Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1952

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

ВЫПУСК 4

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книжка предназначается главным образом для школьников, а также для занимающихся самообразованием взрослых читателей, математическое образование которых ограничивается средней школой. В основу книжки положена лекция, прочитанная автором для московских школьников седьмых и восьмых классов.

При подготовке лекции к изданию автор немного расширил её, стараясь, однако, не уменьшать доступности изложения. Самым существенным добавлением является п. 13 — об эллипсе, гиперболе и параболе как сечениях конической поверхности.

Чтобы не увеличивать объёма книжки, большинство сведений о кривых излагается без доказательств, хотя во многих случаях доказательства можно было бы дать в доступной для читателя форме.

Настоящее, второе, издание книжки печатается без всяких изменений.

Автор

1. В разговорном языке слова «кривой», «кривая», «кривое» употребляются как прилагательные, обозначающие то, что отклоняется от прямого, от правильного, от справедливого. Говорят о кривой палке, о кривой дороге, о кривом зеркале; «богат, да крив; беден, да прям», — гласит пословица.

Математики употребляют слово «кривая» обычно в смысле существительного; они разумеют под этим словом кривую линию. Что же такое кривая линия? Как охватить в одном определении все кривые, которые рисуются на бумаге карандашом или пером, на доске мелом, вычерчиваются на ночном небе «падающей звездой» или ракетой?

Мы примем следующее определение: *кривая* (подразумевается линия) *есть след движущейся точки*. Такой точкой в наших примерах является остриё карандаша, острый край куска мела, раскалённый метеор, пронизывающий верхние слои атмосферы, или ракета. С точки зрения этого определения прямая линия есть частный случай кривой. В самом деле, почему бы движущейся точке не оставлять прямолинейный след?

2. Движущаяся точка и на самом деле описывает прямую, когда она переходит из одного своего положения в любое другое по кратчайшему пути. Для вычерчивания прямой пользуются линейкой; если карандаш скользит вдоль края линейки, то его остриё оставляет на бумаге прямолинейный след.

Если точка движется на плоскости, сохраняя неизменное расстояние от некоторой неподвижной точки той же плоскости, то она описывает окружность; на этом свойстве окружности основано её вычерчивание посредством циркуля.

Прямая и окружность — две наиболее простые и вместе с тем наиболее замечательные по своим свойствам кривые.

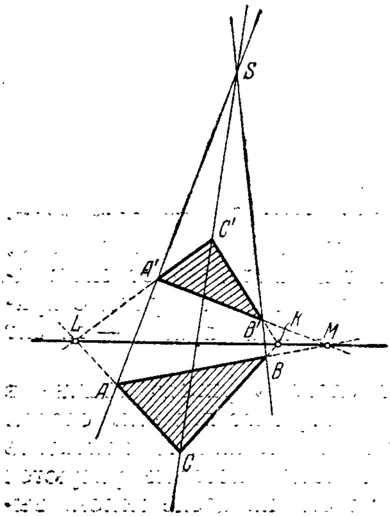

Рис. 1.

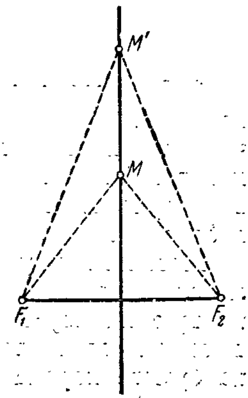

Рис. 2.

Читатель знаком с прямой и окружностью больше, чем с другими кривыми. Но пусть он не думает, что ему хорошо известны все важнейшие свойства прямых и окружностей. Знает ли он, например, что если вершины двух треугольников ABC и $A'B'C'$ лежат на трёх прямых, пересекающихся в одной точке S (рис. 1), то тогда три точки M, K, L пересечения соответственных сторон треугольников AB с $A'B'$, BC с $B'C'$ и AC с $A'C'$ должны находиться на одной и той же прямой?

Читателю, конечно, известно, что точка M, которая движется по плоскости, оставаясь на равных расстояниях от двух неподвижных точек F_1 и F_2 той же плоскости, т. е. так, что $MF_1=MF_2$, описывает прямую (рис. 2). Но, вероятно, он затруднится ответить, какую кривую опишет точка M, если её расстояние до точки F_1 будет в определённое число раз превосходить расстояние до точки

F_2 (например, вдвое, как на рис. 3). Оказывается, что этой кривой является окружность. Следовательно, если точка M движется по плоскости так, что её расстояние до одной из двух неподвижных точек F_1 и F_2 плоскости будет изменяться пропорционально расстоянию до другой точки:

$$MF_1 = k \cdot MF_2,$$

то M будет описывать либо прямую (когда коэффициент

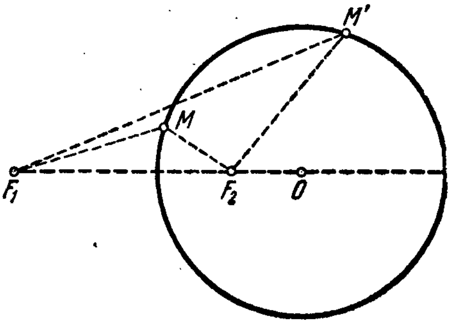

Рис. 3.

пропорциональности k равен единице), либо окружность (когда коэффициент пропорциональности отличен от единицы).

3. Рассмотрим кривую, описываемую точкой M так, что сумма расстояний этой точки до двух неподвижных точек F_1 и F_2 остаётся неизменной. Возьмём нить, концы её привяжем к двум булавкам и воткнём эти булавки в лист бумаги, оставляя сначала нить ненатянутой. Если оттянуть теперь нить с помощью вертикально поставленного карандаша и затем передвигать карандаш, слегка придавливая его к бумаге и следя за тем, чтобы нить была натянутой (рис. 4), то остриё M карандаша опишет кривую овальной формы (похожую на сплющенный круг); она называется *эллипсом*.

