раздел 2.5.

Для того чтобы получить полное представление о форме и свойствах оптимизационного пространства, показанного на рис. 2.2.2, необходимо было вычислить значения целевой функции во всех 3600 узлах. Поскольку данная оптимизация рассчитывалась на 10-летней базе данных (как и все прочие оптимизации, рассматриваемые в этой главе), расчет одного узла занял порядка одной минуты. Соответственно, расчеты для всего оптимизационного пространства заняли порядка 60 часов. Для нашего исследования это вполне приемлемо, но для оперативной



практической работы такие большие временные затраты не всегда допустимы. Особенно если учесть, что в реальности может быть больше двух параметров, и каждый параметр может иметь больше 60 значений в своем диапазоне. Кроме того, 3600 — это число узлов, которые необходимо вычислить только для одной целевой функции, а их обычно бывает больше (около трех-четырех). Поэтому на практике в большинстве случаев невозможно вычислить все оптимизационное пространство. Вместо этого приходится применять методы целенаправленного поиска оптимального решения (этому вопросу посвящен раздел 2.7).

### 2.2.2. Область допустимых значений параметров

В этом разделе мы рассмотрим, каким образом диапазон допустимых значений параметра влияет на форму оптимизационного пространства и на поиск оптимального решения. Начнем с того, что для каждого из двух параметров сократим вдвое диапазоны значений (относительно диапазонов, использованных в предыдущем разделе). Для параметра «период истории для расчета HV» верхняя граница нового диапазона составит 150 дней, для параметра «количество дней до экспирации опционов» — 60 дней. Эти ограничения приведут к сжатию объема оптимизационного пространства в четыре раза. (В случае трехмерной оптимизации сокращение диапазона значений в два раза привело бы к восьмикратному сжатию объема.) В этом состоит положительный эффект такого сокращения диапазонов, поскольку теперь для построения полного пространства потребуется произвести 900 вместо 3600 вычислений.

На левом графике рис. 2.2.3 показано оптимизационное пространство, построенное для новых диапазонов допустимых значений. Сравнение этого уменьшенного пространства с более обширным вариантом (рис. 2.2.2) убеждает в том, что область глобального максимума не была потеряна в результате введения более жестких ограничений на диапазон допустимых значений параметров. Теперь эта область находится почти в центре пространства. Кроме того, за рамками нового оптимизационного пространства осталась большая часть области низких значений целевой функции. Это означает, что доля области оптимальных значений относительно общего объема оптимизационного пространства существенно возросла. Следовательно, вероятность нахождения глобального максимума в процессе поиска оптимального решения (используя методы, не требующие полного перебора) также

повысилась. Однако, выбирая область допустимых значений, следует исходить из того, что мы не знаем, как выглядит полное оптимизационное пространство. Поэтому, сокращая диапазон допустимых значений, мы можем исключить из рассмотрения хорошую область, содержащую наилучшее решение.

Кроме того, диапазон допустимых значений не должен обязательно начинаться с наименьших возможных значений параметра, как это было сделано в предыдущих примерах (рис. 2.2.2 и 2.2.3, левый график). Допустим, что разработчик создает стратегию, работающую с более долгосрочными опционами. В этом случае он может задать нижнюю границу на диапазон допустимых значений параметра «число дней до экспирации». Допустим — это будет 60 дней (пусть верхняя граница остается без изменений). Изменение в диапазоне этого параметра потребует внесения изменений и в диапазон второго параметра, поскольку при торговле долгосрочными опционами неразумно оценивать их с помощью критерия, рассчитываемого на основании волатильности, оцененной на более коротком периоде, чем период обращения самих опционов. Следовательно, диапазон значений параметра «период истории для расчета HV» должен быть также ограничен снизу (для того чтобы количество значений каждого параметра в пределах допустимого диапазона было одинаковым, верхнюю границу ограничим значением 210).

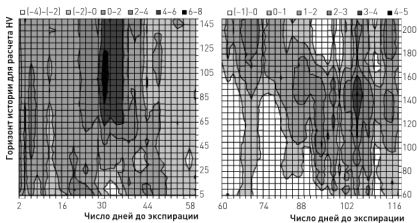


Рис. 2.2.3. Оптимизационные пространства базовой дельта-нейтральной стратегии, построенные для разных диапазонов допустимых значений параметров. Целевая функция — средняя прибыль

Рассмотрим оптимизационную поверхность, полученную для новых диапазонов допустимых значений параметров (правый график рис. 2.2.3). Совершенно очевидно, что в этом случае результаты оптимизации будут другими. Глобальный максимум теперь имеет другие координаты — 106 по горизонтальной оси и 145 по вертикальной. В том случае, когда рассматривалось более широкое пространство, этот узел являлся локальным максимумом. Теперь же, когда более высокий экстремум остался за рамками рассмотрения, локальный максимум превратился в глобальный. Значение целевой функции в этом узле составляет 4,1% (ниже глобального максимума более широкого пространства, 7,1%).

Таким образом, можно сделать вывод, что диапазон значений параметров влияет на форму оптимизационного пространства и в значительной степени определяет выбор окончательного оптимального решения. В целом, чем больше область допустимых значений параметров, тем больше шанс, что максимум целевой функции попадет в исследуемое оптимизационное пространство. Однако при этом уменьшается шанс найти этот максимум в процессе оптимизации, поскольку, во-первых, возникает необходимость проверять большее количество узлов и, во-вторых, из-за сложности поверхности возрастает риск «застрять» на локальных максимумах.

### 2.2.3. Шаг оптимизации

Шаг оптимизации не оказывает определяющего влияния на общую форму оптимизационного пространства, однако он влияет самым прямым образом на глубину его проработки. Чем шире шаг, тем больше деталей рельефа оптимизационного пространства может быть упущено в процессе оптимизации. Например, из-за слишком широкого шага оптимизации можно вовсе не обнаружить узкий пик функции полезности. Следовательно, при увеличении шага объем информации о целевой функции уменьшается.

Для рассматривавшейся ранее оптимизационной поверхности (рис. 2.2.2) использовался шаг два дня (для параметра «число дней до экспирации») и пять дней (для параметра «период истории для расчета HV»). Теперь мы увеличим эти значения — до четырех и 10 дней соответственно — и посмотрим какой эффект это окажет на информативность пространства. Левый график рис. 2.2.4 демонстрирует поверхность, полученную в результате увеличения шага. Сравнивая эту поверхность

с рис. 2.2.2, мы видим, что, несмотря на уменьшение деталей, область глобального максимума сохранилась. Ранее узел глобального максимума имел координаты 30 по горизонтальной оси и 105 по вертикальной, теперь глобальный максимум имеет координаты 30 и 100. Хотя узел, имевший самое высокое значение целевой функции (7,1%) исчез, его место в качестве глобального максимума занял соседний узел, целевая функция которого имеет весьма близкое значение (7%).

Продолжим процедуру укрупнения шага, увеличив его значения до шести дней для параметра «число дней до экспирации» и 15 дней для параметра «период истории для расчета HV». Количество деталей рельефа уменьшилось еще больше (правый график рис. 2.2.4). Кроме того, полностью исчезла прежняя оптимальная область, располагавшаяся ранее вдоль 30-й вертикали и содержавшая узел глобального максимума. Новый глобальный максимум теперь имеет координаты 32 и 125, а значение новой целевой функция деградирует до 5,5%. Отсюда следует вывод, что по мере укрупнения шага оптимизации происходит ухудшение находимых оптимальных решений.

Вместе с тем увеличение шага оптимизации имеет и свои плюсы. Несмотря на сдвиг в координатах глобального максимума и ухудшение находимых решений, новая оптимальная область по-прежнему остается приблизительно в том же районе

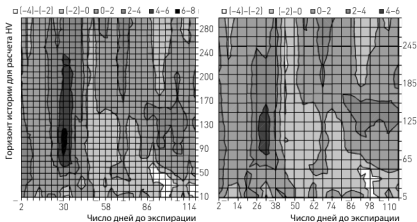


Рис. 2.2.4. Оптимизационные пространства базовой дельта-нейтральной стратегии, построенные для разных шагов оптимизации. Целевая функция — средняя прибыль

оптимизационного пространства, что и при более детальной проработке. При этом само пространство получается более гладким. Преимущество сглаживания заключается в том, что большинство незначительных локальных экстремумов исчезает из оптимизационного пространства. В результате уменьшается вероятность того, что процесс оптимизации (использующий более экономные способы поиска оптимального решения, чем метод полного перебора) остановится на локальном максимуме.

*Следовательно, увеличение шага оптимизации, с одной стороны, уменьшает шанс того, что максимум целевой функции, попадет в исследуемое оптимизационное пространство, но, с другой стороны, снижает количество вычислений и повышает эффективность поиска за счет устранения незначительных локальных экстремумов.*

### 2.3. Целевые функции и их применение для базовой дельта-нейтральной стратегии

С помощью целевой функции мы оцениваем и сравниваем между собой меру полезности различных комбинаций параметров. Поэтому выбор целевой функции является одним из ключевых элементов, во многом определяющим эффективность оптимизации. Каждая функция создает оптимизационное пространство, имеющее свои характерные особенности. Оптимизационные пространства разных функций полезности могут быть достаточно близкими по своей форме, а могут существенно отличаться друг от друга. В этой главе мы рассмотрим различные функции полезности, создающие как похожие, так и весьма далекие по форме пространства.

В большинстве случаев невозможно ограничиться одной функцией полезности. Обычно приходится использовать не менее трех-четырёх функций одновременно. Иногда их количество бывает гораздо большим (до 10 и даже более). Использование большого количества целевых функций особенно актуально для оптимизации опционных торговых стратегий, поскольку в этом случае приходится оценивать не только стандартные параметры доходности и риска, но также особые характеристики, специфичные для опционов. В главе 1 мы рассматривали множество таких функций, когда говорили о характеристиках опционных портфелей. Увеличение количества целевых функций приводит к необходимости разработки специальных методик

многокритериального анализа. Значительная часть материала текущей главы будет посвящена этому непростому вопросу.

### 2.3.1. Оптимизационные пространства различных целевых функций

При оптимизации большинства автоматизированных торговых систем основной целевой функцией является прибыль (этот показатель может иметь разные формы выражения — в процентах или абсолютных цифрах, в годовом эквиваленте или с привязкой к операционному циклу системы). Все примеры, рассмотренные нами ранее в этой главе, основывались именно на этой целевой функции. Левый верхний график рис. 2.3.1 воспроизводит оптимизационное пространство, построенное на основании этой базовой функции. Теперь мы рассмотрим, насколько выбор других целевых функций влияет на форму оптимизационной поверхности тех же параметров.

При использовании в качестве целевой функции коэффициента Шарпа (правый верхний график рис. 2.3.1) форма поверхности выглядит почти так же, как и для функции «прибыль» (за исключением мелких, незначительных расхождений). Наибольшая по площади оптимальная область располагается приблизительно в одном и том же месте и имеет похожую форму. Глобальный максимум имеет почти те же координаты, что и для целевой функции «прибыль». Единственное отличие состоит в том, что координата по вертикальной оси составляет 100 дней для функции «коэффициент Шарпа» вместо 105 дней для прибыли (это незначительное отличие вряд ли имеет какое-либо принципиальное значение). Следует также отметить, что данная оптимизационная поверхность полимодальна, поскольку имеет еще несколько оптимальных областей, содержащих локальные максимумы. Однако в силу того, что эти области очень невелики по площади, с точки зрения робастности они явно уступают области глобального максимума.

Следующая функция полезности, максимальная просадка — представляет собой общепризнанный показатель риска торговых стратегий. Оптимизационное пространство, соответствующее этой функции, показано на правом нижнем графике рис. 2.3.1. В отличие от других показателей оптимизация максимальной просадки требует нахождения минимума, а не максимума функции полезности. Поэтому оптимальными являются те области поверхности, которые имеют низкие высотные отметки. В отличие от коэффициента Шарпа оптимизационное пространство

данного показателя полностью отличается от пространства, соответствующего целевой функции «прибыль». Оптимальные области располагаются в двух направлениях: (1) в первой половине диапазона значений параметра «число дней до экспирации» при условии, что параметр «горизонт истории для расчета IV» имеет низкие значения (вдоль горизонтальной оси); (2) в широком диапазоне значений параметра «горизонт истории для расчета IV» при условии, что параметр «число дней до экспирации» имеет низкие значения (вдоль вертикальной оси). В этих же местах были отмечены оптимальные

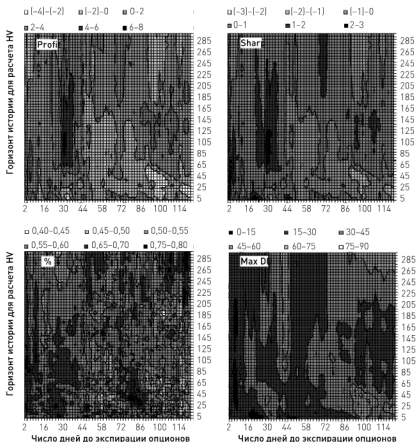


Рис. 2.3.1. Оптимизационные пространства базовой дельта-нейтральной стратегии, построенные для четырех разных целевых функций: прибыль (Profit), коэффициент Шарпа (Sharp), процент прибыльных сделок (%), максимальная просадка (MaxDD)

зоны (хоть и значительно меньших размеров) для функции «коэффициента Шарпа». Это объясняется тем, что коэффициент Шарпа «содержит в себе» информацию о риске (стандартное отклонение в знаменателе формулы). Поскольку максимальная просадка является экстремальным «выбросом» доходностей, то она влияет самым непосредственным образом на стандартное отклонение и опосредовано на коэффициент Шарпа.

Показатель «процент прибыльных сделок» также является общепризнанной мерой прибыльности системной торговли. При использовании этого показателя в качестве целевой функции (левый нижний график рис. 2.3.1) получается оптимизационная поверхность принципиально отличная по форме от поверхностей других функций. Во-первых, вместо единственной оптимальной области (полученной для функции «прибыль») или нескольких таких областей (полученных для функций «коэффициент Шарпа» и «максимальная просадка») поверхность функции «процент прибыльных сделок» имеет множество оптимальных областей (она в большой степени полимодальна). Во-вторых, все оптимальные области данной функции представляют собой небольшие островки, в то время как большинство оптимальных областей других целевых функций имеют относительно большие площади поверхности. И, в-третьих, что самое главное, оптимальные области функций «прибыль» и «коэффициент Шарпа» не совпадают с оптимальными областями функции «процент прибыльных сделок».

Изучив оптимизационные пространства четырех функций полезности, мы можем сделать несколько важных выводов. Каждая из функций несет определенный объем информации, часть которой дублируется информацией, содержащейся в других функциях, а часть является уникальной, неповторяющейся информацией. При этом степень совпадения информации может быть разной для разных функций. Например, коэффициент Шарпа не добавляет почти никакой новой информации к информации, содержащейся в функции «прибыль». Поэтому вряд ли будет целесообразным использовать обе этих функции одновременно (объем дополнительных вычислений не оправдывает ту малую долю дополнительной информации, которая может быть получена). В то же время другие функции полезности содержат значительный объем новой недублирующей информации, которая не может быть получена с помощью функции «прибыль». Поэтому включение таких функций в систему многокритериальной оптимизации может быть вполне оправданным.



В этом разделе мы провели визуальный сравнительный анализ различных функций полезности и отметили разную степень дублирования содержащейся в них информации. Для того чтобы придать этим умозрительным заключениям количественное выражение, которое может быть использовано для окончательного выбора целевых функций, необходимо изучить их корреляции. Этому посвящен следующий раздел.

### 2.3.2. Взаимозависимость целевых функций

Для того чтобы выразить количественно степень дублирования информации, содержащейся в различных функциях полезности, следует сравнить попарно взаимозависимости этих функций. Чем меньше корреляция между функциями, тем меньше пересечение информации и тем это лучше с точки зрения многокритериальной оптимизации. Коэффициент корреляции выражает степень взаимозависимости функций, а коэффициент детерминации (квадрат коэффициента корреляции) выражает долю изменчивости одной функции полезности, которая объясняется изменчивостью второй функции. Следовательно, показатель, равный разности единицы и коэффициента детерминации, позволяет оценить долю дополнительной, недублирующей информации, которая попадает в систему оптимизации в результате введения в нее дополнительной функции полезности.

Корреляционный анализ показал, что все целевые функции взаимозависимы в большей или меньшей степени (рис. 2.3.2). Как и следовало ожидать, наибольшая корреляция существует между прибылью и коэффициентом Шарпа (внешняя схожесть оптимизационных пространств этих двух функций отмечалась нами в предыдущем разделе). В этом случае коэффициент корреляции очень высок ( $r = 0,95$ ). Следовательно, доля недублирующейся информации, составляет всего 10% ( $1 - 0,95^2 = 0,10$ ). Поэтому не имеет смысла использовать одновременно и прибыль, и коэффициент Шарпа в рамках одной оптимизационной схемы. Степень взаимозависимости между прибылью и процентом прибыльных сделок, а также между прибылью и максимальной просадкой гораздо ниже, чем между прибылью и коэффициентом Шарпа (обратная зависимость в случае с максимальной просадкой, по сути, является прямой, поскольку низкие значения просадки являются предпочтительными). В первом случае коэффициент корреляции равен 0,37 (левый средний график рис. 2.3.2), а во втором — 0,35 (правый верхний график рис. 2.3.2). Это означает, что доля недублирующейся информации для этих пар

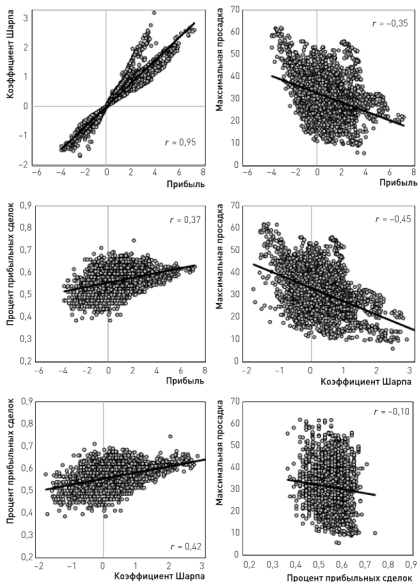


Рис. 2.3.2. Шесть взаимозависимостей четырех различных функций полезности

целевых функций составляет 86 и 88% соответственно. Эти значения достаточно высоки для того, чтобы серьезно рассматривать вопрос о целесообразности их включения в систему многокритериальной оптимизации. Однако, принимая такое решение,

необходимо определить, имеет ли смысл использовать обе эти функции или достаточно одной из них.

Для того чтобы принять такое решение, необходимо изучить взаимозависимость между этими двумя функциями полезности. Как следует из правого нижнего графика рис. 2.3.2 и низкого коэффициента корреляции  $[0,10]$ , значения процента прибыльных сделок и максимальной просадки практически не зависят друг от друга. Информация, содержащаяся в этих двух функциях, почти не повторяется (доля не дублируемой информации составляет 99%). Следовательно, добавление обеих целевых функций в систему многокритериального анализа вполне оправдано.

Таким образом, из четырех рассмотренных нами целевых функций имеет смысл использовать для многокритериальной оптимизации только три (прибыль, процент прибыльных сделок и максимальную просадку). Исключение из многокритериального анализа коэффициента Шарпа оправдывается не только тем, что эта функция почти полностью дублирует функцию прибыли, но еще и тем, что коэффициент Шарпа коррелирует с процентом прибыльных сделок и с максимальной просадкой в гораздо большей степени, чем функция прибыли (средний правый и левый нижний графики рис. 2.3.2).

Описанная выше процедура выбора целевых функций выглядит достаточно просто. Однако необходимо признать, что мы сознательно упростили эту процедуру, для того чтобы излишне не усложнять описание. Теперь мы устраним это упрощение, чтобы продемонстрировать всю сложность и многоплановость процесса выбора подходящих целевых функций.

Дело в том, что взаимозависимости, представленные на рис. 2.3.2, были построены на основании всего набора данных, составляющих оптимизационные пространства целевых функций. Это значит, что данные взаимозависимости строились для полных диапазонов значений двух параметров (2–120 дней для количества дней до экспирации опционов, 5–300 дней для периода истории для расчета HV). Например, для оценки корреляции между прибылью и коэффициентом Шарпа каждому узлу на левом верхнем графике рис. 2.3.1 ставилась в соответствие точка на правом верхнем графике. Полученная в результате такого сопоставления зависимость (верхний левый график рис. 2.3.2) состоит из 3600 точек.

Вместе с тем вполне можно предположить, что степень, и даже направленность, взаимозависимостей между разными целевыми функциями может меняться в зависимости от конкретных

значений параметров и, соответственно, от диапазонов их значений. Для того чтобы проверить это предположение, следует рассчитать корреляции для каждого из значений двух параметров по отдельности (то есть нужно проверить, меняются ли корреляции в зависимости от значений параметров).

Начнем с параметра «период истории для расчета HV». Корреляции между некоторыми парами целевых функций зависят, а между некоторыми — не зависят от значений этого параметра (рис. 2.3.3). Например, корреляция функций, для которых была отмечена наибольшая степень взаимозависимости (прибыль и коэффициент Шарпа), не меняется на всем диапазоне значений параметра. Все прочие пары функций демонстрируют явно выраженные тренды.

Взаимозависимость пары целевых функций «прибыль» и «процент прибыльных сделок» достаточно высока при низких значениях параметра «период истории для расчета HV». По мере увеличения значений параметра степень скоррелированности двух этих функций снижается и падает до нуля, когда параметр достигает верхней границы диапазона своих допустимых значений. Такой же точно тренд характеризует и взаимозависимость другой пары целевых функций «коэффициент Шарпа» и «процент прибыльных сделок». Такая схожесть трендов не удивительна, принимая во внимание почти абсолютную скоррелированность значений прибыли и коэффициента Шарпа.

Две другие пары целевых функций (прибыль и максимальная просадка, коэффициент Шарпа и максимальная просадка) также демонстрируют почти одинаковый тренд (причина схожести трендов та же, что и в предыдущем случае). Корреляции для этих двух пар при низких значениях параметра достаточно сильны (напомним, что в случае максимальной просадки отрицательный коэффициент корреляции имеет тот же смысл, что и положительная корреляция). По мере увеличения параметра до средних значений корреляция приближается к нулю, а затем вновь уходит в отрицательную область. Когда мы рассматривали те же данные консолидированно (правый верхний и правый средний графики рис. 2.3.2), то могли обнаружить только обратную зависимость для этих пар целевых функций. Детализированный анализ, представленный на рис. 2.3.3, позволяет установить, что в диапазоне средних значений параметра «период истории для расчета HV» корреляции внутри этих двух пар целевых функций отсутствуют вовсе (и, следовательно, содержащаяся в них информация не дублируется).

Взаимозависимость последней пары целевых функций (максимальная просадка и процент прибыльных сделок) демонстрирует повышательный тренд. При низких значениях параметра коэффициент корреляции отрицателен, а, когда параметр достигает своих максимальных значений, корреляция становится положительной (коэффициент корреляции равен нулю, когда «период истории для расчета HV» составляет порядка 200 дней). Вновь заметим, что, когда те же данные рассматривались консолидировано (правый нижний график рис. 2.3.2), то мы не смогли обнаружить какую-либо взаимозависимость между этими целевыми функциями. Из этого можно было сделать не совсем верный вывод о полном отсутствии дублирования информации. Между тем детализированный анализ (рис. 2.3.3) позволяет уточнить, что информация не дублируется только во второй трети диапазона допустимых значений параметра.

Теперь перейдем к рассмотрению влияния второго параметра, «число дней до экспирации опционов» на взаимозависимость целевых функций (рис. 2.3.4). Данный параметр влияет на скоррелированность целевых функций в гораздо большей степени, чем «период истории для расчета HV» (сравни рис. 2.3.3 и 2.3.4). Даже небольшие изменения параметра приводят к весьма существенным изменениям корреляций. Коэффициенты корреляции почти всех пар целевых функций колеблются в очень широком диапазоне (от  $-0,9$  до  $0,9$ ). Однако в отличие от предыдущего случая (когда рассматривалось влияние параметра «период истории

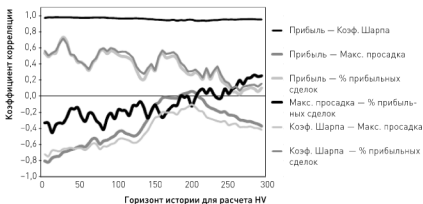


Рис. 2.3.3. Зависимость коэффициента корреляции шести пар целевых функций от значений параметра «период истории для расчета HV»

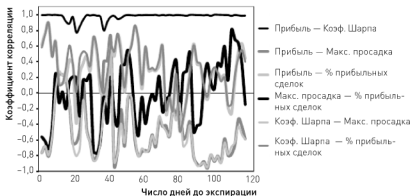


Рис. 2.3.4. Зависимость коэффициента корреляции шести пар целевых функций от значений параметра «число дней до экспирации опционов»

для расчета HV») влияние количества дней, остающихся до истечения опционов, весьма хаотично. В динамике коэффициентов корреляции отсутствуют всякие признаки трендов.

Единственное исключение составляет пара целевых функций «прибыль» и «коэффициент Шарпа». В этом случае коэффициент корреляции не зависит от количества дней до экспирации и сохраняет максимально высокое значение почти на всем диапазоне допустимых значений параметра (рис. 2.3.4). Точно такая же картина наблюдалась для этой пары целевых функций при изучении влияния параметра «период истории для расчета HV» (рис. 2.3.3).

Можно сделать вывод, что, принимая решение о включении той или иной целевой функции в систему многокритериальной оптимизации, следует руководствоваться степенью взаимозависимости рассматриваемых функций. Предпочтение нужно отдавать тем из них, которые коррелируют в наименьшей степени. Это обеспечит внесение в систему максимального количества новой, недублирующейся информации. Определяя степень допустимой взаимозависимости (порог коэффициента корреляции, выше которого целевая функция не принимается), необходимо убедиться в том, что корреляция целевых функций не зависит от значений параметров. В случае если такая зависимость существует (как было показано выше), то для принятия решения нужно использовать такой коэффициент корреляции, который был рассчитан на данных, в наибольшей степени соответствующих логике разрабатываемой торговой стратегии.

## 2.4. Многокритериальная оптимизация

В предыдущем разделе мы рассмотрели вопрос выбора целевых функций для их дальнейшего использования в системе многокритериальной оптимизации. Данный раздел посвящен поиску оптимальных решений с помощью методов многокритериального анализа. Применительно к параметрической оптимизации задача многокритериального анализа состоит в одновременном использовании многих целевых функций (каждая из которых представляет собой отдельный критерий) для упорядочения узлов оптимизационного пространства (каждый из которых представляет собой определенную уникальную комбинацию параметров) по степени их предпочтительности.

Основная проблема многокритериальной оптимизации состоит в том, что полное упорядочение альтернатив может оказаться невозможным по причине их нетранзитивности. Поясним это на простом примере. Будем считать лучшим тот вариант, который превосходит остальные по большинству критериев. Предположим, что при сравнении трех узлов  $A$ ,  $B$  и  $C$  по значениям трех целевых функций (критериев) был получен следующий результат:  $A = \{1; 2; 3\}$ ,  $B = \{2; 3; 1\}$ ,  $C = \{3; 1; 2\}$  — в скобках указаны значения критериев. Очевидно, что по первому и второму критерию узел  $B$  предпочтителен узлу  $A$ , а  $C$  лучше  $B$  по первому и третьему критерию. При соблюдении свойства транзитивности из этого должно следовать, что узел  $C$  предпочтителен  $A$ . Однако это не так, поскольку  $A$  превосходит  $C$  по двум критериям, второму и третьему.

Проблема нетранзитивности не имеет универсального решения. Тем не менее существуют два основных подхода, позволяющих получить приемлемое оптимальное решение (или несколько решений), несмотря на несоблюдение свойства транзитивности. Первый подход основывается на приведении всех целевых функций к единому критерию, называемому «свертка», второй подход состоит в применении метода Парето.

### 2.4.1. Свертка

Отказ от одновременного использования нескольких критериев путем замены их новым единственным критерием (представляющим собой некую функцию, аргументами которой являются исходные критерии) составляет суть свертки. Преимуществом свертки является простота реализации и возможность регулировать степень влияния различных критериев на результат оптимизации. Это достигается путем умножения значений

критериев на выбранные весовые коэффициенты — чем больше вес данного критерия, тем большее влияние он окажет на окончательный результат многокритериальной оптимизации. Основным недостатком свертки является неизбежная потеря информации при переходе от многомерного вектора критериев к единственному показателю.

Наиболее распространенными являются два вида свертки: аддитивная (сумма или среднее арифметическое значений всех критериев) и мультипликативная (произведение или среднее геометрическое значений всех критериев). Применение мультипликативной свертки возможно, только если критерии неотрицательны (поскольку произведение двух отрицательных значений дают положительную величину), либо если только один из критериев может принимать отрицательные значения. Также нужно учитывать, что если один из критериев равен нулю, то и мультипликативная свертка равна нулю (для аддитивной свертки этого не происходит). В мультипликативной свертке по сравнению с аддитивной большее влияние оказывают критерии, имеющие более низкие значения. Аддитивная свертка наиболее приемлема для критериев, представляющих собой однородные по смыслу и близкие по масштабу значений величины.

Кроме аддитивной и мультипликативной, существует также селективная свертка, когда для каждого узла принимается в качестве значения свертки наименьшее (наиболее консервативный вариант свертки) или наибольшее (наиболее агрессивный вариант) значение из всего набора целевых функций. В книге «Опционы: системный подход к инвестициям» мы предложили методику минимаксной свертки, когда в качестве значения свертки используется произведение наибольшего и наименьшего значений критериев.

При расчете свертки необходимо помнить о том, что критерии могут измеряться в разных единицах и иметь различный масштаб величин. Для приведения их к единой шкале с одинаковыми диапазонами значений можно воспользоваться следующей трансформацией:

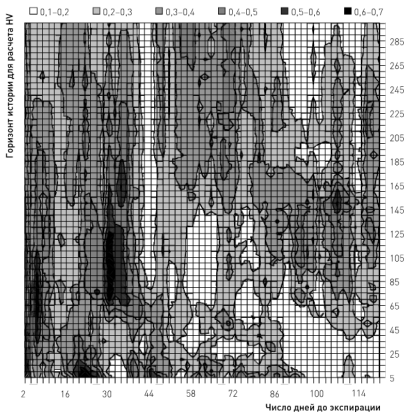
$$x_{\text{transformed}} = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \quad (2.4.1)$$

где  $x_i$  — значение критерия для  $i$ -го узла  $x$ ,  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  — минимальное и максимальное значение критерия соответственно. Применение этой формулы позволяет привести значение критерия к интервалу от 0 до 1.



Продemonстрируем применение свертки на примере базовой дельта-нейтральной стратегии. В качестве критериев выберем три из четырех целевых функций, показанных на рис. 2.3.1 — прибыль, максимальную просадку и процент прибыльных сделок (коэффициент Шарпа не будет использоваться в силу его сильной скоррелированности с прибылью). Применив формулу 2.4.1, мы привели значения всех трех целевых функций к интервалу от 0 до 1. Построив три варианта свертки (аддитивную, мультипликативную и минимаксную), мы убедились в том, что в данном случае все они дают весьма близкие результаты.

На рис. 2.4.1 показана оптимизационная поверхность минимаксной свертки. Данная поверхность полимодальна и имеет четыре



**Рис. 2.4.1.** Многокритериальная оптимизация базовой дельта-нейтральной стратегии. Оптимизационное пространство построено методом свертки трех целевых функций (прибыль, максимальная просадка и процент прибыльных сделок)

оптимальные области. Три из них имеют относительно обширную площадь, а одна очень мала (поскольку площадь поверхности является одним из важных факторов при выборе оптимального решения, четвертую область можно не рассматривать). Как видим, многокритериальный анализ методом свертки не позволил в данном случае получить единственное оптимальное решение, так как каждая из зон содержит свое оптимальное решение. Следовательно, само по себе построение свертки не решило до конца задачу оптимизации. Необходимо выбрать из трех зон одну. Поскольку все они обладают приблизительно одинаковыми высотными отметками (значение свертки), то выбор должен осуществляться по другому принципу. В следующем разделе мы рассмотрим вопрос выбора оптимальной области на основании характеристик рельефа и количественных оценок робастности потенциальных оптимальных решений.

#### 2.4.2. Оптимизация по методу Парето

Применение метода Парето позволяет решить задачу выбора в условиях, когда показатели различных критериев противостоят друг другу. Подобная ситуация, когда некоторые узлы оптимизационного пространства превосходят другие узлы по одной из целевых функций (например, по прибыли), но являются хуже их по другой функции (например, по максимальной просадке), возникает довольно часто. Основным недостатком метода Парето является то, что в результате оптимизации может быть получено множество оптимальных решений вместо одного. Это потребует дальнейшего анализа, и выбор придется делать на основе применения дополнительных методик. Такая же проблема свойственна и методу свертки, но в гораздо меньшей степени.

Формализация задачи многокритериальной оптимизации выглядит следующим образом. Пусть для каждого узла (альтернативы)  $a$  из оптимизационного пространства задан  $n$ -мерный вектор значений целевых функций (критериев)  $x(a) = (x_1(a), \dots, x_n(a))$ . Используя показатели  $l$  критериев, необходимо найти альтернативы с максимальными значениями координат векторов (то есть с максимальными показателями целевых функций). Будем считать, что чем больше значение критерия, тем лучше альтернатива. При сравнении двух альтернатив  $a$  и  $b$  альтернатива  $a$  доминирует над альтернативой  $b$ , если выполняется следующая совокупность неравенств:  $x_j(a) \geq x_j(b)$ , для всех значений  $j = 1, \dots, n$ , и существует хотя бы один критерий  $j$ , для

которого выполняется строгое неравенство  $x_i(a) > x_i(b)$ . Другими словами, узел  $a$  предпочтителен узлу  $b$ , если  $a$  не уступает  $b$  по значениям всех целевых функций и хотя бы по одной из них превосходит  $b$ .

Очевидно, что наличие доминирования однозначно определяет, какая из двух сравниваемых альтернатив лучше. Если же отношение доминирования установить невозможно, то вопрос о том, какая из них лучше, остается открытым. В этом случае говорят, что ни одна из альтернатив не обладает однозначным превосходством (не доминирует) над другой.

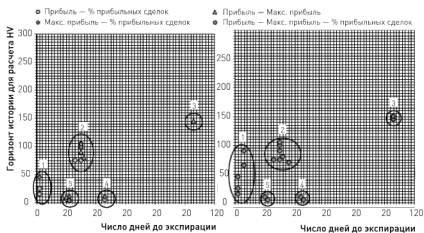
Используя приведенные рассуждения, задачу многокритериальной оптимизации можно сформулировать следующим образом: среди множества всех альтернатив найти такое подмножество, в которое входят только недоминируемые альтернативы, то есть те, для которых не существует доминирующих их альтернатив. Это подмножество и называется множеством Парето. Каждый элемент такого множества можно считать наилучшим в определенном выше смысле. При этом число альтернатив, составляющих это множество, может быть самым различным. Например, это может быть как одна, доминирующая над всеми остальными, альтернатива, так и несколько «лучших» альтернатив или даже все исходное множество.

В нашем примере оптимизации базовой дельта-нейтральной стратегии мы имеем оптимизационное пространство  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ , состоящее из  $m$  узлов-альтернатив (в примере  $m = 3600$ ), оцененных с помощью  $n$  функций-критериев ( $n = 3$ ) со значениями  $x(a) = [x_1(a), \dots, x_n(a)]$ . Для построения множества Парето необходимо попарно сравнить все альтернативы, отбрасывая доминируемые, а недоминируемые добавляя в множество Парето. Очередной элемент  $a_k$  сравнивается со всеми оставшимися. Если встречается элемент  $a_i$ , над которым  $a_k$  доминирует, то элемент  $a_i$  отбрасывается. Если оказывается, что  $a_k$  доминирует каким-либо элементом  $a_m$  из оставшихся, то отбрасывается элемент  $a_k$ . Если ни один из элементов не доминирует над  $a_k$ , то последний включается во множество Парето. Далее переходим к сравнениям элемента, следующего за  $a_k$ , со всеми оставшимися элементами. При этом максимальное количество требуемых сравнений составляет порядка  $0,5m(m-1)$ , что вполне приемлемо для большинства случаев. Более быстрые алгоритмы требуются при построении множества Парето для большого числа критериев и альтернатив.

Как было сказано выше, недостатком метода Парето является невозможность повлиять на количество узлов, попадающих в оптимальное множество Парето. Число элементов множества может изменяться от случая к случаю и не зависит от наших пожеланий и предпочтений. Единственное оптимальное решение может быть получено только в том случае, когда оптимизационное пространство имеет узел, для которого показатели всех критериев превосходят соответствующие показатели для других узлов. В большинстве случаев вместо единственного оптимального решения получается множество.

Рассмотрим применение метода Парето на примере базовой дельта-нейтральной стратегии. В качестве критериев будем использовать те же три целевые функции, что использовались в многокритериальной оптимизации методом свертки (прибыль, максимальная просадка и процент прибыльных сделок). В отличие от свертки, метод Парето не позволяет построить полное оптимизационное пространство, аналогичное поверхности, показанной на рис. 2.4.1. Вместо этого мы получаем перечень доминирующих узлов, составляющих оптимальное множество. В результате оптимизационная поверхность превращается в координатную плоскость, обозначающую положение отдельных оптимальных узлов (рис. 2.4.2).

Двигаясь от простого к более сложному, рассмотрим сначала оптимальное множество Парето, полученное путем применения двух критериев. Из трех целевых функций можно составить три пары критериев, что позволяет получить три варианта оптимального множества. Узлы, попавшие в эти оптимальные множества, группируются на координатной плоскости в пять областей. На левом графике рис. 2.4.2 эти области обозначены условными порядковыми номерами. Интересно отметить, что ни в одну из пяти областей не попали все три варианта оптимального множества. В третью область попал единственный узел множества, полученного в результате применения целевых функций «прибыль» и «максимальная просадка». Узлы, выбранные этой парой функций, попали также во вторую и пятую области. Узлы, соответствующие паре функций «прибыль» и «процент прибыльных сделок», расположены в первой, второй и четвертой областях. И, наконец, узлы, попавшие в оптимальное множество функций «максимальная просадка» и «процент прибыльных сделок», находятся в областях 1, 4 и 5. Такое распределение оптимальных множеств по областям координатной плоскости свидетельствует о том,



**Рис. 2.4.2.** Многокритериальная оптимизация базовой дельта-нейтральной стратегии методом Парето. Левый график показывает оптимальные множества, полученные на основе применения двух целевых функций (показаны три множества для трех разных пар функций). Правый график показывает оптимальное множество, полученное на основе одновременного применения трех целевых функций

что каждая из трех целевых функций вносит свой вклад в поиск оптимального решения. Поэтому в данном случае имеет смысл включить все три функции в систему многокритериальной оптимизации по методу Парето.

Множество оптимальных решений, полученное в результате применения трех критериев показано на правом графике рис. 2.4.2. Узлы, попавшие в оптимальное множество Парето, расположены на координатной плоскости приблизительно в тех же пяти областях, что и в предыдущем примере, когда для оптимизации использовались пары критериев. Наибольшее количество узлов (всего семь) попало во вторую область, в первой области оказалось пять узлов, а в третьей, четвертой и пятой областях — всего по два узла.

Следует отметить, что в предыдущем примере, когда использовались только по два критерия, оптимальные множества состояли из пяти–семи элементов (в зависимости от пары критериев). Использование трех критериев привело к расширению множества до 18 элементов. Это является общим свойством метода Парето — увеличение количества решений. Поскольку задача

параметрической оптимизации требует выбора единственного оптимального узла, то включение в оптимизационную схему каждой дополнительной функции полезности усложняет решение этой задачи. Поэтому, принимая решение о выборе тех или иных целевых функций, следует принимать во внимание не только объем новой информации, вносимой в общую систему каждой дополнительной функцией, но и учитывать сложность выбора единственного оптимального решения из большого количества вариантов.

Расположение оптимальных областей, полученных по методу свертки, достаточно близко к расположению аналогичных областей, полученных по методу Парето (сравни рис. 2.4.1 и 2.4.2). Это означает, что применение обеих методик в данном случае приводит к одному и тому же результату (при этом следует учитывать, что в других случаях результаты могут быть разными, и тогда придется делать выбор между двумя методами).

Основной результат многокритериальной оптимизации, продемонстрированной в этом разделе, состоит в том, что обе методики позволили определить несколько оптимальных областей. Однако ни одна из них не привела к выбору единственного оптимального решения. Следовательно, можно сказать, что задача оптимизации решена не до конца. Необходимо в пределах выбранных областей продолжить поиск единственного оптимального решения. Этому вопросу посвящен следующий раздел.

## 2.5. Выбор оптимального решения по признаку робастности

Как было показано в предыдущем разделе, многокритериальная оптимизация имеет один существенный недостаток. В большинстве случаев одновременное использование множества целевых функций приводит к нахождению нескольких оптимальных решений. Хотя ни одно из них не является предпочтительным по отношению к другим, нам необходимо выбрать единственный вариант. Такой выбор можно сделать исходя из формы поверхности оптимальных областей, на которых находятся узлы найденных решений.

При выборе оптимального решения на основе многокритериального анализа принимаются в расчет только значения целевых функций каждого узла оптимизационного пространства. Целевые функции соседних узлов полностью игнорируются. Между тем рельеф оптимальной области является важным показателем

надежности оптимизации. При прочих равных условиях предпочтителен такой узел оптимизационного пространства, который располагается в центре относительно гладкой высокой области (высота определяется значением целевой функции). Предпочтительно также, чтобы данная область имела широкие покатые склоны. Это означает, что узлы, окружающие узел оптимального решения, должны быть близкими к нему по значениям целевой функции.

В соответствии с данным ранее определением оптимальное решение, расположенное в пределах такой области, является робастным. Если же оптимальное решение располагается в области, характеризующейся большими перепадами высот, острыми пиками и глубокими впадинами, то оно является менее робастным и, соответственно, менее надежным.

Хотя применительно к процедуре оптимизации понятие робастности не имеет строгого математического определения, в общем виде можно утверждать, что оптимальное решение, расположенное на гладкой поверхности, является более робастным, чем решение, расположенное на изломанной поверхности. Если решение робастно, то небольшие изменения в значениях оптимизируемых параметров не приводят к большим изменениям целевой функции.

Для того чтобы выбор оптимального решения основывался не только на высотной отметке, но и учитывал робастность, необходимо количественно оценить рельеф окружающей области и меру его изломанности. В случае многомерного пространства эта задача очень сложна и требует привлечения методов топологии. Однако для двумерного пространства можно предложить несколько относительно простых в реализации решений.

### **2.5.1. Усреднение соседних ячеек**

Этот метод оценки робастности аналогичен построению скользящих средних. При построении скользящего среднего усреднение целевой функции (обычно это цена или объем торгов) производится по мере движения во времени, а само усреднение используется для описания временной динамики и определения ценовых или каких-либо других трендов. Для изучения рельефа оптимизационной поверхности и оценки робастности оптимального решения, усреднение целевой функции производится по мере движения в оптимизационном пространстве. В каждом узле пространства значение целевой функции заменяется средним значением целевой функции соседних

узлов, окружающих данный узел. Таким образом оригинальное оптимизационное пространство трансформируется в новое пространство, которое используется для поиска оптимального решения. Поиск производится по высотным отметкам трансформированного пространства. Новая высотная отметка каждого узла теперь содержит информацию не только о значении целевой функции самого узла, но и о значениях целевой функции небольшой области, окружающей данный узел. Следовательно, в процессе оптимизации производится не только максимизация целевой функции, но учитывается также робастность потенциального оптимального решения.

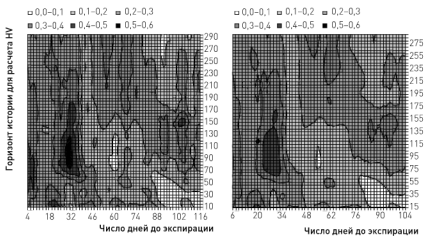
Единственным параметром усреднения является диапазон усредняемых узлов. Это могут быть только соседние узлы (одна линия узлов, расположенных вокруг данного узла). В случае двумерной оптимизации, каждый узел соседствует с восемью другими узлами (за исключением узлов, расположенных на границах допустимых значений параметров). Поэтому при усреднении одного ряда узлов, среднее значение рассчитывается по девяти данным — восьми значениям соседних узлов плюс значение центрального узла. При усреднении двух рядов расчет проводится по 25 данным, для трех линий — по 49 и т.д. В общем виде количество усредняемых узлов  $n$  определяется следующим образом:

$$n = (2m + 1)^2,$$

где  $m$  — число рядов узлов, окружающих вычисляемый узел.

Применим данную процедуру к оптимизационной поверхности, полученной ранее в результате свертки трех целевых функций. Исходное оптимизационное пространство (рис. 2.4.1) содержит три оптимальные области, каждая из которых может рассматриваться в качестве кандидата на поиск оптимального решения. На рис. 2.5.1 показаны две трансформации оригинальной поверхности, построенные для  $m = 1$  (усреднение одного ряда соседних ячеек) и  $m = 2$  (усреднение двух рядов). После трансформации, состоящей в усреднении ближайших узлов (левый график рис. 2.5.1), из трех оптимальных областей осталась только одна, расположенная в диапазоне от 28 до 34 дней по параметру «количество дней до экспирации» и 75–125 дней по параметру «период истории для расчета HV». Причина исчезновения двух других областей заключается в том, что их экстремумы оказались менее робастны, чем экстремум сохранившейся области.





**Рис. 2.5.1.** Трансформация оптимизационной поверхности свертки, представленной на рис. 2.4.1 методом усреднения. Левый график получен путем усреднения одного ряда ближайших узлов, правый график — путем усреднения двух рядов

Трансформация, полученная путем усреднения большого количества узлов (правый график рис. 2.5.1), приводит к аналогичным результатам — исчезновению двух оптимальных областей и сохранению одной области оптимизационного пространства в качестве оптимальной. Таким образом, обе трансформации указывают на предпочтительность выбора одной и той же области. Данная область, помимо наибольшей робастности, имеет еще и наибольшую площадь. Это является дополнительным преимуществом для выбора оптимального решения в пределах именно этой области.

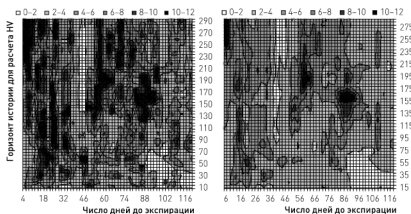
### 2.5.2. Отношение среднего к стандартному отклонению

Хотя описанный в предыдущем разделе метод усреднения и учитывает при выборе оптимальной области ее высоту (значение целевой функции) и гладкость (робастность), но влияние первой величины перевешивает влияние второй. Предлагаемый в этом разделе метод придает робастности гораздо больший вес. В соответствии с данным методом значение целевой функции в каждом узле исходного оптимизационного пространства заменяется отношением среднего значения целевой функции группы узлов к стандартному отклонению,

рассчитанному для этой же группы. Понятие «группы узлов» имеет тот же смысл, что и в процедуре усреднения. К группе относится сам узел и один, два, и т. д. рядов окружающих узлов. Такая трансформация поверхности учитывает как высотные отметки оптимальной области (числитель), так и гладкость ее рельефа (знаменатель).

На рис. 2.5.2 показаны две трансформации свертки, изображенной на рис. 2.4.1. Также как и в предыдущем разделе, трансформации строились с использованием одного и двух рядов соседних узлов ( $m = 1$  и  $m = 2$  соответственно). При использовании одного ряда узлов (левый график рис. 2.5.2) возникает большое количество новых оптимальных областей (исходное оптимизационное пространство содержит всего три оптимальные области). Количество новых областей столь велико, что выбор одной из них практически невозможен. Эта проблема разрешается путем использования большей группы узлов (два ряда). В этом случае рельеф трансформированного оптимизационного пространства существенно упрощается (правый график рис. 2.5.2) и мы получаем всего три оптимальные области, из которых необходимо выбрать одну.

В отличие от трансформации методом усреднения (см. предыдущий раздел) ни одна из трех оптимальных областей не совпадает



**Рис. 2.5.2.** Трансформация оптимизационной поверхности свертки, представленной на рис. 2.4.1 методом отношения среднего к стандартному отклонению. Левый график построен для одного ряда ближайших узлов, правый график — для двух рядов

с оптимальными областями оригинального оптимизационного пространства. Это объясняется тем, что оптимальные области исходной свертки представляют собой узкие хребты и высокие пики. То есть эти области не достаточно робастны и обладают довольно ломанным рельефом. В противоположность этому три оптимальные области трансформированного пространства хоть и не расположены на самых высоких хребтах, зато находятся на достаточно гладких и широких плато средней высоты, что может быть предпочтительно с точки зрения их робастности. Поскольку эти три оптимальные области равноценны как по значению целевой функции, так и по робастности, выбрать из них одну можно по площади поверхности и по ее форме. При прочих равных условиях предпочтительно, чтобы оптимальная область имела большую площадь поверхности и более округлую форму (узкие области менее робастны по крайней мере по одному из параметров). Этим критериям соответствует область, расположенная в диапазоне 84–92 дней по параметру «количество дней до экспирации» и 155–175 дней по параметру «период истории для расчета HV».

### **2.5.3. Геометрия поверхности**

Две методики, описанные в предыдущих разделах, основываются на трансформации оптимизационного пространства. Теперь мы опишем альтернативный подход, не требующий трансформации. Он основан на изучении и сравнении геометрии оптимальных областей. В принципе можно разработать множество таких подходов, требующих применения математического аппарата большей или меньшей сложности. Здесь мы предложим один из возможных путей решения этой задачи.

Рассмотрим гипотетическое оптимизационное пространство (рис. 2.5.3), имеющее две оптимальные области. Одна из них (расположенная в левой части пространства) меньше по площади, имеет более вытянутую форму и более высокую вершину. Другая область (расположенная правее) имеет большую площадь, более округлую форму и меньшую высоту. Необходимо принять решение, которая из двух областей предпочтительна для выбора оптимального решения. Предлагаемый нами подход основан на допущении о предпочтительности той области, которая имеет большую площадь поверхности. Такое допущение вполне реалистично, поскольку большая площадь может быть признаком оптимального сочетания двух

факторов — более высокого значения целевой функции в точке экстремума и большей робастности потенциального оптимального решения.

Будем считать, что оптимальная область представляет собой конус. Безусловно, такое допущение является упрощением, в реальности области имеют более сложную форму. Тем не менее многие из них действительно напоминают по форме конус. Любую оптимальную область можно привести к конусу путем несложных математических манипуляций. Это позволит вычислить площадь поверхности оптимальной области, не прибегая к сложным методам дифференцирования. Для того чтобы численно выразить площадь путем приведения определенной области оптимизационного пространства к конусу, необходимо выполнить следующие процедуры.

1. Задать уровень целевой функции, определяющий границу оптимальной области. Все узлы, находящиеся выше этого уровня, считаются принадлежащими к оптимальной области и, соответственно, к поверхности конусов. Данный уровень является основанием конуса. На рис. 2.5.3 в качестве такого уровня принят 0,25.
2. Определить площадь основания конуса, выраженную в количестве узлов, расположенных в пределах границы оптимальной области. В примере, представленном на рис. 2.5.3, эта площадь равна количеству ячеек, расположенных в пределах кольца, определяющего уровень 0,25.
3. Зная площадь основания конуса  $k$ , можно рассчитать радиус условной окружности, лежащей в основании конуса:  $r = \sqrt{k / \pi}$ .
4. Рассчитать площадь боковой поверхности конуса по формуле  $S = L\pi r$ , где  $L$  — это сторона конуса.

