Е.М.Родионов

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ для поступающих в ВУЗЫ

Е.М.Родионов

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ для поступающих в ВУЗЫ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МЦ «Аспект»

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время на вступительных экзаменах в ВУЗы предлагаются задачи и примеры с параметрами, решение которых вызывает большие затруднения у поступающих.

Нередко при решении примеров с параметрами поступающие ограничиваются лишь тем, что составляют формулы, выражающие значения неизвестных через параметры. Такое формальное решение может оказаться неполным, поскольку не рассматривается вопрос о том, при каких значениях параметра эти формулы применимы.

Существует несколько вариантов условий параметрических примеров — исследовать уравнение, решить уравнение, определить количество решений, найти положительные корни и т. д. В силу такого многообразия условий нельзя дать универсальных указаний по решению примеров, поэтому в справочнике приводится много примеров с решениями.

Материал пособия представлен по такой схеме: справочные сведения, примеры с решениями, примеры для самостоятельной проработки с ответами.

Такая форма изложения наиболее удобна для активного усвоения методов решения задач. В ряде случаев при разборе конкретных примеров приводится, возможно, не самое короткое и изящное решение задачи. Это объясняется прежде всего тем, что при разборе примера автор в первую очередь стремился дать наглядное применение предложенного метода, а вовсе не продемонстрировать примеры нестандартных подходов к решению различных задач. Задачи, используемые в справочнике, в основном взяты из вариантов, предлагавшихся в последние годы на вступительных экзаменах по математике в ВУЗы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

В пособии использованы следующие обозначения: R — множество всех действительных чисел, числовая прямая; $\Rightarrow$ — знак следования; $\Leftrightarrow$ — знак равносильности; $\in$ — знак принадлежности; $\forall$ — знак «для любого», «для каждого», «для всех».

Справочное пособие рассчитано на поступающих в ВУЗы, старшеклассников, а также будет полезно преподавателям школ и подготовительных курсов.

ВВЕДЕНИЕ

Если в уравнение или неравенство кроме неизвестных входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами, а уравнение или неравенство параметрическим.

Если параметру, содержащемуся в уравнении (неравенстве), придать некоторое числовое значение, то возможен один из двух следующих случаев:

1) получится уравнение (неравенство), содержащее лишь данные числа и неизвестные и не содержащее параметров;

2) получится условие, лишенное смысла.

В первом случае значение параметра называется *допустимым*, во втором — *недопустимым*. При решении примеров допустимые значения параметров определяются из их конкретного смысла. Так, в уравнении $\frac{1}{x-a}+\frac{x}{a}=2$ допустимым является любое значение a, кроме $a=0$ и $a=x$; если $|x^2-x-2|=a$, то $a \geqslant 0$.

Решить уравнение или неравенство, содержащее параметр, — это значит для каждого допустимого значения параметра найти множество всех значений данного уравнения (неравенства).

Нередко при решении примеров с параметрами поступающие ограничиваются лишь тем, что составляют формулы, выражающие значения неизвестных через параметры. Такое формальное решение может оказаться неполным, поскольку не рассматривается вопрос о том, при каких значениях параметра эти формулы применимы. Например, при решении уравнения $m^2(x-2)-3m=x+1$ переходят к уравнению $(m^2-1)x=2m^2+3m+1$ при $m \neq \pm 1$ записывают единственное решение $x=\frac{2m+1}{m-1}$. Но ведь при $m=-1$ — бесчисленное множество решений, а при $m=1$ — нет решений.

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Справочный материал

Решить уравнение $f(x, a, b, c, p)=0$ это значит:

а) определить множество допустимых значений неизвестного и параметров; б) для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующие множества решений уравнения.

Простейшее уравнение первой степени с одним неизвестным имеет вид $ax-b=0$.

А. При $a\neq 0$ уравнение имеет единственное решение $x=\frac{b}{a}$, которое будет: положительным ($x>0$), если $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$; нулевым ($x=0$), если $\begin{cases} b=0 \\ a\neq 0 \end{cases}$; отрицательным ($x<0$), если $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$.

Б. Если $a=0$, то при $b=0$ бесчисленное множество решений; при $b\neq 0$ решений нет.

Примеры с решениями

Пример 1. Для каждого значения a решить уравнение $\frac{a-1}{x}=\frac{a}{x+1}$; найти при каких a корни больше нуля.

△ Исходное уравнение не является линейным, но при $x\neq 0$ и $x\neq -1$ сводится к таковому: $(a-1)(x+1)=ax$ или $a-1-x=$ $=0$.

Кроме допустимых значений x выявим допустимые значения параметра a. Из $a-1-x=0 \Leftrightarrow a=1+x$ и при $x\neq 0$ $a\neq 1$, а при $x\neq -1$ $a\neq 0$.

Таким образом, при $a\neq 0$ и $a\neq 1$ $x=a-1$ и этот корень больше нуля при $a>1$.

Ответ: при $a\in R\backslash\{0;1\}$, $x=a-1$; при $a\in\{0;1\}$ — решений нет; корень положителен при $a>1$. ▲

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{3}{kx-12}=\frac{1}{3x-k}. \qquad (1)$$

$\triangle$ Допустимыми значениями x и k будут значения, при которых $kx-12\neq 0$ и $3x-k\neq 0$ или $kx\neq 12$ и $3x=k$.

Приведем (1) к простейшему виду:

$$9x-3k=kx-12$$
$$(9-k)x=3k-12. \qquad (2)$$

Найдем k, при которых (1) и (2) не равносильны или (1) не имеет числового смысла.

Подставив в (2) $x=\frac{12}{k}$, получим:

$$(9-k)\cdot\frac{12}{k}=3k-12\Rightarrow 108-12k=3k^2-12k\Rightarrow$$
$$k=\pm 6.$$

Если подставим $x=\frac{k}{3}$, то также получим $k\pm 6$.

Таким образом, при $k\pm 6$ уравнение (1) не имеет числового смысла т. е. $k\pm 6$ — недопустимые значения параметра k для (1). При $k\neq\pm 6$ можем решать уравнение (2).

А. Если $9-k\neq 0$, то уравнение (2), а вместе с ним и уравнение (1) имеют единственное решение $x=\frac{3k-12}{9-k}$, которое будет:

а) положительным, если $(3k-12)(9-k)>0$ при $4<k<9$ с учетом $k\neq 6$:$k\in]4;\ 6[\cup]6;\ 9[$;

б) нулевым, если $3k-12=0\Rightarrow k=4$;

в) отрицательным, если $(3k-12)\ (9-k)<0\Rightarrow k<4$ и $k>9$ с учетом $k\neq -6$, получаем $k\in]-\infty;\ -6[\cup]-6;\ 4[\cup]9;\ +\infty\ [$.

Б. Если $9-k=0\Rightarrow k=9$, то уравнение (2) решения не имеет.

Ответы: а) $x=\frac{3k-12}{9-k}$ при $k\neq\pm 6$ и $k\neq 9$,

причем $x>0\quad\forall k\in]4;\ 6[\cup]6;\ 9[$; $x=0$ при $k=4$; $x<0\quad\forall k\in]-\infty;\ -6[\cup]-6;\ 4[\cup]9;\ +\infty[$;

б) при $k\in\{-6;\ 6;\ 9\}$ уравнение не имеет решений.▲

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{a}{3a+x}=\frac{2}{b+x}. \qquad (1)$$

$\triangle$ Допустимыми значениями неизвестного и параметров будут те значения, при которых $3a+x\neq 0$ и $b+x\neq 0$.

Приведем уравнение (1) к простейшему виду. Умножив обе его части на $(3a+x)(b+x)$, получим $a(b+x)=6a+2x$ или

$(a-2)x=a(6-b)$ (2). При $3a+x\neq 0$ и $b+x\neq 0$ уравнения (1) и (2) будут равносильными.

Найдем значения a и b, при которых $3a+x=0$ и $b+x=0$, т. е. уравнение (1) не имеет смысла и не равносильно уравнению (2). Для этого в уравнение (2) подставим последовательно $x=-3a$ и $x=-b$, $(a-2)(-3a)=a(6-b)$ или $a(b-3a)=0$, откуда найдем $a=0$ и $b=3a$; $(a-2)(-b)=a(6-b)$ или $2b=6a$, откуда найдем $b=3a$.

Таким образом, уравнение (1) при $a=0$ и $b=3a$ не имеет числового смысла.

При $a\neq 0$ и $b\neq 3a$ уравнения (1) и (2) равносильны и исследовать уравнение (1) можно с помощью уравнения (2).

Если $a-2\neq 0$, т. е. $a\neq 2$, то уравнение (2) имеет единственное решение $x=\dfrac{a(6-b)}{a-2}$, которое будет:

а) положительным, если $\begin{cases} a(6-b)>0 \\ a-2>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a(6-b)<0 \\ a-2<0 \end{cases}$.

Из первой системы следует, что $\begin{cases} a>2 \\ b<6 \end{cases}$. Из второй системы следуют две совокупные системы $\begin{cases} 0<a<2 \\ b>6 \end{cases}$ и $\begin{cases} a<0 \\ b<6 \end{cases}$ при $b\neq 3a$;

б) нулевым, если $a(6-b)=0$. Поскольку $a\neq 0$, то $b=6$, т. е. $\begin{cases} a\neq 0 \\ b=6 \end{cases}$;

в) отрицательным, если $\begin{cases} a(6-b)>0 \\ a-2<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a(6-b)<0 \\ a-2>0 \end{cases}$.

Из систем неравенств находим:

из первой — $\begin{cases} a<0 \\ b>6 \end{cases}$ и $\begin{cases} 0<a<2 \\ b<6 \end{cases}$;

из второй — $\begin{cases} a>2 \\ b>6 \end{cases}$ при $b\neq 3a$.

Если $a-2=0$, т. е. $a=2$, то уравнение (2) принимает вид $0\cdot x=2(6-b)$, откуда следует:

а) при $b=6$, т. е. $\begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$ уравнение имеет бесчисленное множество решений;

б) при $b\neq 6$ уравнение решений не имеет.

Ответы: $x=\dfrac{a(6-b)}{a-2}$, если $a\neq 2$, $a\neq 0$ и $b\neq 3a$; причем $x>0$ при $\begin{cases} a<0 \\ b<6 \end{cases}$, $\begin{cases} 0<a<2 \\ b>6 \end{cases}$, $\begin{cases} a>2 \\ b<6 \end{cases}$;

$x=0$ при $b=6$;

$x<0$ при $\begin{cases} a<0 \\ b>6 \end{cases}$, $\begin{cases} 0<a<2 \\ b<6 \end{cases}$, $\begin{cases} a>2 \\ b>6 \end{cases}$;

Уравнение имеет бесчисленное множество решений, если $\begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$; решений нет, если $\begin{cases} a=2 \\ b\neq 6 \end{cases}$; $a=0$; $3a=b$ и $a\neq 2$. ▲

Упражнения

1. Определить значения k, при которых корни уравнения $\frac{3}{8x-k}=\frac{1}{kx-2}$ положительны.

Ответ: $\frac{8}{3}<k<4$; $4<k<6$.

2. Решить уравнение $\frac{5}{ax-4}=\frac{1}{9x-a}$.

Ответ: $x=\frac{5a-4}{45-a}$ при $a\neq \pm 6$ и $a\neq 45$.

3. Решить уравнения и определить знаки корней:

1) $ax+2x+3=1-x$; 2) $40x+13a=\sqrt{a}+15x$;

3) $40x+12a=\sqrt{a-2}+\sqrt{a}+36x$; 4) $3x+9=a(a-x)$.

Ответы: 1) при $a\neq -3$ $x=\frac{-2}{a+3}$; при $a<3$ $x>0$;

2) при $a\geqslant 0$ $x=\frac{\sqrt{a}-13a}{25}$; $x>0$ при $0<a<1$;

3) если $a\geqslant 2$, $x=\frac{\sqrt{a-2}+\sqrt{a}-12a}{4}$; $x=0$ при $a> \sim 36$;

4) если $a=-3$, $x\in R$; если $a\neq -3$, $x=a-3$.

4. Найти все b, при каждом из которых решение уравнения $6-3b+4bx=4b+12x$ меньше 1.

5. Найти все m, при каждом из которых решение уравнения $5x-18m=21-5mx-m$ больше 3.

6. Найти все a, при каждом из которых решение уравнения $15x-7a=2+6a-3ax$ меньше 2.

Ответы: 4. $-2<b<3$ 5. $m<-3$ и $m>-1$; 6. $-5<a<4$.

7. Решить уравнение $a^2x=a(x+2)-2$.

Ответ: Если $a\neq 0$, $a\neq 1$, то $x=21a$; если $a=0$, то нет решений, если $a=1$, то $x\in R$.

8. Решить уравнения:

1) $4+mx=3x+1$; 2) $ax-7=2x+10$;

3) $ax-a=x-1$; 4) $mx+1=x+m$;

5) $\frac{mx-3}{x-1}=0$; 6) $\frac{2mx+5}{x-10}=0$;

7) $\frac{2a}{x-1}=1$; 8) $\frac{x}{a-1}-\frac{x}{a}=\frac{4a^2-1}{a(a-1)}$;

9) $\frac{mx}{m-x}=1$; 10) $\frac{ax}{3a-x}=2$;

11) $\frac{ax-4}{a-x}=1$; 12) $\frac{1}{x-2a}=\frac{2}{ax-1}$.

Ответы: 1) единственный корень $x=\frac{3}{3-m}$ при $m\neq 3$; нет корней при $m=3$;

2) единственный корень $x=\frac{17}{a-2}$ при $a\neq 2$; нет корней при $a=2$;

3) единственный корень $x=1$ при $a\neq 1$; x — любое число при $a=1$;

4) единственное решение $x=1$ при $m\neq 1$; x — любое при $m=1$;

5) единственное решение $x=\frac{3}{m}$ при $m\neq 0$ и $m\neq 3$; нет решений при $m=0$ и $m=3$;

6) единственное решение $x=-\frac{5}{2m}$ при $m=-\frac{1}{4}$ и $m\neq 0$; нет решений при $m=-\frac{1}{4}$ и $m=0$;

7) единственное решение $x=2a+1$ при $a\neq 0$, нет решений при $a=0$;

8) единственное решение $x=2a+1$ при $a\neq 0$, $a\neq\frac{1}{2}$ и $a\neq 1$; x — любое при $a=\frac{1}{2}$; нет решений при $a=0$ и $a=1$;

9) единственное решение $x=\frac{m}{m+1}$ при $m\neq -1$ и $m\neq 0$; нет решений при $m=-1$ и $m=0$;

10) единственное решение $x=\frac{6a}{a+2}$ при $a\neq -2$ и $a\neq 0$; нет решения при $a=-2$ и $a=0$;

11) единственное решение $x=\frac{a+4}{a+1}$ при $a\neq -1$ и $a\neq \pm 2$; нет решения при $a=-1$ и $a=\pm 2$;

12) единственное решение $x=\frac{4a-1}{2-a}$ при $a\neq 2$ и $a\neq\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$; нет решения при $a=2$ и $a=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$.

9. Решить уравнение

$$\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x}.$$

Ответ: если $a\neq 0$ и $a\neq \pm 1$, то $x=a^2-1$; если $a=0$, $x\in R\setminus\{0\}$; если $a=1$, $x\in R\setminus\{1\}$; если $a=-1$, уравнение не имеет смысла.

2. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Справочный материал

Неравенства вида $a_0x+a_1>0$, $a_0x+a_1<0$, $a_0\neq 0$ называются **линейными неравенствами.**

Множество решений неравенства $a_0x+a_1>0$ определяется знаком числа a_0:

а) если $a_0>0$, то решениями являются все числа промежутка $]-a_1/a_0;\ +\infty[$;

б) если $a_0<0$, то решениями являются все числа промежутка $]-\infty;\ -a_1/a_0[$.

Аналогично для неравенства $a_0x+a_1<0$ имеем:

а) если $a_0>0$, то решениями являются все числа промежутка $]-\infty;\ -a_1/a_0[$;

б) если $a_0<0$, то решениями являются все числа промежутка $]-a_1/a_0;\ +\infty]$.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить линейное неравенство

$$x-2\frac{a-1}{a}\leqslant\frac{2}{3a}(x+1).$$

$\triangle$ Видно, что при $a=0$ неравенство решений не имеет, так как обе части неравенства теряют смысл.

Преобразуем исходное неравенство

$$\left(1-\frac{2}{3a}\right)x\leqslant\frac{2}{3a}+2-\frac{2}{a}\Rightarrow\left(1-\frac{2}{3a}\right)x\leqslant 2\left(1-\frac{2}{3}a\right).$$

Если $1-\frac{2}{3}a>0$, то $x\leqslant 2$. Установим при каких a $1-\frac{2}{3a}>0$. $(3a-2)a>0\Rightarrow a\left(a-\frac{2}{3}\right)>0\Rightarrow a<0$ и $a>\frac{2}{3}$, т. е. $x\leqslant 2$ при $a<0$ и $a>\frac{2}{3}$.

Если $1-\frac{2}{3a}<0$, то $x\geqslant 2$ при $0<a<\frac{2}{3}$.

Если $a=\frac{2}{3}$, то $x\in\mathrm{R}$.

Ответ: если $a<0$, то $x\in]-\infty;\ 2]$; если $a=0$, решений нет; если $0<a<\frac{2}{3}$, то $x\in[2;\ +\infty[$; если $a=\frac{2}{3}$, то $x\in\mathrm{R}$; если $\frac{2}{3}<a$, то $x\in]-\infty;\ 2]$. ▲

Пример 2. Решить неравенство $2ax+5>a+10x$.

$\triangle$ $2ax-10x>a-5\Leftrightarrow 2x(a-5)>a-5$.

Последующие действия выполняем, исследуя возможные варианты:

1) $a-5\neq 0$, так как надо строгое неравенство;

2) обе части неравенства можно разделить на $(a-5)$, при этом следует учесть знак этой разности. При $a-5>0$ $x>\frac{(a-5)}{2(a-5)}=\frac{1}{2}$, т. е. при $a>5$ $x>\frac{1}{2}$. При $a-5<0$ $x<\frac{a-5}{2(a-5)}=\frac{1}{2}$, т. е. при $a<5$ $x<\frac{1}{2}$.

Ответ: $x>\frac{1}{2}$ при $a>5$; $x<\frac{1}{2}$ при $a<5$; нет решений при $a=5$. ▲

Пример 3. Решить неравенство $mx-6\leqslant 2m-3x$.

△ Данное неравенство является нестрогим. Это означает, что при $m+3=0$ переменная x может принимать любые действительные значения, в этом можно убедиться подстановкой. Например, при $m=-3$ и $x=5$ $5\cdot 0=2\cdot 0$ — истина и при $x=-1$ $-1(-3+3)=2(-3+3)$ — истина и т. д.

Ответ: при $m>-3$ $x\leqslant 2$; при $m<-3$ $x\geqslant 2$; при $m=-3$ $x\in \mathrm{R}$. ▲

Замечание: формальное решение неравенств, рассмотренных в примерах 2 и 3, приводит к распространенной ошибке, которая сводится к делению левой и правой частей неравенства на выражение, содержащее переменную, а это приводит к потере решений и к коротким ответам.

Неправильные решения:

$$2x(a-5)>a-5\Leftrightarrow x>\frac{a-5}{2(a-5)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2};$$

$$x(m+3)\leqslant 2(m+3)\Leftrightarrow x\leqslant\frac{2(m+3)}{m+3}=2\Leftrightarrow x\leqslant 2.$$

Упражнения

1. Решить линейное неравенство:

1) $ax+x-2a+1>0$. Подобрать a так, чтобы решение удовлетворяло условию $x<a$.

2) $ax+x+1<0$. Подобрать a так, чтобы решение удовлетворяло условию $1<x$.

Ответы: 1) при $a<-1$ $x<\frac{2a-1}{a+1}$; при $a=-1$ $x\in\mathrm{R}$; при $a>-1$ $x>\frac{2a-1}{a+1}$; $x<a$ при $a<-1$;

2) при $a<-1$ $x>-\frac{1}{a+1}$; при $a=-1$ $x\in\varnothing$; при $a>-1$ $x<-\frac{1}{a+1}$; $1<x$ при $-2<a<-1$.

2. Решить неравенства:

1) $ax-a^2\geqslant x-1$; 2) $ax+16\leqslant 4x+a^2$;

3) $mx > 1 + 3x$; 4) $mx < 4 - 2x$;

5) $x - 5 > nx - 1$; 6) $5 + kx \leqslant 5x + k$.

Ответы: 1) $x \geqslant a+1$ при $a > 1$, $x \leqslant a+1$, при $a < 1$, x — любое при $a=1$;

2) $x \leqslant a+4$ при $a > 4$, $x \geqslant a+4$ при $a < 4$, x — любое при $a=4$;

3) $x > \frac{1}{m-3}$ при $m > 3$, $x < \frac{1}{m-3}$ при $m < 3$, нет решений при $m=3$;

4) $x < \frac{4}{m+2}$ при $m > -2$, $x > \frac{4}{m+2}$ при $m < -2$, нет решений при $m = -2$;

5) $x > \frac{4}{1-n}$ при $n < 1$, $x < \frac{4}{1-n}$ при $n > 1$, нет решений при $n=1$;

6) $x \leqslant 1$ при $k > 5$, $x \geqslant 1$ при $k < 5$, x — любое при $k=5$.

3. Решить неравенства:

1) $\frac{a^2x+1}{2} - \frac{a^2x+3}{3} < \frac{a+9x}{6}$; 2) $\frac{ax+1}{3} - \frac{x-4a}{2} \geqslant \frac{a^2}{6}$.

Ответ: 1) при $|a| > 3(-\infty;\ 1/(a-3))$ при $|a| < 3(1/(a-3);\ +\infty)$; при $a = -3$ решений нет; при $a=3$ $x \in R$.

2) при $a < 3/2\left(-\infty;\ \frac{a^2-12a-2}{2a-3}\right)$; при $a=3/2$ $x \in R$; при $a > 3/2\left(\frac{a^2-12a-2}{2a-3};\ +\infty\right)$.

3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ

Справочный материал

Абсолютной величиной или **модулем числа** x называется само число x, если $x > 0$, число $(-x)$, если $x < 0$, и нуль, если $x=0$. Другими словами:

$$|x| = \begin{cases} x, \ \forall \quad x > 0 \\ 0, \quad \text{если } x=0 \\ -x, \ \forall \quad x < 0. \end{cases}$$

Из определения следует, что $|x| \geqslant 0$ и $|x| \geqslant x$ для всех $x \in R$.

Неравенство $|x| < a (a > 0)$ равносильно двойному неравенству $-a < x < a$.

Неравенство $|x| < a (a < 0)$ не имеет смысла, так как $|x| \geqslant 0$.

Неравенство $|x| > a (a > 0)$ равносильно двум неравенствам $x \in]-\infty;\ -a(\cup)a;\ +\infty[$.

Неравенство $|x| > a (a < 0)$ справедливо $\forall x \in R$.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение $|x-2|=b$.

$\triangle$ Так как $|x-2|\geqslant 0$, то при $b<0$ данное уравнение решений не имеет. Если $b=0$, то уравнение имеет решение $x=2$, так как по определению $|x-2|=0$, $x-2=0$, $x=2$.

Если $b>0$, то решениями уравнения являются числа $x=2+b$ и $x=2-b$.

Ответ: если $b<0$, то решений нет; если $b=0$, то $x=2$; если $b>0$, $x=2+b$, $x=2-b$.$\blacktriangle$

Пример 2. Решить неравенство $|x-3|>a$.

$\triangle$ При $a<0$ исходное неравенство верно для всех $x\in R$, так как $|x-3|\geqslant 0$.

При $a=0$ исходное неравенство верно для всех $x\neq 3$.

При $a>0$ решением неравенства будут все точки числовой прямой, которые удалены от точки $x=3$ на расстояние больше a, т. е. $x<3-a$ и $x>3+a$.

Ответ: Если $a<0$, то $x\in R$; если $a=0$, то $x\in R\setminus\{3\}$; если $a>0$, то $x\in]-\infty;\ 3-a[\cup]3+a;\ +\infty[$. $\blacktriangle$

Пример 3. Решить уравнение $|x-a|=|x-4|$.

$\triangle$ Решим методом интервалов, для 2-х случаев:

1) $a\leqslant 4$.

Первый интервал

$$\begin{cases} x\leqslant a \\ -x+a=-x+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leqslant a \\ a=4 \end{cases} \qquad x\leqslant 4;$$

второй интервал

$$\begin{cases} a<x<4 \\ x-a=-x+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a<x<4 \\ x=\frac{a+4}{2}, \end{cases} \qquad a<\frac{a+4}{2}<4\Rightarrow a<4,$$

т. е. если $a<4$, то $x=\frac{a+4}{2}$;

третий интервал

$$\begin{cases} 4\leqslant x \\ x-a=x-4 \end{cases} \quad a=4, \text{ т. е. если } a=4, \text{ то } 4\leqslant x.$$

2) $4\leqslant a$.

Первый интервал

$$\begin{cases} x\leqslant 4 \\ -x+a=-x+4 \end{cases} \qquad a=4, \qquad \text{то } x\leqslant 4;$$

второй интервал

$$\begin{cases} 4<x<a \\ -x+a=x-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4<x<a \\ x=\frac{a+4}{2}, \end{cases} \qquad 4<\frac{a+4}{2}<a, \qquad a>4,$$

т. е. если $4<a$, то $x=\frac{a+4}{2}$;

третий интервал

$$\begin{cases} a\leqslant x \\ x-a=x-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\leqslant x \\ a=4, \end{cases} \qquad 4\leqslant x.$$

Ответ: если $a=4$, то $x\in R$, если $a\in R\backslash\{4\}$, то $x=\frac{a+4}{2}$. ▲

Пример 4. Для всех a решить неравенство $|1+x|\leqslant ax$.

△ Вскрываем модуль при $1+x\geqslant 0$. Тогда исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 1+x\geqslant 0 \\ 1+x\leqslant ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -1 \\ (1-a)x\leqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x\geqslant -1 \\ a<1 \\ x\leqslant -\frac{1}{1-a} \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x\geqslant -1 \\ a>1 \\ x\geqslant -\frac{1}{1-a}. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

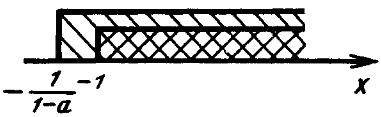
Решим систему (1) при $a<1$. Пересечение $-1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{1-a}$ возможно тогда, когда $-1<-\frac{1}{1-a}$, т. е. $1-a>1\Leftrightarrow a<0$ при $a<0$ $-1<x<-\frac{1}{1-a}$.

При $-\frac{1}{1-a}<-1$, т. е. при $0<a<1$ система (1) не имеет решений, а значит и исходное неравенство также.

Решим систему (2) при $a>1$: возможны два варианта — точка $-\frac{1}{1-a}$ расположена правей -1, т. е. и пересечение бу-

дет $-\frac{1}{1-a}\leqslant x$ при $\begin{cases} -1<-\frac{1}{1-a} \\ a>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-a<1 \\ a>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ a>1 \end{cases}$.

При $a>1$ $-\frac{1}{1-a}\leqslant x$; точка $-\frac{1}{1-a}$ расположена левей -1, т. е.



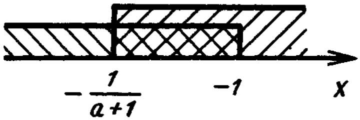
пересечение будет $-1 \leqslant x$ при $\begin{cases} -\frac{1}{1-a} < -1 \\ a > 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 < -a+1 \\ a > 1 \end{cases}$ $a \in \varnothing$.

$$\begin{cases} 1+x<0 \\ -(1+x) \leqslant ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ -(a+1)x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

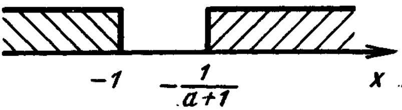
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ (a+1)x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ a>-1 \\ x \geqslant -\frac{1}{a+1} \end{array}\right. \text{(3) и } \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ a<-1 \\ x \leqslant -\frac{1}{a+1} \end{array}\right. \text{(4).}$$

Решим систему (3). Решение есть, если



т. е. $-\frac{1}{a+1} < x < -1$ при $\begin{cases} -\frac{1}{a+1} < -1 \\ a > -1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ при $-1 < a < 0$ решение системы (3) $-\frac{1}{a+1} \leqslant x \leqslant -1$.

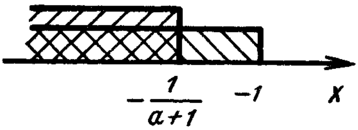
Решения нет, если



т. е.

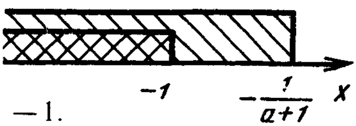
$\begin{cases} -1 < -\frac{1}{a+1} \\ a > -1 \end{cases}$ $\Rightarrow a > 0$. При $a > 0$ решения нет.

Решим систему (4). Если $\begin{cases} -\frac{1}{a+1} \leqslant -1 \\ a < -1 \end{cases}$, т. е.



то при $\begin{cases} a > 0 \\ a < -1 \end{cases}$ $a \in \varnothing$.

Если $\begin{cases} -1 < \frac{-1}{a+1} \\ a < -1 \end{cases}$, т. е.



пересечение $x < -1$ при $a < -1$.

Ответ: При $a>1$ $x\in\left[\frac{1}{a-1};+\infty\right[$; при $a\in]0;1]$ решений нет; при $a\in]-1;0[$ $x\in\left[-\frac{1}{a+1};\frac{1}{a-1}\right]$; при $a\leqslant-1$ $x\in\left]-\infty;\frac{1}{a-1}\right]$. ▲

Пример 5. Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $|x+3|-a|x-1|=4$.

△ Рассмотрим три промежутка: 1) $-\infty<x<-3$, 2) $-3\leqslant x\leqslant 1$, 3) $1<x<+\infty$ и решим исходное уравнение на каждом промежутке.

1) $-\infty<x<-3$, $-(x+3)+a(x-1)=4$, $(a-1)x=7+a$,

при $a=1$ уравнение не имеет решений. При $a\neq 1$ уравнение имеет корень $x_1=\frac{7+a}{a-1}$. Теперь надо выяснить, при каких a x_1 попадает на $x<-3$, т. е. $\frac{7+a}{a-1}<-3$, $\frac{7+a+3a-3}{a-1}<0$, $4\frac{a+1}{a-1}<0$, $-1<a<1$. Следовательно, исходное уравнение на $x\in]-\infty;-3[$ имеет один корень x_1 при $a\in]-1;1[$, на остальных a корней не имеет.

2) $-3\leqslant x\leqslant 1$. $x+3+a(x-1)=4\Rightarrow(a+1)x=a+1$. (*).

При $a=-1$ решением уравнения (*) является любое x; т. е. $x\in R$, но мы решаем на $x\in[-3;1]$. Если $a\neq-1$, то уравнение (*) имеет один корень $x=1$.

3) $1<x<+\infty$, $x+3-a(x-1)=4\Rightarrow(1-a)x=1=a$. (**)

При $a=1$ решением уравнения (**) является любое число, т. е. $x\in R$, но мы решаем на $x\in]1;+\infty[$. Если $a\neq1$, то $x=1$, но $x\in]1;+\infty[$.

Ответ: При $|a|<1$ $x_1=\frac{7+a}{a-1}$ и $x_2=1$; при $a=1$ $x>1$; при $a=-1$ $x\in[-3;1]$; при $|a|>1$ $x=1$. ▲

Пример 6. Решить неравенство

$$|x-a|+|x+a|<b,\ a\neq0.$$

△ Для решения этого неравенства с двумя параметрами a и b воспользуемся геометрическими соображениями. На рис. 1 построены графики функций $f(x)=|x-a|+|x+a|$ и $y=b$. Очевидно, что при $b<2|a|$ прямая $y=b$ проходит не выше горизонтального отрезка кривой $y=|x-a|+|x+a|$ и, следовательно, неравенство в этом случае не имеет решений (рис. 1, *а*). Если же $b>2|a|$, то прямая $y=b$ пересекает график функции $y=f(x)$ в двух точках $(-b/2;\ b)$ и $(b/2;\ b)$ (рис. 1, *б*) и неравенство

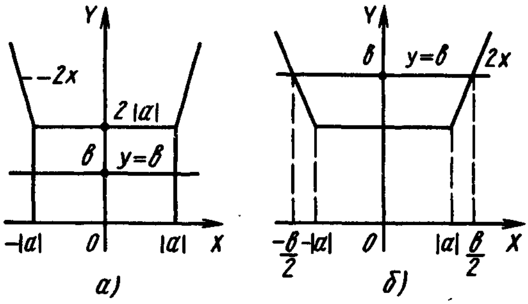


Рис. 1

в этом случае справедливо при $x\in]-b/2;\ b/2[$, т. к. кривая $y=f(x)$ расположена под прямой $y=b$.

Ответ: Если $b\leqslant 2|a|$, решений нет; если $b>2|a|$, то $x\in]-b/2;\ b/2[$. ▲

Пример 7. Найти все значения a, при которых уравнение

$$a^3+a^2|a+x|+|a^2x+1|=1 \tag{1}$$

имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами.

△ Уравнение [1] можно записать в виде

$$|a^2x+1|+|a^3+a^2x|=a^2x+1-(a^3+a^2x).$$

Из свойств абсолютной величины следует, что равенство $|A|+|B|=A-B$, справедливо тогда и только тогда, когда $A\geqslant 0$ и $B\leqslant 0$. Следовательно, уравнение (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2x+1\geqslant 0 \\ a^3+a^2x\leqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Значение $a=0$ удовлетворяет условию задачи, так как в этом случае система (2), а следовательно, и уравнение (1) имеют решением всех $x\in\mathbb{R}$.

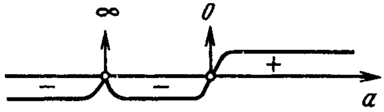
Пусть $a\neq 0$. Тогда система неравенств (2) равносильна системе

$$\begin{cases} x\geqslant -a^{-2} \\ x\leqslant -a. \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, необходимо найти все такие значения a, при которых система (2) имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами. Сравним числа $-a$ и $-1/a^2$. Найдем их разность:

$$\frac{-1}{a^2}-(-a)=\frac{-1}{a^2}+a=\frac{-1+a^3}{a^2}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2}.$$

Так как $a^2+a+1>0$ при любом a, то a^2+a+1 на знак разности сравниваемых чисел не влияет. Согласно методу интервалов имеем:



если $a<1$, $a\neq 0$, то $-a^{-2}<-a$; если $a=1$, то $-a^{-2}=-a=-1$; если $a>1$, то $-a^{-2}>-a$.

Следовательно:

а) если $a>1$, то система (3) решений не имеет, поэтому и исходная задача решений не имеет;

б) если $a=1$, то из (3) $\Rightarrow x=-1$, т. е. имеется единственное решение, и условия задачи не выполнены;

в) если $0<a<1$, то $-1<-a<0$. Поэтому отрезок $[-a^{-2}; -a]$ будет содержать не менее четырех целых чисел, если справедливо неравенство $-a^{-2}\leqslant -4$. Решим систему

$$\begin{cases} 0<a<1 \\ -1/a^2\leqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1 \\ 1-4a^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1 \\ (1/2-a)(1/2+a)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1 \\ -1/2\leqslant a\leqslant 1/2 \end{cases} \Rightarrow 0<a\leqslant 1/2.$$

Итак, если $0<a\leqslant 1/2$, то исходное уравнение имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами.

г) если $-1<a<0$, то $0<-a<1$ и отрезок $[-a^{-2}; -a]$ будет содержать по крайней мере четыре целых числа, если справедливо неравенство $-a^{-2}\leqslant -3$. Решим систему

$$\begin{cases} -1<a<0 \\ -a^{-2}\leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<a<0 \\ -1\leqslant -3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<a<0 \\ 3a^2-1\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<a<0 \\ \left(a-1/\sqrt{3}\right)\left(a+1/\sqrt{3}\right)\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<a<0 \\ -1/\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 1/\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{3}\leqslant a<0.$$

Итак, если $-\sqrt{3}/3\leqslant a<0$, то уравнение имеет не менее четырех целых решений;

д) если $a=-1$, то отрезку $[-1; 1]$ принадлежат только три целых решения, т. е. условия задачи не выполнены;

е) если $a<-1$, то $-1<-a^{-2}<0$ и для того чтобы отрезку $[-a^{-2}; -a]$ принадлежало не менее четырех целых чисел, необходимо выполнение неравенства $-a\geqslant 3$, т. е. неравенства $a\leqslant -3$. Итак, при $a\leqslant -3$ исходное уравнение имеет не менее четырех целых решений.

Объединяя все результаты, получаем множество искомых значений числа a — промежуток $(-\infty;\ -3)$ и отрезок $[-\sqrt{3}/3;\ 1/2]$. ▲

Пример 8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x-a=2|2|x|-a^2|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

△ При $a=0$ данное уравнение имеет вид $x=4|x|$, т. к. это уравнение имеет один корень $x=0$, то значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим функцию $f(x)=2|2|x|-a^2|-x+a$, где a — некоторое фиксированное отличное от нуля число.

Если x принадлежит множеству $x\leqslant -a^2/2$, то $2|x|-a^2=$ $=-2x-a^2\geqslant 0$ и $f(x)=2(-2x-a^2)-x+a=-5x-2a^2+a$;
если $x\in[-a^2/2;\ 0]$, то $2(x)-a^2=-2x-a^2\leqslant 0$
и $f(x)=2(2x+a^2)-x+a=3x+2a^2+a$;
если $x\in[0;\ a^2/2]$, то $2(x)-a^2=2x-a^2\leqslant 0$
и $f(x)=2(-2x+a^2)-x+a=-5x+2a^2+a$;
если $x\in[a^2/2;\ +\infty[$, то $2(x)-a^2=2x-a^2\geqslant 0$
и $f(x)=2(2x-a^2)-x+a=3x-2a^2+a$.

Рассматривая найденные выражения для $f(x)$, видим, что на промежутке $x\in[-\infty;\ -a^2/2]$ функция $f(x)$ монотонно убывает, на промежутке $x\in[-a^2/2;\ 0]$ — монотонно возрастает, на промежутке $x\in[0;\ a^2/2]$ — монотонно убывает и на промежутке $x\in[a^2/2;\ +\infty)$ — монотонно возрастает. Это означает, что на указанных промежутках исходное уравнение имеет не более одного корня и что наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве $x\geqslant 0$ равно $f\left(\frac{a^2}{2}\right)=-\frac{a^2}{2}+a$, а на множестве $x\leqslant 0$ наименьшее значение $f(x)$ равно $f\left(-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^2}{2}+2$.

Если значение a таково, что $f(0)<0$ (рис. 2), то на промежутках $-a^2/2\leqslant x\leqslant 0$, $0\leqslant xa^2/2$ функция $f(x)$ отрицательна, и, значит данное уравнение на этих промежутках не имеет корней.

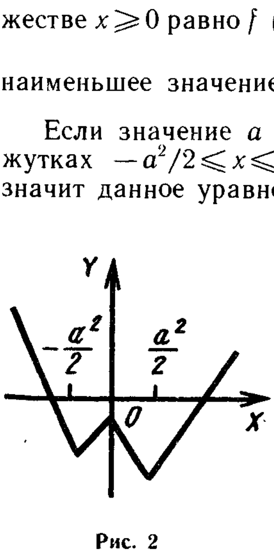


Рис. 2

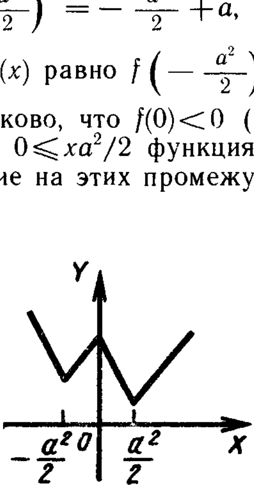


Рис. 3

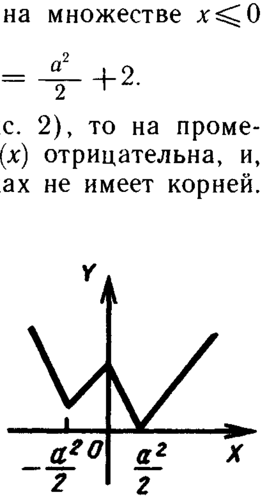


Рис. 4

Отсюда по доказанному выше следует, что данное уравнение имеет не более двух корней. Следовательно, искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству $f(0)\geqslant 0$.

Если $f(0)=2a^3+a=0$, то ввиду предположения, что $a\neq 0$ имеем $a=-1/2$. При $a=-1/2$ находим $f\left(-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}<0$, $f\left(\frac{a^2}{2}\right)=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}<0$. Отсюда следует, что при $a=-1/2$ на каждом из промежутков $-\infty<x\leqslant -a^2/2$, $a^2/2\leqslant x<+\infty$ исходное уравнение имеет по одному корню:

$$x_1=\frac{-2a^2+a}{5}=-\frac{1}{5};\qquad x_2=\frac{2a^2-a}{3}=\frac{1}{3}.$$

Третий корень $x_3=0$ принадлежит как промежутку $-a^2/2\leqslant x\leqslant 0$, так и промежутку $0\leqslant x\leqslant a^2/2$. Таким образом, значение $a=-1/2$ удовлетворяет условию задачи. Далее будем считать, что фиксированное число $a(a\neq 0)$ удовлетворяет неравенству $f(0)>0$. Отметим, еще, что при $a\neq 0$

$$f\left(\frac{a^2}{2}\right)=-\frac{a^2}{2}+a<\frac{a^2}{2}+a=f\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

Если $f(a^2/2)>0$, то $f(-a^2/2)>0$, и поэтому функция $f(x)$ положительная для всех x (рис. 3). Но это означает, что исходное уравнение не имеет корней.