Чтобы получить полный эллипс, придётся перекидывать нить по другую сторону от булавок, после того как будет описана одна половина эллипса. Очевидно, что сумма расстояний от острия M карандаша до булавочных проколов F_1 и F_2 остаётся неизменной во всё время движения; эта сумма равна длине нити.

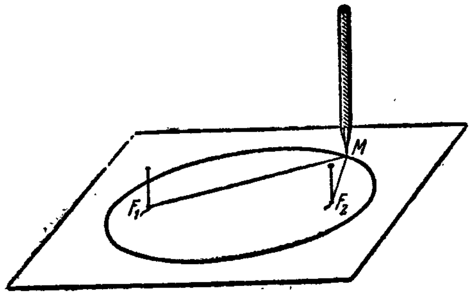

Рис. 4.

Проколы булавок отмечают иа бумаге две точки, называемые *фокусами* эллипса. Слово фокус в переводе с латинского означает «очаг», «огонь»; оно оправдывается следующим замечательным свойством эллипса.

Если изогнуть узкую полоску хорошо отполированного металла по дуге эллипса и поместить точечный источник света («огонь») в одном фокусе, то лучи света, отразившись от полоски, соберутся в другом фокусе; поэтому и во втором фокусе будет также виден «огонь» — изображение первого (рис. 5).

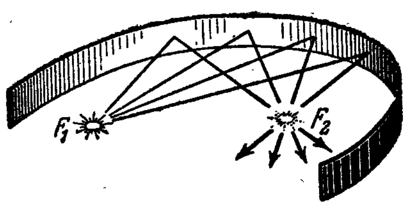

Рис. 5.

4. Если соединить фокусы эллипса отрезком прямой и продолжить этот отрезок до встречи с эллипсом, то получится большая ось эллипса: A_1A_2 (рис. 6). Эллипс симметричен относительно своей большой оси. Если разделить отрезок F_1F_2 пополам и в середине восставить перпендикуляр к нему, продолжая этот перпендикуляр до встречи с эллипсом, то получим малую ось эллипса: B_1B_2. Она также является осью симметрии эллипса. Концы осей: A_1, A_2, B_1 и B_2 называются *вершинами* эллипса.

Расстояния точки A_1 до фокусов F_1 и F_2 в сумме должны давать длину нити:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = l.$$

Но

$$A_1F_1 = A_2F_2$$

в силу симметрии эллипса; поэтому A_1F_1 можно заменить A_2F_2 и мы получаем:

$$A_2F_2 + A_1F_2 = l.$$

Очевидно, что в левой части этого равенства стоит длина

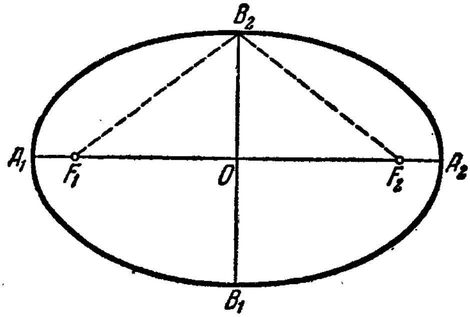

Рис. 6.

большой оси эллипса. Итак, длина большой оси эллипса равна длине нити; иными словами, сумма расстояний любой точки эллипса до фокусов равна большой оси этого эллипса. Отсюда следует в силу симметрии эллипса, что расстояние от вершины B_2 (или B_1) до каждого из фокусов равно половине длины большой оси. Поэтому, зная вершины эллипса, легко построить его фокусы: нужно засечь большую ось дугой окружности с центром в точке B_2 и радиусом, равным половине A_1A_2.

5. На большой оси эллипса, как на диаметре, построим окружность (рис. 7). Из какой-либо точки N окружности опустим на большую ось перпендикуляр NP, который пересечёт эллипс в точке M. Очевидно, что NP больше MP в некоторое число раз. Оказывается, если взять любую

другую точку N' окружности и проделать такое же построение, то $N'P'$ будет больше соответствующего отрезка $M'P'$ в то же самое число раз:

$$\frac{NP}{MP} = \frac{N'P'}{M'P'}.$$

Иными словами, эллипс можно получить из описанной около него окружности, если все точки окружности приблизить к большой оси эллипса, сократив расстояния точек

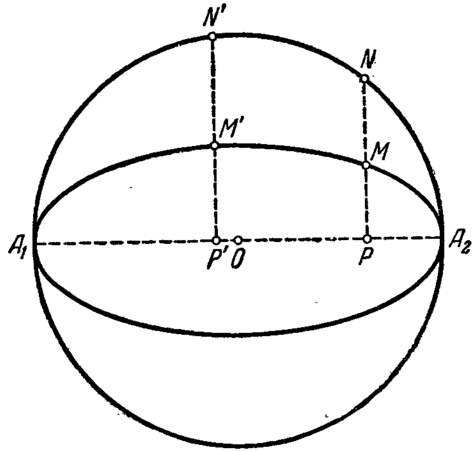

Рис. 7.

до большой оси в одно и то же число раз. На этом свойстве основан простой способ построения эллипса по точкам. Строим окружность, проводим какой-либо её диаметр, а затем заменяем точки окружности другими, лежащими на перпендикулярах к диаметру, на расстояниях, в несколько раз (в $1\frac{1}{2}$, 2, 3 и т. д.) более близких к нему. Получим точки эллипса, большая ось которого совпадает с диаметром окружности, а малая ось в соответствующее число раз ($1\frac{1}{2}$, 2, 3 и т. д.) меньше диаметра.

6. Эллипсы мы часто наблюдаем в жизни. Если, например, наклонить стакан с водой, то очертание верхнего слоя воды будет эллипсом (рис. 8); точно так же, если от цилиндрического куска колбасы отрезать ломтики, ставя нож косо, то ломтики эти будут иметь очертания эллипсов (рис. 9). Вообще, если прямой цилиндр (или конус)

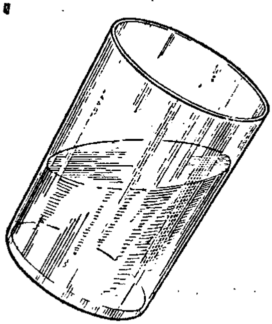

Рис. 8.