Используя теорему Пифагора, можно вычислить сторону конуса по формуле

$$L = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + \frac{k}{\pi}},$$

где  $h$  — это высота конуса. Высота конуса нам известна — это значение целевой функции в точке экстремума оптимальной области. Зная длину стороны, можно рассчитать интересующую нас площадь боковой поверхности конуса:

$$S = \pi \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{h^2 + \frac{k}{\pi}}.$$

Произведя простые алгебраические преобразования, получим:

$$S = \sqrt{k\pi h^2 + b^2}. \quad (2.5.1)$$

Применяя данную методику, необходимо учитывать, что  $k$  и  $h$  выражены в разных единицах измерения. Первая величина выражена в количестве узлов, а вторая — это значение целевой функции, которое может быть любым (проценты, доллары, любой другой показатель). Поэтому  $S$  является безразмерной величиной, которая, хотя и пропорциональна реальной площади оптимальной поверхности (и может использоваться для сравнения между собой разных оптимальных областей), не является площадью в истинном смысле. Во избежание недоразумений в дальнейшем мы будем называть этот показатель «условной площадью». Необходимо, чтобы  $k$  и  $h$  имели приблизительно одинаковую размерность (например, если максимум целевой функции  $h = 5$ , а  $k = 70$ , то следует преобразовать  $k$  путем нормирования его значения на 10. Кроме того, величина  $h$  не должна быть меньше 1, поскольку в противном случае возведение в квадрат (см. формулу 2.5.1) не увеличит, а уменьшит результирующую величину.

Продемонстрируем практическое применение этой методики. В гипотетическом примере, представленном на рис. 2.5.3, левая область состоит из 185 узлов; значение целевой функции узла с максимальной высотной отметкой равно 0,47 (то есть  $k = 185$ ,  $h = 0,47$ ). Для правой области  $k = 266$ ,  $h = 0,40$ . Для того чтобы привести переменные  $k$  и  $h$  к единой размерности, следует разделить  $k$  на 100 и умножить  $h$  на 10 (чтобы соблюсти условие  $h > 1$ ). Воспользовавшись формулой 2.5.1, получим:

$$S_{\text{left}} = \sqrt{1,85 \cdot 3,14 \cdot 4,7^2 + 1,85^2} = 11,48,$$

$$S_{\text{right}} = \sqrt{2,66 \cdot 3,14 \cdot 4^2 + 2,66^2} = 11,86.$$

Показатель условной площади левой оптимальной области меньше показателя правой области. Это означает, что, несмотря на то что левая область имеет большую высоту, правая является предпочтительной. Следовательно, в данном случае преимущество более широкой и покатой поверхности правой области (то есть преимущество по признаку робастности) перевесили преимущество более высокого значения целевой функции левой области.

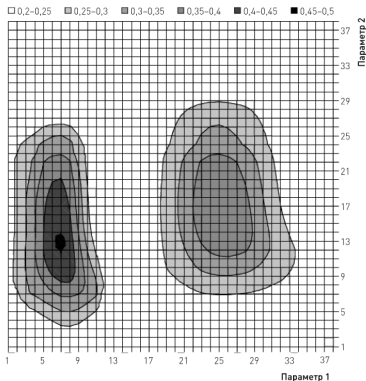


Рис. 2.5.3. Гипотетический пример оптимизационной поверхности с двумя разными по форме оптимальными областями

Теперь рассмотрим пример, основанный на реальных рыночных данных. На правом графике рис. 2.5.2 имеются три области с высотными отметками выше 10 (напомним, что данная оптимизационная поверхность является продуктом трансформации исходной поверхности, полученной путем свертки трех функций полезности). Обозначим их как «левая», «средняя» и «правая». Все три области имеют близкие по величине площади основания ( $k_{left} = 10$ ,  $k_{middle} = 13$ ,  $k_{right} = 14$ ) и высотные отметки ( $h_{left} = 14,09$ ,  $h_{middle} = 13,45$ ,  $h_{right} = 11,91$ ), что делает выбор одной из них затруднительным. Применение нашей методики позволяет сделать объективный выбор. Поскольку  $k$  и  $h$  имеют одинаковый порядок величин и  $h > 1$ , никаких трансформаций не требуется. Подставляя значения в формулу 2.5.1, получим:  $S_{left} = 79,6$ ,  $S_{middle} = 86,9$ ,  $S_{right} = 80,2$ . Следовательно, выбор средней области является в данном случае предпочтительным. Это

решение не тривиально, поскольку данная область не имеет ни наибольшую из трех вариантов площадь основания, ни наибольшую отметку. Интересно, что данный пример демонстрирует комбинированное применение двух методик: вначале оптимизационное пространство было трансформировано путем вычисления отношения среднего к стандартному отклонению, а затем выбор оптимальной области осуществлялся по методу оценки геометрии поверхности.

## 2.6. Устойчивость оптимизационного пространства

В предыдущем разделе мы использовали свойство робастности для выбора оптимального решения в пределах нескольких областей оптимизационного пространства. Говоря о понятии робастности, мы определили его как чувствительность целевой функции определенных узлов оптимизационного пространства к небольшим изменениям оптимизируемых параметров. Поскольку желательным свойством оптимального решения является большая робастность (то есть нечувствительность), то можно сказать, что, выбирая оптимальное решение, мы стремимся найти наиболее устойчивую оптимальную область. Подчеркнем, что в данном контексте речь идет об устойчивости по отношению к оптимизируемым параметрам.

В этом разделе будет рассмотрен другой аспект устойчивости — степень чувствительности оптимизационного пространства к неоптимизируемым параметрам. В процессе параметрической оптимизации, основанной на алгоритмическом вычислении целевой функции, исследуется множество комбинаций оптимизируемых параметров. При этом многие другие параметры остаются неизменными (будем называть такие параметры «фиксированными»). Их значения могут быть подобраны на более раннем этапе (используя научный подход) либо могут задаваться самой идеей и структурой стратегии, заложенной на начальном этапе ее формализации. Устойчивость оптимизационного пространства к небольшим изменениям фиксированных параметров и к незначительным изменениям в структуре стратегии является важным показателем надежности и качества оптимизации.

Поясним эту идею на простом примере. В процессе оптимизации базовой дельта-нейтральной стратегии нами была получена определенная оптимизационная поверхность (рис. 2.2.2). В этом случае оптимизировались только два параметра,

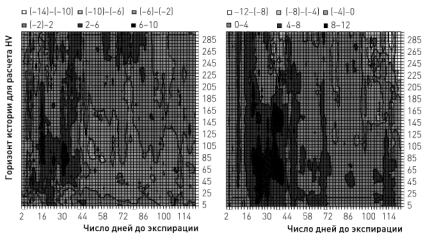
значения всех остальных были зафиксированы. В частности, параметр «порог критерия» был зафиксирован на значении 1% (позиции открывались только для тех опционных комбинаций, для которых ожидаемая прибыль была >1%). Предположим, что мы увеличили значение данного параметра до 2%. Далее предположим, что это привело к тому, что форма оптимизационной поверхности изменилась и стала выглядеть иначе (например, так, как показано на левом графике рис. 2.5.2). Если бы столь незначительное изменение фиксированного параметра привело к такому кардинальному изменению поверхности, то мы должны были бы заключить, что эта поверхность неустойчива, а сама оптимизация крайне ненадежна и, следовательно, полагаться на ее результаты весьма рискованно.

#### 2.6.1. Устойчивость по отношению к фиксированным параметрам

Рассмотрим устойчивость оптимизационного пространства базовой дельта-нейтральной стратегии по отношению к фиксированному параметру «порог критерия». На рис. 2.2.2 показана поверхность, полученная для целевой функции «прибыль» при условии, что порог критерия равен 1%. Увеличим значение этого фиксированного параметра до 3% и проверим, насколько такое изменение повлияет на форму оптимизационной поверхности.

- Напомним, что до изменения фиксированного параметра глобальный максимум имел координаты 30 по параметру «число дней до экспирации» (горизонтальная ось графика) и 105 по параметру «период истории для расчета HV» (вертикальная ось). После увеличения значения фиксированного параметра глобальный максимум сместился и расположен в узле с координатами 16 и 120 соответственно. Учитывая общую площадь оптимизационного пространства, такое смещение глобального максимума нельзя назвать очень существенным (хотя оно безусловно не является пренебрежимо малым).
- Исходное оптимизационное пространство имело единственную оптимальную область, протянувшуюся вдоль 30-й вертикали в диапазоне от 80 до 125 дней по параметру «период истории для расчета HV» (рис. 2.2.2). Левый график рис. 2.61. демонстрирует новое пространство, полученное в результате изменения фиксированного параметра. Прежняя оптимальная область сохранилась приблизительно на том же месте (незначительно сместившись вниз) и слегка увеличилась в размерах. Вместе





**Рис. 2.6.1.** Изменение формы оптимизационного пространства базовой дельта-нейтральной стратегии [показанного на рис. 2.2.2] в результате изменения значения фиксированного параметра «порог критерия» (левый график) и запрета на открытие длинных позиций (правый график)

с тем слева от оригинальной области появились четыре новые оптимальные области, две из которых очень маленькие, а две другие сопоставимы по размерам с прежней областью. Важно отметить, что, хотя количество оптимальных областей существенно выросло (пять вместо одной), все они располагаются приблизительно в левой нижней части оптимизационного пространства (12–36 дней по параметру «число дней до экспирации» и 40–180 по параметру «период истории для расчета HV»).

Из вышесказанного можно сделать вывод, что изменение фиксированного параметра не изменило принципиально форму оптимизационной поверхности. Это свидетельствует об относительной устойчивости оптимизационного пространства. Хотя произошедшие изменения могут показаться весьма существенными, необходимо принять во внимание, что изменение фиксированного параметра также было достаточно большим (с 1% до 3%). Мы специально использовали такое большое изменение, чтобы наглядно продемонстрировать видоизменение пространства. При тестировании устойчивости, производимой в ходе оптимизации автоматизированной стратегии, предназначенной

для реальной торговли, можно ограничиться гораздо меньшими изменениями фиксированных параметров.

### 2.6.2. Структурная устойчивость

Понятие структурной устойчивости является очень широким. К структуре стратегии можно отнести практически все, начиная с базовой идеи и заканчивая относительно малозначительными техническими элементами. Изменение любого структурного элемента может коренным образом изменить форму оптимизационного пространства. Однако следует изначально ограничить область исследований структурной устойчивости. Интерес разработчика стратегии состоит в том, чтобы получаемое им оптимизационное пространство было устойчиво к небольшим изменениям структуры стратегии. Дело в том, что любое существенное изменение превращает оптимизируемую стратегию в совершенно другую стратегию, оптимизация которой, возможно, должна строиться совсем по-другому.

Примером небольших структурных изменений может быть метод распределения капитала или применение тех или иных инструментов управления рисками. Применительно к дельта-нейтральной стратегии, допустимое структурное изменение может заключаться, например, в изменении алгоритма расчета индексной дельты. С одной стороны, изменения этих и подобных им структурных элементов не меняет смысл стратегии. С другой стороны, желательно, чтобы оптимизационное пространство было устойчиво к изменениям такого рода. Например, если схема распределения капитала между элементами портфеля несколько изменяется и форма оптимизационного пространства не меняется коренным образом, то такая оптимизация является устойчивой и надежной. При этом следует помнить, что оптимизационное пространство может быть более устойчивым к одним структурным изменениям и менее устойчиво к другим.

В качестве примера рассмотрим промежуточный вариант структурного изменения — запрет на открытие длинных позиций. В принципе такое изменение является достаточно существенным и даже может полностью изменить смысл некоторых стратегий. Однако этот запрет может не быть абсолютным. Например, можно ввести мягкий запрет, ограничивающий долю длинных позиций в портфеле определенной пороговой величиной. Для того чтобы сделать изменение оптимизационного пространства визуально различимым, мы приведем пример

полного запрета длинных позиций (хотя на практике такой жесткий тест на устойчивость вряд ли имеет смысл).

Правый график рис. 2.6.1 демонстрирует, что даже такое сильное изменение структуры стратегии, как полный запрет на использование длинных позиций, не изменило принципиально форму оптимизационной поверхности. Глобальный максимум сместился из узла с координатами 30 и 105 (по горизонтальной и вертикальной осям соответственно) в узел с координатами 30 и 70. Это означает, что оптимальное значение одного параметра не изменилось вовсе, а оптимум второго параметра несколько уменьшился.

Площадь прежней оптимальной области расширилась существенно. Кроме того, появилось несколько новых оптимальных областей. Это объясняется тем, что в течение последних 10 лет (период, на котором проводилась оптимизация), несмотря на недавний финансовый кризис, на рынке преобладали тенденции низковолатильного умеренного роста. В таких условиях короткие опционные позиции более прибыльны по сравнению с длинными. Поэтому полный запрет на открытие длинных позиций привел к большому количеству прибыльных комбинаций параметров.

С точки зрения устойчивости важно то, что все оптимальные области группируются в одной части оптимизационного пространства, а именно вокруг оригинальной оптимальной области. Учитывая, что структурное изменение, заключающееся в полном запрете длинных позиций, является весьма существенным (на грани принципиального изменения стратегии), можно заключить, что устойчивость оптимизационного пространства в данном примере оказалась достаточно высокой.

### **2.6.3. Устойчивость по отношению к периоду оптимизации**

В процессе параметрической оптимизации алгоритмическое вычисление целевой функции производится на основе исторических данных. Решение о длине исторического периода (называемого также «историческим горизонтом оптимизации») часто оказывает существенное влияние на результаты оптимизации. К сожалению, не существует объективных критериев выбора протяженности исторических временных рядов. Принято считать, что они должны включать в себя периоды с различной ценовой динамикой — кризисные периоды и периоды низковолатильного рынка. Также считается, что оптимизация должна проводиться на данных, включающих неблагоприятные периоды, а также периоды, благоприятствующие

оптимизируемой стратегии. Придерживаясь этой концепции, некоторые создатели автоматизированных торговых систем предлагают использовать не сплошной (непрерывный) исторический ряд, а составлять базу данных из отдельных кусков истории, наиболее подходящих (по их мнению) для оптимизации определенной стратегии. Такой подход кажется нам неприемлемым, поскольку выбор «подходящих» отрезков исторических данных не может быть объективным.

- По нашему мнению, для параметрической оптимизации следует использовать непрерывный ценовой (или какой-либо другой) ряд. Вопрос о длине этого ряда нужно решать исходя из идеи конкретной торговой стратегии. Однако, какой бы горизонт истории ни был бы выбран, необходимо стремиться к тому, чтобы результат оптимизации был устойчив к его изменениям. Чем менее оптимизационное пространство чувствительно к небольшим изменениям в протяженности периода оптимизации, тем надежнее и устойчивее будет создаваемая стратегия. Желательно, чтобы оптимизационное пространство было устойчивым даже при значительных изменениях в длине исторического периода. Идеальной может считаться ситуация, когда результаты оптимизации, проведенной на двухлетнем периоде, близки к результатам, получаемым на трехлетнем периоде, или когда результаты шести- и десятилетней оптимизации не слишком отличаются друг от друга.
- Проведем тест на устойчивость оптимизационного пространства базовой дельта-нейтральной стратегии, оптимизируемой по целевой функции «прибыль». Для того чтобы определить степень устойчивости данного пространства к длине исторического периода, проведем последовательно серию оптимизаций на исторических периодах разной длины. Все оптимизации, представленные нами ранее в этой главе, основывались на десятилетнем историческом периоде. Теперь исследуем оптимизации, выполненные на девятом, восьмом, ..., первом годах ценовой истории.
- Для того чтобы результаты оптимизаций были сопоставимы (а также для того, чтобы было возможно построить свертку нескольких оптимизаций), необходимо чтобы значения целевой функции в каждом случае находились приблизительно в одном диапазоне. Это достигается с помощью трансформации, описанной в разделе, посвященном многокритериальному анализу [формула 2.4.1].
- Сравнение 10 оптимизационных поверхностей (рис. 2.6.2, для простоты восприятия графиков показаны только оптимальные области) выявляет наличие двух устойчивых оптимальных

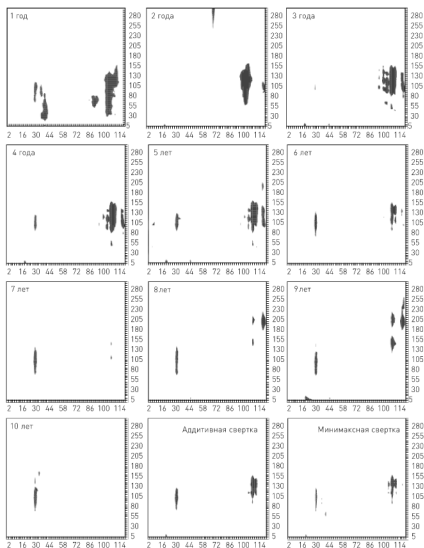
областей, присутствующих почти на всех поверхностях. Одна из них расположена в районе 28–32 дней по параметру «количество дней до экспирации» и 85–140 дней по параметру «период истории для расчета HV» (будем условно называть эту область «левой»). Вторая оптимальная область имеет координаты 108–112 по первому параметру и 90–160 по второму (будем называть эту область «правой»).

Левая область присутствует на всех оптимизационных поверхностях, кроме двух- и трехлетней. Площадь ее поверхности достаточно стабильна (изменяясь весьма незначительно от случая к случаю). Исключение составляет только оптимизация, проведенная на однолетнем периоде. В этом случае левая область имеет большую площадь и, по сути, представляет собой три отдельные сгруппированные области.

Правая область также присутствует на всех оптимизационных поверхностях, за исключением единственного случая, когда оптимизация проводилась на десятилетнем периоде. Еще в двух случаях эта область оказалась несколько смещенной в область более высоких значений параметра «период истории для расчета HV». Площадь поверхности правой области более изменчива, чем площадь левой области. В оптимизациях, проведенных на 1-, 2-, 3-, 4- и 5-летнем периодах, правая область имеет довольно большие размеры. В противоположность этому на оптимизационных поверхностях, полученных на более продолжительных периодах, она имеет меньшую площадь поверхности. Кроме того, во всех случаях правая область не является единой, а раздроблена на большое количество субобластей.

Степень устойчивости оптимизационного пространства можно оценить разными методами. Самый простой из них — визуальный. Сравнение разных графиков рис. 2.6.2 в принципе указывает на то, что данная оптимизация достаточно устойчива. Это следует из описанного выше персистентного расположения оптимальных областей. Можно оценить степень устойчивости количественно, например, путем вычисления изменчивости координат узлов, составляющих оптимальные области.

В том случае, когда устойчивость оценивается на основании сравнения большого количества оптимизационных поверхностей (как в нашем примере), можно использовать метод свертки. Идея заключается в том, что если поверхности очень отличаются друг от друга (то есть оптимизация является не устойчивой), то свертка таких поверхностей будет иметь большое количество беспорядочно разбросанных оптимальных областей. Если же



**Рис. 2.6.2.** Изменение формы оптимизационного пространства базовой дельта-нейтральной стратегии (показанного на рис. 2.2.2) в результате изменения периода истории, используемого в процессе оптимизации. Каждый график представляет один из периодов. Нижний средний и правый графики демонстрируют минимаксную и аддитивную свертку десяти оптимизационных поверхностей

оптимальные области располагаются на всех поверхностях приблизительно в одних и тех же местах (то есть если оптимизация устойчива), то свертка будет иметь одну или несколько четко обозначенных оптимальных областей. Нижний средний и правый графики рис. 2.6.2 демонстрируют аддитивную и минимаксную свертку десяти оптимизационных поверхностей (оба вида свертки оказались в данном случае почти идентичными). Левая и правая оптимальные области на этих свертках достаточно четко обозначены и локализованы, что еще раз подтверждает наш вывод об устойчивости оптимизации к изменению используемого периода истории.

## 2.7. Методы оптимизации

До сих пор мы использовали самый информативный способ оптимизации — полный перебор всех возможных комбинаций параметров. Этот метод требует вычисления значений целевой функции во всех узлах оптимизационного пространства. Поскольку расчет целевой функции каждого узла требует сложных многоступенчатых вычислений, недостаток полного перебора состоит в большом количестве расчетов и времени требуемого для завершения полного оптимизационного цикла. С увеличением числа параметров количество расчетов и времени растет по степенному закону. Расширение области допустимых значений параметров и уменьшение шага оптимизации также увеличивают продолжительность времени, необходимого для полного перебора.

Во всех рассмотренных ранее примерах оптимизировались всего два параметра, для каждого из которых тестировались 60 значений. Соответственно, оптимизационное пространство состояло из 3600 ячеек. В среднем продолжительность одной прогонки (вычисление одного узла) составляла порядка одной минуты (при использовании системы параллельных вычислений на нескольких современных персональных компьютерах). Это означает, что для построения полного оптимизационного пространства, аналогичного рассматривавшимся ранее, требуется около 60 часов. Очевидно, что это неприемлемо для оперативной работы по построению и модификации автоматизированных торговых стратегий. Более того, добавление в систему лишь одного дополнительного параметра (всего три) увеличивает время вычислений до пяти месяцев! Все это делает полный перебор не самым практичным, а во многих случаях и вовсе не применимым, методом поиска оптимальных решений.

Решить эту проблему можно путем применения специализированных методик, не требующих полного перебора всех узлов оптимизационного пространства. Существует целая группа методов (от самых простых до невероятно сложных), позволяющих вести поиск максимума функции целенаправленно. Эта область прикладной математики продолжает быстро развиваться, постоянно разрабатываются новые, все более и более высокотехнологичные методики. В этом разделе мы не будем касаться двух самых популярных (из категории сложных) разделов оптимизации — генетических алгоритмов и нейронных сетей. Во-первых, эти методы настолько сложны, что каждый из них требует как минимум отдельной книги (количество публикаций на эту тему растет с каждым годом). Во-вторых, задачи параметрической оптимизации с ограниченным количеством параметров в большинстве случаев можно решить менее затратными способами (чрезвычайно сложные торговые системы, требующие применения этих методик, не являются предметом этой книги). В этом разделе мы рассмотрим пять специализированных методов поиска оптимальных решений. Эти методы были выбраны по принципу эффективности (с учетом специфики решаемых задач) и простоты их практической реализации.

Методы оптимизации, не требующие полного перебора, имеют два существенных недостатка. Предполагается, что оптимизационное пространство унимодально, то есть имеет единственный экстремум. При наличии в пространстве параметров нескольких локальных экстремумов (то есть когда пространство полимодально) эти методы могут привести к решению, которое не является наилучшим (то есть выбрать локальный экстремум вместо глобального максимума). Образно говоря, такую ситуацию можно описать как восхождение на вершину холма вместо покорения расположенного неподалеку горного пика. Это общий недостаток всех методов, использующих значения целевой функции в непосредственной близости от ранее вычисленных узлов, для постепенного улучшения значения функции. Это объективный недостаток, присущий всем без исключения методам целенаправленного поиска. Как мы уже сказали, гарантию нахождения глобального экстремума в общем случае дает лишь полный перебор всех узлов оптимизационного пространства.

Существует достаточно простой, хоть и затратный с точки зрения времени, способ решения этой проблемы. Если из содержательных соображений невозможно обосновать наличие в оптимизационном пространстве единственного экстремума,



являющегося глобальным максимумом, следует многократно повторить процедуру «поиск экстремума при разных стартовых условиях» (то есть каждый раз начинать оптимизацию с разных узлов пространства). Стартовые узлы можно распределить равномерно в оптимизационном пространстве или выбрать случайным образом. Хотя достижение экстремума в этом случае не гарантируется, с практической точки зрения вероятность его получения может быть доведена до приемлемого уровня. Разумеется, чем больше попыток будет сделано, тем выше вероятность того, что хотя бы одна из них приведет к нахождению глобального максимума (однако и временные затраты также быстро возрастают). Чем больше оптимизационное пространство, тем больше попыток придется сделать.

Второй недостаток заключается в том, что найденное в результате целенаправленного поиска решение не несет в себе информацию о значениях целевой функции в узлах, соседствующих с узлом оптимального решения. Это означает, что мы не имеем возможности определить свойства оптимальной области, окружающей найденный экстремум. Следовательно, мы не в состоянии оценить степень робастности оптимального решения. Как обсуждалось в разделе 2.5, робастность является одним из основных показателей надежности оптимизации. Решить эту проблему можно только одним способом — вычислить значения целевой функции во всех узлах, окружающих найденные экстремумы. После этого можно оценить их робастность (используя одну из методик, описанных в разделе 2.5) и выбрать наилучший вариант в качестве оптимального решения.

### 2.7.1. Обзор основных методов целенаправленного поиска

#### **Метод покоординатного подъема**

Метод покоординатного подъема (обычно в названии этого метода используется слово «спуск», однако, как уже объяснялось ранее, для оптимизации торговых стратегий предпочтительно решать задачу максимизации прибыли) состоит в том, что последовательно производится поиск по каждому параметру, выбирая их один за другим по очереди. Алгоритм данного метода можно представить в следующем виде.

1. Выбирается стартовый узел, с которого начинается процесс оптимизации (выбор начальной точки требуется для инициации любого метода целенаправленного поиска). Выбор может быть случайным, осознанным (то есть основанным на предварительных знаниях разработчика) либо вычисленным (например, если

будет производиться множество повторяющихся оптимизаций, то стартовые узлы могут распределяться в оптимизационном пространстве равномерно).

2. Поскольку параметры оптимизируются не одновременно, а последовательно, необходимо определить их очередность. В большинстве случаев очередность не имеет большого значения. Однако если какой-либо параметр более важен, чем другие, то начинать оптимизацию нужно именно с него.
3. Начиная со стартовой точки, находится наилучшее решение по первому параметру. Поиск его осуществляется каким-либо методом одномерной оптимизации. В большинстве случаев допустимо использовать полный перебор, поскольку количество вычисляемых узлов в этом случае относительно невелико. При исследовании первого параметра значения всех других параметров остаются зафиксированными на значениях стартового узла.
4. Переход к оптимизации по следующему параметру производится после того, как найдено наилучшее решение по первому. Вновь производится одномерная оптимизация, при этом значения всех других параметров остаются зафиксированными на значениях узла, найденного в ходе оптимизации первого параметра.
5. Закончив один оптимизационный цикл (закрывающийся в одномерной оптимизации каждого из параметров), возобновляем процедуру, начиная с первого по списку параметра. Процесс останавливается после того, как очередной оптимизационный цикл не находит решение, превосходящее по значению целевой функции предыдущее.

Рассмотрим практическое применение данного алгоритма на примере оптимизации базовой дельта-нейтральной стратегии по целевой функции «прибыль» (оптимизационное пространство показано на рис. 2.2.2). Для того чтобы представить процедуру поиска оптимального решения визуально, ограничим области допустимых значений параметров диапазонами 2–80 для параметра «число дней до экспирации» и 100–300 для параметра «период истории для расчета HV». Выполнение алгоритма происходит следующим образом:

1. Выбираем стартовую точку. Предположим, что случайным образом был выбран узел с координатами 60 и 130. На рис. 2.7.1 данный узел отмечен номером 1.
2. Зафиксировав параметр «число дней до экспирации» на значении 60, вычисляем целевую функцию для всех значений параметра «период истории для расчета HV» (одномерная оптимизация методом полного перебора).

3. Определяем узел с максимальным значением целевой функции. В данном примере таким узлом является узел с координатами 30 и 250 (точка номер 2 на рис. 2.7.1).
4. Фиксируем значение параметра «период истории для расчета HV» на значении 250 и вычисляем целевую функцию для всех значений параметра «число дней до экспирации». Максимальное значение функции оказалось в узле с координатами 40 и 250 (третья точка).
5. Фиксируем число дней до экспирации на значении 40 и вычисляем целевую функцию для всех значений периода истории. Попадаем на следующий узел с координатами 40 и 170 (четвертая точка).
6. Фиксируем период истории на значении 170 и вычисляем целевую функцию для всех дней до экспирации. Попадаем на пятую точку с координатами 30 и 170.

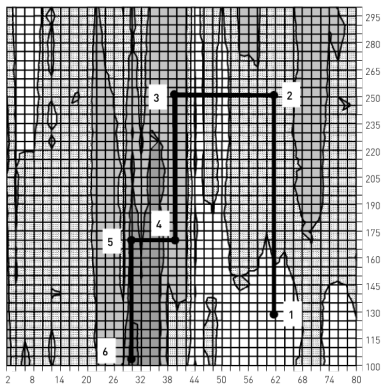


Рис. 2.7.1. Графическое представление поиска оптимального решения методом покоординатного подъема

7. Фиксируем число дней до экспирации на 30 и вычисляем целевую функцию для всех значений периода истории. Попадаем на шестую точку с координатами 30 и 105.
8. Фиксируем период истории на значении 105 и вычисляем целевую функцию для всех дней до экспирации. Выясняем, что максимум целевой функции приходится на исходный узел (точка номер 6). Это означает, что дальнейшего улучшения не происходит и, следовательно, алгоритм останавливается. Оптимальным решением является последний узел (номер 6).

Простой по своей логике и легко реализуемый, метод покоординатного подъема, однако, не очень эффективен. Представим себе ситуацию, когда двумерная оптимизационная поверхность имеет оптимальную область в форме узкого «горного хребта», протянувшегося с «северо-запада» на «юго-восток». Если высота хребта повышается в «юго-восточном» направлении, то, применив этот алгоритм, мы выйдем на гребень хребта и не сможем найти улучшения, поскольку для этого надо будет менять два параметра одновременно. Это сильно ограничивает применимость данного метода.

### Метод Хука–Дживса

Этот метод был разработан с целью уменьшить вероятность возникновения ситуаций, в которых метод покоординатного подъема останавливается преждевременно, не найдя удовлетворительного оптимального решения. Он включает в себя последовательное применение двух процедур — исследующего поиска и поиска по образцу, повторяемых до нахождения наилучшаемого оптимума. По сравнению с методом покоординатного подъема применение метода Хука–Дживса существенно сокращает вероятность остановки алгоритма, не достигнув экстремума. Алгоритм метода Хука–Дживса имеет следующий вид.

1. Выбирается стартовый узел. Начиная с этого узла, выполняется процедура исследующего поиска. Данная процедура заключается в исполнении нескольких циклов описанного выше метода покоординатного подъема. Один цикл исследующего поиска состоит из  $l$  циклов покоординатного поиска ( $l$  — количество параметров). Для двумерного оптимизационного пространства требуется провести два цикла покоординатного подъема с тем, чтобы дополнительно к стартовому узлу найти два субоптимальных узла.
2. Выполняется процедура поиска по образцу. Для этого необходимо определить направление от стартового узла на найденный (в результате исполнения первого цикла исследующего

поиска) узел. В этом направлении значение функции росло, и можно предположить, что, двигаясь далее в том же направлении, получим дальнейшее улучшение.

3. Выполняется процедура поиска в направлении, определенном на предыдущем этапе. В отличие от покоординатного подъема, данная оптимизация происходит при одновременном изменении всех параметров. Если в покоординатном подъеме движение возможно только по горизонтали или по вертикали (в двумерном случае), то поиск по образцу допускает движение вдоль любой прямой принадлежащей оптимизационной поверхности (или пространству в случае оптимизации более двух параметров).
4. Найдя наилучшую точку в этом направлении, повторяем цикл исследующего поиска, после чего вновь выполняем поиск по образцу, пока не достигнем точки, неулучшаемой ни на том, ни на другом этапе.

Рассмотрим применение метода Хука–Дживса на примере оптимизации базовой дельта-нейтральной стратегии по целевой функции «прибыль». По аналогии с предыдущим примером ограничим область допустимых значений параметров теми же диапазонами (2–80 для параметра «число дней до экспирации» и 100–300 для параметра «период истории для расчета HV»). Выполнение алгоритма происходит следующим образом:

1. Случайным образом выбираем стартовую точку. Предположим, что был выбран узел с координатами 68 и 300. Данный узел отмечен номером 1 на рис. 2.7.2.
2. Начинаем процедуру исследующего поиска, заключающуюся в исполнении двух (по числу параметров) циклов покоординатного подъема. Зафиксировав параметр «число дней до экспирации» на значении 68, вычисляем целевую функцию для всех значений параметра «период истории для расчета HV». Определяем узел с максимальным значением целевой функции, каковым является узел с координатами 30 и 225 (точка номер 2 на рис. 2.7.2).
3. Фиксируем значение параметра «период истории для расчета HV» на значении 225 и вычисляем целевую функцию для всех значений параметра «число дней до экспирации». Максимальное значение функции приходится на узел с координатами 36 и 225 (третья точка).
4. Выполняем процедуру поиска по образцу. Определяем направление от стартового узла (номер 1) на узел 3 (стрелка на рис. 2.7.2) и выполняем одномерную оптимизацию в найденном

- направлении. Вычисляем значение целевой функции во всех узлах, пересекаемых диагональю в заданном направлении.
5. Выбираем узел с максимальным значением целевой функции (четвертая точка с координатами 30 и 210). Начиная с этого узла, повторяем цикл исследующего поиска.
  6. Фиксируем значение параметра «число дней до экспирации» на значении 30 и вычисляем целевую функцию для всех значений параметра «период истории для расчета HV». Максимальное значение функции оказывается в узле с координатами 30 и 105 (пятая точка).
  7. Фиксируем период истории на значении 105 и вычисляем целевую функцию для всех дней до экспирации. Выясняем, что дальнейшего улучшения не происходит и, следовательно, алгоритм останавливается. Оптимальным решением является узел номер 5.

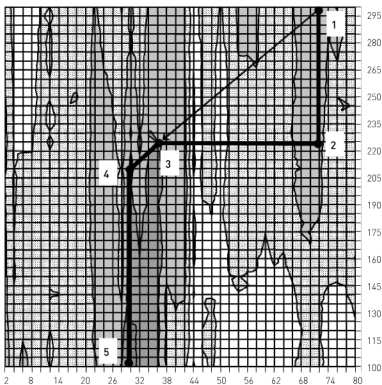


Рис. 2.7.2. Графическое представление поиска оптимального решения методом Хука–Дживса

### Метод Розенброка

Данный метод, называемый также методом вращающихся координат, является следующим шагом в усложнении метода покоординатного подъема. Первый его этап совпадает с методом покоординатного спуска. Затем, аналогично методу Хука и Дживса, находится направление, в котором улучшается целевая функция. Однако, помимо этого направления, строится еще  $(n - 1)$  направление, каждое из которых ортогонально найденному направлению и все они ортогональны между собой. Таким образом, вместо исходных параметров получается новая система координат. По отношению к исходной системе координат она повернута так, что одна из ее осей совпадает с направлением возрастания функции, найденном на предыдущем этапе. В этой системе координат производится очередной цикл покоординатного подъема, результат которого используется для нового вращения координат и следующего шага оптимизации. Для двумерного пространства алгоритм метода Розенброка имеет следующий вид.

1. Выбирается стартовый узел, начиная с которого выполняется цикл исследующего поиска (то есть два цикла покоординатного подъема).
2. Определяется направление от стартового узла на найденный узел и выполняется процедура поиска в этом направлении (поиск по образцу).
3. Найдя наилучший узел в этом направлении, строится направление перпендикулярное к ранее найденному направлению.
4. Производится поиск в перпендикулярном направлении и находится узел с наибольшим значением целевой функции.
5. Начиная с узла, найденного на перпендикулярном направлении, повторяем все процедуры (исследующий поиск, поиск по образцу, перпендикулярный поиск).

Рассмотрим практическое применение метода Розенброка на примере базовой дельта-нейтральной стратегии. Как и в предыдущих примерах, ограничим области допустимых значений параметров: 2–80 для параметра «число дней до экспирации» и 100–300 для параметра «период истории для расчета HV». Для выполнения алгоритма следует исполнить следующие процедуры:

1. Случайным образом выбираем стартовую точку. Предположим, что был выбран узел с координатами 70 и 180. Данный узел отмечен номером 1 на рис. 2.7.3.
2. Начинаем процедуру исследующего поиска, заключающуюся в исполнении двух циклов покоординатного подъема.

Фиксируем параметр «число дней до экспирации» на значении 70 и вычисляем целевую функцию для всех значений параметра «период истории для расчета HV». Узел с максимальным значением целевой функции имеет координаты 70 и 240 (точка номер 2 на рис. 2.7.3).

3. Зафиксировав параметр «период истории для расчета HV» на значении 240, вычисляем целевую функцию для всех значений параметра «число дней до экспирации». Максимум функции приходится на узел с координатами 36 и 240 (третья точка).
4. Выполняем процедуру поиска по образцу. Определяем направление от стартового узла (номер 1) на узел 3 (правая верхняя стрелка на рис. 2.7.3) и вычисляем значение целевой функции во всех узлах, пересекаемых данным направлением.
5. Находим узел с максимальным значением целевой функции (четвертая точка с координатами 40 и 230) и строим направление, перпендикулярное к ранее найденному направлению.
6. Производим поиск в новом (перпендикулярном) направлении и находим узел с наибольшим значением целевой функции (пятая точка с координатами 34 и 215).
7. Начиная с этого узла, повторяем цикл исследующего поиска методом покоординатного подъема. Фиксируем значение параметра «число дней до экспирации» на значении 34 и вычисляем целевую функцию для всех значений параметра «период истории для расчета HV». Максимальное значение функции оказалось в узле с координатами 34 и 140 (шестая точка).
8. Фиксируем период истории на значении 140 и вычисляем целевую функцию для всех дней до экспирации. Максимум функции приходится на узел с координатами 30 и 140 (седьмая точка).
9. Повторяем процедуру поиска по образцу. Определяем направление от пятой точки на седьмую точку (левая нижняя стрелка на рис. 2.7.3) и вычисляем значение целевой функции во всех узлах, пересекаемых данным направлением. Оказывается, что ни в одном из узлов указанного направления значение целевой функции не превосходит значение седьмой точки.
10. Строим направление, перпендикулярное направлению, указанному левой стрелкой (не показано на рисунке), и производим поиск вдоль этого направления. Оказывается, что и в этом направлении не находится ни одного узла, превосходящего по величине целевой функции седьмой узел.
11. Повторяем цикл исследующего поиска. Фиксируем значение параметра «число дней до экспирации» на значении 30 и вычисляем целевую функцию для всех значений параметра



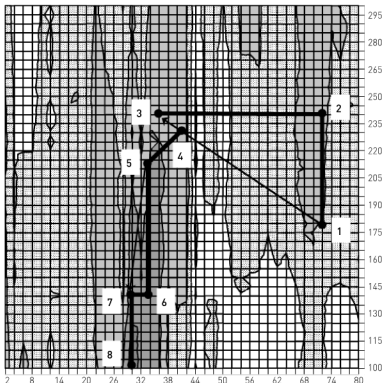


Рис. 2.7.3. Графическое представление поиска оптимального решения методом Розенброка

«период истории для расчета HV». Максимальное значение функции оказывается в узле с координатами 30 и 105 (восьмая точка).

12. Как мы уже видели в предыдущих примерах (метод Хука-Дживса), дальнейшего улучшения не происходит и, следовательно, алгоритм останавливается. Оптимальным решением является узел номер 8.

Метод Розенброка представляет собой усовершенствование методов покоординатного подъема и Хука-Дживса. В некоторых случаях он может заметно улучшить эффективность поиска, однако это происходит далеко не всегда. В определенных условиях, зависящих в основном от формы и структуры оптимизационного пространства, эффективность поиска может не только не повыситься, но даже снизиться.

### Метод Нелдера–Мида

Существуют две разновидности метода Нелдера–Мида (называемый также методом деформируемого многогранника, симплексным поиском, поиском методом амебы) — первоначальная, с использованием правильного симплекса, и усовершенствованная, с использованием деформируемого симплекса (в этом разделе мы рассмотрим усовершенствованную разновидность). Название отчасти может вводить в заблуждение, поскольку известен симплекс-метод линейного программирования, решающий задачу оптимизации с линейной целевой функцией при линейных ограничениях, с которым описываемый метод не имеет почти ничего общего. Под симплексом понимается многогранник в  $n$ -мерном пространстве, имеющий  $n + 1$  вершину. Его можно рассматривать как обобщение треугольника на случай более чем двух измерений. Треугольник, в свою очередь, является примером симплекса в двумерном пространстве.

В процессе оптимизации симплекс, образно говоря, перекачивается в пространстве параметров, приближаясь к экстремуму. Вычислив значения целевой функции в его вершинах, находим худшее из них и перемещаем симплекс так, чтобы прочие вершины остались на месте, а взамен вершины с худшим значением была бы включена вершина, симметричная «худшей» относительно центра тяжести симплекса. Особенно наглядно это можно представить в двумерном случае, когда симплекс, а им в этом случае является треугольник, перекачивается через сторону треугольника, противоположащую к «худшей» вершине. Таким образом симплекс приближается к экстремуму, пока такие движения не перестанут улучшать целевую функцию. Наилучшая из полученных вершин является оптимальным решением. Однако у такого метода есть очевидный недостаток. Когда мы окажемся в непосредственной близости экстремума, так что расстояние от центра симплекса до экстремума станет меньше стороны симплекса, он потеряет способность приближаться к экстремуму. В этом случае можно уменьшить размер симплекса, при том, что он сохранит исходную форму, и продолжить поиск, повторяя это уменьшение размеров при потере способности приближаться к экстремуму, пока длина стороны не станет меньше шага оптимизации.

Метод деформируемого симплекса (деформируемого многогранника), помимо «перекачивания» его в пространстве параметров, включает и изменение его формы (что объясняет еще одно его название — «метод амебы»). Если у метода

правильного симплекса нет иных параметров, кроме длины ребра симплекса, то здесь вводится система из четырех выбираемых исследователем параметров: коэффициент отражения  $\alpha$  (обычно принимаемый равным 1), коэффициент растяжения  $\sigma$  (часто принимаемый равным 2), коэффициент сжатия  $\gamma$  (часто выбираемый равным 0,5), коэффициент редукции  $\rho$  (также может быть выбран 0,5). Как показывает опыт, выбор значений коэффициентов может оказаться критическим для получения удовлетворительных результатов оптимизации. Иногда рекомендуют выбирать коэффициенты  $\gamma$  и  $\sigma$  так, чтобы они не были взаимно обратными, например 2/3 и 2.

Алгоритм метода Нелдера–Мида состоит из следующих шагов:

1. Выбираются  $n + 1$  точка начального симплекса  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . Это могут быть любые точки, не принадлежащие  $n$ -мерной гиперплоскости. В двумерном случае, когда симплекс является треугольником, достаточно, чтобы три точки не лежали на одной прямой.
2. Точки упорядочиваются согласно значениям целевой функции (при условии, что ставится задача максимизации функции):

$$f(x_1) \geq f(x_2) \geq f(x_3) \geq \dots \geq f(x_{n+1}).$$

3. Вычисляется точка  $x_0$ , являющаяся центром тяжести фигуры, вершины которой совпадают с точками симплекса, за исключением «худшей» точки  $x_{n+1}$ :

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Для двумерной оптимизации  $x_0$  располагается посередине отрезка, соединяющего лучшую и среднюю (по значениям целевой функции) точки треугольника.

4. Шаг отражения. Вычисляем отраженную точку:

$$x_r = x_0 + \alpha(x_0 - x_{n+1}).$$

Если значение целевой функции в отраженной точке лучше, чем во второй «худшей» точке  $x_n$ , но при этом не лучше, чем в наилучшей  $x_1$ , то отраженная точка заменяет в симплексе удаленную из него «худшую», и алгоритм возвращается на шаг 2 (симплекс «перекатился», уйдя от «худшей» точки в сторону увеличения целевой функции). Если значение целевой

функции в «отраженной точке» лучше, чем во всех исходных точках, переходим к шагу 5.

- Шаг растяжения. Производится вычисление «точки растяжения». Она находится на одном направлении с вектором, проведенным из «худшей» точки симплекса к центру тяжести, но дальше на величину, определяемую коэффициентом растяжения:

$$x_e = x_0 + \sigma(x_0 - x_{n-1}).$$

Содержательный смысл этой операции таков: если найдено направление, в котором целевая функция возрастает, симплекс растягивается в этом направлении. Если «точка растяжения» окажется лучше «отраженной точки», то последняя заменяется в симплексе «точкой растяжения», и он становится вытянутым в этом направлении. После этого возвращаемся в шаг 2. Если «точка растяжения» окажется не лучше «отраженной точки», то смысла в растяжении нет, в симплексе остается «отраженная точка», и форма его не меняется. Также следует возврат к шагу 2.

- Шаг сжатия. На этот шаг мы попадаем, если отраженная точка не оказывается лучше хотя бы «второй худшей» точки. Производится вычисление «точки сжатия»:

$$x_c = x_0 + \rho(x_0 - x_{n-1}).$$

Если полученная точка оказывается лучше «худшей» точки, то она заменяет ее в симплексе, и мы переходим в шаг 2. Симплекс при этом сожмется в этом направлении. Если же полученная точка окажется хуже и «худшей» точки, то это может свидетельствовать не о неудачном выборе направления, а о том, что мы уже находимся в непосредственной близости экстремума и для его нахождения необходимо уменьшить размер симплекса, чтобы не проскочить мимо него. Переходим к шагу 7.

- Шаг редукции (reduction). Точка с наилучшим значением целевой функции остается на месте, а все остальные стягиваются к ней.

$$x_i = x_0 + \gamma(x_i - x_1), \quad \forall i \in \{2, \dots, n+1\}.$$

Если размер симплекса (ввиду его неправильной формы, нужно определить это понятие особо, например как максимальное расстояние от центра тяжести среди всех вершин) окажется меньше заданной величины, то алгоритм заканчивается. В противном случае переходим на шаг 2.

Рассмотрим практическое применение метода Нелдера–Мида для базовой дельта-нейтральной стратегии. Ограничим области допустимых значений параметров: 10–38 для параметра «число дней до экспирации» и 70–140 для параметра «период истории для расчета HV». Для выполнения алгоритма следует исполнить следующие процедуры:

1. Выбираем три точки начального симплекса. Предположим, что в качестве вершин симплекса были выбраны узлы с координатами 12 и 105, 18 и 110, 18 и 100.
2. Находим худший (по значению целевой функции) узел начального симплекса. Данный узел отмечен номером 1 на рис. 2.7.4.
3. Вычисляем центр тяжести отрезка с координатами 18 и 110, 18 и 100. Центром является узел с координатами 18 и 105.
4. Выполняем шаг отражения, используя коэффициент растяжения  $\alpha = 1$ . Отраженная точка, отмеченная номером 2 на рис. 2.7.4, имеет координаты 24 и 105. Поскольку значение

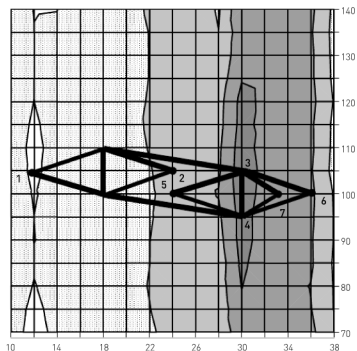


Рис. 2.7.4. Графическое представление поиска оптимального решения методом Нелдера–Мида

целевой функции в отраженной точке лучше, чем во всех точках начального симплекса, переходим к шагу растяжения.

5. Вычисляем «точку растяжения», используя коэффициент растяжения  $\sigma = 2$ . Она находится путем удвоения расстояния между центром тяжести симплекса и второй точкой. Полученный узел (отмечен номером 3 на рис. 2.7.4) имеет более высокое значение целевой функции по сравнению с узлом номер 2 и поэтому заменяет последний, становясь новой вершиной симплекса.
6. Выполняем очередной шаг отражения. Отраженная точка отмечена номером 4 на рис. 2.7.4. Поскольку значение целевой функции в отраженной точке ниже, чем во второй худшей точке предыдущего симплекса, переходим к шагу сжатия.
7. Вычисляем «точку сжатия», используя коэффициент сжатия  $\gamma = 0,5$ . Получаем узел под номером 5. Поскольку этот узел лучше худшего в предыдущем симплексе, но не самый лучший, переходим к шагу отражения.
8. Выполняя шаг отражения, получаем узел номер 6. Поскольку значение целевой функции в этом узле ниже, чем во всех точках предыдущего симплекса, переходим к шагу сжатия.
9. Вычислив «точку сжатия», получаем точку номер 7. Поскольку данная точка попадает между двумя узлами, дальнейшее выполнение стандартного алгоритма Нелдера–Мида для данного оптимизационного пространства невозможно. Для выбора окончательного оптимального решения можно пойти несколькими путями. Можно вычислить целевую функцию точки 7 путем интерполяции как среднее арифметическое целевых функций узлов с координатами 32 и 100, 34 и 100. После чего можно продолжить исполнение стандартного алгоритма, вычисляя таким же образом все точки, не попадающие на узлы оптимизационного пространства. Другой, более простой, путь состоит в выборе оптимального решения среди одной из вершин последнего симплекса (той, которая имеет наибольшее значение целевой функции).

Этот алгоритм показал себя достаточно эффективным в решении задач разного рода и при этом достаточно прост в реализации. Основным его недостатком является большое количество параметров-коэффициентов, от выбора которых может сильно зависеть эффективность оптимизации. Как будет показано в следующем разделе, для эффективного использования метода Нелдера–Мида необходима тонкая настройка параметров и предварительная информация о свойствах оптимизационного пространства.

### 2.7.2. Сравнение эффективности основных методов целенаправленного поиска

В предыдущем разделе мы описали четыре основных метода целенаправленного поиска оптимального решения. Каждый из них имеет свои особенности, достоинства и недостатки. Первый из рассмотренных методов (покоординатный подъем) является самым базовым и простым. Все прочие более сложны, причем каждый последующий является более сложным и, по идее, более совершенным, чем предыдущие (имеется в виду очередность их рассмотрения в разделе 2.7.1). Однако опыт показывает, что более сложные методы не всегда являются более эффективными. В общем виде можно утверждать, что эффективность того или иного метода зависит от формы оптимизационного пространства, на котором он применяется. Определенный метод может показать высокую эффективность на одном типе оптимизационного пространства, но оказаться непригодным для пространства, имеющего другую структуру.

В этом разделе мы исследуем эффективность четырех описанных ранее методов и протестируем зависимость их эффективности от формы оптимизационного пространства. Для этого мы применили каждый из методов поиска оптимального решения к двум разным по форме оптимизационным пространствам базовой дельта нейтральной стратегии. Одно из пространств имеет единственную оптимальную область относительно большого размера (оно формируется целевой функцией «прибыль», левый верхний график рис. 2.3.1), второе пространство имеет совершенно другую форму — множество небольших оптимальных областей (целевая функция «процент прибыльных сделок» левый нижний график рис. 2.3.1).

Чтобы получить статистически достоверные результаты, для каждой из двух целевых функций и для каждого метода было проведено по 300 полных оптимизационных циклов. Все циклы отличались друг от друга только стартовой точкой, с которой начинался поиск оптимального решения. Сравнительный анализ эффективности разных методов оптимизации базируется на следующих пяти показателях (в каждом случае они рассчитываются на основе 300 данных):

1. **Процент оптимальных решений, совпадающих с глобальным максимумом** (когда оптимизационный алгоритм остановился на узле с наибольшим значением целевой функции).