Если $f(a^2/2)=0$, то $f(-a^2/2)>0$, и поэтому функция $f(x)$ обращается в нуль лишь в точке $x=a^2/2$ (рис. 4). Это означает, что исходное уравнение имеет один корень.

Если $f(a^2/2)<0$, но $f(-a^2/2)>0$, то функция $f(x)$ обращается в нуль лишь в одной точке каждого из интервалов $0<x<a^2/2$ и $a^2/2<x<+\infty$. А это означает, что исходное уравнение имеет два корня (рис. 5).

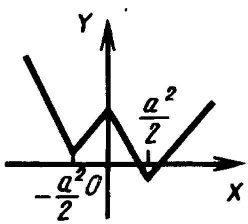


Рис. 5

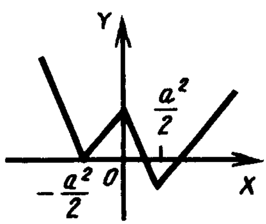


Рис. 6

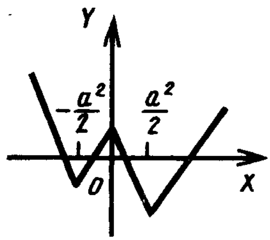


Рис. 7

Если $f(a^2/2)<0$ и $f(-a^2/2)=0$, то функция $f(x)$ обращается в нуль в точке $-a^2/2$ и еще в двух точках: одной в интервале $0<x<a^2/2$ и другой в интервале $a^2/2<x<+\infty$ (рис. 6).

Следовательно, исходное уравнение имеет три корня. Это возможно, когда a удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(a^2/2)<0 \\ f(-a^2/2)=0, \end{cases} \quad \text{т. е. условиям} \quad \left[\begin{array}{c} 2a^2+a>0 \\ -\dfrac{a^2}{2}+a<0 \\ a^2/2+a=0 \end{array}\right. .$$

Легко видеть, что этим условиям удовлетворяет лишь $a=-2$.

Наконец, если $f(a^2/2)<0$ и $f(-a^2/2)<0$ (рис. 7), то исходное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: $a=-2$, $a=-1/2$; при $a=-2$: $x_1=-2$, $x_2=6/5$, $x_3=10/3$; при $a=-1/2$: $x_1=-1{,}5$, $x_2=0$, $x_3=1/3$.

Упражнения

1. Для каждого значения a решить уравнения:

1) $2|x|+|a|=x+1$; 2) $|x-a+1|+|x-2a|=x$; 3) $|x+3|=-a$.

Ответ: 1) $a=\pm 1$ $x=0$; $|a|<1$, $x=1-|a|$, $x=\dfrac{|a|-1}{3}$;

2) $a<1$ нет решений; $a=1$ $x=2$; $a>1$, $x=a+1$, $x=3a-1$;

3) $a>0$ нет решений; $a=0$ $x=-3$; $a<0$ $x=a-3$ и $x=-a-3$.

2. Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнениям:

1) $a|x+3|+2|x+4|=2$

2) $3|x-2|-a|2x+3|=21/2$

Ответы: 1) $a=2$, $-4\leqslant x\leqslant -3$; $a=-2$, $x\geqslant -3$; $|a|>2$, $x=-3$; $|a|<2$, $x_1=-3$, $x_2=-\dfrac{3a+10}{2+a}$.

2) $a=\dfrac{3}{2}$, $x\leqslant -\dfrac{3}{2}$; $a=-\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$; $|a|>\dfrac{3}{2}$, $x=-\dfrac{3}{2}$; $|a|<\dfrac{3}{2}$, $x_1=-\dfrac{3}{2}$, $x_2=\dfrac{6a+33}{6-4a}$.

3) $x\leqslant 3$ при $a=-1$; $-3\leqslant x\leqslant 2$ при $a=1$; $x=\{-3\}$ при $|a|>1$; $x\in\left\{-3;\ \dfrac{7-3a}{a+1}\right\}$ при $|a|<1$.

3. Для всех a решить неравенства.

1) $|3x-a|+|2x+a|\leqslant 5$;
2) $|x-3a|-|x+a|<2a$;
3) $|x-a|-2a>|x-3a|$;
4) $|x+2a|+|x-a|<3x$;
5) $|x-1|\geqslant ax$;
6) $|x-a|\leqslant x$;
7) $|x+a|\leqslant x$;
8) $|ax|\geqslant 1+x$;

9) $|2x+a|>\frac{3a}{2}|x-a|$;

10) $|1-|x||<a-x$;

11) $|x-a|\geqslant x$;

12) $|x-a|+|x|+|x+a|\leqslant b$.

Ответы: 1) $2<a\leqslant 3$, $x\in[2a-5;\ 1]$; $|a|\leqslant 2$, $x\in[-1;\ 1]$; $-3\leqslant a\leqslant -2$, $x\in[-1;\ 2a+5]$; $|a|>3$, $x\in\varnothing$.

2) $a<0$, $x\in]-\infty;\ 2a[$; $a=0$, $x\in\varnothing$; $a>0$, $x\in]0;\ +\infty[$;

3) $a<0$, $x\in]-\infty;\ a[$; $a\geqslant 0$, $x\in\varnothing$.

4) $a<0$, $x\in]-a;\ +\infty[$; $a\geqslant 0$, $x\in]a;\ +\infty[$.

5) $a<-1$, $x\in\left[\frac{1}{a+1};\ +\infty\right[$; $-1\leqslant a\leqslant 0$, $x\in R$; $0<a\leqslant 1$ $x\in$ $\in\left(-\infty;\ \frac{1}{1+a}\right]\cup\left]\frac{1}{1-a};\ +\infty\right[$; $a>1$, $x\in\left]-\infty;\ \frac{1}{1+a}\right]$.

6) $a\leqslant 0$, $x\in R$; $a>0$, $x\in]-\infty;\ a/2]$.

7) $a\leqslant 0$, $x\in[-a/2;\ +\infty[$; $a>0$, $x\in\varnothing$.

8) $a=0$, $x=-1$; $0<|a|\leqslant 1$, $x\in\left]-\infty;\ \frac{-1}{1+|a|}\right]$; $|a|>1$, $x\in\left]-\infty;\ \frac{-1}{1+|a|}\right]\cup\left[\frac{1}{|a|-1};\ +\infty\right[$.

9) $a\leqslant 0$, $x\in\left]-\infty;\ -\frac{a}{2}\right[\cup\left]-\frac{a}{2};\ +\infty\right[$; $a>0$, $x\in\left]-\infty;\ -\frac{7a}{2}\right[\cup\left]\frac{a}{2};\ +\infty\right[$.

10) $a\leqslant -1$ решений нет; $-1<a\leqslant 1$, $x\in\left]-\infty;\ \frac{a-1}{2}\right[$; $a>1$, $x\in\left]\frac{a+1}{2};\ +\infty\right[$.

11) $a\leqslant 0$, $x\in R$; $a>0$, $x\in]-\infty;\ a/2]$.

12) Если $b<2|a|$, то решений нет; если $2|a|\leqslant b\leqslant 3|a|$, то $x\in[-b+2|a|;\ b-2|a|]$; если $b>3|a|$, то $x\in[-b/3;\ b/3]$.

4. Найти все значения a, при которых уравнения имеют три различных корня. Найти эти корни:

1) $x-a/2=4|4|x|-a^2|$, 2) $x-a/3=9|9|x|-a^2|$,
3) $x-a/2=2|2|x|-a^2|$.

Ответы: $\{-1;\ 15/17;\ 17/15\}$ при $a=-2$; $\left\{-1/136;\ 0;\ \frac{1}{120}\right\}$ при $a=-1/8$;

2) $\{-1;\ 41/40;\ 40/41\}$ при $a=-3$; $\{-1/3321;\ 0;\ 1/3240\}$ при $a=-1/27$;

3) $\{-1/2;\ 3/10;\ 5/6\}$ при $a=-1$; $\{-1/20;\ 0;\ 1/12\}$ при $a=-1/4$.

5. Решить уравнения

1) $|x-a|+|x+a+1|=3$; 2) $|x|=1-|a|$, 3) $||x|-|a||=1$.

Ответы: 1) При $a<-2$ решений нет; при $a=-2$ и $a=1$

$x \in [-2; 1]$; при $-2 < a < 1$ $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; при $a > 1$ решений нет.

2) При $a < -1$ решений нет; при $a = -1$ $x = 0$; при $-1 < a < 0$ $x_1 = a + 1$, $x_2 = -a - 1$; при $0 \leqslant a < 1$ $x_1 = 1 - a$, $x_2 = a - 1$; при $a = 1$ $x = 0$; при $a > 1$ решений нет.

3) При $-\infty < a < -1$ $x_1 = -a + 1$, $x_2 = -a - 1$; $x_3 = a + 1$, $x_4 = a - 1$; при $a = -1$ $x_1 = 0$, $x_2 = a - 1$, $x_3 = -a + 1$; при $-1 < a < 0$ $x_1 = -a + 1$, $x_2 = a - 1$; при $0 \leqslant a \leqslant 1$ $x_1 = -a - 1$, $x_2 = a + 1$; при $a = 1$ $x_1 = 0$, $x_2 = -a - 1$, $x_3 = a + 1$; при $1 < a < +\infty$ $x_1 = -a + 1$, $x_2 = -a - 1$, $x_3 = a + 1$, $x_4 = a - 1$.

4. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Справочный материал

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — числа, причем $a \neq 0$ называется квадратным уравнением. Напомним, что $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена. Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

и тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Если $D = 0$, то уравнение имеет два совпадающих корня $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ и тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

В случае, когда b есть четное число, т. е $b = 2k$, корни квадратного уравнения определяются по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Для решения приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ используется формула

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

а также формулы Виета:

$$p = -(x_1 + x_2),$$
$$q = x_1 x_2.$$

Условия параметрических квадратных уравнений разнообразны. Например, найти значение параметра, при котором корни положительны, отрицательны, имеют разный знак, больше или меньь какого-либо числа и т. д. Для решения их следует использовать свойства корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Если $D>0$, $a>0$, то уравнение имеет два действительных различных корня, знаки которых при $c>0$ одинаковые и противоположны знаку коэффициента b, а при $c<0$ разные, причем по абсолютной величине больше тот из корней, знак которого противоположен знаку коэффициента b.

2. Если $D=0$, $a>0$, то уравнение имеет действительные и равные между собой корни, знак которых противоположен знаку коэффициента b.

3. Если $D<0$, $a>0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Аналогично можно установить свойства корней квадратного уравнения и для $a<0$. Кроме того, справедливы следующие утверждения:

1. Если в квадратном уравнении поменять местами коэффициенты a и c, то получим уравнение, корни которого обратны корням данного.

2. Если в квадратном уравнении поменять знак коэффициента b, то получим уравнение, корни которого противоположны корням данного.

3. Если в квадратном уравнении коэффициенты a и c разных знаков, то оно имеет действительные корни.

4. Если $a>0$ и $D=0$, то левая часть квадратного уравнения есть полный квадрат и, наоборот, если левая часть уравнения есть полный квадрат, то $a>0$ и $D=0$.

5. Если все коэффициенты уравнения рациональны и дискриминант выражает точный квадрат рационального числа, то корни уравнения рациональны.

Примеры с решениями

Пример 1. Установить при каких a уравнение

$$x^2-2(a-1)x+a+5=0:$$

1) не имеет корней.

Если уравнение не имеет корней, то необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $D<0$:

$$D=(a-1)^2-(a+5)<0 \Rightarrow a^2-2a+1-a-5<0$$

$$a^2-3a-4<0 \quad a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$-1<a<4.$$

2) имеет положительные корни.

Раз корни есть, то $D>0$, если они оба положительные, то $x_1+x_2>0$ и $x_1x_2>0$. Воспользуемся теоремой Виета, тогда для данного уравнения

$$\begin{cases} D=(a-1)^2-(a+5)>0 \\ x_1+x_2=2(a-1)>0 \\ x_1x_2=a+5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<-1 \text{ и } 4<a \\ a>1 \\ a>-5 \end{cases} \Rightarrow a>4.$$

3) имеет отрицательные корни

$$\begin{cases} D=(a-1)^2-(a+5)>0 \\ x_1+x_2=a-1<0 \\ x_1x_2=a+5>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a<-1 \text{ и } 4<a \\ a<1 \\ a>-5 \end{cases}$$

$$5-<a<-1$$

4) имеет корни разного знака

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1x_2=a+5<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a<-1 \text{ и } 4<a \\ a<-5 \end{cases} \qquad a<-5$$

5) имеет совпадающие корни

$$D=0 \; a=-1 \text{ и } a=4. \; \blacktriangle$$

Пример 2. Найти все значения параметра a, для которых квадратное уравнение $(a+1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$:
а) имеет два различных корня; б) не имеет корней; в) имеет два равных корня.

$\triangle$ Данное уравнение по условию является квадратным, а поэтому $a\neq-1$. Рассмотрим дискриминант данного уравнения

$$D=(a+1)^2-(a+1)(a-2)=12(a+1).$$

При $a>-1$ уравнение имеет два различных корня, т. к. $D>0$. При $a<-1$ уравнение корней не имеет, т. к. $D<0$. Данное квадратное уравнение не может иметь двух равных корней, т. к. $D=0$ при $a=-1$, а это противоречит условию задачи. $\blacktriangle$

Пример 3. Решить уравнение $ax^2+2x+1=0$.

$\triangle$ При $a=0$ получаем линейное уравнение $2x+1=0$, которое имеет единственное решение $x=-1/2$. При $a\neq0$ уравнение является квадратным и его дискриминант $D=4-4a$. При $a>1$ $D<0$, поэтому уравнение корней не имеет. При $a=1$ $D=0$, поэтому уравнение имеет два совпадающих корня $x_1=x_2=$
$=-\frac{2}{2}=-1.$

При $a<1$, $a\neq0$ $D>0$ и данное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}; \qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a};$$

Ответы: $x_1=\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ при $a<1$ и $a\neq0$; $x=-1/2$ при $a=0$; $x_1=x_2=-1$ при $a=1$. $\blacktriangle$

Пример 4. Корни уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ таковы, что $x_1^2+x_2^2=112$. Определить a.

△ По теореме Виета $x_1+x_2=3a$ $x_1x_2=a^2$. Возведем обе части первого равенства в квадрат $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=9a^2$. Учитывая, что $x_1^2+x_2^2=112$, а $x_1x_2=a$, получаем $112+2a^2=9a^2$ или $7a^2=112$, $a^2=16$, $a=\pm 4$. Проверка показывает, что значения $a=\pm 4$ удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $a=\pm 4$.

Пример 5. В уравнении $(k^2-5k+3)x^2+(3k-1)x+2=0$ определить k так, чтобы один из корней был вдвое больше другого. Заметим, что кратное сравнение выполняется только для положительных чисел.

△ По теореме Виета и условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1-3k}{k^2-5k+3} \\ x_1x_2=\dfrac{2}{k^2-5k+3} \\ 2x_1=x_2\,(x_1>0,\ x_2>0). \end{cases}$$

Подставляя третье уравнение в первое и второе, получим:

$$\begin{cases} 3x_1=\dfrac{1-3k}{k^2-5k+3} \\ 2x_1^2=\dfrac{2}{k^2-5k+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1-3k}{3(k^2-5k+3)} \\ x_1^2=\dfrac{1}{k^2-5k+3}. \end{cases}$$

Следовательно: $\dfrac{(1-3k)^2}{9(k^2-5k+3)^2}=\dfrac{1}{k^2-5k+3}\Rightarrow$

$\dfrac{(1-3k)^2}{9(k^2-5k+3)}=1\Rightarrow 1-6k+9k^2=9k^2-45k+27\Rightarrow 39k=26$, $k=2/3$.

Подставим значение $k=2/3$ в данное уравнение. После упрощений получим уравнение $x^2+9x+18=0$, корни которого $x_1=-6$, $x_2=-3$ отрицательны и кратно не сравниваются, поэтому данная задача решений не имеет. ▲

Пример 6. Определить все значения a, при которых уравнение $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют хотя бы один общий корень.

△ Пусть общим корнем данных уравнений является $x=\alpha$. Тогда

$$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+1=0 \\ \alpha^2+\alpha+a=0, \end{cases}$$

откуда после вычитания получаем $\alpha(a-1)=a-1$ или $\alpha=1$ при $a\neq 1$. Если $\alpha=1$, то $1+a+1=0$ $a=-2$. Непосредственно убеждаемся, что при $a=-2$ уравнения имеют общий корень $x=1$. ▲

Пример 7. При каком значении a один из корней уравнения $x^2-8x+4a=0$ будет втрое меньше одного из корней уравнения $x^2+x-14a=0$?

△ Пусть первое уравнение имеет корень $x=\alpha (\alpha>0)$, а второе $x=3\alpha$. Тогда:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2-8\alpha+4a=0\\ 9\alpha^2+3\alpha-14a=0\end{array}\right|^{9} \Rightarrow \begin{array}{l}9\alpha^2-72\alpha+36a=0\\ 9\alpha^2+3\alpha-14a=0.\end{array}$$

Откуда после вычитания получаем $75\alpha-50a=0$ $\alpha=\frac{2}{3}a$. Подставим найденное значение в первое уравнение. Тогда $\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{3}a+4a=0 \Rightarrow a^2-12a+9a=0 \Rightarrow a=0$ и $a=3$. Проверкой по условию задачи убеждаемся, что $a=3$. ▲

Пример 8. При каких целых значениях n корни уравнения $nx^2+(2n-1)x+n-2=0$, где $n\neq 0$, рациональны?

△ Так как все коэффициенты данного квадратного уравнения рациональны, то для решения задачи достаточно определить, при каких целых значениях n дискриминант уравнения будет точным квадратом. Вычислим дискриминант: $D=(2n-1)^2-4n(n-2)=4n+1$.

Корни будут действительными (в том числе и рациональными), если $4n+1\geqslant 0$, или $n\geqslant -\frac{1}{4}$. Поскольку n — целое число и $n\neq 0$, то $n=1, 2, 3 \ldots$. Выясним при каких значениях n дискриминант D будет точным квадратом.

Пусть $4n+1=k^2$, где k — целое число, тогда $n=\frac{k^2-1}{4}=\frac{(k-1)(k+1)}{4}$; n — целое число, если $(k-1)(k+1)$ делится на 4.

Если k четное, то оба сомножителя нечетны и их произведение не делится на 4. Если k нечетное, т. е. $k=2m+1$, то $(k-1)(k+1)=4m(m+1)$ делится на 4; следовательно, $n=m(m+1)$. Учитывая, что $n>0$, получаем $n=m(m+1)$, где $m\in N$.

Ответ: уравнение имеет рациональные корни, если $n=m(m+1)$, $m\in N$. ▲

Пример 9. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

△ Пусть x^2+px+q (где p и q — рациональные числа) — искомое уравнение.

Поскольку число $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=-4+\sqrt{15}$ является его корнем, то $\left(-4+\sqrt{15}\right)^2+p\left(-4+\sqrt{15}\right)+q=0$, т. е. $(31-4p+q)+(p-8)\sqrt{15}=0$.

По условию числа p и q рациональные; поэтому последнее равенство возможно только в том случае, когда одновременно справедливы равенства $31-4p+q=0$ и $p-8=0$. Отсюда получаем $p=8$, $q=1$. Итак, примером искомого уравнения служит квадратное уравнение $x^2+8x+1=0$. ▲

Пример 10. При каком m уравнения $2x^2-(3m+2)x+12=0$ и $4x^2-(9m-2)x+36$ имеют общий корень?

△ Пусть $x=a$ — общее решение уравнений. Тогда

$$\begin{cases} 2a^2-(3m+2)a+12=0 \\ 4a^2-(9m-2)a+36=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a^2-2(3m+2)a+24=0 \\ 4a^2-(9m-2)a+36=0, \end{cases}$$

вычитая, получим $(9m-2-6m-4)a-12=0 \Rightarrow a=\frac{4}{m-2}$. Подставим в любое данное уравнение $2\frac{16}{(m-2)^2}-(3m+2)\frac{4}{m-2}+$ $+12=0 \Rightarrow m=3$.

Ответ: $m=3$. ▲

Упражнения

1. Определить число a так, чтобы один из корней уравнения $4x^2-15x+4a^3=0$ был квадратом другого.

Ответ: $a=3/2$, $a=-5/2$.

2. При каких значениях a уравнение $(5a-1)x^2-(5a+2)x+$ $+3a-2=0$ имеет равные корни?

Ответ: $a=2$, $a=2/35$.

3. При каком значении m выражение $x^2+m(m-1)x+36$ есть полный квадрат?

Ответ: $m=4$ и $m=-3$.

4. В уравнении $x^2-2x+q=0$ квадрат разности корней равен 16. Определить свободный член уравнения.

Ответ: $q=-3$.

5. При каких значениях m уравнение $9x^2-18mx-8m+16=0$ имеет корни, отношение которых равно двум?

Ответ: $m=-2$, $m=1$.

6. Какими должны быть p и q, чтобы уравнение $x^2+px+q=0$ имело корнями p и q?

Ответ: $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$.

7. Показать, что уравнение $(x-1)(x-3)+m(x-2)(x-4)=0$ имеет корни при любом $m\in\mathbb{R}$.

8. При каких целых k корни уравнения $kx^2-(1-2k)x+k=2$ рациональны?

Ответ: $k=n(n+1)$, где $n=0\pm1$, ±2,...

9. При каком значении k корни уравнения $(k-1)x^2-2(k+1)+$ $+k+4=0$ равны между собой?
Ответ: $k=5$.

10. Определить k так, чтобы один из корней уравнения $x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$ был вдвое больше другого.
Ответ: $k=4$.

11. Дано уравнение $x^2+px+q=0$. Составить уравнение с корнями $x_1^2+x_2^2$ и $x_1^3+x_2^3$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.
Ответ: $x^2+(p^3-p^2-3pq+2q)x+(p^2-3q)(3pq-p^3)=0$.

12. При каком значении a один из корней уравнения $4x^2-15x+4a^3=0$ есть квадрат другого?
Ответ: $a=-2{,}5$, $a=1{,}5$,

13. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a-1=0$ равна 17?
Ответ: $a=-3$, $a=5$.

14. При каком действительно значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+a-2=0$ будет наименьшей?
Ответ: $a=1$.

15. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втрое меньше другого?
Ответ: $k=2$.

16. При каком целом значении p уравнения $3x^2-4x+p=0$ и $x^2-2px+5=0$ имеют общий корень? Найти этот корень.
Ответ: $p=3$, $x=1$.

17. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2-2a(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов корней.
Ответ: $a=1$, $a=1/2$.

18. При каком значении a уравнения $x^2+ax+8=0$ и x^2+x+ $+a=0$ имеют общий корень?
Ответ: $a=-6$.

19. В уравнении $x^2+2x+c=0$ определить то значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2-4x_1=47$.
Ответ: $c=-15$.

20. При каком значении p отношение корней уравнения $x^2+px-16=0$ равно -4?
Ответ: $p_1=-6$, $p_2=6$.

21. При каком целом значении b уравнения $2x^2+(3b-1)\times$ $\times x-3=0$ и $6x^2-(2b-3)x-1=0$ имеют общий корень?
Ответ: $b=2$.

22. При каком положительном значении c один корень уравнения $8x^2-6x+9c^2=0$ равен квадрату другого?
Ответ: $c=1/3$.

23. При каком положительном значении p корни уравнения $5x^2-4(p+3)x+4=p^2$ противоположны по знаку? Найти эти корни.
Ответ: $p>2$, $x_1=p+2$, $x_2=(2-p)/5$.

24. Решить уравнения

1) $ax^2=1$; 2) $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$;
3) $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$;
4) $x^2+2x-8-a(x-4)=0$;
5) $(a+1)x^2-(a-1)x-2a=0$.

Ответы: 1) $x_1=-1/\sqrt{a}$ и $x_2=1/\sqrt{a}$, если $a>0$;

2) $x_1=1/4$, если $a=1$; $x_1=x_2=3/2$, если $a=1/5$; $x_1=\frac{-(a+1)+\sqrt{5a-1}}{a-1}$ и $x_2=\frac{-(a+1)-\sqrt{5a-1}}{a-1}$, если $1/5<a<1$ и $a>1$;

3) $x_1=x_2=-1$, если $a=0$; $x_1=x_2=3$, если $a=4$; $x_1=(a-1)+\sqrt{a(a-4)}$, $x_2=(a-1)-\sqrt{a(a-4)}$, если $a<0$ и $a>4$;

4) $x_1=x_2=0$, если $a=2$; $x_1=x_2=8$, если $a=18$; $x_1=\frac{(a-2)+\sqrt{(a-2)(a-18)}}{2}$ и $x_2=\frac{(a-2)-\sqrt{(a-2)(a-18)}}{2}$, если $a<2$ или $a>18$;

5) $x=-1$, если $a=-1$; $x_1=x_2=-1$, если $a=-1/3$ $x_1=-1$ и $x_2=\frac{2a}{a+1}$, если $a<-1$, $-1<a<-1/3$ и $a>-1/3$.

25. Решить уравнение

$$\frac{x^2+1}{n^2x-2n}+\frac{1}{nx-2}=\frac{x}{n}.$$

Ответ: $x=\frac{n+1}{n-1}$, если $n\neq 1$, $n\neq 0$; $x=-1$, если $n=1$. Уравнение не имеет смысла при $n=0$.

26. При каких значениях a сумма корней квадратного уравнения $x^2+(2-a-a^2)x-a^2=0$ равна нулю.

Ответ: $a=-2$, $a=1$.

27. Решить уравнения:

1) $2x^2-(a-1)x+a+1=0$, 2) $ax^2-(a+1)x+a^2+a=0$,
3) $x^2-ax+2a+4=0$, 4) $(a+1)x^2-x+(1-a)=0$.

Ответы: 1) $x_1=x_2=1+\sqrt{2}$ при $a=5+4\sqrt{2}$; $x_1=x_2=1-\sqrt{2}$ при $a=5-4\sqrt{2}$; два разных корня $x_1=\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-7}}{4}$ и $x_2=\frac{a-1-\sqrt{a^2-10a-7}}{4}$ при $a<5-4\sqrt{2}$ и $a>5+4\sqrt{2}$;

2) $x_1=x_2=\frac{-\sqrt{17}+1}{4}$ при $a=\frac{1-\sqrt{17}}{8}$; $x_1=x_2=0$ при $a=-1$; $x_1=x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ при $a=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$.; два разных корня $x_1=\frac{a+1+\sqrt{2a+1-3a^2-4a^3}}{2a}$ и $x_2=\frac{a+1-\sqrt{2a+1-3a^2-4a^3}}{2a}$ при

$a< -1$, $\frac{1-\sqrt{17}}{8}<a<0$ и $0<a\frac{\sqrt{17}+1}{8}$;

3) $x_1=x_2=2(1+\sqrt{2})$ при $a=4(1+\sqrt{2})$; $x_1=x_2=2(1-\sqrt{2})$ при $a=4(1-\sqrt{2})$; два разных корня $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-8a-16}}{2}$ и $x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-8a-16}}{2}$ при $a<4(1-\sqrt{2})$ и $a>4(1+\sqrt{2})$;

4) $x_1=x_2=2+\sqrt{3}$ при $a=-\sqrt{3}/2$; $x_1=x_2=2-\sqrt{3}$ при $a=\sqrt{3}/2$; два различных корня $x_1=\frac{1-\sqrt{4a^2-3}}{2(a+1)}$ и $x_2=$ $=\frac{1+\sqrt{4a^2-3}}{2(a+1)}$ при $a< -1$ и $-1<a< -\sqrt{3}/2$ или $a>\sqrt{3}/2$.

28. Найти все значения a, при которых уравнение имеет хотя бы один корень:
1) $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$; 2) $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$.
Ответы: 1) $a\leqslant 0$ или $a\geqslant 4$;
2) $1\leqslant a\leqslant 6$.

29. Найти все значения a, при которых квадратное уравнение имеет два неравных корня:
1) $ax^2+2(a+1)x+a+3=0$; 2) $(a-2)x^2+ax+1=0$.
Ответы: 1) $a<0$ и $0<a<1$;
2) $|a|>2$.

30. Известно, что квадратное уравнение имеет корни. Не решая уравнения определить знаки его корней:
1) $ax^2+2(a+1)x+2a=0$; 2) $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$.
Ответы: 1) оба корня положительны при $1-\sqrt{2}\leqslant a<0$; оба корня отрицательны при $0<a\leqslant 1+\sqrt{2}$ (так как при $a\neq 0$, $D=-4(a^2-2a-1)=-4(a-(1-\sqrt{2}))(a-(1+\sqrt{2}))$, при этом, если x_1 и x_2 корни уравнения, то $x_1x_2=2$, а $x_1+x_2=\frac{-2(a+1)}{a}$.

2) Оба корня положительны при $a<\frac{-17-\sqrt{312}}{2}$ и оба корня отрицательны при $a>\frac{5+\sqrt{13}}{2}$, имеют разный знак при $\frac{-17-\sqrt{312}}{2}<a<\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

31. Найти все значения a, при которых квадратное уравнение $(a+2)x^2-2ax-a=0$ имеет два корня, расположенные на числовой прямой симметрично относительно точки $x=1$.
Ответ: $\varnothing$ (если x_1 и x_2 — корни, симметричные относительно $x=1$, то $x_1+x_2=2$, кроме того $x_1+x_2=\frac{2a}{a+2}$, поэтому $2=\frac{2a}{a+2}$ это ложно при любом a, поэтому задача решений не имеет).

32. Найти все занчения a, для которых один корень квадратного уравнения $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ в два раза больше другого.

Ответ: $a=2/3$.

33. Найти все значения a, при которых уравнение x^2+3ax+ $+a^2=0$ имеет два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $x_1^2+x_2^2=1{,}75$.

Ответ: $a=\pm 1/2$.

34. Найти все значения a, при которых один из корней уравнения $4x^2-15x+4a^2=0$ равен квадрату другого корня.

Ответ: $a=\pm 3\sqrt{6}/4$.

35. Найти все значения a, при которых квадратное уравнение имеет корни и определить знаки этих корней:

1) $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$; 2) $3ax^2+(4-6a)x+3(a-1)=0$; 3) $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$; 4) $(a-2)x^2-2ax+2a-3=$ $=0$; 5) $x^2+(3-2a)x-3a+2=0$.

Ответы: 1) Корни разных знаков при $a<-1/2$, оба корня положительны при $a\geqslant 4$; оба корня отрицательны при $-1/2<a\leqslant 0$; один нуль, а другой — отрицательный при $a=-1/2$; корней нет при $0<a<4$;

2) Оба корня положительны при $a<0$ и $1<a\leqslant 4/3$; корни разных знаков при $0<a<1$; один нуль, другой положителен при $a=1$; корней нет при $a>4/3$;

3) Оба корня положительны при $a\leqslant 2$, $1/2\leqslant a<6/7$ и $a>3$; корни разных знаков при $6/7<a<3$; один нуль, другой положителен при $a=6/7$; корней нет при $-2<a<1/2$;

4) Оба корня отрицательны при $1\leqslant a<3/2$; один нуль, другой отрицателен при $a=3/2$; корни разных знаков при $3/2<a<2$; оба корня положительны при $2<a\leqslant 6$; корней нет при $a<1$ и $a>6$;

5) Оба корня отрицательны при $a<2/3$; один корень отрицателен, а другой равен нулю при $a=2/3$; корни разных знаков при $a>2/3$.

36. Найти все значения параметра a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2-(a-2)x-(a+3)=0$ равна: 1) 9; 2) k^2.

Ответы: 1) $a=1$;

2) $a=1$, если $k=3$ и $k=-3$; $a_1=1-\sqrt{k^2-9}$ и $a_2=1+\sqrt{k^2-9}$ при $k>3$ и $k<-3$.

37. Решить уравнение $x^4+4a^3x=a^4$.

Ответ: $x_1=0$ при $a=0$; $x_1=\dfrac{\left(-1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)a}{\sqrt{2}}$ и $x_2=$ $=\dfrac{\left(-1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)a}{\sqrt{2}}$ при $a<0$ и $a>0$.

38. Решить уравнение $ax^2+2x+1=0$.

Ответ: $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$; $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ при $a<1$, $a\neq 0$; $x=-1/2$ при $a=0$; $x_1=x_2=-1$ при $a=1$.

39. При каком m уравнения $2x^2-(3m+2)x+12=0$, $4x^2-(9m-2)x+36=0$ имеют общий корень?

Ответ: $m=3$.

40. Найти все значения параметра a, для которых квадратные уравнения $(1-2a)x^2-6ax-1=0$ и $ax^2-x+1=0$ имеют по крайней мере один общий корень.

Ответ: $a=2/9$.

УТВЕРЖДЕНИЯ О РАСПОЛОЖЕНИИ КОРНЕЙ ПРИВЕДЕННОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Справочный материал

1. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два положительных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p^2-4q\geqslant 0 \\ p<0 \\ q>0. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация. Для того, чтобы данная парабола (рис. 8) — график функции $y=x^2+px+q$ пересекла

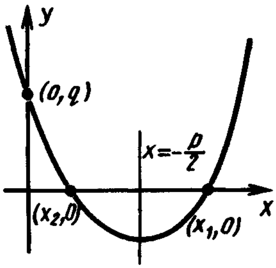


Рис. 8

положительную полуось OX в двух точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ (где $x_1>0$ и $x_2>0$), необходимо и достаточно выполнение трех условий:

1) вершина параболы — точка $\left(-\dfrac{p}{2}, \dfrac{p^2-4q}{4}\right)$ — лежит либо в нижней полуплоскости, либо на оси OX (условие $p^2-4q\geqslant 0$);

2) ось симметрии параболы — прямая $x=-\dfrac{p}{2}$ — лежит правей оси OY (условие $p<0$);

3) парабола пересекает ось OY в точке $(0, q)$, лежащей в верхней полуплоскости (условие $q>0$).

2. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два корня, каждый из которых больше некоторого числа c, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p^2-4q\geqslant 0 \\ -p/2>c \\ c^2+pc+q>0. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация. Для того, чтобы парабола (рис. 9) — график функции $y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$ — пересек-

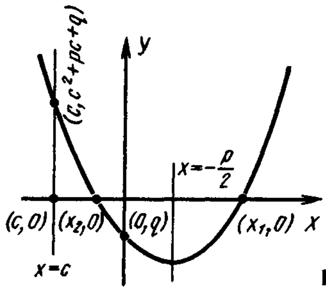


Рис. 9

ла ось OX в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, лежащих правее точки $(c, 0)$, необходимо и достаточно выполнения трех условий:

1) вершина параболы — точка $\left(\frac{-p}{2}, \frac{p_2-4a}{4}\right)$ — либо лежит в нижней полуплоскости, либо на оси OX (условие $p^2-4q\geqslant 0$);

2) ось симметрии параболы — прямая $x=-p/2$ — лежит правее прямой $x=c$ (условие $p/2>c$);

3) парабола пересекается с прямой $x=c$ в точке (c, c^2+pc+q), лежащей в верхней полуплоскости (условие $c^2+pc+q>0$).

3. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два корня, каждый из которых меньше некоторого числа c, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p^2-4q\geqslant 0 \\ -p/2<c \\ c^2+pc+q>0. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация. Для того, чтобы парабола (рис. 10) — график функции $y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$ пересекла ось OX в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, лежащих левее точки $(c, 0)$, необходимо и достаточно выполнения трех условий;

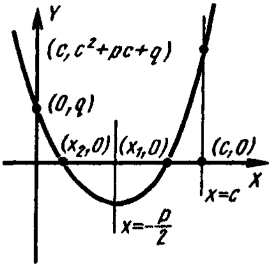


Рис. 10

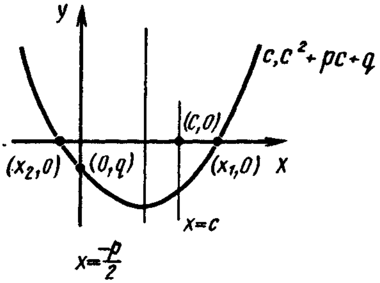


Рис. 11

1) вершина параболы — точка $\left(-\frac{p}{2}; \frac{p^2-4q}{4}\right)$ — лежит либо в нижней полуплоскости, либо на оси OX (условие $p^2-4q \geqslant 0$);

2) ось симметрии параболы — прямая $x=-p/2$ — лежит левее прямой $x=c$ (условие $-p/2<c$);

3) парабола пересекается с прямой $x=c$ в точке (c, c^2+pc+q), лежащей в верхней полуплоскости (условие $c^2+pc+q>0$).

4. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два корня, один из которых больше числа c, а другой меньше c, тогда и только тогда, когда $c^2+pc+q<0$.

Геометрическая интерпретация. Для того, чтобы парабола (рис. 11) — график функции $y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$ — пересекала ось OX в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, между которыми лежит точка $(c, 0)$, необходимо и достаточно, чтобы парабола пересекалась с прямой $x=c$ в точке (c, c^2+pc+q), которая лежит в нижней полуплоскости (условие $c^2+pc+q<0$).

Примеры с решениями

Пример 1. Найти все значения a, для которых уравнение $x^2-2(a-1)x+(2a+1)=0$ имеет два положительных корня.

$\triangle$ Для того, чтобы оба корня x_1 и x_2 были положительными, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $x^2-2(a-1)x+2a+1$ был неотрицательным, а произведение x_1x_2 и сумма x_1+x_2 были положительными. Из теоремы Виета получаем, что все a, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} (a-1)^2-(2a+1) \geqslant 0 \\ 2(a-1)>0 \\ 2a+1>0, \end{cases}$$

и только они, являются решениями поставленной задачи. Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} a(a-4)\geqslant 0 \\ a-1>0 \\ 2a+1>0, \end{cases} \tag{1}$$

решением которой, а следовательно, и самой задачи являются все числа a из промежутка $[4;\ +\infty[$.

Система (1) может быть получена из геометрических соображений. Заметим, что $x^2-2(a-1)x+2a+1=(x-(a-1)^2-$ $-a(a-4)$. При каждом a функции $y=(x-(a-1))^2-a(a-4)$ на плоскости XOY соответствует парабола, ветви которой направлены вверх, пересекающая ось OY в точке $(0;\ 2a+1)$, имеющая ось симметрии $x=a-1$ и вершину в точке $(a-1;\ -a(a-4))$. Для того, чтобы парабола пересекала положительную полуось OX в двух точках $(x_1;\ 0)$ и $(x_2;\ 0)$ или касалась ее, необходимо и достаточно выполнения трех условий:

1) вершина параболы — точка $(a-1;\ -a(a-4))$ — либо лежит в нижней полуплоскости, либо на оси OX (условие $a(a-4)\geqslant 0$);

2) ось симметрии параболы — прямая $x=a-1$ — лежит правее оси OY (условие $a-1>0$);

3) парабола пересекает ось OY в точке $(0;\ 2a+1)$, которая лежит в верхней полуплоскости (условие $2a+1>0$). ▲

Пример 2. Найти все значения a, при которых уравнение $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$ имеет корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $x_1<a<x_2$.

△ В задаче требуется выяснить, при каких a уравнение имеет два корня, а само число a лежит между этими корнями. Из утверждения 4 получаем решение этой задачи:

$$2a^2-2(2a+1)a+a(a-1)<0\Rightarrow -a^2-3a<0.$$

Таким образом, искомыми значениями a являются все числа из интервалов $a<-3$ и $a>0$. ▲

Пример 3. Для каких значений m уравнение $4x^2-2x+m=0$ имеет корни, заключенные между —1 и 1?

△ В условии задачи дано полное квадратное уравнение, но т. к. первый коэффициент больше нуля, то график трехчлена — парабола, ветви которой направлены вверх. Поэтому для такого выражения справедливы все утверждения, приведенные выше. Применяя утверждения 2 и 3, получим систему

$$\begin{cases} D=1-4m\geqslant 0 \\ 4(-1)^2-2(-1)+m>0 \\ 4(1)^2-2(1)+m>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{4} \\ m>-6 \\ m>-2 \end{cases} \Rightarrow -2<m<\frac{1}{4}.$$

Ответ: $m \in \left]-2; \frac{1}{4}\right[$. ▲

Пример 4. Для каких значений a один из корней уравнения $x^2-2ax+2a^2-4a+3=0$ меньше 1, а второй — больше 2?

△ Точки 1 и 2 расположены между корнями уравнения, поэтому, используя утверждение 4, имеем систему:

$$\begin{cases} 1-2a+2a^2-4a+3<0 \\ 4-4a+2a^2-4a+3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2-6a+4<0 \\ 2a^2-8a+7<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1<a<2 \\ 2-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<2+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow 2-\frac{\sqrt{2}}{2}a<2.$$

Ответ: $a \in \left]2-\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right[$. ▲

Пример 5. Найти все значения a, при которых трехчлен $y=(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1$ принимает положительные значения для всех x.

△ Трехчлен положителен при всех x, если $D<0$ и коэффициент при старшей степени положителен, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} D=(a-1)^2-(a^2-1)<0 \\ a^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-2a+1-a^2+1<0 \\ a<1 \text{ и } a>1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a<-2 \\ a<-1 \text{ и } a>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>1 \\ a>-1 \text{ и } a>1 \end{cases} \Rightarrow a>1.$$

Ответ: $a>1$. ▲

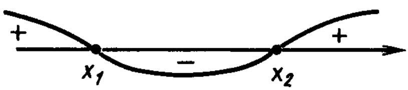
Справочный материал

Если в задаче дано полное квадратное уравнение, то его можно привести, разделив на старший коэффициент, и использовать ранее приведенные утверждения. Но можно и не приводить, а воспользоваться следующими рассуждениями.