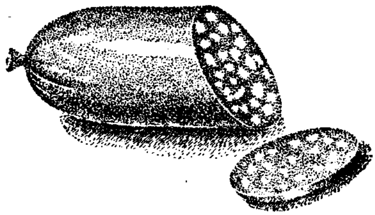

Рис. 9.

разрезать наискось (так, чтобы не затронуть при этом оснований), то в разрезе получится эллипс (рис. 10).

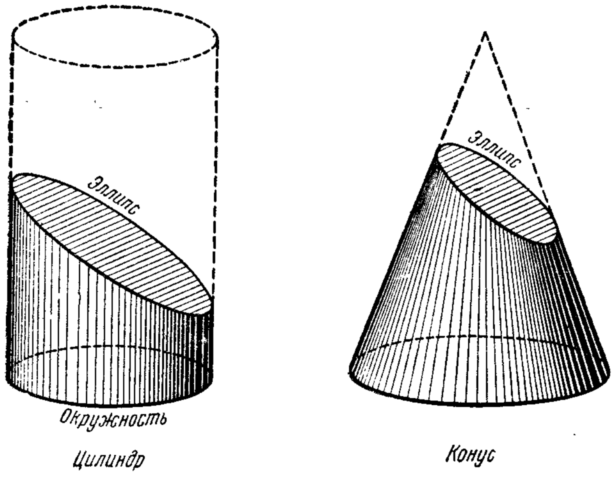

Рис 10.

Ещё Кеплер (род. в 1571 г., ум. в 1630 г.) обнаружил, что планеты движутся вокруг Солнца не по кругам, как думали раньше, а по эллипсам, причём Солнце находится в фокусе каждого эллипса (рис. 11). Один раз за время оборота планета бывает в вершине эллипса A_1, ближайшей к Солнцу,— это так называемый *перигелий*, и один раз — в вершине A_2, наиболее удалённой от Солнца — *в афелии*. Земля, например, бывает в перигелии, когда в нашем полушарии зима, а в афелии — когда в нашем

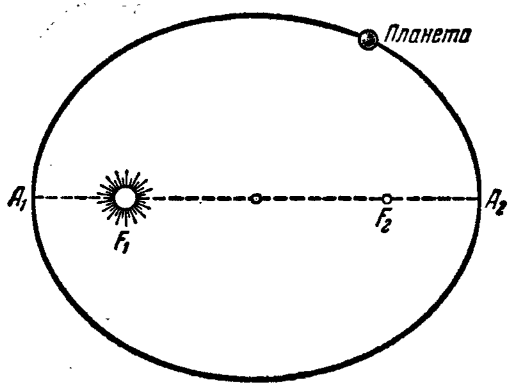

Рис. 11.

полушарии лето. Эллипс, по которому движется Земля, мало сплюснут; по виду он похож на окружность.

7. На листе бумаги проведём какую-либо прямую D_1D_2, возьмём точку F вне её и заставим остриё карандаша M двигаться так, чтобы его расстояние до прямой было в любой момент таким же, как и расстояние до точки F (рис. 12). Для этого достаточно к вершине S чертёжного треугольника прикрепить кнопкой нить, по длине равную катету SN, и свободный конец нити привязать к булавке, воткнутой в точку F. Если теперь другой катет треугольника будет скользить по линейке, приложенной к D_1D_2, то остриё карандаша M, натягивающее нитку и прижимающее её к свободному катету треугольника, будет находиться на одинаковых расстояних от линейки и от булавки:

$$NM = MF.$$

Это остриё опишет на бумаге часть линии, называемой *параболой*. Чтобы получить бо́льшую часть этой кривой, нужно взять треугольник с более длинным катетом, а при необходимости — и более длинную линейку. Парабола состоит из одной ветви, простирающейся в бесконечность.

Точка F называется *фокусом* параболы; перпендикуляр, опущенный из фокуса на прямую D_1D_2 (называемую *директрисой*) и продолженный, есть ось симметрии параболы; он называется просто *осью* параболы.

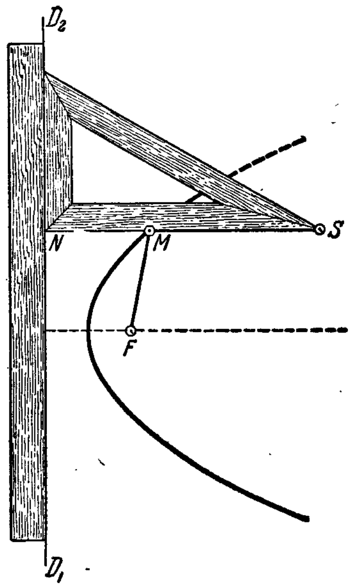

Рис. 12.

8. Если изогнуть узкую полоску хорошо отполированного металла по дуге параболы, то лучи точечного источника света, помещённого в фокусе, отразившись от полоски, пойдут параллельно оси (рис. 13). Обратно, если на нашу полоску будет падать пучок лучей, параллельный оси параболы, то после отражения лучи соберутся в её фокусе.

На этом свойстве параболы основано устройство параболических зеркал, употребляемых в автомобильных фарах (рис. 14) и вообще в прожекторах. Они, однако, шлифуются не по полоске, а по так называемому *параболоиду*

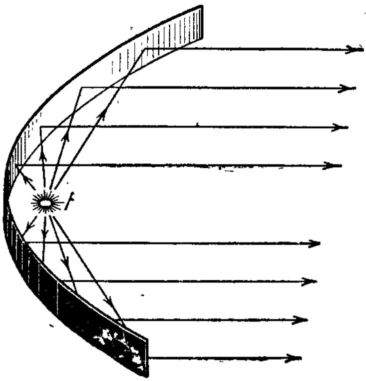

Рис. 13.

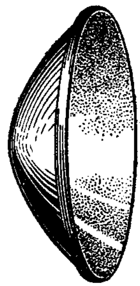

Рис. 14.