2. **Процент оптимальных решений, расположенных в оптимальной области.** Значения целевой функции этих решений не должны быть ниже определенного порогового значения.
3. **Процент неудовлетворительных оптимальных решений.** Целевые функции этих решений имеют значения, не превышающие определенную пороговую величину.
4. **Среднее значение целевой функции всех оптимальных решений,** рассчитанное на основе 300 полных оптимизационных циклов.
5. **Среднее количество вычислений,** необходимых для выполнения полного оптимизационного цикла.

В таблице 2.7.1 показаны значения всех пяти показателей эффективности для четырех методов целенаправленного поиска. Когда в качестве целевой функции использовалась прибыль, метод Хука–Дживса оказался наиболее эффективным. В 69% случаев в качестве оптимального решения был выбран узел, соответствующий глобальному максимуму (соответственно, в 31% случаев алгоритм поиска остановился, не найдя узел с самым высоким значением целевой функции). По проценту попаданий в оптимальную область (72% от всех случаев) и по среднему значению целевой функции, рассчитанному для всех решений (6.43), данный метод также значительно превзошел все другие методы. Единственный показатель, по которому метод Хука–Дживса оказался несколько хуже (совсем ненамного) метода покоординатного подъема — это процент неудовлетворительных оптимальных решений (15%). Однако существенным недостатком этого метода оказалась его затратность по времени. Для завершения одного полного оптимизационного цикла пришлось произвести в среднем 1279 вычислений. Это значительно больше, чем количество вычислений, требуемых для других методов.

На втором месте по эффективности оптимизации унимодальной целевой функции (прибыль) находится метод покоординатного подъема. Хотя он несколько уступает по всем показателям (кроме процента неудовлетворительных оптимальных решений) методу Хука–Дживса, его несомненным достоинством является относительно небольшое количество требуемых вычислений (в среднем 319, что в четыре раза меньше, чем требуется при использовании метода Хука–Дживса).

Метод Розенброка существенно уступает по эффективности двум предыдущим методикам. Лишь в 11% случаев с помощью этого метода удалось обнаружить узел глобального максимума,



## Целевая функция: прибыль

Метод	Процент оптимальных решений, совпадающих с глобальным максимумом (7.13)	Процент оптимальных решений, расположенных в оптимальной области (>6)	Процент неудовлетворительных оптимальных решений (<5)	Среднее значение целевой функции всех оптимальных решений	Среднее количество вычислений
Покординатного подъема	48	48	14	6,15	319
Хука-Дживиса	69	72	15	6,43	1279
Розенброка	11	29	41	5,21	835
Нелдера-Мида	7	15	60	4,45	107

## Целевая функция: процент прибыльных сделок

Метод	Процент оптимальных решений, совпадающих с глобальным максимумом (0.74)	Процент оптимальных решений, расположенных в оптимальной области (>0,7)	Процент неудовлетворительных оптимальных решений (<0,65)	Среднее значение целевой функции всех оптимальных решений	Среднее количество вычислений
Покординатного подъема	8	37	0	0,69	226
Хука-Дживиса	9	38	0	0,69	959
Розенброка	12	28	1	0,69	712
Нелдера-Мида	2	2	56	0,64	106

Таблица 2.7.1. Показатели эффективности четырех методов оптимизации, основанных на целенаправленном поиске оптимальных решений

а в 41% случаев алгоритм остановился на ячейках, относящихся к областям с низкими значениями целевой функции. Кроме того, количество вычислений, требуемых для нахождения оптимальных решений, по методу Розенброка оказалось достаточно большим (в среднем 835), находясь на втором месте после метода Хука–Дживса.

Наихудшие результаты были получены для метода Нелдера–Мида. Хотя количество вычислений для этого метода оказалось наименьшим по сравнению с другими методами, все показатели его эффективности находятся на очень низком уровне. Всего в 7% случаев решение совпало с глобальным максимумом и лишь в 15% случаев оптимальное решение находилось в оптимальной области. В 60% случаев решения оказались неудовлетворительными.

Для другого оптимизационного пространства, построенного на основе целевой функции «процент прибыльных сделок», эффективность методов покоординатного подъема Хука–Дживса и Розенброка оказалась приблизительно одинаковой (если не считать того, что последний метод был несколько хуже по показателю «процент попаданий в оптимальную область»). Метод Нелдера–Мида вновь показал наихудшие результаты. Такая низкая эффективность данного метода весьма удивительна. Возможно, она объясняется тем, что для успешного применения этого метода необходимо тщательно подбирать стартовые условия (размер симплекса), а также значения его многочисленных параметров (коэффициенты отражения, сжатия, редукции, расширения). Мы же выбрали размер симплекса произвольно, а для коэффициентов приняли обычно используемые значения. Вероятно, для получения удовлетворительных результатов необходима более тонкая настройка параметров и некоторые априорные предположения о свойствах оптимизационного пространства.

Для оптимизационного пространства, соответствующего целевой функции «процент прибыльных сделок», эффективность всех четырех методов оптимизации оказалась значительно ниже по сравнению с их эффективностью на пространстве функции «прибыль». Это подтверждает наше предположение о том, что форма оптимизационного пространства оказывает значительное влияние на эффективность оптимизации. По всей видимости, унимодальные пространства с относительно широкой оптимальной зоной легче поддаются оптимизации методами целенаправленного поиска, чем полимодальные

пространства с большим количеством раздробленных оптимальных областей.

### 2.7.3. Случайный поиск

До сих пор мы рассматривали два подхода к оптимизации — полный перебор, требующий вычисления целевой функции во всех узлах оптимизационного пространства, и целенаправленный поиск. Возможен еще один подход, состоящий в вычислении целевой функции в случайно выбранных узлах оптимизационного пространства. Безусловно, случайный поиск представляет собой самый простой способ оптимизации. Для его реализации достаточно выбрать случайным образом заданное количество узлов и рассчитать значения целевой функции для каждого из них. После этого узел с наибольшим значением выбирается в качестве оптимального решения. Этот метод настолько примитивен, что зачастую вообще не рассматривается в качестве приемлемой методики. Тем не менее во многих случаях (и по многим показателям) случайный поиск может дать достаточно эффективные результаты, не уступающие методам целенаправленного поиска.

Основной и единственный фактор, влияющий на эффективность случайного поиска, — это количество выбираемых ячеек. Чем больше делается попыток, тем выше вероятность того, что оптимальное решение совпадет с глобальным максимумом или будет лежать в непосредственной близости от него. При этом количество попыток должно определяться в зависимости от размеров оптимизационного пространства. В наших примерах это пространство состоит из 3600 ячеек. Если для случайного поиска в таком пространстве использовать 100 попыток, то обследованными окажутся менее 3% ячеек, что, очевидно, недостаточно для нахождения удовлетворительного оптимального решения. Однако если оптимизационное пространство состоит из 500 ячеек, то 100 попыток составят 20%, что может оказаться достаточным.

В этом разделе мы проанализируем три аспекта эффективности случайного поиска:

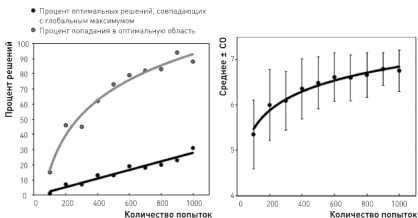
1. Зависимость эффективности поиска от количества случайно выбираемых узлов. Эффективность будет тестироваться для 100, 200, ..., 1000 попыток (всего 10 вариантов количества выбираемых узлов).
2. Влияние формы оптимизационного пространства на эффективность случайного поиска. Как и в предыдущем разделе, мы

применим метод случайного поиска к оптимизационным пространствам, соответствующим целевым функциям «прибыль» и «процент прибыльных сделок».

3. Сравнение эффективности случайного поиска с двумя методами целенаправленного поиска — покоординатным спуском и методом Хука–Дживса (которые оказались наиболее эффективными среди других методов целенаправленного поиска).

Для анализа эффективности случайного поиска воспользуемся теми же показателями, которые использовались для сравнения четырех методов целенаправленного поиска (таблица 2.7.1).

Как и следовало ожидать, значения всех показателей растут по мере увеличения количества случайно выбранных узлов (рис. 2.7.5 и 2.7.6). Однако темпы этого роста зависят от каждого конкретного показателя. Более того, форма зависимости эффективности поиска от количества попыток различна для разных показателей. Процент оптимальных решений, совпадающих с глобальным максимумом, увеличивается линейно с ростом количества проверенных узлов. С другой стороны, процент оптимальных решений, расположенных в оптимальной области,

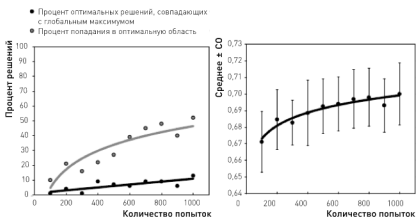


**Рис. 2.7.5.** Зависимость показателей эффективности случайного поиска от количества выбираемых узлов. Целевая функция — «прибыль». На левом графике показаны показатели «процент оптимальных решений, совпадающих с глобальным максимумом» и «процент попадания в оптимальную область». На правом графике показан показатель «среднее значение оптимального решения» и его изменчивость, выраженная с помощью стандартного отклонения

и среднее значение целевой функции всех оптимальных решений растут нелинейно по мере увеличения количества попыток: в начале рост происходит быстрыми темпами, затем дальнейшее увеличение числа попыток приводит лишь к незначительному росту эффективности поиска.

Эффективность случайного поиска выше для оптимизационного пространства, соответствующего целевой функции «прибыль» по сравнению с пространством «процент прибыльных сделок» (сравни левые графики рис. 2.7.5 и 2.7.6). Это полностью совпадает с результатами целенаправленного поиска, полученными в предыдущем разделе. Кроме того, для целевой функции «прибыль» изменчивость показателя «среднее значение оптимального решения» уменьшается при увеличении числа попыток (правый график рис. 2.7.5). В то же время для целевой функции «процент прибыльных торговых циклов» такая зависимость не наблюдается (правый график рис. 2.7.6).

По показателю «процент оптимальных решений, совпадающих с глобальным максимумом» случайный поиск уступает по координатному подъему и методу Хука–Дживса. Однако при



**Рис. 2.7.6.** Зависимость показателей эффективности случайного поиска от количества выбираемых узлов. Целевая функция — «процент прибыльных сделок». На левом графике показаны показатели «процент оптимальных решений, совпадающих с глобальным максимумом» и «процент попадания в оптимальную область». На правом графике показан показатель «среднее значение оптимального решения» и его изменчивость, выраженная с помощью стандартного отклонения

использовании достаточного количества попыток случайный поиск оказывается более эффективным по двум другим показателям. Для целевой функции «прибыль» случайный поиск становится эффективнее покоординатного подъема по показателям «среднее значение оптимального решения» и «процент попадания в оптимальную область» начиная с 400 попыток. При использовании 500 попыток данный метод превосходит и вторую методику, Хука–Дживса (сравни рис. 2.7.5 с данными таблицы 2.7.1). Для целевой функции «процент прибыльных сделок» случайный поиск становится эффективнее покоординатного подъема и метода Хука–Дживса по проценту попаданий в оптимальную область начиная с 600 попыток. По среднему значению оптимального решения случайный поиск превосходит эти две методики начиная с 700 попыток (сравни рис. 2.7.6 с данными таблицы 1).

Проведенный анализ приводит к ряду полезных выводов относительно применимости случайного поиска для оптимизации торговых стратегий. В общем виде можно утверждать, что при увеличении числа попыток до определенного уровня, вероятность того, что наилучшее из полученных решений окажется достаточно близким к глобальному максимуму, может быть удовлетворительно велика. В частности, случайный поиск может использоваться, если (1) размеры оптимизационного пространства позволяют исследовать порядка 20% его ячеек и (2) имеется предварительная информация об унимодальности оптимизационного пространства. Последнее возможно в тех случаях, когда в процессе построения стратегии уже производилась оптимизация путем полного перебора, в ходе которой форма пространства была установлена. Если пространство оказывается близким по форме к тому, которое было получено нами для целевой функции «прибыль» (рис. 2.2.2), то при дальнейших доработках и модификациях стратегии можно использовать метод случайного поиска.

## **2.8. Построение оптимизационной инфраструктуры: решения и компромиссы**

Построение инфраструктуры для оптимизации торговых стратегий вообще и опционных стратегий в частности требует принятия целого ряда сложных решений, от продуманности которых зависит не только количество ресурсов, затрачиваемых на выполнение необходимых процедур, но и надежность

получаемого результата. В большинстве случаев сложность решений заключается в необходимости поиска компромисса между минимизацией времени, необходимого для вычислений, и максимизацией объема получаемой информации, необходимой для эффективного поиска оптимума.

В частности, выбор структуры оптимизационного пространства требует принятия нескольких компромиссных решений. Первое из них — размерность оптимизации, определяемая количеством параметров. Полный набор параметров, требующих оптимизации, определяется логикой стратегии, однако решение о том, какие из них будут оптимизироваться «техническими методами», аналогичными описанным в этой главе, а какие будут зафиксированы исходя из априорных соображений (или с помощью научных методов), безусловно, является продуктом компромисса. Чем меньше параметров необходимо оптимизировать, тем проще процедуры и тем меньше риск оверфитинга. С другой стороны, отказ от оптимизации (фиксация параметров) повышает риск упустить прибыльный вариант стратегии. Следующее решение — это выбор диапазона допустимых значений параметров и шага оптимизации. Здесь необходим компромисс между затрачиваемым временем и получаемой информацией. Поэтому решение зависит в большой степени от объема вычислительных ресурсов, доступных разработчику стратегии.

Сокращение времени вычислений является важным, но далеко не единственным вызовом, стоящим перед разработчиком стратегий. Принципиально важным является решение о составе, количестве и относительной важности целевых функций, используемых в процессе оптимизации. Мы рекомендовали основывать решение этого вопроса на степени взаимозависимости между разными функциями и на объемах содержащейся в них дополнительной информации. После того как набор целевых функций определен, необходимо выбрать метод многокритериального анализа, что также является нетривиальной задачей. Многие другие факторы, в том числе робастность и устойчивость оптимизационного пространства, могут оказывать решающее влияние на результаты оптимизации. Выбор метода целенаправленного поиска также является одним из основных компромиссов (разрешаемых на основе предварительного изучения свойств оптимизационного пространства), от которого зависит надежность конечного оптимального решения.

В этой главе мы использовали базовый вариант дельта-нейтральной стратегии для того, чтобы на ее примере продемонстрировать общие подходы к поиску компромиссов и принятию системных решений необходимых для организации эффективной процедуры оптимизации. Обсуждая основные структурные элементы оптимизации дельта-нейтральной стратегии, мы стремились поместить их в контекст общей схемы оптимизации опционных стратегий. Поскольку каждый элемент формируется исходя из специфических особенностей конкретной стратегии, мы не могли дать готовые универсальные решения, пригодные для всех типов стратегий. Вместо этого мы попытались разработать систему рекомендаций, позволяющую построить надежную инфраструктуру, подходящую для оптимизации разных опционных стратегий.



На сегодняшний день не существует универсального определения, способного охватить все аспекты такого сложного и многогранного понятия, как «риск». По сути, приходится признать, что, оперируя ежедневно этим понятием, миллионы людей — журналистов, бизнесменов, ученых, профессиональных инвесторов и рядовых потребителей финансовых услуг — не в состоянии дать строгое определение обсуждаемого ими предмета. Это тем более удивительно, что понятие риска является краеугольным камнем, на котором строится вся теория экономики, финансов и многих смежных с ними дисциплин. Более того, подобная ситуация существует в двух других — бесспорно основных — областях исследований окружающего нас материального мира — биологии и физике. В биологии не существует универсального определения вида. И это при том, что данное понятие лежит в фундаменте теории макроэволюции — основе основ всех важнейших разделов биологии. Физики, в свою очередь, также не пришли к единому и универсальному определению понятия энергии. Нет необходимости в доказательствах того, что энергия является ключевым элементом, без точного понимания которого невозможна ни полная разработка квантовой теории микромира, ни построение «окончательной теории всего», претендующей на описание зарождения и эволюции Вселенной, а также прогноз ее дальнейшей судьбы.

Не удивительно ли, что три основные области человеческих знаний — биология, экономика, физика — возводят свои теории на основе базовых элементов, не имеющих строгого и однозначного научного определения? Мы оставляем этот вопрос без ответа, поскольку даже слабая попытка найти на него ответ уведет нас в сторону не только от основной темы, но и от системы строго рационального мышления, которого авторы неукоснительно придерживаются в данной книге.

### 3.1. Особенности оценки риска опционов

Все финансовые инструменты можно условно разделить на две категории — имеющие линейную и нелинейную платежную функцию. К первой категории относятся акции, товары, валюты и другие активы, прибыли и убытки от владения которыми прямо пропорциональны их цене. К нелинейным активам относятся некоторые производные финансовые инструменты, стоимость которых зависит от цены другого актива, называемого базовым. Зависимость прибылей и убытков этих инструментов

от цены базового актива нелинейна. Наиболее распространенным среди нелинейных инструментов являются опционы. Подходы, применяемые к оценке рисков линейных и нелинейных инструментов, отличаются принципиально.

### 3.1.1. Оценка риска линейных финансовых инструментов

Основы теории управления рисками закладывались в те времена, когда производные финансовые инструменты не имели широкого распространения. Соответственно, все классические методики оценки рисков были разработаны для линейных инструментов. В качестве базовой концепции для количественного выражения риска было принято утверждение, что риск владения определенным активом пропорционален мере изменчивости его цены.

- Дать объективную оценку изменчивости цены можно только на основе информации о ценовых колебаниях, имевших место в прошлом (другие оценки, основанные на экспертных мнениях, нельзя считать объективными). Такой подход имеет существенный недостаток, поскольку основывается на экстраполяции исторических данных и предположении, что вероятность будущих событий можно рассчитать исходя из наблюдения частоты возникновения аналогичных событий в прошлом. Хотя во многих областях деятельности (например, расчет рисков автострахования) данная методика может быть приемлема, многократно доказано, что в отношении финансовых рынков она, мягко говоря, несовершенна. Тем не менее, несмотря на все недостатки и неточности, возникающие при оценках рисков на основе исторических данных, такой подход широко распространен и является общепризнанным, поскольку на сегодняшний день не существует более совершенных альтернатив.
- В качестве меры изменчивости, для обозначения которой в большинстве случаев используется термин «историческая волатильность», было предложено использовать стандартное отклонение доходностей (приращений цены) заданного инструмента. Как правило, историческая волатильность рассчитывается как среднеквадратичное отклонение логарифмов дневных цен закрытия, приведенное к годовому эквиваленту. Глубина исторического периода, используемого для расчета волатильности, является ключевым параметром при оценке рисков линейных активов. При использовании слишком длинных временных рядов существует риск того, что оценка текущего риска будет основываться на устаревших данных, не имеющих

прямого отношения к динамике современного рынка. Такая оценка не может считаться надежной. С другой стороны, использование слишком коротких временных рядов чревато получением нестабильных оценок риска, поскольку происходящее с течением времени добавление новых и выбытие устаревших данных изменяет довольно серьезно всю расчетную базу, используемую для расчета волатильности. Поэтому выбор глубины исторического горизонта является продуктом компромисса и определяется в зависимости от того, для каких целей производится оценка риска. В частности, этот выбор может определяться исходя из особенностей разрабатываемой торговой стратегии.

Хотя стандартное отклонение само по себе является оценкой риска, оно может также использоваться для расчета более сложных показателей, выражающих риски в более удобной для практического использования форме. Наиболее известным примером такого показателя является Value at Risk (VaR), представляющий собой оценку убытка, который с заданной вероятностью не будет превзойден в течение определенного периода времени. Иначе говоря, VaR представляет собой оценку максимального убытка при определенном уровне значимости.

История появления и широкого распространения этого показателя восходит к биржевому краху 1987 г., показавшему несостоятельность существовавших на тот момент механизмов управления рисками. Поиск новых подходов к прогнозированию риска привел к быстрому развитию и широкому применению инновационной технологии, выражающей риск не в виде статистического показателя, каковым является стандартное отклонение, а путем вычисления конкретной суммы денег, которая может быть потеряна с заданной вероятностью. В 1990-х гг. этот индикатор стал общепризнанным стандартом измерения риска, а в 1999 г. получил официальный международный статус, закрепленный Базельскими соглашениями. Со временем VaR стал обязательным показателем, фигурирующим в отчетности большинства финансовых организаций.

Признавая, что с практической точки зрения VaR намного удобнее в использовании, чем стандартное отклонение, концептуально эти показатели ничем друг от друга не отличаются. В этом легко убедиться, рассмотрев методику вычисления VaR. Существуют три основных способа расчета: аналитический, исторический и методом Монте-Карло. Аналитический метод основан на использовании параметров выбранного распределения

доходностей. Чаще всего используется логнормальное распределение (несмотря на его многочисленные недостатки). Поскольку основным параметром данного распределения является стандартное отклонение (второй параметр, математическое ожидание цены, обычно принимается равным текущей цене актива), можно утверждать, что VaR является всего лишь показателем, производным от стандартного отклонения. Исторический метод предполагает использование изменений цен актива, произошедших за определенный промежуток времени в прошлом. Поскольку стандартное отклонение рассчитывается на основе тех же данных, оба показателя сильно коррелируют между собой и, по сути, выражают одну и ту же величину. С помощью метода Монте-Карло генерируется множество случайных вариантов цены актива. И вновь алгоритм генерации цен основан на использовании функции плотности вероятности определенного распределения. В качестве распределения обычно используется логнормальное, основным параметром которого, как и в случае применения аналитического метода, является стандартное отклонение. Из вышесказанного следует, разработка показателя VaR добавила удобства пользователям, но не привела к созданию новых принципов оценки рисков.

Вычисление риска портфеля, состоящего из линейных активов, не представляет большой сложности. В большинстве случаев стандартное отклонение и VaR такого портфеля вычислимы с помощью аналитических методов, для чего достаточно знать стандартное отклонение каждого инструмента, его долю в составе портфеля, а также необходимо иметь ковариационную матрицу. Последнее необходимо для того, чтобы учесть эффект диверсификации, заключающийся в снижении риска портфеля в результате включения в его состав слабо коррелирующих активов (или активов с отрицательными корреляциями). Риск портфеля, включающего нелинейные инструменты, невозможно вычислить аналитически. Для этого приходится пользоваться методами числового моделирования, самым распространенным из которых является метод Монте-Карло.

### **3.1.2. Оценка риска опционов**

Традиционные методы оценки риска, применяемые для линейных активов, непригодны для финансовых инструментов, имеющих нелинейную платежную функцию. Это объясняется тем, что распределение доходностей нелинейных активов не нормально. Например, опцион колл имеет неограниченный

потенциал прибыли, вследствие чего правый хвост распределения его доходностей ничем не ограничен. Однако, ввиду того что максимально возможный убыток не может превосходить величину премии, уплаченной при открытии позиции, левый хвост распределения ограничен данной величиной. Вследствие этого распределение доходностей несимметрично и даже приближенно не может считаться нормальным. Применение логарифмической трансформации не решает эту проблему, как в случае с линейными активами. (Хотя использование логарифмической трансформации приближает распределение доходностей линейных активов к нормальному, существует множество доказательств отклонения распределения логарифмов доходностей от законов нормального распределения. Тем не менее в данном случае речь идет лишь об отклонениях, в то время как для нелинейных активов распределение доходностей даже не приближается к нормальному распределению.)

Несмотря на вышесказанное, при соблюдении определенных условий, методы, применяемые для оценки риска линейных активов, могут использоваться для нелинейных инструментов. Например, хотя VaR опциона не может быть вычислен аналитически, его можно рассчитать с помощью методики Монте-Карло. Однако при создании автоматизированных стратегий, ориентированных на торговлю опционами, эти методы могут использоваться только в качестве вспомогательных инструментов оценки рисков. Основными должны быть специальные методы, учитывающие специфику нелинейных активов в общем и опционов в частности.

Общепринятым средством оценки рисков отдельных опционов являются «греки», выражающие изменение стоимости опциона при небольшом изменении заданной переменной. Эти показатели можно интерпретировать, как чувствительность опциона к изменениям переменной. В качестве переменных выступают цена базового актива, волатильность, время и процентная ставка. Эти величины могут рассматриваться как «факторы риска», вызывающие колебания в стоимости опционов.

«Греки» вычисляются аналитически как частные производные стоимости опциона по заданной переменной. Для нахождения производной используется определенная модель ценообразования (например, формула Блэка-Шоулза). *Дельта* является производной стоимости опциона по цене базового актива. Производная по волатильности называется *вегой*,

по времени — *тетой*, по процентной ставке — *ро*. Применяются также производные второго и более высоких порядков. «Греки» представляют собой удобный и достаточно адекватный инструмент оценки опционных рисков. Трудности возникают при переходе от отдельных опционов к структурам более высокого порядка. Риски комбинаций, состоящих из опционов на один базовый актив, могут оцениваться с помощью суммирования соответствующих «греков». Однако включение в портфель комбинаций, относящихся к разным базовым активам, делает невозможным оценку некоторых рисков методом простого суммирования. Отдельные «греки», такие как *тета* и *ро*, являющиеся аддитивными для опционов на разные базовые активы. Поэтому чувствительность сложного портфеля к временному распаду или к изменению процентной ставки легко определяется как сумма *тет* или *ро* входящих в него опционов. Сложнее обстоит дело с более важными показателями риска, не обладающими аддитивными свойствами, такими как *дельта* и *вега*. Если портфель состоит из опционов на несколько базовых активов, то суммирование отдельных *дельт* и *вег* лишено смысла. Для сложно-структурированных портфелей эти коэффициенты не подходят, поскольку каждый из них выражает изменение стоимости опциона в зависимости от изменений стоимости и волатильности определенного базового актива. Дифференцированный же анализ позиций по отдельным базовым активам малопродуктивен, так как весь портфель должен оцениваться как единая структура.

Одним из возможных путей решения проблемы неаддитивности «греков» может стать выражение *дельты* каждого опциона как производной по некоторому общему индексу, а не по ценам соответствующих базовых активов. Аналогично *вега* отдельных опционов может быть выражена как производная по волатильности того же индекса, а не по волатильностям отдельных базовых активов. Такие процедуры позволят придать *дельте* и *веге* свойства аддитивности и сделают возможным вычисление показателей риска для всего портфеля в целом. В качестве индекса может использоваться биржевой индекс (например, S&P 500) или любой другой, рассчитанный инвестором самостоятельно (например, на базе цен только тех акций, которые являются базовыми активами для входящих в портфель комбинаций). Выбор индекса представляет собой отдельную сложную задачу, решение которой зависит от степени коррелированности составляющих портфель

элементов с тем или иным индексом и многих параметров риск-менеджмента.

Индексная дельта является, безусловно, одним из важнейших инструментов оценки риска опционных портфелей. Однако, помимо этого индикатора, риски автоматизированных торговых стратегий можно и нужно оценивать с помощью дополнительных характеристик (в этой главе помимо VaR и индексной дельты будут рассмотрены две дополнительные характеристики — вероятность убытка и коэффициент асимметрии). Это позволит получить более полное представление о различных аспектах риска, которым подвержена создаваемая система.

### 3.2. Индикаторы риска

Для оценки риска отдельных опционов и опционных портфелей могут использоваться как традиционные показатели, такие как VaR, так и специализированные индикаторы, разрабатываемые специально для этих целей. Хотя оценка опционных портфелей с помощью показателей, обычно используемых для линейных активов, технически возможна, необходимо крайне осторожно подходить к интерпретации получаемых с их помощью данных. Кроме того, такие показатели можно использовать только в качестве вспомогательных инструментов оценки риска. Основными же должны являться показатели, разработанные с учетом опционной специфики. Для получения полного представления о риске создаваемого портфеля желательно использовать несколько показателей одновременно. При этом разные показатели должны как можно меньше коррелировать между собой. Это позволит сформировать набор уникальных индикаторов риска, каждый из которых будет дополнять, а не дублировать информацию, содержащуюся в других показателях.

В этом разделе мы рассмотрим четыре индикатора риска. Начнем мы с показателя VaR и объяснения, каким образом данный индикатор может быть рассчитан для опционного портфеля. Затем мы опишем три специализированных индикатора, разработанных специально для оценки риска опционов. Особое внимание будет уделено показателю «индексная дельта».

#### 3.2.1. Value at Risk (VaR)

Напомним, что VaR представляет собой оценку убытка, который с заданной вероятностью не будет превзойден в течение заданного периода времени (в дальнейших примерах мы будем

использовать вероятность 95%). Для портфеля, состоящего только из базовых активов, этот показатель может быть рассчитан аналитически. В случае портфеля, состоящего из нелинейных инструментов, необходимо применять метод Монте-Карло. Для этого на основании стандартного отклонения доходностей базового актива строится функция плотности вероятности логнормального (или другого) распределения, которая используется для генерирования множества вариантов цены базового актива. Далее для каждого варианта цены вычисляется платежная функция опциона и на основании этих данных рассчитывается VaR. Эта же методика может использоваться для расчета VaR портфеля опционов с учетом корреляций между различными базовыми активами.

- Используя данную методику, необходимо помнить, что VaR обладает целым рядом существенных недостатков (Tsudikman et. al., 2011), проявляющихся наиболее ярко, когда он используется для оценки риска нелинейных активов.
- До недавнего времени в среде профессиональных участников рынка бытовало мнение, что VaR адекватно выражает уровень риска любых инвестиционных портфелей независимо от их состава и структуры. Однако мировой финансовый кризис, разразившийся в 2007 г., убедительно продемонстрировал несоответствие прогнозов, основанных на VaR, реальным убыткам. Причина расхождения прогнозов и реальности состояла в том, что за последние 20 лет финансовые рынки претерпели кардинальные изменения, выразившиеся в развитии сложных финансовых технологий и переносе акцентов с простых линейных активов на производные инструменты (многие из которых являются нелинейными). При этом доля нелинейных активов, среди которых не последнее место занимают опционы, в структуре активов крупных финансовых институтов неуклонно возрастала. Несмотря на это, механизмы оценки риска оставались прежними либо существенно отставали в своем развитии.
- При разработке автоматизированных торговых систем недопустимо использование односторонней системы прогнозирования риска, основанной исключительно на VaR или других показателях, рассчитываемых на основе стандартного отклонения. Полноценная система управления рисками должна включать в себя целый комплекс оценочных алгоритмов, базирующихся на разных принципах и учитывающих специфические особенности опционов.



### 3.2.2. Индексная дельта

Индексная дельта характеризует чувствительность опционного портфеля к колебаниям широкого рынка. Этот показатель позволяет дать количественное выражение изменению стоимости портфеля, происходящему при небольшом изменении индекса. Индексная дельта может использоваться для оценки риска и управления сложно-структурированным портфелем так же, как это делается с обычной дельтой для портфелей, состоящих из опционов на один базовый актив. Кроме того, индексная дельта может применяться для создания дельта-нейтральных портфелей (как было описано в главе 1), а также для корректировки позиций в целях сохранения дельта-нейтральности на протяжении всего периода существования портфеля.

#### Алгоритм

Алгоритм вычисления индексной дельты можно представить в виде последовательности следующих процедур.

1. Строится регрессионная модель зависимости цены каждого базового актива (чьи опционы входят в состав портфеля) от индекса. Для этого необходимо выбрать горизонт истории, на котором строятся модели.
2. С помощью регрессионных моделей, построенных на шаге (1), рассчитываем значение цены каждого базового актива, к которому приводит изменение индекса на один пункт или на другую небольшую величину (например, на 0,1%).
3. Определяем справедливую стоимость каждого входящего в портфель опциона при условии, что цена его базового актива равна значению, полученному на шаге (2). Для этого необходимо воспользоваться одной из моделей ценообразования, заменяя в ее формуле текущую цену базового актива соответствующим расчетным значением.
4. Вычисляем приращение цены каждого входящего в портфель опциона, произошедшее в результате изменения цены его базового актива на один пункт. Приращение цены равно разности расчетной стоимости, полученной на шаге (3), и текущей рыночной цены опциона.
5. Рассчитываем значение индексной дельты путем суммирования всех приращений, полученных при исполнении процедур на шаге (4).

#### Расчет индексной дельты

Рассмотрим портфель, состоящий из опционов на различные активы. Пусть  $\{O_1, O_2, O_3, \dots, O_N\}$  представляет множество составляющих портфель опционов, причем базовым активом

опциона  $O_j$  является  $A_k$ . Если при  $j \neq k$  активы  $A_j$  и  $A_k$  совпадают, то речь может идти об опционной комбинации, построенной в рамках определенной торговой стратегии (например, стрэнгл, стрэддл, календарный спред и т.д.). В принципе комбинации могут состоять из неограниченного количества разных опционов, относящихся к одному базовому активу, а портфель — из неограниченного количества комбинаций.

Для каждого опциона  $O_j$ , входящего в состав портфеля, мы имеем опционную дельту:

$$\Delta_j = \left( \frac{\partial O_j}{\partial A_j} \right),$$

где величины  $\partial O_j$  и  $\partial A_j$  обозначают малые изменения цен опциона и его базового актива соответственно. Это выражение дает наглядное представление о дельте как о скорости изменения цены опциона по отношению к изменению цены его базового актива.

Вычисление дельты  $D_j$  одного опциона не представляет сложности и реализовано во многих компьютерных программах. Переходя к портфелю, состоящему из опционов на разные базовые активы, мы не можем суммировать дельты разных опционов, поскольку они являются частными производными функций (премий) по разным независимым переменным (ценам акций). Как было сказано выше, эту задачу мы будем решать, вычисляя скорость изменения стоимости опциона по отношению к индексу, а не к отдельным базовым активам. Определим дельту по отношению к индексу как производную цены опциона по значению индекса:

$$D_j \equiv \left( \frac{\partial O_j}{\partial I} \right).$$

Эту индексную дельту можно также представить в следующем виде:

$$D_j = \left( \frac{\partial O_j}{\partial I} \right) = \left( \frac{\partial O_j}{\partial A_j} \right) \left( \frac{\partial A_j}{\partial I} \right). \quad (3.2.1)$$

Величина  $\left( \frac{\partial A_j}{\partial I} \right)$  так же, как и бета показывает изменение цены

базового актива при изменении индекса (разница между ними в том, что первая является размерной величиной, а вторая — безразмерной, выраженной отношением относительных

изменений двух величин). Бета традиционно используется для оценки взаимосвязи между движениями индекса и отдельного актива. Для наших целей будет удобно представить бету в виде следующего отношения:

$$\beta_i = \frac{\partial A_i / A_i}{\partial I / I}.$$

Произведя несложные преобразования

$$\left( \frac{\partial A_i}{\partial I} \right) = \left( \frac{\partial A_i / A_i}{\partial I / I} \right) \frac{A_i}{I} = \beta_i \frac{A_i}{I},$$

подставим полученное выражение в формулу (3.2.1). Получаем индексную дельту одного опциона:

$$D_i = \Delta_i \beta_i \frac{A_i}{I}, \quad (3.2.2)$$

где  $\Delta_i$  — дельта опциона относительно его базового актива. Количество единиц опциона  $O_i$ , входящее в состав портфеля, обозначим через  $x_i$ . Для вычисления индексной дельты  $D_{portfolio}$  всего портфеля суммируем дельты отдельных опционов, входящих в портфель с учетом их количества:

$$D_{portfolio} = \sum_i \Delta_i \beta_i A_i x_i / I. \quad (3.2.3)$$

Индексную дельту, рассчитанную по формуле (3.2.3), можно интерпретировать как изменение стоимости портфеля при изменении значения индекса на один пункт. Более удобно выражать изменение стоимости портфеля при изменении индекса на некую процентную величину. Это позволит оценить чувствительность портфеля к относительным изменениям индекса. Например, простое преобразование формулы (3.2.3) позволяет вычислять «процентную индексную дельту» для изменения индекса на 1%:

$$D_{portfolio}^{\%} = \frac{1}{100} \sum_i \Delta_i \beta_i A_i x_i. \quad (3.2.4)$$

#### Пример расчета индексной дельты

В качестве примера рассчитаем величину индексной дельты небольшого портфеля, состоящего из опционов на американские акции. Вычисления будем производить относительно индекса S&P 500, хотя для этих целей может использоваться

любой другой индекс. В таблице 3.2.1 представлен портфель, состоящий из семи коротких стрэддлов, взятых в разных количествах (приблизительно обратно пропорциональных ценам соответствующих акций). Портфель был создан 2 января 2009 г. из опционов с ближайшей датой экспирации (16 января 2009 г.). Текущее значение индекса на 2 января 2009 г. составляло 931,8. Коэффициенты бета акций рассчитаны по ценам дневного закрытия на горизонте истории, равном 120 торговым дням. Дельты опционов вычислены по формулам Блэка–Шоулса с безрисковой ставкой, равной 3,3%.

В предпоследней колонке таблицы 3.2.1 приведены индексные дельты одного опциона, рассчитанные по формуле (3.2.2). Например, для колл на акцию VLO получаем  $D_i = [23,24 \cdot 1,58 \cdot 0,63] / 931,8 = 0,0248$ . Произведение индексной дельты одного опциона на его количество в портфеле дает индексную дельту позиции по данному контракту (последняя колонка таблицы). Так, индексная дельта позиции по контракту VLO 22,5 колл равна  $D_i = -400 \cdot 0,0248 = -9,93$ . Суммирование индексных дельт всех позиций (то есть всех значений, приведенных в последней колонке таблицы) дает индексную дельту портфеля, соответствующую формуле (3.2.3). В данном примере  $D_{\text{Portfolio}} = -0,61$ . Используя формулу (3.2.4), это значение легко преобразуется в процентную индексную дельту:  $D_{\text{Portfolio}}^{\%} = (-0,61 \cdot 931,8) / 100 = -5,69$ .

#### **Анализ эффективности использования индексной дельты для оценки риска**

Для исследования эффективности индексной дельты нами проведены статистические исследования на исторической базе данных, содержащей восьмилетнюю историю цен опционов и их базовых активов. В качестве базовых активов были задействованы акции, составляющие индекс S&P 500.

На историческом горизонте с начала 2001 г. по начало 2009 г. для каждой даты экспирации была сформирована серия портфелей. Момент создания каждого портфеля отстоял от даты экспирации на разное количество торговых дней. Так, самый «дальний» из портфелей был удален от даты истечения на 60 дней, следующий за ним — на 59 дней и так далее вплоть до последнего портфеля, отстоящего от момента экспирации всего на два дня. Таким образом, на каждую дату экспирации было создано 59 портфелей, отличающихся друг от друга продолжительностью времени, остающегося до дня истечения опционов. Всего было создано от 30 (для 60 дней) до 90 (для двух дней) портфелей для каждого «количества дней до экспирации».

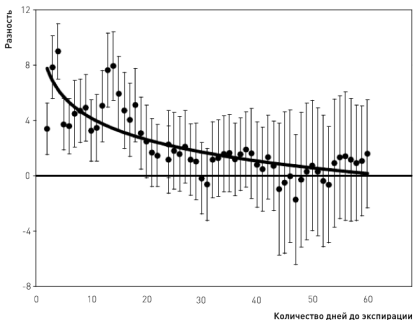
Тиккер акции	Цена акции	Тип опциона	Страйк	Количество	Бета-акции	Дельта одного опциона	Индексная дельта одного опциона	Индексная дельта позиции
VLO	23,24	Call	22,5	-400	1,58	0,63	0,0248	-9,93
VLO	23,24	Put	22,5	-400	1,58	-0,37	-0,0146	5,83
PPG	43,55	Call	45	-200	1,01	0,39	0,0184	-3,68
PPG	43,55	Put	45	-200	1,01	-0,60	-0,0283	5,66
VNO	58,29	Call	60	-100	1,62	0,46	0,0466	-4,66
VNO	58,29	Put	60	-100	1,62	-0,55	-0,0557	5,57
SYMC	14,80	Call	15	-600	0,91	0,46	0,0066	-3,99
SYMC	14,80	Put	15	-600	0,91	-0,53	-0,0077	4,60
CBE	30,67	Call	30	-300	1,02	0,61	0,0205	-6,14
CBE	30,67	Put	30	-300	1,02	-0,40	-0,0134	4,03
NKE	53,06	Call	55	-100	0,89	0,35	0,0177	-1,77
NKE	53,06	Put	55	-100	0,89	-0,64	-0,0324	3,24
MMM	59,19	Call	60	-100	0,70	0,44	0,0196	-1,96
MMM	59,19	Put	60	-100	0,70	-0,55	-0,0245	2,45
Сумма (индексная дельта портфеля)								-0,61

Таблица 3.2.1. Данные для расчета индексной дельты портфеля относительно индекса S&P 500

Каждый портфель состоял из коротких стрэддлов для всех акций, входящих в состав указанного индекса. Страйк стрэддлов выбирался по принципу наименьшей удаленности от текущей цены БА. Объем позиции по каждому стрэддлу вычислялся как округленная до лотов (1 лот = 100 опционов) величина  $N = 10\,000/U$ , где  $U$  — цена акции, являющейся БА для данного стрэддла. Бета каждой акции вычислялась по 120-дневной выборке доходностей акции и индекса. Дельты опционов  $\Delta$ , рассчитывались по модели Блэка–Шоулса; процентные индексные дельты  $D_{Portfolio}^{\%}$  — по формуле (3.2.4). Кроме того, для каждого портфеля вычислялись следующие величины:

- ♦ Процентное изменение индекса  $I^{\%} = 100 \cdot (I_t - I_0)/I_0$ , где  $I_t$  — значение индекса на момент  $t$  создания портфеля,  $I_0$  — значение индекса на момент истечения опционов.
- ♦ Процентное изменение стоимости портфеля  $P^{realized} = 100 \cdot (P_e - P_t)/P_t$ , где  $P_t$  — рыночная стоимость портфеля на момент  $t$  создания портфеля,  $P_e$  — стоимость портфеля на момент истечения опционов (премии опционов брались в середине спреда цены спроса и предложения). Этот показатель выражает «реализовавшийся» риск портфеля.
- ♦ Ожидаемое процентное изменение стоимости портфеля  $P^{expected} = 100 \cdot (I^{\%} \cdot D_{Portfolio}^{\%})/P_t$ . Этот показатель выражает оценку риска сложноструктурированного портфеля при условии, что индекс изменится на заданную величину (в данном исследовании — на величину реально произошедшего движения рынка).
- ♦ Разность реализовавшегося изменения стоимости портфеля и ожидаемого изменения стоимости портфеля  $Difference = P^{realized} - P^{expected}$ . Чем ближе к нулю этот показатель (то есть чем меньше абсолютное отклонение реализовавшегося изменения от ожидаемого), тем точнее индексная дельта позволяет прогнозировать будущие колебания стоимости портфеля.

На рис. 3.2.1 показаны средние отклонения реально произошедших изменений стоимости портфеля от ожидаемых значений. Для портфелей, созданных в период от 30 до 60 дней до экспирации, средняя разность оказалась близка к нулю. Однако этим же портфелям свойственна и наибольшая изменчивость разности (представленная на рис. 3.2.1 в виде стандартных ошибок). Обратная картина наблюдается для портфелей, созданных незадолго до экспирации (от двух до 20 дней). В этих случаях разности реализовавшегося и ожидаемого изменений стоимости портфеля велики и положительны, хотя достаточно стабильны (стандартные ошибки невелики).



**Рис. 3.2.1.** Зависимость разности реализованного изменения стоимости портфеля и ожидаемого изменения стоимости портфеля от количества дней между моментом создания портфеля и днем экспирации. Точки обозначают средние значения, горизонтальные линии — стандартные ошибки

Положительные значения разности говорят о том, что  $P_{realized}^{\%} > P_{expected}^{\%}$  (реализовавшиеся изменения стоимости портфеля больше, чем ожидалось). Это означает, что оценка риска с помощью индексной дельты для этих портфелей была заниженной, то есть риск оказался недооценен (поскольку убыток коротких портфелей возникает в тех случаях, когда их стоимость возрастает ( $P_{realized}^{\%} > 0$ )). Соответственно, отрицательное значение разности означает, что реальные изменения стоимости портфеля оказались меньше, чем ожидалось (то есть риск был переоценен). Поскольку стандартные ошибки портфелей, созданных задолго до экспирации, далеко заходят как в отрицательную, так и в положительную область (рис. 3.2.1), можно заключить, что многие из них были переоценены и многие — недооценены.

В целом можно сделать вывод, что в момент создания портфеля чем больше срок до даты истечения опционов, тем более точно (в среднем) оценивается риск. Вместе с тем вероятность

ошибочных оценок также возрастает. Для портфелей, создаваемых вблизи экспирации, оценка риска оказывается заниженной, однако величина занижения является достаточно стабильной (вероятность ошибки мала). В первом случае можно добиться повышения эффективности использования индексной дельты путем введения дополнительных показателей риска. Во втором случае, поскольку изменчивость результатов невелика, можно ограничиться введением поправочных коэффициентов.

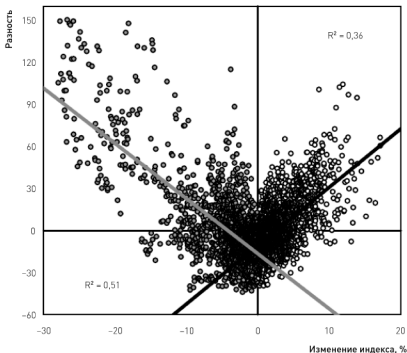
Известно, что дельта является локальной величиной, оценивающей изменение стоимости опциона при небольшом изменении цены его базового актива. Это означает, что чем больше реально произошедшее изменение цены базового актива, тем менее точен прогноз изменения стоимости опциона, основанный на дельте. Исследуем, справедливо ли данное утверждение для индексной дельты и насколько ухудшается эффективность ее прогноза при больших изменениях индекса. Для этого рассмотрим зависимость разностей между реализовавшимися и ожидаемыми изменениями стоимости портфеля от процентного изменения индекса.

Из рис. 3.2.2 следует, что большие движения индекса действительно сопровождаются весьма серьезными отклонениями реальных изменений стоимости портфелей от прогнозных значений. Это наблюдение справедливо как для случаев роста индекса (белые точки на рис. 3.2.2), так и для случаев его падения (черные точки). Следует также отметить, что в тех случаях, когда индекс снижался, корреляция между разностью и изменением индекса была выше, чем когда индекс рос.

Для оценки эффективности индексной дельты наибольший интерес представляет тот факт, что большим движениям индекса (будь то рост или падение) соответствуют только положительные разности, в то время как малым — в основном отрицательные (рис. 3.2.2). Это говорит о том, что при больших движениях рынка индексная дельта недооценивает риск, а при малых — переоценивает. В тех же случаях, когда амплитуда колебаний рынка находится в пределах 3–5% (в сторону роста или понижения), индексная дельта демонстрирует наибольшую эффективность.

В предыдущем исследовании мы ограничились случаями, когда риск оценивается только один раз — в момент создания портфеля. Эффективность этой оценки тестировалась также единожды — на дату истечения входящих в состав портфеля опционов (предполагается, что все опционы истекают одновременно). Теперь мы исследуем ситуации, когда риск оценивается регулярно в течение всего периода существования





**Рис. 3.2.2.** Зависимость разности реализовавшегося изменения стоимости портфеля и ожидаемого изменения стоимости портфеля от процентного изменения индекса. Представлены портфели для всех интервалов времени между созданием портфеля и днем экспирации. Белые точки относятся к положительным изменениям индекса, черные — к отрицательным

портфеля, а эффективность оценки тестируется на разных временных интервалах.

Мы будем оценивать эффективность индексной дельты так же, как в предыдущем исследовании (путем сравнения оценки риска, выраженного через индексную дельту, со значениями, реализовавшимися на практике). Чтобы проанализировать качество прогноза на разных этапах существования портфеля, следует (1) вычислять значения индексной дельты каждый день на протяжении всего инвестиционного периода и (2) оценивать изменения стоимости портфеля в течение разных периодов времени (будем называть их горизонтами тестирования или

прогнозирования). Необходимо протестировать все периоды от первого дня до максимально возможного (49 дней в нашем исследовании). Эти данные позволят всесторонне оценить расхождения между прогнозами и реальностью.

Для каждой даты экспирации был сформирован портфель, состоящий из коротких стрэддлов для всех 500 акций, входящих в S&P 500. Момент создания каждого портфеля отстоял от даты истечения формирующих его опционов на 50 торговых дней. Всего было создано 90 таких портфелей. Страйк стрэддлов выбирался по принципу наименьшей удаленности от текущей цены базового актива. Объем позиции по каждому стрэддлу рассчитывался как округленная до лотов (1 лот = 100 опционов) величина  $U$ , где  $U$  — цена акции, являющейся базовым активом для данного стрэддла.

В таблице 3.2.2 представлен пример такого портфеля и показана эволюция его показателей. В момент создания портфеля (7 августа 2008 г., первая строка таблицы) оставалось 50 рабочих дней до даты экспирации опционов (17 октября 2008 г.). Во второй строке таблицы приведены характеристики этого же портфеля на следующий день после его создания, в третьей строке — на третий день и т.д. вплоть до экспирации (в целях экономии места в таблице 3.2.2 показаны только первые 20 дней существования портфеля).

В таблице приводятся значения следующих показателей, необходимых для оценки разности между прогнозным и реализовавшимся значением риска.