Рассмотрим уравнение $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ (1). Обозначим левую часть через $f(x)$, т. е. $f(x)=ax^2+bx+c$. Если уравнение (1) имеет различные корни x_1, $x_2 \in \mathrm{R}$, то $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=a(x-x_1(x-x_2)(x_1<x_2).$$

Построим змейку для произведения $(x-x_1)(x-x_2)$:



Если $a>0$, то $f(x)<0$ при $x_1<x<x_2$ и $f(x)>0$ при $x<x_1$ и $x_2<x$.

Если $a<0$, то $f(x)<0$ при $x<x_1$ и $x_2<x$ и $f(x)>0$ при $x_1<x<x_2$.

Вывод. Если число $x=\alpha$ лежит между корнями квадратного уравнения (1), то левая часть этого уравнения при $x=\alpha$, т. е. $a\alpha^2+b\alpha+c$ имеет знак, противоположный знаку первого коэффициента a; если число $x=\beta$ лежит вне промежутка корней уравнения (1), то левая часть этого уравнения при $x=\beta$, т. е. $a\beta^2+$ $+b\beta+c$ имеет такой же знак, как и первый коэффициент.

Примеры с решениями

Пример 6. Найти $a\in R$, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $2x^2-2(2a+1)+a(a-1)=0$ удовлетворяют условию $x_1<a<x_2$.

$\triangle$ Так как $x_1\neq x_2$ и x_1, $x_2\in R$, то $D>0$.

Поскольку a находится между корнями уравнения, то произведение первого коэффициента уравнения на значение левой части уравнения при $x=a$, должно быть отрицательным, т. е. решение задачи сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 4(2a+1)^2-8a(a-1)>0 \\ 2[2a^2-2(2a+1)a+a(a-1)]<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a^2+4a+1-2a^2+2a>0 \\ 2a^2-4a^2-2a+a^2-a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2+6a+1>0 \\ a^2+3a>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<-\frac{3-\sqrt{7}}{2},\ a>-\frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ a<-3 \text{ и } a>0 \end{cases} \Rightarrow a<-3,\ a>0.$$

Ответ: $a<-3$, $a>0$. ▲

Пример 7. Найти все $a\in R$, при которых оба корня уравнения $(2a+3)x^2+(a+1)x+4=0$ заключены между -2 и 0.

$\triangle$ Так как x_1, $x_2\in R$, то $D\geqslant 0$. Так как требуется, чтобы $-2<x_1<x_2>0$, то числа -2 и 0 должны находиться вне промежутка корней, и, кроме того, полусумма корней $\frac{x_1+x_2}{2}$ должна находиться между данными числами.

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} (a+1)^2-4\cdot 4(2a+3)\geqslant 0 \\ (2a+3)[(2a+3)(-2)^2+(a+1)(-2)+4]>0 \\ (2a+3)[(2a+3)\cdot 0^2+(a+1)0+4]>0 \\ -2<-\frac{a+1}{2(2a+3)}<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-30a-47\geqslant 0 \\ (2a+3)(3a+7)>0 \\ 2a+3>0 \\ 0<\frac{a+1}{2a+3}<4. \end{cases}$$

Ответ: $a > 15+4\sqrt{17}$. ▲

Пример 8. Найти, при каких значениях a уравнение $(a-2)\times$ $\times x^2-2(a+3)x+4a=0$ имеет один корень <2, а второй — больше 3.

△ По условию $x_1<2<3<x_2$, т. е. числа 2 и 3 находятся между корнями, поэтому решение задачи сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} D=(a+3)^2-4a(a-2)>0 \\ (a-2)[(a-2)2^2-2(a+3)2+4a]<0 \\ (a-2)[(a-2)3^2-2(a+3)3+4a]<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-14a-9<0 \\ (a-2)(a-5)<0 \\ (a-2)\left(a-\frac{36}{7}\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 2<a<5.$$

Ответ: $a\in]2;\ 5[$. ▲

Пример 9. Найти значения m, при которых x^2+mx+m^2+ $+6m<0\ \forall\ x\in]1;\ 2[$.

△ Так как коэффициент при x^2 есть $1>0$, то трехчлен принимает отрицательные значения между корнями, которые должны быть вне интервала $]1;\ 2[$. Поэтому m должно удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{cases} 1+m+m^2+6m<0 \\ 4+2m+m^2+6m<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2+7m+1<0 \\ m^2+8m+4<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-7-\sqrt{45}}{2}<m<\frac{-7+\sqrt{45}}{2} \\ -4-\sqrt{12}<m<-4+\sqrt{12} \end{cases} \Rightarrow -\frac{7+\sqrt{45}}{2}<m<-4+\sqrt{12}$$

Ответ: $m\in\left]-\frac{7+\sqrt{45}}{2};\ -4+\sqrt{12}\right[$.

Упражнения

1. Найти все значения a, при которых квадратный трехчлен $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$ положителен для любого x. **Ответ:** при $a<-3$ и $a\geqslant 1$.

2. Найти все значения a, при которых корни уравнения $x^2-2ax+a^2-1=0$ заключены между числами 2 и 4. **Ответ:** $1<a<7$.

3. Найти все значения a, при которых корни уравнения $(1+a)x^2-3ax+4a=0$ больше 1.

Ответ: $-\frac{16}{7}\leqslant a<-1$.

4. Найти все значения a, при которых уравнение $2x^2-2\times$

$\times(2a+1)x+a(a+1)=0$ имеет два корня, причем один из них больше a, другой меньше a.

Ответ: $a<-1$; $a>0$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение $(a-2)x^2-2\times$ $\times(a+3)x+4a=0$ имеет два корня, причем один из них больше числа 3, другой меньше 2.

Ответ: $2<a<5$.

6. Найти все значения a, при которых уравнение $4x^2-2x+a=0$ имеет два корня, каждый из которых принадлежит интервалу $]-1;\ 1[$.

Ответ: $-2<a\leqslant 1/4$.

7. Найти все значения a, при которых все решения неравенства $x^2-a(1+a^2)x+a^4<0$ являются решениями неравенства $x^2+4x+3<0$.

Ответ: $-\sqrt[3]{6}<a<-\sqrt[3]{2}$.

8. Найти все значения a, при которых все решения неравенства $ax^2-2(a^2-3)x-12a\geqslant 0$ являются решениями неравенства $x^2-49\geqslant 0$.

Ответ: $0<a\leqslant 7/6$.

9. При каких значениях a все решения неравенства $x^2+x-2<0$ являются решениями неравенства $(a^2+6a-4)x^2-$ $-2(a-1)x-1<0$?

Ответ: $-3-\sqrt{13}<a<-2-\sqrt{7}$; $-2-\sqrt{7}<a<-3+\sqrt{13}$; $-3+\sqrt{13}<a<-2+\sqrt{7}$.

10. Найти все значения a, при которых трехчлен $(a^2-1)x^2+2\times$ $\times(a-1)x+1$ положителен на всех x, являющихся решениями неравенства $x^2-x-2<0$.

Ответ: $a\geqslant 1$.

11. При каких значениях m неравенства $(6m-5)x^2-5\times$ $\times(m-1)x+2m-6>0$ и $x^2+6x-7<0$ имеют хотя бы одно общее решение?

Ответ: $m>255/57$.

12. Найти все a, при которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ действительные и оба больше a.

Ответ: $a<-2$.

13. При каких a все нули функции $f(x)=(a-2)x^2+2ax+a+3$ лежат в интервале $]-2;\ 1\ [$?

Ответ: $]-\infty;\ -1/4\ [\ \cup\ \{2\}\ \cup\ ]5;\ 6]$.

14. При каких значениях a уравнение $(2a-1)x^2+(3-a)x+$ $+1=0$ имеет два действительных корня меньше 2?

Ответ: $a<1$, $a>13$.

15. Найти все значения a, при которых оба корня уравнения $x^2-2ax+a^2-1=0$ будут находиться в интервале $(-2,\ 4)$.

Ответ: $-1<a<3$.

16. Найти все значения k, при которых оба корня уравнения $kx^2-(k+1)x+2=0$ по абсолютной величине меньше 1.

Ответ: $k \geqslant 3+2\sqrt{2}$.

17. При каких значениях k один из корней уравнения $kx^2+kx-2=0$ по абсолютной величине будет больше 1, а другой — меньше 1?

Ответ: $k>1$.

18. Найти все значения k, для которых один из корней уравнения $2kx^2-2x-3k-2=0$ будет больше 1, а другой — меньше 1.

Ответ: $k<-4$ или $k>0$.

19. При каких значениях k корни квадратного трехчлена $(2-k)x^2-3kx+2k$ оба больше $1/2$?

Ответ: $16/17 \leqslant k < 2$.

20. Найти все значения k, при которых корни квадратного трехчлена $4x^2-\frac{8}{3^k}x+\frac{6}{3^k}-3$ оба меньше 2.

Ответ: $k>\log_3 \frac{10}{3}$.

21. Найти все значения k, при которых корни квадратного трехчлена $\left(2+\log_{\frac{1}{2}} k\right)x^2+5x\log_{\frac{1}{2}} k-6\log_{\frac{1}{2}} k$ будут оба больше 1.

Ответ: $2\frac{48}{49}<k<4$.

22. Найти все значения k, при которых корни уравнения $2x^2-3kx+2-k=0$ будут оба $\leqslant 1$.

Ответ: $\frac{-4+4\sqrt{10}}{9} \leqslant k \leqslant 1$ или $k \leqslant \frac{-4-4\sqrt{10}}{9}$.

23. Найти все значения k, при которых корни уравнения, $(2+k)x^2-2kx+3k=0$ оба положительны.

Ответ: $-3 \leqslant k < -2$.

24. При каком значении a один из корней уравнения $x^2-7x+2a=0$ будет вдвое больше одного из корней уравнения $x^2-5x+a=0$?

Ответ: $a=6$, $a=0$.

25. При каких действительных значениях m неравенство $x^2+mx+m^2+6m<0$ выполняется для любых $x \in (1;\ 2)$?

Ответ: $\frac{-7-\sqrt{45}}{2} \leqslant m \leqslant -4$.

26. При каких m из неравенства $x^2-(3m+1)x+m>0$ следует неравенство $x>1$?

Ответ: $m \in \varnothing$.

27. Найти все значения параметра a, при которых из неравенства $ax^2-x+1-a<0$ следует неравенство $0<x<1$.

Ответ: $a \in [1/2;\ 1]$.

28. Найти все значения параметра a, при которых из неравенства $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)\times$ $\times x-2 \leqslant 0$.

Ответ: $a \in [-3; 3]$.

29. Найти все значения параметра a, при которых справедливо неравенство $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$ при любых $|x| < 1$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

30. Найти все значения a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$, по модулю не превосходит двух.

Ответ: $-2 \leqslant a \leqslant -1/2$.

31. Найти все значения a, при которых из неравенства $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует неравенство $(a^2 + a - 2)x^2 - (a + 5)x - 2 \leqslant 0$.

Ответ: $-3 \leqslant a \leqslant 3$.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Справочный материал

Квадратными (строгими и нестрогими) называются неравенства вида:

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0,$$
$$ax^2 + bx + c \geqslant 0, \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0.$$

Если квадратный трехчлен имеет корни ($x_1 < x_2$), то при $a > 0$ он больше нуля, при $x < x_1$ и $x > x_2$ (при x меньше меньшего и больше большего корня) и меньше нуля при $x_1 < x < x_2$ (при x от корня до корня) (рис. 12); если $a < 0$, то трехчлен больше нуля при $x_1 < x < x_2$; меньше нуля при $x < x_1$ и $x > x_2$ (рис. 13).

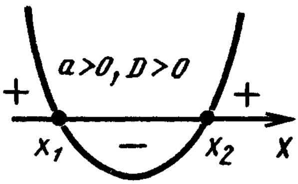


Рис. 12

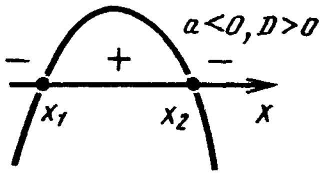


Рис. 13

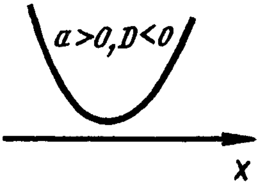


Рис. 14

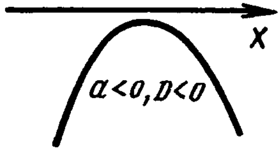


Рис. 15

Если дискриминант трехчлена $D<0$, то при $a>0$ он положителен при всех $x\in R$ (рис. 14), а при $a<0$ трехчлен меньше нуля при всех $x\in R$ (рис. 15).

Примеры с решениями

Пример 1. Решить неравенство $x^2+ax+1>0$.

$\triangle$ Дискриминант $D=a^2-4$.

Если $D<0$, т. е. $a^2-4<0$, $a^2<4\Rightarrow-2<a<2$, то неравенство справедливо $\forall\ x\in R$.

Если $D>0$, т. е. $a<-2$ и $2<a$, то корни трехчлена $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$ и решение неравенства $x<\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ и $\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}<x$.

Если $a=-2$ то $x<1$ и $1<x$.

Если $a=2$, то $x<-1$ и $-1<x$.

Ответ: $x<\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ и $\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}<x$ при $|a|>2$;

$x\in R$ при $|a|<2$; $a=-2$, $x<1$ и $1<x$; $a=2$, $x<-1$ и $-1<x$. $\blacktriangle$

Пример 2. Для всех $a\geqslant0$ решить неравенство $(ax^2-x+3)\times\times(a^2x^2+ax+3a+1)\geqslant0$ (1)

$\triangle$ Дискриминант квадратного трехчлена $a^2x^2+ax+3a+1$ равен $a^2-4a^2(3a+1)=-a^2(12a+3)<0$, следовательно, трехчлен положителен $\forall x\in R$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству $ax^2-x+3\geqslant0$ (2). Дискриминант трехчлена ax^2-x+3 $D=1-12a$. При $a\geqslant\frac{1}{12}$ $D\leqslant0$ и неравенство (2) справедливо $\forall x\in R$; при $0<a<\frac{1}{12}$ $D>0$ и неравенство (2) справедливо при $-\infty<x<\frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ и $\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}<x<+\infty$; $a=0$ $-x+3\geqslant0$ $x\leqslant3$.

Ответ: $a=0$, $x\leqslant3$; $0<a<1/12$, $x<\frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ и $\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}<x$; $\frac{1}{12}\leqslant a$, $x\in R$.

Помимо задач рассмотренного типа, в которых требуется решить неравенство при всех значениях параметра, встречаются задачи, где нужно из всех значений параметра выделить те, при которых неравенство обладает некоторыми задаваемыми свойствами; например, будет выполняться при любом значении переменной или вообще не будет иметь решений, или будет иметь только одно положительное решение и т. д. Рассмотрим задачи такого типа.

Пример 3. При каких значениях k неравенство $\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}<3$ справедливо при всех значениях x?

$\triangle$ Так как x^2+x+1 больше нуля $\forall x \in R$, то исходное неравенство равносильно такому неравенству $x^2-kx+1<3\times \times(x^2+x+1)$ или $2x^2+(3+k)x+2>0$. Трехчлен $2x^2+(3+k)x+2$ больше нуля на всех x, если $D<0$, т. е. $(3+k)^2-16<0 \Rightarrow \Rightarrow k^2+6k+9-16<0 \Rightarrow -7<k<1$.

Ответ: $k \in]-7;\ 1[$.

Пример 4. При каких значениях m неравенство $(m+1)x^2-2\times \times(m-1)x+3m-3<0$ справедливо при всех $x \in R$?

$\triangle$ Квадратный трехчлен отрицателен при всех x (рис. 15), если $a<0$ и $D<0$, т. е.

$$\begin{cases} m+1<0 \\ (m-1)^2-(m+1)(3m-3)<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m<-1 \\ m^2+m-2>0. \end{cases}$$

Отсюда находим $m<-2$. ▲

Пример 5. При каких значениях m трехчлен $(m-1)x^2+2mx+ +3m-2$ представляет собой полный квадрат?

$\triangle$ Квадратный трехчлен будет полным квадратом, если $a>0$ и $D=0$, т. е.

$$\begin{cases} m-1>0 \\ m^2-(m-1)(3m-2)=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m>1 \\ 2m^2-5m+2=0. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} m>1 \\ m=1/2, \end{cases} \qquad \begin{cases} m>1 \\ m=2. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет, а из второй получаем $m=2$. $\triangle$

Пример 6. Вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ имеет координаты $x=6$, $y=-12$. Зная, что парабола вогнута и имеет один из нулей при $x=8$, найти a, b, c.

$\triangle$ Парабола вогнута — значит $a>0$. Вершина параболы находится в точке $\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, т. е. $-\frac{b}{2a}=6$, $a\frac{4ac-b^2}{4}=-12$. При $x=8$ нуль квадратного трехчлена, т. е. $a8^2+b8+c=0$. Поэтому решение задачи сводится к решению системы

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{b}{2a}=6 \\ \frac{4ac-b^2}{4a^2}=-12 \\ 64a+8b+c=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} b=-12a \\ ac-36a^2=-12a \Rightarrow \\ c=32a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=-12a \\ 32a^2-36a^2=-12a, \ 4a^2=12a, \ a=3 \\ c=32a \end{cases}$$

при $a>0$, $b=-36$, $c=96$.

Ответ: $a=3$, $b=-36$, $c=96$.

Упражнения

1. Решить неравенства:

1) $x^2+2x+a>0$, 2) $ax^2+x+1>0$, 3) $ax>\frac{1}{x}$, 4) $\frac{1}{x}+$ $+\frac{1}{x+a}>0$, 5) $\frac{2a}{x}-\frac{1}{x-1}>1$, 6) $ax^2-2ax-1<0$.

Ответы: 1) При $a<1$ $x<-1-\sqrt{1-a}$, $x>-1+\sqrt{1-a}$; при $a=1$ $x\in R\backslash\{-1\}$; при $a>1$ $x\in R$;

2) при $a<0$ $\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}<x<\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$; при $a=0$ $x>-1$; при $0<a<\frac{1}{4}$ $x<\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$, $x>\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}$; при $a=\frac{1}{4}$ $x\in R$;

3) При $a\leqslant 0$; при $a>0 - \frac{1}{\sqrt{a}}<0$ $x>\frac{1}{\sqrt{a}}$;

4) При $a<0$ $0<x<-\frac{a}{2}$, $x>-a$; при $a=0$ $x>0$; при $a>0$ $-a<x<-\frac{a}{2}$, $x>0$;

5) При $a<0$ $a+\sqrt{a^2-2a}<x<1$; при $0\leqslant a\leqslant 2$ $0<x<1$; при $a>2$ $a-\sqrt{a^2-2a}<x<a+\sqrt{a^2-2a}$;

6) При $a\leqslant -1$ $x<1-\sqrt{\frac{1+a}{2}}$, $x>1+\sqrt{\frac{1+a}{a}}$; при $-1<a\leqslant 0$ $x\in R$; при $a>0$ $1-\sqrt{\frac{1+a}{a}}<x<1+\sqrt{\frac{1+a}{a}}$.

При каких значениях a неравенства верны при всех x?:

1) $\frac{2-ax-x^2}{1-x+x^2}\leqslant 3$; 2) $\frac{x^2+ax+1}{x^2+4x+8}<8$; 3) $\frac{ax^2+3x+4}{x^2+2x+2}<5$.

Ответы: 1) $-1\leqslant a<7$, 2) $-10<a<74$, 3) $a<71/24$.

2. При каких значениях a квадратный трехчлен $y=(a^2+6a-4)x^2-2(a-1)x-1$ принимает отрицательные значения при всех $x\in R$.

Ответ: $-1-\sqrt{2{,}5}<a<-1+\sqrt{2{,}5}$.

3. Найти все $a\in R$, при которых трехчлен $y=(a^2-1)x^2+2\times(a-1)x+1$ принимает положительные значения $\forall x\in R$.

Ответ: $a>1$.

4. При каких значениях m трехчлен $y=mx^2+4x+3m+1$ принимает положительные значения при всех $x>0$?
Ответ: $m>0$.

5. При каких m трехчлен $y=(6m-5)x^2-5(m-1)x+2m-6$ есть полный квадрат?
Ответ: 5.

6. Найти все значения a, при которых неравенство ax^2+ $+(a-1)x+a-3<0$ выполняется при всех $x \in \mathrm{R}$.

Ответ: $a<\frac{5-2\sqrt{7}}{3}$.

7. Для каждого значения a решить неравенство:
1) $ax<1/x$; 2) $x^4-ax^2+1<0$; 3) $\frac{x-1}{a-1}+x<\frac{1}{1-a}$;
4) $\frac{2a+1}{(a-3)x}>\frac{x+2}{x}$; 5) $\frac{2a+1}{ax-3x-2a+6} \geqslant \frac{x}{x-2}$.

Ответы: 1) при $a \leqslant 0$ $x>0$; при $a>0$ $x<-\frac{1}{\sqrt{a}}$, $0<x<\frac{1}{\sqrt{a}}$;

2) при $a \leqslant -2$ решений нет; при $a>2$ $-\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}<$ $<x<-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$, $\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}<x<\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$;

3) при $a<0$ и $a>1$ $x<0$; при $0<a<1$ $x>0$; при $a=0$, $a=1$ решений нет;

4) при $a<3$ $\left(\frac{7}{a-3};\ 0\right)$; при $a=3$ решений нет; при $a>3$ $\left(0;\ \frac{7}{a-3}\right)$;

5) при $a<3$ $[(2a+1)/(a-3);2)$; при $a=3$ решений нет; при $a>3$ $(2;\ (2a+1)/(a-3)]$.

9. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2+4x>$ $>1-3a$ справедливо при всех положительных значениях переменной?

Ответ: $a \geqslant 1/3$.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ

Пример 1. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a$

$\triangle$ Для всех $a<0$ уравнение не имеет решений, т. к. левая его часть неотрицательна. Для всех $a>0$ исходное уравнение равносильно уравнению $2|x|-x^2=a^2$ или $2|x|-|x|^2=a^2$. Если $|x|=t$, то $t^2-2t+a^2=0$, $D=4-4a^2<0$ при $a>1$ и уравнение не имеет решений. Решения могут быть для $a \in [0;\ 1]$. Проверим крайние точки $a=0$, $2|x|-x^2=0$ — три решения: $x=0$, $x=2$ и

$x=-2$. Если $a=1$, то $x^2-2|x|+1=0$ — два решения: $x=\pm 1$. Если $a\in]0;\ 1[$, то $t=1\pm\sqrt{1-a^2}$, $x_{1,2}=\pm(1\pm\sqrt{1-a^2})$ и $x_{3,4}=\pm$ $\pm(1-\sqrt{1-a^2})$.

Ответ: При $a<0$ и $a>1$ нет решений; при $a=0$ три решения; при $a=1$ два решения; при $a\in]0;\ 1[$ четыре решения. ▲

Пример 2. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $x|x+2a|+1-a=0$ имеет единственное решение.

△ Используя определение модуля, найдем все решения при каждом a, а затем выберем удовлетворяющее условию задачи.

1) Пусть $x+2a<0$, т. е. $x<-2a$, тогда $|x+2a|=-(x+2a)$ и $x^2+2ax+a-1=0$ (1). Найдем дискриминант D_1 уравнения (1) $D_1=a^2-(a-1)>0$ отсюда $\forall a\in R$, следовательно уравнение (1) имеет два корня: $x_1=-a+\sqrt{a^2-a+1}$ и $x_2=-a-\sqrt{a^2-a+1}$. Выясним лежат ли они в области $x<-2a$.

$$x_1<-2a,\quad -a+\sqrt{a^2-a+1}<-2a \Leftrightarrow \sqrt{a^2-a+1}<-a. \tag{2}$$

Неравенство (2) имеет смысл при $a<0$, тогда

$$\begin{cases} a^2-a+1<a^2 \\ a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ a<0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing,$$

то есть число x_1 ни при каких a не принадлежит области $x<-2a$.

$$x_2<-2a,\quad -a-\sqrt{a^2-a+1}<-2a \Leftrightarrow \sqrt{a^2-a+1}>a. \tag{3}$$

Ясно, что все $a<0$ удовлетворяют неравенству (3), а для $a\geqslant 0$ $\begin{cases} a^2-a+1>a^2 \\ a\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<1 \\ a\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leqslant a<1.$

Итак, множество решений неравенства (3) есть промежуток $a<1$.

При $a<1$ исходное уравнение имеет единственное решение $x_2=-a-\sqrt{a^2-a+1}$.

2) Пусть $x+2a\geqslant 0$, $x\geqslant -2a$, тогда $|x+2a|=+(x+2a)$ и $x(x+2a)+1-a=0 \Rightarrow x^2+2ax+1-a=0$ (4).

Найдем дискриминант D_2 получившегося квадратного уравнения: $D_2=a^2-(1-a)=a^2+a-1$. Ясно, что уравнение (4) не имеет решений, если $D_2<0$, т. е. $a^2+a-1<0$. Значит уравнение (4) не имеет решений для a из промежутка $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Если a не принадлежит этому интервалу, то уравнение (4) имеет корни $x_3=-a+\sqrt{a^2+a-1}$, $x_4=-a-\sqrt{a^2+a-1}$, причем $x_3=x_4$, при $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Выясним теперь, при каких значениях параметра a найденные корни лежат в области $x\geqslant -2a$. Для этого нужно решить неравенства $x_3\geqslant -2a$ и $x_4\geqslant -2a$. Неравенство $-a+\sqrt{a^2+a-1}\geqslant$

$\geqslant -2a$ (5) равносильно неравенству $\sqrt{a^2+a-1} \geqslant -a$, или совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} a^2+a-1 \geqslant 0 \\ -a<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a \geqslant 0 \\ a^2+a-1 \geqslant a^2. \end{cases}$$

Множество решений первой системы имеет вид $a \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, вторая система решений не имеет. Значит множество решений неравенства (5) есть промежуток $a \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, и только при этих значениях параметра a корень x_3 лежит в области $x \geqslant -2a$.

Неравенство $-a-\sqrt{a^2+a-1} \geqslant -2a$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2+a-1} \leqslant a$, или системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+a-1 \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \\ a^2+a-1 \leqslant a^2. \end{cases}$$

Множество решений полученной системы неравенств есть отрезок $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant a \leqslant 1$. Только при этих значениях параметра a корень x_4 принадлежит области $x \geqslant -2a$. Таким образом, при $a< \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ данное уравнение в области $x \geqslant -2a$ решений не имеет. Если $a= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то уравнение в рассматриваемой области имеет единственное решение $x_3=x_4=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При значениях a, лежащих в области $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a \leqslant 1$ исходное уравнение в рассматриваемой области имеет два различных корня x_2 и x_4. Если же $a>1$, то исходное уравнение имеет единственный корень x_3. Полученные результаты удобно собрать в следующей таблице:

Значения a	Решения данного уравнения
$a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	x_2
$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$x_2,\ x_3=x_4\ (x_2<x_3)$
$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a<1$	$x_2,\ x_3,\ x_4 (x_3 \neq x_4)$
$a=1$	$x_3=0,\ x_4=-2$
$a>1$	x_3

Таким образом, искомые значения a образуют два помежутка: $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $a>1$. ▲

В т о р о е р е ш е н и е. Перепишем исходное уравнение в следующем виде $x|x+2a|=a-1$ (6) и при фиксированном значении параметра a нарисуем на плоскости XOY график функции $y=x|x+2a|$.

Рассмотрим несколько случаев:

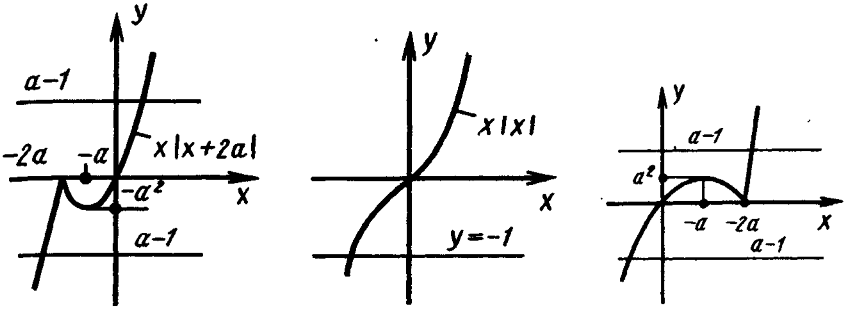


Рис. 16 Рис. 17 Рис. 18

1) $a>0$. Тогда $-2a<0$ и график функции $y=x|x+2a|$ изображен на рис. 16. Вершина параболы имеет координаты $(-a;\ -a^2)$. Отсюда видно, что прямая $y=a-1$ пересекает график в одной точке, если $a-1>0$ или $a-1<-a^2$ и, значит, уравнение (6) имеет единственное решение, если $a-1>0$ и $a-1<-a^2$. Первое неравенство имеет решения $a>1$, второе — $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}<a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; из решений второго неравенства в область $a>0$ попадают только значения из промежутка $0<a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2) $a=0$. В этом случае $y=x|x|$. График этой функции изображен на рис. 17. Прямая $y=-1$ пересекает этот график в единственной точке и, значит, уравнение имеет единственное решение $x=-1$.

3) $a<0$. В этом случае $-2a>0$ и график функции $y=x|x+2a|$ изображен на рис. 18. В рассматриваемом случае число $a-1$ отрицательно и, значит, прямая $y=a-1$ пересекает график функции $y=x|x+2a|$ в одной точке, т. е. уравнение (6) имеет единственное решение при всех a из рассматриваемой области $a<0$.

Ответ: $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a>1$ ▲

Пример 3. При всех a решить неравенство

$$|x^2-5x+4|<a.$$

Поскольку $|x^2-5x+4|\geqslant 0$ при любом x, то при $a<0$ неравенство не имеет решения.

Пусть $a>0$. Поскольку $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$, то числовая ось (ОДЗ неравенства) разбивается на три промежутка: $x<1$, $1\leqslant x\leqslant 4$, $x>4$. Решим неравенство на каждом из них.

Если $x<1$, то $x^2-5x+4>0$ и в этом случае исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-5x+4<a \\ x<1 \end{cases}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $x^2-5x+(4-a)$ равен $9+4a$ и, следовательно, больше нуля при $a>0$. Из неравенства $x^2-5x+4-a<0$ находим $\frac{1}{2}(5-\sqrt{9+4a})<x<\frac{1}{2}(5+\sqrt{9+4a})$. Проверим как располагаются точки $\frac{1}{2}(5-\sqrt{9+4a})$ и $\frac{1}{2}(5+\sqrt{9+4a})$ относительно $x=1$ на $a>0$.

$\frac{1}{2}(5-\sqrt{9+4a})<1\Rightarrow 3<\sqrt{9+4a}\Rightarrow 9<9+4a\Rightarrow 0<a$. Т. е. при $a>0$ эта точка располагается левее точки $x=1$. Аналогично убеждаемся, что при $a>0$ $\frac{1}{2}(5+\sqrt{9+4a})>1$, поэтому каждое $x\in\left]\frac{1}{2}(5-\sqrt{9+4a});\ 1\right[$ при всех $a>0$ есть решение исходного неравенства.

Если $x\in[1;\ 4]$, то $x^2-5x+4<0$, исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2-5x+4+a>0 \ (*) \\ 1\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$, дискриминант квадратного трехчлена $x^2-5x+4+a$ равен $9-4a$. Если $a>9/4$ (т. е. $D<0$), тогда неравенство $(*)$ справедливо $\forall x\in\mathbb{R}$, а при $0<a\leqslant 9/4$ решением неравенства $(*)$ все $x\in\left]-\infty;\ \frac{1}{2}(5-\sqrt{9-4a})\right[\cup\left]\frac{1}{2}(5+\sqrt{9-4a});+\infty\right[$. Для того, чтобы найти решения системы, необходимо определить расположение точек $\frac{1}{2}(5-\sqrt{9-4a})$ и $\frac{1}{2}(5+\sqrt{9-4a})$ относительно промежутка $[1;\ 4]$ при $a\in]0;\ 9/4]$. Вычисления показывают, что справедливы неравенства $1<\frac{1}{2}(5-\sqrt{9-4a})\leqslant\frac{1}{2}(5+\sqrt{9-4a})<4$. Отсюда заключаем, что в случае $x\in[1;\ 4]$ при $a>9/4$ решением исходного неравенства является отрезок $1\leqslant x=4$, при $0<a\leqslant 9/4$ решение неравенства есть $x\in\left[1;\ \frac{1}{2}(5-\sqrt{9-4a})\right[\cup\left]\frac{1}{2}(5+\sqrt{9-4a});\ 4\right]$.

При $x>4$ $x^2-5x+4>0$ и исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x>4 \\ x^2-5x+4-a<a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{9+4a}\right)<x<\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{9+4a}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4<x<\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{9+4a}\right).$$

Ответ: При $a\leqslant 0$ исходное неравенство решений не имеет, при $a\in]0;\ 9/4[$ имеет решение $x\in]\ \frac{1}{2}(5-\sqrt{9+4a});\frac{1}{2}(5-\sqrt{9-4a})\ [\ \times$ $\times\ \cup\ ]\ \frac{1}{2}(5+\sqrt{9-4a});\frac{1}{2}(5+\sqrt{9+4a})\ [$; при $a>9/4$ имеет решение $x\in]\ \frac{1}{2}(5-\sqrt{9+4a});\ \frac{1}{2}(5+\sqrt{9+4a})\ [$.

Полученный ответ геометрически иллюстрируется на рис. 19: положение I соответствует случаю $a<0$, положение II — случаю $0<a\leqslant 9/4$, положение III — случаю $a\geqslant 9/4$

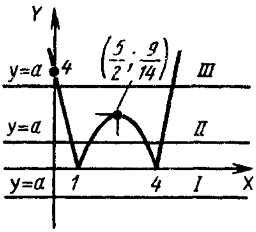


Рис. 19

Пример 4. Найти все значения $a\neq 0$, для которых неравенство $a^2|a+x/a^2|+|1+x|\leqslant 1-a^3$ имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами.

$\triangle$ Левая часть неравенства неотрицательна при любых значениях a и x, следовательно, неравенство может иметь решение только тогда, когда его правая часть неотрицательна, т. е. при $a^3\leqslant 1\Rightarrow a\leqslant 1$. Поскольку $a^2|a+x/a^2|=|a^3+x|$, то исходное неравенство равносильно неравенству $|x+a^3|+|x+1|\leqslant 1-a^3(*)$ при $a\leqslant 1$. Решим это неравенство методом интервалов, разбив числовую ось на три интервала:

$$x\leqslant -a^3,\quad -a^3<x\leqslant -1;\ \text{и}\ -1<x.$$

На первом интервале $x<-a^3$, тогда исходное неравенство записывается без знаков модуля $-x-a^3-x-1\leqslant 1-a^3\Rightarrow -2x\leqslant 2\Rightarrow$ $\Rightarrow x\geqslant -1$, т. е. $-1\leqslant x\leqslant -a^3$.

На втором интервале $-a^3<x\leqslant 1$ неравенство записывается без знаков модуля $x+a^3-x-1\leqslant 1-a^3\Rightarrow 2a^3\leqslant 2\Rightarrow a\leqslant 1$, но $-a^3<$ <1 при $-1<a<1$, тогда $-a^3<x\leqslant 1$ при $|a|<1$.

На третьем интервале $1 < x - x + a^3 + x + 1 \leqslant 1 - a^3 \Rightarrow 2x \leqslant$ $\leqslant -2a^3 \Rightarrow x \leqslant -a^3$, т. е. $x \in \varnothing$.

Итак, имеет решение $-1 \leqslant x \leqslant -a^3$ при $a \leqslant 1$, $-a^3 < x \leqslant 1$ при $|a| < 1$. Определим при каких a эти промежутки будут иметь не менее четырех целых решений. На промежутке $-1 \leqslant x \leqslant -a^3$ целые решения будут -1, 0, 1, 2, значит надо, чтобы $-a^3 \geqslant 2 \Rightarrow a \in]-\infty; -\sqrt[3]{2}]$. На втором промежутке при $|a| < 1$ нет четырех целых решений.

Ответ: $a \in]-\infty; -\sqrt[3]{2}]$. ▲

Второе решение. Заменив левую часть неравенства (*) по формуле $|a+b| = |a| + |b|$ при $ab \geqslant 0$, получим $|x + a^3 + x + 1| \leqslant 1 - a^3 \Rightarrow |2x + a^3 + 1| \leqslant 1 - a^3 \Rightarrow -(1 - a^3) \leqslant 2x + a^3 + 1 \leqslant \leqslant 1 - a^3 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant -a^3$

На промежутке $-a^3 < x \leqslant 1$ воспользоваться предыдущим решением.

Пример 5. Найти все a, при каждом из которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

△ Пусть a — некоторое фиксированное число. Данное неравенство можно переписать в виде $|x - a| < 3 - x^2$. Отсюда следует, что оно равносильно двойному неравенству $-(3 - x^2) < < x - a < 3 - x^2$, или равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x - a < 3 - x^2 \\ -(3 - x^2) < x - a. \end{cases}$$

Следовательно, задача может быть переформулирована так: определить те a, при каждом из которых множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 - a < 0 \\ x^2 - x - 3 + a < 0 \\ x < 0 \end{cases} \qquad (*)$$

содержит хотя бы одно число. Дискриминанты квадратных трехчленов $x^2 + x - 3 - a$ и $x^2 - x - 3 + a$ равны соответственно $13 + 4a$ и $13 - 4a$. Для того, чтобы первое и второе неравенство системы (*) имели решения, надо, чтобы были выполнены неравенства $13 + 4a > 0$ и $13 - 4a > 0$, т. е. $-\frac{13}{4} < a < \frac{13}{14}$. В дальнейшем будем считать, что a удовлетворяет этим неравенствам.

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 корни квадратных трехчленов $x^2 + x - 3 - a$ и $x^2 - x - 3 + a$ соответственно. При этом будем считать, что $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$. Так как множества решений первого и второго неравенств системы (*) имеют вид $x_1 < x < x_2$ и $x_3 < x < x_4$, то система (*) будет иметь решение тогда и только тогда, когда $x_1<0$ и $x_3<0$ или когда $\frac{1\sqrt{13+4a}}{2}<0$ и $\frac{1\sqrt{13-4a}}{2}<$ <0.

Первое неравенство выполнено для всех $a\in]-13/4;\ 13/4[$. Множество решений последнего неравенства есть $a<3$.

Итак, система (*) имеет хотя бы одно решение, если параметр a принадлежит множеству $-13/4<a<3$ и только в этом случае.

Ответ: $-13/4<a<3$. ▲

Упражнения

1. Для всех a решить неравенство:

1) $|x-2a|<\dfrac{8a^2}{|x-2a|}$; 2) $|x^2-1|\leqslant ax$; 3) $|x^2-1|\geqslant a$;
4) $|x^2-a|\geqslant x$; 5) $2|x-2|<2ax-x^2-2$; 6) $|x^2-a^2|>2a^2$.

Ответы: 1) при $a<0$ $(2\sqrt{3a};\ 2a)$ и $(2a;\ -2\sqrt{3a})$; при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $(-2\sqrt{3a};\ 2a)\cup(2a;\ 2\sqrt{3a})$;

2) при $a<0$ $\left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2};\ \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$; при $a=0$ $\{-1;\ 1\}$; при $a>0$ $\left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2};\ \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$;

3) при $a\leqslant 0$ $x\in R$; если $0<a<1$ $(-\infty;\ -\sqrt{1+a}]\cup$ $\cup[-\sqrt{1-a};\ \sqrt{1-a}]\cup[\sqrt{1-a}+\infty]$ при $a=1$ $(-\infty;\ -\sqrt{2}]\cup$ $\cup\{0\}\cup[\,[\sqrt{2};\ +\infty[$; при $a>1$ $(-\infty;\ -\sqrt{1+a}]\cup[\sqrt{1+a};\ +\infty)$;

4) при $a<-1/4$ $\left(-\infty;\ \dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ +\infty\right)$; при $a=-1/4$ $\{1/2\}$; при $a>1/4$ $x\in R$;

5) при $|a|>\sqrt{2}$ $(a+1-\sqrt{a^2-1};\ a+1+\sqrt{a^2-1})$; при $|a|\leqslant$ $\leqslant\sqrt{2}$ решений нет;

6) при $a<0$ $(-\infty;\ \sqrt{3a})\cup(-\sqrt{3a};\ +\infty)$; при $a\geqslant 0$ $(-\infty;$ $-\sqrt{3a})\cup(\sqrt{3a};\ +\infty)$.

2. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a<-7/3;\ -2<a$.

3. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $x|x-2a|-1-a=0$ имеет единственное решение.

Ответ: $-1<a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2-4x-2|x-a|+2+a=0$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a<2$, $\frac{7}{3}<a$;

5. Найти все a, при каждом из которых неравенство $2>|x+a|+x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

Ответ: $-\frac{9}{4}<a<2$.

6. Найти все a, при каждом из которых неравенство $x^2<4-|x+a|$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Ответ: $-4<a<\frac{17}{4}$.

7. Найти все a, при каждом из которых неравенство $x^2+|x-a|<1$ имеет хотя бы одно положительное решение.
Ответ: $-1<a<5/4$.

8. Найти все значения a, при которых неравенство выполняется для всех $x\in R$.

1) $\left|\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$ 2) $\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$.

Ответ: 1) $-5<a<1$; 2) $-1<a<5$.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Пример 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена $4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 2$ равно 3.

$\triangle$ Рассмотрим три варианта расположения графика трехчлена на плоскости XOY, удовлетворяющие условию задачи. На рис. 20 вершина параболы имеет координаты $x_0\in[0;\ 2]$ и $y_0=3$.