вращения. Получить поверхность такого зеркала можно, заставив вращаться параболу вокруг её оси.

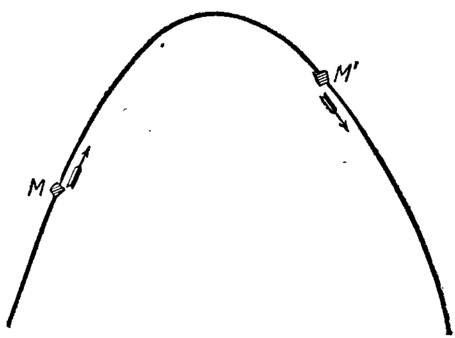

Рис. 15.

9. Камень, брошенный не строго вертикально, летит по параболе (рис. 15); то же можно сказать и об орудийном снаряде. Правда, сопротивление воздуха как в том, так и в другом случае искажает форму параболы и фактически

получается другая кривая. Но, наблюдая движение в пустоте, мы получили бы настоящую параболу.

Если при одной и той же скорости v вылета снаряда из канала ствола орудия придавать стволу различные углы наклона к горизонту, то будут получаться различные параболы, описываемые снарядом, и различная дальность полёта. Наибольшая дальность получится при наклоне ствола, равном 45°. Эта дальность равна $\frac{v^2}{g}$, где g — ускорение силы тяжести. Если выстрелить вертикально вверх, то снаряд поднимется на высоту, в два раза меньшую, чем наибольшая дальность: $\frac{v^2}{2g}$. Как бы мы ни поворачивали

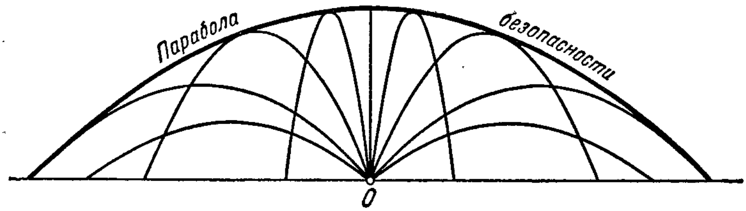

Рис. 16.

ствол (оставляя его в одной и той же вертикальной плоскости), всегда при заданной скорости вылета снаряда останутся места на земле и в воздухе, в которые снаряд не может проникнуть — не долетит. Оказывается, что эти места отделяются от тех мест, куда снаряд может попасть при соответствующем прицеливании, также параболой (рис. 16), которая называется *параболой безопасности*.

10. По аналогии с эллипсом можно строить кривые, описываемые точкой M так, что остаётся неизменной не сумма, а разность расстояний до двух определённых точек F_1 и F_2 или произведение, или, наконец, частное таких расстояний (в последнем случае получается окружность).

Рассмотрим случай разности. Чтобы заставить карандаш двигаться нужным образом, закрепим в точках F_1 и F_2 по булавке и к одной из них прикрепим линейку так, чтобы линейка могла вращаться по бумаге вокруг булавки

Чтобы изобразить приблизительно гиперболу на рисунке, не прибегая к точному построению с помощью линейки и нити, следует поступать так. Сначала изображаем оси симметрии гиперболы; затем отмечаем на первой из них фокусы F_1 и F_2 на равных расстояниях от центра, далее откладываем по обе стороны от центра на той же первой оси отрезки, равные половине m, т. е. половине за-

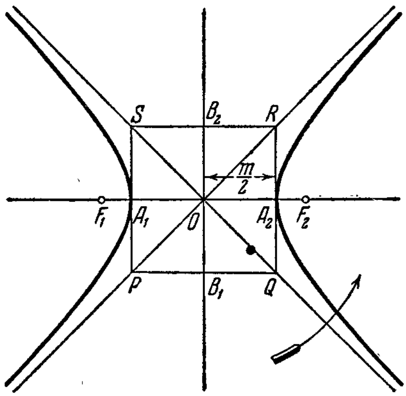

Рис. 19.

данной разности расстояний точек гиперболы до её фокусов, и получаем вершины A_1 и A_2 гиперболы; потом находим на второй оси засечками точки B_1 и B_2, строим прямоугольник $PQRS$ и, наконец, проводим и продолжаем его диагонали. Получается фигура, изображённая на рис. 19. Теперь остаётся провести от руки две дуги, симметричные относительно осей, проходящие через точки A_1 и A_2, плавно изгибающиеся и всё теснее и теснее прилегающие к асимптотам PR и QS.

12. В частном случае прямоугольник $PQRS$ может быть квадратом. Это будет тогда и только тогда, когда асимптоты гиперболы взаимно перпендикулярны. Такая гипербола называется *равнобочной*. Именно этот случай и изображён на рис. 19. Для удобства повернём весь рисунок около точки O на угол 45° в направлении, указанном стрелкой; получим гиперболу, изображённую на рис. 20. Отложим на асимптоте OQ какой-либо отрезок

$ON = x$ и в точке N восставим перпендикуляр $NM = y$ до пересечения с гиперболой. Между y и x существует простая зависимость: оказывается, что если увеличить x в несколько раз, то во столько же раз уменьшится y; точно так же, если уменьшить x в несколько раз, то во столько

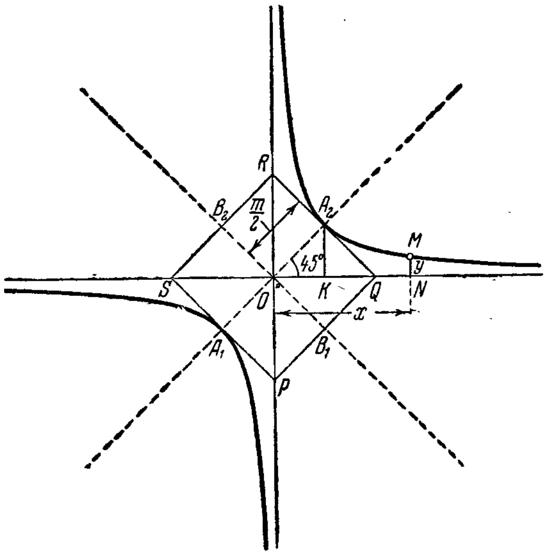

Рис. 20.