- ♦ Количество дней, остающихся до экспирации  $t$  (используется для индексирования моментов оценки и тестирования).
- ♦ Рыночная стоимость портфеля  $P_t$  на момент оценки  $t$ ; вычисляется как сумма стоимостей всех входящих в состав портфеля опционов.
- ♦ Индексная дельта  $D_t$ , рассчитанная на момент  $t$  с помощью формулы (3.2.1).
- ♦ Процентная индексная дельта  $D_t^{\%} = I_t D_t / 100$ , рассчитанная на момент  $t$ ; прогнозирует изменение стоимости портфеля при изменении индекса на 1%.
- ♦ Значение индекса  $I_t$  на момент оценки  $t$  и процентное изменение индекса  $\tilde{I}^{\%} = 100(I_{t-j} - I_t) / I_t$ , где  $I_{t-j}$  — значение индекса на момент тестирования;  $j$  выражает количество дней между двумя датами  $t$  и  $t-j$  и является горизонтом тестирования.
- ♦ Процентное изменение стоимости портфеля  $P_{realized}^{\%} = 100(P_{t-j} - P_t) / P_t$ , где  $P_t$  — рыночная стоимость портфеля

Дата	t	P <sub>t</sub>	D <sub>t</sub>	D <sub>t</sub> <sup>*</sup>	I <sub>t</sub>	Горизонт тестирования / = 1 день			Горизонт тестирования / = 5 дней				
						P <sup>с</sup> <sub>realized</sub>	P <sup>с</sup> <sub>expected</sub>	Difference	P <sup>с</sup> <sub>realized</sub>	P <sup>с</sup> <sub>expected</sub>	Difference		
07.08.08	50	1224	-0,59	-7,5	1266								
08.08.08	49	1237	-1,38	-17,8	1296	2,4	1,1	-1,5	2,5				
11.08.08	48	1267	-1,74	-22,8	1305	0,7	2,4	-1,0	3,4				
12.08.08	47	1243	-1,32	-17,0	1290	-1,2	-1,9	2,2	-4,1				
13.08.08	46	1225	-1,16	-14,9	1286	-0,3	-1,4	0,4	-1,8				
14.08.08	45	1235	-1,48	-19,1	1293	0,6	0,8	-0,7	1,4	2,1	0,9	-1,3	2,2
15.08.08	44	1235	-1,68	-21,8	1298	0,4	0,0	-0,6	0,6	0,1	-0,2	-0,2	0,0
18.08.08	43	1183	-1,13	-14,5	1279	-1,5	-4,2	2,7	-6,9	-2,0	-6,7	3,7	-10,3
19.08.08	42	1159	-0,73	-9,2	1267	-0,9	-2,0	1,1	-3,2	-1,8	-6,7	2,4	-9,2
20.08.08	41	1151	-0,82	-10,5	1275	0,6	-0,7	-0,5	-0,2	-0,9	-6,1	1,1	-7,2
21.08.08	40	1148	-0,87	-11,1	1278	0,2	-0,3	-0,2	-0,1	-1,2	-7,1	1,8	-8,9
22.08.08	39	1126	-1,27	-16,5	1292	1,1	-1,9	-1,1	-0,8	-0,5	-8,8	0,8	-9,6
25.08.08	38	1100	-0,58	-7,3	1267	-2,0	-2,3	2,9	-5,2	-0,9	-7,0	1,1	-8,1
26.08.08	37	1087	-0,66	-8,4	1272	0,4	-1,3	-0,2	-1,0	0,4	-6,3	-0,3	-6,0
27.08.08	36	1074	-0,98	-12,5	1282	0,8	-1,1	-0,6	-0,5	0,6	-6,7	-0,5	-6,2
28.08.08	35	1071	-1,51	-19,7	1301	1,5	-0,3	-1,7	1,4	1,8	-6,7	-1,7	-5,0
29.08.08	34	1060	-1,08	-13,8	1283	-1,4	-1,0	2,5	-3,5	-0,7	-5,8	1,1	-6,9
02.09.08	33	1062	-0,98	-12,5	1278	-0,4	0,1	0,5	-0,4	0,8	-3,5	-0,6	-3,0
03.09.08	32	1078	-0,96	-12,2	1275	-0,2	1,6	0,2	1,3	0,3	-0,8	-0,2	-0,6
04.09.08	31	1088	0,08	1,0	1237	-3,0	0,9	3,4	-2,5	-3,5	1,2	4,1	-2,9

Таблица 3.2.2. Эволюция показателей сложно-структурированного опционного портфеля в течение 20 дней от момента его создания (7 августа 2008 г.). Значения показателей используются для анализа эффективности индексной дельты

### 3.2. Индикаторы риска

на момент оценки  $t$ ,  $P_{t-j}$  — стоимость портфеля на момент тестирования. Этот показатель выражает изменение стоимости портфеля, произошедшее в течении  $j$  дней, и является, по сути, риском портфеля, реализовавшимся на определенном горизонте тестирования. Напомним, что рост стоимости опционов короткого портфеля (то есть положительное изменение его стоимости) приносит убыток, а снижение их стоимости дает прибыль.

- ◇ Ожидаемое процентное изменение стоимости портфеля  $P_{expected}^{\%} = 100 I^{\%} D_{Portfolio}^{\%} / P_t$ . Этот показатель выражает оценку риска сложноструктурированного портфеля при условии, что в течении  $j$  дней индекс изменится на величину  $I^{\%}$ .
- ◇ Разность реализовавшегося изменения стоимости портфеля  $Difference = P_{realized}^{\%} - P_{expected}^{\%}$  и ожидаемого изменения стоимости портфеля. Положительные значения разности указывают на недооценку риска индексной дельтой; отрицательные разности свидетельствуют о переоценке риска. Соответственно, чем ближе к нулю этот показатель, тем точнее индексная дельта позволяет прогнозировать будущие колебания стоимости портфеля.

В таблице 3.2.2 приведены расчеты для двух горизонтов тестирования — один и пять дней. Возьмем для примера 41-й день до экспирации ( $t = 41$ , выделено серым цветом в таблице) и проделаем поэтапно все вычисления, необходимые для оценки разности между прогнозируемым и реализовавшимся риском. Индексная дельта в этот день оценки равна:

$$D_t^{\%} = I_{41} D_{41} / 100 = 1275 \cdot (-0,82) / 100 = -10,5.$$

Для горизонта тестирования  $j = 1$  процентное изменение индекса составляет:

$$I^{\%} = 100 (I_{40} - I_{41}) / I_{41} = 100 (1278 - 1275) / 1275 = 0,2\%.$$

Процентное изменение стоимости портфеля равно:

$$P_{realized}^{\%} = 100 (P_{40} - P_{41}) / P_{41} = 100 (1148 - 1151) / 1151 = -0,3\% ,$$

а ожидаемое процентное изменение стоимости портфеля составляет:

$$P_{expected}^{\%} = 100 I^{\%} D_{Portfolio}^{\%} / P_{41} = 100 \cdot 0,2 \cdot (-10,5) / 1151 = -0,2\%.$$

Разность реализовавшегося и ожидаемого изменений стоимости портфеля равна:

$$Difference = -0,3 - [-0,2] = -0,1\%$$

что указывает на небольшую переоцененность риска в данном случае. Для горизонта тестирования  $j = 5$  процентное изменение индекса составило:

$$I^{\%} = 100 (I_{36} - I_{41}) / I_{41} = 100 (1282 - 1275) / 1275 = 0,6\%$$

Изменение стоимости портфеля равно:

$$P_{realized}^{\%} = 100 (P_{36} - P_{41}) / P_{41} = 100 (1074 - 1151) / 1151 = -6,7\%$$

а ожидаемое процентное изменение стоимости портфеля оказалось равным:

$$P_{expected}^{\%} = 100 I^{\%} D_{Portfolio}^{\%} / P_{41} = 100 \cdot 0,6 \cdot (-10,5) / 1151 = -0,5\%$$

Разность реализовавшегося и ожидаемого изменений стоимости портфеля в этом случае была намного большей и составила:

$$Difference = -6,7 - [-0,5] = -6,2\%$$

что указывает на существенную переоцененность риска. Аналогичным образом были рассчитаны все 90 портфелей. Риск каждого из них оценивался ежедневно в течение всех 50 дней существования портфеля. Эффективность этих оценок тестировалась на всех горизонтах от одного до 49 дней.

Взаимозависимость показателей прогнозируемого и реализовавшегося риска дает наглядное представление о степени эффективности индексной дельты. Рис. 3.2.3 демонстрирует такую зависимость для начального этапа существования портфелей (с 50-го по 40-й день до экспирации). Наибольшая корреляция обнаружена для однодневного горизонта тестирования. В этом случае «размытость» облака точек оказалась наименьшей (коэффициент корреляции  $R^2 = 0,29$  наибольший). Удлинение горизонта тестирования до 5, 10 и 20 дней привело к постепенной деградации качества прогноза. Визуальный анализ рис. 3.2.3 показывает, что чем больше был горизонт тестирования, тем слабее становилась зависимость между прогнозом

и результатом вплоть до полного исчезновения всякой зависимости (для 20 дней  $R^2 = 0,04$ ). Кроме того, увеличение горизонта тестирования сопровождалось уменьшением угла наклона соответствующей регрессии. Это также свидетельствует об ухудшении прогнозных качеств индексной дельты на больших горизонтах тестирования.

Регрессионный анализ, представленный на рис. 3.2.3, является наиболее простым и интуитивно понятным средством качественной оценки индексной дельты. Вместе с тем он не дает строгого количественного выражения эффективности этого индикатора риска. Для этих целей лучше подходит средняя разность реализовавшихся и ожидаемых изменений стоимости портфеля. Поскольку убыток коротких портфелей возникает в тех случаях, когда их стоимость возрастает ( $P_{realized}^{\%} > 0$ ), положительные разности ( $P_{realized}^{\%} > P_{expected}^{\%}$ ) свидетельствуют о том, что оценка риска

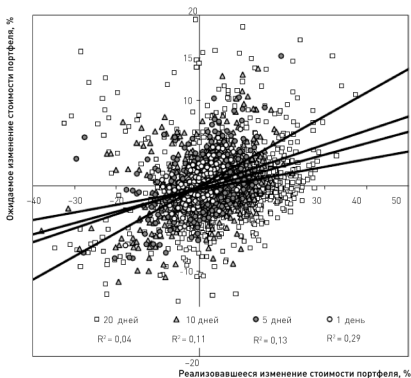
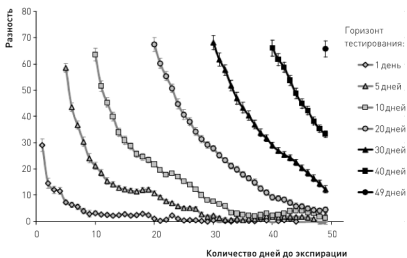


Рис. 3.2.3. Корреляция между ожидаемым (прогнозируемым с помощью индексной дельты) и реализовавшимся изменением стоимости портфеля для четырех горизонтов тестирования

с помощью индексной дельты занижена (то есть риск недооценен). Соответственно, отрицательные разности означают, что реальные изменения стоимости портфеля меньше ожидавшихся (то есть риск переоценен).

На рис. 3.2.4 показаны средние разности и стандартные ошибки (выражающие меру изменчивости результатов) для разных горизонтов тестирования. Для наиболее эффективного однодневного горизонта тестирования отклонения реально произошедших изменений стоимости портфелей от прогнозных значений были близки к нулю на всем периоде от создания портфелей до приблизительно 20-го дня до экспирации. После 20-го дня чем ближе портфель приближался к дате экспирации, тем более недооцененным оказывался риск. Таким образом, индексная дельта позволяет достаточно точно прогнозировать риск, но на весьма короткий промежуток времени (один день) и только на раннем и среднем этапах существования портфеля (в течение 30 рабочих дней с момента его формирования). Пятидневный горизонт тестирования дал похожие результаты, с той разницей, что в этом случае недооценка риска начала возникать уже с 30-го дня до экспирации и достигла более высоких значений. Дальнейшее



**Рис 3.2.4.** Зависимость разности реализованного изменения стоимости портфеля и ожидаемого изменения стоимости портфеля от количества дней, остающихся до экспирации. Показаны семь горизонтов тестирования. Точки обозначают средние значения, горизонтальные линии — стандартные ошибки

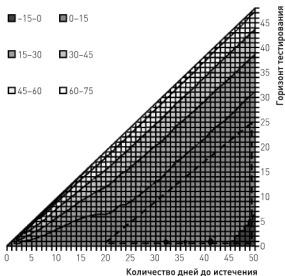
увеличение горизонта тестирования способствовало еще большему усилению этих тенденций — недооценка риска начиналась раньше и достигала больших значений (рис. 3.2.4). Кроме того, легко заметить, что для коротких горизонтов тестирования зависимость между разностью и количеством дней до экспирации является нелинейной. В то же время для больших горизонтов тестирования эта зависимость постепенно становится линейной и все более «крутой». В данном случае крутизна наклона линии регрессии характеризует скорость деградации прогноза по мере приближения даты истечения опционов.

Полную информацию об эффективности индексной дельты и характере ее зависимости от двух исследуемых параметров (момента оценки и горизонта тестирования) дает представление данных в виде топографической карты. В двумерной системе координат будем откладывать по горизонтальной оси количество дней, остающихся до экспирации, а по вертикальной — горизонт тестирования. С помощью разных оттенков изобразим изолинии, отражающие средние разности реализовавшихся и ожидаемых изменений стоимости портфелей. Топография такой поверхности показана на рис. 3.2.5. Легко заметить, что область высокой эффективности индексной дельты располагается в правом нижнем углу диаграммы (показана на рисунке пунктирной линией). В целом можно заключить, что (1) индексная дельта позволяет довольно точно оценивать риск в первые 25–30 дней с момента создания портфеля; (2) эффективность этих оценок сохраняется в течение 20–25 дней с момента оценки. Треугольная форма зоны высокой эффективности указывает на то, что, с одной стороны, по мере приближения экспирации необходимо снижать горизонт прогнозирования. С другой стороны, использование больших горизонтов прогнозирования возможно лишь на начальном этапе существования портфеля.

#### **Применимость индексной дельты**

Оценка риска сложно-структурированного опционного портфеля с помощью индексной дельты достаточно эффективна на ранних этапах существования портфеля, однако снижается по мере его «старения» и приближения даты экспирации. Являясь величиной локальной, индексная дельта способна качественно прогнозировать риск лишь на относительно короткие промежутки времени. Существует прямая зависимость между количеством дней, остающихся до экспирации, и горизонтом прогнозирования — чем ближе экспирация, тем короче должны





**Рис. 3.2.5.** Зависимость разности реализованного изменения стоимости портфеля и ожидаемого изменения стоимости портфеля от количества дней, остающихся до экспирации и от горизонта тестирования. Пунктирной линией обозначена область высокой эффективности индексной дельты

быть горизонты прогнозирования. В противном случае риск может оказаться существенно недооценен.

Поскольку все результаты, полученные в настоящем исследовании, были достаточно стабильны (имели низкую стандартную ошибку, см. рис. 3.2.4), проблема недооценки риска может решаться путем введения поправочных коэффициентов. Значения коэффициентов можно получать методом построения диаграммы, аналогичной представленной на рис. 3.2.5. Необходимо лишь оптимизировать глубину исторического периода и правильно подобрать значения других параметров, используемых при построении диаграммы.

### 3.2.3. Коэффициент асимметрии

Этот показатель выражает меру асимметричности платежной функции портфеля относительно определенного индекса (например, S&P 500). Основная идея состоит в том, что большинство стратегий, связанных с продажей непокрытых опционов, базируется на принципе маркет-нейтральности. Если портфель

действительно нейтрален по отношению к рынку, то его платежная функция будет симметричной — это означает, что как при росте, так и при падении рынка стоимость портфеля будет изменяться приблизительно одинаково (разумеется, при равных величинах роста и падения). Если же нейтральность нарушена, то платежная функция будет смещенной относительно текущего значения индекса, а коэффициент асимметричности будет выражать меру этого смещения.

Поскольку стоимость портфеля  $P$  равна сумме стоимостей входящих в его состав опционов, то зависимость стоимости портфеля от изменений индекса  $I$  можно выразить суммой:

$$P(I, \delta) = \sum_i O_i(A_i(I, \delta)) x_i, \quad (3.2.5)$$

где  $O_i$  — стоимость  $i$ -го опциона,  $\delta$  — относительное изменение индекса (например,  $\delta = 0,12$  означает, что индекс вырос или упал на 12%), другие символы имеют тот же смысл, что и в предыдущих разделах. Зависимость  $A_i$  от  $I \cdot \delta$  и можно выразить с помощью беты  $\beta_i$ , которая представляет собой коэффициент линейной регрессии доходностей базового актива и доходностей индекса. Зная бету, можно приблизительно определить стоимость базового актива при условии, что индекс изменится на заданную величину:

$$A_i(I, \delta) = A_i(1 + \beta_i \delta). \quad (3.2.6)$$

Используя модель Блэка–Шоулза, можно вычислить стоимости всех входящих в портфель опционов при условии, что цены их базовых активов равны значениям, рассчитанным по формуле 3.2.6. Суммируя полученные значения, получаем стоимость портфеля, соответствующую формуле 3.2.5. Нам необходимо рассчитать две стоимости портфеля — для случая роста индекса на величину  $I \cdot \delta$  и для случая его падения на такую же величину. Обозначим эти стоимости  $P(A_i(I, \delta))$  и  $P(A_i(I, -\delta))$  соответственно. Имея эти значения, можем рассчитать коэффициент асимметрии портфеля по следующей формуле:

$$A_{sym} = \frac{|P(A_i(I, \delta)) - P(A_i(I, -\delta))|}{2 \cdot I \cdot \delta}. \quad (3.2.7)$$

Если построить график платежной функции портфеля, отложив по оси  $X$  значения индекса, а по оси  $Y$  стоимость портфеля, то  $A_{sym}$  можно представить как модуль коэффициента наклона прямой, соединяющей две точки графика с абсциссами

$X = I(1 + \delta)$  и  $X = I(1 - \delta)$ . Чем больше величина коэффициента отклоняется от нуля, тем более асимметрична платежная функция (если коэффициент равен нулю, то платежная функция портфеля полностью симметрична).

В таблице 3.2.3 приведены данные, необходимые для расчета коэффициента асимметрии портфеля, состоящего из 10 коротких стрэддлов (для простоты предположим, что количество каждого опциона в портфеле равно единице  $x_i = 1$ ). Например, цена акции ED при  $\nu = 0,23$  и росте индекса на 10% ( $\delta = 0,1$ ) будет равна  $37,92(1 + 0,23 \cdot 0,1) = \$38,79$ . Подставляя это значение в формулу Блэка–Шоулза вместо текущей цены акции, находим, что стоимость опциона колл равна \$1,89, а стоимость пут \$3,06. Определив таким образом стоимости всех опционов, суммируем их и находим, что в случае роста индекса стоимость портфеля составит \$46,66, а в случае падения — \$31,46. Подставляя эти данные в формулу 3.2.7 и учитывая, что значение индекса S&P 500 на дату создания портфеля было 954,58, находим:

$$A_{\text{sym}} = (46,66 - 31,46) / (2 \cdot 954,58 \cdot 0,1) = 0,08.$$

#### 3.2.4. Вероятность убытка

Вероятность того, что на дату истечения опционов портфель окажется убыточным, рассчитывается методом Монте-Карло. Для каждого опциона в портфеле производится генерация случайной цены его базового актива на определенный момент времени в будущем (для простоты мы будем генерировать цены на дату экспирации). Далее вычисляются прибыли и убытки опционов для полученных цен акций. Сумма полученных значений дает оценку прибыли/убытка портфеля. Описанный цикл представляет собой одну итерацию. Многократно повторяя итерации для одного и того же портфеля, можно получить достоверную оценку многих его характеристик.

В таблице 3.2.4 приведен пример двух итераций для портфеля, использованного ранее в таблице 3.2.3. Цены акций генерировались, используя логнормальное распределение с волатильностью, равной исторической волатильности, рассчитанной на периоде 120 торговых дней. При моделировании учитывались взаимные корреляции цен акций, рассчитанные на том же историческом периоде. Первая итерация для акции EIX сгенерировала цену \$31,04, что подразумевает прибыль в размере \$0,70 ( $30 + 1,74 - 31,04$ ), зато вторая итерация для этой же акции дала убыток в размере \$1,28. Для портфеля в целом первая итерация оказалась убыточной, а вторая — прибыльной (таблица 3.2.4).

Тикер акции	Цена акции	Волатиль- ность	Тип опциона	Страйк	Бета акции	При $\delta = 0,1$		При $\delta = -0,1$	
						цена акции	цена опциона	цена акции	цена опциона
eD	37,92	0,49	Call	40	0,23	38,79	1,89	37,05	1,20
ED	37,92	0,49	Put	40	0,23	38,79	3,06	37,05	4,11
EIX	31,48	0,15	Call	30	0,77	33,90	3,94	29,06	0,22
EIX	31,48	0,15	Put	30	0,77	33,90	0,00	29,06	1,13
EXC	53,33	0,11	Call	50	0,67	56,90	6,95	49,76	0,60
EXC	53,33	0,11	Put	50	0,67	56,90	0,00	49,76	0,79
FE	41,16	0,54	Call	40	0,51	43,26	4,78	39,06	2,26
FE	41,16	0,54	Put	40	0,51	43,26	1,48	39,06	3,16
FPL	58,72	0,49	Call	60	0,74	63,07	5,56	54,37	1,42
FPL	58,72	0,49	Put	60	0,74	63,07	2,44	54,37	6,99
NI	12,72	0,40	Call	10	0,82	13,76	3,78	11,68	1,76
NI	12,72	0,40	Put	10	0,82	13,76	0,00	11,68	0,07
PCG	38,50	0,16	Call	40	0,31	39,69	0,68	37,31	0,08
PCG	38,50	0,16	Put	40	0,31	39,69	0,94	37,31	2,73
PEG	32,40	0,31	Call	30	0,61	34,38	4,52	30,42	1,42
PEG	32,40	0,31	Put	30	0,61	34,38	0,12	30,42	0,97
S0	31,93	0,15	Call	30	0,37	33,11	3,15	30,75	1,05
S0	31,93	0,15	Put	30	0,37	33,11	0,01	30,75	0,27
WMB	16,18	0,26	Call	15	1,33	18,33	3,35	14,03	0,14
WMB	16,18	0,26	Put	15	1,33	18,33	0,00	14,03	1,10
<b>Сумма</b>						<b>46,66</b>		<b>31,46</b>	

**Таблица 3.2.3.** Данные для расчета коэффициента асимметрии портфеля (дата создания портфеля 21 июля 2009 г., дата истечения опционов 21 августа 2009 г.)

Тикер акции	Страйк	Цена комбинации	Итерация 1		Итерация 2	
			цена акции	прибыль	цена акции	прибыль
eD	40	5,08	37,80	2,88	36,03	1,11
EIX	30	1,74	31,04	0,7	33,02	-1,28
EXC	50	3,42	55,38	-1,96	53,22	0,2
FE	40	5,60	31,36	-3,04	35,39	0,99
FPL	60	7,39	68,73	-1,34	67,47	-0,08
NI	10	2,76	11,33	1,43	12,35	0,41
PCG	40	1,99	35,93	-2,08	40,38	1,61
PEG	30	3,17	31,93	1,24	31,30	1,87
SO	30	2,08	32,85	-0,77	31,37	0,71
WMB	15	1,44	16,24	0,2	16,11	0,33
Сумма				-2,74		5,87

Таблица 3.2.4. Пример двух итераций Монте-Карло, выполненных для оценки прибыли опционного портфеля

Полный набор итераций для одного портфеля называется симуляцией (в своих расчетах мы использовали 20 000 итераций для каждой симуляции). Отношение числа убыточных итераций к общему числу итераций в симуляции дает оценку вероятности убытка портфеля. Например, если из 20 000 итераций 7420 были убыточными, то вероятность того, что данный портфель действительно окажется убыточным, составляет 0,37.

### 3.3. Взаимозависимость индикаторов риска

Эффективная система управления рисками должна включать в себя несколько альтернативных индикаторов, рассчитываемых на основе разных базовых принципов. Область их применения может включать не только создание портфеля, его оценку и реструктуризацию, но и генерацию сигналов на закрытие позиций. Разные индикаторы риска должны быть уникальны и взаимонезависимы (то есть они не должны коррелировать между собой). Необходимо подобрать такой набор уникальных индикаторов, чтобы каждый из них дополнял информацию, содержащуюся в других индикаторах, а не дублировал ее. В этом разделе мы исследуем взаимозависимость между четырьмя индикаторами риска.

### 3.3.1. Методика тестирования взаимозависимости индикаторов риска

Мы исходим из предположения, что если различные индикаторы риска являются уникальными (дополняют, а не дублируют информацию, содержащуюся в других индикаторах), то доходности портфелей, созданных на их основе, не будут коррелировать между собой.

Для тестирования взаимозависимости показателей риска использовалась база данных, содержащая цены опционов и их базовых активов в период с января 2003 по август 2009 г. На каждую дату истечения опционов было сформировано по 1000 портфелей, отстоящих от данной экспирации на разное количество дней (от 1 до 60). Таким образом, каждому количеству дней до заданной экспирации соответствовало 1000 портфелей, всего 60 000 портфелей для каждой даты экспирации.

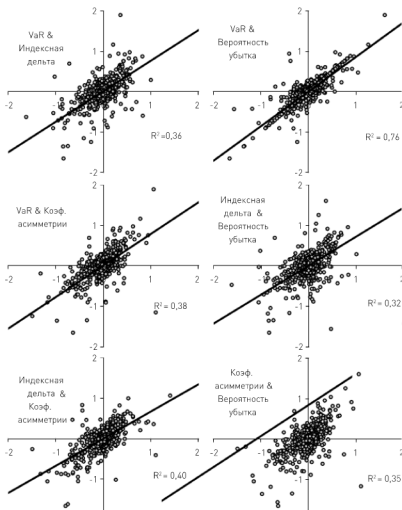
Для каждого из 1000 портфелей рассчитывались значения четырех показателей риска, после чего для каждого показателя выбирался наилучший портфель (таким образом, всего выбиралось по четыре портфеля из каждой 1000). Для выбранных портфелей фиксировалась доходность на дату экспирации. Доходность выражалась как прибыль (или убыток), нормированная на размер инвестиции и на время нахождения в позиции.

Каждый портфель состоял из 10 коротких стрэддлов на базовые активы, выбранные случайным образом из списка S&P 100. Страйк стрэддлов выбирался по принципу наименьшей удаленности от текущей цены базового актива. Объем позиции по каждому стрэддлу определялся как округленное до лотов (1 лот = 100 опционов) частное от деления  $100\,000/x$ , где  $x$  — цена акции.

### 3.3.2. Корреляционный анализ

Как и ожидалось, доходности портфелей, сформированных на основании четырех показателей риска, взаимозависимы. Однако, за единственным исключением, корреляции оказались достаточно низкими — для пяти из шести случаев квадрат коэффициента корреляции находился в диапазоне от 0,3 до 0,4 (рис. 3.3.1). Эти данные указывают на то, что информация, содержащаяся в исследуемых индикаторах риска, дублируется лишь на 30–40%. Соответственно, можно заключить, что введение дополнительного показателя привносит в систему оценки риска (основанную на единственном показателе) порядка 60–70% новой информации. Исключение составляет одна пара индикаторов, VaR и вероятность убытка. Их высокую

скоррелированность можно интерпретировать как свидетельство близости идей, заложенных в расчетные алгоритмы этих двух показателей. Соответственно, совместное использование данных индикаторов нецелесообразно, поскольку не добавит в систему достаточный объем новой информации.



**Рис. 3.3.1.** Взаимозависимость доходностей портфелей, выбранных на основе четырех показателей риска. На каждом графике указана пара показателей и соответствующий ей квадрат коэффициента корреляции

Является ли взаимозависимость индикаторов риска величиной абсолютной или она может варьироваться в зависимости от определенных факторов? Для ответа на этот вопрос мы исследовали два возможных фактора — интервал времени от момента создания портфеля до экспирации и уровень волатильности рынка в момент формирования портфеля.

В пределах одного торгового дня меру взаимозависимости показателей риска можно выразить через дисперсию доходностей четырех портфелей, отобранных с помощью этих показателей. Чем больше корреляция индикаторов риска, тем меньше дисперсия доходностей соответствующих им портфелей. (При максимально возможной скоррелированности показателей каждый из них выбирает один и тот же портфель. В этом случае дисперсия равна нулю).

Рис. 3.3.2. демонстрирует явно выраженную обратную зависимость дисперсии от количества дней, остающихся до истечения опционов. Это означает, что вблизи экспирации показатели риска являются слабо коррелированными и, следовательно, все они (или по крайней мере некоторые из них) обладают существенным объемом дополнительной информации, не содержащейся

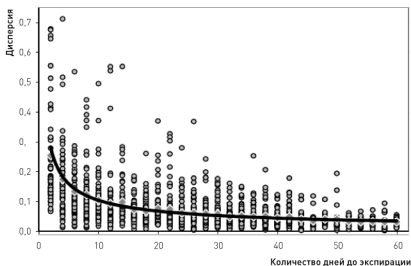


Рис. 3.3.2. Зависимость дисперсии доходности портфелей, выбранных на основе четырех показателей риска, от количества дней до экспирации. Точками показаны отдельные значения дисперсии, ромбы соответствуют средним значениям



в других индикаторах. С другой стороны, дисперсия доходности портфелей формируемых задолго до экспирации, оказалась достаточно низкой (рис. 3.3.2), что указывает на сильную взаимозависимость показателей риска в этот период.

Рыночная волатильность также оказывает влияние на взаимозависимость индикаторов риска, однако это влияние проявляется гораздо сильнее вблизи экспирации, нежели далеко от истечения опционов. Так, для портфелей, сформированных за два дня до экспирации, коэффициент корреляции между величиной дисперсии и волатильностью составил  $r = 0,62$  для исторической и  $r = 0,68$  для подразумеваемой волатильности (рис. 3.3.3). В то же время для портфелей, созданных за 60 дней до истечения опционов, коэффициенты корреляции были значительно ниже ( $r = 0,24$  и  $r = 0,28$  соответственно).

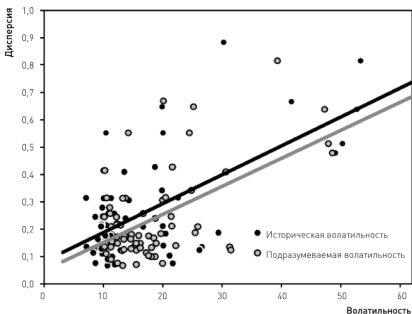


Рис. 3.3.3. Зависимость дисперсии доходности портфелей, выбранных на основе четырех показателей риска, от исторической и подразумеваемой волатильности. На графике приведены данные, соответствующие только тем портфелям, которые были созданы за два дня до экспирации

### 3.4. Создание системы управления рисками

Показатели риска, рассмотренные в этой главе, представляют собой пример оценочного аппарата, который может быть использован для построения многокритериальной системы управления рисками. Описанные индикаторы ни в коей мере не исчерпывают потенциальные возможности создания дополнительных алгоритмов прогнозирования рисков. Работа в этом направлении должна продолжаться, что приведет к разработке широкого набора инструментов, предназначенных для разностороннего анализа потенциальных рисков, угрожающих инвестиционным портфелям.

Вместе с тем система управления рисками не должна основываться на чрезмерно большом количестве индикаторов, поскольку это будет перегружать вычислительные процессы и снизит оперативность оценочных процедур. Поэтому необходимо строго следить за тем, чтобы добавляемые в систему новые показатели несли в себе действительно новую информацию, а не дублировали уже существующие индикаторы. Из четырех рассмотренных нами показателей только два оказались дублирующим друг друга — VaR и вероятность убытка. Следовательно, создавая многокритериальную систему управления рисками, можно ограничиться использованием только одного из этих инструментов.

Наши исследования показали, что многокритериальный подход к оценке риска является наиболее оправданным при формировании портфелей вблизи даты истечения опционов и в условиях высокой рыночной волатильности. В таких случаях оценочные инструменты являются наименее коррелированными и, следовательно, каждый из них привносит в общую систему прогнозирования риска наибольшее количество дополнительной информации, не содержащейся в других индикаторах. Дальнейшие исследования должны быть направлены на выявление дополнительных факторов, влияющих на корреляцию показателей риска и определяющих необходимость привлечения дополнительных индикаторов.

#### 4.1. Классическая теория портфеля и ее применимость к опционам

##### 4.1.1. Два уровня управления капиталом

Независимо от применяемых в торговле финансовых инструментов — будь то опционы, фьючерсы или сами базовые активы — управление капиталом является сложной и важной задачей. Ее значение и влияние на результаты торговли невозможно переоценить. В общем виде систему управления капиталом можно рассматривать на двух основных уровнях.

*Первый уровень* — это распределение средств между безрисковыми инструментами денежного рынка и объектами инвестирования. Действия инвестора по реализации первого уровня системы управления капиталом определяются решением о том, какую долю средств оставить в деньгах, а какую — инвестировать в рискованные активы. Такие решения принимаются многократно на протяжении всего периода работы стратегии. Причем в каждый момент времени объем капитала, выделяемого для открытия новых позиций, определяется не только системой встроенной в торговую стратегию, но и величиной капитала, инвестированного ранее, а также объемом капитала, который предположительно должен высвободиться в будущем при закрытии существующих торговых позиций. Таким образом, принятие решений на первом уровне управления капиталом является, с одной стороны, процессом с обратной связью, а с другой стороны, зависит от прогнозов реализации будущей прибыли или убытков.

Принципы построения системы первого уровня не зависят от применяемых в торговле инструментов и являются универсальными как для опционов, так и для смешанных или состоящих исключительно из акций портфелей. Поэтому мы не будем касаться данного вопроса в этой книге. Тем более что на сегодняшний день существует большое количество публикаций, посвященных этой теме.

В качестве полезного и достаточно полного руководства по разработке системы управления капиталом первого уровня можно рекомендовать книгу Ральфа Винса (Винс, 2007).

Второй уровень системы управления капиталом представляет собой распределение средств, выделенных на первом уровне системы управления капиталом, между отдельными рисковыми активами. Применительно к опционным торговым системам в качестве единичного объекта инвестирования (единичного актива) удобно принять опционную комбинацию (совокупность опционов, относящихся к одному базовому активу). По существу, результатом распределения средств между объектами инвестирования является формирование портфеля. Принципы второго уровня управления капиталом специфичны для разных финансовых инструментов. Поэтому разработка системы распределения капитала требует учета многих особенностей, характерных для опционов. Этой теме будет посвящена данная глава.

#### 4.1.2. Классическая теория формирования портфеля

Задача оптимального распределения капитала при формировании портфеля возникает в связи с тем, что инвестирование в рисковые активы требует соблюдения баланса между ожидаемой доходностью и предполагаемым риском. Распределение капитала между разными объектами инвестирования позволяет существенно снизить риск при незначительном снижении доходности. Такая возможность обусловлена тем, что риски по отдельным активам могут быть некоррелированными или слабо коррелированными. Еще большие возможности для снижения риска дает отрицательная корреляция. Кроме того, при допустимости коротких позиций для снижения риска могут использоваться коррелирующие активы. В этом случае снижение риска происходит за счет того, что по одному из коррелирующих активов открывается длинная позиция, а по другому — короткая. Хотя диверсификация, достигаемая путем распределения капитала между несколькими активами, неизбежно приводит к некоторому снижению ожидаемого дохода (относительно наиболее доходного актива), достигаемое при этом снижение риска в большинстве случаев бывает оправдано.

Задача распределения капитала является вероятностной, поскольку инвестор формирует портфель исходя из оптимальности по отношению к тем условиям, которые еще не наступили и которые можно описать лишь в терминах вероятности. При этом в большинстве случаев делается допущение, что динамика

цен в будущем будет подчиняться тем же закономерностям, которые имели место в прошлом. Даже если такое допущение не делается в явной форме, тем не менее вероятностные распределения будущих ценовых движений в большинстве случаев строятся на основе исторических временных рядов либо основываются на параметрах, вычисляемых на их основе. Такой подход подвергается достаточно жесткой критике с многочисленными примерами реализовавшихся событий, которые с точки зрения вероятностных моделей, основанных на статистике прошлого, были почти невозможными. Тем не менее, кроме исторических рядов, мы не располагаем другой достоверной информацией для построения вероятностных прогнозов (за исключением разного рода экспертных оценок, которые в большинстве случаев являются субъективными и трудно формализуемыми). Частично решить данную проблему позволяют усовершенствованные математические модели, используемые при построении вероятностных распределений. В частности, прилагаются значительные усилия для замены логнормального распределения другими, описывающими более точно динамику рыночных цен и вероятности редких событий.

Современная теория портфеля основывается на классической работе Гарри Марковица. Построение оптимального портфеля по теории Марковица основывается на оценке ожидаемой доходности и риска. Для заданного множества потенциальных объектов инвестирования рассматриваются все возможные варианты распределения капитала между этими объектами. Оптимальными считаются такие портфели, которые при заданном уровне доходности имеют наименьший риск, а при заданном уровне риска имеют наибольшую доходность. Выбор определенного портфеля из этого множества определяется специфическими требованиями каждого инвестора (индивидуальной толерантностью к риску и границами безразличия).

Для простых активов, имеющих линейную платежную функцию (акции, товарные и индексные фьючерсы), расчет доходности и риска не представляет большой сложности. Ожидаемая доходность каждого отдельного базового актива оценивается исходя из безрисковой ставки, рыночной премии и беты. Доходность портфеля является аддитивным показателем и рассчитывается как взвешенная сумма доходностей отдельных активов (в качестве веса используется доля капитала инвестируемого в данный актив). Риск отдельного базового актива выражается через стандартное отклонение изменений его цены,

рассчитываемое на основе исторических временных рядов. Риск портфеля вычисляется на основе ковариационной матрицы с учетом весов каждого актива.

#### 4.1.3. Особенности опционных портфелей

Для портфелей, состоящих из опционов, классическая теория в ее базовом виде неприменима по нескольким причинам. Приведем основные из них.

- Оценка ожидаемой доходности опционов производится не с помощью беты или других аналогичных методов, а требует специальных подходов. Для этого можно воспользоваться показателем математического ожидания прибыли, рассчитанного на основе определенного распределения. Кроме того, в качестве показателя, выражающего косвенным образом ожидаемую доходность, можно воспользоваться многими из критериев, описанных в нашей книге «Опционы: системный подход к инвестициям».
- Платежная функция опционов не линейна. Это означает, что распределение изменений цены опциона не нормально и не может описываться с помощью функции плотности вероятности логнормального распределения. Причем отклонение от нормальности в данном случае несопоставимо по масштабу с отклонениями, обычно наблюдаемыми для линейных активов. Если для обычных активов такими отклонениями можно пренебречь (хотя многие авторы убедительно доказывают невозможность такого пренебрежения, логнормальное распределение продолжает широко использоваться на практике), то для опционов это создает гораздо большие проблемы (хотя логнормальное распределение все-таки используется для цены базовых активов в моделях ценообразования опционов). В частности, риск опциона не может быть оценен с помощью стандартного отклонения его цены, как это делается в классической теории портфеля. Использование для этой цели стандартного отклонения цены базового актива также не является приемлемым решением, поскольку не учитывает специфические риски, связанные с данным опционным контрактом.
- Риск опционов принято описывать с помощью «греков». Риск изменения цены опциона в зависимости от изменений цены базового актива (интересующий нас в контексте оптимизации портфеля) выражается с помощью дельты. Этот показатель мог бы использоваться в качестве альтернативы стандартному отклонению, однако дельта не аддитивна, то есть не может быть вычислена для портфеля путем взвешенного суммирования дельт комбинаций, относящихся к разным базовым активам.

Данная проблема может быть решена с помощью концепции индексной дельты, описанной в главе 3.

Помимо перечисленных проблем, существуют особенности, связанные с периодом обращения опционов. Поскольку в отличие от многих активов срок жизни любого опционного контракта ограничен датой экспирации, исторический временной ряд, необходимый для анализа определенного опциона, достаточно короток. Кроме того, глубина прогноза также ограничена. Если для обычных активов ожидаемая доходность обычно оценивается на годовом горизонте, то для опционов горизонт прогноза не может быть дальше даты экспирации. В то же время ограниченность периода обращения опционов имеет свои преимущества, заключающиеся в том, что достоверность оценки справедливой стоимости имеет однозначную дату верификации (в отличие от вечноживущих активов, для которых дата схождения рыночной цены и расчетной справедливой стоимости объективно не определена).

В тот момент, когда доля (вес) каждого актива определена, распределение капитала внутри портфеля, состоящего из линейных активов (в отличие от опционного портфеля), является тривиальной задачей. Для этого достаточно лишь определить, на какую сумму купить (или продать) выбранные активы. При этом должно соблюдаться единственное требование — общая сумма инвестиций во все активы должна равняться объему средств, выделенных на первом уровне системы управления капиталом. В такой ситуации размеры инвестиций в разные активы легко сравнимы между собой. В случае работы с опционами выделенные средства не инвестируются в полном объеме. Некоторые комбинации являются дебетовыми (требуют вложения средств), некоторые — кредитовыми (инвестор сам получает средства), при этом и те и другие могут требовать блокировки определенного объема средств на торговом счете (так называемые маржевые требования).

Маржевые требования представляют собой объем капитала необходимый для поддержания опционной позиции. В литературе их часто рассматривают как эквивалент объема инвестиций. На самом деле это не совсем так, поскольку в отличие от инвестиций маржевые требования могут изменяться во времени. Кроме того, их величина определяется расчетными методами, алгоритмы которых не стандартизированы и также могут меняться от брокера к брокеру (и даже один и тот же брокер может варьировать размер маржевых требований в зависимости от рыночной ситуации).

Из сказанного следует, что объем средств, выделенных на первом уровне системы управления капиталом, может использоваться лишь в качестве ориентира при распределении капитала между элементами портфеля. Необходимо стремиться к тому, чтобы, во-первых, суммарный объем маржевых требований ни в какой момент времени не превысил размеры этого ориентира и, во-вторых, чтобы выделенного капитала было достаточно для исполнения будущих обязательств при истечении и исполнении опционов. Эта задача осложняется изменчивостью маржевых требований во времени, поскольку их величина может ежедневно меняться в зависимости от изменяющихся рыночных цен базовых активов. В связи с этим решение о доле капитала, выделяемого на каждую комбинацию, должно, кроме всего прочего, учитывать прогноз будущей волатильности ее базового актива.

#### 4.2. Принципы формирования опционного портфеля

##### 4.2.1. Размерность оценки

Классическая теория портфеля предполагает распределение капитала исходя из оценки двух показателей — доходности и риска. Мы предлагаем для целей построения опционных торговых стратегий не ограничиваться такой двумерной системой, а рассматривать ее лишь как частный случай более общего подхода, не ограниченного количеством используемых показателей. Таких показателей может быть больше или меньше двух. В случае единственного показателя (одномерная система) средства, выделенные на первом этапе управления капиталом, распределяются между элементами портфеля пропорционально значениям этого показателя.

Одномерная система оценки может показаться неполной, поскольку вынуждена ограничиваться всего одним показателем — либо прогнозом доходности, либо оценкой риска. Однако применительно к опционам такой подход может быть оправдан, поскольку многие показатели (критерии), используемые для их оценки, сочетают в себе прогноз как доходности, так и риска. Наиболее наглядно это можно показать на примере критерия «математическое ожидание прибыли, рассчитанное на основе логнормального распределения». Данный критерий рассчитывается путем интегрирования платежной функции опциона (или комбинации нескольких опционов) по функции



плотности вероятности логнормального распределения. Для построения функции плотности необходимы два параметра, среднее и стандартное отклонение. Именно стандартное отклонение используется в классической теории портфеля в качестве показателя риска. Таким образом, данный критерий сочетается в себе элементы прогноза и доходности и риска. Многие другие критерии, оценивающие будущую доходность на основе других распределений (не логнормального), также обязательно используют определенный показатель изменчивости цены, выражающий прямо или косвенно оценку риска.

Для некоторых торговых стратегий может использоваться одномерная система, не связанная напрямую с оценками доходностей и рисков. Например, количественные соотношения комбинаций в портфеле могут задаваться в зависимости от размера премий, получаемых или уплачиваемых при их создании. В частности, такой подход может быть оправдан, если идея торговой стратегии основывается на том, что для коротких позиций все комбинации должны приносить одинаковый объем премии, а все длинные комбинации должны иметь одинаковую стоимость. Тогда, если премия одной из двух комбинаций составляет, например, \$600, а другой \$400, то поставленная цель достигается путем покупки (или продажи) двух контрактов по первой комбинации и трех — по второй. Особенностью данного метода является то, что открывается меньше позиций по комбинациям, состоящим из более дорогих (а значит, в большинстве случаев, и более рискованных) опционов. Это позволяет в определенной мере сбалансировать входящие в портфель позиции по риску.

Одномерная система, не связанная с оценками доходностей и рисков, может также основываться на эквивалентности позиции в акциях. Такой метод распределения капитала между вошедшими в портфель комбинациями аналогичен распределению капитала между линейными активами (когда объем средств, вкладываемых в каждый из активов, является мерой для расчета соотношения инвестиций). Показателем эквивалентности позиции в акциях служит величина, обратная стоимости акции (то есть количественное соотношение позиций, открываемых по каждому базовому активу, обратно пропорционально отношению цен базовых активов). Предположим, что торговая стратегия ориентирована на открытие позиций по двум комбинациям с соблюдением равного эквивалента в акциях. Это означает, что при исполнении опционов сумма инвестиций в оба базовых актива будет равной. Допустим, цена исполнения по одному базовому активу

оставляет \$50, а по второму \$40. Тогда для каждого опциона в первой комбинации может быть открыта позиция в размере 20 контрактов, а во второй комбинации — в размере 25 контрактов. В этом примере в качестве ориентира была использована одинаковая для двух комбинаций сумма \$100 000 (именно столько придется инвестировать в каждый базовый актив в случае исполнения опционов). Абсолютная величина ориентира может быть любой и не обязательно одинаковой для всех элементов портфеля. Главное, чтобы суммарный объем средств, требуемых при исполнении опционов, равнялся выделенному капиталу, а соотношение открытых позиций соответствовало целевым параметрам, задаваемым торговой стратегией. Следует принимать во внимание, что применение данного метода осложняется для комбинаций, имеющих разные количества опционов колл и пут. Поскольку неизвестно, какие из опционов (коллы или путы) окажутся в будущем в деньгах и будут исполнены, то эквивалентная позиция в акциях не может быть определена в момент открытия позиции. Кроме того, желательно, чтобы цены исполнения для коллов и путов совпадали. Несоблюдение последнего условия порождает проблему неопределенности при выборе страйка для расчета эквивалента. В качестве компромиссных решений этой проблемы можно предложить расчет средневзвешенной величины всех входящих в комбинацию страйков либо использование текущей цены базового актива.

Многомерная система оценки может основываться на двух и более показателях, выражающих оценки доходности, риска. Обычная практика портфельной оптимизации, восходящая к классической работе Марковица, основывается на распределении капитала по двум показателям (доходность и стандартное отклонение). Однако ничто не мешает введению дополнительных показателей, если есть достаточные основания предполагать, что это приведет к улучшению системы распределения капитала и получаемые преимущества превосходят затраты на привлечение дополнительных вычислительных ресурсов.

При использовании нескольких показателей необходимо делать выбор из множества портфелей, каждый из которых представляет оптимальный вариант распределения капитала. По сути, речь идет об оптимизации по Парето. Процедура получения Парето-оптимальных (недоминируемых) решений состоит в том, что, фиксируя значение одного из показателей, находим наилучшее значение другого, повторяя эту процедуру для всех диапазонов значений показателей. Такая же методика

может использоваться и для выбора множества оптимальных портфелей по трем и более показателям. Недостаток методики Парето состоит в том, что результатом оптимизации является не единственный портфель, а множество портфелей, каждый из которых является оптимальным. Как следствие, возникает проблема выбора одного варианта из полученного множества альтернатив. Решить эту задачу достаточно сложно, не прибегая к использованию субъективных оценок. Поэтому поиск методики, позволяющей получить однозначное решение, включающее выбор из множества Парето-оптимальных вариантов, представляет большой практический интерес.

В качестве альтернативного подхода к реализации системы многомерной оценки можно использовать свертку нескольких показателей. Рассмотрим основные способы свертки показателей. Сумма значений показателей представляет собой аддитивную свертку. При этом возможно придание разных весовых коэффициентов для разных показателей. Произведение показателей является мультипликативной сверткой. В этом случае введение весов достигается возведением показателей в соответствующую степень — тем большую, чем большим весом обладает данный показатель. Мультипликативная свертка применима только для неотрицательных показателей (иначе перемножение двух отрицательных показателей будет иметь положительное значение свертки). Также нужно учитывать, что если один из показателей равен нулю, то и мультипликативная свертка равна нулю. Вообще, в мультипликативной свертке большее влияние оказывают показатели, имеющие низкие значения.

При расчете свертки нужно учитывать, что показатели могут измеряться в разных единицах и иметь различный масштаб величин. Существует несколько способов приведения разных показателей к единой мере. В частности, можно использовать метод нормализации — отношения разности значения показателя и его среднего к стандартному отклонению. Можно также вычесть минимальные значения, разделив затем на разность между максимальным и минимальным значением (в этом случае значения критерия будут лежать в интервале от нуля до единицы). Первый из предложенных способов более пригоден для построения аддитивной, второй — для мультипликативной свертки.

#### 4.2.2. Уровень оценки

Классическая теория портфеля основывается на показателях доходности и риска, оцениваемых для портфеля в целом. Такой

подход — будем называть его «портфельным», — будучи логичным и, возможно, наиболее обоснованным, тем не менее не является исчерпывающим. Существует множество опционных стратегий, для которых более подходящим оказывается принцип распределения капитала, основанный на оценках отдельных элементов формируемого портфеля (будем называть его «элементным»).

Неоспоримым преимуществом портфельного подхода является возможность учитывать корреляции между отдельными элементами портфеля. Это позволяет выражать преимущества диверсификации путем снижения оценочного риска портфелей, состоящих из слабо коррелирующих активов. Вместе с тем это не означает, что элементный подход не позволяет учитывать корреляции между активами. В частности, средний коэффициент корреляции заданного актива с каждым из других активов может использоваться в качестве одного из показателей, по которым распределяется капитал между элементами портфеля. Однако надо признать, что учет корреляций, используемый при портфельном подходе, более корректен с технико-методологической точки зрения.

Другое преимущество портфельного подхода заключается в отсутствии необходимости заранее устанавливать множество активов, включаемых в портфель. Потенциально портфель может состоять из всех доступных активов, а его конкретный состав определяется непосредственно в процессе формирования, когда активы, получающие нулевые веса, не включаются в портфель. Таким образом, значительно снижается элемент субъективности при выборе количества активов, входящих в состав портфеля. При элементном подходе в портфель включаются все активы, удовлетворяющие определенным условиям (например, значение определенного показателя превышает заданное пороговое значение). Выбор таких условий и пороговых значений требует принятия решений, основанных в значительной степени на субъективных оценках.

С другой стороны, распределение капитала на элементной основе (покомбинационной) может быть предпочтительным, а для определенных торговых стратегий — единственно возможным методом. В предыдущем разделе мы описали два примера распределения капитала, основанного на одномерной системе показателей, не связанных напрямую с оценками доходностей и рисков. Оба этих метода ориентированы на покомбинационное распределение капитала. В тех случаях, когда капитал

распределяется в зависимости от размера получаемых или уплачиваемых премий, применение портфельного подхода невозможно по определению (поскольку капитал распределяется по размеру премии, относящейся к каждой конкретной комбинации). Портфельный подход невозможен также и тогда, когда капитал распределяется по заданному соотношению позиций в базовых активах, возникающих при исполнении опционов (поскольку объем позиции является характеристикой каждого отдельного базового актива).

Некоторые критерии, которые могут использоваться в качестве показателей при распределении капитала, применимы только на уровне комбинаций (поскольку расчет их значений для портфеля в целом невозможен или затруднен). Например, критерий «отношение IV/HV» невозможно рассчитать для портфеля, поскольку историческая волатильность (HV) является понятием, относящимся к конкретному базовому активу, а подразумеваемая волатильность (IV) представляет собой характеристику конкретного опционного контракта. Данная проблема может быть решена путем замены IV и HV, относящихся к отдельным комбинациям, индексам, комбинирующими данные показатели для портфеля в целом. Однако величины таких индексов могут достаточно сильно варьировать в зависимости от выбранной методики расчета.

Многие показатели, используемые для распределения капитала, могут применяться как для отдельных комбинаций, так и для портфеля в целом. В таких случаях выбор между портфельным и элементным подходом производится исходя из особенностей каждой конкретной торговой стратегии. Ниже мы остановимся на этом более подробно и сравним два подхода на примере одной из модификаций базовой дельта — нейтральной стратегии.

#### 4.3. Показатели, используемые для распределения капитала

**4.3.1. Показатели, не связанные с оценкой доходности и риска**  
В разделе 4.2.1, описывая одномерную систему распределения капитала, мы вкратце охарактеризовали показатели, не связанные с оценками доходностей и рисков. Здесь мы продемонстрируем методику формирования портфеля по двум таким показателям и покажем, что один из них косвенно выражает величину риска.

### Распределение капитала по эквиваленту позиции в акциях

Понятие «эквивалент» используется для соотнесения объема средств, которые потребуются в будущем (на дату истечения опционов) с размером опционной позиции по определенному базовому активу. Например, торговая стратегия может требовать, чтобы на дату экспирации в каждую акцию вкладывался равный объем капитала. Определим показатель «эквивалент позиции в акциях» как объем капитала, который потребуется в будущем (на дату экспирации либо на другую дату) при исполнении опционов, относящихся к определенному базовому активу.