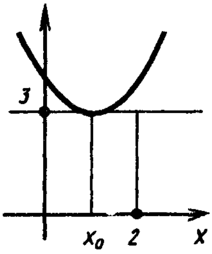


Рис. 20

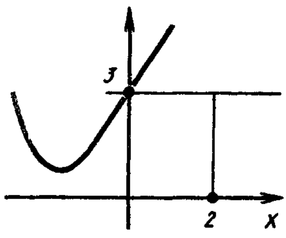


Рис. 21

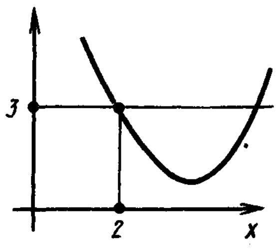


Рис. 22

Для данного трехчлена $x_0=a/2$, а $y_0(x_0)=4\left(\frac{a}{2}\right)^2-4a\frac{a}{2}+a^2-2a+2=3$, $a^2-2a^2+a^2-2a-1=0$ или $a=-1/2$. Но $0<x_0<2$, т. е. $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant 2$, $0\leqslant a\leqslant 4$, $a-1/2\ [0;\ 4]$.

Значит этот вариант невозможен.

При втором варианте (рис. 21) вершина параболы расположена левее точки $x=0$, т. е. $a/2<0$ и $a<0$. Наименьшее значение трехчлена будет в точке $x=0$ и равно 3; т. е. $f(0)=3$.

Определим при каких a это возможно $4\cdot 0-4a\cdot 0+a^2-2a+$ $+2=3$, $a^2-2a-1=0$, $a_1=1-\sqrt{2}$, $a_2=1+\sqrt{2}$. Так как $a_2>0$, то условию задачи отвечает $a_1=1-\sqrt{2}$.

При третьем варианте (рис. 22) вершина параболы расположена правее точки $x=2$, т. е. $a/2>2$, $a>4$. Наименьшее значение трехчлена будет в точке $x=2$ равно 3, т. е. $f(2)=3\cdot 4(2)^2-$ $-4a\cdot 2+a^2-2a+2=3$, $a_3=5+\sqrt{10}$, $a_4=5-\sqrt{10}$, т. к. $a_4<4$, то условию задачи отвечает $a_3=5+\sqrt{10}$.

Ответ: $1-\sqrt{2}$; $5+\sqrt{10}$. ▲

Пример 2. Найти все значения a из промежутка $[1;\ \infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения

$$x^2-6x+2ax+a-13=0$$

принимает наибольшее значение.

△ Найдем дискриминант D исходного уравнения: $D=$ $=(2a-6)^2-4(a-3)=(2a-7)^2+39$. Поскольку теперь очевидно, что D положителен для любого значения a, то исходное квадратное уравнение имеет два действительных корня.

$x_1=(3-a)-\sqrt{a^2-7a+22}$ и $x_2=(3-a)+\sqrt{a^2-7a+22}$.

Задачу теперь можно переформулировать следующим образом: найти все значения параметра a из промежутка $[1;\ +\infty)$, при каждом из которых выражение $3-a+\sqrt{a^2-7a+22}$ принимает наибольшее значение, т. е. надо найти наибольшее значение функции $f(a)=3-a+\sqrt{a^2-7a+22}$ на промежутке $[1;\ +\infty)$. В каждой точке этого промежутка функция $f(a)$ имеет производную

$$f'(a)=-1+\frac{2a-7}{2\sqrt{a^2-7a+22}}=\frac{2a-7-2\sqrt{a^2-7a+22}}{2\sqrt{a^2-7a+22}}.$$

Так как числитель этой дроби меньше нуля при всех $1<a<+\infty$ (решите неравенство $2a-7-2\sqrt{a^2-7a+22}<0$), то $f'(a)<0$, т. е. на этом промежутке функция $f(a)$ убывает. Поскольку $f(a)$ непрерывна при $a=1$, то функция $f(a)$ убывает и на промежутке $[1;\ +\infty)$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(a)$ принимается при $a=1$.

Ответ: 1. ▲

Пример 3. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$(1+a^2)x^2+2(x-a)(1+ax)+1=0.$$

△ Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого представим ее в виде квадратного трехчлена относительно выражения $1+ax$. Имеем

$$(1+a^2)x^2+2(x-a)(1+xa)+1=a^2x^2+x^2+1+2(x-a)(1+ax)=$$
$$=(a^2x^2+2ax+1)+2(x-a)(1+xa)+x^2-2ax=(ax+1)^2+$$
$$+2(x-a)(ax+1)+x^2-2ax=(ax+1)^2+2(ax+1)(x-a)+(x-a)^2-$$
$$-a^2=(ax+1+x+a)^2-a^2=(ax+x-a+1-a)(ax+x+1)=$$
$$=(ax+x-a+1)(ax+x+1).$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} ax+x-a+1=0 \\ ax+x+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x(a+1)-2a+1=0 \\ x(a+1)+1=0. \end{array}\right.$$

Решая эту совокупность, находим: при $a\neq -1$ числа $\frac{2a-1}{1+a}$ и $\frac{-1}{1+a}$ являются корнями исходного уравнения; при $a=-1$ уравнение не имеет корней. ▲

Пример 4. Для каждого значения $a\geqslant 0$ решить неравенство $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geqslant 0$.

△ Если $a=0$, то неравенство перепишется в виде $-x+3\geqslant 0$, откуда следует, что $x\in]-\infty;\ 3]$.

Пусть теперь a — фиксированное положительное число. Преобразуем левую часть исходного неравенства следующим образом:

$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3=a(a^2x^4+6ax^2+9)-x+3=a(ax^2+3)^2-$$
$$-x+3=a((ax^2+3)^2-x^2)+ax^2-x+3=a(ax^2-x+3)(ax^2+x+$$
$$+3)+ax^2-x+3=(ax^2-x+3)(a^2x^2+ax+3a+1).$$

Дискриминант квадратного трехчлена $a^2x^2+ax+3a+1$ равен: $D=-a^2(12a+3)$. Так как a — фиксированное положительное число, то ясно, что $D<0$. Следовательно, квадратный трехчлен $ax^2+ax+3a+1$ положителен для любого значения x, и поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$ax^2-x+3\geqslant 0 \qquad (*)$$

Дискриминант квадратного трехчлена ax^2-x+3 равен $1-12a$. Следовательно, при $a\geqslant \frac{1}{12}$ этот дискриминант не положителен, и поэтому множество решений неравенства (*), есть вся числовая прямая. Если же $a\in]0;\ 1/12[$, то множество решений неравенства (*) состоит из двух промежутков: $-\infty<x\leqslant\frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$; и $\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2}<x<+\infty$. Эти же множества удовлетворяют и исходному неравенству.

Ответ: При $a=0$ $x\in]-\infty;\ 3]$;

при $a\in]0;1/12[$ $x\in]-\infty;\frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}]\cup[\frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a};\ +\infty[$;

при $a\geqslant 1/12$, $x\in R$. ▲

Упражнения

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее значение квадратного трехчлена

$$-x^2+2ax-(a^2-2a+3)$$

на отрезке $x\in[0;\ 1]$ равно -2.

Ответ: $1/12$; $2+\sqrt{2}$.

2. Найти все значения a из промежутка $(-\infty;\ -4]$, при каждом из которых меньший из корней уравнения

$$x^2+ax-3x-2a-2=0$$

принимает наименьшее значение.

Ответ: -4.

3. Решить уравнения:

1) $ax^4-x^3+a^2x-a=0$; 2) $x^4+4a^3x=a^4$;
3) $(ax-1)^3+(a+1)^3x^2=0$; 4) $(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5$;
5) $x^4-x^2+a=0$; 6) $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3=0, a\geqslant 0$;
7) $x^3+(1-a^2)x+a=0$; 8) $x^3-3x=a^3+1/a^3$;
9) $x^4+4a^3x=a^4$; 10) $x^4+x^3-3a^2x^2-2a^2x+2a^4=0$;
11) $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8=0,\ a\geqslant 0$.

Ответы: 1) $x_1=0$ при $a=0$; $x_1=-\sqrt[3]{a}$ и $x_2=1/a$ при $a<0$ и $a>0$;

2) $x_1=0$ при $a=0$; $x_{1,2}=\dfrac{\left(-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)a}{\sqrt{2}}$ при $a<0$ и $a>0$;

3) $x_1=-1$ и $x_2=1$ при $a=0$; $x_1=-1$, $x_{2,3}=$
$=\dfrac{-3a-1\pm(a+1)\sqrt{4a+1}}{2a^3}$ при $-1/4<a<0$ и $a>0$;

4) $x\in\mathbb{R}$ при $a=0$; $x_1=-a$ или $x_2=a$ при $a<0$ и $a>0$;

5) $\left\{\sqrt{\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}};\quad -\sqrt{\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}}\right.$ при $0<a<1/4$;
$\{-1;\ 0;\ 1\}$ при $a=0$; $\{-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2}\}$ при $a=1/4$; $\left\{\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}};\right.$
$\left.-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}}\right\}$ при $a<0$; $x\in\varnothing$ при $a>1/4$;

6) $\{3\}$ при $a=0$; $\left\{\dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2a};\ \dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}\right\}$ при $0<a<1/12$;
$\{6\}$ при $a=1/12$.

Указание. $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3=(ax^2-x+3)(a^2x^2+ax+$
$-3a+1)$.

7) $\left\{-a;\ \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2};\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right\}$ при $|a|>2$; $\{-2;\ 1\}$ при $a=2$; $\{-1;\ -2\}$ при $a=-2$; $\{-a\}$ при $-2<a<2$;

8) $\{-1;\ 2\}$ при $a=1$; $\{-2;\ 1\}$ при $a=-1$; $\{a+1/a\}$ при $-\infty<a<-1$, $-1<a<0$, $1<a<+\infty$;

9) $\{0\}$ при $a=0$; $\left\{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(-1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right);\ \frac{a}{\sqrt{2}}\left(-1-\right.\right.$ $\left.\left.-\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)\right\}$ при $a\neq 0$;

10) $\left\{-\sqrt{2}\,|a|;\ \sqrt{2}\,|a|;\ \frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{4a^2+1}}{2}\right\}$ при $a\neq 0$; $\{0;\ 1\}$ при $a=0$. Указание. Рассматривая уравнение как квадратное относительно a^2, найти его корни $a_1^2=x^2+x$ и $a_2^2=x^2/2$. Разложить левую часть исходного уравнения на множители: $[a^2-(x^2+x)][a^2-x^2/2]=0$;

11) $\{-1/4\}$ при $a=0$; $\left\{\frac{-2-\sqrt{4-2a}}{2a};\ \frac{-2+\sqrt{4-2a}}{2a}\right\}$ при $0<a<2$; $\{-1/2\}$ при $a=2$.

4. Для каждого значения параметра $a\geqslant 0$ решить неравенство

1) $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8\geqslant 0$;
2) $16a^3x^4+8a^2x^2+16x+a+4\geqslant 0$;
3) $a^3x^4+2a^2x^2-8x+a+4\geqslant 0$.

Ответы: 1) При $a=0$ $x\in[-1/4;\ +\infty[$; при $a\in]0;\ 2[$ $x\in]-\infty;\ \frac{-2-\sqrt{4-2a}}{2a}[\cup]\frac{-2+\sqrt{4-2a}}{2a};\ +\infty[$; при $a\geqslant 2$ $x\in R$;

2) При $a=0$ $x\in[-1/4;\ +\infty[$; при $0<a<1$ $x\in]-\infty,\ \frac{-1-\sqrt{1-a}}{2a}[\cup]\frac{\sqrt{1-a}-1}{2a};\ +\infty[$; при $a\geqslant 1$ $x\in R$;

3) при $a=0$ $x\in]-\infty;\ 1/2]$; при $0<a<1$ $x\in]-\infty;\ \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}[\cup]\frac{1+\sqrt{1-a}}{a};\ +\infty[$; при $a\geqslant 1$ $x\in R$.

5. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Справочный материал

При решении параметрических иррациональных уравнений пользуются общими формулами. Пусть f и g —некоторые функции, $K\in N$, тогда:

1) $\sqrt[2k]{f}\cdot\sqrt[2k]{g}=\sqrt[2k]{f\cdot g}$, $f\geqslant 0,\ g\geqslant 0$;
2) $\sqrt[2k]{f}/\sqrt[2k]{g}=\sqrt[2k]{f/g}$, $f\geqslant,\ g>0$;
3) $|f|\sqrt[2k]{g}=\sqrt[2k]{f^2g}$, $g\geqslant 0$;
4) $\sqrt[2k]{f/g}=\sqrt[2k]{|f|}\ \sqrt[2k]{|g|}$, $fg\geqslant,\ g\neq 0$;
5) $\sqrt[2k]{fg}=\sqrt[2k]{|f|}\cdot\sqrt[2k]{|g|}$, $fg\geqslant 0$.

Применяя любую из этих формул формально (без учета указанных ограничений), следует иметь в виду, что ОДЗ левой и правой частей каждой из них могут быть различными. Например, выражение $\sqrt{f}\cdot\sqrt{g}$ определено при $f=0$ и $g=0$, а выражение $\sqrt{fg}$ — как при $f\geqslant 0$, $g\geqslant 0$, так и при $f\leqslant 0$, $g\leqslant 0$.

Для каждой из формул 1—5 (без учета указанных ограничений) ОДЗ правой ее части может быть шире ОДЗ левой. Отсюда следует, что преобразования уравнения с формальным использованием формул 1—5 «слева—направо» (как они написаны) приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного. В этом случае могут появиться посторонние корни исходного уравнения.

Преобразования уравнений с формальным использованием формул 1—5 «справа—налево» недопустимы, так как возможно сужение ОДЗ исходного уравнения, а следовательно и потеря корней.

Уравнение вида

$$\sqrt[2k]{f(x)} = g(x),\ \ k\in N,$$

равносильно системе

$$\begin{cases} g(x)\geqslant 0 \\ f(x) = g^{2k}(x). \end{cases}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+1)(x-2)}=a.$$

$\triangle$ Найдем ОДЗ $(x+1)(x-2)\geqslant 0 \Rightarrow x\leqslant -1$ или $2\leqslant x$. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a\geqslant 0 \\ (x+1)(x-2) = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geqslant 0 \\ x^2-x-2-a^2=0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1+4(a^2+2)}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4(a^2+2)}}{2}.$$

Эти корни возможны, если дискриминант этого уравнения неотрицателен, т. е. $1+4(a^2+2)\geqslant 0 \Rightarrow 4a^2+9\geqslant 0 \Rightarrow a\in \mathrm{R}$. С учетом условия системы $a\geqslant 0$.

Теперь необходимо проверить при каких значениях a корни принадлежат ОДЗ. Здесь возможны следующие случаи.

Оба корня принадлежат $x\leqslant -1$. Видно, что это невозможно, т. к. $x_2>0$ при всех $a\geqslant 0$.

Оба корня принадлежат $x\geqslant 2$. Но это то же невозможно, т. к. $x_1<0$ при всех $a\geqslant 0$.

Один корень принадлежит множеству $x \leqslant -1$, а другой $x \geqslant 2$. Решим систему

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1-\sqrt{1+4(a^2+2)}}{2} \leqslant -1 \\ 2 \leqslant \dfrac{1+\sqrt{1+4(a^2+2)}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 3 \leqslant \sqrt{4a^2+9} \\ 3 \leqslant \sqrt{4a^2+9} \end{cases} \Rightarrow a \geqslant 0.$$

Ответ: При $a \geqslant 0$ $x = \dfrac{1-\sqrt{4a^2+9}}{2}$ и $x = \dfrac{1+\sqrt{4a^2+9}}{2}$; при $a < 0$ решений нет.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2} = a. \qquad (*)$$

△ Видно, что это уравнение примера 1, преобразованное по формуле 1 «справа—налево», ОДЗ уравнения $(*)$ $x \geqslant 2$ и его решение такое же как в примере 1 и корни $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{4a^2+9}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{4a^2+9}}{2}$. Но множеству $x \geqslant 2$ принадлежит только корень x_2.

Ответ: При $a \geqslant 0$ $x = \dfrac{1+\sqrt{4a^2+9}}{2}$. ▲

Пример 3. Решить уравнение $x - \sqrt{a-x^2} = 1$.

△ Приведем два способа решения.

Первое решение. Применим способ возведения в степень с последующей проверкой $x-1 = \sqrt{a-x^2} \Rightarrow (x-1)^2 = a - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 - a = 0$ откуда $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{2a-1}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$ при $a \geqslant \dfrac{1}{2}$. Если $a < 1/2$ — то решений нет. Проверим, какие из найденных значений x удовлетворяют исходному уравнению. Подставляя x_1 в исходное уравнение, получим, что левая часть — $-\dfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$ отрицательна, а правая $\sqrt{a - \left[\dfrac{1-\sqrt{2a-1}}{2}\right]^2}$ неотрицательная, так что x_1 не удовлетворяет исходному уравнению. Подставим теперь x_2:

$$\frac{\sqrt{2a-1}-1}{2} = \sqrt{a - \left[\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\right]^2}.$$

Полученное равенство верно тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{2a-1} - 1 \geqslant 0, \text{ т. е. } a \geqslant 1.$$

Второе решение. Применим способ сведения к равносильной смешанной системе

$$x-1=\sqrt{a-x^2} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2=a-x^2 \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-2x+1-a=0 \\ x\geqslant 1. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения: $x_1=\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}<1$ при всех $a\geqslant\frac{1}{2}$; а $x_2=\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}>1 \Leftrightarrow \sqrt{2a-1}>1 \Leftrightarrow a\geqslant 1$.

Ответ: При $a<1$ решений нет; при $a\geqslant 1$ $x=\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$.

Геометрическая интерпретация решений. На координатной плоскости (XOY) решение уравнения $x-1=\sqrt{a-x^2}$ эквивалентно отысканию точек пересечения прямой линии $y=x-1$ с полуокружностями $y=\sqrt{a-x^2}$. Из рис. 23 видно, что эти линии пересекаются при $a\geqslant 1$ в единственной точке (т. е. исходное уравнение при $a\geqslant 1$ имеет только одно решение).

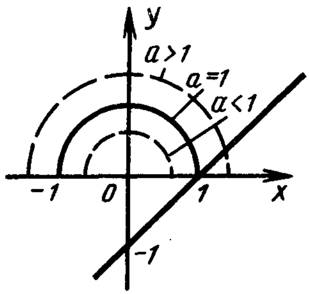


Рис. 23

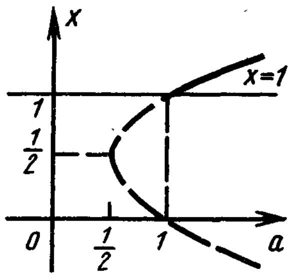


Рис. 24

Представим теперь графически решение исходного уравнения на координатной плоскости (aOX). Так как уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} a=2x^2-2x+1 \\ x\geqslant 1, \end{cases}$$

то его решение можно рассматривать как отыскание на координатной плоскости (aOX) точек параболы $a=2x^2-2x+1$, для которых $x\geqslant 1$. Как видно из рис. 24 решение существует при $a\geqslant 1$, причем каждому значению $a\geqslant 1$ соответствует одно решение (одна точка на параболе, для которой $x\geqslant 1$). ▲

Пример 4. При каждом значении a решить уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$$

△ Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a+\sqrt{a+x}=x^2 \\ x\geqslant 0, \end{cases}$$

которая в свою очередь равносильна системе

$$\begin{cases} a+x=(x^2-a)^2 \\ x^2-a\geqslant 0 \\ x\geqslant 0, \end{cases} \qquad (*)$$

Уравнение системы (*) является уравнением четвертой степени относительно x и второй степени относительно a. Переписав его в виде

$$a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0,$$

разложим левую часть на множители. Дискриминат квадратного трехчлена относительно a равен:

$$(2x^2+1)^2-4(x^4-x)=4x^2+4x+1=(2x+1)^2,$$

и, следовательно,

$$a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=\left(a-\frac{(2x^2+1)+(2x+1)}{2}\right)\times$$
$$\times\left(a-\frac{(2x^2+1)-(2x+1)}{2}\right).$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух смешанных систем:

$$\begin{cases} x^2+x+1=a \\ x^2-a\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-x-a=0 \\ x^2-a\geqslant 0 \\ x\geqslant 0, \end{cases}$$

т. е. совокупности систем

$$\begin{cases} x^2-a=-x-1 \\ -x-1\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-a=x \\ x\geqslant 0, \end{cases}$$

Первая система этой совокупности решений не имеет. Вторая система совокупности равносильна системе

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\right)=0 \\ x\geqslant 0 \\ a\geqslant -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} a>0 \\ x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, для исходного уравнения получаем:

при $a<-\frac{1}{4}$ корней нет;

при $a=-\frac{1}{4}$ и $a>0$ существует единственный корень $x=$ $=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$;

при $-\frac{1}{4}<a\leqslant 0$ существует два корня:

$x_1=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ и $x_2=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. ▲

Пример 5. Решить уравнение

$$x+\sqrt{1-x^2}=a$$

△ Полагая $\sqrt{1-x^2}=y$, получим

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=1 \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

Замечая, что $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x+y=a \\ a^2-2xy=1 \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=\frac{a^2-1}{2} \\ y\geqslant 0, \end{cases}$$

причем x и y уравнений системы являются корнями уравнения $t^2-at+\frac{a^2-1}{2}=0$ (по теореме Виета). Дискриминант этого уравнения $D=a^2-2(a^2-1)=-a^2+2$. Уравнение имеет корни, если $|a|\leqslant\sqrt{2}$, кроме того один из них должен быть неотрицателен, а другой любого знака.

Корни будут отрицательны, если $a^2-1>0$ и $a<0$, т. е. если $-\sqrt{2}\leqslant a<-1$. При этом условии исходное уравнение не имеет корней. Если $a=-1$, то $t_1=0$, $t_2=-1$ и, значит, $x=-1$. Если $-1<a<1$, то $a^2-1<0$, корни разных знаков и, значит, x — отрицательный корень, т. е.

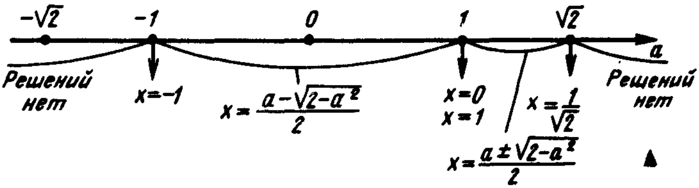
$$x=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Если $a=1$, то $t_1=0$, $t_2=1$ и уравнение имеет два корня: $x_1=0$, $x_2=1$.

Если $1<a\leqslant\sqrt{2}$, то $a^2-1>0$, $a>0$ — оба корня уравнения положительны, и уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Резюме



▲

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}=a.$$

△ Полагая $\sqrt{x^2-1}=u$, $\sqrt{x^2-2}=v$, получим

$$\begin{cases} u+v=a \\ u^2-v^2=1 \\ u\geqslant 0,\ v\geqslant 0. \end{cases}$$

Если $a=0$, то система несовместима. Считая $a\neq 0$, находим $u-v=\frac{1}{a}$ $u=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, $v=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$.

Решая систему неравенств

$a+\frac{1}{a}\geqslant 0$, $a-\frac{1}{a}\geqslant 0$ находим $a\geqslant 1$. При этих значениях a

$x^2-1=u^2=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$, $x^2=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}$. ▲

Пример 7. Решить уравнение

$$x+\sqrt{x^2-1}=a.$$

△ Полагая $\sqrt{x^2-1}=y$, будем иметь

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2-y^2=1, \end{cases}\quad y\geqslant 0.$$

Если $a=0$, то эта система несовместна и, значит, при $a=0$ исходное уравнение не имеет корней.

Если $a\neq 0$, то $x-y=\frac{1}{a}$, $x+y=a$ и, значит, $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$. Значение $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ будет корнем данного уравнения тогда, и только тогда, когда y будет неотрицателен:

$a-\frac{1}{a}\geqslant 0\Rightarrow\frac{(a-1)(a+1)}{a}\geqslant 0\Rightarrow a(a-1)(a+1)\geqslant 0\Rightarrow$

$\Rightarrow -1\leqslant a<0$ или $a\geqslant 1$.

Для всех других значений a исходное уравнение не имеет корней. ▲

Пример 8. Решить уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=a,\ a\neq 0.$$

Δ Полагая $\sqrt{1-x^2}=y>0$, получим: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$, $x^2+y^2=1$, $y>0$. Далее $x+y=axy$, $(x+y)^2-2xy=1$, $a^2(xy)^2-2xy-1=0$, $xy=\frac{1\pm\sqrt{1+a^2}}{a^2}$, $x+y=\frac{1\pm\sqrt{1+a^2}}{a}$.

Таким образом, x и y являются корнями уравнений (по теореме Виета):

$$z^2-\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}z+\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a^2}=0, \qquad (1)$$

$$z^2-\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}z+\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a^2}=0. \qquad (2)$$

Исследуем уравнение (1). Его дискриминант

$$D_1=\left(\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)^2-4\ \frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a^2}=\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-3\right).$$

Условие $D_1\geqslant 0$ будет выполнено, если $\sqrt{1+a^2}-3\geqslant 0$, т. е. если или $a\leqslant -2\sqrt{2}$ или $a\geqslant 2\sqrt{2}$. Если $a\leqslant -2\sqrt{2}$, то $x+y=$ $=\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}<0$, $xy=\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a^2}>0$ и, значит, оба корня уравнения (1) отрицательны, т. е. оно не дает решений для исходного уравнения, поскольку $y>0$. Если $a\geqslant 2\sqrt{2}$, то $x+y>0$, $xy>0$, и оба корня уравнения (1) положительны, т. е. при условии $a\geqslant 2\sqrt{2}$ данное уравнение имеет корни

$$x_{1,2}=\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-3\right)}=$$

$$=\frac{1}{2a}\left[1+\sqrt{1+a^2}\pm\sqrt{\left(1+\sqrt{1+a^2}\right)\left(\sqrt{1+a^2}-3\right)}\right].$$

Переходим к исследованию уравнения (2). Его дискриминант

$$D_2=\left(\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}\right)^2-4\ \frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a^2}=\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a^2}\left(3+\sqrt{1+a^2}\right)>0,$$

так что уравнение (2) всегда имеет действительные корни.

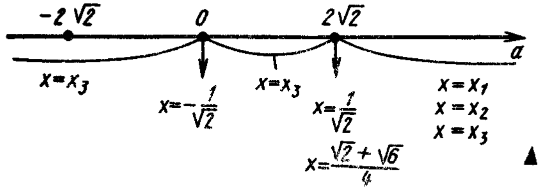
Так как $xy=\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a^2}<0,$

то корни уравнения (2) противоположных знаков, а так как $y>0$, то x — отрицательный корень уравнения (2):

$$x_3=\frac{1-\sqrt{1+a^3}}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{\left(\sqrt{1+a^2}-1\right)\left(3+\sqrt{1+a^2}\right)}.$$

Итак, при любом $a\neq 0$ исходное уравнение имеет корень x_3; если $a\geqslant 2\sqrt{2}$, то будут еще корни x_1 и x_2; если $a<-2\sqrt{2}$, то только один корень x_3.

Расположение корней на числовой оси a показано на рисунке, по которому можно дать ответ о количестве корней в зависимости от a:



▲

Пример 9. Найти такие значения a, b, c, при которых уравнение

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c \qquad (1)$$

имеет бесконечно много решений.

△ Перенесем $\sqrt{x}$ в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат. После приведения подобных членов получим уравнение

$$(a+2c)\sqrt{x}=c^2-b,$$

являющееся следствием уравнения (1).

При $a+2c=0$ и $c^2-b=0$, и только в этом случае, последнее уравнение имеет бесконечно много решений (все неотрицательные числа).

Подставив $a=2c$ и $b=c^2$ в уравнение (1) получим

$$\sqrt{x-2c\sqrt{x}+c^2}=c-\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{\left(\sqrt{x}-c\right)^2}=c-\sqrt{x}\Rightarrow|\sqrt{x}-c|=$$
$$=c-\sqrt{x}. \qquad (2)$$

при $c<0$ это уравнение корней не имеет, а при $c=0$ имеет единственное решение $x_1=0$.

Пусть $c>0$. Рассмотрим такие значения неизвестного x, которые удовлетворяют неравенству $0\leqslant x\leqslant c^2$. Тогда $\sqrt{x}\leqslant c$, а поэтому $|\sqrt{x}-c|=c-\sqrt{x}$. Следовательно, уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} c>0 \\ 0\leqslant x\leqslant c^2. \end{cases}$$

Итак, уравнение (1) имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $a=-2c$, $b=c^2$ и $c>0$, и его решениями являются все числа из отрезка $[0;\ c^2]$. ▲

Пример 10. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}.$$

△Уравнение определено, если $b\geqslant 0$, $a+x>0$, $a-x\geqslant 0$ $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\neq 0$. Из этих неравенств следует, что $a\geqslant 0$ и $-a<x\leqslant a$, т. к. $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\neq 0$, то $x\neq 0$, тогда $a>0$.

Так как числителем левой части является сумма арифметических корней, то $b\neq 0$. Запишем производную пропорцию из данного уравнения при $b\neq 1$:

$$\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})+(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})-(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}=\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}$$

После возведения обеих частей последнего уравнения в квадрат получим

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{(\sqrt{b}+1)^2}{(\sqrt{b}-1)^2}.$$

Составляем еще раз производную пропорцию

$$\frac{(a+x)-(a-x)}{(a+x)+(a-x)}=\frac{(\sqrt{b}+1)^2-(\sqrt{b}-1)^2}{(\sqrt{b}+1)^2+(\sqrt{b}-1)^2}\Rightarrow\frac{x}{a}=\frac{2\sqrt{b}}{b+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}.$$

Поскольку $\frac{2\sqrt{b}}{b+1}\leqslant 1$, то $x\leqslant a$. При $b=1$ исходное уравнение принимает вид $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1$. Решая его находим $x=a$, что получается также из формулы

$$x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}\quad\text{при } b=1.$$

Итак,

$$x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}\quad\text{при } a>0 \text{ и } b>0. \ ▲$$

Пример 11. Решить уравнение $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

△ Допустимыми значениями неизвестного x и параметра a по условию уравнения являются $a+x\geqslant 0$, $a\geqslant\sqrt{a+x}$, а с учетом арифметического корня в левой части уравнения $x\geqslant 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат. После упрощений получаем $a-x^2=\sqrt{a+x}$. Прибавляя к обеим частям уравнения $+x$ и раскладывая левую часть уравнения на множители как разность квадратов, получим

$$\left(x+\sqrt{a+x}\right)\left(-x+\sqrt{a+x}\right)=\sqrt{a+x}+x, \text{ или}$$
$$\left(\sqrt{a+x}+x\right)\left(-x+\sqrt{a+x}-1\right)=0. \qquad (1)$$

Поскольку $x\geqslant 0$ и $\sqrt{a+x}\geqslant 0$, то $x+\sqrt{a+x}\geqslant 0$.

Если $x+\sqrt{a+x}=0$, то $x=0$ и $\sqrt{a+x}=0$, что возможно при $a=0$. Если $x+\sqrt{a+x}>0$, то уравнение (1) равносильно уравнению $\sqrt{a+x}=x+1$. После возведения обеих частей этого уравнения в квадрат и простейших преобразований получим

$$x^2+x+1-a=0.$$

Если $1-a>0$, то оба корня уравнения (2) отрицатеьны и решениями исходного уравнения быть не могут.

Если $a=1$, то $x_1=-1$ не может быть решением; $x_2=0$ — решение исходного уравнения.

Если $1-a<0$, то один корень уравнения (2) отрицателен, а другой положителен (о знаках корней квадратного уравнения см. с. 23). Найдем из уравнения (2) положительный корень:

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3+4a}}{2}, \text{ если } a>1.$$

При $a=1$ из последней формулы находим $x=0$.

Ответ: При $a=0$ $x=0$; при $a\geqslant 0$ $x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$. ▲

Пример 12. Решить уравнение

$$\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}=x.$$

△ Допустимые значения неизвестного и параметра в данном уравнении определяются системой неравенств.

$$\begin{cases} 1+ax\geqslant 0 \\ 1-ax\geqslant 0, \end{cases} \text{ или } |ax|\leqslant 1.$$

Кроме того, если a и x имеют одинаковые знаки ($ax>0$), то $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}>0$ и решением уравнения может быть только положительное значение неизвестного, а это значит, что и $a>0$. Если a и x имеют разные знаки ($ax<0$), то $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}<0$ и решением уравнения может быть только отрицательное значение неизвестного, но при этом также $a>0$. Таким образом, уравнение имеет отличное от нуля решение, если $a>0$. Если $a=0$, то $x=0$.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{1+ax}=x+\sqrt{1-ax}$ и возведем обе его части в квадрат.

После преобразований получим $x(x+2\sqrt{1-ax}-2a)=0$, откуда: а) $x_1=0$ при произвольных значениях a; б) $x+2\sqrt{1-ax}-2a=0$ или $2\sqrt{1-ax}=2a-x$.

Последнее уравнение имеет решения, если $2a-x\geqslant 0$. Возведем обе части этого уравнения в квадрат и после упрощений получим $x^2=4(1-a^2)$, откуда при $|a|\leqslant 1$ находим

$$x_2=-2\sqrt{1-a^2},\ x_3=2\sqrt{1-a^2}.$$

Найденные значения будут корнями исходного уравнения, если

$$\begin{cases} |ax|\leqslant 1 \\ 2a\geqslant x \\ a>0 \\ |a|\leqslant 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0<a\leqslant 1 \\ \pm\sqrt{1-a^2}\leqslant a \\ |\pm 2a\sqrt{1-a^2}|\leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} 0<a\leqslant 1 \\ 1-a^2\leqslant a^2 \\ a^2(1-a^2)\leqslant \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему неравенств находим $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1$.

Значит, $x_1=0$ при всех значениях a;

$$x_{2,3}=\pm 2\sqrt{1-a^2} \text{ при } \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1. \ \blacktriangle$$

Пример 13. Решить уравнение

$$\frac{a+x}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{a+x}}.$$

$\triangle$ Очевидно, что $a\geqslant 0$. Пусть $a=0$. Тогда данное уравнение представляет собой на множестве $x>0$ тождество $\frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}$, т. е. множество корней уравнения есть

$$x\in]0;+\infty[.$$

Пусть $a>0$. Выполним тождественные преобразования в области определения данного уравнения:

$$\frac{(a+x)(\sqrt{a}-\sqrt{a+x})-(a-x)(\sqrt{a}+\sqrt{a+x})}{a-a-x}=0,\ \frac{a\sqrt{a+x}-x\sqrt{a}}{x}=0.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a\sqrt{a+x} = x\sqrt{a} \\ x > 0 \\ a+x > 0, \end{cases}$$

Выразим переменную x через параметр a.

Обе части уравнения $\sqrt{a+x}=x\sqrt{a}$ имеют одинаковые знаки, поэтому при возведении их в квадрат равносильность не нарушится и уравнение системы принимает вид

$$a^2(a+x)=x^2a, \text{ т. е. } x^2-ax-a^2=0.$$

Последнее уравнение имеет корни $x_1=a(1+\sqrt{5})/2$, $x^2=a(1-\sqrt{5})/2$. Остальным условиям системы удовлетворяет лишь первый из них. Итак, если $a=0$ то $x\in]0; +\infty[$; если $a>0$, то $x=a(1+\sqrt{5})/2$. ▲

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}.$$

△ Выполняя тождественные преобразования в области определения уравнения, получаем

$$a+x-|a|=\sqrt{2a+x}\cdot\sqrt{a+x} \qquad (*)$$

Рассмотрим решение этого уравнения в зависимости от значений параметра a.

Пусть $a=0$. Тогда уравнение (*) примет вид $x=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$, что является тождеством на $x>0$.

Пусть, далее, $a>0$. Перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{a}{\sqrt{a+x}}=\sqrt{a+x}-\sqrt{2a+x}.$$

ОДЗ этого уравнения характеризуется системой неравенств

$$\begin{cases} a+x>0 \\ 2a+x\geqslant 0 \\ a+x>2a+x. \end{cases}$$

Откуда $a>2a$. Но это неверно ни при каких $a>0$. Следовательно, при $a>0$ множество корней данного уравнения пустое.

К этому же выводу можно было прийти иначе. При $a>0$ уравнение (*) перепишется в виде $x=\sqrt{2a+x}\cdot\sqrt{a+x}$, откуда следует, что $x>0$. После возведения в квадрат обеих частей уравнения получим корень $x=-2a/3$. Но при $a>0$ $-2a/3<0$, значит $x=-2a/3$ не является корнем уравнения (*).

Пусть, наконец, $a<0$. В этом случае уравнение (*) принимает вид $2a+x=\sqrt{2a+x}\cdot\sqrt{a+x}$

Решая последнее уравнение, получим

$$(2a+x)^2=(2a+x)(a+x)\Rightarrow(2a+x)(2a+x-a-x)=0;$$
$$(2a+x)a=0, \; x=-2a.$$

Итак, если $a=0$, то $x\in]0;+\infty[$; если $a<0$, то $x=-2a$. ▲

Пример 15. Решить неравенство

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a.$$

△ Левая часть неравенства имеет смысл тогда и только тогда, когда x и a удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a+x\geqslant 0 \\ a-x\geqslant 0. \end{cases}$$

При $a<0$ эта система, очевидно, не имеет решений. Если $a=0$, то система имеет единственное решение $x=0$. Но при $a=0$ значение переменной $x=0$ не удовлетворяет неравенству. Если $a>0$, то решениями системы будут все значения $x\in[-a;\ a]$. При условиях $a>0$ и $|x|\leqslant a$ исходное неравенство можно, не нарушая равносильности, почленно возвести в квадрат и получить

$$2a+2\sqrt{a^2-x^2}>a^2 \Rightarrow 2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a.$$

Теперь придется рассмотреть три случая:

1) Если $a^2-2a<0$, т. е. $0<a<2$, то, так как левая часть неравенства при $|x|\leqslant a$ неотрицательна, а правая — отрицательна, неравенство справедливо при всех $x\leqslant|a|$.

2) Если $a^2-2a=0$, т. е. $a=2$, то неравенство имеет вид $2\sqrt{4-x^2}>0$ и удовлетворяется при $|x|<2$.

3) Если $a^2-2a>0$, т. е. $a>2$, то, возведя обе части неравенства в квадрат, приходим к равносильному неравенству $4(a^2-x^2)>a^4-4a^3+4a^2$, упрощая которое, получаем

$$-4x^2>a^3(a-4)\Rightarrow x^2<\frac{a^3(4-a)}{4}.$$

Теперь видно, что при $a\geqslant 4$ решений нет. В случае, когда $2<a<4$, решениями последнего неравенства будут все значения x, для которых

$$|x|<\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}.$$

Будут ли все эти значения x давать решение исходного неравенства? Это зависит от того будут ли значения выражения $\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$ при $a\in(2;\ 4)$ превосходить a или не будут. Напомним, что мы рассматриваем лишь те значения переменной x, для которых $|x|\leqslant a$. Докажем, что они не будут превосходить a, т. е. что

$$\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\leqslant a \text{ или } \frac{\sqrt{a(4-a)}}{2}\leqslant 1.$$

Возводя в квадрат обе части неравенства, получаем

$$\frac{a(4-a)}{4} \leqslant 1 \Rightarrow 4a-a^2 \leqslant 4 \Rightarrow a^2-4a+4 \geqslant 0.$$

и, следовательно, приходим к верному неравенству $(a-2)^2 \geqslant 0$.
Ответ: Если $a \leqslant 0$, то решений нет;

если $0<a<2$, то $x \in [-a;\ a]$ если $a=2$, то $x \in (-2;\ 2)$. Если $2<a<4$, то $x \in \left(\frac{-a\sqrt{a(4-a)}}{2};\ \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\right)$; если $a \geqslant 4$, то решений нет. ▲

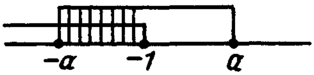
Пример 16. Для всех $a \geqslant 0$ решить неравенство $\sqrt{a^2-x^2} > x+1$. (1)

△ При $a \geqslant 0$ неравенство (1) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ a^2-x^2 > (x+1)^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

Для второй системы возможны два случая расположения множеств x на числовой оси:

1)  Но т. к. $a \geqslant 0$, то первое расположение невозможно

2)  т. е. $-a < -1 \Rightarrow a > 1$ и решением системы будет «заштрихованное» множество $-a < x < -1$. При $a \in [0;\ 1]$ вторая система решений не имеет.

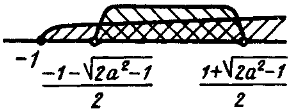
Первая система совокупности равносильна системе

$$\begin{cases} x \geqslant -1 \\ 2x^2+2x+1-a^2 < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решим неравенство $2x^2+2x+1-a^2<0$. Дискриминант квадратного трехчлена $2x^2+2x+1-a^2$ равен $8a^2-4$, при $a \geqslant 0$ он положителен только при $1/\sqrt{2} < a$. Следовательно, система (2) равносильна системе

$$\left[\begin{array}{l} x \geqslant -1 \\ 1/\sqrt{2} < a \\ \dfrac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}, \end{array}\right.$$

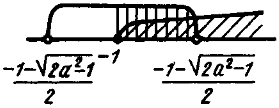
которая дает также два расположения множеств x на числовой оси:



Это возможно, когда $-1\leqslant\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2}$. Найдем при каких a это возможно, решив неравенство

$$\sqrt{2a^2-1}\leqslant 1\Rightarrow 2a^2-1\leqslant 1\Rightarrow 2a^2\leqslant 2,\quad -1\leqslant a\leqslant 1$$

с учетом $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим $\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant 1$.



Это возможно, если $\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2}<-1$, $a-1\leqslant\frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$.

Первое неравенство справедливо при $|a|>1$, второе при $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$, совместно — при $a>1$. Значит, при $a>1$ решение:

$$1\leqslant x<\frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}.$$

Объединяя эти решения с полученными выше, получим ответ к неравенству (1):

при $a\in\left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ — решений нет;

при $a\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right)$ $x\in\left(\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right)$;

при $a>1$ $x\in\left[-1;\ \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}\right)$. ▲

Неравенство (1) допускает простую геометрическую интерпретацию. Построим графики функций $f(x)=x+1$ и $g(x,\ a)=\sqrt{a^2-x^2}$ (рис. 25).