же раз увеличится и y. Иными словами, длина $NM = y$ обратно пропорциональна длине $ON = x$:

$$y = \frac{k}{x}.$$

Благодаря этому свойству равнобочная гипербола оказывается графиком обратной пропорциональности. Чтобы выяснить, как связан коэффициент обратной пропорциональности k с размерами гиперболы, рассмотрим вершину A_2. Для неё

$$x = OK, \quad y = KA_2;$$

отрезки OK и KA_2 являются катетами равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой

$$OA_2=\frac{m}{2},$$

поэтому

$$x=y \text{ и } x^2+y^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4},$$

откуда $2x^2=\frac{m^2}{4}$, или $x^2=\frac{m^2}{8}$. С другой стороны, из соотношения обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$ следует, что $xy=k$, или в данном случае (где $y=x$): $x^2=k$. Сравнивая два результата: $x^2=\frac{m^2}{8}$ и $x^2=k$, находим: $k=\frac{m^2}{8}$. Иными словами, коэффициент обратной пропорциональности k равен одной восьмой от квадрата длины действительной оси гиперболы.

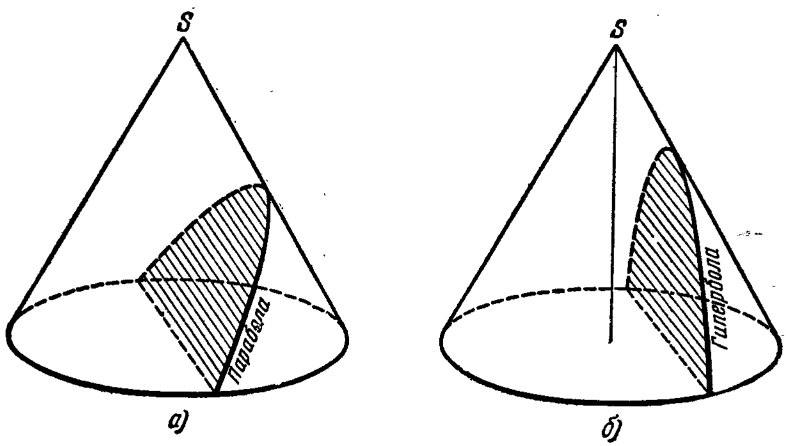

Рис. 21.

13. Мы уже говорили о том, что если конус разрезать ножом, т. е., выражаясь геометрически, рассечь плоскостью, не пересекая при этом основания конуса, то очертанием сечения будет эллипс (см. рис. 10). Оказывается, что, рассекая конус плоскостью так, чтобы разрез проходил через основание конуса, можно получить в сечении дугу параболы (рис. 21, *а*), или дугу гиперболы (рис. 21, *б*).

Таким образом, все три кривые — эллипс, гипербола и парабола — являются коническими сечениями.

Конус, который мы рассекали, имеет тот недостаток, что только эллипс может уместиться на нём полностью (см. рис. 10), тогда как парабола и гипербола — кривые, про-

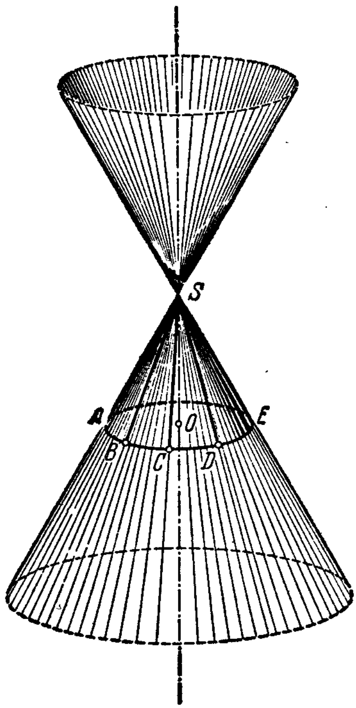

Рис. 22.

стирающиеся в бесконечность,—умещаются на нём лишь частично. На рис. 21, *б* не видно даже, откуда берётся вторая ветвь гиперболы. Чтобы устранить этот недостаток, заменим конус — простирающейся в бесконечность конической поверхностью. С этой целью неограниченно продолжим в обе стороны все образующие конуса, т. е. прямолинейные отрезки AS, BS, CS, DS, ES и т. д., соединяющие точки окружности основания конуса с его вершиной (рис. 22; естественно, что на нашем рисунке нельзя изобразить неограниченно продолженные образующие, поэтому здесь нарисованы попрежнему отрезки прямых, только более длинные, чем первоначальные отрезки). В результате получается нужная коническая поверхность, состоящая из двух связанных между собой в точке S простирающихся в бесконечность половин, или, как говорят, пол (от слова «пола»). Всю коническую поверхность можно рассматривать как след движущейся прямой, а именно, прямой,

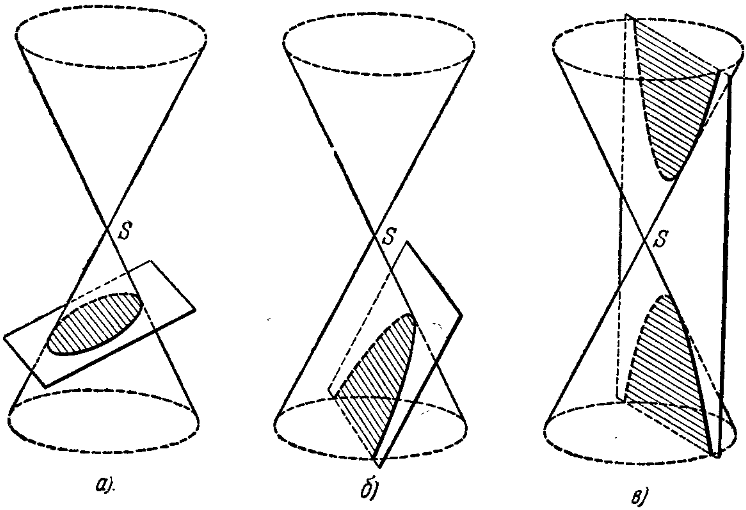

Рис. 23.