Для формализации понятия «эквивалент» обозначим через  $C$  комбинацию, состоящую из разных опционов на один и тот же базовый актив. Предположим, что портфель формируется из  $m$  комбинаций  $(C_1, C_2, \dots, C_m)$ . Пусть  $a_j$  будет количеством комбинаций  $C_j$ , включенных в портфель. Если  $U_j$  — цена базового актива комбинации  $C_j$ , то для данной комбинации показатель эквивалента равен произведению  $a_j U_j$ . Обозначим через  $M$  суммарный эквивалент портфеля (то есть объем капитала, который потребуется на дату истечения всех входящих в портфель опционов). При определении значений вектора  $a$  должно соблюдаться равенство:

$$a_1 U_1 + a_2 U_2 + \dots + a_m U_m = M, \quad (4.3.1)$$

означающее, что сумма эквивалентов всех комбинаций должна равняться суммарному эквиваленту портфеля.

Рассмотрим пример торговой стратегии, использующей такой способ распределения капитала, при котором показатель «эквивалент позиции в акциях» одинаков для всех комбинаций. Предположим, что  $M = \$1\,000\,000$  и что портфель формируется из 20 акций, входящих в S&P 500. Для каждой из них 28 августа 2010 г. были сгенерированы стрэддлы, состоящие из одного опциона колл и одного опциона пут с датой экспирации 17 сентября 2010 г. и страйками, ближайшими к текущим ценам акций. Котировки опционов брались на закрытие дня как полусумма цен спроса и предложения.

Равенство эквивалентов означает  $a_k U_k = a_j U_j$  для каждой пары комбинаций  $i$  и  $j$ . Из приведенного выше равенства следует формула для всех  $j$ :

$$a_j = \frac{M}{m U_j}. \quad (4.3.2)$$

В таблице 4.3.1 приведено количество стрэддлов, получаемое при распределении капитала по равному эквиваленту. Эти количества рассчитаны таким образом, чтобы соблюдались два условия, необходимые для выполнения требований данной стратегии — равенство эквивалентов для всех акций и суммарный эквивалент портфеля \$1 000 000. Например, для акции DELL, учитывая, что  $m = 20$  и стоимость акции  $U_j = 11,75$ , число стрэддлов составляет  $a_j = 1\,000\,000 / (20 \cdot 1,75) = 4255,32$ . Мы для простоты округляем расчеты до двух цифр после запятой и не обращаем внимания на кратность лотов, принятую в реальной торговле.

#### Распределение капитала обратно пропорционально премии

Распределение капитала по премиям означает, что размер позиции по каждой комбинации определяется исходя из объема ее опционной премии. Рассмотрим в качестве примера торговую стратегию, основанную на таком принципе распределения капитала, который требует, чтобы суммарные премии, полученные от продажи всех экземпляров одной комбинации, были одинаковы. Это означает, что чем больше премия одной комбинации, тем меньше ее экземпляров будет включено в портфель. Поэтому такой подход называется «обратно пропорциональным».

Продемонстрируем данную методику распределения капитала на примере тех же комбинаций, что в предыдущем примере. Пусть  $p_j$  — премия  $j$ -й комбинации, а  $a_j$  — число ее экземпляров в портфеле. Равенство премий в портфеле  $a_j p_j = a_k p_k$  означает, что числа  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  обратно пропорциональны абсолютным значениям премий отдельных комбинаций:  $a_j : \frac{1}{p_j}$ . Формально количество экземпляров каждой комбинации в портфеле определяется по формуле

$$a_j = \frac{M}{p_j \sum_{i=1}^m \frac{U_i}{p_i}} \quad (4.3.3)$$

В нашем примере сумма отношений цен акций к премиям равна  $\sum_{i=1}^m \frac{U_i}{p_i} = 349,25$ . Премии комбинаций и соответствующие им значения  $a_j$  приведены в таблице 4.3.1. Так, например, количество комбинаций для акции AAPL, премия стрэддла которой составляет  $p_2 = \$14,65$ , рассчитывается как:

$$a_2 = 1000\,000 / (14,65 \cdot 349,25) = 195,44.$$

**Сравнение двух принципов распределения капитала**

Оба описанных нами способа распределения капитала по показателям, не связанным с оценкой доходности и риска, дали достаточно близкие результаты (таблица 4.3.1). Это объясняется тем, что чем дороже акция, тем меньшее количество опционов должно быть исполнено для получения заданного эквивалента. С другой стороны, абсолютная величина опционной премии обычно коррелирует с ценой акции и поэтому для более дорогих акций требуется продать меньше комбинаций для получения заданного объема премии.

Акция	Цена акции	Страйк	Премия	Количество комбинаций при распределении капитала	
				по эквиваленту	по премии
AA	10,01	10	0,74	4995	3896
AAPL	240,28	240	14,65	208	195
BA	61,32	62,5	4,14	815	692
CAT	63,95	65	4,26	782	673
CSCO	20,7	21	1,29	2415	2220
DD	39,49	39	2,28	1266	1259
DELL	11,75	12	0,82	4255	3492
EL	56,65	55	3,43	883	836
F	11,17	11	0,91	4476	3164
GD	56,83	55	3,55	880	807
GE	14,5	14	1,05	3448	2727
GOOG	450,98	450	26,10	111	110
IBM	122,78	125	5,39	407	531
INTC	18,18	18	1,11	2750	2591
MA	203,17	200	13,23	246	217
MSFT	23,82	24	1,22	2099	2347
ORCL	22,25	22	1,43	2247	2002
PG	59,54	60	1,80	840	1595
T	26,7	27	1,02	1873	2821
V	69,91	70	4,24	715	676

**Таблица 4.3.1.** Распределение капитала между 20 комбинациями «короткий стрэдл» по показателям «эквивалент позиции в акциях» и «обратно пропорционально премии»



Вместе с тем, хотя количество комбинаций в портфелях, сформированных по двум рассмотренным принципам, довольно близко, оно не полностью идентично. Это хорошо видно на рис. 4.3.1, каждая точка на котором представляет одну из 20 комбинаций, входящих в состав портфеля. По горизонтальной оси отложен размер позиции, создаваемой при распределении капитала по принципу эквивалента; по вертикальной оси — размер позиции при распределении капитала по премии. Если бы результаты двух методов были одинаковы, то все точки-комбинации расположились бы вдоль показанной на рисунке наклонной линии. Однако мы наблюдаем достаточно большой разброс точек вдоль данной линии.

Причина дивергенции между двумя способами распределения капитала заключается в том, что корреляция между премией и ценой акции не абсолютна. Цена базового актива является далеко

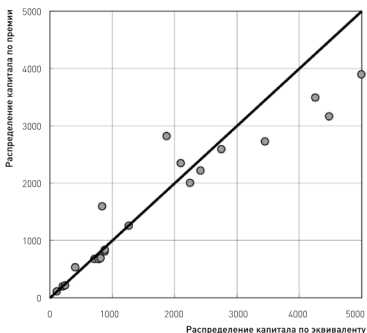


Рис. 4.3.1. Взаимозависимость между размером позиции, создаваемой при распределении капитала по принципу эквивалента (горизонтальная ось), и размером позиции, получаемой при распределении капитала по премии (вертикальная ось). Каждая точка на графике представляет отдельную комбинацию

не единственным фактором, влияющим на стоимость опциона. Одним из основных факторов, определяющих стоимость опциона, является степень неопределенности относительно будущей цены базового актива (выражаемая обычно посредством волатильности). Поэтому для двух акций, имеющих одинаковую стоимость (и совпадающих по другим параметрам), размер премии может быть разным. Следовательно, при прочих равных условиях комбинация с более высокой премией является более рискованной. Таким образом, получается, что более рискованные комбинации получают меньше капитала.

Эти рассуждения позволяют создать показатель, выражающий косвенным образом степень рискованности комбинации. Можно утверждать, что точки, расположенные ниже линии на рис. 4.3.1 соответствуют более рискованным комбинациям с более высокой премией. Количественно это можно выразить через отношение числа экземпляров комбинации, получаемого по формуле 4.3.2, к числу, получаемому по формуле 4.3.3. В результате получим показатель рискованности:

$$\begin{aligned} \text{riskiness} &= \frac{a_{\text{equivalent}}}{a_{\text{premium}}} = \frac{M}{mU_j} \frac{p_j \sum_{i=1}^m \frac{U_i}{p_i}}{M} = & (4.3.4) \\ &= \frac{p_j \sum_{i=1}^m \frac{U_i}{p_i}}{mU_j} = \frac{p_j}{U_j} \frac{\sum_{i=1}^m \frac{U_i}{p_i}}{m} = \frac{p_j}{U_j} \left( \frac{U}{p} \right) \end{aligned}$$

Из полученной формулы следует, что показатель рискованности равен произведению отношения премии  $j$ -й комбинации к цене  $j$ -й акции и среднего отношения цены базового актива к премии. Данный показатель обладает практичной размерностью — для более рискованных комбинаций (относительно всего портфеля) он больше единицы, а для менее рискованных комбинаций он меньше единицы. Если комбинация по своей рискованности приближается к средней рискованности портфеля, то этот показатель будет стремиться к единице. В приведенных выше примерах среднее отношение цены базового актива к премии составляет 17,5. Используя данные таблицы 4.3.1, можно показать, что для акции AA  $\text{riskiness} = (0,74 / 10,01) \times 17,5 = 1,28$ , а для акции IBM  $\text{riskiness} = 0,77$ . Это означает, что комбинация, относящаяся к первой акции, более рискованна, чем комбинация, относящаяся ко второй.

Следует отметить, что показатель рискованности, рассчитываемый по формуле 4.3.4, может сам по себе использоваться для решения задачи распределения капитала, что позволит учитывать параллельно с премией и ценой акции еще и величину риска, ассоциированного с данной комбинацией. При этом необходимо оговориться, что данный показатель основывается на относительной дороговизне опционов, но не принимает в расчет степень ее обоснованность (с точки зрения исторической волатильности или ожидаемых новостей). Поэтому он не может претендовать на полное и всеобъемлющее выражение риска, а должен рассматриваться лишь как один из возможных инструментов решения задачи распределения капитала.

#### 4.3.2. Показатели, выражающие оценку доходности и риска

Можно создать большое количество различных показателей, выражающих тем или иным образом оценку будущей доходности и прогноз рисков. Здесь мы ограничимся рассмотрением двух показателей доходности (математическое ожидание и вероятность прибыли) и трех показателей риска (дельта, коэффициент асимметрии и VaR).

В предыдущем разделе мы рассчитывали количество экземпляров каждой комбинации исходя непосредственно из параметров самой комбинации или ее базового актива. Применительно к показателям, оценивающим доходность и риск, предпочтителен (а во многих случаях и единственно возможен) более общий подход, основанный на распределении капитала с помощью набора весов. Для этого необходимо задать функцию  $f(C)$ , вычисляемую для каждой комбинации  $C$  и принимающую неотрицательные действительные значения. Функцию  $f(C)$  будем называть «весовой» функцией.

Весовая функция может применяться к двум типам показателей, которые мы будем условно называть «позитивными» и «негативными». Для позитивных показателей весовая функция  $f(C)$  такова, что большие ее значения соответствуют более привлекательным комбинациям, а меньшие значения — менее привлекательным. К позитивным показателям относятся математическое ожидание и вероятность прибыли, а также все показатели, связанные с прогнозированием потенциала прибыльности. Для негативных показателей весовая функция  $f(C)$  такова, что чем больше ее значение, тем менее привлекательна комбинация  $C$ . К негативным относится большинство показателей, оценивающих риск. Например, VaR, оценивающий размер

убытка для заданной вероятности, принимает большие значения для более рискованных и, соответственно, менее привлекательных комбинаций.

Независимо от вида функции  $\varphi(C)$ , вес  $j$ -й комбинации в составе портфеля определяется как:

$$w_j = \frac{\varphi(C_j)}{\sum_{i=1}^m \varphi(C_i)} \quad (4.3.5)$$

и должен удовлетворять двум условиям:  $w_j \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^m w_j = 1$ .

Способ вычисления количества экземпляров комбинации  $C_j$  в портфеле зависит от подхода, применяемого на первом уровне системы управления капиталом. Если капитал, выделяемый для инвестирования в опционный портфель, представляет собой объем средств, который потребуется в будущем при исполнении опционов, то такой капитал является суммарным эквивалентом портфеля  $M$  (см. описание в предыдущем разделе). В этом случае количество экземпляров комбинации может быть рассчитано по формуле

$$a_j = \frac{M\varphi(C_j)}{\sum_{i=1}^m U_i \varphi(C_i)} \quad (4.3.6)$$

или, что то же самое, но с помощью константы  $\mu$ :

$$a_j = w_j \mu, \text{ где } \mu = \frac{M \sum_{i=1}^m \varphi(C_i)}{\sum_{i=1}^m U_i \varphi(C_i)}. \quad (4.3.7)$$

Если выделяемый для инвестирования капитал  $F$  представляет собой суммарный объем инвестиций в опционный портфель (например, суммарный объем маржевых требований по всему портфелю), то количество экземпляров комбинации  $C_j$  определяется по формуле

$$a_j = w_j F = \frac{F \varphi(C_j)}{\sum_{i=1}^m \varphi(C_i)}. \quad (4.3.8)$$

В дальнейших исследованиях мы будем использовать подход, основанный на суммарном эквиваленте портфеля (формула 4.3.7).

#### **Математическое ожидание и вероятность прибыли**

Эти два показателя, рассчитываемые на основе заданного распределения, представляют собой критерии оценки опционных комбинаций. Для простоты мы будем использовать логнормальное распределение. Математическое ожидание прибыли, рассчитанное на основе логнормального распределения, будем обозначать EPLN. Вероятность получения прибыли, рассчитанную на основе логнормального распределения, будем обозначать PPLN. Подробное описание и алгоритмы расчета этих показателей приводятся в нашей книге «Опционы: системный подход к инвестициям».

Оба показателя являются позитивными — большие значения показателей соответствуют более привлекательным комбинациям. Весовая функция  $\varphi(C)$  для  $j$ -й комбинации принимает значение показателя, соответствующее этой комбинации. В таблице 4.3.2 показаны значения критериев и соответствующие им значения весов, рассчитанные с помощью формулы 4.3.5. Примеры, приведенные в таблице, используют те же опционные комбинации, которые рассматривались в разделе 4.3.1.

Для расчета количества экземпляров каждой комбинации в составе портфеля необходимо воспользоваться формулой 4.3.7. Для примера вычислим вес и количество экземпляров комбинации, относящейся к акции CAT, для случая когда капитал распределяется по критерию «математическое ожидание прибыли». Из таблицы 4.3.2 следует, что  $\sum \varphi(C_j) = 0,1196$ . Используя

данные таблицы 4.3.1 для цен акций, можно рассчитать  $\sum U_j \varphi(C_j) = 11,338$ . Принимая  $M = 1\,000\,000$ , получаем:

$$\mu = 1000000 \cdot 0,1196 : 11,338 = 10\,550.$$

Учитывая, что для акции CAT  $\varphi(C_4) = 0,001$ , вычисляем вес  $w_4 = 0,001 : 0,1196 = 0,0085$  и число экземпляров комбинации.  $a_4 = 10\,550 \cdot 0,0085 = 89,78$ . Используя этот же алгоритм расчета, легко показать, что при распределении капитала по критерию «вероятность прибыли» вес данной комбинации составит  $w_4 = 0,472$ , а количество экземпляров  $a_4 = 580,01$ .

#### **Дельта, асимметрия и VaR**

Дельта опциона выражает чувствительность цены опциона к изменениям стоимости базового актива. Для опционов,

относящихся к одному базовому активу, дельта является аддитивной величиной. Поэтому дельта комбинации равна сумме дельт отдельных опционов. Дельта опциона колл принимает значения от 0 до 1, а дельта пута находится в диапазоне от  $-1$  до 0. Соответственно, для одного страддла дельта может принимать значения от  $-1$  до 1. Поскольку в наших примерах рассматриваются портфели, состоящие только из коротких страддлов, нейтральность комбинаций к поведению базового актива является в целом благоприятным фактором. Это означает, что чем ближе дельта комбинации к нулю, тем менее рискованной является позиция. Следовательно, при распределении капитала абсолютная величина дельты является «негативным» показателем. Поэтому мы зададим весовую функцию в следующем виде:  $f(C) = 1 - |\delta(C)|$ , где  $\delta(C)$  — дельта комбинации  $C$ . Коэффициент асимметрии является примером еще одного «негативного» показателя. Он представляет собой нормированную абсолютную разницу премии  $p$  опциона пут и премии  $c$  опциона колл, составляющих комбинацию  $C$ :

$$A(C) = \frac{|c - p|}{c + p}.$$

Идея данного показателя состоит в следующем. Торговые стратегии, основанные на коротких продажах опционных комбинаций, рассчитаны на то, что премия, полученная от продажи опционов, окажется больше, чем обязательства, возникающие в результате движения цены базового актива. Премия состоит из двух компонентов — временной и внутренней стоимости. Уже в момент открытия позиции внутренняя стоимость является будущим обязательством продавца опционов (исходя из нереалистичного, но на практике единственно возможного, допущения, что цена базового актива останется неизменной). Поэтому потенциал извлечения прибыли тем больше, чем меньше размер внутренней стоимости и чем больше величина временной стоимости. Это условие достигается при максимальном приближении страйка страддла к текущей цене базового актива. Чем более страйк удален от текущей цены, тем более асимметричной становится комбинация. Поскольку большие значения коэффициента асимметрии нежелательны для коротких страддлов, весовая функция будет иметь вид:  $f(C) = 1 - A(C)$ . Value-At-Risk (VaR) представляет собой величину убытков, которые не будут превышены с заданной вероятностью (в наших примерах будем использовать вероятность 95%). Для расчета VaR(C)

сложных комбинаций и портфелей применяется метод моделирования Монте-Карло. Предполагая определенную форму распределения (в этом исследовании мы сделали допущение, что цена базового актива распределена логнормально, а дисперсия соответствующего нормального распределения доходностей равна квадрату исторической волатильности базового актива) производится моделирование траекторий будущих движений базового актива по торговым дням до момента экспирации. Подставляя полученные итоговые точки траекторий в платежную функцию комбинации, получаем смоделированное распределение ее значений на момент экспирации. Упорядочиваем его и отбрасываем 5% худших значений. Среди оставшихся вариантов берем вариант с наименьшим значением платежной функции. Вычитая из него исходную премию комбинации, получаем оценку  $VaR(C)$  одной комбинации. Поскольку VaR выражает величину риска (комбинации с меньшим значением VaR предпочтительны), распределение капитала между ними логично производить обратно пропорционально этому показателю. Для распределения капитала между комбинациями обратно пропорционально их значениям VaR будем использовать весовую функцию  $\varphi(C) = 1 : VaR(C)$ .

В таблице 4.3.2 приведены значения весовых функций и соответствующих им весов для всех трех показателей риска. Кроме того, в этой таблице показаны значения коэффициента вариации весов (отношение стандартного отклонения к среднему) для каждой отдельно взятой акции и для каждого показателя. Среди акций наиболее высокий коэффициент вариации наблюдается для ORCL (0,93). Это означает, что среди всех 20 базовых активов объем капитала, инвестируемого в комбинацию ORCL, зависит в наибольшей степени от выбора показателя для распределения капитала. Действительно, из данных таблицы 4.3.2 следует, что если капитал распределяется по математическому ожиданию прибыли, то доля ORCL в общем портфеле составит менее 2%. Если же для распределения капитала используется показатель VaR, то ORCL будет составлять 10% портфеля. Наиболее низкий коэффициент вариации наблюдается для акции MSFT (0,17). Это означает, что среди всех базовых активов объем капитала, инвестируемого в MSFT, практически не зависит от выбора показателя. Какой бы показатель ни использовался для распределения капитала, доля MSFT в общем портфеле будет варьировать в очень узком диапазоне (от 5 до 7%).

Акция	EPLN		PPLN		Показатели Дельта		Асимметрия		VaR		Коэффициент вариации для $w_i$
	$\phi(C_i)$	$w_i$	$\phi(C_i)$	$w_i$	$\phi(C_i)$	$w_i$	$\phi(C_i)$	$w_i$	$\phi(C_i)$	$w_i$	
AA	0,0003	0,0025	57,59	0,0457	0,94	0,0560	0,966	0,063	0,933	0,0980	0,69
AAPL	0,0099	0,0826	68,23	0,0541	0,94	0,0560	0,969	0,063	0,063	0,0067	0,56
BA	0,0066	0,0549	61,73	0,0489	0,87	0,0518	0,713	0,046	0,201	0,0211	0,27
CAT	0,0010	0,0085	59,55	0,0472	0,89	0,0534	0,752	0,049	0,164	0,0172	0,41
CSCO	0,0012	0,0935	64,85	0,0514	0,90	0,0539	0,783	0,051	0,761	0,0800	0,39
DD	0,0019	0,0159	59,55	0,0472	0,81	0,0485	0,791	0,051	0,316	0,0331	0,30
DELL	0,0088	0,0732	61,73	0,0489	0,85	0,0511	0,707	0,046	1,089	0,1144	0,58
EL	0,0018	0,0148	58,53	0,0464	0,63	0,0374	0,526	0,034	0,193	0,0203	0,26
F	0,0013	0,0106	57,13	0,0453	0,82	0,0493	0,807	0,052	0,746	0,0784	0,48
GD	0,0070	0,0585	62,43	0,0495	0,60	0,0359	0,493	0,032	0,218	0,0229	0,28
GE	0,0109	0,0907	65,95	0,0523	0,63	0,0375	0,581	0,038	0,782	0,0821	0,50
GOOG	0,0107	0,0892	68,23	0,0541	0,93	0,0553	0,939	0,061	0,038	0,0039	0,61
IBM	0,0060	0,0503	65,38	0,0518	0,78	0,0466	0,609	0,039	0,170	0,0179	0,28
INTC	0,0056	0,0466	62,67	0,0497	0,84	0,0505	0,842	0,055	0,710	0,0746	0,22
MA	0,0045	0,0378	61,73	0,0489	0,79	0,0475	0,764	0,049	0,057	0,0059	0,37
MSFT	0,0061	0,0506	65,57	0,0520	0,96	0,0571	0,849	0,056	0,686	0,0721	0,17
ORCL	0,0191	0,1597	75,56	0,0599	0,84	0,0500	0,818	0,053	0,952	0,1000	0,93
PG	0,0017	0,0144	59,55	0,0472	0,89	0,0533	0,769	0,050	0,417	0,0438	0,31
T	0,0048	0,0401	64,85	0,0514	0,86	0,0515	0,749	0,049	0,863	0,0906	0,39
V	0,0007	0,0057	60,49	0,0480	0,96	0,0575	0,992	0,064	0,161	0,0170	0,52
$\Sigma$	0,1196	1	1261,3	1	16,73	1	15,44	1	9,52	1	
Коэффициент вариации		0,80		0,07		0,13		0,18		0,74	

**Таблица 4.3.2.** Распределение капитала между 20 комбинациями «короткий страдл» по пяти показателям, выражающим оценку доходности и риска. EPLN — математическое ожидание прибыли, рассчитанное на основе логнормального распределения. PPLN — вероятность получения прибыли, рассчитанная на основе логнормального распределения



Сравнение коэффициентов вариации весов, рассчитанных для отдельных показателей, также дало интересные результаты. Наименее переменными оказались веса, полученные с помощью показателя «вероятность прибыли» (значение коэффициента 0,07, что на порядок ниже всех прочих). Это означает, что при использовании данного показателя, каждая акция получает примерно равную долю капитала. Следовательно, данный показатель мало применим для распределения капитала как минимум в тех условия и для той стратегии, что использовалась в наших примерах (это, однако, не означает, что он не может показать высокую эффективность при других обстоятельствах). На втором месте по вариабельности весов оказался показатель «математическое ожидание прибыли» (0,8), на третьем — дельта (0,13), на четвертом — коэффициент асимметрии (0,18), и самые вариабельные веса, причем с большим отрывом, были получены для показателя VaR (0,74). Примечательно то, что оба показателя, выражающие доходность, распределяют капитал внутри портфеля более равномерно (поскольку имеют более низкие значения коэффициента вариации), чем показатели, выражающие риск.

#### 4.4. Одномерная система распределения капитала

##### 4.4.1. Факторы, влияющие на распределение капитала по различным показателям

В этом разделе мы будем исследовать влияние различных факторов на распределение капитала с помощью различных показателей. Если в предыдущих разделах мы просто продемонстрировали технику формирования портфеля в заданный момент времени из ограниченного и заранее определенного количества комбинаций, то теперь мы рассмотрим функционирование полноценной торговой стратегии на длительном временном интервале.

Процесс формирования портфеля будем моделировать по исторической базе цен акций и их опционов за период 2002–2010 гг. В качестве базовых активов для построения опционных комбинаций будем использовать акции из списка S&P 500. Будем использовать дневные цены закрытия на акции и соответствующие им последние котировки спроса и предложения опционов (в качестве текущей цены опциона принимается середина спреда).

Обозначим через  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$  множество всех рассматриваемых акций. Двигаясь по истории из прошлого в будущее, будем каждый день  $T$  строить для каждой акции  $s_i$  из  $S$  множество опционных комбинаций по следующим правилам. Определим три ближайшие даты экспирации опционов. Для каждой даты экспирации, отстоящей от  $T$  на определенное количество торговых дней в будущее, возьмем множество всех опционов пут и колл на акцию  $s_i$ , имеющих страйки, удаленные от текущей цены акции не более чем на 10%. Материалом для формирования портфеля будет множество коротких комбинаций типа стрэддл и стрэнгл, построенных с соблюдением следующих условий. При построении стрэнглов допускаются только те варианты, для которых страйк пута меньше страйка колла. Стрэддлы и стрэнглы состоят из равного числа опционов пут и колл.

В результате для каждого дня прошлого и каждой из трех ближайших экспираций получается широкий набор опционных комбинаций. Для каждой из них подсчитаем значение математического ожидания прибыли по логнормальному распределению. Выберем те комбинации, у которых значение этого критерия больше 1% от объема инвестиций. Будем строить портфель из элементов этого множества путем распределения \$100 000 (объем средств, выделенных на первом этапе процесса управления капиталом). Капитал будем распределять по одному из семи показателей, описанных в предыдущих разделах:

- 1) эквивалент позиции в акциях;
- 2) обратно пропорционально премии;
- 3) математическое ожидание прибыли на основе логнормального распределения;
- 4) вероятность получения прибыли на основе логнормального распределения;
- 5) дельта;
- 6) асимметрия;
- 7) VaR.

На дату экспирации будем фиксировать прибыль или убыток каждого портфеля.

Сравнительный анализ этих показателей будет фокусироваться на следующем вопросе: насколько портфели, сформированные с помощью различных показателей,

отличаются друг от друга с точки зрения их доходности. Другими словами, в какой степени доходность портфеля зависит от показателя, с помощью которого распределялся капитал между элементами портфеля.

В предыдущем разделе для того, чтобы выразить степень различия портфелей с точки зрения их внутренней структуры, мы использовали коэффициент вариации весов отдельных элементов портфеля. Поскольку вес портфеля всегда положителен, с применением коэффициента вариации не возникает проблем. Однако в этом разделе мы будем сравнивать различные методы распределения капитала на основе реализовавшейся прибыли портфеля, которая может быть отрицательной (убыток). Поскольку в данном случае коэффициент вариации — вычисляемый как отношение стандартного отклонения (всегда положительно) к среднему (положительно или отрицательно) — может оказаться отрицательной величиной, его применение для оценки изменчивости (степени различия портфелей) невозможно. Поэтому нам придется выражать изменчивость с помощью стандартного отклонения, не нормированного на величину среднего.

Чем чреват такой отказ от нормировки? Из практики известно, что во многих случаях стандартное отклонение имеет положительную корреляцию со средним. В таких случаях тренды, наблюдаемые в динамике изменчивости (или другие зависимости), могут по существу быть трендами среднего, а не изменчивости. Нормировка же позволяет устранить этот недостаток. Поэтому, прежде чем приступить к нашим исследованиям (в которых мы вынуждены отказаться от нормировки), необходимо установить, существует ли в нашем случае взаимозависимость между средним и стандартным отклонением. Использование ненормированного стандартного отклонения будет допустимо только в том случае, если такой зависимости не существует.

Для того чтобы установить, существует ли прямая зависимость между средним и стандартным отклонением, мы рассчитали их значения на каждую дату создания портфелей. Среднее и стандартное отклонение вычислялись по величине прибыли семи портфелей, сформированных по семи разным показателям. На основе полученных данных мы провели регрессионный анализ, результаты которого представлены на рис. 4.4.1. Как следует из рисунка, прямая зависимость между средним и стандартным отклонением в данном случае не наблюдается. Более того, существует слабо выраженная обратная зависимость. Несмотря на то что обратная зависимость статистически значима

( $t = 18,4$ ,  $p < 0,001$ ), ее влиянием можно пренебречь в силу того, что коэффициент детерминации имеет очень низкое значение ( $R^2 = 0,05$ ). Таким образом, в нашем исследовании допустимо использовать в качестве меры изменчивости стандартное отклонение, не нормированное на величину среднего.

На протяжении всего периода исследования уровень изменчивости прибыли варьировал в довольно широком диапазоне (рис. 4.4.2). В определенные периоды изменчивость была очень высокой. Это означает, что в такие периоды способ распределения капитала имел большое влияние на прибыль портфеля. В то же время в другие периоды наблюдалась низкая изменчивость, что свидетельствует о том, что выбор определенного показателя для распределения капитала внутри портфеля не оказывал заметного влияния на доходность портфеля.

Таким образом, мы установили, что при определенных обстоятельствах выбор способа распределения капитала может оказывать заметное влияние на результаты работы торговой системы, а при других условиях может быть совершенно не важным. Поэтому

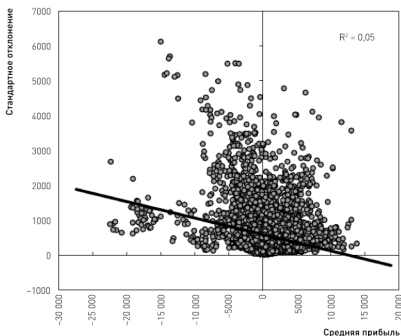


Рис. 4.4.1. Взаимозависимость между средней прибылью портфеля и стандартным отклонением

необходимо установить, от чего зависит степень влияния, оказываемого выбором способа распределения капитала. Иначе говоря, какие факторы делают решение о выборе того или иного показателя, используемого для формирования портфеля, значимым и важным. Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы исследуем влияние трех факторов (исторической волатильности, времени создания портфеля и количества разных базовых активов в составе портфеля) на изменчивость прибыли портфелей, отличающихся друг от друга способом распределения капитала.

#### Историческая волатильность

Для того чтобы установить, влияет ли уровень волатильности рынка на изменчивость прибыли портфелей, сформированных по разным показателям, мы рассчитали величину исторической волатильности индекса S&P 500 для каждой даты создания портфеля (расчет делался на 120-дневном историческом горизонте). Все данные по изменчивости прибыли были сгруппированы и усреднены по уровням исторической волатильности индекса S&P 500. При группировке в качестве дискрета (шага) использовался 1% волатильности. Например, в одну группу вошли и были усреднены все стандартные отклонения, соответствующие тем датам создания портфеля, когда историческая волатильность находилась в диапазоне от 22 до 23%. Соответственно, стандартные отклонения, относящиеся к тем датам, когда историческая волатильность находилась в диапазоне от 23 до 24% вошли в следующую группу. И так далее.

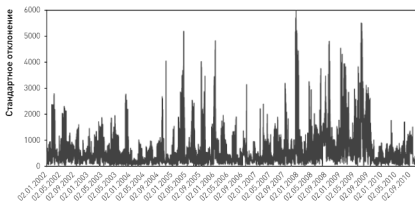
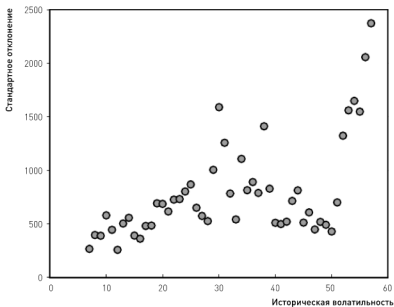


Рис. 4.4.2. Временная динамика изменчивости прибыли портфелей, сформированных по разным показателям, выраженная через величину стандартного отклонения

Результаты анализа представлены на рис. 4.4.3. Существует прямая зависимость между уровнем волатильности и изменчивостью прибыли портфелей, формируемых на основе различных показателей. Если в период, предшествующий созданию портфеля, рынок был относительно спокоен (низкая историческая волатильность в момент создания портфеля), то выбор способа распределения капитала не оказывал существенного влияния на прибыльность стратегии (низкое значение стандартного отклонения). Если же на момент формирования портфеля волатильность была высокой, то изменчивость прибыли, реализованной на дату экспирации, оказывалась достаточно большой. Это означает, что при формировании портфеля в периоды экстремального рынка выбор способа распределения капитала оказывает решающее влияние на результативность торговли. Интересно также отметить, что паттерн распределения данных на плоскости регрессии указывает на наличие условной гетероскедастичности (conditional heteroskedasticity) в этом анализе. Это следует из того, что разброс точек на низких



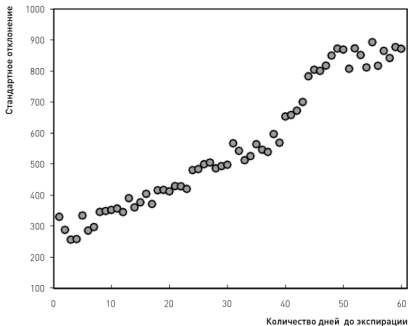
**Рис. 4.4.3.** Зависимость изменчивости прибыли портфелей, формируемых с помощью различных способов распределения капитала, от уровня исторической волатильности рынка в момент создания портфелей

уровнях независимой переменной (историческая волатильность) намного меньше, чем разброс точек на ее высоких уровнях. Из этого следует, что изменчивость прибыли портфелей в периоды волатильного рынка может быть не только большой (как мы отметили выше), но и достаточно умеренной (как вытекает из свойств условной гетероскедастичности).

#### Количество дней до экспирации

На протяжении всего исследуемого периода портфели создавались каждый торговый день на ближайшую дату экспирации и на две последующие даты. Это означает, что все сгенерированные портфели можно разбить на группы, отличающиеся друг от друга по количеству дней от момента формирования портфеля до даты истечения опционов. Если рассмотреть все стандартные отклонения в пределах каждой такой группы, то это позволит проследить зависимость изменчивости прибыли портфелей от числа дней, остающихся до экспирации.

Из рис. 4.4.4 следует, что изменчивость прибыли портфелей, сформированных по разным показателям тем больше, чем больше



**Рис. 4.4.4.** Зависимость изменчивости прибыли портфелей, формируемых с помощью различных способов распределения капитала, от количества дней, остающихся до экспирации опционов

дней остается до экспирации в момент создания портфеля. Это означает, что, если портфель создается незадолго до экспирации, разница в прибыли между портфелями, сформированными на основе разных показателей, не существенна. С другой стороны, если для формирования портфеля используются далекие опционы, то способ распределения капитала влияет существенно на будущую прибыль.

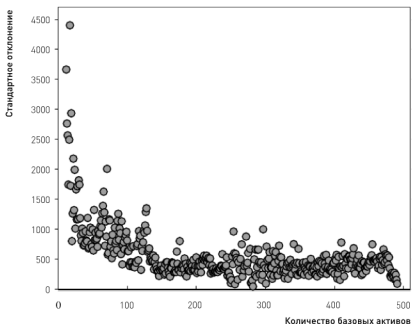
Практический вывод, следующий из этого наблюдения, достаточно важен, если разработчик стратегии ориентируется на торговлю только ближайшими опционными контрактами. Такой тип стратегий достаточно широко распространен среди трейдеров в силу того, что ближайшие контракты наиболее ликвидны и имеют наибольшую скорость временного распада (тету). При разработке автоматизированных систем, ориентированных на торговлю ближайшими опционными контрактами, выбор определенной системы распределения капитала не оказывает большого влияния на показатели доходности. Поэтому можно не тратить время и вычислительные ресурсы на поиск оптимальной системы распределения капитала.

#### **Количество базовых активов**

В соответствии с алгоритмом базовой маркет-нейтральной стратегии (модификация которой используется в настоящем исследовании) все портфели формируются таким образом, что количество попадающих в портфель комбинаций (и, соответственно, количество базовых активов) не предопределено и может сильно меняться от портфеля к портфелю. Поскольку число разных базовых активов, включенных в состав портфеля, отражает в значительной степени уровень его диверсификации, логично предположить, что в малодиверсифицированных портфелях выбор способа распределения капитала оказывает большее влияние на будущую прибыль, чем в портфелях с высоким уровнем диверсификации. По аналогии с предыдущими исследованиями мы сгруппировали все данные по количеству базовых активов, вошедших в состав портфеля. Поскольку исходным материалом для формирования портфелей были акции из индекса S&P 500, то максимальное количество базовых активов, которые потенциально могут войти в портфель, не превышает 500. Хотя теоретически минимальное количество базовых активов равно 1, по факту ни один из созданных портфелей не содержал меньше 12 акций.

Данные, представленные на рис. 4.4.5, подтверждают, что наши предположения оправдались. Существует ярко выраженная





**Рис. 4.4.5.** Зависимость изменчивости прибыли портфелей, формируемых с помощью различных способов распределения капитала, от количества базовых активов, вошедших в состав портфеля

обратная зависимость изменчивости прибыли от числа базовых активов. Более того, эта зависимость не линейна. В общем виде можно утверждать, что изменчивость прибыли тем меньше, чем больше базовых активов входит в состав портфеля. Это означает, что прибыли портфелей почти не отличаются друг от друга (то есть не зависят от способа распределения капитала), когда портфель состоит из комбинаций, относящихся к большому количеству базовых активов. Если же в портфель не диверсифицирован и в него входит мало базовых активов, то способ распределения капитала может оказывать существенное влияние на будущую прибыль.

Нелинейность зависимости, показанной на рис. 4.4.5, позволяет сделать определенные количественные выводы. При росте числа базовых активов от нескольких десятков до сотни, изменчивость прибыли падает очень быстрыми темпами. Однако дальнейший рост числа базовых активов уже не приводит

к существенному снижению изменчивости. Это означает, что если торговая стратегия основывается на создании больших сложных портфелей, содержащих комбинации на 100 и более базовых активов, то затраты времени и вычислительных ресурсов на поиск оптимального способа распределения капитала могут быть неоправданными. С другой стороны, если портфель содержит относительно мало базовых активов, то даже небольшое изменение их числа может кардинальным образом повлиять на прибыль, если была выбрана неоптимальная методика распределения капитала.

### Analysis of Variance

Итак, мы установили, что степень влияния способа распределения капитала на реализовавшуюся прибыль зависит от трех факторов. Выше мы визуальнo исследовали каждый из этих трех факторов по отдельности. Поскольку все факторы оказывают одновременное воздействие на вариабельность прибыли, необходимо провести статистический анализ, учитывающий их одновременное влияние. Это даст возможность убедиться в том, что визуальнo установленные зависимости достоверны, а также позволит количественно выразить меру их влияния. Статистическим тестом, наиболее подходящим для этих целей, является множественная регрессия и Analysis of Variance (ANOVA). Эти тесты основываются на допущении, что зависимость между исследуемой переменной и каждой из независимых переменных линейна. В нашем случае это условие выполняется для двух из независимых переменных (рис. 3.4.4 и 3.4.5), но не выполняется для третьей (рис. 3.4.6). Поэтому прежде, чем приступить к статистическому анализу, необходимо преобразовать значения переменной «количество базовых активов» с помощью логарифмической трансформации (это позволит приблизить зависимость, представленную на рис. 4.4.5 к линейной форме).

Результаты построения множественной регрессии, приведенные в таблице 4.4.1, демонстрируют, что коэффициенты, выражающие влияние исторической волатильности, количества дней до экспирации и количества базовых активов, оказались статистически значимыми на очень высоком уровне достоверности. Вероятность того, что отличие расчетных значений этих коэффициентов от нуля было получено случайно, крайне низка (менее 0,1%). Традиционные методы интерпретации множественной регрессии позволяют составить следующую формулу для прогноза изменчивости прибыли:

$$\begin{aligned} \text{Стандартное отклонение} = & 893,11 + 14,67 \cdot \text{Волатильность} - \\ & - 376,4 \cdot \text{Log (Кол-во базовых активов)} + \\ & + 8,29 \cdot \text{Кол-во дней до экспирации} \end{aligned}$$

Следует относиться с большой осторожностью к интерпретации и использованию этой формулы. В частности, из таблицы 4.4.1 следует, что параметр intercept (значение, принимаемое зависимой переменной при условии, что значения всех независимых переменных равны нулю) является статистически значимым на высоком уровне достоверности (то есть его отличие от нуля неслучайно). Это означает, что стандартное отклонение прибыли портфелей при условии, что значения всех трех независимых переменных равны нулю, составляет 893,11 (величина intercept). Однако в исследуемом случае такая трактовка абсурдна, поскольку ни одна из трех переменных не может принимать нулевое значение. Следовательно, в данном случае экстраполяция абсолютно недопустима. Поэтому приведенный в таблице 4.4.1 анализ может использоваться

	Кoeffициент	Стандартная ошибка	t	Достоверность
Intercept	893,11	75,26	11,87	< 0,001
Волатильность	14,67	0,76	19,22	< 0,001
Log (кол-во базовых активов)	-376,40	27,12	-13,88	< 0,001
Кол-во дней до экспирации	8,29	0,47	17,82	< 0,001

ANOVA	df	SS	MSS	F	Достоверность
Регрессия	3	534502733	178167578	534,49	< 0,001
Остаток (Residual)	6444	2148069533	333344		
Сумма	6447	2682572265			
$R^2$	0,20				
Остаточная ст. ошибка	577				
Размер выборки	6448				

**Таблица 4.4.1.** Множественная регрессия и Analysis of Variance (ANOVA) зависимости изменчивости прибыли портфеля (выраженной посредством стандартного отклонения) от трех независимых переменных: исторической волатильности, количества дней до экспирации и количества базовых активов в составе портфеля

не для прогноза степени вариабельности прибыли портфеля в зависимости от выбранного способа распределения капитала, а только для выявления статистической достоверности влияния каждого из анализируемых факторов.

Результаты ANOVA, представленные в таблице 4.4.1, подтверждают, что общая модель множественной регрессии также статистически достоверна на высоком уровне достоверности. Вместе с тем необходимо отметить, что значение коэффициента детерминации достаточно невелико ( $R^2 = 0,2$ ). Это означает, что все три исследованных фактора объясняют лишь 20% дисперсии зависимой переменной. Логично предположить, что оставшиеся 80% дисперсии объясняются, помимо неизбежной случайной ошибки, многими факторами, составляющими суть торговой стратегии. Поэтому относительно небольшое значение коэффициента детерминации вполне объяснимо и не является удивительным.

#### 4.4.2. Мера концентрации капитала в портфеле

В этом разделе мы сравним между собой различные показатели с точки зрения равномерности распределения капитала внутри портфеля. Предположим, что в соответствии с торговой стратегией имеется сумма  $M$ , выделенная на первом этапе реализации системы управления капиталом. Допустим, что существует  $n$  комбинаций — кандидатов на включение в портфель. В каждую из этих комбинаций может быть инвестирована доля  $w$  от капитала  $M$ . Теоретически могут существовать два предельных случая при распределении капитала. Вся сумма  $M$  может быть инвестирована в единственную комбинацию; при этом все прочие комбинации получают нулевую часть капитала (то есть вовсе не включаются в портфель). Другой предельный случай — это равномерное распределение средств, когда каждая комбинация получает одинаковую долю капитала равную  $M/n$ .

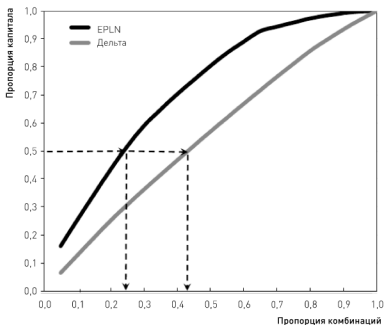
На практике оба эти сценария встречаются крайне редко. Обычно капитал распределяется неким промежуточным образом, когда потенциально более привлекательные комбинации получают больше капитала, чем менее привлекательные. Привлекательность определяется с помощью специальных показателей, семь из которых были подробно рассмотрены в разделах 4.3.1 и 4.3.2. Портфели, в которых большая часть капитала распределена между несколькими комбинациями, мы будем называть «концентрированными». А портфели, в которых доля капитала, инвестированного в разные комбинации приблизительно одинакова, будем называть «равномерными».

Степень концентрированности капитала является важным показателем для сравнения между собой различных способов распределения капитала. Дело в том, что уровень диверсификации портфеля чрезвычайно важен для управления и контроля рисков. Ранее мы оценивали диверсификацию портфеля по количеству базовых активов, включенных в его состав (рис. 4.4.5). Однако, даже если портфель состоит из комбинаций, относящихся к большому количеству базовых активов, он может тем не менее быть слабо диверсифицированным, если большая часть капитала сконцентрирована в комбинациях, относящихся к одному (или нескольким) активам. Если же капитал распределен более-менее равномерно между комбинациями, относящимися к разным базовым активам, то такой портфель является более диверсифицированным и, соответственно, менее рискованным.

Ранее мы выражали степень концентрированности капитала путем расчета коэффициента вариации весов различных комбинаций, входящих в состав портфеля (раздел 4.3.2, таблица 4.3.2). Поскольку сейчас мы обрабатываем большой массив данных (6448 портфелей для каждого из семи показателей распределения капитала) целесообразно будет ввести другой, более удобный и статистически более обоснованный показатель. Назовем его «индекс концентрированности портфеля».

Продемонстрируем расчет индекса концентрированности на примере данных таблицы 4.3.2 и двух показателей, математического ожидания прибыли и дельты. На основе каждого из этих двух показателей был сформирован портфель, состоящий из 20 комбинаций. Данные портфели отличаются друг от друга только набором весов  $w$ , в соответствии с которыми распределяется капитал между комбинациями. Для каждого портфеля отсортируем все комбинации по весу инвестированного в них капитала. Рассчитаем кумулятивную пропорцию капитала для двух комбинаций с наибольшим весом, затем для трех комбинаций и так далее до 20-й комбинации. Построим функцию зависимости кумулятивной пропорции от пропорции комбинаций в портфеле (отношение числа комбинаций, для которых было рассчитано данное значение кумулятивной функции к общему количеству комбинаций в портфеле). Например, для портфеля, сформированного по показателю «математическое ожидание прибыли», три комбинации с наибольшими весами имеют суммарный вес 0,34 (значение функции кумулятивной пропорции). Соответствующее этому весу значение пропорции комбинаций в портфеле равно  $3/20 = 0,15$ . Это означает, что 34% капитала сосредоточено в 15% комбинаций.

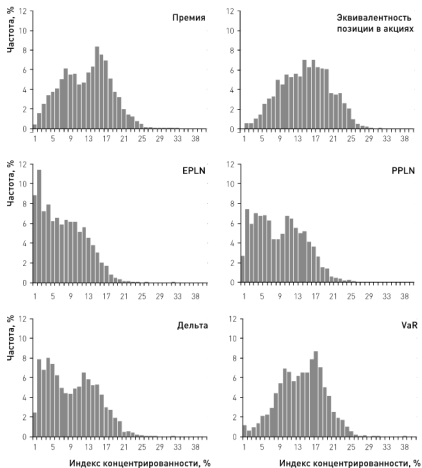
На рис. 4.4.6 показаны две функции кумулятивной пропорции, соответствующие показателям «математическое ожидание прибыли» и «дельта» (данные взяты из таблицы 4.3.2). Используя эти функции, можно рассчитать, в каком проценте комбинаций (от общего числа комбинаций в портфеле) сосредоточено 50% капитала. Это и будет значением индекса концентрированности портфеля. Для показателя «математическое ожидание прибыли» индекс равен 0,25, а для дельты он равен приблизительно 0,42. Это означает, что при распределении капитала по матожиданию прибыли 50% капитала оказалось вложенным в 25% комбинаций, а при формировании портфеля по показателю дельты половина капитала была вложена в 42% комбинаций. Следовательно, в данном примере использование показателя «математическое ожидание прибыли» приводит к более концентрированному распределению капитала и, соответственно, созданию менее диверсифицированного портфеля.



**Рис. 4.4.6.** Визуализация вычисления индекса концентрированности портфеля на примере двух показателей: EPLN [математическое ожидание прибыли, рассчитанное на основе логнормального распределения] и «дельта». Данные взяты из таблицы 4.3.2. Объяснения приводятся в тексте

Используя эту методику, мы рассчитали значения индекса концентрированности для каждого из 6448 портфелей, сформированных на исследуемом историческом периоде с помощью одного из семи показателей. Для того чтобы сравнить степень концентрированности капитала при формировании портфеля с помощью разных показателей, мы построили частотное распределение индекса концентрированности для каждого отдельно взятого показателя (рис. 4.4.7).

Когда капитал распределялся по показателям, не связанным с оценкой доходности и риска, распределение значений индекса



**Рис. 4.4.7.** Частотное распределение индекса концентрированности портфеля для шести показателей, используемых для распределения капитала при формировании портфеля

концентрированности портфеля имеет вид, близкий по форме к нормальному (два верхних графика рис. 4.4.7). При распределении капитала обратно пропорционально премии приблизительно в 8% случаев половина капитала оказалась вложенной в 16–17% комбинаций. Когда портфель формировался по принципу эквивалентности позиции в акциях, в 7% случаев половина капитала была сконцентрирована в 15–20% комбинаций. Экстремальные случаи, когда половина капитала была вложена в 1–3% комбинаций были крайне редки (не более 2% от общего количества сформированных портфелей).

Для тех портфелей, которые формировались с помощью показателя «математическое ожидание прибыли», распределение индекса концентрированности явно ненормально (левый средний график рис. 4.4.7). Чаще всего (9–11% случаев) капитал был сконцентрирован в 1–2% комбинаций. Портфели, в которых половина капитала была распределена в более 15% комбинаций, были крайне редки (менее 4% случаев).

При формировании портфеля по показателю «вероятность получения прибыли» распределение индекса концентрированности напоминает по форме равномерное распределение (правый средний график рис. 4.4.7). С частотой приблизительно равной 6%, половина капитала инвестировалась в 3% комбинаций, 4% комбинаций и так далее до порядка 15% комбинаций. По определению равномерное распределение характеризуется одинаковой частотой исходов для всех значений исследуемой переменной. Однако в данном случае распределение не является полностью равномерным, поскольку значения индекса концентрированности, лежащие в диапазоне от 15% комбинаций и выше, встречаются с убывающей частотой.

В тех случаях, когда капитал внутри портфеля распределялся по дельте (нижний левый график рис. 4.4.7) и по коэффициенту асимметрии (не показан на рисунке) распределение индекса концентрированности напоминает по форме распределение, полученное для показателя «вероятность получения прибыли». Это указывает на относительную равномерность распределения капитала между комбинациями. Зато при формировании портфеля по другому показателю, выражающему оценку риска, по VaR, распределение имеет вид нормального (нижний правый график рис. 4.4.7), что свидетельствует о меньшей степени концентрированности капитала в пределах портфеля.