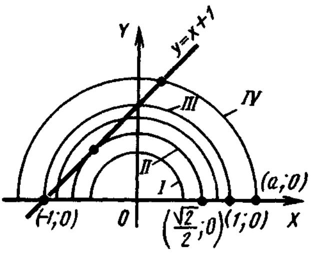


Рис. 25

Графиком функции $g(x, a)$ является верхняя полуокружность радиуса a с центром в начале координат, т. е. множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} y>0 \\ x^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

В зависимости от значений числа a эта полуокружность может занимать следующие положения (см. рис. 25) относительно графика функции $f(x)=x+1$:

1. График функции $g(x, a)$ (положение I) расположен ниже прямой $y=x+1$, что соответствует значениям $a\in\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. График функции $g(x, a)$ (положение II) касается прямой $y=x+1$, что соответствует значению $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. График функции $g(x, a)$ (положение III) пересекает прямую $y=x+1$ в двух точках, что соответствует значению

$$a\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right).$$

4. График функции $g(x, a)$ (положение IV) пересекает прямую $y=x+1$ в одной точке, что соответствует значению $a>1$

Пример 17. Для всех a решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}}<a-1. \qquad (1)$$

△ Левая часть неравенства (1) неотрицательна на ОДЗ, поэтому $a-1>0$, т. е. $a>1$. Найдем ОДЗ данного неравенства: $\frac{3x+a}{x-2}\geqslant 0$, откуда получаем два промежутка $-\infty<x\leqslant -\frac{a}{3}$;

$$a<x<\infty.$$

Возведя обе части неравенства (1) в квадрат, получим

$$\frac{3x+a}{x-a}<(a-1)^2\Rightarrow\frac{x(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2)}{x-a}<0.$$

Это неравенство с учетом ОДЗ и условия $a>1$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ x\leqslant -\frac{a}{3} \\ x(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2)>0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} a>1 \\ x>a \\ x(2+2a-a^2)+a(a^2-2a+2)<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ x\leqslant -\frac{a}{3}\\ x(a^2-2a-2)<a(a^2-2a+2).\end{cases} \qquad (2)\\ \begin{cases}a>1\\ x>a\\ x(a^2-2a-2)>a(a^2-2a+2).\end{cases} \qquad (3)\end{array}\right.$$

Поскольку $a^2-2a-2=\left(a-\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\left(a-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)$, то $a^2-2a-2<0$ при $1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{3}$; $a^2-2a-2=0$ при $a_1=1+\sqrt{3}$, $a_2=1-\sqrt{3}$ и $a^2-2a-2>0$ при $a>1+\sqrt{3}$, $a<1-\sqrt{3}$.

При $a=1+\sqrt{3}$ система (3) решений не имеет, а системе (2) удовлетворяют все x из промежутка $-\infty<x\leqslant \frac{-1-\sqrt{3}}{3}$.

При $1<a<1+\sqrt{3}$ совокупность систем (2) и (3) равносильна соответственно совокупности систем

$$\begin{cases}1<a<1+\sqrt{3}\\ x\leqslant -\frac{a}{3}\\ x>\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}\end{cases} \qquad (4) \qquad\qquad \begin{cases}1<a<1+\sqrt{3}\\ x>a\\ x<\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}\end{cases} \qquad (5)$$

и справедливы неравенства

$$\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}<\frac{-a}{3} \text{ и } \frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}<a,$$

поэтому решениями системы (4) являются все x из промежутка $\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}<x\leqslant \frac{-a}{3}$, а система (5) решений не имеет.

При $a<1+\sqrt{3}$ совокупность систем (2) и (3) равносильна соответственно совокупности систем

$$\begin{cases}a>1+\sqrt{3}\\ x\leqslant -\frac{a}{3}\\ x<\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}\end{cases} \qquad (6) \qquad\qquad \begin{cases}a>1+\sqrt{3}\\ x>a\\ x>\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}.\end{cases} \qquad (7)$$

и справедливы неравенства $\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}>\frac{-a}{3}$ и $\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}>a$; поэтому решениями системы (6) являются все x из промежутка $-\infty<x\leqslant -\frac{a}{3}$, а решениями системы (7) — все x из промежутка

$$\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}<x<+\infty.$$

Таким образом, для исходного неравенства (1) имеем: $\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}<x\leqslant\frac{-a}{3}$ при $1<a<1+\sqrt{3}$; $-\infty<x\leqslant\frac{-1-\sqrt{3}}{3}$ при $a=1+\sqrt{3}$; $-\infty<x\leqslant\frac{-a}{3}$ и $\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}<x<+\infty$ при $a>1+\sqrt{3}$; при $a\leqslant 1$ решений нет. ▲

Упражнения

1. Решить уравнения:

1) $\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\frac{x}{2a}$; 2) $x\sqrt{\frac{a-x}{x}}-\sqrt{x^2-a^2}=0$;

3) $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$; 4) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{2}$;

5) $\frac{(x+a)\sqrt{x+b}+(x+b)\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}}=\sqrt{ab}$; 6) $\frac{a\sqrt{x}+b}{a-b\sqrt{x}}=\frac{a+b}{a-b}$;

7) $x^2+\sqrt{a+x}=a$.

Ответы: 1) Указание: используя свойство пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{d+c}$ заменить уравнением $\frac{-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}}=\frac{x-2a}{x+2a}$. При $a\neq 0$ $\{2|a|\}$.

2) При $a\neq 0$ $x=a$.

3) При $a>0$ $\{3a;\ 4a\}$.

4) При $a>0$ $\left\{\frac{2\sqrt{2}a}{3}\right\}$.

Воспользоваться указанием примера 1.

5) При $a=0$, $b<0$ $\{-b\}$; при $b=0$, $a<0$ $\{-a\}$; при $a=0$, $b>0$ $\{0\}$; при $b=0$, $a>0$ $\{0\}$; при $a>0$, $b>0$ $\{0\}$; при $a<0$, $b<0$ $\{-(a+b)\}$.

6) При $a\neq b$ $\{1\}$.

7) При $a\leqslant 0$ решений нет; при $0<a\leqslant\frac{3}{4}$ $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$; при $a<\frac{3}{4}$ $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$.

2. Решить уравнения:

1) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2x}$; 2) $\sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}$;

3) $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-a}}=a$; 4) $\sqrt{1-x^2}=\left(a-\sqrt{x}\right)^2$;

5) $\frac{\sqrt{1+a^{-2}x^2}-xa^{-1}}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}+xa^{-1}}=\frac{1}{4}$.

Ответы: 1) При $a \leqslant 0$ $x = -a$; при $a \geqslant 0$ $x = a$.

2) При $a \geqslant 1$ $x = \frac{1}{4}(a-1)^2$; при $a = 0$ $x = 0$; при $a < 1$ и $a \neq 0$ нет решений.

3) При $|a| \geqslant 2\sqrt{2}$ $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4-\sqrt{1+a^2}}}{2}$; при $|a| < 2\sqrt{2}$ нет корней.

4) При $a < -1$ и $a > \sqrt[4]{8}$ нет корней; при $a = -1$ $x = 0$; при $a = 1$ $\{0;\ 1\}$; при $|a| < 1$ $x = \left[\frac{a}{2} + \sqrt{\sqrt{\frac{a^4+1}{2}} - \frac{3a^2}{4}}\right]^2$;

при $1 < a < \sqrt[4]{8}$ $x = \left[\frac{a}{2} \pm \sqrt{\sqrt{\frac{a^4+1}{2}} - \frac{3a^2}{4}}\right]$.

5) $x = \frac{3}{4}a$ при $a \neq 0$.

3. При каких a уравнение $\sqrt{x(1-x)} = a - x$ имеет одно или несколько решений.

Ответ: при $0 \leqslant a < 1$ и при $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ — одно решение; при $1 \leqslant a < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ — два решения; при всех других a — решений нет.

4. При всех a решить неравенство:

1) $a\sqrt{x+1} < 1$; 2) $4 - x^2 > \sqrt{a^2 - x^2}$;

3) $x + \sqrt{4 - x^2} < a$; 4) $\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} \leqslant \sqrt{2}$;

5) $(a+1)\sqrt{2-x} < 1$; 6) $\sqrt{1-x^2} < x + a$;

7) $x + \sqrt{x^2 - x} < a$; 8) $\sqrt{x+a} > x + 1$;

9) $x + \sqrt{a - x} > 0$, $a \geqslant 0$; 10) $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$.

Ответы: 1) при $a \leqslant 0$ $-1 \leqslant x < +\infty$; при $a > 0$ $-1 \leqslant x < -1 + \frac{1}{a^2}$;

2) при $a = 0$ $x = 0$; $|x| \leqslant a$ при $0 < |a| < \frac{\sqrt{15}}{2}$;

$-a \leqslant x < -\sqrt{\frac{7-\sqrt{4a^2-15}}{2}}$, $-\sqrt{\frac{7+\sqrt{4a^2-15}}{2}} < x < \sqrt{\frac{7-\sqrt{4a^2-15}}{2}}$, $\sqrt{\frac{7-\sqrt{4a^2-15}}{2}} < x \leqslant a$ при $\frac{\sqrt{15}}{2} \leqslant |a| < 2$;

$-\sqrt{\frac{7+\sqrt{4a^2-15}}{2}} < x < \sqrt{\frac{7-\sqrt{4a^2-15}}{2}}$ при $2 \leqslant |a| < 4$;

при $|a| \geqslant 4$ решений нет;

3) при $a \leqslant -2$ решений нет; при $-2<a\leqslant 2$ $-2\leqslant x< < \frac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}$; при $2<a\leqslant 2\sqrt{2}$ $-2\leqslant x< \frac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}$ и $\frac{a+\sqrt{8-a^2}}{2}<x\leqslant 2$; при $a>2\sqrt{2}$ $-2\leqslant x\leqslant 2$;

4) решений нет при $a<0$ и $a>1$; $x=0$ при $a=0$; $0\leqslant x\leqslant a^2$ при $0<a\leqslant \frac{1}{2}$; $2a-1\leqslant x\leqslant a^2$ при $\frac{1}{2}<a<1$; $x=1$ при $a= =1$;

5) $-\infty<x\leqslant 2$ при $a\leqslant -1$; $2-\frac{1}{(1+a)^2}<x\leqslant 2$ при $a>-1$;

6) решений нет при $a\leqslant -1$; $\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2}<x\leqslant 1$ при $1<a\leqslant 1$; $-1\leqslant x<\frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}$ и $\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2}<x\leqslant 1$ при $1<a\leqslant\sqrt{2}$; $-1\leqslant x\leqslant 1$ при $a>\sqrt{2}$;

7) решений нет при $a\leqslant 0$; $\frac{a^2}{2a-1}<x\leqslant 0$ при $0<a<\frac{1}{2}$; $-\infty<x\leqslant 0$ при $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$; $-\infty<x<0$ и $1\leqslant x<\frac{a^2}{2a-1}$ при $a>1$;

8) решений нет при $a\leqslant 0$; $1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a}$ при $0<a\leqslant 1$; $-a\leqslant x<1+2\sqrt{a}$ при $a>1$.

9) Если $a=0$, то $-1<x<0$, при $a>0$ $x\in\left[\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ a\right]$;

10) при $a=0$ решений нет; $a\neq 0$ $-\frac{|a|}{\sqrt{5}}<x\leqslant |a|$.

5. Пусть $a>0$, $b>0$. Найти решения неравенств:

1) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{b}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}>\frac{1}{x}+\frac{1}{b}$.

Ответы: 1) $(-a;\ 0)\cup\left(0;\ \frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$ при $a\leqslant b$; $[-a;\ 0)\cup(0;\ a]$ при $a>b$;

2) $[-a;\ 0)$ при $a<b$; $\left(\frac{-2a^2b}{a^2+b^2};\ 0\right)$ при $a\geqslant b$.

6. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Примеры с решениями

Пример 1. Найти все значения a, при которых уравнение $4^x-a2^x-a+3=0$ имеет хотя бы одно решение.

△ Пусть $2^x=t>0$, тогда исходное уравнение примет вид $t^2-at-a+3=0$, и для того чтобы оно имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен $t^2-at-a+3$ имел хотя бы один положительный корень, при этом дискриминант трехчлена должен быть неотрицательным, т. е. $D=a^2-4(3-a)=a^2+4a-12=(a-2)(a+6)\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant -6$ или $a\geqslant 2$.

Корни t_1 и t_2 квадратного уравнения $t^2-at-a+3=0$ удовлетворяют системе уравнений (по теореме Виета).

$$\begin{cases} t_1t_2=3-a \\ t_1+t_2=a. \end{cases}$$

При $a\leqslant -6$ имеем $t_1t_2>0$, $t_1+t_2<0$, поэтому оба корня t_1 и t_2 отрицательны и, следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

При $2\leqslant a\leqslant 3$ имеем $t_1+t_2>0$, $t_1t_2>0$, а это означает, что оба корня положительны и удовлетворяют условию исходного уравнения.

При $a=3$ один корень нулевой, а другой положительный.

При $3<a<+\infty$ $t_1t_2<0$, корни t_1 и t_2 разного знака.

Итак при $a\geqslant 2$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение. ▲

Пример 2. При каждом a решить уравнение

$$4^x-2a(a+1)2^{x-1}+a^3=0.$$

△ Пусть $2^x=t>0$, тогда $t^2-a(a+1)t+a^3=0$. (*) Определим a, при которых это уравнение имеет решение.

$$D=a^2(a+1)^2-4a^3\geqslant 0\Rightarrow (a+1)^2-4a\geqslant 0,$$

т. к. по исходному уравнению видно, что $a\neq 0$.Далее

$$a^2+2a+1-4a\geqslant 0\Rightarrow (a-1)^2\geqslant 0\Rightarrow a\in \mathbb{R}$$

с учетом, что $a\neq 0$ $a\in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Корни уравнения (*) могут быть только положительными. Рассмотрим два случая.

1. Оба корня положительны:

$$\begin{cases} D>0 \\ t_1+t=a(a+1)>0 \\ t_1t_2=a^3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in \mathbb{R}\backslash\{0;\ 1\} \\ a<-1 \text{ или } a>0 \Rightarrow 0<a<1 \text{ или} \\ a>0 \end{cases}$$

$1<a$.

Найдем корни уравнения (*)

$$t_{1,2}=\frac{a(a+1)\pm\sqrt{a^2(a-1)^2}}{2};\quad t_1=\frac{a(a+1)-|a|\,|a-1|}{2};$$

$$t_2=\frac{a(a+1)+|a|\,|a-1|}{2}.$$

Раскрывая модули при $a\in]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$ находим, что $t_1=a$ и $t_2=a^2$ или $2^x=a$ $x=\log_2 a$; $2^x=a^2$; $x=\log_2 a^2$

Если $D=0$, т. е. при $a=0$ и $a=1$ находим, что при $a=0$ уравнение не имеет решений, а при $a=1$ $t=1$ $2^x=1$ $x=0$.

2. Корни разных знаков

$$\begin{cases} D>0 \\ t_1;\ t_2=a^3<0 \end{cases} \quad \begin{cases} a\in R\setminus\{0;\ 1\} \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow a<0.$$

Раскрывая модули t_1 и t_2 при $a<0$, получим $t_1=a$, $t_2=a^2$, $t_1<0$, поэтому не может быть корнем уравнение (*). При $t_2=a^2$ $2^x=a^2$ $x=\log_2 a^2$.

Ответ: при $a<0$ $x=\log_2 a^2$; при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x=\log_2 a$ и $x=\log_2 a^2$. ▲

Пример 3. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$(10-p)5^{2x+1}-2\cdot 5^{x+1}+6-p=0$$

не имеет решений.

△ Пусть $5^x=t>0$, тогда исходное уравнение перепишется в таком виде $5(10-p)t^2-10t+6-p=0$. (*) Уравнение (*) не имеет решений, если $D<0$. Кроме того, неположительные корни уравнения (*) не могут быть корнями исходного уравнения.

Найдем при каких p $D<0$. $D=25-5(6-p)(10-p)<0\Rightarrow p^2-16p+55>0\Rightarrow p<5$ или $p>11$. Итак, при $p\in]-\infty;\ 5[\cup]11;\ +\infty[$ уравнение (*), а значит и исходное, решений не имеет.

Найдем при каких p оба корня уравнения (*) неположительны. Это возможно, когда:

$$\begin{cases} D\geqslant 0 \\ t_1+t_2\leqslant 0 \\ t_1t_2\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\leqslant p\leqslant 11 \\ \dfrac{5}{10-p}\leqslant 0 \\ \dfrac{6-p}{5(10-p)}\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\leqslant p\leqslant 11 \\ p>10 \\ p\leqslant 6 \text{ или } p>10 \end{cases} \quad 10<p\leqslant 11$$

Ответ: $p\in]-\infty;\ 5[\cup]10;\ +\infty[$. ▲

Пример 4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$(p-1)4^x-4\cdot 6^x+(p+2)9^x=0$$

имеет хотя бы одно решение.

△ Разделив все члены уравнения на 6^x, получим $(p-1)\left(\frac{2}{3}\right)^x-4+(p+2)\left(\frac{3}{2}\right)^x=0$. Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t>0$, тогда $(p-1)t-4+\frac{p+2}{t}=0\Rightarrow(p-1)t^2-4t+p+2=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow t^2-\frac{4}{p-1}t+\frac{p+2}{p-1}=0. \qquad (*)$$

Исходное уравнение может иметь только положительные корни. Уравнение (*) имеет положительные корни, если:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D\geqslant 0 \\ t_1-t_2=\dfrac{4}{p-1}>0 \\ t_1t_2=\dfrac{p+2}{p-1}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=4-(p-1)(p+2)\geqslant 0 \\ p>1 \\ p<-2 \text{ или } p>1 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 3\leqslant p\leqslant 2 \\ p>1 \end{cases} \Rightarrow 1<p\leqslant 2. \end{array}\right.$$

Корни уравнения (*) разного знака, если:

$$\begin{cases} D>0 \\ t_1t_2=\dfrac{p+2}{p-1}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\leqslant p<2 \\ -2<p<1 \end{cases} \qquad -2<p<1.$$

С учетом того, что при $p=1$ и $p=2$ исходное уравнение имеет один положительный корень, записываем ответ $-2<p\leqslant 2$. ▲

Пример 5. При каждом a указать, для каких x выполняется неравенство $a^2-9^{x+1}-8\cdot 3^x a<0$.

△ Если $a=0$, то исходное неравенство имеет вид $-9^{x+1}>0$ и не выполняется ни при каких x.

Пусть a — некоторое фиксированное число, отличное от нуля. Обозначив 3^x через t, исходное неравенство можно переписать так: $9t^2+8at-a^2<0$ (*).

Найдем корни трехчлена

$$t_{1,2}=\frac{-4a\pm\sqrt{16a^2+9a^2}}{9};\ t_1=\frac{-4a-5|a|}{9},\ t_2=\frac{-4a+5|a|}{9}.$$

Видно, что при всех $a\neq 0$ $t_1<t_2$ и решениями неравенства (*) будут $t\in]t_1;\ t_2[$, т. е. $t_1<t<t_2$ или при $a>0$

$$\frac{-4a-5a}{9}<3^x<\frac{-4a+5a}{9}\Rightarrow -a<3^x<\frac{1}{9}a\Rightarrow x<\log_3 a-2.$$

При $a<0$ $\dfrac{-4a+5a}{9}<3^x<\dfrac{-4a-5a}{9}\Rightarrow \dfrac{a}{9}<3^x<-a\Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x<-a\Rightarrow x<\log_3(-a)$.

Ответ: При $a<0$ $x<\log_3(-a)$; при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x<\log_3 a-2$. ▲

Пример 6. Найти все значения a, при которых неравенство

$$4^{x^2}+2(2a+1)2^{x^2}+4a^2-3>0$$

выполняется для любых x.

△ Пусть $2^{x^2}=t>0$, тогда исходное неравенсьво перепишется в виде

$$t^2+2(2a+1)t+4a^2-3>0. \qquad (1)$$

При каждом a квадратному трехчлену $t^2+2(2a+1)t+4a^2-3$ на плоскости toY соответствует парабола, ветви которой направлены вверх, осью симметрии служит прямая $t=-2a-1$, а вершиной является точка $(-2a-1;\ -4a-4)$. Если $-4a-4>0$ т. е. $a>-1$, то вершина параболы, а следовательно, и вся парабола, расположены в верхней полуплоскости (рис. 26). Это означает, что трехчлен положителен при любом t, в том числе и при $t>0$.

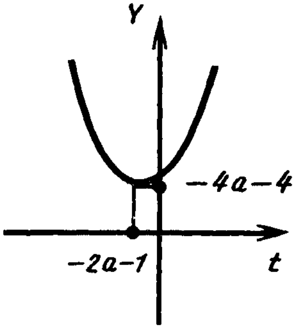


Рис. 26

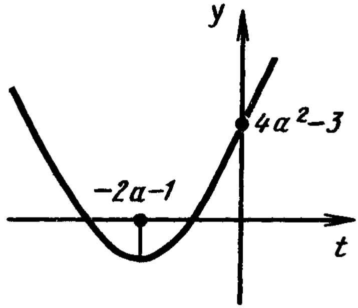


Рис. 27

Второе расположение параболы (рис. 27), отвечающее требованию задачи. определяется следующими условиями:

$$\begin{cases} D\geqslant 0 \\ -2a-1<0 \\ f(0)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} D=(2a+1)^2-4a^2+3\geqslant 0 \\ a>-\frac{1}{2} \\ 4a^2-3>0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\geqslant -1 \\ a>-\frac{1}{2} \\ a<-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{2}<a. \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}<a$$

Ответ: $a\in(-\infty;\ -1)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ +\infty\right)$. ▲

Пример 7. При каждом значении a решить уравнение

$$\left(1+(a+2)^2\right)\log_3(2x-x^2)+\left(1+(3a-1)^2\right)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=$$
$$=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

△ Найдем ОДЗ исходного уравнения, не зависящее от a:

$$\begin{cases} 2x-x^2>0 \\ 1-\dfrac{x^2}{2}>0 \end{cases} \Rightarrow 0<x<\sqrt{2}.$$

Для любого x из этого интервала выполнены неравенства

$$2x-x^2=1-(1-x)^2\leqslant 1, \quad 1-\frac{x^2}{2}\leqslant 1,$$

и, следовательно,

$$\log_3(2x-x^2)\leqslant 0, \quad \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\leqslant 0.$$

При $a\neq -2$ и $a\neq \frac{1}{3}$ имеем

$$\left(1+(a+2)^2\right)\log_3(2x-x^2)\leqslant \log_3(2x-x^2)$$

$$\left(1+(3a-1)^2\right)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\leqslant \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Складывая последние два неравенства и сравнивая полученный результат с исходным уравнением, получаем, что оно может иметь решение только для значений x, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \log_3(2x-x^2)=0 \\ \log_{11}(1-x^2/2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-x^2=1 \\ 1-x^2/2=1. \end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет. Следовательно, при $a\neq -2$ и $a\neq \frac{1}{3}$ исходное уравнение не имеет корней.

При $a=-2$ исходное уравнение примет вид

$$\log_3(2x-x^2)+50\log_{11}(1-x^2/2)=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}(1-x^2/2).$$

Это уравнение равносильно уравнению $\log_{11}(1-x^2/2)=0$, не имеющему корней на ОДЗ $0<x<\sqrt{2}$.

При $a=1/3$ исходное уравнение принимает вид

$$\frac{58}{9}\log_3(2x-x^2)+\log_{11}(1-x^2/2)=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}(1-x^2/2).$$

Это уравнение на ОДЗ равносильно уравнению $\log_3(2x-x^2)=$ $=0\Rightarrow 2x-x^2=1$, имеющему единственный корень $x=1$, принадлежащий ОДЗ.

Итак, при $a=1/3$ исходное уравнение имеет единственный корень $x=1$; при $a\neq 1/3$ уравнение корней не имеет. ▲

Пример 8. Указать все a, при которых уравнение $\log_2 x+$ $+\log_a x+\log_4 x=1$ имеет решения и найти эти решения.

$$\triangle\ \log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 a}+\frac{1}{2}\log_2 x=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 a\log_2 x+\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x\log_2 a=\log_2 a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\log_2 a+1\right)\log_2 x=\log_2 a \Rightarrow \log_2 x^{\frac{3}{2}\log_2 a+1}=$$
$$=\log_2 a \Rightarrow x^{\frac{3}{2}\log_2 a+1}=a \Rightarrow x=a^{\frac{2}{3\log_2 a+2}}.$$

ОДЗ $-a>0,\ a\neq 1,\ 3\log_2 a+2\neq 0$, т. е. $a\neq 2^{-2/3}$.

Ответ: $a>0,\ a\neq 2^{-2/3},\ a\neq 1\ x=a^{\frac{2}{3\log_2 a+2}}$. ▲

Пример 9. Найти все значения a, для которых уравнение $\lg(ax)=2\lg(x+1)$ имеет единственный корень.

△ ОДЗ данного уравнения определяется системой неравенств $ax>0$ и $x+1>0$. Следовательно уравнение (1) имеет единственный корень тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} ax=(x+1)^2 \\ ax>0 \\ x+1>0 \end{cases}$$ имеет единственное решение.

Уравнение $ax=(x+1)^2$, т. е. уравнение $x^2+(2-a)x+1=0$ имеет решение только тогда, когда $D=(2-a)^2-4\geqslant 0$, т. е. при $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 4$.

При $a\geqslant 4$ система $\begin{cases} ax>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ выполняется при $x>0$.

Чтобы на этом множестве уравнение $x^2+(2-a)x+1=0$ имело единственное решение, необходимо, чтобы график трехчлена располагался так, как показано на рис. 28 (1-й и 2-й случаи).

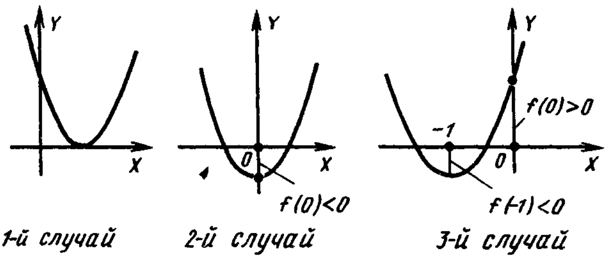


Рис. 28

В первом случае $D=0$ при $a=4$, а корень $x=1$ принадлежит множеству $x>0$.

Во втором случае $f(0)=0+(2-a)0+1<0$ неравенство ложно, т. е. нет таких a, при которых это условие выполнялось бы.

При $a=0$ не выполняется условие $ax>0$.

При $a<0$ система $\begin{cases} ax>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ выполняется для $x\in(-1;\ 0)$ и для того чтобы уравнение $x^2+(2-a)x+1=0$ имело единственный корень на этом множестве, необходимо и достаточно выполнение следующих условий (рис. 28, 3-ий случай):

$$\begin{cases} f(-1)<0 \\ f(0)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1)=1+(2-a)(-1)+1<0 \\ f(0)=0+(2-a)0+1>0 \end{cases} \begin{cases} a<0 \\ 1>0 \end{cases} \quad a<0.$$

Итак, исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда $a<0$ и $a=4$. ▲

Пример 10. При каких значениях a уравнение $\log_{x-1}(x+a)=0,5$ имеет единственное решение?

△ . Обозначим $x-1=t$, тогда $x=t+1$ и $\log_t(t+1+a)=1/2$. Обозначим еще $b=1+a$, в результате исходное уравнение примет вид

$$\log_t(t+b)=0,5. \qquad (1)$$

Потенцируя по основанию t, получим

$$t+b=\sqrt{t}. \qquad (2)$$

Всякое решение (1) является, очевидно, и решением (2). Обратно, если t решение (2) и

$$t>0,\ t\neq 1, \qquad (3)$$

то логарифмируя (2) по основанию t, получим, что (1) — верное равенство.

Решив (2) как квадратное относительно $\sqrt{t}$ уравнение найдем, что

$$\text{а) } \sqrt{t}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4b}\right), \qquad \text{б) } \sqrt{t}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4b}\right).$$

Ясно, что (2) имеет решения, если только $1-4b\geqslant 0$, т. е. $b\leqslant 1/4$. При этом условии $1+\sqrt{1-4b}\geqslant 1$, поэтому формула (1) определяет решение $t_1=\frac{1}{2}(1-2b+\sqrt{1-4b})$ уравнения (2). Первое из условий (3) для этого решения, очевидно, выполнено. Кроме того, из (1) видно, что равенство $\sqrt{t}=1$ (а значит, и $t=1$) возможно только при $b=0$. Таким образом, если $b\leqslant 1/4$ и $b\neq 0$, то а) задает решение t_1 уравнения (1). Рассмотрим формулу б). Условие $\sqrt{t}>0$ (а значит, и $t>0$) из (3) выполнено тогда и только тогда, когда $1-\sqrt{1-4b}>0$, откуда $b>0$. При этом $1-\sqrt{1-4b}<1$, а $\sqrt{t}<1/2$ и $t<1/4<1$, т. е. выполнено и второе из условий (3). Значит, формула б) задает решение $t_2=$ $=\frac{1}{2}(1-2b-\sqrt{1-4b})$ уравнения (1), если $0<b\leqslant 1/4$. В итоге получаем, что при $b<0$ уравнение (1) имеет одно решение t_1, а при $0<b\leqslant 1/4$ решениями (1) являются и t_1 и t_2, причем $t_1=t_2$ только при $b=1/4$. Значит, (1) и вместе с тем и исходное уравнение имеют единственное решение только при $b<0$ или $b=1/4$, или,что то же, при $a<-1$ или $a=-3/4$.

Ответ: $a<-1$, $a=-3/4$. ▲

Второе решение. Потенцируя исходное уравнение на ОДЗ: $x-1>0$, $x>1$; $x-1\neq 1$, $x\neq 2$; $x+a>0$, $x>-a$, получим $x+a=(x-1)^{1/2}$.

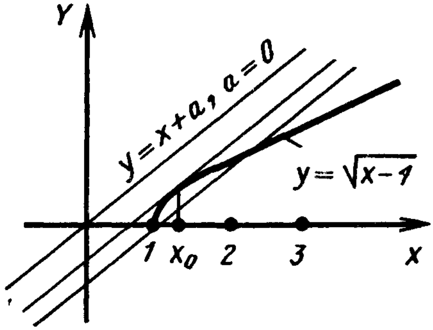


Рис. 29

Графическая иллюстрация левой и правой части последнего условия показана на рис. 29. Линия $y=x+a$ перемещается вниз (по оси Y) при уменьшении a. Первая совместная точка обеих линий — это точка касания с абсциссой x_0. Найдем значение x_0, для чего возьмем производную от функции $y=\sqrt{x-1}$ $y'=$ $=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. Известно, что $y'(x_0)=1$ (ведь $y=x+a$ — касательная), тогда $y'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}=1$, $x_0=\frac{5}{4}$. Тогда $y_0=\sqrt{x_0-1}=$ $=\sqrt{\frac{5}{4}-1}=\frac{1}{2}$. Теперь найдем значение a этой касательной $\frac{1}{2}=\frac{5}{4}+a \Rightarrow =-\frac{3}{4}$. Видно, что одна совместная точка будет при $a<-1$.

Пример 11. Определить, при каких a уравнение $\log_3(9^x+$ $+9a^3)=x$ имеет ровно два решения.

△ Пусть a — некоторое фиксированное число. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $9^x+9a^3>0$. Значит, если $a\geqslant 0$, то ОДЗ совпадает со множеством всех действительных чисел, если $a<0$, то ОДЗ есть множество $x>\log_9(-9a^3)$.

На ОДЗ данное уравнение равносильно уравнению $9^x+9a^3=$ $=3^x$. Обозначив 3^x через t, получим $t^2-t+9a^3=0$ (*). Дискриминант этого уравнения $D=1-36a^3$. Поэтому, если $1-36a^3<0$, т. е. если $a>\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$, то уравнение (*) не имеет корней. Не имеет их тогда и исходное уравнение. Если $D=0$, то $a=1/\sqrt[3]{36}$ и уравнение (*) имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию задачи.

Если $D>0$, т. е. $a<1/\sqrt[3]{36}$, то уравнение (*) имеет два корня $t_1=\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}$ и $t_2=\frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$3^x=\frac{1-\sqrt{1-36a^2}}{2} \text{ и } 3^x=\frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}. \qquad (**)$$

При $a\leqslant 0$ $\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}\leqslant 0$ и первое уравнение (**) решений не имеет. Тогда исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ второму уравнению (**), которое имеет единственное решение

$$x=\log_3\frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}.$$

Следовательно, при $a\leqslant 0$ исходное уравнение имеет не более одного решения.

Если $a\in]0;\ 1/\sqrt[3]{36}[$, то совокупность уравнений (**) имеет корни

$$x_1=\log_3\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2} \text{ и } x_2=\log_3\frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}.$$

В этом случае ОДЗ исходного уравнения совпадает с множеством R и значит, уравнение имеет в точности два корня x_1 и x_2.

Ответ: $a\in]0;\ 1/\sqrt[3]{36}[$. ▲

Пример 12. Решить уравнение $\sqrt{\log_x(ax)}\cdot\log_a x=-\sqrt{2}$.

△ Допустимыми значениями неизвестного и параметра являются значения, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ a>0 \\ a\neq 1 \\ \log_x(ax)\geqslant 0 \end{cases}$$

или $x>0$ и $x\neq 1$; $a>0$ и $a\neq 1$; причем, если $0<x<1$, то $0<ax<$ <1, а если $x>1$, то $ax>1$.

Так как правая часть уравнения отрицательна, то решениями уравнения могут быть только те значения x и a, при которых $\log_a x<0$, т. е., если $a>1$, то $0<x<1$, а если $0<a<1$, то $x>1$.

Преобразуем данное уравнение:

$$-\sqrt{\frac{\log_a x+1}{\log_a x}}\log_a x=-\sqrt{2}.$$

Так как уравнение может иметь решение только при $\log_a x<0$, то $-\sqrt{\log_a^2 x+\log_a x}=-\sqrt{2}$ или $\log_a^2 x+\log_a x-2=0$, откуда находим $\log_a x=-2$ и $\log_a x=1$. Но $\log_a x=1>0$ уравнению не удовлетворяет.

Исследуем $\log_a x=-2$ или $x=\frac{1}{a^2}$. Если $0<x<1$, то $0<ax<1$, или $0<a\frac{1}{a^2}<1$, откуда $a>1$. Если $x>1$, то $ax>1$ или $a\frac{1}{a^2}<1$, откуда $0<a<1$. Значит $x=\frac{1}{a^2}$, если $0<a<1$, $a>1$. ▲

Пример 13. Решить уравнение

$$1+\log_x\frac{4-x}{100}=(\lg\lg a-2)\log_x 10.$$

△ Допустимые значения неизвестного и параметра находим, решая систему неравенств

$$\begin{cases}4-x>0\\ x>0\\ x\neq 1\\ \lg a>0\end{cases}$$

или $0<x<1$, $1<x<4$ и $a>1$. После потенцирования получаем $x\frac{4-x}{100}=\frac{10\lg\lg a}{100}$ или $\frac{4x-x^2}{100}=\frac{10\lg\lg a}{100}$, откуда в соответствии с основным логарифмическим тождеством следует, что $x^2-4x+\lg a=0$, $x_1=2-\sqrt{4-\lg a}$, $x_2=2+\sqrt{4-\lg a}$. Эти корни действительные, если $4-\lg a\geqslant 0$ или $a\leqslant 10^4$. Учитывая, что $a>1$ получаем $1<a<10^4$.

При $a=1000$ недопустимым значением неизвестного является $x_1=1$, т. е. уравнение имеет один корень $x_2=3$.

При $a=10\,000$ имеем $x_1=x_2=2$.

Таким образом, $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-\lg a}$, если $1<a<1000$ и $1000<a<10\,000$; $x=3$, если $a=1000$; $x=2$, если $a=10\,000$. ▲

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ax}+\log_x\sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=a.$$

△ Допустимые значения неизвестного и параметра $x>0$, $x\neq 1$ и $a>0$, $a\neq 1$. Преобразуя подкоренные выражения, получаем:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\log_a x)+\frac{1}{4}(1+\log_x a)+}$$
$$+\sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x-1)+\frac{1}{4}(\log_x a-1)}=a$$
или
$$\sqrt{\log_a x+2+\frac{1}{\log_a x}}+\sqrt{\log_a x-2+\frac{1}{\log_a x}}=2a,$$
$$\sqrt{\frac{(\log_a x+1)^2}{\log_a x}}+\sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{\log_a x}}=2a,$$
$$|\log_a x+1|+|\log_a x-1|=2a\sqrt{\log_a x}\ (\log_a x>0).$$

1) Если $0<\log_a x<1$, то $2=2a\sqrt{\log_a x}$ или $\log_a x=1/a^2$ и $x=a^{1/a^2}$. Это значение x удовлетворяет уравнению, если $0<\frac{1}{a^2}<1$, т. е. при $a>1$.

2) Если $\log_a x=1$, т. е. $x=a$, то получаем $2-2a$, или $a=1$ — недопустимое значение параметра. Следовательно, $x\neq a$.

3) Если $\log_a x>1$, то $2\log_a x=2a\sqrt{\log_a x}$или $\log_a x=a^2$ и $x=a^{a^2}$. Это значение x удовлетворяет уравнению, если $\log_a a^2>1$, откуда следует, что $a^2>1$ или $a\geq 1$.

Если $a>1$, то $x_1=a^{a^{-2}}$, $x_2=a^{a^2}$. Если $0<a<1$, то уравнение решений не имеет. ▲

Пример 15. При $0<a<1/4$ решить неравенство
$$\log_{x+a}2<\log_x 4.$$

△ Заметим, что $x>0$ и $x\neq a$.

Данное неравенство равносильно неравенству $\frac{1}{\log_2(x+a)}<$ $<\frac{2}{\log_2 x}$, т. е. неравенству $\frac{2}{\log_2 x}-\frac{1}{\log_2(x+a)}>0$, откуда
$$\frac{2\log_2(x+a)-\log_2 x}{\log_2 x\cdot\log_2(x+a)}>0. \qquad (1)$$

Если $0<x<1$, то $\log_2 x<0$; если $x>1$, то $\log_2 x>0$. Поэтому неравенство (1) равносильно совокупности двух систем:
$$\begin{cases} 0<x<1 \\ \frac{2\log_2(x+a)-\log_2 x}{\log_2(x+a)}<0, \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x>1 \\ \frac{2\log_2(x+a)-\log_2 x}{\log_2(x+a)}>0. \end{cases} \quad (3)$$

Решим систему (2). При $0<x+a<1$
имеем: $\log_2(x+a)<0$;
при $x+a>1$ имеем $\log_2(x+a)>0$. Поэтому система (2) равносильна совокупности двух систем $(a>0,\ x>0)$.

$$\left[\begin{cases}0<x<1\\0<x+a<1\\2\log_2(x+a)-\log_2 x>0\end{cases}\right.\atop\left.\begin{cases}0<x<1\\x+a>1\\2\log_2(x+a)-\log_2 x<0\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}0<x<1\\x<1-a\\\log_2(a+x)^2>\log_2 x\end{cases}\right.\atop\left.\begin{cases}0<x<1\\x>1-a\\\log_2(a+x)^2<\log_2 x\end{cases}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1-a\\(x+a)^2>x\end{cases}\\\begin{cases}1-a<x<1\\(x+a)^2<x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}0<x<1-a\\x^2-(1-2a)x+a^2>0\end{cases} & (4)\\\begin{cases}1-a<x<1\\x^2-(1-2a)x+a^2<0\end{cases} & (5)\end{array}\right.$$

При всех $0<a<1/4$ дискриминант D квадратного трехчлена $x^2(1-2a)x+a^2$ положителен ($D=1-4a$); поэтому $x^2-(1-2a)x+$ $+a^2=(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_1=1/2-a-\sqrt{1/4-a}$ и $x_2=1/2-a+$ $+\sqrt{1/4-a}$, причем $x_1<x_2$.

Числа x_1 и x_2 удовлетворяют системе (по теореме Виета)

$$\begin{cases}x_1x_2=a^2\\x_1+x_2=1-2a,\end{cases}$$

откуда следует, что при заданных ограничениях на a чила x_1 и x_2 положительны. Кроме того, поскольку $x_1+x_2=1-2a=$ $=1-a-a<1-a$, то каждое из них меньше $1-a$. Поэтому система (5) решений не имеет.

Решением системы (4), а следовательно, и системы (2) (при $0<a<1/4$) являются все x из интервалов $0<x<x_1$ и $x_2<x<$ $<1-a$.

Решим систему (3). Неравенство $\frac{2\log_2(x+a)-\log_2 x}{\log_2(x+a)}>0$ равносильно неравенству $2-\frac{\log_2 x}{\log_2(x+a)}>0$. (6)

При $x>1$ и $0<a<1/4$ справедливо неравенство $x<x+a$, откуда в силу возрастания функции $y=\log_2 x$ имеем $\log_2 x<$ $<\log_2(x+a)$.

Поскольку $\log_2 x>0$ и $\log_2(x+a)>0$, то $0<\frac{\log_2 x}{\log_2(x+a)}<1$.

Следовательно, неравенство (6) справедливо для всех $x>1$, $0<a<1/4$.

Таким образом, множество всех решений системы (3) есть промежуток $1<x<+\infty$.

Итак, при любом $a\in(0;\ 1/4)$; множество всех решений исходного неравенства состоит из трех промежутков: $0<x<1/2-a-$ $-\sqrt{1/4-a}$, $1/2-a+\sqrt{1/4-a}<x<1-a$, $1<x<+\infty$. ▲

Пример 16. Найти все значения a, при которых неравенство $1+\log_5(x^2+1)=\log_5(ax^2+4x+a)$ выполняется для любого значения x.