проходящей через точку S и поворачивающейся так, что угол её с прямой OS — осью конической поверхности — остаётся неизменным. Эта движущаяся прямая называется *образующей* конической поверхности; очевидно, что каждая из образующих первоначально взятого конуса путём продолжения даёт образующую конической поверхности.

Будем теперь рассекать плоскостью всю коническую поверхность. Если плоскость рассечёт все образующие в пределах одной полы поверхности, то в сечении получится эллипс (а в частном случае — окружность, рис. 23, *а*); если она рассечёт все образующие, за исключением одной (которой будет параллельна), то в сечении получится парабола (рис. 23, *б*); наконец, если плоскость рассечёт часть образующих в пределах одной полы́, а другую часть в пределах другой полы́, то в сечении получится гипербола (рис. 23, *в*). Мы видим, что и эллипс, и парабола целиком умещаются на одной полé конической поверхности. Для гиперболы же нужна вся коническая поверхность: одна ветвь гиперболы лежит на одной полé, а другая ветвь — на другой полé поверхности.

14. Обратимся к кривой, описываемой точкой M на плоскости так, что остаётся неизменным произведение p расстояний этой точки до двух определённых точек F_1 и F_2 той же плоскости. Такая кривая называется *лемнискатой* (лемниската по-гречески значит «ленточная»). Если

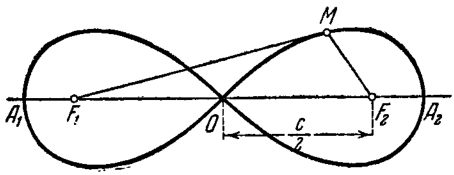

Рис. 24.

длина отрезка F_1F_2 есть c, то расстояния середины O отрезка F_1F_2 до F_1 и F_2 равны $\frac{c}{2}$ и произведение этих расстояний равно $\frac{c^2}{4}$. Потребуем сначала, чтобы величина p неизменного произведения равнялась как раз $\frac{c^2}{4}$, т. е.

$$MF_1 \cdot MF_2 = \frac{c^2}{4};$$

тогда точка O будет лежать на лемнискате, а сама лемниската будет иметь вид «лежащей восьмёрки» (рис. 24). Если продолжить отрезок F_1F_2 в обе стороны до пересечения с лемнискатой, то получим две точки A_1 и A_2. Легко выразить расстояние между ними $A_1A_2 = x$ через известное нам расстояние $F_1F_2 = c$. Для этого заметим, что расстояние точки A_2 до F_2 равно $\frac{x}{2} - \frac{c}{2}$, а расстояние той же точки A_2 до F_1 равно $\frac{x}{2} + \frac{c}{2}$; поэтому произведение расстояний есть

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4}.$$

Но это произведение по условию должно равняться $\frac{c^2}{4}$, поэтому $\frac{x^2}{4}-\frac{c^2}{4}=\frac{c^2}{4}$, откуда $x^2=2c^2$ и $x=\sqrt{2}c\approx 1{,}414c$.

Существует замечательная связь между такой лемнискатой и равнобочной гиперболой. Будем проводить из точки O различные прямолинейные лучи (рис. 25) и отмечать

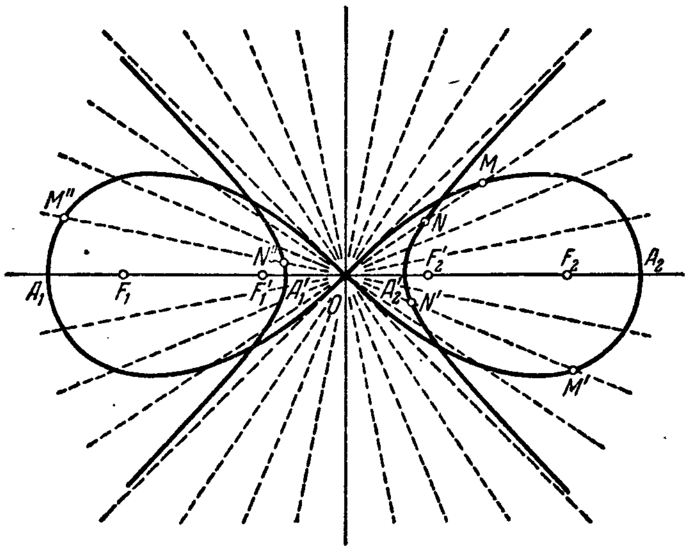

Рис. 25.

на них точки пересечения с лемнискатой. Оказывается, что пока угол наклона луча к OF_2 (или к OF_1) будет меньше 45°, луч этот будет пересекать лемнискату ещё в одной точке, помимо O; если же угол наклона будет 45° или больше, то второй точки пересечения не будет. Возьмём какой-либо луч первой группы и пусть он встречает лемнискату в точке M (отличной от O); отложим на этом луче от точки O отрезок $ON=\frac{1}{OM}$. Если это построеине проделать для каждого луча первой группы, то точки N, соответствующие точкам M лемнискаты, все расположатся на равнобочной гиперболе, с фокусами в точках F_1' и F_2', таких, что

$$OF_1' = \frac{1}{OF_1} \quad \text{и} \quad OF_2' = \frac{1}{OF_2}.$$

15. Если величину неизменного произведения p взять не равной $\frac{c^2}{4}$, то лемниската изменит свой вид. В случае, когда p меньше $\frac{c^2}{4}$, лемниската состоит из двух овалов, один из которых содержит внутри точку F_1, а другой — точку F_2 (рис. 26). В случае, когда произведение p больше $\frac{c^2}{4}$, но меньше $\frac{c^2}{2}$, лемниската

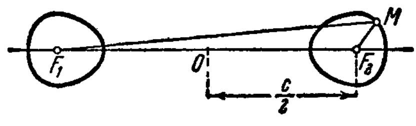

Рис. 26.