Подводя итоги, можно разделить семь показателей, использованных для распределения капитала внутри портфеля, на три



условные группы (по степени концентрированности портфелей):

1. Показатели, использование которых приводит к созданию высококонцентрированных портфелей. В таких портфелях относительно большая доля капитала инвестируется лишь в несколько комбинаций. В нашем исследовании таким показателем является «математическое ожидание прибыли».
2. Показатели, которые приводят к формированию портфелей со средней степенью концентрации капитала. В этих портфелях большая часть капитала инвестируется в порядка 15% от общего числа комбинаций, входящих в состав портфеля. К таким показателям можно отнести премию, эквивалент позиции в акциях и VaR.
3. Показатели, использование которых приводит к созданию портфелей с приблизительно равномерным распределением капитала между комбинациями. В нашем исследовании к таким показателям относятся «вероятность получения прибыли», «дельта» и «коэффициент асимметрии».

#### 4.4.3. Трансформации весовой функции

Во всех рассмотренных выше примерах весовая функция  $\varphi(C)$  вычислялась для каждой комбинации  $C$  по значениям того или иного показателя, рассчитанного для этой комбинации. Говоря формальным языком,  $\varphi(C)$  это сложная функция вида  $\varphi(C) = f(x(C))$ , где  $x(C)$  — определенный показатель, выбранный для распределения капитала. До сих пор мы полагали, что весовая функция принимает значения показателя, то есть рассматривали частный случай  $\varphi(C) = x(C)$ . В этом случае вес каждой комбинации в составе портфеля прямо пропорционален значению показателя, соответствующего данной комбинации (графически зависимость веса от показателя является прямой линией). Однако мы не обязаны ограничиваться частным случаем линейной зависимости и можем допустить в принципе любой вид весовой функции, соответствующей торговой идее и параметрам стратегии.

Например, разработчик торговой системы может протестировать вариант, при котором комбинации, имеющие высокие значения показателя, получают значительно большую долю капитала, чем им следовало получить при пропорциональном распределении капитала. Соответственно, комбинации с более низкими значениями показателя получают непропорционально меньшую долю капитала. Этого можно добиться путем трансформации линейной весовой функции в выпуклую функцию.

Противоположный сценарий может состоять в том, что в комбинации, имеющие высокие значения показателя, инвестируется меньшая доля капитала, чем при пропорциональном распределении капитала. В таком случае непропорционально большая доля капитала инвестируется в комбинации с низкими значениями показателя. Для достижения такого результата следует трансформировать линейную весовую функцию в вогнутую функцию.

Можно разработать множество математических вариантов решения данной задачи. Продемонстрируем здесь наиболее простой и технически легко реализуемый вариант трансформации линейных функций в вогнутые и выпуклые. Для этого представим весовую функцию в следующем виде:

$$f(x) = y_{\min} + (y_{\max} - y_{\min}) \left( \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \right)^n, \quad (4.4.1)$$

$$y_{\min} = f(x_{\min}), \quad y_{\max} = f(x_{\max}),$$

где  $x_i$  — значение показателя для  $i$ -й комбинации,

$x_{\min}$  — значение показателя для комбинации с наименьшим значением показателя,

$x_{\max}$  — значение показателя для комбинации с наибольшим значением показателя.

В дальнейших рассуждениях мы будем полагать  $y_{\min} = x_{\min}$ ,  $y_{\max} = x_{\max}$ .

В этом случае, если принять степенной показатель в формуле 4.4.1 равным 1, то весовая функция приобретает вид  $f(x) = x$ , то есть превращается в простую линейную функцию. Для всех  $n > 1$  данная функция является выпуклой (обозначим ее  $f^*(x)$ ), а для всех  $0 < n < 1$  эта функция будет вогнутой (обозначим ее  $f(x)$ ).

Рассмотрим примеры вычисления значений выпуклой и вогнутой весовых функций (для  $n = 2$  и  $n = 0,5$ , соответственно) для показателя «математическое ожидание прибыли». Воспользуемся данными, приведенными в таблице 4.3.2, для портфеля, состоящего из 20 акций. Минимальное значение показателя равно 0,0003, а максимальное значение составляет 0,0191. Вычислим значение выпуклой весовой функций для акции AAPL:

$$f^*(x) = 0,0003 + (0,0191 - 0,0003) \left( \frac{0,0099 - 0,0003}{0,0191 - 0,0003} \right)^2 = 0,0052.$$

Используя степенной показатель  $n = 0,5$ , получим для этой же акции значение вогнутой функции:  $f(x) = 0,01373$ . Воспользовавшись формулой 4.3.5, можем рассчитать веса этой

комбинации в составе портфеля. Если капитал будет распределяться по выпуклой функции, то вес комбинации AAPL составит 0,082, а если по вогнутой, то 0,072.

Вычислив аналогичным способом значения обеих функций для всех 20 акций, получим два варианта распределения капитала — по выпуклой и вогнутой весовым функциям. На левом графике рис. 4.4.8 показаны значения двух трансформированных весовых функций и оригинальной линейной функции, послужившей исходным материалом для их расчета. Особенностью выпуклой функции является то, что все ее значения (за исключением экстремумов) меньше, чем значения исходной линейной функции. Для вогнутой функции справедливым будет обратное утверждение — все ее значения (за исключением экстремумов) больше, чем значения исходной линейной функции.

Для наших целей крайне важными будут характеристики чувствительности трансформированных функций к изменениям исходной весовой функции. Ниже мы опишем свойства выпуклой и вогнутой функций по отдельности для низких и высоких значений ее аргумента (исходной, нетрансформированной функции). Эти описания базируются на визуальном анализе левого графика рис. 4.4.8, а также

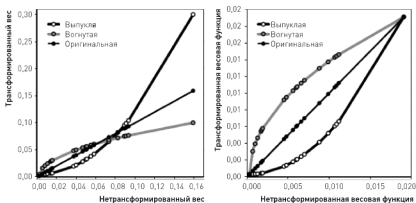


Рис. 4.4.8. Зависимость трансформированных значений весовых функций от их оригинальных (нетрансформированных) значений (левый график). Зависимость весов, соответствующих трансформированным функциям, от значений оригинальных весов (правый график)

на производных функции 4.4.1. Полагая  $y_{\min} = x_{\min}$ ,  $y_{\max} = x_{\max}$ , производные выпуклой ( $n = 2$ ) и вогнутой ( $n = 0,5$ ) функций имеют вид:

$$\frac{\partial(f'(x))}{\partial x} = \frac{2(x - x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}}, \quad \frac{\partial(f'(x))}{\partial x} = \frac{0,5\sqrt{x_{\max} - x_{\min}}}{\sqrt{x - x_{\min}}}$$

### Выпуклая функция

На относительно высоких интервалах значений исходной функции приращение значений выпуклой функции больше, чем на низких интервалах значений исходной функции. Другими словами, разница в значениях трансформированной функции между комбинацией с наибольшим значением показателя и комбинацией со вторым по величине значением показателя больше, чем разница в значениях трансформированной функции между комбинацией со средним или низким значением показателя и комбинацией с предыдущим значением показателя. Кроме того, на высоких интервалах значений исходной функции приращение значений выпуклой функции больше, чем приращение значений самой исходной функции. Формально это можно выразить следующим образом. Обозначим через  $x(C_i)$  значение показателя  $i$ -й комбинации. Пусть портфель состоит из  $m$  комбинаций  $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ . Причем  $x(C_m) > x(C_{m-1})$ ,  $x(C_{m-1}) > x(C_{m-2})$  и так далее. Тогда для выпуклой функции соблюдаются неравенства:

$$f'(x(C_m)) - f'(x(C_{m-1})) > f'(x(C_2)) - f'(x(C_1)),$$

$$f'(x(C_m)) - f'(x(C_{m-1})) > x(C_m) - x(C_{m-1}).$$

На низких интервалах значений исходной функции приращение значений выпуклой функции меньше, чем на высоких интервалах значений. Разница в значениях трансформированной функции между комбинацией со вторым по величине значением показателя и комбинацией с первым (самым низким) значением показателя меньше, чем разница в значениях трансформированной функции между комбинацией со средним или высоким значением показателя и комбинацией с предыдущим значением показателя. Кроме того, на низких интервалах значений исходной функции приращение значений выпуклой функции меньше, чем приращение значений самой исходной функции. Формально это можно выразить следующими неравенствами:

$$f^+(x(C_2)) - f^+(x(C_1)) < f^+(x(C_m)) - f^+(x(C_{m-1})),$$

$$f^+(x(C_2)) - f^+(x(C_1)) < x(C_2) - x(C_1).$$

### Вогнутая функция

На высоких интервалах значений исходной функции приращение значений вогнутой функции меньше, чем на низких интервалах значений исходной функции. Другими словами, разница в значениях трансформированной функции между комбинацией с наибольшим значением показателя и комбинацией со вторым по величине значением показателя меньше, чем разница в значениях трансформированной функции между комбинацией со средним или низким значением показателя и комбинацией с предыдущим значением показателя. Кроме того, на высоких интервалах значений исходной функции приращение значений вогнутой функции меньше, чем приращение значений самой исходной функции. Формально это можно выразить следующим образом:

$$f^-(x(C_m)) - f^-(x(C_{m-1})) < f^-(x(C_2)) - f^-(x(C_1)),$$

$$f^-(x(C_m)) - f^-(x(C_{m-1})) < x(C_m) - x(C_{m-1}).$$

На низких интервалах значений исходной функции приращение значений вогнутой функции больше, чем на высоких интервалах значений. Разница в значениях трансформированной функции между комбинацией со вторым по величине значением показателя и комбинацией с первым (самым низким) значением показателя больше, чем разница в значениях трансформированной функции между комбинацией со средним или высоким значением показателя и комбинацией с предыдущим значением показателя. Кроме того, на низких интервалах значений исходной функции приращение значений вогнутой функции больше, чем приращение значений самой исходной функции. Формально это можно выразить следующими неравенствами:

$$f^-(x(C_2)) - f^-(x(C_1)) > f^-(x(C_m)) - f^-(x(C_{m-1})),$$

$$f^-(x(C_2)) - f^-(x(C_1)) > x(C_2) - x(C_1).$$

### Расчет весов по трансформированным весовым функциям

В тот момент, когда все значения трансформированной функции определены, расчет весов производится по формуле 4.3.5. Правый график рис. 4.4.8 показывает веса, рассчитанные

по весовым функциям, представленным на левом графике этого рисунка (данные взяты из таблицы 4.3.2; исходная весовая функция — показатель «математическое ожидание прибыли»; выпуклая и вогнутая функции рассчитаны по формуле 4.4.1 при  $n = 2$  и  $\lambda = 0,5$  соответственно). Прямая линия на графике демонстрирует веса, соответствующие нетрансформированной весовой функции.

Из графика следует, что при распределении капитала по выпуклой функции четыре комбинации с наибольшими значениями показателя имеют больший вес, чем при формировании портфеля по исходной весовой функции (эти комбинации располагаются в интервале высоких значений исходной функции, где кривая выпуклой функции проходит над прямой линией, соответствующей исходной функции). Для одной из комбинаций веса, полученные по выпуклой и исходной функциям, совпадают (эта комбинация располагается в точке пересечения исходной и выпуклой функции). Остальные комбинации при распределении капитала по выпуклой функции имеют меньший вес, чем при формировании портфеля по исходной функции (эти комбинации располагаются в интервале низких значений исходной функции, где кривая выпуклой функции проходит ниже линии исходной функции).

В том случае, когда капитал распределялся по вогнутой функции, пять комбинаций с наибольшими значениями показателя имеют меньший вес, чем при формировании портфеля по исходной функции (эти комбинации располагаются в интервале высоких значений исходной функции, где кривая вогнутой функции проходит под прямой линией, соответствующей исходной функции). Остальные 15 комбинаций имеют меньший вес, чем при формировании портфеля по исходной функции (эти комбинации располагаются в интервале низких значений исходной функции, где кривая вогнутой функции проходит выше линии исходной функции).

Из приведенного описания следует важный вывод: портфели, создаваемые с помощью выпуклой функции, представляют более агрессивный подход к распределению капитала, поскольку комбинации с высокими значениями показателя получают непропорционально больше капитала (а комбинации с низкими значениями — непропорционально меньше), чем при формировании портфеля по исходной весовой функции. Обратное утверждение справедливо для вогнутой функции, отражающей более консервативный подход к распределению капитала.

Кроме того, при использовании выпуклой функции распределение капитала внутри портфеля является более концентрированным (несколько комбинаций получают большую часть капитала). Формирование портфеля по вогнутой функции приводит к более равномерному распределению капитала между элементами портфеля. Следовательно, портфели, создаваемые с помощью выпуклой функции, являются менее диверсифицированными, чем портфели, соответствующие вогнутой функции. Это также является указанием на то, что первый подход более агрессивен, чем второй.

#### **Сравнение выпуклой и вогнутой весовых функций по прибыли**

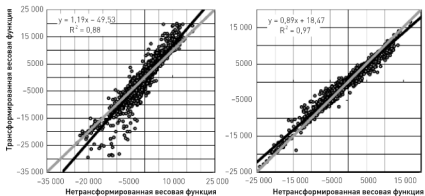
Смоделируем на периоде 2002–2010 гг. две торговые стратегии, аналогичные по всем параметрам той, что была описана в разделе 4.4.1, за исключением принципа распределения капитала. В одном случае будем распределять капитал по выпуклой функции (формула 4.4.1,  $n = 2$ ), в другом случае — по вогнутой функции (формула 4.4.1,  $n = 0,5$ ). В качестве показателя для формирования портфеля будем использовать математическое ожидание прибыли.

Всего на протяжении периода моделирования было построено 6448 портфелей для выпуклой функции и столько же — для вогнутой. Начнем со сравнения прибылей и убытков, получаемых при использовании этих двух функций для распределения капитала. Для этого рассмотрим зависимость между прибылью портфеля, получаемой при распределении капитала с помощью трансформированной весовой функции, и прибылью, получаемой при формировании портфеля на основании исходной весовой функции.

Распределение точек в двумерной системе координат (рис. 4.4.9) позволяет сделать выводы об эффекте применения трансформированных весовых функций. Для наглядности мы построили на плоскости регрессии линию «безразличия» с коэффициентом наклона равным 1. Прибыль портфелей, расположенных на этой линии одинакова при распределении капитала по исходной и по трансформированной весовой функции. Если использовать вертикальную ось для значений прибыли, получаемой при распределении капитала по трансформированной весовой функции, а горизонтальную ось — для прибыли по исходной функции, то точки, расположенные выше линии безразличия, обозначают портфели, для которых применение трансформированной функции привело к увеличению прибыли или уменьшению убытка (по сравнению с тем, что было бы, если бы капитал распределялся по исходной функции).

Когда капитал распределялся по выпуклой весовой функции (левый график рис. 4.4.9) и портфель оказался прибыльным (как для трансформированной, так и для исходной весовой функции), то большинство точек располагались выше линии безразличия. Это означает, что использование выпуклой функции при формировании портфеля позволило увеличить прибыль. Однако в тех случаях, когда портфель был убыточным (для обоих видов весовой функции), то большинство точек располагались ниже линии безразличия. Это означает, что при неблагоприятном исходе убытки портфелей, сформированных по выпуклой функции, больше убытков портфелей, построенных с помощью исходной функции.

Регрессионный анализ позволяет количественно выразить описанные наблюдения и проверить их статистическую достоверность. Коэффициент наклона линии регрессии равен 1,19, а коэффициент линии безразличия по определению равен 1. В таблице 4.4.2 приведены данные, доказывающие, что полученная разница угловых коэффициентов статистически достоверна на очень высоком уровне. Следовательно, вывод о том, что использование выпуклой функции для распределения капитала приводит к созданию более агрессивного портфеля (с большим потенциалом



**Рис. 4.4.9.** Зависимость прибыли портфелей, формируемых с помощью трансформированной весовой функции (левый график — выпуклая функция, правый график — вогнутая), и прибыли портфелей, формируемых на основании нетрансформированной весовой функции. Портфели, расположенные на серой линии (коэффициент наклона = 1), имеют прибыль (убыток), независимую от способа распределения капитала. Черным цветом показана линия регрессии



прибыльности и с большим риском убытков), не случаен. При этом следует оговориться, что такого рода анализ допустим только в тех случаях, когда intercept линии регрессии (значение принимаемое зависимой переменной при условии, что значение независимой переменной равно нулю) близок к нулю. В нашем примере, хотя intercept ниже нуля на приблизительно \$50 и его отличие от нуля статистически значимо (таблица 4.4.2), он тем не менее ничтожно мал по сравнению с общим диапазоном значений, принимаемых исследуемыми переменными. Поэтому влиянием intercept можно пренебречь и считать, что прибыль/убыток портфелей, формируемых с помощью выпуклой функции, приблизительно на 20% больше аналогичных портфелей, построенных на базе исходной весовой функции (поскольку угловой коэффициент равен 1,19).

*Когда капитал распределялся по вогнутой весовой функции* (правый график рис. 4.4.9), картина оказалась диаметрально противоположной. Те портфели, которые оказались прибыльным (и для трансформированной, и для исходной весовой функции), располагались в большинстве случаев ниже линии безразличия. Однако, в тех случаях, когда для обоих видов весовой функции портфель был убыточным, большинство точек

Трансформированная весовая функция	Параметр	Значение параметра	Стандартная ошибка	t для отклонения наклона от 1	t для отклонения intercept от 0	Достоверность
Выпуклая	Intercept	-49,52836	20,91193		-2,37	< 0,05
	Наклон	1,18746	0,00554	33,85		< 0,001
Вогнутая	Intercept	18,47131	7,82187		2,36	< 0,05
	Наклон	0,89357	0,00207	-51,39		< 0,001

Таблица 4.4.2. Регрессионный анализ зависимости между прибылью портфеля, получаемой при распределении капитала с помощью трансформированной весовой функции (по отдельности для выпуклой и вогнутой функции), и прибылью, получаемой при формировании портфеля, на основании исходной весовой функции

располагались выше линии безразличия. Это означает, что распределение капитала с помощью вогнутой функции приводит к снижению прибыли. В то же время использование вогнутой функции позволяет снизить размеры убытков при неблагоприятном исходе торговли.

Хотя значение коэффициента наклона линии регрессии (0,89) близко к 1, оно статистически достоверно отличается от 1 на очень высоком уровне значимости (таблица 4.4.2). Следовательно, использование вогнутой функции для распределения капитала приводит к созданию более консервативного портфеля (с меньшим потенциалом прибыльности и меньшим риском убытков).

#### **Распределение выпуклой и вогнутой весовой функции по концентрации капитала**

В предыдущем разделе мы сравнили прибыльность двух торговых стратегий, отличающихся формой весовой функции, используемой для распределения капитала. Теперь мы сравним те же стратегии по степени концентрированности капитала. Ранее мы описали методику расчета индекса концентрированности портфеля и применили ее для сравнения различных показателей, используемых при распределении капитала (рис. 4.4.7). Эту же методику мы применим для целей настоящего анализа: рассчитаем значения индекса концентрированности для каждого из 6448 портфелей, сформированных на исследуемом историческом периоде для каждой из двух весовых функций.

Для того чтобы сравнить степень концентрированности капитала при формировании портфеля с помощью двух трансформаций весовой функции, мы построили частотное распределение индекса концентрированности. Ранее мы продемонстрировали, что в тех случаях, когда портфели формировались с помощью нетрансформированной весовой функции (основанной на том же показателе — «математическое ожидание прибыли») распределение индекса концентрированности было не нормальным и сильно смещенным в область низких значений индекса (левый средний график рис. 4.4.7). При использовании выпуклого варианта трансформированной весовой функции ненормальность распределения усилилась еще больше (рис. 4.4.10). С наибольшей частотой (>16% случаев) половина капитала была сконцентрирована всего в 1% комбинаций. Портфели, в которых половина капитала была распределена в более 15% комбинаций, оказались еще более редкими (менее 2% случаев).

Использование вогнутой весовой функции для распределения капитала внутри портфеля изменило принципиальным образом

форму распределения индекса концентрированности капитала (сравни левый средний график рис. 4.4.7 и рис. 4.4.10). В этом случае трансформация весовой функции привела к почти равномерному распределению индекса концентрированности. С частотой приблизительно равной 4–6% случаев половина капитала инвестировалась в 1% комбинаций, 2% комбинаций и так далее до порядка 18% комбинаций.

Таким образом, мы показали, что распределение капитала с помощью выпуклой весовой функции приводит к созданию высококонцентрированных портфелей, в которых относительно большая доля капитала инвестируется в малое количество комбинаций. С другой стороны, использование вогнутой весовой функции способствует построению портфелей с гораздо более равномерным распределением капитала. Поскольку степень концентрированности капитала отражает уровень диверсификации портфеля, можно утверждать, что распределение капитала с помощью выпуклой функции обеспечивает создание менее диверсифицированных и более агрессивных портфелей, а применение вогнутой функции приводит к формированию более диверсифицированных и более консервативных портфелей.

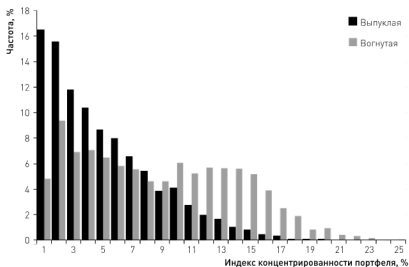


Рис. 4.4.10. Частотное распределение индекса концентрированности портфеля для двух вариантов трансформированной весовой функции, используемой при распределении капитала внутри портфеля

## 4.5. Многомерная система распределения капитала

### 4.5.1. Методика применения многомерной системы

Многомерная система распределения капитала внутри портфеля основывается на одновременном использовании нескольких показателей, выражающих оценки доходности и риска. Введение дополнительных показателей может способствовать созданию более сбалансированной системы распределения капитала с точки зрения оптимизации соотношения ожидаемой доходности и прогнозируемых рисков. При использовании многомерной системы появляется дополнительная проблема, не возникавшая при распределении капитала на основе единственного показателя, — необходимость выбора одного портфеля из множества вариантов, каждый из которых может считаться оптимальным. В разделе 4.2.1 мы перечислили основные подходы к решению этой задачи. Здесь мы продемонстрируем применение методики мультипликативной свертки нескольких показателей.

Рассмотрим пример распределения капитала по двум показателям — математическому ожиданию прибыли и VaR. Продемонстрируем расчет мультипликативной свертки этих показателей и вычисление значений весовой функции на основе данных, приведенных в таблице 4.3.2. Поскольку эти два показателя имеют различный масштаб величин, возникает необходимость в нормализации их значений. Существует несколько способов нормализации. Мы воспользуемся формулой, позволяющей привести значения любого показателя к интервалу от нуля до единицы:

$$\varphi(C_i)_{\text{normalized}} = \frac{\varphi(C_i) - \varphi(C_{\min})}{\varphi(C_{\max}) - \varphi(C_{\min})}. \quad (4.5.1)$$

В таблице 4.5.1 приведены оригинальные значения показателя EPLN (математическое ожидание прибыли, рассчитанное на основе логнормального распределения) и VaR (взятые из таблицы 4.3.2) и их нормализованные значения, рассчитанные с помощью формулы 4.5.1. Приведем пример расчета нормализованного значения показателя EPLN для акции AAPL. Максимальное и минимальное значения EPLN составляют 0,0191 и 0,0003 соответственно. Поскольку оригинальное значение

EPLN для AAPL составляет 0,0099, то, используя формулу 4.5.1, можно рассчитать нормализованное значение, как:

$$(0,0099 - 0,0003) / (0,0191 - 0,0003) = 0,511.$$

Поскольку показатель EPLN выражает ожидаемую прибыль, а VaR — убыток, то мультипликативная свертка рассчитывается как отношение EPLN к VaR. В этой связи возникает проблема с нулевыми значениями нормализованных показателей. Разрешить

Акция	Показатель				Свертка	wi
	EPLN		VaR			
	$\varphi(C)$	$\varphi(C)_{normalized}$	$\varphi(C)$	$\varphi(C)_{normalized}$		
AA	0,0003	0,009	0,933	0,852	0,011	0,0001
AAPL	0,0099	0,511	0,063	0,024	21,467	0,2320
BA	0,0066	0,335	0,201	0,155	2,161	0,0234
CAT	0,0010	0,037	0,164	0,120	0,311	0,0034
CSCO	0,0112	0,580	0,761	0,688	0,843	0,0091
DD	0,0019	0,085	0,316	0,265	0,322	0,0035
DELL	0,0088	0,452	1,089	1,000	0,452	0,0049
EL	0,0018	0,080	0,193	0,147	0,541	0,0058
F	0,0013	0,053	0,746	0,674	0,079	0,0009
GD	0,0070	0,356	0,218	0,171	2,081	0,0225
GE	0,0109	0,564	0,782	0,708	0,796	0,0086
GOOG	0,0107	0,553	0,038	0,038	45,900	0,4961
IBM	0,0060	0,303	0,170	0,126	2,414	0,0261
INTC	0,0056	0,282	0,710	0,639	0,441	0,0048
MA	0,0045	0,223	0,057	0,018	12,358	0,1336
MSFT	0,0061	0,309	0,686	0,617	0,500	0,0054
ORCL	0,0191	1,000	0,952	0,870	1,150	0,0124
PG	0,0017	0,074	0,417	0,361	0,207	0,0022
T	0,0048	0,239	0,863	0,785	0,305	0,0033
V	0,0007	0,021	0,161	0,117	0,182	0,0020

Таблица 4.5.1. Распределение капитала между 20 комбинациями «короткий стрэдл» по свертке двух показателей — EPLN (математическое ожидание прибыли, рассчитанное на основе логнормального распределения) и VaR. Нормализованные значения рассчитаны по формуле 4.5.1, кроме значений для акций AA и GOOG (см. объяснения в тексте)

эту проблему можно путем замены нулевых значений значениями, рассчитанными по следующей формуле:

$$\Phi(C_{\min})_{\text{normalized}} = \frac{\Phi(C_{\min})}{\Phi(C_{\min+1})} \Phi(C_{\min+1})_{\text{normalized}}, \quad (4.5.2)$$

где  $\Phi(C_{\min+1})$  означает величину показателя со следующим после минимального значением. Например, по показателю EPLN нормализованная функция имеет нулевое значение для акции AA. Используя формулу 4.5.2 и учитывая, что акцией со следующим по величине показателем является  $V[\Phi(C_{\min+1}) = 0,0007]$ , можем вычислить значение нормализованного показателя для AA:  $\{0,0003/0,0007\} \cdot 0,021 = 0,009$ .

После того как значения показателей нормализованы и значения свертки вычислены, остается рассчитать вес каждой комбинации в составе портфеля. Это делается с помощью формулы 4.3.5 (результаты расчетов представлены в последнем столбце таблицы 4.5.1).

#### 4.5.2. Сравнение многомерной и одномерной системы

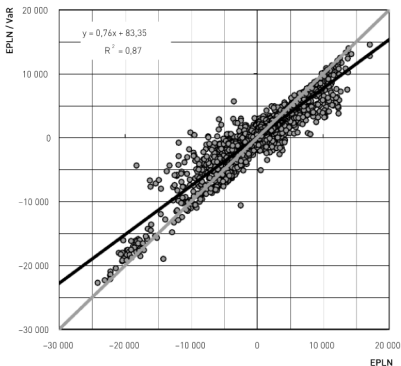
В этом разделе мы проанализируем, каким образом использование многомерной системы распределения капитала влияет на параметры формируемого портфеля. Для этого необходимо сравнить прибыли портфелей, сформированных с помощью одномерной системы, с прибылями портфелей, созданных на основе многомерной системы. Такое же сравнение следует провести в отношении меры концентрированности капитала.

Мы провели сравнительный анализ на периоде 2002–2010 гг., смоделировав две торговые стратегии, аналогичные той, что была описана в разделе 4.4.1, за исключением принципа распределения капитала. В одном случае капитал распределялся по свертке двух показателей (EPLN и VaR), в другом случае — по единственному показателю EPLN. Как и в предыдущих исследованиях, на протяжении всего периода моделирования было построено 6448 портфелей для каждого из двух способов распределения капитала.

#### Сравнение прибыли

По аналогии с исследованием, описанным в разделе 4.4.3, будем рассматривать зависимость между прибылью портфеля, получаемой при распределении капитала с помощью свертки, и прибылью, получаемой при формировании портфеля на основании одного показателя. На рис. 4.5.1 по вертикальной оси

отложены значения прибыли, полученной при распределении капитала по свертке двух показателей, а по горизонтальной оси — значения прибыли, соответствующие портфелям, сформированным на основании единственного показателя. Напомним, что прибыль портфелей, расположенных на линии безразличия (с коэффициентом наклона, равным 1), одинакова при распределении капитала с помощью многомерной и одномерной системы. Точки, расположенные выше линии безразличия, обозначают портфели, для которых применение многомерной систем привело к увеличению прибыли или уменьшению убытка (по сравнению с тем, что было бы, если бы капитал распределялся в соответствии с одномерной системой).



**Рис. 4.5.1.** Зависимость прибыли портфелей, формируемых с помощью свертки двух показателей (отношение EPLN к VaR), и прибыли портфелей, формируемых на основании единственного показателя (EPLN). Портфели, расположенные на серой линии (коэффициент наклона равен 1), имеют прибыль (убыток), не зависящую от способа распределения капитала. Черным цветом показана линия регрессии

- В тех случаях, когда портфель оказался прибыльным (как для многомерной, так и для одномерной системы распределения капитала), большинство точек располагались ниже линии безразличия. Это означает, что введение дополнительного показателя в систему формирования портфеля привело к снижению прибыли. Вместе с тем, в тех случаях, когда портфель был убыточным (для обеих систем распределения капитала), то большинство точек располагались выше линии безразличия. Это означает, что убытки портфелей, сформированных с помощью многомерной системы, оказались меньше убытков портфелей, основанных на одномерной системе распределения капитала.
- Регрессионный анализ подтверждает описанные наблюдения. Коэффициент наклона линии регрессии равен 0,76, что значительно ниже коэффициента линии безразличия равного 1. Хотя intercept (значение, принимаемое зависимой переменной при условии, что значение независимой переменной равно нулю) не равен нулю, он достаточно мал по сравнению с общим диапазоном значений, принимаемых исследуемыми переменными. Поэтому его влиянием на результаты анализа можно пренебречь. Установленная разница угловых коэффициентов статистически достоверна на очень высоком уровне ( $t = -64,4, p < 0,001$ ). Таким образом, можно сделать вывод о том, что использование многомерной системы для распределения капитала приводит к созданию более консервативного портфеля с меньшим потенциалом прибыльности и меньшим риском убытков.

#### **Сравнение концентрации капитала**

Для сравнения многомерной и одномерной систем распределения капитала мы воспользуемся методикой расчета индекса концентрированности портфеля, описанной в разделе 4.4.2. Степень концентрированности капитала при формировании портфеля на основе многомерной и одномерной систем, будем сравнивать с помощью частотного распределения индекса концентрированности.

- В тех случаях, когда портфели формировались с помощью весовой функции, основанной на единственном показателе, распределение индекса концентрированности было не нормальным и сильно смещенным в область низких значений индекса (рис. 4.5.2). В 9 и 11% случаев половина капитала была сконцентрирована всего в 1 и 2% комбинаций соответственно. Использование двумерной системы распределения капитала кардинально изменило форму распределения индекса концентрированности капитала (рис. 4.5.2). Хотя распределение



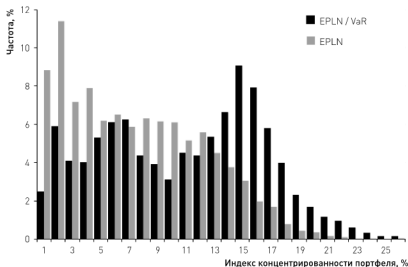


Рис. 4.5.2. Частотное распределение индекса концентрированности для портфелей, формируемых с помощью свертки двух показателей (отношение EPLN к VaR), и для портфелей, построенных на основании единственного показателя (EPLN)

имеет иррегулярную форму, мода существенно смещена в область более высоких значений индекса. В 10% случаев половина капитала концентрировалась в 16% комбинаций.

Таким образом, можно заключить, что введение дополнительного показателя в систему формирования портфеля привело к созданию портфелей с более равномерным распределением капитала (по сравнению с одномерной системой). Поскольку степень концентрированности капитала отражает уровень диверсификации портфеля, можно утверждать, что распределение капитала на основе двумерной системы обеспечивает создание более диверсифицированных, консервативных портфелей.

#### 4.6. Портфельная система распределения капитала

##### 4.6.1. Особенности портфельной системы

Все рассмотренные выше подходы к распределению капитала основывались на оценках отдельных элементов формируемого портфеля. В этом разделе мы остановимся на «портфельном»

подходе, основанном на оценках доходности, и рисках всего портфеля в целом, а не отдельных комбинаций. К преимуществам портфельного подхода относится возможность учитывать корреляции между отдельными элементами портфеля. Портфельный подход к распределению капитала может применяться как для одномерной системы формирования портфеля, основанной на единственном показателе, так и для многомерной системы. Классическим примером портфельного подхода, реализуемого в рамках двумерной системы распределения капитала, является модель CAPM, основанная на показателях доходности и риска, оцениваемых для всего портфеля в целом.

Принципиально важной характеристикой показателей, используемых для распределения капитала в рамках портфельной системы, является свойство аддитивности их значений. Это свойство определяет возможности вычисления показателя для портфеля путем суммирования значений этого показателя, рассчитанных для каждого отдельного элемента портфеля. По признаку аддитивности и методикам, применяемым для расчета показателей портфеля, можно предложить следующую классификацию показателей:

- ♦ Аддитивные показатели. Значения этих показателей для портфеля активов могут быть вычислены путем суммирования их значений, рассчитанных для каждого актива по отдельности. Примером такого показателя является «математическое ожидание прибыли».
- ♦ Неаддитивные показатели, трансформируемые в аддитивные. Хотя значения таких показателей для портфеля активов не могут быть вычислены путем простого суммирования, они могут быть трансформированы в близкие по смыслу показатели, обладающие свойством аддитивности. В предыдущей главе мы описали способ трансформации неаддитивной дельты в аддитивную индексную дельту.
- ♦ Неаддитивные, аналитически вычисляемые показатели. Значения таких показателей для портфеля активов не могут быть вычислены путем суммирования. Для вычисления их значений необходима дополнительная информация. Примером такого показателя является стандартное отклонение, для вычисления которого необходима (помимо стандартных отклонений отдельных активов) ковариационная матрица, включающая все входящие в состав портфеля активы.
- ♦ Неаддитивные, аналитически невычисляемые показатели. Значения таких показателей для портфеля активов невозможно

вычислить ни путем простого суммирования, ни аналитическими методами. К таким показателям относятся различные нелинейные алгоритмы и свертки нескольких показателей.

Основной проблемой, возникающей при использовании портфельной системы распределения капитала, является необходимость решения задачи максимизации показателя или группы показателей, на основании которых формируется портфель. Для аддитивных показателей, применяемых в рамках одномерной системы распределения капитала, решение этой задачи тривиально — весь капитал инвестируется в единственную комбинацию с наибольшим значением показателя. Безусловно, такое решение неприемлемо с точки зрения диверсификации, поэтому в таких случаях необходимо установить некий минимальный вес для определенной группы комбинаций. Однако и это решение в большинстве случаев не может быть удовлетворительным. Поэтому аддитивные показатели лучше не использовать, если портфель формируется на базе единственного показателя.

В тех случаях, когда капитал распределяется на основании неаддитивного показателя либо на основании нескольких показателей (как аддитивных, так и неаддитивных), задачу максимизации их значений для портфеля в целом, как правило, невозможно решить, пользуясь аналитическими методами. В таких случаях приходится использовать методы случайного поиска (например, метод Монте-Карло). При этом задача максимизации формулируется следующим образом: найти такой набор весов для каждой комбинации в портфеле, чтобы величина показателя (или группы показателей), рассчитанная для всего портфеля в целом, оказалась максимальной.

#### 4.6.2. Сравнение портфельной и элементной системы

В этом разделе мы проанализируем, каким образом выбор уровня оценки влияет на параметры формируемого портфеля. Для этого необходимо сравнить прибыли, получаемые при распределении капитала на основании портфельной системы с прибылями портфелей, сформированных с помощью элементной системы. Такое же сравнение следует провести в отношении меры концентрированности капитала.

Сравнительный анализ основывается на моделировании двух торговых стратегий, аналогичных той, что была описана в разделе 4.4.1, за исключением принципа распределения капитала.

На протяжении всего периода моделирования было построено 6448 портфелей для каждого из двух способов распределения капитала. В обеих стратегиях капитал распределялся по свертке двух показателей — EPLN и индексной дельты. Поскольку величина индексной дельты прямо пропорциональна риску коротких опционных комбинаций, свертка двух выбранных нами показателей рассчитывалась как отношение EPLN к индексной дельте. Для одной стратегии показатель свертки рассчитывался для каждой отдельно взятой комбинации и капитал распределялся по принципам элементной системы (как описано во всех рассмотренных выше примерах). Для другой стратегии значение свертки вычислялось для всего портфеля в целом и капитал распределялся по принципам портфельной системы.

Для реализации портфельной системы распределения капитала необходимо выбрать методику оптимизации. Оптимизируемой функцией в данном случае является свертка показателей EPLN и индексная дельта, вычисляемая для портфеля в целом:

$$\text{Convolution } (w_1, \dots, w_{20}) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot \text{EPLN}[C_i]}{\sum_{i=1}^n w_i \cdot \text{I-Delta}[C_i]},$$

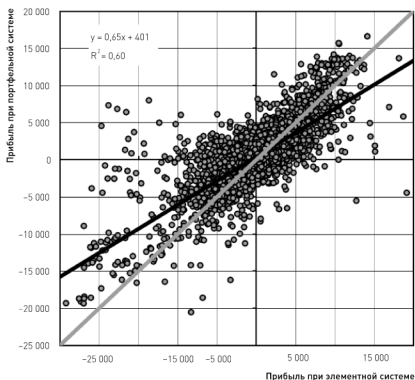
$$w_i \geq 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (4.6.1)$$

Задачей оптимизации является поиск такого набора весов, который максимизирует значение функции 4.6.1. Выбранная нами свертка двух показателей представляет собой нелинейную многоэкстремальную конструкцию. Поэтому оптимизация осуществлялась методом Монте-Карло путем генерации случайных векторов  $(w_1, \dots, w_n)$  и выбора такого из них, который имеет максимальное значение функции 4.6.1. Для каждого из 6448 портфелей, сформированных на историческом периоде 2002–2010 гг., число итераций (количество сгенерированных случайных векторов  $(w_1, \dots, w_n)$ ) составляло 10 000.

#### Сравнение прибыли

На рис. 4.6.1 показана взаимозависимость между прибылью, полученной при распределении капитала путем оптимизации свертки для всего портфеля в целом, и прибылью, получаемой при распределении капитала на основании значений свертки, вычисляемой для каждой отдельно взятой комбинации. Точки,

расположенные выше линии безразличия (с коэффициентом наклона, равным 1), обозначают портфели, для которых применение портфельной системы распределения капитала привело к увеличению прибыли или уменьшению убытка (по сравнению с тем, что было бы, если бы капитал распределялся в соответствии с одномерной системой). Соответственно, точки, расположенные ниже линии безразличия, относятся к портфелям, для которых портфельная система привела к снижению прибыли или увеличению убытка.



**Рис. 4.6.1.** Зависимость прибыли, получаемой при формировании портфеля путем оптимизации свертки (отношение EPLN к индексной дельте) для всего портфеля в целом, и прибыли, получаемой при использовании элементной системы распределения капитала на основании этой же свертки. Портфели, расположенные на серой линии (коэффициент наклона равен 1), имеют прибыль (убыток), независящую от способа распределения капитала. Черным цветом показана линия регрессии

В тех случаях, когда портфель оказался прибыльным (как для портфельной, так и для элементной системы распределения капитала), большинство точек располагались ниже линии безразличия. Это означает, что распределение капитала на основании портфельной системы приводит к снижению прибыли. Однако в тех случаях, когда портфель был убыточным (для обеих систем распределения капитала), большинство точек располагались выше линии безразличия. Это указывает на то, что убытки портфелей, сформированных с помощью портфельной системы, оказались меньше убытков портфелей, основанных на элементной системе распределения капитала.

Результаты регрессионного анализа согласуются с выводами, сделанными на основании визуального анализа рис. 4.6.1. Коэффициент наклона линии регрессии равен 0,65, что значительно ниже коэффициента линии безразличия, равного 1. Хотя intercept в данном случае велик, он тем не менее достаточно мал по сравнению с общим диапазоном значений, принимаемых исследуемыми переменными. Поэтому, как и в предыдущих исследованиях, его влиянием на результаты анализа можно пренебречь. Установленная разница угловых коэффициентов статистически достоверна на высоком уровне значимости ( $t = -53,5, p < 0,001$ ). Таким образом, можно сделать вывод о том, что использование портфельной системы распределения капитала приводит к созданию более консервативного портфеля с меньшим потенциалом прибыльности и меньшим риском убытков.

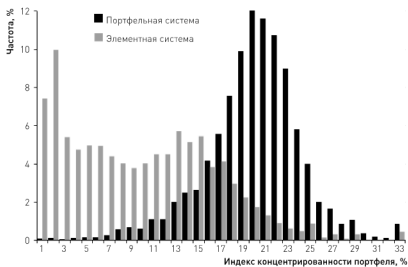
#### **Сравнение концентрации капитала**

Для сравнения портфельной и элементной системы распределения капитала мы воспользовались, как и в предыдущих примерах, методикой расчета индекса концентрированности портфеля, описанной в разделе 4.4.2. Для сравнения степени концентрированности капитала при формировании портфеля на основе портфельной и элементной системы воспользуемся, как и в предыдущих разделах, частотным распределением индекса концентрированности (рис. 4.6.2).

В тех случаях, когда портфели формировались на основании свертки двух показателей, рассчитанной для каждой отдельно взятой комбинации (элементная система), распределение индекса концентрированности оказалось смещенным в область низких значений индекса. Мода распределения приходится на величину индекса концентрации, равную 2%. Это означает, что в 10% случаев половина капитала была сконцентрирована

всего в 2% составляющих портфель комбинаций. Использование портфельной системы распределения капитала принципиально изменило форму распределения индекса концентрированности капитала (рис. 4.6.2). В этом случае распределение имеет вид, близкий по форме к нормальному, а его мода смещена в область намного более высоких значений индекса. Приблизительно в 10–12% случаев половина капитала оказалась вложенной в 19–22% комбинаций. Экстремальные случаи, когда половина капитала была вложена в 1–5% комбинаций были крайне редки (менее 1% от общего количества сформированных портфелей).

Таким образом, можно заключить, что по сравнению с элементной системой, использование портфельной системы привело к созданию портфелей с более равномерным распределением капитала. Поскольку степень концентрированности капитала отражает уровень диверсификации портфеля, можно утверждать, что распределение капитала на основе портфельной системы обеспечивает создание более диверсифицированных и консервативных портфелей.



**Рис. 4.6.2.** Частотное распределение индекса концентрированности для портфелей, формируемых путем оптимизации свертки (отношение EPLN к индексной дельте) для всего портфеля в целом и путем распределения капитала на основе элементной системы

#### 4.7. Выбор алгоритма распределения капитала

Общеизвестно, что выбор системы распределения капитала способен коренным образом повлиять на прибыльность и риск разрабатываемой торговой стратегии. Более того, неправильный выбор алгоритма распределения капитала может превратить многообещающую стратегию в убыточную. В результате плодотворная торговая идея может быть отвергнута на стадии тестирования.

Для построения эффективной системы распределения капитала необходимо принять целый ряд компромиссных решений. В первую очередь необходимо определиться с основным принципом, который будет использоваться при формировании портфеля. Существует целый класс опционных стратегий, в которых распределение капитала осуществляется на основании показателей, не выражающих оценку доходности и риска (хотя они косвенно все-таки связаны с уровнем риска создаваемого портфеля). В таких стратегиях приоритетным является априорная фиксация уровня диверсификации портфеля. Мы рассмотрели два подобных показателя, которые позволяют распределять капитал исходя из объема опционной премии, получаемой или уплачиваемой при открытии позиции по каждой комбинации или исходя из объема капитала в эквиваленте базового актива.

Однако большинство стратегий основывается на показателях, выражающих непосредственно оценки доходностей и рисков. Выбор конкретного показателя или группы показателей определяется особенностями разрабатываемой торговой системы и заложенными в ней идеями. Можно сказать без преувеличения, что именно этот этап разработки алгоритма распределения капитала является наиболее критичным. Хотя в этой главе мы рассмотрели всего семь показателей, на самом деле их может быть намного больше. Более того, каждый показатель может иметь множество вариаций, зависящих от выбранных значений параметров и от функционалов, используемых в расчетном алгоритме. Мы продемонстрировали, что выбор показателя существенно влияет на доходность портфеля. Вместе с тем существует ряд факторов, под воздействием которых торговая стратегия становится наиболее чувствительной к выбору показателей. В частности, нами было установлено, что в условиях высокой рыночной волатильности прибыли



и убытки стратегии зависят от способа распределения капитала больше, чем в периоды спокойного рынка. Если опционные комбинации, включенные в состав портфеля, относятся к небольшому числу базовых активов и если эти комбинации строятся в основном из долгосрочных опционов, то выбор правильных показателей становится более критичным, чем при формировании менее долгосрочных и более диверсифицированных портфелей.

После того как выбор определенного показателя (или набора показателей) сделан, существует возможность модифицировать степень его влияния на процедуру распределения капитала. Нами был предложен механизм трансформации показателей (основанный на выпуклых и вогнутых весовых функциях), который, в зависимости от пожеланий разработчика торговой стратегии, способен привести к формированию более (или менее) агрессивных портфелей. Используя этот механизм, можно настроить стратегию на определенный уровень доходности, а также адаптировать ее под параметры конкретного пользователя.

Следующим шагом в создании алгоритма формирования портфеля является решение о размерности системы распределения капитала. Простейшая одномерная система, основанная на единственном показателе, может оказаться вполне удовлетворительной. Однако во многих случаях приходится пользоваться как минимум двумерной системой, в которой один из показателей выражает прогноз ожидаемой доходности, а второй — оценивает риск. В этой главе мы продемонстрировали, что введение в систему дополнительного показателя, выражающего риск убытков, приводит к формированию более консервативных портфелей с меньшим уровнем доходности и риска. Однако к этим результатам следует относиться с большой осторожностью, поскольку использование других показателей или тех же показателей, но в других стратегиях, может привести к другим выводам. В любом случае решение о размерности системы распределения капитала является продуктом компромисса между потенциальными преимуществами от введения каждого дополнительного показателя и их ценой, выражаемой в затратах вычислительных ресурсов и увеличении времени, необходимого для проведения полного расчетного цикла.

Наряду с выбором показателей одним из главных решений, принимаемых разработчиком стратегии при создании системы распределения капитала, является выбор уровня оценки.

Портфель может формироваться исходя из оценок доходности и риска, вычисляемых для всего портфеля в целом. Альтернативный подход состоит в оценках отдельных элементов формируемого портфеля. Наши исследования показали, что оценки на уровне портфеля приводят к формированию менее агрессивного и более диверсифицированного варианта портфеля с меньшим уровнем прибыли в случае положительного исхода торговли и с меньшими убытками при реализации отрицательного исхода.

Автоматизированную торговую систему можно представить как совокупность модулей, выполняющих функции разработки, формализации, настройки и проверки торговых стратегий. Темы разработки и формализации были освещены в главе 1. Настройка стратегий, включающая в себя оптимизацию параметров, распределение капитала и управление рисками, описана в главах 2, 3 и 4 соответственно. Настоящая глава посвящена тестированию разрабатываемых стратегий на исторических данных (такое тестирование принято называть «бэкстестингом»).

Модуль, выполняющий функции бэкстестинга, делится в свою очередь на несколько объектов: базу исторических данных, аппарат генерации сигналов на открытие и закрытие позиций, аппарат симуляции исполнения торговых заявок и систему оценки доходности стратегий. На их основе строится имитация торговли и оцениваются ее результаты. Эти объекты будут рассмотрены в настоящей главе.

Бэкстестинг торговых стратегий достаточно широко освещен в финансовой литературе. Существует большое количество публикаций разного уровня сложности и глубины проработки. При этом большинство из них описывают построение системы бэкстестинга для стратегий, торгующих линейными базовыми активами (акциями и фьючерсами). В этой главе мы не ставим себе целью дать всестороннее и детальное описание универсальной системы бэкстестинга (такое общее описание можно найти в большом количестве книг и статей). Вместо этого мы заострим внимание на особенностях, которые необходимо учитывать при бэкстестинге стратегий, ориентированных на торговлю опционами.

## 5.1. База данных

Исторические данные — это краеугольный камень любой системы бэкстестинга торговых стратегий. Только на американском биржевом рынке торгуется более 2000 опционабельных акций. Если предположить, что у каждой акции в среднем имеется порядка 10 торгуемых страйков и порядка 10 дат экспираций, то в итоге получится порядка 200 000 торговых инструментов. Каждый из них имеет свои исторические значения. Такое разнообразие объясняет особые требования, предъявляемые к организации базы данных и структуры доступа к содержащимся в ней торговым инструментам.

### 5.1.1. Поставщики данных

Большинство брокерских платформ, предоставляющих онлайн-доступ к биржевой информации, дает возможность видеть текущие котировки опционов. Однако предоставление исторической информации достаточной глубины в прошлое не является частью обычного брокерского сервиса. Котировки текущего торгового дня для большинства опционных контрактов можно найти на популярных бесплатных сервисах [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com) и [finance.google.com](http://finance.google.com). Гораздо сложнее дело обстоит с историей цен опционов.

Для создания и поддержания исторической базы данных необходимо обращаться к специализированным поставщикам данных. При этом не все поставщики поддерживают достаточный объем и глубину данных. Это объясняется тем, что деятельность по созданию систем бэктестинга опционных стратегий достаточно сложна и пока еще не получила широкого распространения.

Многие поставщики данных предоставляют историю цен опционов только на небольшой спектр базовых активов, например основные валюты и индексы. Некоторые разработчики аналитических платформ для торговли опционами предоставляют доступ к истории непосредственно из собственных программных продуктов. Это удобно для построения простейших систем бэктестинга, реализуемых непосредственно на платформе, предоставленной разработчиком. Однако разработка и тестирование сложных стратегий, основанных на оригинальных инновационных идеях, на такой платформе невозможна.

Довольно широкий спектр базовых инструментов и более или менее серьезную глубину истории можно найти на интернет-сервисах [Historicaloptiondata.com](http://Historicaloptiondata.com), [IVolatility.com](http://IVolatility.com), [Livevol.com](http://Livevol.com), [Optionmetrics.com](http://Optionmetrics.com), [Stricknet.com](http://Stricknet.com). В частности, [Livevol](http://Livevol.com) предоставляет не только данные закрытия дня, но и внутридневные цены. Сервис [IVolatility](http://IVolatility.com), помимо истории цен, предоставляет богатый спектр специфических для опционов расчетных и аналитических материалов и программные продукты для разработчиков, с помощью которых можно получать онлайн-доступ к оперативной биржевой информации.