$\triangle$ Данное неравенство равносильно неравенству $\log_5 5(x^2+1)\geqslant\log_5(ax^2+4x+a)$, а это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 5(x^2+1)\geqslant ax^2+4x+a \\ ax^2+4x+a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-5)x^2+4x+(a-5)\leqslant 0 \\ ax^2+4x+a>0 \end{cases} \qquad (1)$$

Таким образом, требуется найти все значения a, при которых системе (1) удовлетворяет любое значение x, а это означает, что каждое неравенство системы должно выполняться при всех значениях x.

Первое неравенство системы (1) выполняется при всех $x\in\mathrm{R}$ при следующих условиях:

$$\begin{cases} a-5<0 \\ D<0, \end{cases} \quad \begin{cases} a<5 \\ D=4-(a-5)^2<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<5 \\ a<3 \text{ и } a>7 \end{cases} \Leftrightarrow a<3.$$

Второе неравенство системы (1) выполняется при всех $x\in\mathrm{R}$ при следующих условиях:

$$\begin{cases} a>0 \\ D=4-a^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a<-2 \text{ и } a>2 \end{cases} \Leftrightarrow a>2.$$

Удовлетворяют системе $a\in(2;\ 3)$. ▲

Пример 17. При каких значениях p функция $\lg(6-p-10x+5(10-p)x^2)$ определена при всех $x\in\mathrm{R}$?

$\triangle$ Функция $\lg(6-p-10x+5(10-p)x^2)$ определена при всех $x\in\mathrm{R}$; если квадратный трехчлен, стоящий под знаком логарифма, принимает при всех x только положительные значения, т. е. $5(10-p)x^2-10x-p+6>0$, то это возможно, если $5(10-p)>0$ и $D<0$, т. е. справедлива система

$$\begin{cases} 5(10-p)>0 \\ D=5^2-5(10-p)(6-p)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p<10 \\ -5(p-5)(p-11)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p<10 \\ (p-5)(p-11)>0. \end{cases} \Rightarrow p<5.$$

Ответ: $p\in(-\infty;\ 5)$. ▲

Пример 18. Найти все значения a, при которых каждое решение неравенства $\log_{4-x}(2x^2-5x-3)\leqslant 1$ будет решением неравенства $x^2+a^2x-2a^4\leqslant 0$.

$\triangle$ Найдем ОДЗ первого неравенства

$$\begin{cases} 4-x>0 \\ 2x^2-5x-3>0 \\ 4-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x<-1/2 \text{ или } x>6 \\ x\neq 3 \text{ или ОДЗ } x<-1/2. \end{cases}$$

Теперь решим это неравенство на ОДЗ.

$\log_{4-x}(2x^2-5x-3)\leqslant\log_{4-x}(4-x)\Leftrightarrow 2x^2-5x-3\leqslant 4-x$, т. к. на ОДЗ $4-x>1$. Далее $2x^2-4x-7\leqslant 0$ или $\frac{2-3\sqrt{2}}{2}<x<$ $<\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$ с учетом ОДЗ $\frac{2-3\sqrt{2}}{2}\leqslant x<-\frac{1}{2}$.

Теперь, чтобы промежуток $\frac{2-3\sqrt{2}}{2}\leqslant x<-\frac{1}{2}$ входил в решение неравенства $x^2+a^2x-2a^4\leqslant 0$ нужно, чтобы он располагался между корнями трехчлена $f(x)=x^2+a^2x-2a^4$ (рис. 30).

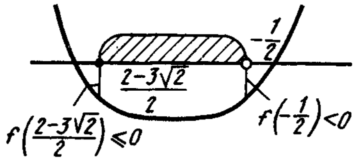


Рис. 30

Это возможно если:

$$\begin{cases} f\left(\frac{2-3\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{2-3\sqrt{2}}{2}\right)+a^2\left(\frac{2-3\sqrt{2}}{2}\right)-2a^4\leqslant 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{a^2}{2}-2a^4<0. \end{cases}$$

Решим отдельно эти неравенства. Обозначим $\frac{2-3\sqrt{2}}{2}=b<$ <0. Тогда $b^2+ba^2-2a^4\leqslant 0\Leftrightarrow 2a^4-ba^2-b^2\geqslant 0$. Найдем корни трехчлена

$$a^2_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2+8b^2}}{4}=\frac{b+3b}{4}=\begin{cases} b \\ -b/2. \end{cases}$$

Тогда решения неравенства $a^2\leqslant b$ или $-b/2\leqslant a^2$. Первое решение невозможно ни при каких a, т. к. $b<0$. Из второго решения получаем $|a|\geqslant\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2}{2}}$ (*).

Решаем второе неравенство $\frac{1}{4}-\frac{a^2}{2}-2a^4<0\Leftrightarrow$

$$8a^4+2a^2-1<0,$$

Корни трехчлена: $a^2_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{8}$ тогда $-\frac{1}{2}<a^2<\frac{1}{4}$ или $a^2<\frac{1}{4}\Leftrightarrow|a|<\frac{1}{2}$. (**)

Пересечением неравенств (*) и (**) является множество

$$|a| \geqslant \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2}{2}}. \blacktriangle$$

Упражнения

1. Найти все значения параметра p, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение.

1) $(p+1)4^x+4\cdot 2^x+(p-2)=0$; 2) $(p-3)4^x-8\cdot 2^x+p+3=0$; 3) $(p-3)9^x-6\cdot 3^x+p+5=0$; 4) $(p+5)9^x+6\cdot 3^x p-3=0$; 5) $(p-1)4^x-4\cdot 2^x+p+2=0$.

Ответы: 1) $p\in[-2;\ 1)\cup(1;\ 3)$;

2) $p\in(-5;\ -3)\cup(-3;\ 3)\ \cup[5]$;

3) $p\in(-3;\ 2]$;

4) $p\in[-5;\ 3)\cup\{-6\}$;

5) $p\in(-2;\ 2)$.

2. При каждом значении параметра решить уравнение.

1) $25^x+a^2(a-1)5^x-a^5=0$, 2) $(p-1)4^x-4\cdot 2^x+p+2=0$.

Ответы: 1) При $a<0$ $x_1=\log_5 a^2$, $x_2=3\log_5|a|$; при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x=2\log_5 a$;

2) При $p\in(-2,\ 1)\cup(1;\ 2]$ $\quad x_1=\log_2\frac{2-\sqrt{-p^2-p+6}}{p-1}$;

$$x_2=\log_2\frac{2+\sqrt{-p^2-p+6}}{p-1};$$

при $p=1$ $x=\log_2 3/4$.

3. Найти все значения параметра p, при которых уравнение не имеет решений.

1) $(4-p)4^x-5\cdot 2^x+\frac{5}{8}(1-p)=0$; 2) $(p-1)9^x+2p3^x+3p-2)=0$; 3) $p\cdot 4^{x+1}-(3p+1)2^x+p=0$; 4) $)p+1)4^x+2(p-1)2^x+3(p-1)=0$; 5) $(p-4)9^x+(p+1)3^x+(2p-1)=0$.

Ответы: 1) $p\in(-\infty;\ -2]\cup(1;\ +\infty)$;

2) $p\in(-\infty;\ 1/2)\cup[1;\ +\infty)$;

3) $p\in(-\infty;\ 0]\cup(1;\ +\infty)$;

4) $p\in(-\infty;\ -1)\cup[1;\ +\infty)$;

5) $p\in(-\infty;\ 1/2)\cup[4;\ +\infty)$.

4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение имеет два решения.

1) $(p-1)4^x<4\cdot 6^x+(p+2)9^x=0$; 2) $(p+1)4^x+4\cdot 6^x+(p-2)9^x=0$.

Ответы: 1) $p\in(-3;\ -2)$;

2) $p\in(2;\ 3)$.

5. Найти все значения параметра p, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение.

1) $(p-3)4^x-8\cdot 6^x+(p+3)9^x=0$; 2) $(p+5)9^x+6^{x+1}+(p-3)4^x=0$

Ответы: 1) $p \in (-5;\ -3) \cup (-3;\ 3)$;

2) $p \in [-4;\ 3)$.

6. Найти все значения параметра p, при которых уравнение имеет одно решение.

1) $(p+1)4^x + 8 \cdot 6^x + (p-5)9^x = 0$; 2) $(p-1)16^x - 4 \cdot 36^x + (p+2)81^x = 0$.

Ответы: 1) $p \in [-1;\ 5)$;

2) $p \in (-2;\ 1]$.

7. При каждом a указать, для каких x выполняется неравенство.

1) $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$; 2) $4^{2x+1} \cdot a^2 - 65a \cdot 4^{x-1} + 1 > 0$;
3) $4^{x+1} \cdot a^2 - 33 \cdot 2^x \cdot a + 8 > 0$; 4) $16^{x+1/2} < 9a \cdot 4^x + a^2$.

Ответы: 1) При $a > 0$ $x < \log_2 a - 2$; при $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ $x < \log_2(-a) - 1$;

2) при $a \leqslant 0$ $x \in R$; при $a > 0$ $x > \log_4(1/a)$, а также при $x < \log_4(1/16a)$;

3) при $a \leqslant 0$ $x \in R$; при $a > 0$ $x > 3 - \log_2 a$, а также при $x < -2 - \log_2 a$;

4) при $a < 0$ $x < \log_4(-a/2)$; при $a = 0$ решений нет; при $a > 0$ $x < \log_4(3a/4)$.

8. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a \geqslant 2$.

9. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $a \cdot 9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$ справедливо при всех x.

Ответ: $a \geqslant 1$.

10. Указать все a, при которых уравнение имеет решения и найти эти решения.

1) $\log_3 x + 3\log_a x + \log_9 x = 5$; 2) $\log_4 x + \log_a x + \log_{16} x = 1$.

Ответы: 1) $a > 0$, $a \neq 1/9$, $a \neq 1$ $x = 3^{\frac{10\log_3 a}{3\log_3 a + 6}}$;

2) $a > 0$, $a \neq 4^{-2/3}$, $a \neq 1$ $x = 4^{\frac{2\log_4 a}{3\log_4 a + 2}}$.

11. При каких значениях p функция определена для всех значений x?

1) $\ln[(4-p)x^2 - 5x + 5(1-p)/8]$, 2) $\ln[(p-1)x^2 + 2px + 3p - 2]$,
3) $\lg[(p-4)x^2 + (p+1)x + 2p - 1]$, 4) $\lg[(3p+1)x - p(4+x^2)]$,
5) $\lg[(p+1)x^2 - 2(p-1)x + 3(p-1)]$.

Ответы: 1) $p < -1$; 2) $p > 2$; 3) $p > 5$; 4) $p < -1$; 5) $p > 1$.

12. Найти все значения a, при которых неравенство выполняется при любом значении x.

1) $\log_{a(a+1)}(|x| + 4) > 1$; 2) $\log_{a/(a+1)}(x^2 + 2) > 1$.

Ответы:

1) $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < a < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < a < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, 2) $a < -2$.

13. Найти все значения x, по абсолютной величине меньше 3, которые при всех $a \geqslant 5$ удовлетворяют неравенству

$$\log_{2a-x^2}(x-2ax) > 1.$$

Ответ: $x \in (-3;\ -1)$.

14. Найти все значения $x > 1$, которые при всех b, удовлетворяющих условию $0 < b \leqslant 2$ являются решениями неравенства $\log_{\frac{x^2+x}{b}}(x+2b-1) < 1$.

Ответ: $x > 3$.

15. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $1+\log_2(2x^2+2x+\frac{7}{2}) \geqslant \log_2(ax^2+a)$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $0 < a \leqslant 8$.

16. Для каждого знаения параметра a решить уравнение.

1) $\sqrt{a(2^x-2)+1} = 1-2^x$; 2) $144^{|x|} - 2\cdot 12^{|x|} + a = 0$;
3) $a^{\log_a^4 x} + x^{\log_a^3 x} = 2a$; 4) $a^{\log_{\sqrt{b}} x} - 5x^{\log_b a} + 6 = 0$; 5) $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$.

Ответы: 1) при $0 < a \leqslant 1$ $x = \log_2 a$; при $a \leqslant 0$ и $a > 1$ решений нет;

2) при $a \leqslant 1$ $x = \pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$; при $a > 1$ решений нет;

3) при $a > 0$, $a \neq 1$ $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$;

4) при $b > 0$, $b \neq 1$, $x_1 = 3^{\log_a b}$, $x_2 = 2^{\log_a b}$;

5) при $a > 0, a \neq 1, x_1 = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $x_2 = a^{-4/3}$;

при $a = 1$ $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

17. Решить уравнение.

1) $\log_{\sqrt{x}} a \log_{a^2} \frac{a^2}{2a-x} = 1$; 2) $\log_x m \log_{\sqrt{m}} \frac{m}{\sqrt{2m-x}} = 1$;

3) $\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{1/a} x = 0$; 4) $(3\log_a x - 2)\log_x^2 a = \log_{\sqrt{a}} x - 3$;

5) $\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{\sqrt[3]{a^2}} x = 27$; 6) $\log_a \sqrt{4+x} + 3\log_{a^2}(4-x) - \log_{a^4}(16-x^2)^2 = 2$; 7) $2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 3^{\frac{1}{2x(a+2)}} = 4^{\frac{1}{x}}$;

8) $\lg 2x + \lg(2-x) = \lg\lg p$.

Ответы: 1) a, при $a > 0$, $a \neq 1$;

2) m, при $m > 1$, $m \neq 1$;

3) a, при $a > 0$, $a \neq 1$;

4) $1/a$; $\sqrt{a}$; a^2 при $a > 0$, $a \neq 1$;

5) a^6, при $a > 0$, $a \neq 1$;

6) $x=4-a^2$ при $0<a<1$ и $1<a<2\sqrt{2}$;

7) $(2a-1)/(a+3)$ при $a\neq-2$, $a\neq-3$ и $a\neq 1/2$; нет корней при $a=-2$, $a=-3$ и $a=1/2$;

8) $1-\sqrt{1-0.5\lg p}$; $1+\sqrt{1-0{,}5\lg p}$, где $1<p\leqslant 10$.

18. Определить, при каких a уравнения имеют ровно два решения.

1) $\log_2(4^x-a)=x$; 2) $x+\log_{1/2}(4^x+a^3)=0$; 3) $x+\log_{1/3}(9^x-2a)=$ $=0$; 4) $\log_5(25^x+7a^3)=x$.

Ответ: 1) $-1/4<a<a$;

2) $0<a<\sqrt[3]{1/4}$;

3) $-1/8<a<0$;

4) $0<a<1/\sqrt[3]{28}$.

19. При каких значениях a уравнение $\log_{x-a}(x-2)=2$ имеет единственное решение?

Овет: $a=-7/4$, $a<-2$.

20. Решить уравнение 1) $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x-\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x=1$, $0<$ $<a<1$; 2) $\log_{ax}x=n\log_{a^2x}x$, где $a>0$, $n\neq1$, $n\neq2$.

Ответы: 1) $\{2\}$;

2) если $a\neq1$, $n\neq0$, то $x=1$, $x=a^{(2-n)/(n-1)}$; если $a\neq1$, $n=0$, то $x=1$; если $a=1$, то решений нет.

21. При каких значениях a уравнение:

а) не имеет решений; б) имеет одно решение; в) имеет два решения; г) имеет больше двух решений;

1) $\log_2(x^2+1)=\log_2(x+a)$; 1) $\log_2(x^2-1)=\log_2(x+a)$;

3) $\lg\frac{x}{x-1}=\lg(-x+a)$; 4) $\lg(x^2-|x|-2)=\lg(x/2-a)$;

5) $\ln(x|x-2|)=\ln\left(\frac{x}{2}+a\right)$; 6) $\lg|x^2-x-2|=\lg\left(\frac{x}{2}+a\right)$;

7) $\lg\left|\frac{x}{x-1}\right|=\lg(-x+a)$.

Ответы: 1) а) — при $a<3/4$; б) при $a=3/4$; в) при $a>3/4$; 2) нет таких a;

2) а) при $a\leqslant-1$; б) при $a\in(-1;\ 1]$; в) при $a>1$; г) нет таких a;

3) а) при $0\leqslant a<4$; б) при $a<0$ и $a=4$; в) при $a>4$; г) нет таких a;

4) а) при $a\leqslant-1$; б) $-1\leqslant a\leqslant 1$; в) $a>1$; г) нет таких a;

5) а) при $a\leqslant-1$; б) $a>21/16$; в) $-1<a\leqslant0$; г) $0<a<$ $<21/16$ — три решения;

6) а) $a\leqslant-1$; б) $a\in\varnothing$; в) $-1<a\leqslant1/2$; $33/16<a$; г) $1/2<$ $<a\leqslant 33/16$ — четыре решения;

7) а) $a=0$; б) $a<4$, $a\neq0$; в) $a=4$, г) $a>4$ — три решения.

22. Решить неравенства:

1) $\log_a^2 x^2>1$, $a>0$, $a\neq1$; 2) $\sqrt{1-\log_a x}+\sqrt{1+\log_a x}>a\sqrt{2}$,

$a>0$, $a\neq 1$; 3) $\log_x(x-a)>2$, $a\in\mathbb{R}$.

Ответы: 1) при $a>1$ $|x|>\sqrt{a}$ или $0<|x|<1/\sqrt{a}$; при $0<a<1$ $0<|x|<\sqrt{2}$ или $|x|>1/\sqrt{a}$;

2) если $0<a<1$, то $a^{-a\sqrt{2-a^2}}<x\leqslant a^{-1}$; если $1<a$, то решений нет;

3) если $a<0$, то $1<x<(1+\sqrt{1-4a})/2$; если $a=0$, то решений нет; если $0<a\leqslant 1/4$, то $a<x<(1-\sqrt{1-4a})/2$, $(1+\sqrt{1-4a})/2<$ $<x<1$; если $1/4<a<1$, то $a<x<1$; если $1\leqslant a$, то решений нет. Указание. Построить для наглядности график функций x^2 и $x-a$.

7. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Справочный материал

Система вида

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_1^2+b_1^2\neq 0$ и $a_2^2+b_2^2\neq 0$ называется линейной системой двух уравнений с двумя неизвестными.

Линейная система (1) может либо иметь единственное решение, либо иметь бесконечно много решений, либо не иметь решений.

Основные методы решения системы (1) — метод подстановки, метод исключения неизвестного и метод определителей.

Примеры с решениями

Пример 1. Для всех значений параметра a решить систему

$$\begin{cases} ax+(a-1)y=1 \\ (a+1)x-(5-3a)y=a. \end{cases} \qquad (1)$$

$\triangle$ Применяя метод подстановки при решении данной системы, надо учитывать, что каждый из коэффициентов при неизвестных может обращаться в нуль. Поэтому если из какого-либо уравнения системы будем находить выражение одного из неизвестных (например, x) через другое, то надо отдельно рассмотреть случай обращения в ноль коэффициента при этом неизвестном.

Пусть $a=0$. Тогда данная система имеет вид

$$\begin{cases} 0\cdot x-y=1 \\ x-5y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-5,\ y=-1.$$

Пусть $a \neq 0$, тогда из первого уравнения системы (1) имеем $x = \frac{1-(a-1)y}{a}$.

Подставляя $\frac{1-(a-1)y}{a}$ вместо x во второе уравнение,получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x = \frac{1-(a-1)y}{a} \\ (a+1)\frac{1-(a-1)y}{a} - (5-3a)y = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-(a-1)y}{a} \\ (2a^2-5a+1)y = a^2-a-1. \end{cases} \qquad (2)$$

$2a^2-a-1$ равняется нулю при

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4};$$

a^2-a-1 равняется нулю при $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Поэтому при $a = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ второе уравнение системы (2) решения не имеет. Следовательно, исходная система также не имеет решений.

При $a \neq \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$, $a \neq 0$ имеем $y = \frac{a^2-a-1}{2a^2-5a+1}$, а следовательно, $x = \frac{1-(a-1)\frac{a^2-a-1}{2a^2-5a+1}}{a} =$

$$= \frac{2a^2-5a+1-a^3+a^2+a+a^2-a-1}{a(2a^2-5a+1)} = \frac{-a^3+4a^2-5a}{a(2a^2-5a+1)} =$$

$$= \frac{-a^2+4a-5}{2a^2-5a+1}.$$

Ответ: При $a=0$ $x=-5$, $y=-1$; при $a = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ решений нет; при $a \neq 0$, $a \neq \frac{5 \pm \sqrt{17}}{8}$ имеем $x = \frac{-a^2+4a-5}{2a^2-5a+1}$, $y = \frac{a^2-a-1}{2a^2-5a+1}$. ▲

Метод исключения неизвестного рассмотрим на следующих примерах.

Пример 2. Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases} ax + a^2y = 1 \\ x + (a-1)y = a. \end{cases}$$

△ Пусть $a=0$. Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$ Эта система решений не имеет.

Пусть $a \neq 0$, тогда, умножая второе уравнение исходной системы на $-a$, получаем систему

$$\begin{cases} ax+a^2y=1 \\ -ax-a(a-1)y=-a^2. \end{cases} \qquad (*)$$

Заменяя второе уравнение системы (*) суммой ее первого и второго уравнений, получим систему, равносильную исходной:
$\begin{cases} ax+a^2y=1 \\ ay=1-a^2 \end{cases}$ (**). Из второго уравнения находим $y=\frac{1-a^2}{a}$ и, подставляя это значение в первое уравнение системы (**), получим

$$x=\frac{1-a^2y}{a}=\frac{1-a+a^3}{a}.$$

Ответ. При $a=0$ решений нет; при $a \neq 0$ система имеет решение

$$x=\frac{1-a+a^3}{a}, y=\frac{1-a^2}{a}.$$

Пример 3. Найти все значения параметра a, для каждого и которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=a \\ 2x-y=3, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x>y$,

△ Сложим уравнения системы и получим уравнения $3x=$ $=a+3 \Rightarrow > x=\frac{a+3}{3}$; подставим это значение в первое уравнение

$$\frac{a+3}{3}+y=a, \qquad y=\frac{2a+3}{2}.$$

Теперь решим неравенство $x>y$, т. е. $\frac{a+3}{3}>\frac{2a-3}{3} \Rightarrow > 3a+$ $+9>6a-9 \Rightarrow > 18>3a$; $a<9$.

Ответ: $a<9$. ▲

МЕТОД ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Справочный материал

Запишем таблицу, составленную из коэффициентов при неизвестных в системе (1),

$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{pmatrix}$, называемую основной матрицей системы, таблицу $B_x=\begin{pmatrix} c_1b_1 \\ c_2b_2 \end{pmatrix}$ и таблицу $B_y=\begin{pmatrix} a_1c_1 \\ a_2c_2 \end{pmatrix}$ по переменной x и y соответственно.

Таблицы B_x и B_y составляются соответствующей заменой коэффициентов a и b на коэффициенты c.

Если матрица содержит n строк и m столбцов, то говорят, что она имеет размерность $n \times m$. Если $n=m$, то матрица называется квадратной.

Число строк (а следовательно, и число столбцов квадратной матрицы) называется порядком матрицы.

Для квадратной матрицы вводится понятие определитель матрицы, обозначаемый символом $\det A$, $\det B_x$, $\det B_y$.

Определителем матрицы 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$ называется число, вычисляемое по следующему правилу:

$$\det A = a_1 b_2 - a_2 b_2,\ \det B_x = c_1 b_2 - b_1 c_2,\ \det B_y = a_1 c_2 - c_1 a_2.$$

Для решения системы из двух по два необходимо составить три матрицы: A, B_x, B_y. Находим определители матрицы: $\det A$, $\det B_x$ и $\det B_y$.

Для того чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\det A$ был отличен от нуля. В этом случае решение находится по формулам:

$$x = \frac{\det B_x}{\det A}; \quad y = \frac{\det B_y}{\det A}.$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

Если a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля, то условие $\det A \neq 0$ эквивалентно условию

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Для того чтобы система не имела решений, необходимо и достаточно, чтобы $\det A = 0$ и хотя бы один из определителей $\det B_x$ или $\det B_y$ был отличен от нуля.

Если a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля, то условие $\det A = 0$, $\det B_x \neq 0$ ($\det A = 0$, $\det B_y \neq 0$) эквивалентно условию $\frac{a_1}{a_2} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Для того чтобы система имела бесконечно много решений, необходимо и достаточно, чтобы $\det A = \det B_x = \det B_y = 0$. Если коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 отличны от нуля, то условие $\det A = \det B_x = \det B_y = 0$ эквивалентно условию $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ с учетом ограничений коэффициентов системы (1).

Примеры с решениями

Пример 4. Найти все значения a, при которых система

$\begin{cases} 3x+7y=20 \\ ax+14y=15 \end{cases}$ имеет единственное решение.

△ Система имеет решение, если $\det A \neq 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ a & 14 \end{vmatrix} = 3\cdot 14 - a\cdot 7 \neq 0, \quad a \neq 6. \ ▲$$

Ответ: при $a \neq 6$.

Пример 5. Найти все a, для которых система $\begin{cases} ax-8y=12 \\ 2x-6y=15 \end{cases}$ не имеет решений.

△ Поскольку $\det B_x = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ 15 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$, то система не имеет решений, если

$$\det A = \begin{vmatrix} a & -8 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -a6+16=0 \Rightarrow a = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $a = \frac{8}{3}$. ▲

Пример 6. Найти все a, при которых система $\begin{cases} 15x+a=3 \\ 5x+10y=1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

△ Поскольку $15^2+a^2 \neq 0$, $5^2+10^2 \neq 0$ и

$\det B_y = \begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, то данная система имеет бесконечно много решений при $\det A = \begin{vmatrix} 15 & a \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 150-5a=0$ и $\det B_x = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 1 & 1a \end{vmatrix} = 30-a=0$, т. е. при $a=30$. ▲

Пример 7. Для каждого a решить систему

$$\begin{cases} ax+y=a^2 \\ x+ay=1. \end{cases}$$

△ Находим $\det = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2-1;$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^3-1; \ \det B_y = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-a^2.$$

При $a \neq \pm 1$ имеет $\det A \neq 0$ и система имеет единственное решение

$$x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{a^3-1}{a^2-1} = \frac{a^2+a+1}{a+1}; \ y = \frac{\det B_y}{\det A} = \frac{a-a^2}{a^2-1} = \frac{-a}{a+1}.$$

При $a=1$ имеем $\det A=\det B_x=\det B_y=0$, тогда

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \text{ и } x=t \; y=1-t, \text{ где } t\in \mathbb{R}.$$

При $a=-1$ $\det A=0$, $\det By\neq 0$, следовательно, система решений не имеет.

Ответ: при $a\in]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$ единственное решение

$$x=\frac{a^2+a+1}{a+1},\quad y=\frac{a}{a+1};$$

при $a=1$ — бесчисленное множество решений;
при $a=-1$ — система решений не имеет. ▲

Упражнения

1. Найти все значения a, при которых решения системы

$$\begin{cases} 3x-6y=1 \\ 5x-ay=2 \end{cases}$$

удовлетворяют условию $x<0$ и $y<0$.

Ответ: $10<a<12$.

2. Найти все значения параметра a, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x+y=a \\ 2x-y=3, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x>y$.

Ответ: $a<6$.

3. Найти все значения b, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=b+2 \\ x-y=b, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x-y<2$.

Ответ: $b<0$.

4. Найти все значения c, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x+7y=c \\ 2x-y=5, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x>y-2$.

Ответ: $c<70$.

5. Найти все значения a, для каждого из которых, числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$\begin{cases} x-2y=2a \\ 3x+5y=4 \end{cases}$ удовлетворяют также неравенству $x+y>0$.

Ответ: $a>-3$.

6. Найти все значения b, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3x+y=b \\ x+2y=2b+1, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x>3y$.

Ответ: $b<-\frac{2}{3}$.

7. Найти все значения a, при которых система имеет единственное решение:

1) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ ax+y=-3, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax+ay=a^2 \\ x+ay=2, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-(a+1)y=a+2 \\ ax+y=a-3, \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3=0 \\ ax+y(a-1)=\frac{3}{2}. \end{cases}$

Ответы: 1) $a\in \mathrm{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$; 2) $a\in \mathrm{R}$ $\{0;\ 1\}$; 3) $a\in \mathrm{R}$; 4) $a\in \mathrm{R}\setminus\{1\}$.

8. Найти все значения a, при которых система имеет бесконечно много решений

1) $\begin{cases} 3x+ay=3 \\ ax+3y=3, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+ay=a+2 \\ (a+1)x+2ay=2a+4, \end{cases}$

3) $\begin{cases} (a+1)x+8y=4a \\ ax+(a+3)y=3a-1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2ay=1 \\ (a-1)x+4y=2a-3, \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+(a-3)y=4 \\ 6x+(a-1)y=a+3. \end{cases}$

Ответы: 1) $a=1$; 2) $a=1$; 3) $a=1$; 4) $a=2$; 5) $a=5$.

9. Найти все значения параметра a, при которых система не имеет решений.

1) $\begin{cases} -4x+ay=1+a \\ (6+a)x+2y=3+a, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a^2x+(2-a)y=4+a^2 \\ ax+(2a-1)y=a^5-2, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+ay=1 \\ ax-3ay=2a+3, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+a^2y=a^2+a-2 \\ x+2y=2, \end{cases}$

5) $\begin{cases} 7x-2ay=5 \\ (4-5a)x-4ay=7. \end{cases}$

Ответы: 1) $a=-4$; 2) $a=-1$, $a=1$; 3) $a=0$; 4) $a=-2$; 5) $a=0$, $a=-2$.

10. При всех значениях параметра a решить систему.

1) $\begin{cases} ax+y=a \\ x+ay=1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a^2x+y=a^2 \\ x+ay=1, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=1, \end{cases}$

4) $\begin{cases} ax+y=a \\ ax+ay=1, \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x-ay=5 \\ 3y-6x=-15, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+ay=1 \\ ax+y=2a, \end{cases}$

7) $\begin{cases} (2a+4)x-(5a+3)y=2a-4 \\ (a+2)x-3ay=a-2, \end{cases}$ 8) $\begin{cases} ax+y=a^3 \\ x+ay=1. \end{cases}$

Ответы: 1) (1:0) при $a \in R \setminus \{-1;\ 1\}$; $(t;\ 1-t)$ при $a=1$ и $(t;\ t+1)$ при $a=-1$, где $t \in R$;

2) (1:0) при $a \in R \setminus (13)$ $(t;\ 1-t)$ при $a=1$, где $t \in R$;

3) $\left(\frac{2a-1}{a^2-1};\ \frac{a-2}{a^2-1}\right)$ при $a \in R \setminus \{-1;\ 1\}$; нет решений при $a=-1$ и $a=1$;

4) $\left(\frac{a+1}{a};\ -1\right)$ при $a \in R \setminus \{0;\ 1\}$; $(t;\ 1-t)$ при $a=1$, где $t \in R$; нет решений при $a=0$;

5) $(5/2;\ 0)$ при $a \in R \setminus \{1\}$; $\{t;\ 2t-5)$ при $a=1$, где $t \in R$;

6) $\left(\frac{1-2a^2}{1-a^2};\ \frac{a}{1-a^2}\right)$ при $a \in R \setminus \{-1;\ 1\}$; нет решений при $a=$ $=-1$, и $a=1$;

7) $\left(\frac{a-2}{a+2};\ 0\right)$ при $a \in R \setminus \{-2;\ 3\}$; $\left(t;\ \frac{5t-1}{9}\right)$ при $a=3$, где $t \in R$; нет решений при $a=-2$;

8) $(a^2+1;\ -a)$ при $a \in R \setminus \{-1;\ 1\}$; при $a=1$ $(t;\ 1-t)$ и при $a=-1$ $(t;\ t-1)$, где $t \in R$.

11. Найти все значения a, при которых прямые $3x+2ay=1$ и $3(a-1)x-ay=1$: а) пересекаются в одной точке; б) совпадают; в) не имеют общих точек.

Ответы: а) $a \in R \setminus \{0;\ 1/2\}$; б) $\varnothing$; в) $a=0$; $a=1/2$.

12. Найти все значения параметра a, для которых решения системы

$$\begin{cases} x+ay=13 \\ ax+4y=6 \end{cases}$$

удовлетворяют условию $x>1$, $y>0$.

Ответ: $a \in]-2;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$.

13. При всех значениях параметра a решить систему:

$$1)\ \begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=2 \\ x+4y=a, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+2y=3 \\ ax-4y=-6 \\ x+y=1. \end{cases}$$

Ответы: 1) $(11/5;\ 1/5)$ при $a=3$; нет решений при $a \neq 3$;

2) $(-1,\ 2)$ при $a=-2$; нет решений при $a \neq -2$.

14. При каких целых значениях n решение системы $\begin{cases} nx-y=5 \\ 2x+3ny=0 \end{cases}$ удовлетворяет условиям $x>0$, $y<0$?

Ответ: $\{0;\ 1\}$.

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МОДУЛЕМ

Примеры с решениями:

Пример 15. При всех значениях параметра a решить систему:

$$\begin{cases} |a|x - y = 1 \\ x + |a|y = a. \end{cases} \qquad \text{Если } a = 0 \quad \begin{matrix} 0x - y = 1 \\ x + 0 = 0, \end{matrix} \quad \begin{matrix} y = -1 \\ x = 0. \end{matrix}$$

Пусть $a > 0$, тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ x + ay = a, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & |a| \end{vmatrix} = a^2 + 1, \\ \det Bx &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & |a| \end{vmatrix} = a + a = 2a, \\ \det By &= \begin{vmatrix} |a| & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1. \end{aligned}$$

Система имеет единственное решение (т. к. $a^2 + 1 \neq 0$ ни при каких a) $x = \frac{2}{a^2+1}$, $y = \frac{a^2-1}{a^2+1}$.

Пусть $a < 0$. Тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} -ax - y = 1 \\ x - ay = a, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = a^2 + 1, \\ \det Bx &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{vmatrix} = -a + a = 0, \\ \det By &= \begin{vmatrix} -a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = -(a^2 + 1). \end{aligned}$$

Единственное решение

$$x = \frac{0}{a^2+1} = 0, \qquad y = \frac{-(a^2+1)}{a^2+1} = -1.$$

Ответ: при $a > 0$ $x = \frac{2a}{a^2+1}$, $y = \frac{a^2-1}{a^2+1}$, при $a \leqslant 0$ $x = 0$, $y = -1$.

Пример 16. При всех значениях параметра a решить систему

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ a|x| - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 0 \begin{cases} x + y = 1 \\ ax - y = 1, \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1 - a,$$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2,$$

$$\det B_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a.$$

Единственное решение:

$$x=\frac{-2}{-(a+1)}=\frac{2}{a+1};\qquad y=\frac{1-a}{-(a+1)}\text{ при } a\neq -1$$

и $\frac{2}{a+1}\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant -1$ $\left(\text{при } a>-1\quad x=\frac{2}{a+1},\ y=\frac{a-1}{a+1}\right)$.

Нет решений: $\det A=-1-a=0\Rightarrow a=-1$.

Бесчисленного множества решений нет, т. к. $\det B_x=-2$.

$$x<0\ \begin{cases} x+y=1\\ -ax-y=1,\end{cases}\qquad \begin{aligned}\det A&=\begin{vmatrix}1&1\\-a&-1\end{vmatrix}=-1+a,\\ \det B_x&=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-1-1=-2\\ \det B_y&=\begin{vmatrix}1&1\\-a&1\end{vmatrix}=1+a.\end{aligned}$$

Единственное решение: $x=\frac{-2}{a-1},\ y=\frac{a+1}{a-1}$

при $\frac{-2}{a-1}<0\Rightarrow a-1>0,\ a>1$.

Бесчисленного множества решений нет, т. к. $\det B_x=-2\neq 0$.

Ответ: При $a\leqslant -1$ нет решений, при $-1<a\leqslant 1$

$\left\{\frac{2}{a+1};\ \frac{a-1}{a+1}\right\}$; при $a>1$ $\left\{\frac{2}{a+1};\ \frac{a-1}{a+1}\right\}$ и $\left\{\frac{2}{1-a};\ \frac{a+1}{a-1}\right\}$.

Графическая иллюстрация этого решения показана на рис. 31.

На рис. 31 построены графики линий $y+x=1$ и $y=a|x|-1$ при некоторых фиксированных значениях a, при $a=1$, $a=0$, $a=-1$, $a=2$; A, B и C — точки пересечения линий, т. е. решения системы.

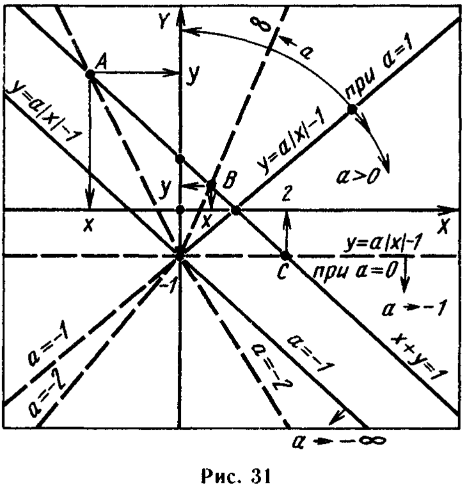


Рис. 31

Пример 17. При всех значениях параметров a и b решить систему

$$\begin{cases} ax+y=b \\ x-y=2. \end{cases}$$

$\triangle$ Вычислим три определителя

$$\det A=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-(a+1); \qquad \det B_x=\begin{vmatrix} b & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-(b+2);$$

$$\det B_y=\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2a-b.$$

Находим единственное решение

$$x=\frac{-(b+2)}{-(a+1)}=\frac{b+2}{a+1}; \quad y=\frac{2a-b}{-(a+1)}=\frac{b-2a}{a+1} \text{ при } a\neq -1.$$

Бесчисленное множество решений, если $\det A=\det B_x=\det B_y=0$, т. е. $-(a+1)=0 \Rightarrow a=-1$, $-(b+2)=0$, $b=-2$, $2a-b=0$

при $a=-1$ и $b=-2$ $\begin{cases} x-y=2 \\ x-y=2, \end{cases}$ $x=t$, $y=t-2$, $t\in \mathrm{R}$.

Нет решений при $-(a+1)=0$, т. е. при $a=-1$, при этом хотя бы один из оставшихся определителей не равнялся бы нулю. Это возможно при $b\neq -2$.

Ответ: $\left(\frac{b+2}{a+1}; \frac{b-2a}{a+1}\right)$при $a\neq -1$; $b\in \mathrm{R}$ $(t;\ t-2)$ при $a=-1$ и $b=-2$; нет решений при $a=-1$ и $b\in \mathrm{R}\backslash\{-2\}$. $\blacktriangle$

Пример 18. Найти числа a, b, c, если система

$\begin{cases} 5x+7y=15 \\ ax+bx=c \end{cases}$ имеет единственное решение, а уравнение $ax+bx=c$ имеет решение $x=2$, $y=3$.

$\triangle$ Вычислим определители. $\det A=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ a & b \end{vmatrix}=5b-7a$,

$$\det B_x=\begin{vmatrix} 15 & 7 \\ c & b \end{vmatrix}=15b-7c; \quad \det B_y=\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ a & c \end{vmatrix}=5c-15a.$$

Вычислим корни системы $x=\frac{15b-7c}{5b-7a}$; $y=\frac{5c-15a}{5b-7a}$ и подставим их в 1-е уравнение системы:

$$5\,\frac{15b-7c}{5b-7a}+7\,\frac{5c-15b}{5b-7a}=15 \Rightarrow 75b-35c+35c-105a=$$
$$=75b-105a \Rightarrow 0=0,$$

т. е. не зависит от параметров, кроме $5b-a\neq 0$, если $a=t$, где $t\in \mathrm{R}$, то $5b-7t\neq 0$ $b\neq \frac{7t}{5}$, тогда $b=p$, а $p\in \mathrm{R}\backslash\{7t/5\}$.

Из $2a+3b+c \Rightarrow c=2t+3p$.

Ответ: $a=t$, $b=p$, $c=2t+3p$, где $t\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7t}{5}\right\}$. ▲

Пример 19. Найти все значения параметра a такие, что для любого значения b найдется хотя бы одно значение c, при котором система уравнений имеет хотя бы одно решение.

$$\begin{cases} 2x+by=ac^2+c \\ bx+2y=c-1. \end{cases}$$

△ Вычислим три определителя:

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & b \\ b & 2 \end{vmatrix}=4-b^2;\qquad \det B_x\begin{vmatrix} ac^2+c & b \\ c-1 & 2 \end{vmatrix}=2ac^2+2c-bc+b;$$

$$\det B_y=\begin{vmatrix} 2 & ac^2+c \\ b & c-1 \end{vmatrix}=2c-2-abc^2-bc.$$

При $b\neq\pm2$ система имеет единственное решение, не зависящее от a и c, т. е. a, $c\in\mathbb{R}$. Но в задаче **требуется найти хотя бы одно** решение для любого b. При $b=\pm2$ система может иметь бесчисленное множество решений при условии, что все три определителя равны нулю. Первый определитель равен нулю при $b=\pm2$. Найдем при каких a другие два определителя равны нулю сначала при $b=2$, затем при $b=-2$. При $b=2$

$$\begin{cases} 2ac^2+2c-2c+2=0\Rightarrow ac^2+1=0\Rightarrow ac^2=-1. \\ 2c-2-2ac^2-2c=0 \end{cases}$$

Это возможно только при $a<0$ и $c=\frac{1}{\sqrt{-a}}$.

При $b=-2$ $\begin{cases} 2ac^2+2c+2c-2=0 \\ 2c-2+2ac^2+2c=0 \end{cases}\Rightarrow ac^2+2c-1=0.$

Определим, как зависят корни этого урвнения от a:

$c_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+a}}{a}$, корни возможны, но при $1+a\geqslant0$, т. е. при $-1\leqslant a$. При этом найдется хотя бы одно значение c. Находим пересечение множеств $a<0$ и $-1\leqslant a$ — это $-1\leqslant a<0$.