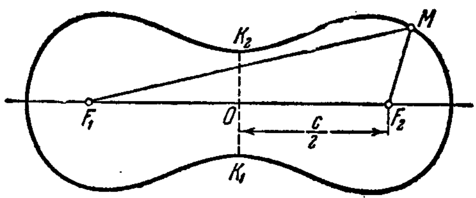

Рис. 27.

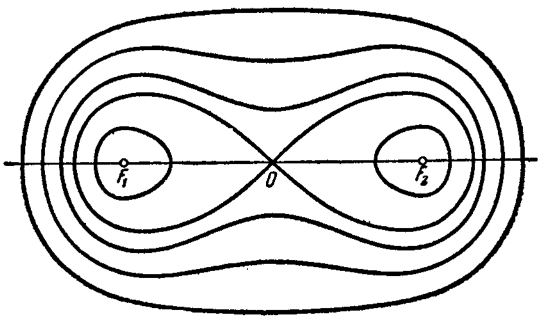

Рис. 28.

имеет вид бисквита (рис. 27). Если p мало отличается от $\frac{c^2}{4}$, то «талия бисквита» K_1K_2 очень узка и вид кривой близок к «лежащей восьмёрке». Если же p мало отличается от $\frac{c^2}{2}$, то бисквит почти не имеет «талии», а при p, равном $\frac{c^2}{2}$ или большем, чем $\frac{c^2}{2}$, «талия» совсем исчезает, и лемниската принимает вид овала (рис. 28; здесь для сравнения изображены также другие лемнискаты).

16. Возьмём теперь на плоскости любое количество точек

$$F_1,\ F_2,\ldots,F_n$$

и заставим точку M двигаться так, чтобы для неё оставалось неизменным произведение расстояний до каждой из взятых точек. Получим кривую, форма которой будет зависеть от того, как расположены точки

$$F_1,\ F_2,\ldots,\ F_n$$

друг относительно друга и какова величина неизменного произведения. Кривая эта называется *лемнискатой* с n *фокусами*.

Выше мы рассматривали лемнискаты с двумя фокусами. Беря разное число фокусов, располагая их по-разному и назначая ту или иную величину для произведения расстояний, можно получать лемнискаты самых причудливых очертаний. Будем вести остриё карандаша из некоторой точки A, не отрывая от бумаги, так, чтобы оно в конце вернулось в исходную точку A. Тогда оно опишет некоторую кривую; мы потребуем только, чтобы эта кривая нигде не пересекала самоё себя. Очевидно, что таким путём могут получиться кривые, имеющие, например, очертания человеческой головы или птицы (рис. 29). Оказывается, что, имея такую произвольную кривую, можно так подобрать число n и расположение фокусов

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$$

и назначить такую величину для неизменного произведения расстояний

$$MF_1 \cdot MF_2 \ldots MF_n = p,$$

что соответствующая лемниската на-глаз не будет отличаться от этой кривой. Иными словами, возможные отклонения точки M, описывающей лемнискату, от нарисованной кривой не будут превосходить ширину карандашного штриха (карандаш можно заранее отточить как угодно хорошо, так, что штрих будет очень узким). Этот замечательный факт, говорящий о необычайном разнообразии и богатстве форм лемнискат со многими фокусами, доказывается совершенно строго, но очень сложно, при помощи высшей математики.

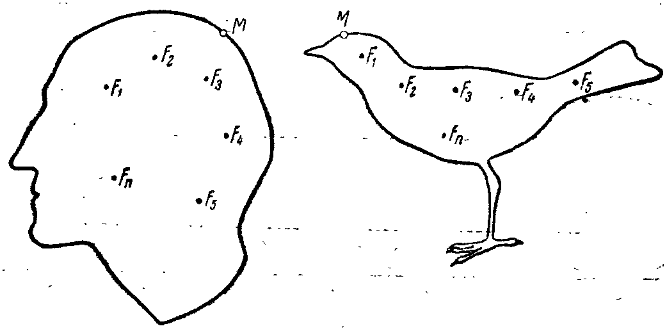

Рис. 29.

17. Приложим к нижнему краю классной доски линейку и будем катить по ней обруч или круг (картонный или деревянный), прижимая его к линейке и к доске. Если прикрепить к обручу или кругу кусок мела (в точке соприкосновения его с линейкой), то мел будет вычерчивать кривую (рис. 30), называемую *циклоидой* (что

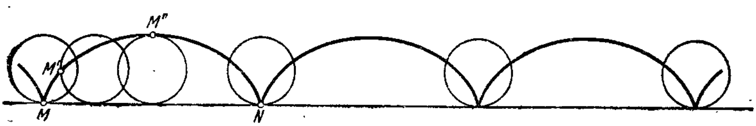

Рис. 30.

по-гречески значит «кругообразная»). Одному обороту обруча соответствует одна «арка» циклоиды $MM'M''N$; если обруч будет катиться дальше, то будут получаться ещё и ещё арки той же циклоиды.

Чтобы построить на бумаге приближённо одну арку циклоиды, описанную при качении обруча диаметром, равным, например, трём сантиметрам, отложим на прямой отрезок, равный

$$3 \cdot 3{,}14 = 9{,}42 \text{ см}.$$

Получим отрезок, длина которого равна длине обода обруча, т. е. длине окружности диаметром в три сантиметра. Разделим далее этот отрезок на некоторое число равных частей, например на 6, и для каждой точки деления изобразим наш обруч в том его положении,

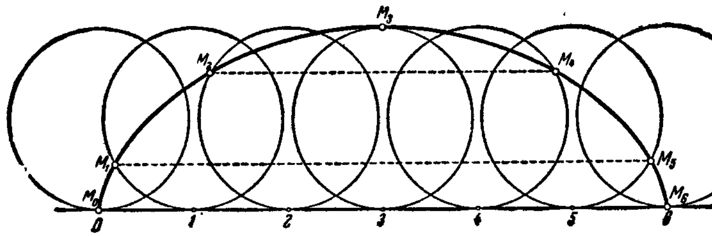

Рис. 31.