В случае если база данных приобретается у определенного поставщика в готовом виде, следует обратить особое внимание на проблему отсутствия в приобретаемой базе тех базовых активов, которые существовали ранее, но в настоящий момент уже не торгуются (так называемая проблема выживания — survival

bias problem). Это может быть связано с банкротством компании либо с ее поглощением. При этом многие провайдеры данных предоставляют информацию только о тех компаниях, которые торгуются в настоящее время. Если этим ограничиться, то при бэкестинге стратегии будет упущено важное рыночное событие, и результат исследования нельзя будет считать полным и надежным. Например, в период, когда циркулировали слухи о возможном поглощении определенной компании, стоимость ее опционов могла быть очень высокой. Если бы в этот период стратегия, основанная на продаже волатильности, сгенерировала сигнал на открытие короткой позиции по этой акции, то в момент, когда событие реализовалось, могло произойти большое ценовое движение. Это привело бы к серьезным убыткам и, возможно, к полному разорению всего торгового счета. Если же база данных, на которой проводится тестирование, не содержит тиккер такой поглощенной компании, то в процессе бэкестинга это событие не получит никакого отражения. Поэтому использование при разработке стратегий полных списков всех тиккеров, существовавших в те дни, для которых производится моделирование торговли, является обязательным.

### 5.1.2. Структура базы данных

База данных должна содержать минимальный объем информации, относящийся к определенному временному интервалу (в большинстве случаев интервал принимается равным одному торговому дню). В отношении цены такой минимальный объем информации включает цены открытия и закрытия дня, а также максимальные и минимальные цены дня. Более подробные базы включают также внутрисуточные цены, фиксируемые с заданной частотой, а самые полные базы могут содержать полную информацию обо всех совершенных сделках.

Исторические цены опционов имеют свою специфику. Поскольку опционы являются производными финансовыми инструментами, их ценообразование неразрывно связано с текущей ценой их базовых активов. Возникает принципиально важная задача синхронизации. А именно: котировки опционов на определенный момент времени осмыслены только вместе с ценой их базового актива строго в тот же момент времени. Этот фактор необходимо учитывать при организации структуры базы исторических данных.

В виду больших спредов между ценами спроса и предложения и из-за низкой ликвидности опционов котировки их цен спроса

и предложения имеют гораздо большее значение, чем цены совершенных сделок. Особое значение это приобретает при определении котировок закрытия торгового дня (или другого фрейма). Во многих случаях последняя сделка по опционам происходит не в момент закрытия дня, в то время как последняя сделка по базовому активу, как правило, приходится на закрытие торгов. Поскольку такая десинхронизация недопустима, приходится вместо цен закрытия торгового дня использовать соответствующие котировки спроса и предложения опционов.

Для тестирования большинства опционных стратегий в структуре базы данных необходимо предусмотреть следующий состав информационных разделов:

- ◇ История цен базовых активов, включая стандартный набор цен открытия, закрытия, максимумов и минимумов для поддерживаемого тайм-фрейма.
- ◇ История цен и котировок опционов. Каждый опцион является отдельным инструментом со своим тиккером, историей сделок и котировок. Для полноценного бэктестинга необходимо поддерживать их структурное описание, связывающее каждый отдельный опцион с базовым активом и параметрами серии — базовым инструментом, страйком, типом опциона, датой экспирации. Необходимо иметь возможность по тиккеру базового актива получить множество всех его активных на данный момент опционов и осуществлять по нему навигацию по двум измерениям — датам экспирации и страйкам.
- ◇ История данных по объемам торговли (как для базовых активов, так и для опционов) и открытому интересу (для опционов).
- ◇ История дивидендных выплат, сплитов и переименований тиккеров базовых активов.
- ◇ История квартальных отчетов. Необходимо помнить, что цель бэктестинга — смоделировать ситуацию принятия решения в прошлом, не заглядывая в относительно к этому прошлому будущее. Достаточно просто получить хронологию уже состоявшихся квартальных отчетов, предоставляемую многими бесплатными сервисами. Однако такая информация не должна быть использована в бэктестинге, поскольку может стать причиной принципиальных ошибок. Дело в том, что в реальной торговле принятие решения может опираться только на предполагаемые даты событий — причем событий, предполагаемых только на основании имеющейся в тот момент информации. Рынок может не знать о точной дате будущего отчета, и это

радикально отразится на цене опционов (например, подразумеваемая волатильность будет ниже по сравнению с ситуацией точно известной близкой даты отчета). Либо ситуация может быть обратной — точная дата отчета известна, но в назначенный день отчет не публикуется. Реакция рынка в таком случае зависит от причины задержки отчета. В обоих случаях в процессе бэкестинга будет принято решение, которое было бы невозможно в реальности. Чтобы избежать подобного искажения результатов, необходимо хранить для каждого дня прошлого предполагаемые даты квартальных отчетов, доступные в открытом доступе в этот день. Эти данные можно накапливать, ежедневно автоматически сканируя популярные сайты типа MarketWatch.com, Earnings.com, Finance.Yahoo.com и другие.

- ◇ История нерегулярных корпоративных событий: слияния/поглощения, банкротства, судебные решения, заседания комиссий с одобрением или запрещением продукции. Информация подобного типа существенно осложняет бэкестинг. Все перечисленные события сильно влияют на подразумеваемую волатильность и, следовательно, на цену опционов. Однако информация о них становится достоверной только после фактического наступления события. В бэкестинге же необходимо учитывать только предположения и ожидания, которыми участники рынка могли руководствоваться в конкретный день до наступления события. Сбор, хранение и использование такой информации в стратегиях — крайне непростая задача. При невозможности правильно оценить информацию, доступную участникам рынка в заданный момент времени (до наступления события), следует отказываться от сделок в системе бэкестинга. Это делается путем применения специальных фильтров (описанных ниже).
- ◇ История фундаментальных показателей. Фундаментальные финансовые показатели, такие как P/E, PEG, ROE, EPS и многие другие «мультипликаторы», получаемые из корпоративной отчетности и экспертных оценок, являются основой фундаментального анализа. В настоящее время использование фундаментальных показателей при построении опционных торговых стратегий не имеет широкого распространения. Однако разработка подобных стратегий представляется нам весьма перспективным направлением развития (особенно в сочетании с использованием элементов технического анализа). Основная задача состоит в накоплении данных, публикуемых в квартальных отчетах, и параллельное взаимосвязанное накопление для

этих же данных их прогнозных значений (существовавших до публикации отчета).

Многие поставщики данных и информационных сервисов предоставляют биржевые данные о ценах и объемах целым спектром расчетных показателей — различными вариантами волатильностей (исторической и подразумеваемой), «греками», поверхностями волатильности и т. п. Эту информацию можно также поддерживать в исторической базе. С другой стороны, разработчик торговой системы может использовать свои модели и алгоритмы расчета данных показателей.

### 5.1.3. Оперативный доступ к данным

Данные имеют весьма внушительный объем. Доступ к ним требует заметных временных затрат. Имитация торговли подразумевает последовательную обработку данных за несколько сотен и даже тысяч торговых дней. Многочисленные исторические симуляции необходимо проводить не только при бэк-тестинге, но и при оптимизации стратегий, статистическом исследовании параметров или элементов алгоритмов.

Для бэк-тестинга опционных стратегий необходимо оперировать одновременно большим количеством торговых инструментов. Причем в качестве инструмента может выступать как отдельный опцион, так и их комбинация (можно создавать практически неограниченное количество опционных комбинаций, играющих роль самостоятельных инструментов). Поэтому, помимо стандартного движения по истории, то есть во времени, необходимо обеспечить быструю навигацию по структуре опционных серий. В частности, алгоритм тестируемой стратегии может требовать создания на каждый день прогонки следующих наборов данных:

- ♦ опцион заданного базового актива заданного типа (пут или колл) с заданным страйком и датой экспирации;
- ♦ все страйки и даты экспирации для данного базового актива;
- ♦ все активно торгуемые опционы (со среднедневным объемом торговли выше заданной пороговой величины) для заданного базового актива;
- ♦ опционы, имеющие страйки «около денег», «вне денег» или «в деньгах» для заданной даты экспирации;
- ♦ опционы с заданным страйком, имеющие даты экспирации в пределах заданного интервала времени от текущей даты;
- ♦ многие другие более сложные наборы.

Необходимо также оперативно определять истинность или ложность высказываний типа: предполагается ли для данной



компании корпоративный отчет между текущим днем и датой экспирации?

Для решения таких многомерных задач, требующих навигации как во времени, так и по структуре комбинаций, необходимо обеспечить такую скорость доступа к данным, которую позволяет только объект, содержащий в оперативной памяти все данные, необходимые во время прогонки стратегии. Это значит, что, помимо большой базы данных, предназначенной для хранения и накопления исторических данных, необходима оперативная история — встроенный в программный код системы бэкстемпинга объект, осуществляющий быстрый доступ к определенным данным на каждом шаге прогонки.

На практике оперативная история представляет собой подгружаемый при запуске системы бэкстемпинга объект, содержащий всю необходимую историю, которая может потребоваться для конкретной стратегии. Это существенно снижает проблему объема данных и скорости обращения к ним. Например, возможно строить стратегии, использующие только индексы или ETF в качестве базовых активов (при этом отпадает потребность в использовании истории предполагаемых квартальных отчетов). Другой пример — стратегия, торгующая опционами только на акции из состава S&P 500. Также можно ограничить спектр серий двумя ближайшими датами экспирации и страйками, отстоящими не далее 10% от текущей цены базовых активов. Вместе с тем, даже несмотря на подобные ограничения, для размещения оперативной истории в оперативной памяти приходится применять алгоритмы сжатия данных.

#### 5.1.4. Рекуррентные вычисления

В традиционном бэкстемпинге стратегий, ориентированных на торговлю акциями или фьючерсами, реализуется доступ к историческим значениям различных функций — индикаторов технического и фундаментального анализа. В бэкстемпинге опционных стратегий сюда добавляются еще и другие специфические расчетные величины. Стандартными для многих систем бэкстемпинга являются расчетные значения подразумеваемой и исторической волатильности, «греки», относящиеся ко всему спектру инструментов и всему горизонту истории. Объемы исторических данных не всегда позволяют хранить эти показатели рассчитанными заранее. Поэтому приходится каждый раз вычислять их значения по мере необходимости. Это приводит к возникновению другой проблемы, выражающейся

в непомерно больших затратах времени и вычислительных ресурсов. Для решения этой проблемы требуется применение специальных технологий ускорения и упрощения текущих вычислительных операций. Одной из таких технологий являются рекуррентные вычисления, когда значение некой функции вычисляется на основе ее предыдущего значения.

Примером применения технологии рекуррентных вычислений служит вычисление исторической волатильности. Текущее значение исторической волатильности используется при вычислении критериев с интегрированием платежной функции по функции плотности вероятности распределения цены базового актива. Типичными критериями такого типа являются математическое ожидание прибыли и вероятность получения прибыли, рассчитываемые на основе логнормального распределения. В процессе бэк-тестинга стратегий критерии вычисляются для каждого момента времени  $t$ . Следовательно, необходимо на каждый момент времени иметь соответствующее значение исторической волатильности  $HV(t)$ . Наиболее эффективным представляется вариант, когда все значения исторических волатильностей вычисляются до старта прогонки для всех базовых активов и всех моментов времени. При этом в силу простоты формулы исторической волатильности расчеты можно производить рекуррентно по времени. Если ненормированная по времени историческая волатильность задается выражением:

$$HV(t) = \sqrt{\frac{r^2(t-N+1) + r^2(t-N+2) \dots + r^2(t)}{N}}, \quad r(t) = \ln \frac{C(t)}{C(t-1)},$$

где  $C(t)$  — цена закрытия  $t$ -го дня истории,  $N$  — длина периода истории, используемого для расчета волатильности, то историческая волатильность, соответствующая следующему дню истории, вычисляется как:

$$HV(t+1) = \sqrt{\frac{HV^2(t) \cdot N - r^2(t-N+1) + r^2(t+1)}{N}}.$$

При этом нетрудно видеть, что объем вычислений при достаточной длине исторической базы практически не зависит от  $N$ . Аналогичные рассуждения справедливы для любой формулы волатильности вида  $HV(t) = F\left(\sum_{i=1}^N f(r(t-i))\right)$  с обратимой функцией  $F$ .

Применение рекуррентных вычислений позволяет рассчитывать значение функции для каждого следующего дня на основе предыдущего значения этой же функции. Это существенно сокращает количество вычислений.

#### 5.1.5. Проверка достоверности данных

Данные, поступающие даже из самых надежных источников, могут оказаться искаженными. Помимо примитивных ошибок, связанных с программными сбоями или техническими проблемами (например, десятичная точка перепутана с запятой, неучтенное переименование тиккера, пропущенная информация о сплите, и т. п.), встречаются систематические ошибки, связанные с неверными и пропущенными котировками. Серьезную проблему представляет несинхронность данных о цене базового актива и соответствующих ему опционов. Эта проблема может быть обусловлена, к примеру, тем, что многие инструменты торгуются на разных биржевых площадках и электронных системах. Моделировать торговлю на основе таких данных чревато серьезными искажениями результатов.

Проблему недостоверных данных необходимо решать путем их выявления и дальнейшего исправления либо фильтрации. Процедуры выявления необходимо применять ко всем поступающим в базу новым ценам и котировкам спроса и предложения. Существуют два подхода к выявлению искаженных данных: тесты на наличие арбитражных ситуаций и исследование поверхностей подразумеваемой волатильности.

В основе тестов на наличие арбитражных ситуаций находится теория ценообразования опционов и условие паритета опционных цен. Для европейских опционов с одинаковой датой экспирации паритет цен опционов пут и колл без учета дивидендов имеет вид равенства:

$$C + \frac{X}{(1+r)^t} = P + S,$$

где  $N$  — цена опциона колл,  $P$  — цена опциона пут,  $X$  — страйк опционного актива,  $S$  — текущая цена базового актива,  $r$  — безрисковая ставка,  $t$  — время до экспирации. Понятие паритета основывается на принципе невозможности возникновения на эффективном рынке арбитражных ситуаций. Другими словами, не может существовать финансового инструмента или совокупности инструментов, с помощью которых можно получить без риска доходность, превышающую безрисковую ставку. Это касается любых опционных комбинаций.

Если выявляется нарушение паритета, то это говорит о том, что цены опционов ошибочны либо существует учтенная в них рынком, но неизвестная проверочному алгоритму информация — например, выплата дивидендов. Ошибочной может быть цена одного из опционов либо обоих. В последнем случае необходимо установить, цена которого из опционов искажена. Для этого следует каждый из двух опционов проверить в паре с другим опционом, успешно прошедшим тест на паритет. Другой опцион будет неизбежно иметь другой страйк либо другую дату истечения. Выявив опцион с искаженной ценой, его следует исключить из базы данных либо исправить цену путем решения уравнения паритета (цена искаженного опциона берется как неизвестное, а цена правильного опциона является константой).

Существенным недостатком данного метода является то, что он применим только для европейских опционов. Для американских опционов формула паритета имеет вид неравенства:

$$S - X \leq C - P \leq S - \frac{X}{(1+r)^t}$$

Из формулы следует, что для американских опционов не существует точного значения паритета. Алгоритм тестирования может установить лишь факт попадания разности цен опционов колл и пут в определенный диапазон. Выход за рамки диапазона означает нарушение паритета, однако попадание в диапазон еще не означает, что искажение цены полностью исключается. Цена одного из опционов (либо обоих) может быть неправильной, но не настолько, чтобы выйти за рамки диапазона. Впрочем, и для европейских опционов существует возможность искажения цены при соблюдении паритета. Например, если уменьшить цену пута на некую величину и при этом увеличить цену колла на такую же величину, то условие паритета будет соблюдено, несмотря на то что цены обоих опционов искажены.

Другой метод выявления искаженных данных основывается на расчетах подразумеваемой волатильности. Для этого необходимо вычислить значения подразумеваемой волатильности для всех опционов, относящихся к определенному базовому активу. В силу целого ряда причин эти значения не будут совпадать. Вместе с тем их расхождения не являются случайными. В частности, зависимость подразумеваемой волатильности от страйка в большинстве случаев имеет форму улыбки (она

так и называется «улыбкой волатильности») — наименьшее значение соответствует страйку, наиболее близкому к текущей цене базового актива, а по мере удаления страйка в обе стороны (глубоко «в деньгах» и глубоко «вне денег») волатильность возрастает. Могут быть и другие формы зависимости. Однако, какова ни была бы форма зависимости, она представляет собой более-менее гладкую кривую (либо, в отдельных случаях, прямую линию). Если же одна из точек (то есть одно из значений волатильности) выпадает из общего ряда и находится далеко от того места на кривой, где должна находиться, это с большой вероятностью указывает на искажение цены опциона, соответствующего данному страйку.

Можно построить аналогичную зависимость подразумеваемой волатильности от даты экспирации. Однако удобнее всего рассматривать поверхность волатильности, представляющую собой трехмерный график зависимости подразумеваемой волатильности от страйка и даты экспирации. В нормальной ситуации такой график имеет форму относительно гладко изгибающейся поверхности. Острые пики и впадины на такой поверхности указывают на возможно некорректные значения подразумеваемой волатильности, что может свидетельствовать об искажении цены опционов.

Основная проблема данного метода состоит в том, что выявление аномальных цен базируется на визуальном анализе графиков, что абсолютно недопустимо при ежедневном автоматическом пополнении базы данных десятками тысяч новых тиккеров. Решить эту проблему можно с помощью алгоритмизации поиска точек «выброса», что во многих случаях является нетривиальной задачей. При рассмотрении одномерной линейной зависимости (например, волатильности от страйка), эта задача решается просто с помощью линейной аппроксимации. Аномальные точки находятся путем сравнения их остатков (residuals), получаемых из регрессионной модели. Если остаток какой точки отличается от среднего остатка больше, чем на пороговую величину, то это может рассматриваться как индикация искажения цены соответствующего опциона.

В тех случаях, когда зависимость нелинейна (а таких случаев большинство), приходится использовать более сложные модели аппроксимации. Задача усложняется еще больше при переходе от одномерной системы к поверхностям волатильности. В этом случае приходится применять еще более сложные математические модели. Главное требование к этим моделям — достаточно

точная аппроксимация данных и наличие аналитической формулы, описывающей подбираемую кривую или поверхность.

Формулы требуются для того, чтобы в случае выявления искаженных ценовых значений можно было вычислить корректную цену. Для этого необходимо удалить из модели точку-outlier и вновь рассчитать аналитическую формулу кривой либо поверхности. После этого следует вычислить новое значение подразумеваемой волатильности для данного outlier с помощью новой формулы. Имея скорректированное значение волатильности, можно рассчитать корректную стоимость опциона с помощью выбранной модели ценообразования.

## 5.2. Сигналы на открытие и закрытие позиций

Целью и результатом всех вычислений, заложенных в алгоритм стратегии, является принятие решения об открытии или закрытии позиции по определенному торговому инструменту. Для принятия такого решения необходимо рассчитать значения специальных функционалов, оценивающих привлекательность торговых инструментов. На основе последующей обработки значений функционалов формируются сигналы на открытие и закрытие позиций, которые в дальнейшем трансформируются в торговые заявки.

### 5.2.1. Принцип генерирования сигналов

В опционной торговле инструментами торговли являются базовые активы и опционы. Однако можно рассматривать в качестве торговых инструментов и опционные комбинации. На сложность торгового инструмента можно вообще не накладывать никаких ограничений. Например, как об отдельном торговом инструменте можно говорить о произвольном наборе торгуемых на рынке более простых инструментов. Построение определенного набора торговых инструментов — это элемент алгоритма стратегии. Обозначим через  $\Omega = \{K_1, \dots, K_N\}$  множество, состоящее из  $N$  торговых инструментов стратегии.

В каждый момент времени  $t$  (на каждом шаге прогонки) у стратегии имеется текущий набор информации  $I(t)$ . Эта информация разнообразна: история цен торговых инструментов, формализованная фундаментальная информация, значения индикаторов технического анализа, показатели прибыли-убытков текущих позиций, вероятностные сценарии и т. д. Единственное требование к информации  $I(t)$  — при ее получении или

вычислениях, связанных с ее получением, не должны использоваться данные из будущих моментов времени  $t + 1$ ,  $t + 2$ , ... Для каждого торгового инструмента алгоритм стратегии вычисляет специальные функционалы  $\Phi(K_j, I(t))$ , где  $K_j$  —  $j$ -й торговый инструмент, а  $I(t)$  — информация, доступная на шаге  $t$ . Интерпретация этих функционалов является элементом алгоритма стратегии.

Например, логические значения *false* и *true* могут иметь следующий смысл:  $\Phi(K_j, I(t)) = \text{true}$  означает, что стратегия выработала сигнал совершить определенную сделку с инструментом  $K_j$ . Это может быть как сделка покупки, если функционал  $\Phi(K_j, I(t))$  отвечает за покупки, так и сделки продажи, если соответствующий функционал отвечает за продажи. В более информативном случае значения функционалов  $\Phi$  могут принимать любые действительные значения. При этом значение функционала говорит не только о наличии сигнала, но и о его силе.

Допустим, что вычисляется функционал  $\Phi$ , оценивающий перспективность сделок с определенным набором инструментов. Предположим, что на шаге  $T$  получен вектор оценок функционала  $\bar{\Phi} = \{\Phi(K_j, I(t)), j = 1, \dots, N\}$ . Следующим этапом алгоритма является интерпретация значений этого вектора с целью генерации вектора сигналов, на основании которых формируются приказы на совершение сделок. Рассмотрим два варианта интерпретации оценок  $\bar{\Phi}$ , переводящих их в сигналы купли-продажи инструментов.

Первый вариант основывается на использовании пороговых значений. Предположим, что длинная позиция открывается, если расчетное значение функционала, основанного на критерии доходности, выраженной в процентах от объема инвестиций, превышает порог 3% ( $\theta_{\text{buy}} = 3$ ). Если значение функционала, основанного на данном критерии, прогнозирует убыток, превышающий 3% ( $\theta_{\text{sell}} = 3$ ), то открывается короткая позиция. В этом случае сигналы на открытие позиций генерируются следующим образом:

- ◇ купить инструмент  $K_j$ , если  $\Phi(K_j) > \theta_{\text{buy}}$ ,
- ◇ продать инструмент  $K_j$ , если  $\Phi(K_j) < \theta_{\text{sell}}$ .

Если данные неравенства не выполняются, то сделки с инструментом  $K_j$  не производятся.

Второй вариант использует упорядочение торговых инструментов с помощью упорядочения элементов вектора  $\bar{\Phi}$ :  $\bar{\Phi} = \{\Phi(K_1), \Phi(K_2), \dots, \Phi(K_n)\}$ , где  $\Phi(K_j) \geq \Phi(K_i)$ . Упорядочение позволяет из имеющихся инструментов выделить определенное число

$a$  лидеров и  $b$  аутсайдеров по значениям  $Top = \{K_{j_1}, K_{j_2}, \dots, K_{j_a}\}$  и  $Bottom = \{K_{j_{n-a+1}}, K_{j_{n-a+2}}, \dots, K_{j_n}\}$ . Тогда сигналы стратегии на покупку и продажу генерируются следующим образом:

- ◇ купить все инструменты из множества  $Top$ ,
- ◇ продать все инструменты из множества  $Bottom$ .

Разумеется, эти способы генерации сигналов выглядят очень упрощенно, и в реальные стратегии закладываются более сложные алгоритмы, как правило, сводящиеся к приведенным выше после определенных преобразований.

### 5.2.2. Разработка и оценка эффективности функционалов

В качестве функционалов, используемых для выработки сигнала, можно использовать различные критерии оценки, описанные в книге «Опционы: системный подход к инвестициям». Эти критерии дают численную оценку привлекательности сделок с определенным торговым инструментом — опционной комбинацией. Если упорядочить весь набор инструментов по такому критерию, то мы получим уже другой функционал — ранговый, принимающий целые значения — номера комбинаций в упорядочении. Независимо от особенностей функционала, его использование в процедуре бэкстестинга остается неизменным — оценка перспективности совершения сделки с определенным инструментом.

Поиск эффективных функционалов — одна из главных задач разработчика стратегий. Для разработки функционалов используются статистические исследования. Они заключаются в том, что на определенном периоде истории генерируется множество сделок по исследуемому функционалу и изучаются статистические показатели этого множества — средняя прибыль, дисперсия, распределения и корреляции. Таким способом можно подобрать полезные функционалы для генерации сигналов. Однако хорошая статистика на множестве сделок является только лишь необходимым, но не достаточным, условием качества функционала. Для успешной стратегии важное значение имеет еще и порядок, в котором встречаются и чередуются прибыльные и убыточные сделки. Так, достаточно длинная серия убыточных сделок может быть неприемлемой на практике из-за слишком большой «просадки» счета или чрезмерной длительности бесприбыльного периода. Аналогично хорошая статистика сделок может быть у стратегии, которая удовлетворительно работала в прошлом, но превратилась в убыточную в последнее время. Поэтому статистические



исследования могут и должны использоваться для построения функционалов, а исторические симуляции и бэкстестинг — для их оптимизации и оценки эффективности.

### 5.2.3. Фильтрация сигналов

В зависимости от алгоритма стратегии часть генерируемых сигналов необходимо отсеивать, не допуская до формирования на их основе торговых заявок. Это приходится делать либо по причине ожидаемых корпоративных событий, либо в силу того, что показатели определенных индикаторов не соответствуют параметрам стратегии. В качестве таких индикаторов могут выступать показатели риска, целью которых является фильтрация наиболее рискованных опционных комбинаций.

Рассмотрим пример индикатора риска, на основании которого может происходить фильтрация сигналов. Коэффициент асимметрии, описанный в главе 3, оценивает степень асимметричности опционной комбинации относительно текущей цены базового актива. Если в качестве функционала, оценивающего привлекательность комбинаций, используется матожидание прибыли, рассчитанное на основе эмпирического распределения, то многие асимметричные комбинации могут оказаться весьма привлекательными (иметь высокое матожидание прибыли). Это происходит в том случае, если эмпирическое распределение также имеет асимметричную форму. Поскольку матожидание прибыли рассчитывается путем интегрирования платежной функции комбинации по функции плотности вероятности эмпирического распределения, то в том случае, когда обе функции асимметричны и их моды смещены в одну сторону, значение интеграла получается высоким. Несмотря на это, такие комбинации не подходят для стратегий, основанных на коротких продажах опционов (поскольку по причине их асимметричности большая часть премии, получаемой от продажи опционов, состоит из внутренней стоимости, а доля временной стоимости мала, потенциал извлечения прибыли у таких позиций весьма невелик). Использование индикатора «коэффициент асимметрии» позволяет фильтровать сигналы на открытие позиций по таким комбинациям.

Фильтрация, производимая по причине ожидаемых корпоративных событий, может осуществляться двумя путями. Самый простой путь — это когда в базе данных накапливается и поддерживается информация о предстоящих событиях. В таком случае эти базовые активы можно временно исключить из базы,

на основании которой рассчитываются функционалы (то есть сигналы для таких инструментов генерироваться не будут). К событиям такого рода относятся квартальные отчеты, для которых информация о времени наступления события чаще всего доступна и более-менее надежна.

При отсутствии в базе данных информации о предстоящих событиях приходится использовать специальные фильтры, позволяющие отсеивать сигналы, генерируемые для инструментов, в отношении которых могут произойти нестандартные события. В качестве такого фильтра может использоваться отношение исторической и подразумеваемой волатильности  $IV/HV$ . В отсутствие предстоящих радикальных событий эти две волатильности имеют близкие значения. Если же указанное отношение значительно отличается от 1, то это может свидетельствовать о предстоящем серьезном событии с неопределенным исходом.

Историческая волатильность  $HV$  базового актива характеризует изменчивость его цены в период, предшествующий моменту расчетов. Подразумеваемая волатильность  $IV$  указывает на ожидаемую рынком изменчивость цены этого же базового актива в период, следующий за моментом расчетов.

Если подразумеваемая волатильность значительно превышает историческую волатильность, то можно сделать вывод о том, что цена базового актива менее волатильна по сравнению с теми колебаниями, которые рынок ожидает в будущем. Для системы бэктестинга это косвенно свидетельствует о приближающемся значительном событии, которое вызовет большие движения цены. Типичными примерами таких событий являются ожидаемые решения судебных инстанций, известия о переговорах по слиянию-поглощению, одобрение новых продуктов и т. д. Если на основе таких событий не строится специальная стратегия, то такие комбинации в процессе бэктестинга следует отфильтровывать.

Если историческая волатильность значительно превышает подразумеваемую волатильность, можно сделать предположение о том, что важное событие уже произошло и привело к тому, что рынок больше не ожидает от цены базового актива каких-либо существенных движений в будущем. При бэктестинге комбинации, относящиеся к таким базовым активам, следует исключать, поскольку в большинстве случаев они не соответствуют базовым параметрам тестируемой стратегии.

### 5.3. Моделирование торговых заявок

После генерирования сигналов на открытие и закрытие позиций необходимо сформировать на их основе виртуальные торговые заявки и смоделировать их исполнение. Низкая ликвидность опционов может воспрепятствовать успешному исполнению ордера, сформированного торговой стратегией. В случае лимитного ордера это обернется неполным его исполнением. В случае рыночного ордера — определенным «проскальзыванием», заключающемся в худшей (чем предполагалось стратегией) цене исполнения.

Эффективный бэкстестинг возможен только тогда, когда моделируемые сделки не отличаются от их исполнения в реальной торговле. Хотя некоторые различия в ценах и объемах исполнения неизбежны, задача разработчика состоит в их максимальном приближении. Неизбежность расхождений между моделируемыми и реальными сделками требует включения в алгоритм бэкстестинга возможностей моделирования частичного исполнения ордеров и исполнения с использованием цен, несколько отличающихся от зафиксированных в базе исторических данных. Кроме того, цена исполнения должна корректироваться с учетом комиссий, начисляемых за исполнение торговых операций (либо комиссии должны учитываться на более позднем этапе при оценке прибыльности стратегии).

#### 5.3.1. Моделирование объема

Как правило, в исторической базе данных имеется информация об объемах спроса и предложения. Можно было бы полагать, что объем исполнения лимитного ордера равен соответствующему объему котировки. Однако реальное исполнение редко соответствует этому объему. Текущий объем котировки может представлять собой сумму, сложенную из объемов разных торговых площадок. В таких условиях исполнение всего объема вовсе не гарантировано, поскольку сделка должна быть разбита брокером на несколько составляющих и направлена на разные площадки, что делает их полное исполнение неодновременным и сложнореализуемым. Кроме того, рынок опционов организован по принципу маркет-мейкинга, в следствии чего дилер может непрерывно изменять объемы спроса и предложения в зависимости от многих факторов: рыночной ситуации, оценки всей совокупности его собственных позиций и даже от заявок, которые ему поручено исполнять. Таким

образом, объемы котировок, имеющиеся в базе данных, могут служить лишь косвенным ориентиром для оценки возможного объема исполнения лимитного ордера.

- Другим косвенным указателем на возможный объем исполнения может служить дневной объем сделок по данному опциону, а также «открытый интерес» по нему. Однако и тут не все просто. Объемы опционных торгов часто носят локальный характер. Большие сделки могут происходить крайне эпизодически и не отражать реальную глубину рынка. То же относится и к размеру «открытого интереса», который может быть обусловлен несколькими крупными сделками в предшествующие моменты времени.
- Чтобы приблизить результаты бэкестинга к реальности, необходимо предусмотреть возможность частичного исполнения ордеров в моделируемой торговле. Это можно сделать разными способами. Однако, какой бы способ ни был принят, все их можно свести к параметру, определяющему процент исполнения ордера. Такой параметр представляет собой функцию, аргументами которой являются: текущий объем и цены спроса и предложения; усредненный дневной объем сделок по данному инструменту (вычисленный по предшествующим дням торговли); открытый интерес; удаленность страйка от текущей цены базового актива; число дней до экспирации опциона.
- Конкретный алгоритм, закладываемый в вычисление такой функции и глубина истории, по которой усредняются дневные объемы, могут быть разными. Например, сюда может быть заложен прогноз роста объемов торгов опционами при приближении даты экспирации, а также при приближении цены базового актива к страйку опциона.
- В качестве альтернативного подхода можно моделировать объем исполнения заявки как случайную величину с заданным заранее законом распределения, зависящим от тех же переменных (объем спроса и предложения, усредненный дневной объем, открытый интерес, величина спреда).
- При моделировании объема исполнения необходимо также учитывать, что ордер, генерируемый системой бэкестинга должен быть кратным величине стандартного лота. Если в теории опцион может рассматриваться как одна ценная бумага, то на биржах опционы торгуются в виде стандартизированных лотов, размер которых определяется установленным биржей множителем. Обычно один лот опционов на американские акции равен 100, на опционы на фьючерс S&P 500 E-Mini один лот равен 50, один лот на опционы на фьючерсы на VIX равен 1000,

и т. д. Такой множитель является обязательным элементом опционной базы данных. В силу указанной дискретности объемы открываемых позиций должны быть величинами, кратными лотам. Этого можно добиться либо на этапе формирования ордера, либо в процессе его исполнения.

### 5.3.2. Моделирование цены

В условиях недостаточной ликвидности лимитный ордер может быть исполнен не полностью (что выражается в более низком объеме исполнения по сравнению с объемом ордера), однако цена его не может быть хуже заявленного лимита. Противоположная ситуация наблюдается в случае рыночного ордера — объем исполнения, как правило, соответствует заявленному, зато цена исполнения может оказаться гораздо хуже той, которая существовала на рынке в момент генерирования сигнала на открытие позиции. Такое явление известно под названием «проскальзывание» (slippage).

Для того чтобы смоделировать цену исполнения, необходимо ввести в систему бэкстестинга параметр, выражающий величину проскальзывания. Так же как и в случае с моделированием объема исполнения лимитного ордера, этот параметр представляет собой функцию, значение которой зависит от следующих аргументов: среднесуточный объем; величина спреда между ценой спроса и предложения; удаленность страйка от текущей цены базового актива; число дней до экспирации. Такой набор аргументов объясняется тем, что в большинстве случаев величина проскальзывания тем меньше, чем выше дневной объем сделок и чем меньше величина спреда. Ликвидность опционов тем выше (соответственно, проскальзывание меньше), чем ближе цена базового актива к страйку и чем меньше дней остается до истечения опционов.

При разработке стратегий, ориентированных на торговлю высоколиквидными опционами со страйками «около денег» и близкими датами экспирации, проскальзыванием можно пренебречь. При моделировании таких ситуаций объем позиций, открываемых в течении заданного промежутка времени по каждому контракту, не должен превышать определенную долю от среднесуточного оборота. Величина промежутка времени и доли от оборота являются параметрами бэкстестинга и должны задаваться разработчиком стратегии исходя из реалий рынка, на котором он работает. Если считать проскальзывание нулевым, то при использовании рыночных ордеров

в качестве цены покупки и продажи можно принимать худшую сторону спреда (покупка по цене предложения (Ask), продажа по цене спроса (Bid)).

Помимо нулевого проскальзывания, можно также предположить, что в реальной торговле заявки на открытие и закрытие позиций могут исполняться по ценам лучшим, чем худшая сторона спреда. Система исполнения может быть автоматической (основанной на специализированных алгоритмах), а может быть поручена трейдеру. Возможны и различные промежуточные варианты, когда заявки исполняются человеком, использующим различные вспомогательные алгоритмы. В зависимости от квалификации трейдера или от эффективности применяемых алгоритмов, система исполнения может быть способна исполнять ордера по ценам, находящимся внутри спреда.

Такую возможность можно учесть в бэктестинге с помощью параметра  $\mu$ , принимающего значения от 0 до 1. При  $\mu = 0$  покупка происходит по цене Ask, а продажа — по цене Bid (то есть реализуются худшие цены исполнения). При  $\mu = 1$  реализуются лучшие цены исполнения — покупка по цене Bid и продажа по цене Ask. В общем случае:

$$\begin{aligned} \text{sell price} &= \mu \cdot \text{Ask} + (1 - \mu) \cdot \text{Bid}, \\ \text{buy price} &= \mu \cdot \text{Bid} + (1 - \mu) \cdot \text{Ask}, \end{aligned}$$

Поскольку на опционном рынке спред достаточно велик, влияние параметра  $\mu$  на результативность тестируемой стратегии весьма ощутимо. Оно может быть настолько существенным, что изменение величины  $\mu$  способно превратить убыточную стратегию в прибыльную (и наоборот)! Поэтому крайне важно выбрать реалистичное значение для этого параметра. Наилучшим решением представляется сбор эмпирических данных по реальному исполнению в прошлом торговых заявок, сгенерированных автоматизированной торговой системой. При наличии таких данных можно исследовать зависимость реальной цены исполнения от цены, на основании которой стратегия генерировала сигналы на открытие и закрытие позиций. На основании этой зависимости можно рассчитать величину параметра  $\mu$ , свойственную для конкретной системы исполнения торговых заявок.

### 5.3.3. Комиссии

Каждая сделка, смоделированная системой бэктестинга, учитывается на виртуальном брокерском счете и используется

в дальнейшем для оценки прибыльности стратегии. Помимо объема и цены исполнения, сделка характеризуется размером комиссии, уплачиваемой брокеру. Условия начисления комиссионных зависят от типа ценных бумаг, биржевых сборов, объемов и интенсивности торговли, индивидуальных условий брокера. Существует несколько вариантов начисления комиссионных за совершение операций. Обычно клиент брокера имеет возможность выбрать более удобный вариант исходя из характера собственных торговых операций. Наиболее распространенными и простыми в учете являются следующие варианты:

- ◇ комиссия пропорциональна числу проданных или купленных бумаг;
- ◇ комиссия пропорциональна сумме сделки;
- ◇ фиксированная комиссия, назначаемая за период времени (например, месяц) и независящая от объема операций.

Ставки комиссионных, как правило, стабильны в широких пределах, но тем не менее имеют свои минимальные и (иногда) максимальные границы и могут быть различными в зависимости от типа ценных бумаг. В любом случае конкретные значения ставок являются численными параметрами системы бэктетинга, и их значения фиксируются для каждой исследуемой стратегии.

В опционных стратегиях комиссионные могут быть очень высокими и в отдельных случаях могут поглощать до 50% от прибыли стратегии. Это происходит по целому ряду причин. Во-первых, в отличие от позиции по акциям или фьючерсам, опционная позиция часто состоит из целого набора инструментов (если речь идет о комбинации), каждый из которых представляет собой отдельную бумагу, для которой нужно выполнять отдельную торговую операцию (комиссии могут иметь минимальную сумму по каждой операции). Во-вторых, опционная позиция во многих случаях приводит в последствии к созданию позиции по базовому активу, закрытие которой также требует уплаты комиссионных. Поэтому в системе бэктетинга необходимо предусмотреть возможность анализа устойчивости перформанса стратегии к изменению ставки комиссионных.

#### **5.4. Построение надежной системы тестирования**

При построении системы бэктетинга разработчиком решаются две основные задачи: всесторонняя оценка прибыльности тестируемой стратегии (этой теме посвящен раздел 5.5) и оценка

вероятности того, что прибыльность, установленная на исторических данных, будет сохраняться в будущей реальной торговле. На самом деле оценить такую вероятность в терминах формальной теории вероятности не представляется возможным. Поэтому правильнее будет сформулировать вторую задачу разработчика как максимизацию вероятности того, что показатели стратегии не будут существенно ухудшаться при ее использовании в реальной торговле.

Для того чтобы создать надежную систему тестирования, необходимо опираться на следующие взаимосвязанные принципы:

- ◇ обоснованное соотношение исторического периода, на котором производится оптимизация стратегии (in-sample period), и периода непосредственного тестирования стратегии (out-of-sample period);
- ◇ возможность повторных оптимизаций, осуществляемых по мере продвижения стратегии по ценовой истории (адаптивная оптимизация);
- ◇ адекватные средства предотвращения заоптимизированности (overfitting);
- ◇ специальные механизмы тестирования устойчивости (robustness) системы тестирования.

#### **5.4.1. *In-sample* оптимизация и *out-of-sample* тестирование**

Для организации бэктестинга период, охваченный доступной разработчику базой исторических данных, разбивается на две части. В простейшем случае — это два периода: период настройки и оптимизации стратегии  $\tau^s$  (in-sample) и период проверки и тестирования стратегии  $\tau^o$  (out-of-sample). Взаимное расположение in-sample и out-of-sample периодов может быть разным. Период  $\tau^s$  может предшествовать периоду  $\tau^o$ , или наоборот. Непрерывность периодов также не является обязательной.

Период  $\tau^s$  служит для построения стратегии. На нем производится тестирование базовой идеи, определение совокупности настраиваемых и фиксируемых параметров, поиск оптимальных значений параметров. Для этого используются различные показатели качества стратегии и техники оптимизации. После выбора окончательного варианта стратегии, ее работоспособность проверяется прогонкой на интервале  $\tau^o$ , который не использовался при построении стратегии. На нем измеряются те же показатели качества, которые использовались при разработке стратегии, а также другие показатели, выражающие в разных формах ее доходность, риск и стабильность работы.



При сохранении значений показателей на приемлемом уровне делается предположение о том, что стратегия достаточно устойчива и что в будущем она способна сохранять свою эффективность.

Чем больше протяженность периода, на котором производится оптимизация стратегии, тем больше вероятность того, что в этот период попадут различные фазы рынка. Основной проблемой исторических временных рядов является их нестационарность. В зависимости от настроений участников рынка, от экономической и политической ситуации наблюдаются разные закономерности поведения рынков. На рынке акций или фьючерсов принято выделять фазы восходящих и нисходящих трендов, а также периоды относительной стагнации цен без явно выраженных трендов. При работе на опционном рынке важное значение приобретают еще и фазы низкой и высокой волатильности.

Определенная стратегия может показывать разную эффективность в разные фазы рынка. Даже если не стремиться к построению универсальных стратегий, работающих в любых рыночных условиях, необходимо убедиться, что при смене фазы успешная стратегия не превратится в убыточную. Увеличение длины периода  $t^5$  повышает вероятность захвата как можно большего разнообразия рыночных фаз, тем самым повышая устойчивость стратегии к изменяющимся рыночным условиям. Соответственно, результаты настройки стратегии на более протяженном периоде истории являются более надежными. С другой стороны, чем короче период, используемый для оптимизации, тем лучше эта стратегия будет настроена на рыночные тенденции, преваляровавшие на рынке в последнее время. Такая оптимизация при прочих равных условиях будет более стабильной. Таким образом, решение о выборе длины исторического периода, используемого для оптимизации, является продуктом компромисса между надежностью и стабильностью.

Применительно к опционным стратегиям существует ориентир, с помощью которого можно найти компромисс между надежностью и стабильностью. Таким ориентиром является средневзвешенный (по объемам позиций) интервал времени, остающийся до истечения опционов. В общем виде можно утверждать, что чем больше времени остается до экспирации, тем более продолжительным должен быть период истории, на котором производится оптимизация. Например, если стратегия ориентирована на позиции, создаваемые из опционов, до истечения

которых остается от двух до 20 дней, то период истории для оптимизации может быть значительно короче, чем для стратегии, основанной на торговле долгосрочными опционами (LEAPS).

Продолжительность периода тестирования не может быть меньше времени, остающегося до истечения опционов. Можно предложить следующее правило:  $\tau^s$  должен включать не менее 10 полных неперекрывающихся циклов экспирации. Например, если средневзвешенный период времени, остающийся до истечения опционов, составляет 22 рабочих дня, то минимальная протяженность  $\tau^s$  должна быть не меньше 220 дней. Такой расчет должен корректироваться в зависимости от среднего количества открываемых позиций. Чем больше количество производимых стратегией операций, тем более достоверной будет статистика прибыльности и тем более короткий период  $\tau^s$  может являться приемлемым.

#### 5.4.2. Адаптивная оптимизация

В алгоритм стратегии можно включить процедуру адаптивной оптимизации. Такая процедура реализуется с помощью скользящего окна оптимизации. Для формализованного описания процедуры адаптивной оптимизации воспользуемся параметрическим описанием стратегии  $S(P)$ , где  $P$  обозначает вектор значений параметров, определяющих стратегию. Обозначим через  $\tau(T) = [T - \Delta t + 1, T]$  интервал истории, заканчивающийся в определенный момент времени  $T$  и имеющий протяженность  $\Delta t$  дней (или других тайм-фреймов). При движении точки  $T$  из прошлого в будущее интервал  $\tau(T)$  также двигается вслед за  $T$ . Предположим, что для данной стратегии определен алгоритм оптимизации  $A$ , который для интервала истории  $\tau$  путем оптимизации вырабатывает вектор параметров  $P^*(T) = A(\tau(T))$ . Через  $l$  обозначим расстояние между моментами оптимизации, а через  $T_0$  — начальный момент времени. Тогда алгоритм моделирования торговли с адаптивной прогонкой будет выглядеть так. В моменты времени  $T_n = T_0 + nl$  (где  $n$  — номер шага адаптации, пробегающий значения  $n = 1, 2, 3, \dots, n_{\text{last}}$ ), включается алгоритм оптимизации  $A$ , вырабатывающий новые значения параметров  $P^*(T_n) = A(\tau^0(T_n))$ . Стратегия  $S(P^*(T_n))$  торгует на следующем за  $T_n$  интервале времени  $[T_n + 1, T_{n+1}]$ , после чего выполняется новый шаг адаптации и последующей торговли.

Фактически в результате введения адаптивного механизма исходная стратегия  $S(P)$ , изначально обладавшая комплексом параметров  $P$ , превращается в сложную стратегию, представляющую

собой последовательность  $\{S(P^*(T_0)), S(P^*(T_1)), \dots, S(P^*(T_n)), \dots\}$ . В сложной стратегии к исходным параметрам добавляются два новых параметра  $l$  и  $\Delta t$ , которые также могут быть подвергнуты процедуре оптимизации (подбору наилучших значений этих параметров). Бэктестинг стратегии, включающей периодическую реоптимизацию, может быть оценен (также как бэктестинг исходной стратегии) с помощью стандартных показателей эффективности, по которым можно принимать решение о применимости адаптивной оптимизации в каждом конкретном случае.

Адаптивная оптимизация во многих случаях позволяет строить стратегии, более устойчивые по отношению к смене фаз рынка. Однако необходимо помнить, что адаптивная оптимизация не устраняет проблему заоптимизированности стратегии, поскольку является ничем иным, как такой же оптимизацией, но с более сложной структурой. Более того, использование адаптаций в системе бэктестинга неизбежно приводит к увеличению числа оптимизируемых параметров, что, в свою очередь, может способствовать увеличению риска заоптимизированности (см. раздел 5.4.3). Тем не менее наш опыт применения адаптивной оптимизации подсказывает, что, если стратегия тестируется на достаточно большом интервале истории и генерирует достаточное количество сигналов на открытие позиций, ее будущая устойчивость более вероятна, чем в случае оптимизации на неподвижном историческом окне.

#### **5.4.3. Проблема заоптимизированности (overfitting)**

Чрезмерная оптимизация параметров приводит к тому, что алгоритмы многих торговых стратегий демонстрируют высокие показатели эффективности на фиксированном участке прошлой истории. При этом показатели этих же стратегий могут существенно ухудшаться при попытке их применения к продолжению ценового ряда. Применительно к бэктестингу данная проблема известна как проблема заоптимизированности (overfitting, или curvefitting). Риск заоптимизированности неизбежно возникает даже для относительно простых стратегий, поскольку любой торговый алгоритм невозможен без наличия явных или неявных параметров. Для более сложных стратегий этот риск возрастает многократно.

В общем виде можно утверждать, что вероятность заоптимизированности прямо пропорциональна количеству степеней свободы, имеющихся в системе бэктестинга. При тестировании стратегий, ориентированных на торговлю акциями и фьючерсами,

число степеней свободы приблизительно равно количеству параметров, используемых при оптимизации стратегии. Для опционных стратегий количество степеней свободы возрастает за счет того, что, помимо параметров, относящихся непосредственно к торговому алгоритму, существует множество параметров, связанных с формированием опционных позиций. Каждая стратегия оперирует определенным типом комбинаций, который описывается с помощью набора параметров. К этим параметрам могут относиться диапазон допустимых страйков, допустимый период времени до истечения опционов, глубина горизонта истории, используемого для расчета исторической волатильности, и многие другие. Поэтому для опционных стратегий проблема заоптимизированности стоит более остро, чем для стратегий, торгующих простыми активами.

- К сожалению, не существует способа полностью нейтрализовать риск заоптимизированности. Однако частичное решение этой проблемы можно получить, соблюдая следующие общие принципы.
- В качестве основного средства борьбы с проблемой заоптимизированности обычно используется так называемый *walk-forward* анализ. Эта методика, заключающаяся в разделении исторических временных рядов на периоды оптимизации (*in-sample*) и тестирования (*out-of-sample*), была описана в разделе 5.4.1. Основная идея заключается в том, что для бэк-тестинга используются данные, которые не применялись при создании и настройке стратегии. Необходимо, однако, подчеркнуть, что хорошие показатели стратегии, полученные на *out-of-sample* периоде, не доказывают, что стратегия не подвержена проблеме заоптимизированности. Объяснить это на первый взгляд нелогичное утверждение можно с помощью простых рассуждений. Предположим, что разработчик ставит перед автоматизированной системой следующую задачу: подобрать такие значения для параметров стратегии, что бы ее целевая функция (или функции) имела удовлетворительное значение на *in-sample* периоде и это значение ухудшалось бы на *out-of-sample* периоде не более, чем на заданную величину. В главе 2 мы видели, что в процессе оптимизации (на *in-sample* периоде) может быть получено множество комбинаций параметров с приемлемым значением целевой функции (так называемые зоны оптимальности). Поэтому вполне может оказаться, что хотя бы один вариант из этого множества даст удовлетворительные результаты при *out-of-sample* тестировании. Это означает, что хорошие результаты *walk-forward* анализа могут быть результатом простого

подбора (заоптимизированности), и скорее всего не сохранятся в будущем при реальной торговле.

При тестировании стратегии на незнакомых для нее отрезках истории необходимо контролировать относительное число сделок. Эмпирическим путем можно определить допустимые пропорции между числом сделок и числом параметров стратегии. Важен принцип, согласно которому, чем больше параметров используется при оптимизации, тем больше должно совершаться сделок, для того что бы можно было с высокой долей вероятности считать, что риск заоптимизированности минимизирован. Это правило является простым вероятностным законом (если считать, что работа стратегии порождает случайную выборку сделок).

Если стратегия неустойчива (небольшие изменения значений параметров существенно снижают показатели стратегии), то с большой долей вероятности можно утверждать, что данная стратегия заоптимизирована (различные аспекты устойчивости были подробно рассмотрены в главе 2). Чтобы убедиться в устойчивости стратегии относительно оптимальных значений параметров, можно провести два параллельных исследования. Первое — рассмотреть изменения показателей стратегии в окрестности оптимального вектора параметров. Второй способ (не заменяющий первый) — исследовать поведение стратегии на слегка модифицированных исторических данных, полученных из исходных с помощью случайных малых возмущений. Устойчивость стратегии к небольшим изменениям значений параметров и временных рядов указывает на небольшую величину риска заоптимизированности.

## 5.5. Оценка прибыльности

Оценка прибыльности стратегии является многокритериальной задачей. Не существует единого показателя, с помощью которого можно было бы выразить эффективность стратегии или сравнить ее с другой стратегией. Вместо этого существует целый ряд универсальных показателей, используемых при бэк-тестинге любых стратегий, независимо от применяемых в торговле инструментов. Хотя эти показатели общеизвестны, их применение и методика расчета для опционных стратегий имеет свою специфику. Помимо универсальных показателей, существуют также показатели, применяемые исключительно для оценки опционных стратегий.