Ответ: $-1\leqslant a<0$. ▲

Второе решение.

1) Преобразуем систему к виду $\begin{cases} y=-\frac{2}{b}x+\frac{ac^2+c}{b} \\ y=-\frac{b}{2}x+\frac{c-1}{2}. \end{cases}$

Система будет иметь единственное решение при $-\frac{2}{b}\neq-\frac{b}{2}$, т. е. при $b\neq\pm2$ независимо от a, b и c. Система будет иметь бесчисленное множество решений, если $b=\pm2$ и $\frac{ac^2+c}{b}=\frac{c-1}{2}$ при этих b. Решая последнее уравнение при $b=2$, получаем $ac=-1$ при $a<0$ и при $b=-2$ $ac^2+2c-1=0$.

Упражнения

1. При всех значениях a решить систему:

1) $\begin{cases} ax+y=|a| \\ ax+ay=a^2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |a|x+a^2y=a \\ ax-a^2y=a^2, \end{cases}$

3) $\begin{cases} a|x+y|=1 \\ |x|+|y|=1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a|x|-y=a \\ |x|+ay=1, \end{cases}$

5) $\begin{cases} ax-|x|+y=1 \\ x+ay=1, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a|x+y|=a \\ x+y=a, \end{cases}$ 7) $\begin{cases} |ax-y|=1 \\ x+y=2. \end{cases}$

Ответы: 1) $(0;\ a)$ при $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; $\left(\frac{-2a^2}{a^2-1};\ \frac{a^3+a}{a^2-1}\right)$ при $a\in(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0)$; $(t;\ 1-t)$ при $a=1$, где $t\in\mathrm{R}$. Нет решений при $a=-1$;

2) $\left(\frac{a+1}{2};\ \frac{1-a}{2a}\right)$ при $a\in(0;\ +\infty)$; $(t;\ p)$ при $a=0$ и $(t;$

$-1\ -t)$ при $a=-1$, где $t\in\mathrm{R}$, $p\in\mathrm{R}$; нет решений при $a\in[-\infty;\ -1\ [\cup]-1:\ 0[$;

3) нет решений при $a\in(-\infty;\ 1)$; $(t;\ 1-t)$ и $(-t;\ t-1)$ при $a=1$,

, где $t\in[0;\ 1]$; $\left(\frac{a+1}{2a};\ \frac{1-a}{2a}\right)$, $\left(\frac{1-a}{2a};\ \frac{a+1}{2a}\right)$, $\left(\frac{-(a+1)}{2a};\ \frac{a-1}{2a}\right)$ и $\left(\frac{a-1}{2a};\ \frac{-(a+1)}{2a}\right)$ при $a\in(1;\ +\infty)$;

4) $(1:0)$, $(-1,\ 0)$ при $a\in\mathrm{R}$;

5) $\left(\frac{a-1}{a^2+a-1};\ \frac{a}{a^2+a-1}\right)$ при $a\in\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{a-2}{a^2-a-1};\ \frac{a-2}{a^2-a-1}\right)$

при $a\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; $\left(\frac{a-1}{a^2-a-1};\ \frac{a-2}{a^2-a-1}\right)$ и $\left(\frac{a-1}{a^2+a-1};\ \frac{a}{a^2+a-1}\right)$ при $a\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ 1\right)$; $(0;\ 1)$ при $a=1$; $\left(\frac{a-1}{a^2-a-1};\ \frac{a-2}{a^2-a-1}\right)$ при $a\in\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$; нет решений при $a\in\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[1;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;

6) $(t;\ -t)$ при $a=0$; $(t;\ 1-t)$ при $a=1$; $(t;\ -t-1)$ при $a=-1$, где $t\in\mathrm{R}$: нет решений при $a\in(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$;

7) $\left(\frac{3}{a+1};\ \frac{2a-1}{a+1}\right)$ и $\left(\frac{1}{a+1};\ \frac{2a+1}{a+1}\right)$ при $a\in]-\infty;\ -1)\cup\cup(-1;\ +\infty[$; нет решений при $a=-1$.

2. При всех значениях параметров a и b решить систему:

1) $\begin{cases} x-yb=a \\ ax+y=1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=b \\ ax-y=a, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} ax+by=a \\ ax+by=b, \end{cases}$

4) $\begin{cases} ax-ay=ab \\ 2ax-y=a, \end{cases}$ 5) $\begin{cases} ax=ab \\ yb=b^2, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a^2x=ab \\ abx=b^2, \end{cases}$

7) $\begin{cases} ax+ay=b \\ bx+by=a. \end{cases}$

Ответы: 1) $\left(\frac{a+b}{ab+1};\ \frac{1-a^2}{ab+1}\right)$ при $ab\neq-1$; $(t;\ 1-t)$ при $a=1$, $b=-1$, $(t;\ t-1)$ при $a=-1$; $b=1$, где $t\in R$; нет решений при $ab=-1$, $a\neq 1$, $a\neq -1$;

2) $\left(\frac{a+b}{a+1};\ \frac{ab-a}{a+1}\right)$ при $a\neq-1$; $(t;\ 1-t)$ при $a=-1$, $b=1$, где $t\in R$;
нет решений при $a=-1$. $b\neq 1$;

3) $(t;\ 1-t)$ при $a=b\neq 0$, где $t\in R$; $(t;\ p)$ при $a=0$, $b=0$, где t, $p\in R$ нет решений при $a\neq b$;

4) $\left(\frac{a-b}{2a-1};\ \frac{a-2ab}{2a-1}\right)$ при $a\neq 0$ и $a\neq 1/2$; $(t;\ 0)$ при $a=0$, $b\in R$ и $(t;\ t-1/2)$ при $a=1/2$, $b=1/2$, где $t\in R$; нет решений при $a=1/2$, $b\neq 1/2$;

5) $(t;\ b)$ при $a=0$ и $b\neq 0$, где $t\in R$; $(b;\ b)$ при $ab\neq 0$; $(0;\ t)$ при $a\neq 0$ и $b=0$, где $t\in R$; $(t;\ p)$ при $a=0$ и $b=0$, гдё t, $p\in R$;

6) $x=b/a$ при $ab\neq 0$; $x=0$ при $b=0$ и $0\neq 0$; $x=t$ при $a=0$ и $b=0$, где $t\in R$; нет решений при $a=0$ и $b\neq 0$;

7) $(t;\ 1-t)$ при $a=b\neq 0$, где $t\in R$; $(t;\ p)$ при $a=0$ и $b=0$, где t, $p\in R$; нет решений: при $a=0$ и $b\neq 0$, при $a\neq 0$ и $b=0$ и при $ab\neq 0$ и $a\neq b$.

3. Система $\begin{cases} 5x+7y=15 \\ ax+by+c \end{cases}$ решений не имеет, а уравнение $ax+$ $+by=c$ имеет решение $x=4$, $y=1$. Найти числа a, b, c.

Ответ: $a=5t$, $b=7t$, $c=27t$, где $t\in R\backslash\{0\}$.

4. Найти все значения параметра a такие, что для любого значения b найдется хотя бы одно значение c, при котором система уравнений имеет хотя бы одно решение.

1) $\begin{matrix} x+by=ac^2+c \\ bx+2y=c-1, \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 2x+by=c^2 \\ bx+2y=ac-1, \end{matrix}$

3) $\begin{matrix} bx+y=ac^2 \\ x+by=ac+1. \end{matrix}$

Ответы: 1) $-(3\sqrt{2}+4)/8\leqslant a\leqslant(3\sqrt{2}-4)/8$;

2) $a\in(-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty)$; 3) $a\in(-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty[$.

Найти все a и b, при которых система

$ax-by=a^2-b$

$bx-b^2y=2+4$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a=1$, $b=-1$; $a=1$, $b=-2$.

5) Система $\begin{cases} ax-by=2a-b \\ (c+1)x+cy=10-a+3b \end{cases}$ имеет бесконечно много решений; $x=1$, $y=3$ — одно из них. Найти числа a, b, c.

Ответ: $a=0$, $b=0$, $c=9/4$; $a=2$, $b=-1$, $c=1$.

6. Найти все значения параметров a и b, при которых найдется хотя бы одно c и при которых система уравнений имеет бесчисленное множество решений:

1) $\begin{matrix} 2x+by=ac^2+c \\ bx+2y=c-1, \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x-by+ac^2+c \\ bx+2y=c-1, \end{matrix}$

3) $\begin{matrix} 2x+by=c^2 \\ bx+2y=ac-1, \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} bx+y=ac^2 \\ x+by=ac+1. \end{matrix}$

Ответы: 1) $a\in[-1;\ 0[$, $b=\pm 2$;

2) $-(3\sqrt{2}+4)/8\leqslant a\leqslant(3\sqrt{2}-4)/8$, $b=\pm\sqrt{2}$;

3) $a\in(-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty)$, $b=\pm 2$;

4) $a\in(-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty[$, $b=\pm 1$.

7. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} bx+2y=b+2 \\ 2bx+(b+1)y=2b+4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $b\in \mathrm{R}\backslash\{0\}$.

8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+(9a^2-2)y=6a-2 \\ x+y=1 \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

Ответ: $a=-2/3$.

9. Найти все значения параметра c, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} -4x+cy=1+c \\ (6+c)x+2y=3+c \end{cases}$ не имеет ни одного решения.

Ответ: $c=-4$.

10. Найти все значения параметра d, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} (2-d)x+d^2y=3d^2+2 \\ (2d-1)x+dy=d-1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $d\in \mathrm{R}\backslash\{-1\}$.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Примеры с решениями:

Пример 1. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-y+1=0 \\ x^2-y^2+(a+1)x+(a-1)y+a=0 \end{cases}$$

имеет решение.

$\triangle$ Левую часть второго уравнения системы можно разложить на множители, линейные относительно x и y. Собирая слагаемые, содержащие a, получим

$$(x^2-y^2+x-y)+a(x+y+1)=0 \Rightarrow (x-y)(x+y+1)+a(x+y+1) = \\ =0 \Rightarrow (x+y+1)(x-y+a)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ x-y+a=0, \end{array}\right.$$

тогда данную систему можно представить как совокупность двух систем

$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ x+y+1=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=x^2+1 \\ x-y+a=0. \end{cases}$$

Геометрическая иллюстрация систем представлена на рис. 32.

Видно, что прямая $x+y=1$ и парабола не пересекаются, т. е. система не имеет решений. Это же показывает и решение системы. Исключая переменную y из первой системы, получаем уравнение $x^2+x+2=0$, которое решений не имеет.

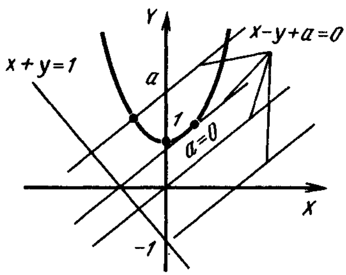


Рис. 32

При увеличении параметра a вторая прямая смещается вверх, при уменьшении a — вниз. Решение возможно, когда прямая $x-y+a=0$ касается или пересекает параболу. Решая последнюю систему заменой переменной, получаем уравнение $x^2-x+1-a=0$, которое имеет решение если $D=4a-3\geqslant 0$, т. е. при

$a \geqslant 3/4$. Очевидно, что при $a=3/4$ прямая $y=x+3/4$ касается параболы $y=x^2+1$, а при $a>3/4$ пересекает ее в двух точках, при $a<3/4$ эти линии общих точек не имеют. ▲

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x-a=2\sqrt{y} \\ y^2-x^2+2x+8y+15=0 \end{cases}$$

имеет решение.

△ Упростим второе уравнение системы, разложив его левую часть на множители $(y^2+8y+4)-(x^2-2x+1)=0 \Rightarrow (y+4)^2-(x-1)^2=0 \Rightarrow (y+4+x-1)(y+4-x+1)=0$.

Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} y-x+5=0 \\ y+x+3=0 \end{array}\right.$$

и на плоскости xy задает две прямые (рис. 33).

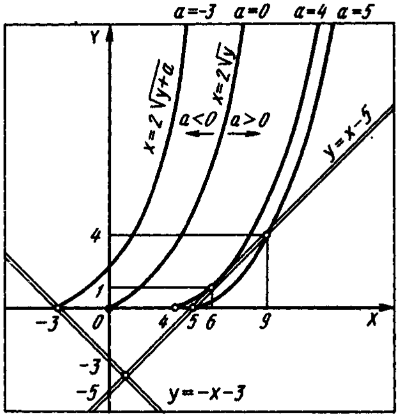


Рис. 33

Уравнению $x=a+2\sqrt{y}$ в зависимости от значения a соответствует семейство кривых в плоскости xy, представляющих правую ветвь параболы. Вершина параболы имеет координаты $x=a$, $y=0$. При увеличении a парабола смещается вправо, при уменьшении a влево. При $a=-3$ вершина параболы попадает на прямую $y=-x-3$, а при всех $a<-3$ парабола пересекает эту прямую. При движении параболы вправо надо найти значение параметра a_k, при котором парабола будет касаться прямой $y=x-5$. При $a>a_k$ правая ветвь параболы имеет с прямой $y=x-5$ одну или даже две общие точки.

Таким образом, исследование данной системы уравнений можно заменить исследованием двух более простых систем

$$\begin{cases} x=a+2\sqrt{y} \\ y-x+5=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a+2\sqrt{y} \\ y+x+3=0. \end{cases}$$

Исследуем на совместимость первую систему.

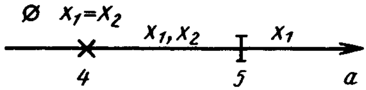
$$\begin{cases} x=a+2\sqrt{y} \\ y-x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=2\sqrt{y} \\ y=x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-5}=x-a \\ y=x-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-5)=(x-a)^2 \\ x\geqslant a \\ y=x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2(a+2)x+a^2+20=0 \\ x\geqslant a \\ y=x-5. \end{cases}$$

Корни первого уравнения $x_{1,2}=(a+2)\pm\sqrt{(a+2)^2-a^2-20}=$ $=(a+2)\pm 2\sqrt{a-4}$. Найдем теперь при каких a выполняется условие $x\geqslant a$, для чего надо решить неравенства $(a+2)\pm$ $\pm 2\sqrt{a-4}\geqslant a$,

$$\begin{cases} 2\sqrt{a-4}\geqslant -2 \\ -2\sqrt{a-4}\geqslant -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a-4}\geqslant -1 \\ \sqrt{a-4}\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geqslant 4 \\ a\geqslant 4 \\ a\leqslant 5. \end{cases}$$

Покажем расположение корней $x_1=(a+2)+2\sqrt{a-4}$ и $x^2=(a+2)-2\sqrt{a-4}$ на числовой оси a:



Т. е. при $a=4$ корни совпадают, при $a\in]4;\ 5]$ оба корня x_1 и x_2, при $a>5$ один корень x_1.

Исследуем систему

$$\begin{cases} x=a+2\sqrt{y} \\ y+x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=2\sqrt{y} \\ y=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{-x-3}=x-a \\ y=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

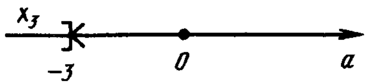
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-x-3)=(x-a)^2 \\ x\geqslant a \\ y=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2(a-2)x+a^2+12 \\ x\geqslant a \\ y=-x-3 \end{cases}$$

Корни первого уравнения $x_{3,4}=(a-2)\pm 2\sqrt{-a-2}$,

$$(a-2)\pm\sqrt{-a-2}\geqslant a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-a-2}\geqslant 1 \\ \sqrt{-a-2}\leqslant -1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{cases} a\leqslant -2 \\ -a-2\geqslant 1 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leqslant -3 \\ \varnothing \end{array}\right.$$

На числовой оси a



Ответ: система уравнений имеет решение при

$$a \in]-\infty;\ -3] \cup [4;\ +\infty[. \ \blacktriangle$$

Замечание. Приведенное решение фактически является исследованием системы, что позволяет дать более широкий ответ, который сведен в таблицу.

Параметр	Решение	Количество решений
$a \in]-\infty;\ -3]$	$x_3 = (a-2) + 2\sqrt{-a-2}$ $y_3 = -x_3 - 3$	1
$a \in]-3;\ 4[$	решений нет	—
$a = 4$	$x_1 = x_2 = 6$ $y = 1$	1
$a \in]4;\ 5]$	$x_{1,2} = (a+2) \pm 2\sqrt{a-4}$ $y_{1,2} = x_{1,5} - 5$	2
$a \in]5;\ +\infty\ [$	$x_1 = a + 2 + 2\sqrt{a-4}$ $y_1 = x_1 - 5$	1

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 2x \\ x^2 + y_2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$$ имеет решение.

$\triangle$ Группируя слагаемые, содержащие x и y, перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} y - 1 = -(x-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-a)^2 = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Первое уравнение системы задает на плоскости xy параболу с вершиной в точке $A(1:1)$, второе — окружность радиуса 1 с центром в точке $O_1(1;\ a)$ (рис. 34). При увеличении параметра a окружность смещается вверх, при уменьшении a — вниз. Сразу видно, что окружность и парабола не имеют общих точек, если $a > 2$.

Наименьшему значению a, при котором система совместима, соответствует окружность, касающаяся параболы снизу.

При сложении уравнений системы (1) получается уравнение, содержащее только неизвестное y:

$$y^2 - (2a+1)y + a^2 = 0. \qquad (2)$$

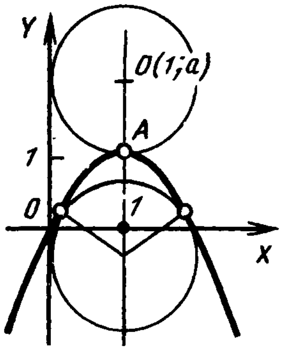


Рис. 34

Важно отметить, что из первого уравнения системы (1) следует ограничение $y \leqslant 1$.

Теперь задачу переформулируем так: найти все значения параметра a, при которых уравнение (2) имеет решение, удовлетворяющее условию $y \leqslant 1$. Найдем дискриминант уравнения $D=(2a+1)^2-4a^2=4a+1$. При $a \geqslant \frac{1}{4}$ существуют корни $y_{1,2}=(2a+1 \pm \sqrt{4a+1})/2$ уравнения. Найдем a, при которых меньший корень не превышает единицы: $(2a+1-\sqrt{4a+1}) \times \times 2 \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{4a+1} \geqslant 2a-1$. Если $2a-1<0$, т. е. при $a< < \frac{1}{2}$, неравенство очевидно. С учетом $a \geqslant -1/4$ получаем промежуток $-\frac{1}{4} \leqslant a < \frac{1}{2}$ (3).

Если же $2a-1 \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant \frac{1}{2}$ то, возведя в квадрат, перейдем к равносильному неравенству $4a+1 \geqslant (2a-1)^2 \Rightarrow a^2-2a \leqslant 0 \Rightarrow \Rightarrow 0 \leqslant a \leqslant 2$ с учетом $a \leqslant 1/2$, получаем $1/2 \leqslant a \leqslant 2$ (4). Объединяя промежутки (3) и (4), получаем решение задачи $1/2 \leqslant a \leqslant 2$. ▲

Пример 4. Определить при каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$$ имеет в точности два решения.

△ Первое уравнение системы на графике — окружность с центром в начале координат. Радиус изменяется при изменении величины a.

Преобразуя второе уравнение, получим $(x+y)=\sqrt{14}$, при $x+y>0$. Т. е. $y>-x$, имеем $y=-x+\sqrt{14}$ (рис. 35); при $x+y<0$, т. е. при $y<-x$ имеем $y=-x-\sqrt{14}$. Система будет

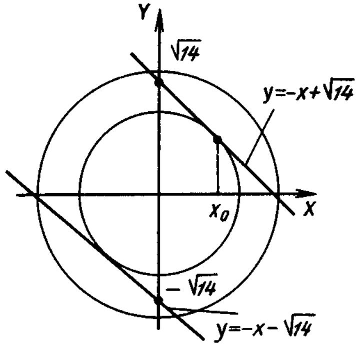


Рис. 35

иметь ровно два решения, если окружность будет касаться обеих линий. Определим абсциссу x_0 точки касания. Запишем первое уравнение в явном виде $y=\pm\sqrt{2(1+a)-x^2}$ и возьмем производную от этой функции

$$y'=\frac{-2x}{2\sqrt{2(1+a)-x^2}};\text{ и, т. к.}$$

$$y'(x_0)=-1,\text{ то }\frac{-x_0}{\sqrt{2(1+a)-x_0^2}}=-1\text{ или}$$

$x_0=\sqrt{2(1+a)-x_0^2}$, $x_0^2=1+a$ и $x_0=\sqrt{1+a}$.

Вычислим a, используя условие, что точка касания общая для линий $y=\sqrt{2(1+a)-x^2}$ и $y=-x+\sqrt{14}$,

$-x+\sqrt{14}=\sqrt{2(1+a)-x^2}$ при $x=x_0=\sqrt{1+a}-\sqrt{1+a}+\sqrt{14}=$

$=\sqrt{2(1+a)-(1+a)}\Rightarrow\sqrt{1+a}+\sqrt{14}=\sqrt{1+a}$,

$\sqrt{1+a}=\frac{\sqrt{14}}{2}\qquad 1+a=\frac{14}{4}\Rightarrow a=\frac{5}{2}$.

Ответ: $a=\frac{5}{2}$. ▲

Пример 5. Найти все a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющим условиям:

$$\begin{cases} x^2+(y+3)^2<4 \\ y=2ax^2. \end{cases}$$

△ Очевидно, что система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда имеет хотя бы одно решение неравенство

$$x^2+(2ax^2+3)^2<4 \qquad (1)$$

полученное подстановкой в данное неравенство $2ax^2$ вместо y.

Обозначим через $f(t)$ функцию $t+(2at+3)^2$. Неравенство (1) будет иметь решение только в том случае, когда наименьшее значение функции $f(t)$ на множестве $t \geqslant 0$ равно 9, что больше 4. Следовательно, $a=4$ не отвечает условию задачи.

Если $a \neq 0$, то график функции $f(t)=t+(2at+3)^2=4a^2t^2+$ $+(12a+1)t+9$ представляет параболу, ветви которой направлены вверх, и абсцисса вершины равна $t_0=-\dfrac{12a+1}{8a^2}$; если $t_0 \leqslant 0$, то $12a+1 \geqslant 0$, $a \neq 0$, то на множестве $t \geqslant 0$ функция $f(t)$ монотонно возрастает и, значит, ее наименьшее значение на этом множестве равно $f(0)=9>4$. Таким образом, все искомые значения параметра a лежат в области $12a+1<0$. В этом случае точка t_0 лежит в области $t \geqslant 0$ и наименьшее значение $f(t)$ равно

$$f(t_0)=4a^2\left(-\frac{12a+1}{8a^2}\right)^2-\frac{(12+1)^2}{8a^2}+9=-\frac{24a+1}{16a^2}.$$

Итак, все искомые значения параметра a являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} 12a+1<0 \\ -\dfrac{24a+1}{16a^2}<4. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} 12a+1<0 \\ 64a^2+24+1>0 \end{cases}$$

и решением первого неравенства являются все $a<-\dfrac{1}{12}$.

Квадратный трехчлен имеет корни

$$a_1=\frac{-3-\sqrt{15}}{16} \text{ и } a_2=\frac{-3+\sqrt{15}}{16},$$

а значит решением второго неравенства являются все $a<a_1$ и $a_2<a$. Так как $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}<-\dfrac{1}{2}$, а $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{16}>-\dfrac{1}{12}$, то множество решений системы (2), а значит и множество значений параметра a, удовлетворяющих условию задачи, есть промежуток

$$a<\frac{-3-\sqrt{5}}{16}.$$

Ответ: $a<\dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x+1)+\log_2 y=2 \\ y=a-4x \end{cases}$$

имеет решение.

△ После потенцирования и преобразования системы имеем

$$\begin{cases} (x+1)y=4 \\ y=a-4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4}{x+1} \\ y=a-4x \end{cases} \text{ при } x>-1,\ y>0.$$

Графическая иллюстрация системы показана на рис. 36. Видно, что пересечения линий можно ожидать при увеличении значения a. При $a=4$ прямая $y=a-4x$ касается гиперболы, а при $a>4$ пересекает ее в двух точках.

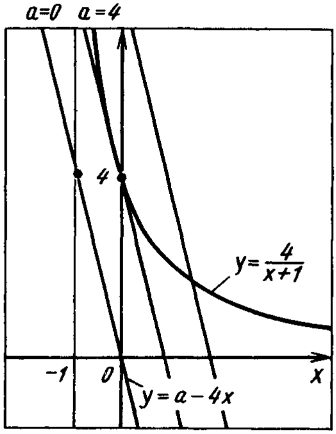


Рис. 36

Для аналитического решения воспользуемся заменой переменных и получим уравнение

$$(x+1)(a-4x)=4 \Rightarrow 4x^2-(a-4)x-a+4=0.$$

Надо искать значение a, при которых уравнение имеет корни на $x>-1$; необходимые и достаточные условия этого см. утверждение 2 на с. 00, т. е.

$$\begin{cases} D\geqslant 0 \\ -\dfrac{b}{2a}>1 \\ f(-1)>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} D=(a-4)^2-16(4-a)\geqslant 0 \\ \dfrac{a-4}{8}>-1 \\ 4\cdot 1-(a-4)(-1)-a+4>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+16a-48\geqslant 0 \\ a>-4 \\ a\in \mathrm{R}. \end{cases}$$

В неравенстве $a^2+16a-48\geqslant 0$ трехчлен имеет корни $a=-12$ и $a=4$, тогда его решением является $a\in\,]-\infty;\ -12]\cup$ $\cup\,[4;\ +\infty[$. с учетом двух других условий получаем решение системы $a\in[4;\ +\infty]$. Очевидно, что при этих значениях a $x>-1$, y будет больше нуля.

Ответ: $a\in[4;\ +\infty]$. ▲

Пример 7. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \lg(1-y)=\lg x \\ y+a+3=\frac{1}{2}(x+a)^2 \end{cases}$$ имеет решение.

△ Вводим ограничения $\begin{cases} x>0 \\ y<1 \end{cases}$ по условию системы, потенцируя первое уравнение, получим систему

$$\begin{cases} 1-y=x \\ y+a+3=\frac{1}{2}(x+a)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y=x-1 \\ y=-a-3+\frac{1}{2}(x+a)^2, \end{cases}$$

после сложения получим уравнение $\frac{1}{2}(x+a)^2+x-a-4=0$ или $x^2+2ax+a^2+2x-2a-8=0 \Rightarrow x^2+2(a+1)x+a^2-2a-$ $-8=0$.

Теперь для ответа на вопрос задачи надо решить систему

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ x^2+2(a+1)x+a^2-2a-8=0 \\ x>0 \\ y<1. \end{cases}$$

Из первого уравнения видно, что $y<1$ для всех $x>0$. При указанных ограничениях второе уравнение системы может иметь: положительные корни, корни разного знака и один корень нулевой, другой положительный.

Для того чтобы уравнение имело положительные корни, необходимо и достаточно иметь

$$\begin{cases} D\geqslant 0 \\ -\frac{p}{2}>0 \\ q>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=(a+1)^2-a^2+2a+8\geqslant 0 & (1) \\ -\frac{p}{2}=-(a+1)>0 & (2) \\ a^2-2a-8>0 & (3) \end{cases}$$

Решим каждое неравенство отдельно

1) $a^2+2a+1-a^2+2a+8\geqslant 0 \Rightarrow a\geqslant -9/4$,

2) $a+1<0 \Rightarrow a<-1$,

3) корни трехчлена $a_1=-2$ и $a_2=4$, тогда решениями неравенства будут $a<-2$ или $a>4$. Решением системы будет промежуток $-9/4\leqslant a<-2$.

Для того чтобы корни уравнения имели разный знак, необходимо и достаточно иметь $q<0 \Rightarrow a^2-2a-8<0 \Rightarrow -2<a<4.$,

Один корень нулевой, а другой положительный при $q=0$, проверкой убеждаемся, что при $a=-2$ $x_1=0$ и $x_2=2$.

Объединяя полученные решения, запишем ответ.

Ответ: $-9/4 \leqslant a < 4$. ▲

Пример 8. Найти все значения параметра k, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = k(x+2) \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

имеет решение.

△ Вычтем второе уравнение из первого и получим

$\sqrt{x} = k(x+2) + \frac{1}{2}$ и после замены $\sqrt{x} = t \geqslant 0$ получаем

$kt^2 - t + 2k + \frac{1}{2} = 0.$

Корни этого уравнения будут удовлетворять исходной системе, если они оба положительны или имеют разный знак, один из них нулевой, при $D=0$ корень положительный и при $k=0$ корень положительный.

Найдем k, при которых оба корня положительны:

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ -\frac{p}{2} > 0 \\ q > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} D = 1 - 4k\left(2k + \frac{1}{2}\right) \geqslant 0 \\ \frac{1}{2k} > 0 \\ \dfrac{2k + \frac{1}{2}}{k} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8k^2 + 2k - 1 \leqslant 0 \\ k > 0 \\ k < -\frac{1}{4} \text{ и } k > 0. \end{cases}$$

Решением верхнего неравенства являются все $k \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$.

Тогда решение системы $0 < k \leqslant \frac{1}{4}$.

Найдем k, при которых корни имеют разный знак:

$$\begin{cases} D > 0 \\ q < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} < k < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{4} < k < 0.$$

С учетом того, что исходная система имеет решение $x=0$, $y=0$ при $k=0$ получаем

Ответ: $-\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{1}{4}$; ▲

Пример 9. Найти все значения, при которых система

$$\begin{cases} \log_2 y - \log_2 (a-x) = 2 \\ y = \frac{x+4}{x} \end{cases}$$

1) имеет единственное решение; 2) имеет два решения; 3) имеет решение; 4) не имеет решения.

Потенцируя, получим систему $\begin{cases} \dfrac{y}{a-x}=4 \\ y=\dfrac{x+4}{x} \end{cases}$ или $\begin{cases} y=4a-4x \\ y=\dfrac{x+4}{x}, \end{cases}$ (*)

при ограничениях по исходной системе

$\begin{cases} y>0 \\ a-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>0 \\ x<a \end{cases}$ при $x\neq0$; $y>0$ при $\dfrac{x+4}{x}>0$, откуда $x<-4$ и $0<x$ и т. к. $x<a$, то $a<-4$ и $a>0$. Решая систему (*) подстановкой, получим

$$\begin{cases} 4x^2+(1-4a)x+4=0 \\ x<a \\ a<-4,\ a>0. \end{cases}$$

1) Находим единственное решение на $x<a$. Оно будет, если точка a располагается между корнями уравнения $4x^2+(1-4a)\times\times x+4=0$, т. е. $f(a)=4a^2+(1-4a)a+4<0 \Rightarrow a<-4$. Кроме того, при $D=0$ будет единственное решение. $D=(1-4a)^2-64=0$, $a=9/4$ и $a=-7/4$. Проверим, попадет ли корень при этих a на множество $x<a$. При $a=9/4$ $4x^2-8x+4=0$, откуда $x==1\in x<a$. При $a=-7/4$ $4x^2+8x+4=0$, $x=-1\notin x<a$. Тогда единственное решение при $a\in(-\infty;\ -4)\cup\{9/4\}$.

2) Находим два решения на $x<a$. Необходимым и достаточным условием этого будет:

$$\begin{cases} D>0 \\ f(a)>0 \\ -p/2<a \end{cases} \text{ или } \left[\begin{array}{l} a<-7/4,\ a>9/4 \\ a>-4 \\ -\dfrac{1-4a}{4}<a \end{array}\right. \Rightarrow a>9/4.$$

Два решения будут при $a>9/4$.

3) Чтобы ответить на этот вопрос, нужно проделать предыдущие вычисления и объединить ответ, т. е. $a\in(-\infty;\ -4)\cup\cup[9/4;\ +\infty)$.

4) Чтобы ответить на этот вопрос, нужно ответить на вопрос 3 и все, что не попало в этот ответ, использовать для данного ответа, т. е. $a\in[-4;\ 9/4)$.

Решение хорошо иллюстрируется графически. Для этого постройте график $y=\dfrac{x+4}{x}$ на $x<-4$ и $x>0$ и семейство параллельных линий $y=-4x+4a$.

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy=a^2 \\ \lg^2x+\lg^2y=\dfrac{5}{2}\lg^2a^2. \end{cases}$$

△ Допустимые значения неизвестных и параметра $x>0$, $y>0$ и $a\neq 0$. После логарифмирования первого уравнения получаем $\lg x+\lg y=\lg a^2$. Обозначим $\lg x=u$, $\lg y=v$. Тогда относительно u и v система примет вид

$$\begin{cases} u+v=\lg a^2 \\ u^2+v^2=\frac{5}{2}\lg^2 a^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $v=\lg a^2-u$ и подставляем его во второе. Получаем $2u^2-2\lg a^2\cdot u-\frac{3}{2}\lg^2 a^2=0$.

Откуда следует, что

$$u_{1,2}=\frac{\lg a^2\pm 2\lg a^2}{2};\qquad u_1=\frac{3}{2}\lg a^2,\qquad u_2=-\frac{1}{2}\lg a^2;$$

$$v_1=-\frac{1}{2}\lg a^2,\qquad v_2=\frac{3}{2}\lg a^2.$$

Таким образом, решение данной системы приводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} \lg x=\frac{3}{2}\lg a^2 \\ \lg y=-\frac{1}{2}\lg a^2, \end{cases}\qquad \begin{cases} \lg x=-\frac{1}{2}\lg a^2 \\ \lg y=\frac{3}{2}\lg a^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=|a|^3 \\ y=\frac{1}{|a|}, \end{cases}\qquad \begin{cases} x=\frac{1}{|a|} \\ y=|a|^3. \end{cases}$$

При проверке полученные решения удовлетворяют условию исходной системы. ▲

Пример 11. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 4+y=\sqrt{x} \\ a-y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+a\right)^2: \end{cases}$$

1) имеет единственное решение; 2) имеет два решения; 3) имеет хотя бы одно решение; 4) не имеет решений.

△ Решая систему методом подстановки, получим квадратное уравнение $y^2+2(a+5)y+a^2+6a+16=0$ (*), корни которого должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 4+y\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ a-y\geqslant 0 \end{cases}\quad\text{или}\quad \begin{cases} y\geqslant -4 \\ x\geqslant 0 \\ y<a. \end{cases}$$ Очевидно, что $y\geqslant -4$ при $a\geqslant -4$.

1). Единственное решение уравнения (*) возможно, когда точка $y=-4$ располагается между корнями трехчлена или вершина его параболы лежит на оси y, причем $y\geqslant -4$.

Первое условие выполняется при $f(-4)\leqslant 0$ (см. утверждения о расположении корней стр. 33) $f(-4)=16-8(a+5)+a^2+6a+16\leqslant 0\Rightarrow -2\leqslant a\leqslant 4$. При $a=-2$ и $a=4$ один корень будет равен -4, но второй корень не должен попасть на множество $y>-4$. Проверим уравнение (*) на эти точки. При $a=-2$ $y^2+6y+8=0$, $y_1=4$, $y_2=2\in y>-4$. Значит при $a=-2$ не единственное решение. При $a=4$ $y^2+18y+56=0$, $y_1=-4$, $y_2=-14\notin y>-4$. Значит при $a=4$ — единственное решение.

Вершина параболы располагается на оси при $D=0$. $D=4a+41=0$, $a=-\frac{41}{4}\notin a\geqslant -4$.

Единственное решение будет при $-2-a\leqslant 4$.

2) Два решения возможны, если оба корня трехчлена (*) попадают на множество $y\geqslant -4$. В соответствии с утверждениями о расположении корней (см. стр. 33) это будет, если

$$\begin{cases} D>0 \\ f(-4)\geqslant 0 \\ -p/2>-4 \end{cases} \quad \begin{cases} a>-\frac{41}{4} \\ a\leqslant -2{,}4\leqslant a \\ -(a+5)>-4 \end{cases} \Rightarrow a\leqslant -2 \text{ с учетом } a\geqslant -4,$$

получаем $-4\leqslant a\leqslant -2$, т. е. два решения при $a\in[-4;\ -2]$.

3) Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо объединить ответы первого и второго вопросов, т. е. $a\in[-4:4]$.

4) Нет решения при тех a, которые не задействованы в вопросе 3, т. е. $a\in(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$. ▲

Упражнения

1. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений имеет решение.

1) $\begin{cases} y=(x-1)^2 \\ y-x^2+(1-a)y-(1+a)x-a=0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} y=1-x^2 \\ y^2-x^2+(a+2)y-(a+2)x-2a=0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=2x-x^2 \\ y^2-x^2+(a-1)x-(a+1)y+a=0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} y=1-x^2 \\ y^2-x^2+(1-a)x+(1+a)y+a=0, \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+2x+y=0 \\ y^2-x^2+(a+1)x+(a-1)y-a=0. \end{cases}$

Ответы: 1) $a\geqslant -\frac{5}{4}$, 2) $a\leqslant -\frac{5}{4}$, 3) $a\leqslant \frac{5}{4}$, 4) $a\geqslant \frac{9}{4}$,

5) $a \leqslant \frac{9}{4}$.

2. Исследовать системы:

1) $\begin{cases} x-a=2\sqrt{y} \\ y^2-x^2+4x+8y+12=0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\sqrt{y}=x-a \\ y^2-x^2-2x+6y+8=0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=a+2\sqrt{y} \\ y^2-x^2+2x+10y+24=0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=a+\sqrt{y} \\ y^2-x^2-2x+4y+3=0, \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{y}=x-a \\ y^2-x^2+6y-4x+5=0. \end{cases}$

Ответы: 1) Система имеет решение при $a \in]-\infty;\ -2] \cup [5;\ +\infty[$; при $a \in]-\infty;\ -2]$ $x=(a-2)+2\sqrt{-a-1}$, $y=-x-2$; при $a=5$, $x=7$, $y=1$; при $a \in]5;\ 6]$ $x_{1,2}=(a+2)\pm 2\sqrt{a-5}$, $y_{1,2}=x_{1,2}-6$; при $a \in]6;\ +\infty[$ $x=(a+2)+2\sqrt{a-5}$, $y=x-6$; при $a \in]-2;\ 5[$ решений нет.

2) Система имеет решение при $a \in]-\infty;\ -4] \cup [1;\ +\infty[$; при $a \in]-\infty;\ -4]$ $x=(a-2)+2\sqrt{-a-3}$, $y=-x-4$; $a=1$, $x=3$, $y=1$; при $a \in];\ 1;\ 2]$ $x_{1,2}=(a+2)\pm 2\sqrt{a-1}$, $y_{1,2}=x_{1,2}-2$; при $a \in]2;\ +\infty[$ $x=(a+2)+2\sqrt{a-1}$, $y=x-2$;
при $a \in]-4;\ 1[$ решений нет.

3) Система имеет решение при $a \in]-\infty;-4] \cup [5;\ +\infty[$;
при $a \in]-\infty;\ -4]$ $x=(a-2)+2\sqrt{-a-3}$, $y=-x-4$;
при $a \in]-4;\ 5[$ решений нет; при $a=5$, $x=7$, $y=1$;
при $a \in]5;\ 6[$ $x_{1,2}=(a+2)\pm 2\sqrt{a-5}$, $y_{1,2}=x_{1,2}-6$;
при $a \in]6;\ +\infty[$ $x=(a+2)+2\sqrt{a-5}$, $y=x-6$.

4) Система имеет решение при $a \in]-\infty;\ -3] \cup \left[\frac{3}{4};\ +\infty\right[$;
при $a \in]-\infty;\ -3]$ $x=\frac{(2a-1)\pm\sqrt{-4a-11}}{2}$, $y=-x-3$;
при $a \in]-3;\ \frac{3}{4}[$ решений нет; при $a=\frac{3}{4}$ $x=1{,}25$, $y=0{,}25$;

при $a \in \left]\frac{3}{4};\ 1\right]$ $x_{1,2}=\frac{(2a+1)\pm\sqrt{4a-3}}{2}$, $y_{1,2}=x_{1,2}-1$;

при $a \in]1;\ +\infty[$ $x=\frac{2a+1+\sqrt{4a-3}}{2}$, $y=x-1$.

5) Система имеет решение при $a \in]-\infty;\ -5] \cup \left[\frac{3}{4};\ +\infty\right[$;

при $a \in]-\infty;\ -5]$ $x=\frac{(2a-1)+\sqrt{-4a-19}}{2}$, $y=-x-5$;

при $a \in \left]-5;\ \frac{3}{4}\right[$ решений нет; при $a=3/4$, $x=1{,}25$, $y=0{,}25$;

при $a \in \left]\frac{3}{4};\ 1\right]$ $x_{1,2}=\frac{(2a+1)\pm\sqrt{4a-3}}{2}$, $y_{1,2}=x_{1,2}-1$;

при $a \in]1;\ +\infty[$ $x=\frac{(2a+1)+\sqrt{4a-3}}{2}$, $y=x-1$.

3. Найти все значения параметра a, при которых системы имеют решение.

1) $\begin{cases} y=x^2+2x+2 \\ x^2+2x^2+y^2-2ay+a^2=0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=x^2-2x+a \\ x^2-2x+y^2=0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y=2x+a \\ x^2+y^2=2x, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=y^2-2y+a \\ x^2+y^2+1=2x+2y, \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=y^2-2y \\ y^2+x^2+a^2=2y+2px. \end{cases}$

Ответы: 1) $a \in \left[0;\ \frac{9}{4}\right]$; 2) $a \in \left[-\frac{1}{4};\ 2\right]$; 3) $a \in \left[-2;\ \frac{1}{4}\right]$; 4) $a \in [0{,}75;\ 3]$; 5) $a \in [-2;\ 0{,}25]$.