когда он опирается именно на данную точку (рис. 31), занумеровав эти положения цифрами:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Чтобы перейти из одного положения в соседнее, обруч должен повернуться на одну шестую полного оборота (так как расстояние между соседними точками деления равно шестой части окружности). Поэтому если в положении *0* мел будет находиться в точке M_0, то в положении *1* он будет лежать в точке M_1 — на одной шестой окружности от точки касания, в положении 2— в точке M_2 — на две шестых от точки касания и т. д. Чтобы получить точки M_1, M_2, M_3 и т. д., нужно лишь производить засечки соответствующей окружности, начиная от точки касания, радиусом, равным 1,5 *см*, причём в положении *1* нужна одна засечка, в положении 2— две засечки, выполненные одна за другой, в положении *3* — три засечки и т. д. Теперь для вычерчивания циклоиды остаётся соединить точки

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5,\ M_6$$

плавной кривой (на-глаз).

18. Среди многих замечательных свойств циклоиды отметим одно, из-за которого она заслужила громко звучащее мудрёное название: «брахистохрона». Это название составлено из двух греческих слов, означающих «кратчайший» и «время».

Рассмотрим такой вопрос: какую форму следует придать хорошо отшлифованному металлическому жёлобу, соединяющему две заданные точки A и B (рис. 32), чтобы

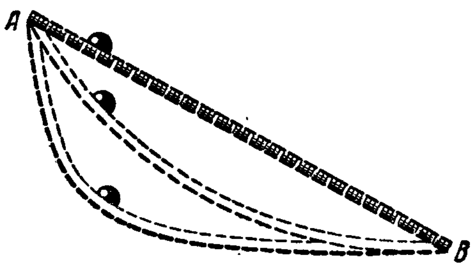

Рис. 32.

полированный металлический шарик скатывался по этому жёлобу из точки A в точку B в кратчайшее время? На первый взгляд кажется, что нужно остановиться на прямолинейном жёлобе, так как только вдоль него шарик пройдёт кратчайший путь от A до B. Однако речь идёт не о кратчайшем пути, а о кратчайшем времени; время же зависит не только от длины пути, но и от скорости, с которой бежит шарик. Если жёлоб прогнуть вниз, то его часть, начиная от точки A, будет круче опускаться вниз, чем в случае прямолинейного жёлоба, и шарик, падая по нему, приобретёт скорость, бо́льшую, чем на участке такой же длины прямолинейного жёлоба. Но если сделать начальную часть очень крутой и сравнительно длинной, то тогда часть, примыкающая к точке B, будет очень пологой и также сравнительно длинной; первую часть шарик пройдёт быстро, вторую очень медленно и шарик может запоздать с приходом в точку B. Итак, жёлобу, повидимому, нужно придавать вогнутую форму, но делать выгиб не слишком значительным.

Итальянский физик и астроном Галилей (род. в 1564 г., ум. в 1642 г.) думал, что жёлоб кратчайшего времени нужно выгибать по дуге окружности. Но швейцарские математики братья Бернулли двести пятьдесят лет тому назад доказали точным расчётом, что это не так и что жёлоб нужно выгибать по дуге циклоиды (опрокинутой вниз, рис. 33). С тех пор

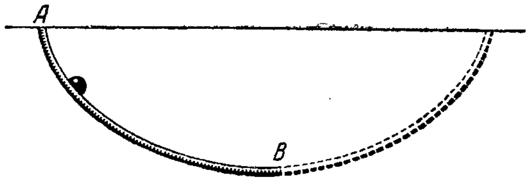

Рис. 33.

циклоида и заслужила прозвище брахистохроны, а доказательства Бернулли послужили началом новой отрасли математики — вариационного исчисления. Последнее занимается отысканием вида кривых, для которых та или иная интересующая нас величина достигает своего наименьшего (а в некоторых вопросах — наибольшего) значения.

19. Мы заканчиваем очерк о замечательных кривых. Мы рассмотрели лишь немногие из них и ни в какой мере не исчерпали их свойств. А сколько ещё кривых не попало в нашу книжку: мы ничего не говорили ни о цепной линии, по которой располагается тяжёлая цепь, подвешенная за два конца, ни о спирали Архимеда, которую описывает жучок, ползущий по равномерно вращающейся линейке, ни о развёртке окружности, описываемой концом тонкой нити, сматываемой с катушки и т. п. Наша цель заключалась лишь в том, чтобы заинтересовать читателя, знакомого только с начатками математики, некоторыми любопытными фактами из необъятной сокровищницы математических знаний. Мы, как правило, избегали доказательств и выкладок.

Читатель, который захочет расширить приобретённые им здесь сведения, может обратиться к книжке польского математика Штейнгауза[1]) (в ней доказательства также отсутствуют) или к более обстоятельной книжке популяризатора математической науки, ныне покойного Г. Н. Бермана[2]); в ней читатель найдёт доказательства многих фактов, упоминаемых в настоящей брошюре и в книжке Штейнгауза.

---

[1]) Г. Штейнгауз, Математический калейдоскоп, Гостехиздат, 1950.

[2]) Г. Н. Берман, Циклоида (Об одной замечательной кривой линии и некоторых других, с ней связанных), Гостехиздат, 1948.

Редактор *А. З. Рывкин.*
Техн. редактор *Р. П. Остроумова.*
Корректор *А. С. Каган*

★

Подписано к печати 2 I 1952 г. Бумага 84×108 $_{32}$. 0,5 бум. л. 1,64 печ. л. 1,4 уч.-изд. л. 33 700 тип. зн. в печ. л. Т-00201. Тираж 50 000 экз. Цена книги 40 коп. Заказ № 793.

3-я типография «Красный пролетарий» Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Краснопролетарская, 16.

[redacted]

~~Цена 40 коп.~~

НОВАЯ ЦЕНА

32 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.

Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.

Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.

Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.

Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.

Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.

Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.

Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.