### 5.5.1. Единичное событие и элементарный период времени

Для расчета показателей эффективности стратегий необходимо дать строгое определение единичного события и элементарного периода времени, для которых производится оценка прибыльности стратегии.

- В качестве единичного события может быть принята каждая отдельно взятая сделка по определенному опционному контракту либо совокупность сделок, относящихся к определенному контракту и исполненных в течение одного дня. Кроме того, единичным событием может считаться совокупность всех сделок, исполненных в течение одного дня для построения определенной опционной комбинации. При торговле обычными инструментами в качестве единичного события, как правило, используется каждая отдельно взятая сделка. Выбор единичного события для стратегий, ориентированных на торговлю опционами, зависит от особенностей стратегии. В большинстве случаев при бэкестинге опционных стратегий оценивается не каждая отдельная сделка, а совокупность сделок, относящихся к одной комбинации или к одному базовому активу.
- При определении элементарного периода времени существенным фактором является то, что итог многих сделок, связанных с опционами может быть определен только на момент их экспирации. Многие опционные стратегии основываются на выборе торговых вариантов с помощью критериев, оценивающих опционы в момент их покупки или продажи, ориентируясь на дату экспирации. Это связано не только с удобством применения математического аппарата ценообразования опционов, но и большей определенностью цен опционов в момент экспирации. Традиционным временем экспирации опционов на CBOE (основной опционной бирже) является третья пятница каждого месяца. Поэтому для стратегий, торгующих на рынке опционов на акции, возникает естественная месячная периодичность измерений прибыльности, связанная со стандартным временем экспирации. Для таких стратегий элементарный период времени составляет один месяц.
- Для стратегий, работающих с опционами далеких серий, момент экспирации уже не будет играть такую ключевую роль, как для опционов ближайших серий. В этом случае возрастает роль других временных ориентиров, использование которых более обоснованно для промежуточных оценок текущего портфеля. В последнее время вводятся биржами и получают растущую

популярность опционы с недельной периодичностью экспираций. Для стратегий, работающих с ними, удобным будет недельный элементарный период времени.

Стратегии с применением техник динамического хеджирования могут сопровождаться большой интенсивностью сделок с ликвидным базовым активом и редкими сделками по опционам. В таких стратегиях с большой частотой сделок и моментов принятия решений удобным временем оценки показателей стратегии могут быть дневные (и даже более дробные) периоды времени.

### 5.5.2. Обзор показателей прибыльности стратегии

Предположим, что требуется оценить эффективность стратегии на интервале времени  $\tau = [T_0, T_N]$  с последовательностью промежуточных моментов времени  $(T_0, T_1, \dots, T_N)$ . Для простоты будем измерять время в днях. Тогда длина интервала  $\tau$  составит  $T_N - T_0$  дней или в годах примерно  $\Delta T = (T_N - T_0)/A$ , где  $A = 365,25$  календарных дней. Обозначим через  $(E_0, E_1, \dots, E_N)$  последовательность значений величины капитала, который оценивается в каждый из моментов времени  $(T_0, T_1, \dots, T_N)$  по заложенному в систему бэкстестинга алгоритму. Обычно для оценки капитала используется ликвидационная стоимость всех позиций стратегии, рассчитанная по ценам закрытия соответствующего дня, включая свободные денежные средства. Итоговый доход стратегии составит величину  $\Delta E = E_N - E_0$ .

#### Показатели доходности

Будем рассматривать два вида доходности, соответствующих двум подходам к управлению капиталом (имеется ввиду первый уровень системы управления капиталом, см. главу 4), — с постоянной суммой, инвестируемой в стратегию в каждый период времени, и с реинвестицией.

Первый подход удобен для анализа среднего результата серии однотипных портфелей. Этот случай хорошо подходит для стратегии, основанной на продаже волатильности незадолго до экспирации, когда каждая экспирация порождает один отдельный портфель. При этом для каждого элементарного периода времени используется одна и та же сумма  $E_0$ . Для случая управления капиталом с постоянной суммой инвестиций будем пользоваться линейной годовой доходностью:

$$r^l = \frac{1}{\Delta T} \frac{E_N - E_0}{E_0}.$$

Эта величина соответствует средней арифметической доходности указанной серии, приведенной к годовому масштабу.

Второй подход к управлению капиталом более удобен для сравнения результатов стратегии с эталонным доходом типа непрерывно начисляемой процентной ставки (например, безрискового актива) или с определенным индексом (например, S&P 500). В таком случае следует пользоваться экспоненциальной годовой доходностью:

$$r^{\circ} = \frac{1}{\Delta T} \ln \left( \frac{E_N}{E_0} \right).$$

Экспоненциальная доходность соответствует средней геометрической доходности, приведенной к годовому масштабу.

Моменты времени, когда производятся измерения капитала, будем связывать с моментами экспирации опционов. В этом случае мы приходим к серии месячных прибылей и убытков. Пусть  $N$  — число месяцев в периоде, на котором производится бэк-тестинг стратегии. В линейном случае предполагается, что стартовый капитал каждого месяца равен  $E_{j-1}$ , а инвестируемый капитал всегда равен  $E_0$ . Тогда прибыль  $i$ -го месяца

$$p_i^l = E_i - E_{i-1}, \text{ средняя прибыль за месяц } p^l = \frac{E_N - E_0}{N}, \text{ средняя}$$

$$\text{доходность } r^l = \frac{p^l}{E_0}, \text{ доходность } i\text{-го месяца } r_i^l = \frac{E_i - E_{i-1}}{E_0}. \text{ В экс-}$$

поненциальном случае стартовый и инвестируемый капиталы для каждого месяца совпадают с конечным капиталом предыдущего месяца. О средней месячной прибыли говорить не имеет смысла, поскольку в каждом месяце инвестируется разная сумма. Доходность  $i$ -го месяца  $r_i^{\circ} = \frac{E_i - E_{i-1}}{E_{i-1}}$ , в качестве

средней доходности экспоненциального случая разумно принимать среднюю геометрическую доходность  $r^{\circ} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N r_i^{\circ}}$ .

Для наборов  $\{p_1^l, p_2^l, \dots, p_N^l\}$ ,  $\{r_1^l, r_2^l, \dots, r_N^l\}$  и  $\{r_1^{\circ}, r_2^{\circ}, \dots, r_N^{\circ}\}$  можно рассчитать простые статистики, имеющие непосредственное значение для оценки стратегии инвестором. Максимальная месячная прибыль  $profit_{\max}^l = \max_i \{p_i^l : p_i^l > 0, i = 1, 2, \dots, N\}$ , максимальная линейная месячная доходность  $return_{\max}^l = \max_i \{r_i^l : r_i^l > 0,$



$i = 1, 2, \dots, N$ ) и максимальная экспоненциальная месячная доходность  $return_{\max}^e = \max_i \{r_i^e : r_i^e > 0, i = 1, 2, \dots, N\}$  характеризуют один наиболее удачный месяц.

Противоположные по смыслу величины — максимальный месячный убыток в абсолютном и относительном (аналогично доходности) измерении — имеют большое значение, поскольку размеры этих величин могут оказаться неприемлемыми, и тогда такой вариант стратегии придется отвергнуть. Даже высокодоходная стратегия, имеющая на длительном интервале всего один убыточный месяц, может быть отвергнута, если этот убыток превышает определенную пороговую величину. Максимальный месячный убыток в абсолютном выражении имеет смысл только в линейном случае и определяется как  $loss_{\max}^l = -\min_i \{p_i^l : p_i^l < 0, i = 1, 2, \dots, N\}$ . Аналогично определяются относительные величины для линейного случая как  $relativeloss_{\max}^l = -\min_i \{r_i^l : r_i^l < 0, i = 1, 2, \dots, N\}$ , и для экспоненциального случая как  $relativeloss_{\max}^e = -\min_i \{r_i^e : r_i^e < 0, i = 1, 2, \dots, N\}$ .

Общепринятым показателем риска является стандартное отклонение доходностей, зафиксированных на интервале  $t$ . Чаще всего данный показатель рассматривается не сам по себе, а в совокупности со средней доходностью (см. ниже раздел, посвященный коэффициенту Шарпа).

Несложно также ввести и другие показатели: число прибыльных месяцев, число убыточных месяцев, средняя прибыль прибыльных месяцев, средний убыток убыточных месяцев, максимальное число прибыльных месяцев подряд, максимальное число убыточных месяцев подряд и т. п.

#### Максимальная просадка

Одним из наиболее популярных показателей риска автоматизированных торговых стратегий является максимальная просадка капитала. Просадка в момент времени  $T$  — это величина, равная разнице между текущим значением капитала  $E(T)$  и максимальным значением капитала на всем предшествующем интервале времени:  $DD(T) = \max_{t < T} E(t) - E(T)$ . Для интервала исследования стратегии  $t$  максимальная просадка вычисляется как  $MaxDD = \max_{T \in t} DD(T)$ .

С понятием просадки тесно связан показатель длительности просадки, измеряющий время, проходящее от момента установления локального максимума капитала до его пробития. Обозначим через  $t_{\max}$  момент установления максимального значения капитала, а через  $E(t_{\max})$  обозначим значение капитала в момент

$t_{\max}$ . Если в текущий момент времени  $T$  значение капитала превысило предыдущее максимальное значение, то есть  $E(T) > E(T_{\max})$ , то фиксируется продолжительность просадки как разница  $T - t_{\max}$ . Максимальную для стратегии продолжительность просадки можно рассматривать как дополнительный негативный показатель качества стратегии.

Приведенные два показателя — максимальная просадка капитала и максимальная длительность просадки — представляют собой наиболее важные в эмоциональном плане характеристики риска. Неприемлемые значения этих показателей в реальной торговле нередко служат причиной отказа от продолжения использования прибыльных стратегий. Между тем периодическое возникновение просадок является нормальным явлением для многих успешных стратегий. Следует отметить, что психологический эффект, испытываемый инвестором, зависит от того, насколько успешна была стратегия до начала просадки. Но с точки зрения бэктестинга, большая просадка плоха независимо от момента ее возникновения. Если стратегия допускает просадку, то теоретически она может начаться непосредственно после запуска реальной торговли. Это может полностью разрушить торговый счет.

Основной недостаток данных показателей заключается в том, что они выражают величину и длительность возможных максимальных убытков, но при этом никак не оценивают вероятность наступления такого события. Между тем убыток определенной величины, зафиксированный при тестировании стратегии на годичном периоде истории, указывает на гораздо больший риск, чем если такой же убыток обнаруживается при тестировании на 10-летней базе исторических данных. Поэтому степень рискованности стратегии, оцениваемую на основании максимальной просадки, следует взвешивать по протяженности периода тестирования.

### Коэффициент Шарпа

Поскольку существует прямая положительная связь доходности и риска, очень удобными являются показатели, максимизация которых позволяет решать одновременно две задачи — максимизацию доходности и снижение риска. На интервале тестирования стратегии разработчик получает выборку из  $N$  значений доходности. Чем ближе элементы выборки друг к другу, и, следовательно, к их среднему значению, тем ровнее и стабильнее выглядит кривая роста капитала. Стремление к одновременной

максимизации средней доходности и минимизации стандартного отклонения доходностей реализуется путем использования коэффициента Шарпа, широко применяемого практически во всех системах бэктестинга.

В оригинале коэффициент Шарпа выглядит как отношение между математическим ожиданием доходности и ее стандартным отклонением. Причем доходность измеряется за вычетом некоей базовой доходности, например ставки безрискового актива. Мы предпочитаем использовать более практичный вариант коэффициента, пренебрегающий базовой доходностью (использование базовой доходности лишь усложняет вычисления, не принося дополнительной пользы при выборе наилучшей стратегии).

Коэффициент Шарпа для оценки стратегии в системе бэктестинга будем оценивать как  $SR = r/\sigma$ , где  $r$  — средняя доходность серии из  $N$  доходностей,  $\sigma$  — среднеквадратичное отклонение этих доходностей. В экспоненциальном случае мы применяем среднюю геометрическую доходность  $\{r^g\}$ , а в линейном случае — среднюю арифметическую доходность  $\{r^l\}$ . Среднеквадратичное отклонение вычисляется по стандартной формуле

$$\sigma = \frac{1}{N-1} \sqrt{\sum_{i=1}^N [r_i^d - r^d]^2}, \text{ где } d = l \text{ или } d = e.$$

В итоге получается безразмерный показатель, не зависящий от длительности периода бэктестинга. На наш взгляд, коэффициент Шарпа — это один из самых удобных показателей бэктестинга.

Главным недостатком коэффициента Шарпа является то, что в нем никак не учитывается порядок, в котором чередуются прибыльные и убыточные месяцы. Из формул, применяемых для его вычисления, видно, что мы можем перемешать слагаемые в любом порядке без изменения результата. Это значит, что один и тот же коэффициент Шарпа может быть как у стратегии с равномерно растущим капиталом, так и у стратегии с неприемлемой величиной максимальной просадки. В хорошей стратегии не должно быть больших последовательностей следующих друг за другом убыточных месяцев. Эта проблема решается совместным использованием коэффициента Шарпа и описанных выше показателей риска (в частности, максимальной просадки).

### Profit/Loss-фактор

Часто при бэктестинге торговых стратегий используется показатель, называемый profit/loss-фактор, рассчитываемый как отношение суммы прибылей всех прибыльных сделок к сумме убытков всех убыточных сделок. Считается, что для эффективной стратегии profit/loss-фактор должен быть не менее 2. Для стратегий, ведущих торговлю опционами, такой подсчет соотношений убытков и прибылей имеет свою специфику. Данный показатель полезен и информативен для оценки стратегий, в которых сделки производятся последовательно одна за другой и имеют однотипный характер. Например, в простейшем случае торговли одной акцией — это последовательность открытий и закрытий позиций. Тогда profit/loss-фактор вполне адекватно отражает качество генератора сигналов на покупку и продажу. В опционной торговле этот показатель имеет для каждой стратегии свой смысл, поскольку само множество сделок не является однородным.

Поясним сказанное на двух примерах. Рассмотрим классическую стратегию торговли волатильностью с помощью дельта-нейтральной хеджирования. Простейший вариант реализации такой стратегии заключается в покупке (или продаже) некоего опциона, после чего производятся многократные покупки и продажи его базового актива в разных количествах (будем называть всю совокупность таких сделок «игрой»). В такой ситуации нет никакого смысла анализировать структуру прибылей и потерь по отдельным сделкам. Смысл имеет только итоговый результат всей игры, определяющийся после закрытия отдельных позиций. Поэтому, вместо результатов единичных сделок при подсчете profit/loss-фактора, необходимо использовать суммы всех прибыльных и убыточных игр.

Второй пример связан со стратегией продажи волатильности. Предположим, что алгоритм стратегии предусматривает следующий порядок действий. Каждый день для каждого базового актива строятся комбинации стрэнгл или стрэддл из одного короткого опциона колл и одного короткого опциона пут «около денег». Все множество комбинаций упорядочивается по специальному критерию, и определенное количество комбинаций продается в соответствии с принятым методом управления капиталом. Как и в предыдущем примере, оценку структуры прибылей и убытков такой стратегии не имеет смысла рассчитывать по отдельным сделкам. В этом случае можно оперировать либо прибылями и убытками отдельных комбинаций, либо результатом

всей позиции, образованной в один день, либо результатами торговли за один экспирационный цикл.

Для того чтобы использование profit/loss-фактора было корректным, необходимо правильно определить единичное событие (см. раздел 5.5.1). В первом примере в качестве единичного события должна быть принята вся совокупность сделок, относящихся к определенному базовому активу. Во втором случае единичным событием может считаться совокупность всех сделок, исполненных в течение одного дня (или всего экспирационного цикла), для построения определенной опционной комбинации.

### Консистентность

Стратегия является консистентной (стабильной), если прибыльные и убыточные сделки не сконцентрированы в определенные периоды, а распределены более-менее равномерно по всему периоду тестирования. При неравномерном распределении периоды роста капитала сменяются периодами падения, длительность и глубина которых определяется степенью этой неравномерности. В опционной торговле не всегда можно выделить четкую последовательность сделок, следующих одна за другой. Как правило, позиции, открытые в последовательные моменты времени, не закрываются в том же порядке. Поэтому для опционных стратегий понятие консистентности стратегии следует связывать с фактической кривой капитала (а не с отдельными сделками), получающегося в процессе бэкестинга.

Идеальная стратегия — это стратегия с постоянным доходом и нулевыми просадками, дающая прибыль на каждом элементарном отрезке времени. В линейном случае график ее капитала имеет вид прямой с наклоном, характеризующим ее доходность. В экспоненциальном случае графиком идеальной стратегии должен быть график экспоненты, показателем которой является нормированная доходность стратегии (если перейти к графику логарифма капитала, то мы получим все тот же прямолинейный вид, что и в предыдущем случае). Хорошим показателем стабильности является мера отклонения графика капитала (или логарифма капитала) от прямой.

Пусть последовательность  $X = \{X(T), T = T_0, T_0 + 1, \dots, T_N\}$  содержит серию измерений капитала или логарифма капитала на интервале прогонки  $t$ . Через крайние точки этой последовательности проходит прямая линия:  $y(T) = X(T_0) + \frac{X(T_N) - X(T_0)}{T_N - T_0}(T - T_0)$ . Мера

отклонения исходной последовательности от нее может быть задана как сумма квадратов:

$$\Phi[X, \tau] = \frac{1}{T_N - T_0 - 1} \sum_{T=T_0+1}^{T_N-1} [X(T) - y(T)]^2.$$

Чем меньше значение этого показателя, тем ближе вид кривой капитала стратегии к идеальному.

### 5.5.3. Пример бэкестинга опционной стратегии

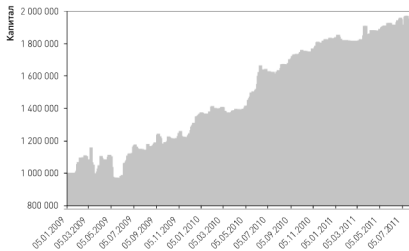
Рассмотрим в качестве примера результаты бэкестинга стратегии, основанной на продажах опционов на SPY и хеджировании позиции покупкой опционов на VIX. Стратегия использует следующий алгоритм: в заданный день до экспирации продается стрэнгл на SPY и покупается колл на VIX следующей серии в объемах, определяемых заложенным в стратегию алгоритмом управления капиталом. Короткая позиция выкупается в заданный день перед экспирацией. Длинный опцион на VIX сохраняется до экспирации. Параметры стратегии:

- ♦ день открытия позиции относительно ближайшей экспирации;
- ♦ день выкупа коротких опционов;
- ♦ соотношение объемов стрэнглов на SPY и коллов на VIX;
- ♦ доля капитала в текущей позиции;
- ♦ параметр, определяющий расстояние между страйками.

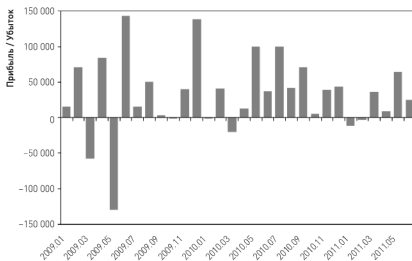
#### Визуальный анализ

Как правило, анализ результатов бэкестинга начинается с визуализации базовых показателей на графиках в виде кривых, изменяющихся во времени в процессе прогонки по интервалу  $\tau$ . Наиболее информативным является график капитала. На рис. 5.5.1 показан график, полученный в результате бэкестинга одного из вариантов стратегии. Мы выбрали один из лучших вариантов, дающий достаточно ровный и устойчивый рост капитала. Визуальный анализ графика указывает на то, что рассматриваемый вариант стратегии приемлем и заслуживает дальнейшего более детального изучения.

Обычно график капитала строится с ежедневными оценками (как показано на рис. 5.5.1). Это позволяет оценить внутримесячные колебания и просадки. Однако в случае опционных стратегий часто возникает необходимость представить доходность с привязкой к стандартным моментам экспирации. В таких случаях удобной формой представления является график, показывающий ежемесячные прибыли и убытки (если элементарный период времени составляет один месяц). На рис. 5.5.2 показан



**Рис. 5.5.1.** График капитала, полученный в результате бэкестинга опционной стратегии (см. описание в тексте) с постоянной суммой инвестируемого капитала (линейный вариант)



**Рис. 5.5.2.** Ежемесячные прибыли и убытки, зафиксированные в результате бэкестинга опционной стратегии (см. описание в тексте) с постоянной суммой инвестируемого капитала (линейный вариант)

график для стратегии, использованной в нашем примере. Такое представление доходности позволяет сразу увидеть, что из 31 месяца, охваченного периодом бэктестинга, большинство были прибыльными и только два месяца принесли существенный убыток. Хотя эти два сильно убыточных месяца пришлось на начальный период тестирования, они не привели к разорению стратегии, что является серьезным показателем ее высокой эффективности.

#### Анализ расчетных показателей

Ниже приведены расчеты различных показателей для линейного варианта стратегии (с постоянной суммой инвестируемого капитала). Некоторые показатели рассчитаны сразу для двух временных интервалов: месяцев (что соответствует экспирационным циклам) и дней (поскольку день приходится рассматривать как элемент времени, на котором необходима достаточная устойчивость к негативным рыночным событиям).

Период тестирования стратегии: 01.01.2009–31.07.2011 г.

Стартовый капитал:  $E_0 = 1\,000\,000$ .

Число календарных дней:  $d = 938$ .

Число торговых дней:  $t = 648$ .

Число месяцев:  $m = 31$ .

Суммарная прибыль:  $P = 1\,953\,594 - 1\,000\,000 = 953\,594$ .

Число лет:  $n = \frac{938}{365,25}$ .

Среднегодовая прибыль:  $\frac{P}{n} = \frac{953\,594 \cdot 365,25}{938} = 371\,322$ .

Линейная годовая доходность:  $L = 100 \cdot \frac{P/n}{E_0} = \frac{100 \cdot 371\,322}{1\,000\,000} = 37,13\%$ .

Средняя прибыль по месяцам:  $P_M = \frac{953\,594}{31} = 30\,761$ .

Среднеквадратичное отклонение месячных прибылей:

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{31} (P_{M_j} - 30\,761)^2}{30}} = 53\,563.$$

Коэффициент Шарпа для месячных данных:

$$Sharp_M = \sqrt{12} \cdot \frac{P_M}{\sigma_M} = \sqrt{12} \cdot \frac{30\,761}{53\,563} = 1,98.$$



Средняя прибыль по дням:  $P_D = \frac{953\,594}{648} = 1\,471,6$ .

Среднеквадратичное отклонение дневных прибылей:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{648} (P_{D_i} - 1471,6)^2}{647}} = 21\,119.$$

Коэффициент Шарпа для дневных данных:

$$\text{Sharp}_D = \sqrt{252} \cdot \frac{P_D}{\sigma_D} = \sqrt{252} \cdot \frac{1474,6}{21\,119} = 1,1.$$

**Максимальная просадка** состоялась 18.03.2009, когда текущий максимум капитала 1 157 537, установленный 11.03.2009, снизился до 818 733. Величина просадки составила 338 803.

**Длительность максимальной просадки** (то есть длина периода до установления нового максимального значения капитала) составила 78 дней. Она оказалась самой продолжительной на всем периоде тестирования.

**Доля прибыльных сделок** (сделкой считается совокупность всех торговых операций, относящихся к определенной комбинации, и выполненных в течении одного дня): 53,6%.

**Доля прибыльных месяцев:** 76,6%.

**Максимальное число прибыльных месяцев, следующих подряд:** девять месяцев.

**Максимальное число убыточных месяцев, следующих подряд:** два месяца.

**Среднее число прибыльных месяцев, следующих подряд:** 3,3 месяца.

**Среднее число убыточных месяцев, следующих подряд:** 1,2 месяца.

**Суммарный доход прибыльных сделок:** grossprofit = 2 684 032.

**Суммарный убыток убыточных сделок:** grossloss = 1 730 438.

**Profit/Loss-фактор, рассчитанный по отдельным сделкам:** grossprofit / grossloss = 1,55.

В данной стратегии, как и во многих других опционных стратегиях, Profit/Loss-фактор, рассчитанный по отдельным сделкам, не является полностью корректным (см. объяснения в разделе 5.5.2). Поэтому более информативным будет аналогичное отношение, рассчитываемое для прибылей и убытков отдельных месяцев. Сам алгоритм стратегии предусматривает подобный подход, поскольку динамически наращиваемая

позиция от первого дня торговли каждого месяца до закрытия коротких позиций перед экспирацией, является логичным единичным событием, подобно отдельной сделке в стратегиях с линейными инструментами (акциями, фьючерсами). Profit/Loss-фактор, рассчитанный на основании месячных данных, оказался значительно выше, чем тот же показатель, рассчитанный по отдельным сделкам:  $1\,176\,797 / 223\,203 = 5,3$ .

#### 5.6. Построение эффективной системы бэктестинга: вызовы и компромиссы

Первый вызов, с которым сталкивается разработчик при тестировании торговой системы, это необходимость поддержания базы исторических данных, содержащей максимально полную информацию для торгуемых стратегий и инструментов. Эта информация должна быть надежной, без неточностей и ошибок. Два требования к базе данных — полнота информации и надежность — в определенной степени противоречат друг другу. При стремлении включить в базу данных максимум информации, разработчик неизбежно сталкивается с проблемой контроля ее надежности. Соответственно, чем больше разнотипной информации подлежит накоплению, тем выше вероятность попадания в базу ошибочных и неточных данных. Поэтому при создании базы данных стремление к максимальной полноте накапливаемой информации должно регулироваться возможностями ее верификации.

Фильтрация нежелательных сигналов, производимая на основе различных индикаторов, является продуктом компромисса между стремлением к максимальной строгости фильтрации, с одной стороны, и стремлением не отбросить потенциально прибыльные торговые варианты, с другой стороны. Чем строже фильтрация, тем выше вероятность отказа от потенциальных торговых возможностей. Моделирование цены и объема исполнения сигналов также основано на компромиссе. Чем более консервативный подход используется при моделировании (объемы и цены исполнения хуже, чем те, которые использовались при генерировании сигналов), тем ниже оценочная эффективность стратегии и тем выше вероятность того, что результаты реальной торговли не окажутся хуже результатов бэктестинга.

Одним из самых трудноразрешимых компромиссов при создании системы бэктестинга является распределение исторического периода, покрываемого базой данных, между in-sample

и out-of-sample периодами. Чем больше in-sample период, тем меньше данных остается для out-of-sample периода (и наоборот). В общем виде можно утверждать, что разработчик должен стремиться к максимально возможному увеличению протяженности out-of-sample периода. Это позволяет протестировать стратегию в разных фазах рынка, используя данные, незадействованные при оптимизации стратегии. Однако удлинение out-of-sample периода неизбежно ведет к сокращению in-sample периода. Это чревато тем, что оптимизация стратегии будет недостаточно надежной, поскольку in-sample период не будет включать все возможные типы рыночной динамики. Главный вызов, стоящий перед разработчиком, заключается в опасности заоптимизировать стратегию. Эта проблема обостряется тем больше, чем больше параметров используется при создании стратегии. Соответственно, уменьшить вероятность заоптимизированности можно путем сокращения количества оптимизируемых параметров. Однако и в этом случае необходим разумный компромисс, поскольку чрезмерное сокращение параметров приводит к тому, что стратегия утрачивает свою гибкость. В результате может быть упущен потенциально прибыльный вариант торговой стратегии.



**Американский опцион.** Вид опционного контракта, предоставляющий покупателю опциона право купить или продать базовый актив в любой момент до даты исполнения.

**Bega.** Частная производная первого порядка стоимости опциона по волатильности базового актива (величина, на которую изменится стоимость опциона при изменении волатильности на 1 пункт). Этот показатель играет большую роль в динамических стратегиях торговли волатильность.

**Внутренняя стоимость.** Составляющая опционной премии, равная для опциона колл разности текущей цены базового актива и страйка, если величина этой разности положительная, и — нулю в противном случае. Для опциона пут внутренняя стоимость равна разности страйка и текущей цены базового актива, если величина этой разности положительна, и — нулю, если разность отрицательна.

**Временная стоимость.** Часть опционной премии, равная разности опционной премии и внутренней стоимости. Временная стоимость представляет премию за риск, уплачиваемую покупателями опционов продавцам.

**Временной распад.** Процесс снижения *временной стоимости* опционов по мере приближения *даты исполнения*. Чем ближе дата исполнения, тем быстрее протекает процесс распада.

**Гамма.** Частная производная второго порядка стоимости опциона по цене базового актива (величина, на которую изменяется дельта при изменении цены базового актива на 1). *Гамма* показывает, является ли скорость изменения дельты возрастающей, убывающей или постоянной.

**Греки.** Показатели, используемые для оценки риска опционов и их комбинаций и выражающие, насколько изменится стоимость опциона в случае изменения определенной переменной на один пункт. В качестве переменных могут выступать цена базового актива, волатильность, время и процентная ставка. *Греки* обычно вычисляются аналитически как частные производные стоимости опциона по заданной переменной. Для нахождения производной используется определенная модель ценообразования опционов (например, формула Блэка-Шоулза). Соответственно, эти показатели можно интерпретировать как скорость изменения стоимости опциона в ответ на изменение заданной переменной.

**Дата исполнения (дата истечения, дата экспирации).** Зафиксированная в контракте дата, до наступления которой (см. *американский опцион*) или по наступлению которой (см. *европейский опцион*)

покупатель опциона может реализовать свое право купить или продать базовый актив.

**Дельта.** Частная производная первого порядка стоимости опциона по цене базового актива (величина, на которую изменяется стоимость опциона при изменении цены базового актива на 1). Дельта опциона колл всегда положительна, а опциона пут — отрицательна.

**Европейский опцион.** Вид опционного контракта, предоставляющий покупателю опциона право купить или продать базовый актив, но не ранее наступления даты исполнения.

**Историческая волатильность.** Статистический показатель, выражающий меру изменчивости базового актива на определенном временном интервале. Обычно рассчитывается, как стандартное отклонение относительных приращений исторических цен базового актива, нормированное на квадратный корень из времени (существует множество вариантов расчета, но этот является самым простым и распространенным). Сама по себе *историческая волатильность* используется как основной показатель риска, ассоциированного с определенным финансовым инструментом. В ценообразовании опционов — это ключевой элемент, входящий во все без исключения модели.

**Комбинация.** Совместно анализируемое сочетание любого количества разных опционов, относящихся к одному базовому активу. Опционы входящие в комбинацию могут быть длинными (купленными) и (или) короткими (проданными), могут иметь одинаковые или разные даты истечения и цены исполнения. В простейшем случае комбинация может состоять из единственного опциона.

**Маржевые требования.** Минимальный размер собственного капитала, требуемый для поддержания определенной опционной позиции. Устанавливается государственными регулирующими органами и часто ужесточается биржей и (или) брокером.

**Опцион колл.** Стандартизированный контракт, предоставляющий покупателю опциона право, но не накладывающий на него обязательств, купить определенный базовый актив в определенный момент времени в будущем (см. дата исполнения) по заранее определенной цене (см. *цена исполнения*).

**Опцион пут.** Стандартизированный контракт, предоставляющий покупателю опциона право, но не накладывающий на него обязательств, продать определенный базовый актив в определенный момент времени в будущем (см. дата исполнения) по заранее определенной цене (см. *цена исполнения*).

- Опционы в деньгах.** Опционы, цена исполнения которых далека от текущей цены базового актива (для опционов пут цена исполнения находится выше, а для опционов колл — ниже цены базового актива), внутренняя стоимость которых велика, а *временная стоимость* относительно мала.
- Опционы вне денег.** Опционы, цена исполнения которых далека от текущей цены базового актива (для опционов пут цена исполнения находится ниже, а для опционов колл — выше цены базового актива), *внутренняя стоимость* которых равна нулю, а *временная стоимость* относительно невелика.
- Опционы около денег.** Опционы, цена исполнения которых близка к текущей цене базового актива. *Внутренняя стоимость* таких опционов невелика, а *временная стоимость* относительно высока.
- Платежная функция (профиль прибыли).** Зависимость стоимости отдельного опциона или комбинации от цены базового актива, рассчитанная на определенную дату в будущем. Платежная функция комбинации, состоящей из опционов с одинаковой датой исполнения, рассчитанная на дату исполнения, представляет собой ломаную линию. Если расчет производится на дату, предшествующую исполнению, или, если в комбинацию входят опционы с разными датами исполнения, платежная функция будет иметь вид кривой линии.
- Подразумеваемая волатильность.** Показатель волатильности, рассчитанный не на базе исторических цен базового актива (см. историческая волатильность), а выведенный из текущих рыночных цен опционов. Модели ценообразования используют прогнозные значения волатильности для расчета теоретической (справедливой) стоимости опционов. В качестве него в формулу для вычисления цены опциона можно подставить значение исторической волатильности. Если в модельную формулу подставить рыночную цену опциона (считая ее справедливой) и решать обратную задачу, то можно вычислить волатильность, «подразумеваемую» данной стоимостью опциона. *Подразумеваемая волатильность* выражает ожидания рынка относительно будущей изменчивости цен базового актива. Кроме того, этот показатель является общепризнанным мерилем дивергенции опционов. Зачастую расхождения в величинах подразумеваемой и исторической волатильности создают благоприятные возможности для реализации многих опционных стратегий.
- Премия.** Стоимость опциона, уплачиваемая продавцу покупателем. На рынке опционов на акции премия обычно котируется

из расчета на одну акцию, в реальности же стандартный контракт состоит, как правило, из опционов на 100 акций.

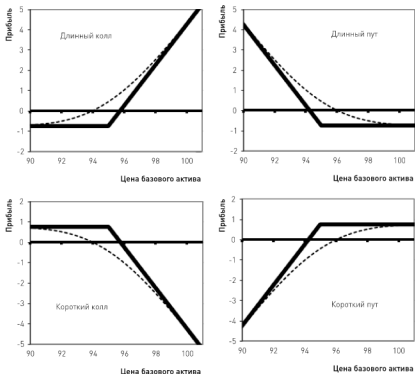
- Po.** Частная производная первого порядка стоимости опциона по безрисковой процентной ставке (величина, на которую изменяется стоимость опциона при изменении процентной ставки на 1 пункт). *Po* выражает чувствительность стоимости опциона к изменениям процентной ставки.
- Teta.** Частная производная первого порядка стоимости опциона по времени (величина, на которую изменяется стоимость опциона при уменьшении времени оставшегося до истечения на единицу времени). *Teta* выражает скорость *временного распада*.
- Цена исполнения (страйк).** Зафиксированная в контракте цена, по которой покупатель опциона может реализовать свое право купить или продать базовый актив.

#### **Платежные функции отдельных опционов**

На рис. П1 схематично представлены платежные функции отдельных опционов колл и пут для покупателя (длинные опционы) и продавца (короткие опционы). Сплошными линиями показаны платежные функции на дату исполнения, прерывистыми линиями — на некоторую промежуточную дату, предшествующую дате исполнения. При заданной цене базового актива позиция покупателя опциона тем больше, чем больше времени остается до истечения (прерывистые линии на рисунках расположены выше сплошных линий). И наоборот, чем ближе дата истечения, тем дороже позиция продавца опциона (прерывистые линии на рисунках расположены ниже сплошных линий). Это объясняется тем, что в стоимости опциона присутствует как внутренняя стоимость, так и временная стоимость. Последняя непрерывно уменьшается по мере приближения даты истечения (это явление называется *временным распадом*).

Из рис. П1 следует, что покупатель опциона колл получает теоретически неограниченную прибыль при росте цены базового актива и ограниченный убыток в случае ее падения (максимальный убыток ограничен величиной премии, уплаченной при покупке опциона). Покупатель опциона пут получает теоретически неограниченную прибыль при падении цены базового актива и ограниченный убыток в случае ее роста. В обоих случаях максимальный убыток ограничен величиной премии, уплаченной при покупке опциона.





**Рис. П1.** Платежные функции опционов колл и пут с позиции покупателя (длинные опционы) и продавца (короткие опционы). Сплошными линиями показаны платежные функции на дату исполнения, прерывистыми линиями — на более раннюю дату

Платежные функции коротких опционов являются зеркальным отражением платежных функций длинных опционов (рис. П1). Прибыли продавцов опционов лимитированы размером получаемой премии, а их убытки теоретически безграничны и зависят от силы ценового движения базового актива. Чем больше вырастет цена базового актива, тем большим будет убыток коротких коллов. Соответственно, чем больше цена снизится, тем большим будет убыток коротких путов.

### Платежные функции комбинаций и опционные стратегии

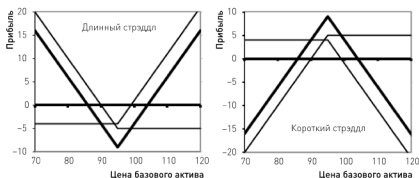
Комбинируя разные опционы, можно получить более сложные формы платежных функций. Это является одним из важнейших преимуществ опционов — они дают возможность строить

множество разнообразных нелинейных профилей прибыли, что существенно расширяет возможности инвестора.

Используя определенные принципы сочетания опционов (соотношение длинных и коротких позиций, соотношение коллов и путов, взаиморасположение и соотношения страйков и дат истечения), можно создавать комбинации, обладающие характерными видами платежных функций. Принято классифицировать комбинации в зависимости от принципа их построения и вида свойственных им платежных функций. Приведем несколько примеров наиболее популярных стратегий.

### Стрэддл

Комбинация *длинный стрэддл* строится путем покупки опционов колл и опционов пут с одинаковой ценой исполнения и датой исполнения. Обычно количество коллов равно количеству путов (как в примере на рис. П2), однако это не является обязательным условием. Если на дату исполнения цена базового актива близка к цене исполнения, комбинация приносит убыток, ограниченный величиной премии, уплаченной при ее создании. Если происходит достаточно большое ценовое движение в любую сторону, стрэддл окажется прибыльным. *Короткий стрэддл* строится по тем же принципам, но опционы не покупаются, а продаются. Соответственно, комбинация будет прибыльна при неизменной цене базового актива и убыточна при больших движениях цены в любую сторону (рис. П2).



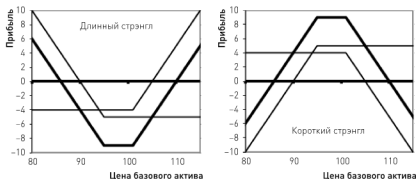
**Рис. П2.** Опционные стратегии длинный стрэддл и короткий стрэддл. Жирными линиями показаны платежные функции комбинаций на дату исполнения, тонкими линиями — платежные функции отдельных опционов, входящих в состав комбинаций

## Стрэнгл

Комбинация *длинный стрэнгл* строится путем покупки опционов колл и опционов пут с одинаковой датой исполнения, но разными ценами исполнения. Обычно цена исполнения колла выше цены исполнения пута, а их количество в комбинации одинаково, хотя ни то ни другое не являются обязательными условиями. Соответственно, комбинация *короткий стрэнгл* строится путем продажи таких же опционов. Профили прибыли длинного и короткого стрэнглов показаны на рис. П3. Прибыли и убытки стрэнглов так же зависят от изменения цены базового актива, как прибыли и убытки стрэддлов. Разница между этими двумя стратегиями состоит в том, что максимальные величины убытка длинного стрэнгла и прибыли короткого стрэнгла меньше, чем эти показатели для стрэддла. Зато и вероятность реализации этих прибылей и убытков для стрэнглов больше, чем для стрэддлов.

## Календарные спреды

Рассмотренные выше *стрэддлы* и *стрэнглы* строились из опционов с одинаковой датой исполнения. Теперь мы переходим к стратегии, предполагающей сочетания опционов с разными датами исполнения. Продавая опцион колл (или пут) с ближайшей датой исполнения и покупая опцион колл (или пут) с более поздней датой исполнения, получаем комбинацию, соответствующую стратегии *короткий календарный спред*. Эта

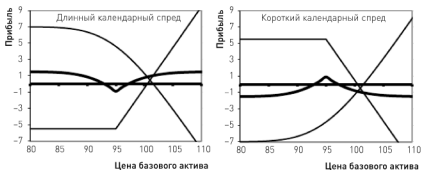


**Рис. П3.** Опционные стратегии длинный стрэнгл и короткий стрэнгл. Жирными линиями показаны платежные функции комбинаций на дату исполнения, тонкими линиями — платежные функции отдельных опционов, входящих в состав комбинаций

стратегия является дебетовой, то есть требует вложения капитала, поскольку покупаемый опцион всегда стоит дороже продаваемого (в силу того, что премия дальнего опциона включает в себя больший объем *временной стоимости*). Представленная на рис. П4 платежная функция рассчитана на дату истечения ближайшего опциона (предполагается, что по его истечении позиция по второму опциону закрывается). Эта стратегия приносит ограниченную прибыль в случае небольших изменений цены базового актива. При больших ценовых движениях комбинация дает ограниченный убыток. Цены исполнения обоих опционов могут быть одинаковыми (как на рис. П4) или разными. В последнем случае величина максимально возможной прибыли становится меньше, зато повышается вероятность ее получения.

Стратегия *длинный календарный спред* во всех отношениях является противоположностью *короткого календарного спреда*. Комбинация создается путем продажи опциона ближайшего по дате исполнения и покупки опциона с более поздней датой исполнения. Соответственно, эта стратегия является кредитовой. И прибыль, и убыток данной комбинации ограничены. Прибыль возникает при больших ценовых движениях, а убыток — в случае, если цена базового актива остается неизменной (рис. П4).

Все описанные выше комбинации относятся к так называемым маркет-нейтральным стратегиям. Это означает, что, например, при

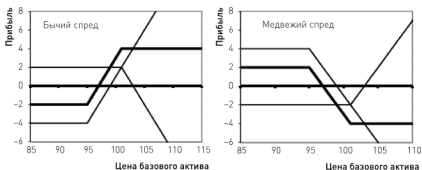


**Рис. П4.** Опционные стратегии длинный и короткий календарный спред. Жирными линиями показаны платежные функции комбинаций на дату исполнения опциона с ближайшей датой исполнения, тонкими линиями — платежные функции отдельных опционов, входящих в состав комбинаций (ломаные линии обозначают опционы с ближайшей датой исполнения, изогнутые линии обозначают опционы с дальней датой исполнения)

их использовании коротких вариантов комбинаций прибыль возникает, если цена базового актива не меняется в течение срока нахождения в позиции или изменяется в пределах достаточно узкого диапазона. Убытки же возникают вследствие сильных ценовых движений независимо от их направления. То же выполняется, но наоборот, для длинных вариантов комбинаций. Такие стратегии потому и называются нейтральными, что не требуют прогнозирования направления, то есть роста или падения, рынка базовых активов (существует огромное множество маркет-нейтральных стратегий, однако здесь мы ограничились описанием только тех из них, которые чаще всего упоминаются на страницах книги). Естественно, существует и большой класс опционных стратегий, базирующихся на прогнозе направления будущих ценовых движений. Поскольку настоящая книга посвящена преимущественно нейтральным стратегиям, мы ограничимся рассмотрением лишь нескольких комбинаций, относящихся к направленным стратегиям (хотя существует большое количество их вариаций и разновидностей, которые читатель без труда сможет найти в справочной литературе).

### Спреды

Покупка опциона колл с определенной ценой исполнения и продажа опциона колл с более высокой ценой исполнения позволяет создать стратегию *бычий спред* с ограниченной прибылью в случае роста цены базового актива и с ограниченным убытком в случае падения цены (рис. П5). Оба опциона имеют



**Рис. П5.** Опционные стратегии бычий и медвежий спред. Жирными линиями показаны платежные функции комбинаций на дату исполнения опционов, тонкими линиями — платежные функции отдельных опционов, входящих в состав комбинаций

одну и ту же дату исполнения. Поскольку премия колла тем больше, чем ниже цена исполнения, такая комбинация является дебетовой и требует начальных инвестиций. *Бычий спред* можно создать и другим путем, покупая пут с низкой ценой исполнения и продавая пут с высокой ценой исполнения (в этом случае комбинация будет кредитовой).

*Медвежий спред* создается путем покупки опциона колл (пут) с определенной ценой исполнения и продажи опциона колл (пут) с более низкой ценой исполнения. Комбинация приносит ограниченную прибыль в случае падения цены базового актива и ограниченный убыток, если цена растет (рис. П5). Использование в этой стратегии коллов позволяет создать кредитовую позицию, а использование путов — дебетовую.

- Вайн С.* Опционы. Полный курс для профессионалов. — М.: Альпина Паблишер, 2016.
- Винс Р.* Математика управления капиталом. Методы анализа риска для трейдеров и портфельных менеджеров. — М.: Альпина Бизнес Букс, 2007.
- Израйлевич С., Цудикман В.* Опционы. Системный подход к инвестициям. Критерии оценки и методы анализа торговых возможностей. — М.: Альпина Бизнес Букс, 2008.
- Макмиллан Л. Дж.* Макмиллан об опционах. — М.: ИК «Аналитика», 2002.
- Макмиллан Л. Дж.* Опционы как стратегическое инвестирование. — М.: Евро, 2003.
- Натенберг Ш.* Опционы. Волатильность и оценка стоимости. Стратегии и методы опционной торговли. — М.: Альпина Паблишер, 2011.
- Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. — М.: Мир, 2000.
- Халл Дж. К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. — 6-е изд. — М.: ИД «Вильямс», 2014.
- Aldridge, Irene.* High-Frequency Trading: A Practical Guide to Algorithmic Strategies and Trading Systems. Wiley, 2009.
- Bandy, Howard B.* Quantitative Trading Systems. Blue Owl Press, 2007.
- Barmish, B. Ross.* On trading of equities: a robust control paradigm. Proceedings of the 17th IFAC World Congress, 2008. Pp. 1621–1626.
- Briza, Antonio C., Prospero C. Naval Jr.* Design of stock trading system for historical market data using multiobjective particle swarm optimization of technical indicators. Proceedings of GECCO 2008. ACM, 2008. Pp. 1871–1878.
- Bryant, Michael R.* Building trading system using automatic code generation. Working paper, 2010.
- Burns, Patrick.* Random portfolios for evaluating trading strategies. Working paper, 2006.
- Chan, Ernest P.* Quantitative Trading: How to Build Your Own Algorithmic Trading Business. Wiley, 2008.
- Harris, Larry.* Trading and Exchanges: Market Microstructure for Practitioners. OxfordUniversity Press, 2002.
- Harris, Michael.* Profitability and Systematic Trading: A Quantitative Approach to Profitability, Risk, and Money Management. Wiley, 2008.

- Izraylevich, Sergey and Tsudikman, Vadim.* A better risk gauge for options portfolios. *Futures*, vol. 38 (7), 2009. Pp. 24–27.
- Izraylevich, Sergey and Tsudikman, Vadim.* An empirical solution to option pricing. *Futures*, vol. 38 (5), 2009. Pp. 28–31.
- Izraylevich, Sergey and Tsudikman, Vadim.* *Best method of multi-criteria analysis.* *Futures*, vol. 39 (6), 2010. Pp. 40–42.
- Izraylevich, Sergey and Tsudikman, Vadim.* Measuring new risk management tools. *Futures*, vol. 39 (1), 2010. Pp. 42–47.
- Izraylevich, Sergey and Tsudikman, Vadim.* Multi-criteria analysis: A practical approach. *Futures*, vol. 39 (7), 2010. Pp. 25–27.
- Izraylevich, Sergey and Tsudikman, Vadim.* Risk management: facing new challenges. *Futures*, vol. 38 (12), 2009. Pp. 30–35.
- Izraylevich, Sergey and Tsudikman, Vadim.* Short volatility trading in extreme markets. *Futures*, vol. 38 (10), 2009. Pp. 28–31.
- Izraylevich, Sergey and Tsudikman, Vadim.* *Systematic Options Trading. Evaluating, Analyzing and Profiting from Mispriced Option Opportunities.* FT Press, 2010.
- Izraylevich, Sergey and Tsudikman, Vadim.* When volatility distorts probability. *Futures*, vol. 40 (1), 2011. Pp. 44–47.
- Kan, Raymond and George Kirikos.* Biases in evaluating trading strategies. Working paper, 1995.
- Katz, Jeffrey Owen and Donna L. McCormick.* *The Encyclopedia of Trading Strategies.* McGraw-Hill, 2000.
- Kim, Kendall.* *Electronic and Algorithmic Trading Technology: The Complete Guide.* Academic Press, 2007.
- Masters, Timothy.* Monte-Carlo evaluation of trading systems. Working paper, 2006.
- Meyers, Dennis.* The siren call of optimized trading systems. Working paper, 1996.
- Moody, J., Wu, L., Liao, Y., Saffell, M.* Performance functions and reinforcement. Learning for trading systems and portfolios. *Journal of Forecasting*, vol. 17, 1998. Pp. 441–470.
- Munir, Danish and Krishnan, Divya.* Financial modeling: a system to test high-frequency trading strategies. Working paper, 2009.
- Narang, Rishi K.* *Inside the Black Box: The Simple Truth About Quantitative Trading.* Wiley, 2009.
- Owens, Scott.* Historical Testing. Working paper, 2005.
- Oya, Tomoyasu.* Evaluating automated trading systems using random walk securities. *Proceedings of the 2008 International Conference on Genetic and Evolutionary Methods.* CSREA Press, 2008. Pp. 174–178.



- Pardo, Robert.* The Evaluation and Optimization of Trading Strategies. Wiley, 2008.
- Pavlidis, N.G., Pavlidis, E.G., Epitropakis, M.G., Plagianakos, V.P. and Vrahatis, M.N.* Computational intelligence algorithms for risk-adjusted trading strategies. Working paper, 2006.
- Pinsky, E. and Sunitsky, R.* Testing a high frequency trading strategy. Working paper, 2010.
- Ruggiero, Murray A.* Cybernetic Trading Strategies. Developing a Profitable Trading System with State-of-the-Art Technologies. John Wiley & Sons, 1997.
- Schoenberg, Ronald.* Using DOE method in trading. Futures, vol. 39 (2), 2010.
- Schroeder, Michael, McCann, Julie and Haynes, Daniel.* Trading without explicit ontologies. Proceedings of Agent-mediated E-commerce. Springer-Verlag, 1999.
- Stridsman, Thomas.* Trading system and money management. Mc-Hill, 2003.
- Tsudikman, Vadim, Izraylevich, Sergey and Balishyan, Arsen.* A review of new approaches to risk evaluation in light of the recent financial crises: VaR criticism, alternatives and modifications. FT Press, 2011.
- Vanstone, Bruce J. and Finnie, Gavin.* An Empirical Methodology for Developing Stockmarket Trading Systems using Artificial Neural Networks. Bond University, 2007.
- Vince, Ralph.* The mathematics of money management: risk analysis techniques for traders. Wiley, 1992.
- Vliet, Benjamin Van.* Building Automated Trading Systems. Elsevier Inc, 2007.

**Израйлевич Сергей,  
Цудикман Вадим**

**ОПЦИОНЫ**  
**Разработка, оптимизация  
и тестирование  
торговых стратегий**

Руководитель проекта *А. Рысяева*  
Арт-директор *Л. Бенцуша*  
Дизайнер *М. Грошева*  
Корректор *И. Астапкина*  
Компьютерная верстка *Б. Руссо*

Подписано в печать 30.12.2016. Формат 70×100 1/16.  
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.  
Объем 21,25 печ. л.  
ООО «Альпина Паблицер»  
123060, Москва, а/я 28  
Тел. (495) 980-53-54  
www.alpina.ru  
e-mail: info@alpina.ru

Знак информационной продукции  
(Федеральный закон № 436-ФЗ от 29.12.2010 г.)

16+