4. Определить, при каких a система уравнений имеет ровно два решения

1) $\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ xy=a-\frac{1}{2}, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-y)^2=\frac{2}{3} \\ xy=5a-\frac{1}{3}, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=6a-14 \\ x^2+y^2=3(2+a). \end{cases}$

Ответы: 1) $a=\frac{1}{4}$; 2) $a=\frac{1}{30}$; 3) $a=\frac{7}{3}$.

5. Найти все a, при каждом из которых имеется хотя бы одна пара чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\begin{cases} x^2+(y-2)^2<1 \\ y=ax^2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2>1 \\ y=ax^2+1, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-(y-a)^2>1 \\ y=x^2+1 \end{cases}$

Ответы: 1) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}<a$; 2) $\frac{-1-\sqrt{2}}{a}<a<\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$; 3) $a>\frac{7}{4}$.

6. Решить системы

1) $\begin{cases} \log_a x - \log_{a^2} y = m \\ \log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (\log_a x + \log_a y - 2)\log_{\frac{4}{9}} a = -1 \\ x + y - 5a = 0, \end{cases}$

$a > \frac{7}{4}$.

Ответы: 1) при $a > 0$, $a \neq 1$ $\left(a^{2(2m-3n)};\ a^{6(m-2n)}\right)$

2) при $a > 0$, $a \neq 1$ $(a/2;\ 9a/2)$; $(9a/2;\ a/2)$.

7. Найти все значения параметра a, при которых системы уравнений: 1—7 имеют единственное решение; 8—14 — два решения; 15—21 — хотя бы одно решение.

1) $\begin{cases} \lg(1-y) = \lg(1-x) \\ y + a + 2 = \frac{1}{2}(a-x)^2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg(y-1) = \lg(1-x) \\ 4 + a - y = \frac{1}{2}(x-a)^2, \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2(1-2y) = 1 + \log_2 x \\ y + a + \frac{3}{2} = (x+a)^2, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \lg(4+y) = \lg x \\ a - y = \frac{1}{2}(x+a)^2, \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_2(x+1) + \log_2 y = 2 \\ y = a - 4x, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \log_2(x+1) + \log_2 y = 2 \\ 4y = a - x, \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2(1-x) + \log_2 y = 2 \\ y = a + 4x, \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \log_2 x + \log(1-y) = 2 \\ y = a + 4x, \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log(2-x) + \log_2(1-y) = 2 \\ 4y = a - x, \end{cases}$

10) $\begin{cases} \log_2(1-x) + \log_2(1-y) = 2 \\ y = a - x \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_2(y + a - 2) = \log_2(a + x) - 1 \\ y = 2\sqrt{1-x}, \end{cases}$

12) $\begin{cases} 1 + \log_2(a - 2 - y) = \log_2(a - x) \\ y + 2\sqrt{x} = 1, \end{cases}$

13) $\begin{cases} 1 + \log_2(y + a - 11) = \log_2(a + x) \\ y = 4\sqrt{1-x}, \end{cases}$

14) $\begin{cases} \log_2(y+1) = \log_2(a - 4x) \\ y = \frac{4}{x}, \end{cases}$ 15) $\begin{cases} \log_2(a - 4y) = \log_2(x+1) \\ y = \frac{4}{x}, \end{cases}$

16) $\begin{cases} xy + 4 = 0 \\ \log_2(y+1) = \log_2(4x + a), \end{cases}$

17) $\begin{cases} \log_2(1-y) - \log_2(a-x) = 2 \\ xy + 4 = 0, \end{cases}$

18) $\begin{cases} \log_2(x+1)-\log_2(a-y)=2 \\ -xy+4=0, \end{cases}$

19) $\begin{cases} \log_2 y-\log_2(a-x)=2 \\ y=\dfrac{x+4}{x}, \end{cases}$

20) $\begin{cases} 1+\log_2(y+a-12)=\log_2(a-x) \\ y=4\sqrt{x}, \end{cases}$

21) $\begin{cases} y=\sqrt{(x-a)^2-9} \\ 4y=5x. \end{cases}$

Ответы: 1) $[-5/4;\ -1)\cup(-1;\ 5)$; 2) $[-5/4;\ -1]$;
3) $\left[-17/8;\ \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$; 4) $[-9/4;\ -2)$; 5) $[4;\ +\infty)$;
6) $[7;\ +\infty)$;
7) $(-\infty;\ -7]$; 8) $(-\infty;\ -7]$;
9) $]-\infty;\ -2]$; 10) $(-\infty;\ -2]$;
11) $(-\infty;\ 5]$ 12) $(-\infty;\ 6]$;
13) $(-\infty;\ 3]$; 14) $a\in(-\infty;\ -16)\cup[9;\ +\infty)$;
15) $a\in(-\infty;\ -16)\cup[9;\ +\infty)$; 16) $a\in(-\infty;\ -16)\cup[9;\ +\infty)$;
17) $a\in(-\infty;\ -16)\cup(12;\ +\infty)$;
18) $a\in(-\infty;\ -4)\cup[9/4;\ +\infty)$;
19) $a\in(-\infty;\ -4)\cup[9/4;\ +\infty)$; 20) $(4;\ 24]$;
21) $\left(-\infty;\ -\dfrac{9}{5}\right]\cup[3;\ +\infty)$.

8. Найти все значения параметра k, при которых система уравнений имеет решение.

1) $\begin{cases} 2y=k(x+2)+1 \\ y=\sqrt{x}, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=2+k(3-x) \\ y=4\sqrt{1-x}, \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=2+k(x+2) \\ y=4\sqrt{x}, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=2\sqrt{x-2} \\ y=kx+1, \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2y-1=k(3-x) \\ y=4\sqrt{1-x}. \end{cases}$

Ответы: 1) $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant 0$; 2) $-1\leqslant k\leqslant 1$; 3) $-1\leqslant k\leqslant 1$;
4) $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant \frac{1}{2}$; 5) $-\frac{1}{4}\leqslant k\leqslant 1$.

9. При каких k система уравнений

$$\begin{cases} y=kx-1 \\ y=2\sqrt{x-2}. \end{cases}$$

а) не имеет решения; б) имеет единственное решение; в) имеет два решения?

Ответы: а) $a<1$ б) $a=1$, $a>\frac{1}{2}$, в) $\frac{1}{2}<a<1$.

10. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \log_b x+\log_b y=2,\ b>0,\ b\neq 1. \end{cases}$$

Ответ: Если $a^2-2b^2\geqslant 0$, то $x_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}\right)$, $y_1=\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}$ и $x_2=y_1$, $y_2=x_1$.

11. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет решения? Найти эти решения.

Ответ: $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$; $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{2a-1}}{2}$, $y_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{2a-1}}{2}$;

$$x_3=x_2,\ y_3=y_2,\ x_4=-x_1,\ y_4=y_1,\ x_5=-x_1,$$
$$y_5=-y_1,\ x_6=-x_2,\ y_6=-y_2,\ x_7=x_2,\ y_7=-y_2,$$
$$x_8=x_1,\ y_8=-y_1.$$

12. Решить систему

$$\begin{cases} \log_y x+\log_x y=5/2 \\ x+y=a+a^2 \end{cases}$$

и исследовать решение в зависимости от a,

Ответ: $a>0$, $a\neq 1$, $x=a$, $y=a^2$ и $x=a^2$, $y=a$.
Если $a<-1$, но $a\neq -2$, то $x=-(a+1)$, $y=(a+1)^2$ и $x=(a+1)^2$ $y=-(a+1)$. Если $-1\leqslant a\leqslant 0$, то решения нет.

Примеры с решениями

Пример 12. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0 \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$$

△ Решим сначала первое уравнение системы. Для этого освободимся от знака абсолютной величины, используя метод интервалов. Поскольку $x^2-5x+4=0$ при $x=1$ и $x=4$, то разобьем числовую ось на промежутки $x\leqslant 0$, $0<x\leqslant 1$, $1<x\leqslant 4$, $4<x$ и найдем решения первого уравнения системы на каждом из этих промежутков.

1) Пусть $x\leqslant 0$, тогда $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4$, $|x|=-x$, и первое уравнение системы запишется в виде $-18x^2-10x+8=0$. Это уравнение имеет корни $x_1=-1$, $x_2=4/9$. В рассматриваемый

промежуток входит только $x_1=-1$, т. е. -1 — корень первого уравнения.

2) Пусть $0<x\leqslant 1$, тогда $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4$, $|x|=x$, и первое уравнение системы запишется в виде $2x^2-10x+8=0$. Это уравнение имеет корни $x_3=1$ и $x_4=4$, из которых в рассматриваемый промежуток входит только $x_3=1$.

3) Пусть $1<x\leqslant 4$, тогда $|x^2-5x+4|=-(x^2-5x+4)$, $|x|=x$ и первое уравнение системы равносильно тождеству $0=0$, т. е. удовлетворяется при любом значении x из промежутка $1<x\leqslant 4$.

4) Пусть $4<x<+\infty$, тогда $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4, |x|=x$, и первое уравнение системы запишется в виде $2x^2-10x+8=0$. Это уравнение имеет корни $x_5=1$, $x_6=4$, ни один из которых не входит в рассматриваемый промежуток.

Собирая вместе все найденные выше решения, получаем, что решениями первого уравнения являются $x=-1$, и все x из промежутка $1\leqslant x\leqslant 4$.

Теперь надо подобрать a второго уравнения так, чтобы один его корень попадал на отрезок $[1;\ 4]$, а второй — не равнялся бы -1, и наоборот, если один корень равен -1, то второй не должен попадать на отрезок $[1;\ 4]$. Возможные варианты расположения корней показаны на рис. 37.

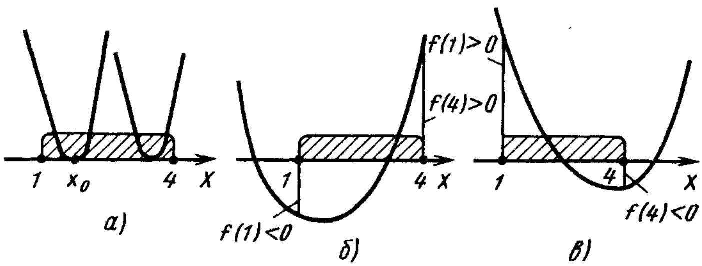


Рис. 37

На рис. 37, a показан случай, когда график трехчлена $f=(x)=x^2-2(a-1)x+a(a-2)$ расположен так, что вершина x_0 параболы находится на оси OX и принадлежит отрезку $[1;\ 4]$, т. е. $1\leqslant x_0\leqslant 4$. А так как $x_0=a-1$, то $1\leqslant a-1\leqslant 4$ или $2\leqslant a\leqslant 5$. При этом дискриминант должен быть равен нулю, т. е. $D=$ $=(a-1)^2-a(a-2)=0$, $a^2-2a+1-a^2+2a=0$, $1=0$. Значит, нет a, при которых $D=0$, а значит и случай a) невозможен.

На рис. 37, $б$ показан случай, когда график трехчлена $f(x)$ таков, что точка $x=1$ расположена между корнями трехчлена, а точка $x=4$ — правее обоих корней. Этот случай реализуется, если:

$$\begin{cases} f(1)<0 \\ f(4)\geqslant 0, \end{cases} \begin{cases} f(1)=1-2(a-1)\cdot 1+a^2-2a\leqslant 0 \\ f(4)=16-2(a-1)\cdot 4+a^2-2a\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4a+3\leqslant 0 \\ a^2-10a+24\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow 1\leqslant a<3.$$

Теперь надо проверить, не попадает ли меньший корень на $x=-1$, при каком-либо значении $a\in[1;\ 3]$. Пусть $x=-1$, тогда имеем $1+2(a-1)+a^2-2a=0\Leftrightarrow a^2=1\quad a=\pm 1$, т. е. при $a=1$ второе уравнение имеет два корня, на множестве решений первого, что не удовлетворяет системе. Значит $1<a<3$. Но и $a=-1$ удовлетворяет условию задачи.

На рис. 37, *в* показан случай, когда график трехчлена $f(x)$ расположен так, что точка $x=1$ находится левее корней трехчлена, а точка $x=4$ между корнями. Этот случай реализуется, если:

$$\begin{cases} f(1)\geqslant 0 \\ f(4)<0, \end{cases} \begin{cases} f(1)=1-2(a-1)1+a^2-2a\geqslant 0 \\ f(4)=16-2(a-1)4+a^2-2a<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4a+3\geqslant 0 \\ a^2-10a+24<0 \end{cases} \Rightarrow 4<a\leqslant 6.$$

Следует заметить, что строгие неравенства $f(1)>0$ и $f(4)<0$ использовались потому, что при нестрогих неравенствах дискриминант должен быть нулем, а ранее показано, что ни при каких a этого быть не может.

Ответ: $a=-1,\ 1<a<3,\ 4<a\leqslant 6$. ▲

Пример 13. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$$

△ Решим сначала второе уравнение. Видно, что среди $|a|>2$ нет ни одного значения a, при котором уравнение $x^2+a^2=4$ имеет решение. При $a=2$, а также при $a=-2$ это уравнение имеет решение $x=0$, оно не удовлетворяет неравенству. Значит $a=2$ и $a=-2$ также не удовлетворяют условию задачи. Итак, если есть a, удовлетворяющие условию задачи, то они таковы, что $|a|<2$ и для любого такого a уравнение $x^2+a^2=4$ имеет два корня $x_1=-\sqrt{4-a^2}$ и $x_2=\sqrt{4-a^2}$.

Рассмотрим теперь квадратный трехчлен $f(x)=x^2+(5a+2)\times\times x+4a^2+2a$. Он имеет дискриминант $D=(3a+2)^2$. Если $a=-2/3$, то $D=0$ и $f(x)>0$, значит $a=-2/3$ не удовлетворяют условию задачи. Если $a\neq-2/3$, то $D>0$ и трехчлен $f(x)$ имеет два различных корня и принимает отрицательные значения при x, расположенных между корнями.

Итак, если есть число a, удовлетворяющее условию задачи, то оно таково, что $|a|<2$, $a\neq -2/3$ и хотя бы одно из чисел x_1 и x_2 лежит между корнями трехчлена $f(x)$, корни которого записываются в виде

$$x_3=\frac{-(5a+2)-|3a+2|}{2}, \qquad x_4=\frac{-(5a+2)+|3a+2|}{2},$$

причем $x_3<x_4$.

Теперь задачу можно переформулировать так: при каких значениях параметра $a\in(-2;\ 2)$ и $a\neq -2/3$ хотя бы одно из чисел x_1 и x_2 лежит между числами x_3 и x_4. Этому условию отвечают две системы неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{-(5a+2)-|3a+1|}{2}<-\sqrt{4-a^2} \\ -\sqrt{4-a^2}<\dfrac{-(5a+2)+\sqrt{4-a^2}}{2},\end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{-(5a+2)-\sqrt{4-a^2}}{2}<\sqrt{4-a^2} \\ \sqrt{4-a^2}<\dfrac{-(5a+2)+\sqrt{4-a^2}}{2}.\end{array}\right. \qquad (2)$$

Решим на области $|a|<2$ и $a\neq -2/3$ отдельно систему (1) и систему (2).

На множестве $-2<a<-2/3$ система (1) может быть переписана в виде

$$\left\{\begin{array}{l}-a<-\sqrt{4-a^2} \\ -\sqrt{4-a^2}<-4a-2\end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l}\sqrt{4-a^2}<a \\ 4a+2<\sqrt{4-a^2}.\end{array}\right.$$

Очевидно, что эта система неравенств на множестве $-2<a<$ $<-2/3$ решений не имеет, т. к. левая часть первого неравенства положительна, а правая отрицательна.

На множестве $-2/3<a<2$ система (1) переписывается в виде

$$\left\{\begin{array}{l}-4-2<-\sqrt{4-a^2} \\ -\sqrt{4-a^2}<-a\end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l}\sqrt{4-a^2}<4a+2 \\ a<\sqrt{4-a^2}.\end{array}\right. \qquad (3)$$

На рассматриваемом множестве обе части первого неравенства положительны, и поэтому, возведя в квадрат, получим равносильное неравенство $4-a^2<16a^2+16a+4$ или $17a^2+16a>0$, которое имеет решение $a>0$ и $a<-16/17$. Значит, множество решений первого неравенства системы (3), содержащихся в промежутке $-2/3<a<2$, имеет вид

$$-\frac{2}{3}a<a<-\frac{16}{17} \text{ и } 0<a<2. \qquad (4)$$

Второму неравенству системы (3) удовлетворяют все a из области $-2/3<a<0$. В области $0\leqslant a<2$ обе части второго неравенства системы (3) неотрицательны и значит оно равносильно неравенству $a^2<4-a^2$ или $a^2<2$. Множество решений последнего неравенства, содержащихся в области $0\leqslant a<2$, имеет вид $0\leqslant a<\sqrt{2}$. Итак, множество решений второго неравенства системы (3), содержащихся в области $-\frac{2}{3}<a<2$, есть промежуток $-\frac{2}{3}<a<\sqrt{2}$. (5)

Из (4) и (5) следует, что множество решений системы (1) из области $|a|<2$ и $a\neq-\frac{2}{3}$ является объединением двух промежутков

$$-\frac{2}{3}<a<-\frac{16}{17} \text{ и } 0<a<\sqrt{2}. \qquad (6)$$

Аналогично решается система (2). Ее решением являются $-\sqrt{2}<a<-17$. Объединяя его с (6), находим требуемое множество значений параметра a: $-\sqrt{2}<a<-\frac{16}{17}$ и $0<a<\sqrt{2}$.▲

Упражнения

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям:

1) $\begin{cases} x^2+(2-3a)x+2a^2-2a<0 \\ ax=1, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-(3a+1)x+2a^2+2a<0 \\ x+a^2=0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+\left(1-\frac{3}{2}a\right)x+\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}<0 \\ x=a^2-\frac{1}{2}. \end{cases}$

Ответы: 1) $-1<a<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $1<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 2) $-2<a<0$; 3) $-\frac{1}{2}<a<1$.

2. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует ровно два значения x, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2-7x+6|+x^2+5x+6-12|x|=0 \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0. \end{cases}$$

Ответ: $a=1$, $a=2$, $5\leqslant a\leqslant 6$.

3. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2+5x+4|-9x^2+5x+4-10x|x|=0 \\ x^2-2(a+1)x+a(a+2)=0. \end{cases}$$

Ответ: $a=1\ \ -3<a<-1,\ -6\leqslant a<-4.$

4. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует ровно два значения x, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2+7x+6|+x^2-5x+6-12|x|=0 \\ x^2-2(a+2)x+a(a+4)=0. \end{cases}$$

Ответ: $a=-1,\ a=-2,\ -6\leqslant a\leqslant -5.$

Примеры с решениями

Пример 14. Для каждого значения a решить систему неравенств

$$\begin{cases} a(x-2)\geqslant x-3 \\ 8(a+1)x>8ax+9. \end{cases}$$

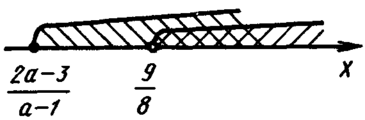
$\triangle$ После преобразований получим систему

$$\begin{cases} (a-1)x\geqslant 2a-3 \\ x>\dfrac{9}{8}, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем

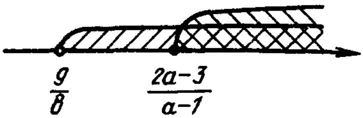
$$\begin{cases} a>1 \\ x\geqslant \dfrac{2a-3}{a-1} \\ x>\dfrac{9}{8} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a<1 \\ x\leqslant \dfrac{2a-3}{a-1} \\ x>\dfrac{9}{8}. \end{cases}$$

Решим каждую систему отдельно. Если в первой системе $\dfrac{2a-3}{a-1}$ располагается левее точки 9/8, как это показано на числовой оси,



тогда решением будет множество $x>\dfrac{9}{8}$, но при этом $\dfrac{2a-3}{a-1}\leqslant\dfrac{9}{8}\Rightarrow$ с учетом того, что $a>1$ имеем $2a-3\leqslant\dfrac{9}{8}(a-1)\Rightarrow a\leqslant\dfrac{15}{7}$, т. е. при $1<a\leqslant\dfrac{15}{7}$.

Если же $\dfrac{2a-3}{a-1}$ располагается правее точки 9/8, как это показано на числовой оси,



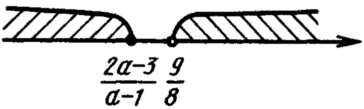
тогда решением будет множество

$$x > \frac{2a-3}{a-1}.$$

Но при этом $\frac{9}{8} < \frac{2a-3}{a-1}$ или $a > 15/7$.

Итак, если $1 < a \leqslant 15/7$, то $x > 9/8$, и если $a > 15/7$, то $\frac{2a-3}{a-1} < x$.

Решим вторую систему, иллюстрируя решение на числовой оси



Очевидно, что при таком расположении точек система несовместна.

Если же $\frac{2a-3}{a-1} > \frac{9}{8}$,

то решением системы будут все $\frac{9}{8} < x < \frac{2a-3}{a-1}$.

При $2a-3 < \frac{9}{8}(a-1)$, т. е. при $a < \frac{15}{17}$,

но с учетом $a < 1$ системы, получим $a < 1$.

Итак, при $a < 1$ имеем $\frac{9}{8} < x < \frac{2a-3}{a-1}$.

Видно, что если $a = 1$, то исходная система имеет решение при $x > \frac{9}{8}$.

Ответ: При $a < 1$ $\left(\frac{9}{8};\ \frac{2a-3}{a-1}\right)$;

при $1 \leqslant a \leqslant \frac{15}{7}$ $\left(\frac{9}{8};\ +\infty\right)$; при $a > \frac{15}{7}$ $\left[\frac{2a-3}{a-1};\ +\infty\right)$

Пример 15. Найти все значения a, при которых не существует ни одного x, одновременно удовлетворяющего неравенствам:

$$\begin{cases} ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a \geqslant 0 \\ ax \geqslant a^2 - 2. \end{cases}$$

△ Рассмотрим два случая.

Первый, когда $a > 0$, тогда систему неравенств можно записать в виде

$$\begin{cases} a^2x^2 + a(a-3)x - 2a^2 + 2 \geqslant 0 & (1') \\ x > \dfrac{a^2-2}{a}. & (1'') \end{cases}$$

Посмотрим, существуют ли a, при которых эта система несовместима, т. е. неравенства (1′) и (1″) не имеют ни одного общего решения. Для этого достаточно решить квадратичное неравенство (1′) и сопоставить полученные решения с (1″) (удобнее это сделать с помощью числовой оси). Находим корни трехчлена, стоящего в левой части (1′):

$$x_1 = \frac{1+a}{a}, \qquad x_2 = \frac{2(1-a)}{a}.$$

Чтобы записать решение неравенства (1′), мы должны знать, как расположены на числовой оси относительно друг друга числа $\frac{a^2-2}{a}$, x_1, x_2. Различные возможные ситуации представлены на рис. 38 *а, б, в* и рис. 39, *а, б, в*. Отсюда видно, что система всегда имеет решение (заштрихованные в клетку участки оси), и, следовательно, не существует a, удовлетворяющих условию задачи.

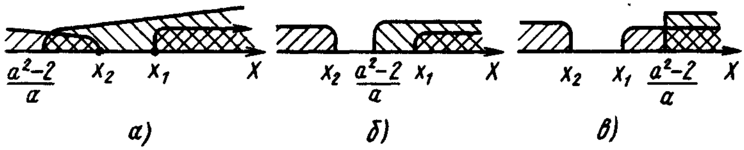


Рис. 38

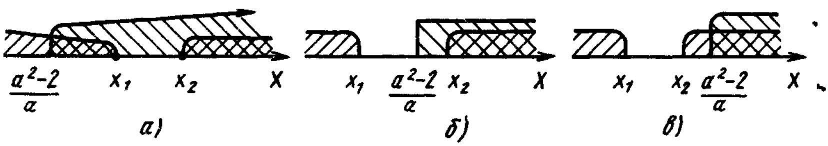


Рис. 39

Второй случай, когда $a<0$. При этом система принимает вид:

$$\begin{cases} a^2x^2 + a(a-3)x + 2(1-a^2) \leqslant 0 & (2') \\ x \leqslant \dfrac{a^2-2}{a}. & (2'') \end{cases}$$

Легко установить, что при $a<0$ $x_1 > x_2$ (неравенство $\frac{1+a}{a} > \frac{2(1-a)}{a}$ удовлетворяется при $a<0$ и $a>\frac{1}{3}$). Значит решением (2′) будет $x_2 \leqslant x \leqslant x_1$. Здесь необходимо рассмотреть три случая (рис. 40, *а, б, в*) расположения точек x_1, x_2 и $\frac{a^2-2}{a}$.

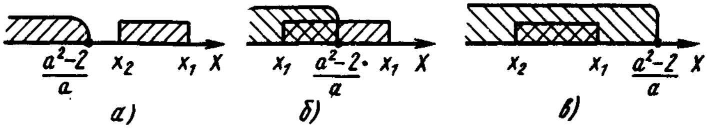


Рис. 40

Из рис. 40 видно, что система (2) несовместима только в случае рис. 40, *а*. Для этого должно быть

$$\frac{a^2-2}{a} < x_2 \Rightarrow \frac{a^2-2}{a} < \frac{2(1-a)}{a} \Rightarrow a^2+2a-4>0,$$

откуда с учетом того, что $a<0$, получаем решение

$$a< -1-\sqrt{5}.$$

Ответ: при $a< -1-\sqrt{5}$. ▲

Пример 16. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{x}{b}>\frac{a+b}{ab} \\ 10-\frac{5x}{2}>0. \end{cases}$$

△ Решением второго неравенства является интервал $x<4$. Решаем первое неравенство. Допустимые значения a и b такие, что $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Пусть числа a и b положительны, тогда $ab>0$ и, умножив обе части неравенства на ab, получим $x(a+b)>a+b$. В нашем случае $a+b>0$, значит $x>1$. С учетом решения второго неравенства получим $1<x<4$.

Пусть числа a и b отрицательны, тогда также $ab>0$, но $a+b<0$ и из неравенства $x(a+b)>a+b$ следует $x<1$. Этот интервал содержится в интервале $x<4$, а потому множество всех решений системы составляет интервал $(-\infty; 1)$.

Пусть a и b разных знаков, тогда $ab<0$; умножив обе части первого неравенства на ab, получим $(a+b)x<a+b$ и придется рассмотреть три случая.

1) Сумма $a+b>0$, $a>-b$, тогда получим $x<1$ и решение системы интервал $(-\infty; 1)$.

2) Сумма $a+b<0$, т. е. $a<-b$, тогда из $(a+b)x<a+b$ получим: $x>1$ и решение системы интервал $(1; 4)$.

3) $a=-b$ первое неравенство не имеет смысла.

Ответ: при $a>0$, $b>0$, либо при $ab<0$ (числа a и b противоположны по знаку) и $a < -b-1 < x < 4$; при $a<0$, $b<0$, либо при $ab<0$ и $a > -b$ $-\infty < x < 1$; при $a=-b$ нет решений. ▲

Пример 17. Найти все значения k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств

$$x^2+4kx+3k^2 > 1+2k \text{ и } x^2+2kx \leqslant 3k^2-8k+4.$$

△ Общее решение будет, если система неравенств

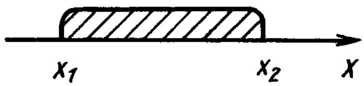
$$\begin{cases} x^2+4kx+3k^2-2k-1>0 \\ x^2+2kx-3k^2+8k-4 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно общее решение.

При фиксированном k корни квадратного трехчлена $x^2+2kx-3k^2+8k-4$ есть $x_1=-k-2|k-1|$ и $x_2=-k+2|k-1|$ и решение второго неравенства системы есть

$$-k-2|k-1| \leqslant x \leqslant -k+2|k-1|.$$

или на числовой оси



Возможны следующие четыре схемы расположения графика трехчлена f первого неравенства системы, приведенные на рис. 41.

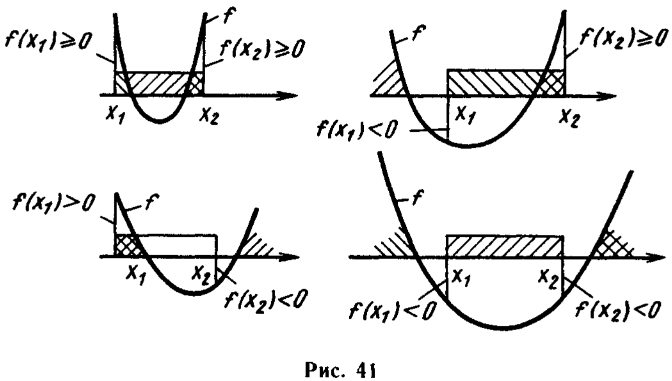


Рис. 41

На рисунке штриховка в клетку — это общее решение.

1-я схема: $f(x_1) \geqslant 0$ и $f(x_2) \geqslant 0$

$$\begin{cases} f(x_1)=(-k-2|k-1|)^2+4k(-k-2|k-1|)+3k^2-2k-1 \geqslant 0 \\ f(x_2)=(-k+2|k-1|)^2+4k(-k+2|k-1|)+3k^2-2k-1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k^2+4|k-1|+4(k-1)^2-4k^2-8k|k-1|+3k^2-2k-1\geqslant 0 \\ k^2-4|k-1|+4(k-1)^2-4k^2+8k|k-1|+3k^2-2k-1\geqslant 0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4k^2-4k|k-1|-10k+3\geqslant 0 \\ 4k^2+4k|k-1|-10k+3\geqslant 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4k^2-4k^2+4k-10k+3\geqslant 0 \\ 8k^2-4k-10k+3\geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6k+3\geqslant 0 \\ 8k^2-14k+3\geqslant 0 \end{cases}\quad \begin{cases} k\leqslant \frac{1}{2} \\ k\leqslant \frac{1}{4} \text{ и } k\geqslant \frac{3}{2} \end{cases}\Rightarrow k\leqslant \frac{1}{2}.$$

2-я схема: $f(x_1)\leqslant 0$ и $f(x_2)\geqslant 0 \Rightarrow k\geqslant 3/2$.

3-я схема: $f(x_1)\geqslant 0$ и $f(x_2)\leqslant 0$ $\quad \frac{1}{4}\leqslant k\leqslant \frac{1}{2}$.

4-я схема: решение — пусто. ▲

Ответ: $k\leqslant \frac{1}{2}$ и $k\geqslant \frac{3}{2}$.

Пример 18. Найти все значения a, при **каждом из которых** для любого значения b система

$$\begin{cases} bx-y-az^2=0 \\ (b-6)x+2by-4z=4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

△ Система линейна относительно переменных x, y и приводится к виду

$$\begin{cases} y=bx-az^2 \\ (b+2)(2b-3)x=2abz^2+4z+4; \end{cases}$$

а) если $b\in(-2;\ 3/2)$, то система совместна при любом значении a (достаточно взять $z=0$);

б) если $b=-2$, то система имеет решение тогда и только тогда, когда его имеет уравнение $-4az^2+4z+4=0$ т. е. когда $a\geqslant -1/4$;

в) если $b=3/2$, то аналогично случаю б) система совместна тогда и только тогда, когда $a\leqslant 1/3$.

Исходная система совместна при любом значении b при тех a, которые удовлетворяют всем условиям а), б) и в), т. е.

$$-1/4\leqslant a\leqslant 1/3. \quad ▲$$

Упражнения

1. Для каждого значения a решить систему неравенств

1) $\begin{cases} x^2+4x+3+a<0 \\ 2x+a+6>0, \end{cases}$ $\quad$ 2) $\begin{cases} x^2+2x+a\leqslant 0 \\ x^2-4x-6a\leqslant 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{(1-a)x-a}{x-2(1-a)} \geqslant 0 \\ x-8 \geqslant ax, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7-\left(\dfrac{15a}{4}-30\right)x>10 \\ \dfrac{x-1}{a-1}-1<\dfrac{a}{1-a}-x, \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{2x^2+ax+4}{x^2-x+1}<4 \\ \dfrac{2x^2+ax-6}{x^2-x+1}>-6. \end{cases}$

Ответы: 1) При $a \leqslant \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$ $\frac{-a-6}{2}<x<-2+\sqrt{1-a}$;
при $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}<a<1$ $-2-\sqrt{1-a}<x<-2+\sqrt{1-a}$;
при $a \geqslant 1$ решений нет;

2) при $a=0$ $x=0$; при $a \neq 0$ решений нет;

3) при $a=0$ $x \geqslant 8$; при $a \neq 0$ решений нет;

4) при $a \leqslant 0$ и $1 \leqslant a \leqslant 8$ решений нет; при $0<a<1$ $x>\frac{4}{40-5a}$;
при $a>8$ $x<\frac{4}{40-5a}$;

5) при $a<-4$ $\frac{a+4}{2}<x<0$; при $-4 \leqslant a \leqslant 2$ решений нет;
при $2<a<6$ $\frac{6-a}{8}<x<\frac{a+4}{2}$; при $a \geqslant 6$ $0<x<\frac{a+4}{2}$.

2. Для каждого значения a решить неравенство

$$\frac{ax-(1-a)a}{a^2-ax-1}>0.$$

Ответ: решений нет при $a=0$, $a=-\frac{1}{2}$ и
$a=1$; $1-a<x<\frac{a^2-1}{a}$ при $-\frac{1}{2}<a<0$ или
$a>1$; $\frac{a^2-1}{a}<x<1-a$ при $a<-\frac{1}{2}$ и $0<a<1$.

3. Для каждого значения a решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{ax}{a-2}-\dfrac{x-1}{3}<\dfrac{2x+3}{4} \\ \dfrac{x(10-a)}{2}+a>\dfrac{a(x+2)}{2}-5x-6. \end{cases}$$

Ответ: $x<\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$ при $a<-10$ и $a>2$;
$x \in R$ при $a=-10$; решений нет при $a=2$;
$x>\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$ при $-10<a<2$,

4. Найти все a, при которых не существует ни одного x, одновременно удовлетворяющих его неравенствам:

1) $\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3)\geqslant 0 \\ ax>4, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{a^2x+2a}{ax+a^2-2}\geqslant 0 \\ ax+a>\dfrac{5}{4}, \end{cases}$

3) $\left\{\dfrac{(1-a)x-a}{x-2(1-a)}\geqslant 0.\right.$

Ответы: 1) $-2<a\leqslant 0$; 2) $a\leqslant -\frac{1}{2}$, $a=0$; 3)

5. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} ax-1\leqslant 0 \\ x-4a\geqslant 0. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $a\in\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right]$.

6. Найти все значения k, при каждом из которых каждое решение неравенства $x^2+3k^2-1\leqslant 2k(2x-1)$ является решением неравенства $x^2+(2x-1)k+k^2>0$.

Ответ: $k<\dfrac{9-\sqrt{17}}{32}$.

7. Найти все значения k, при каждом из которых любое число является решением хотя бы одного из неравенств

$$x^2+5k^2+8k>2(3kx+2) \text{ и } x^2+4k^2\geqslant k(4x+1).$$

Ответ: $k\leqslant 0$, $k=1$.

8. Найти все значения k, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x^2+k^2}{k(6+x)}\geqslant 1$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $-1<x<1$.

Ответ: $k\geqslant \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

9. Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} x-by+az^2=0 \\ 2bx+(b-6)y+8z=8 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

Ответ: $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant \frac{2}{3}$.

8. ПРИМЕРЫ НА ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при которых функция

$$y=a8^x+(3a+1)4^x+(9a+1)2^x+2$$

не имеет экстремумов.

$\triangle$ Найдем производную функции

$$y'(x)=a\cdot 8^x\ln 8+(3a+1)4^x\ln 4+(9a+1)2^x\ln 2=$$
$$=3a4^x+2(3a+1)2^x+(9a+1)2^x\ln 2.$$

Так как $2^x\ln 2>0$, знак производной $y'(x)$ совпадает со знаком квадратичной функции:

$$\varphi(z)=3az^2+2(3a+1)z+(9a+1),\ \text{где}\ 2^x=z>0.$$

Отметим, что функция $z=2^x$ возрастающая и каждому значению $z>0$ соответствует единственное значение

$$x=\log_2 z.$$

Рассмотрим возможные частные случаи.

1) Если квадратное уравнение $\varphi(z)=0$ имеет два различных корня, из которых хотя бы один положительный, то заданная функция $y(x)$ имеет экстремум. Действительно, если z_0 — один из корней, то $y'(x_0)=0$, где $x_0=\log_2 z_0$. При переходе аргумента x через точку x_0 переменная z переходит через точку z_0, при этом меняется знак квадратичной функции $\varphi(z)$, а значит и знак производной $y'(x)$.

2) Если квадратное уравнение $\varphi(z)$ имеет один корень z_0, то при $z_0>0$ производная $y'(x)$ обращается в нуль при $x=x_0=$ $=\log_2 z_0$, но при переходе через эту точку знак функции $\varphi(z)$ не меняется. Если $z_0\leqslant 0$, то $\varphi(z)$ сохраняет знак, производная $y'(x)$ в нуль не обращается. Таким образом, если уравнение $\varphi(z)=0$ имеет один корень (точнее, корни его совпадают), то функция $y(x)$ экстремума не имеет.

3) Если среди корней уравнения $\varphi(z)=0$ нет положительных, то $y'(x)$ в нуль не обращается и сохраняет знак при всех x.

4) Уравнение $\varphi(z)=0$ может вообще не иметь корней, тогда $y'(x)$ сохраняет знак и $y(x)$ экстремумов не имеет.

5) Уравнение $\varphi(z)=0$ превращается в линейное, когда коэффициент при z^2 обращается в нуль. Если его корень положителен, функция имеет экстремум; в противном случае экстремума нет.

Исследуем функцию $\varphi(z)=3az^2+2(3a+1)z+(9a+1)$.

а) Уравнение $\varphi(z)=0$ не имеет решений или имеет совпадающие корни, если $D\leqslant 0$, т. е.

$$(3a+1)^2-3a(9a+2)\leqslant 0\Leftrightarrow 18a^2-3a-1\geqslant 0.$$

Этому неравенству удовлетворяют значения $a\leqslant -\frac{1}{6}$ или $a\geqslant$ $\geqslant \frac{1}{3}$.

б) Если оба корня неположительны, то a удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} D>0 \\ -\dfrac{3a+1}{a}\leqslant 0 \\ \dfrac{9a+1}{a}\geqslant 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} -\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} a\leqslant -\dfrac{1}{3} \\ a>0, \end{array}\right. \end{cases} \text{ т. е. } 0<a<\frac{1}{3}.$$

в) При $a=0$ получаем уравнение $2z+1=0$, которое имеет единственный корень $z_1=-\frac{1}{2}$ следовательно, при $z>0$ $\varphi(z)>$ >0.

Объединяя найденные в пунктах а), б), в) ответы, получаем решение задачи: $a\in(-\infty;\ -\frac{1}{6}]\cup[0;\ +\infty)$. ▲

Пример 2. На плоскости xy укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых семейства

△ $y=x^2-2(1+2p)x+2p^2-1$, $p\in\mathrm{R}$.

Выделив слагаемые, зависящие от p, перепишем уравнение кривой в виде $y=-(x+1)^2+2(p-x)^2$. Меняя значения p (при фиксированном x), мы можем получить любое значение $y\geqslant -(x+1)^2$. Так как $(p-x)^2\geqslant 0$, значения $y< -(x+1)^2$ получить нельзя. Следовательно, через точки плоскости xy, лежащие ниже кривой $y=-(x+1)^2$, не проходит ни одна из кривых заданного семейства (рис. 42).

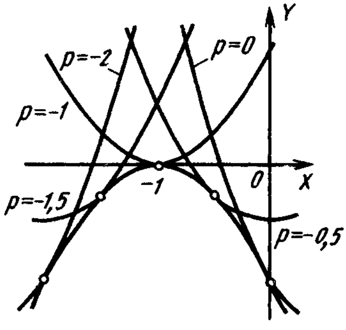


Рис. 42

Можно использовать производную при решении этого примера. Фиксируем значение x и рассматриваем как квадратичную функцию p. Найдем наиеньшее значение этой функции при каждом x:$y'(p)=-4x+4p$, $y'(p)=0$ при $p=x$, $\min y(p)=y)p)|_{p=x}=x^2-$ $-2(1+2x)x+2x^2-1=-(x+1)^2$.

Значения $y<-(x+1)^2$ не могут быть получены ни при каком p. ▲

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *С. М. Макеева*
Технический редактор *А. Я. Дубинская*
Корректоры: *Т. С. Грачева, Е. Ю. Уралова*

ИБ №001

Сдано в набор 20.07.92 г. Подписано в печать 10.09.92 г.
Формат 60×88/16. Бумага офсетная. Гарнитура литературная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 9,0 Усл. кр-отт. 9,25 Уч.-изд. л. 11,0 Тираж 20 000 экз. Заказ 425т

ББК 22.10
Р60

Рецензент **Н. И. Авраамов**

Родионов Е. М.
Справочник по математике для поступающих в вузы. Решение задач с параметрами. М.: МЦ «Аспект», 1992. 144 с.: ил.
ISBN 5-88566-001-8

Впервые в нашей стране создан справочник, который содержит теоретические сведения и систематизированный набор задач с параметрами. Методическое построение справочника позволяет углубленно изучить приемы решения и самостоятельно подготовиться к поступлению в вуз с повышенной математической программой. Типовые задачи сопровождаются подробным разбором решений. По каждой теме приводятся упражнения с ответами для закрепления изучаемого материала.

Справочник создан на основе преподавания математики на подготовительных курсах МГТУ. Использованы также варианты вступительных экзаменов МГУ, МИФИ и др. вузов.

Для поступающих в вузы и преподавателей.

Р $\frac{1602000000-001}{Л24(03)-92}$ Без объявления

ISBN 5-88566-001-8