О. Н. АФАНАСЬЕВА, Я. С. БРОДСКИЙ,
И. И. ГУТКИН, А. Л. ПАВЛОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

О. Н. АФАНАСЬЕВА, Я. С. БРОДСКИЙ,
И. И. ГУТКИН, А. Л. ПАВЛОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ НА БАЗЕ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для учащихся
средних специальных учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.1
А 94
УДК 51(075.3)

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Гуткин И. И., Павлов А. Л. **Сборник задач по математике для техникумов на базе средней школы**. Учеб. пособие для техникумов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 208 с.

Сборник составлен в соответствии с действующей программой по математике для техникумов на базе средней школы.

Содержит упражнения и задачи, необходимые для уяснения основных понятий и связей между ними, выработки навыков решения типовых задач и расширения математического кругозора учащихся. Задачи снабжены ответами, а некоторые из них — указаниями к решению. В большинстве разделов даются краткие сведения по теории, вопросы для самоконтроля и повторения.

Для учащихся техникумов, обучающихся на базе средней школы. Может быть использован в техникумах на базе неполной средней школы, учащимися заочной и вечерней форм обучения, а также лицами, изучающими математику самостоятельно.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, доцент *Ю. В. Нестеренко*;
кандидат физико-математических наук, профессор *М. И. Шабунин*;
преподаватель полиграфического техникума им. И. Федорова *И. Л. Соловейчик*

$А \frac{1702010000-072}{053(02)-87}$ 69-87

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач предназначен для учащихся средних специальных учебных заведений, обучающихся на базе средней общеобразовательной школы. Он написан в соответствии с действующей программой по математике. В нем учтены изменения в школьном курсе математики, касающиеся методических подходов к изучению основных понятий, терминологии, обозначений.

Сборник состоит из шести глав. Главы разбиты на параграфы и пункты. В конце каждого параграфа имеются вопросы для самоконтроля и повторения. Приводятся краткие теоретические сведения и образцы решения многих типовых задач.

Большинство задач снабжены ответами, к некоторым из них приведены указания.

Наиболее трудные задания отмечены звездочкой.

Настоящее пособие может быть использовано и при изучении математики на базе 8 классов, а также лицами, изучающими математику самостоятельно.

При работе над задачником большую помощь оказали слушатели факультета повышения квалификации преподавателей математики средних специальных учебных заведений Донецкого государственного университета. Всем им авторы выражают сердечную благодарность.

Авторы благодарны также рецензентам М. И. Шабунину и Ю. В. Нестеренко за ценные замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

Глава 1
ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Действительные числа (материал для повторения)

1. Представьте в виде несократимой дроби m/n, где m и n — целые числа, следующие числа: -9; $5\frac{1}{7}$; $-20,3$; $140/70$; $0,5$.

2. Выберите среди данных чисел натуральные, целые, рациональные, иррациональные: $0,6$; -5; 3; $\sqrt{2}$; 0; π; $2/3$; 7; -1; 2; $\sqrt{3}$; $2,8$; $\sin 30°$; $\sqrt{5}$; $\sin 60°$; $\operatorname{tg} 45°$.

3. Выполните действия и запишите результат в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

1) $\frac{2}{7}+\frac{4}{9}$; 2) $\frac{1}{5}+1,25$; 3) $\frac{2}{7}\cdot 2,45$; 4) $\frac{1}{9}-0,33$.

4. Можно ли утверждать, что при всех значениях a и b:

1) $(a-b)^2$ — положительное число; 2) $|a|=a$; 3) $2a>a$; 4) $a+b>a-b$?

5. Вычислите:

1) $\dfrac{\left(1,4:\frac{11}{7}+0,5:1\frac{1}{4}-\frac{3}{11}\right)\cdot 6}{\left(0,25+1\frac{1}{2}\right):\frac{55}{3}}$; 2) $3,075:1,5-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{25}+3,26\right)$;

3) $\left(\dfrac{3\frac{3}{4}+2,5}{2\frac{1}{3}-1\frac{7}{8}}-\dfrac{2\frac{3}{4}-1,5}{8,125+1\frac{1}{2}}\right):\frac{10}{11}$; 4) $\left(6\frac{7}{12}-3\frac{17}{36}\right)\cdot 2,5-4\frac{1}{3}:0,65$.

6. Сократите дроби:

1) $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$; 2) $\dfrac{9x^2-1}{3x^2+5x-2}$.

7. Известно, что p процентов от числа x равно y.

Найдите:

1) y, если $x=600$; $p=21$; 2) y, если $x=2{,}5$; $p=80$;
3) x, если $p=7$; $y=315$; 4) x, если $p=4{,}5$; $y=18$;
5) p, если $x=12$; $y=60$; 6) p, если $x=300$; $y=9{,}6$.

Найдите значение выражения, предварительно упростив его (**8**—**10**).

8. 1) $\dfrac{(a+b)^2-(ab+1)^2}{a^2-1}$ при $b=-0{,}5$;

2) $\left(\dfrac{p^2+q^2}{pq}-\dfrac{p^2}{pq+q^2}-\dfrac{q^2}{p^2+pq}\right):\dfrac{3}{pq}$ при $p=1{,}8$; $q=2{,}5$;

3) $\left(\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ при $a=-2{,}5$; $b=0{,}5$.

9. 1) $(a^{-3/2}b(a\cdot b^{-2})^{-1/2}\cdot(a^{-1})^{-2/3})^3$ при $a=\sqrt{2}/3$; $b==1/\sqrt[3]{2}$;

2) $\dfrac{a-b}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\dfrac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a-b}$ при $a=0{,}64$; $b=0{,}36$.

10. 1) $\dfrac{1}{4+4\sqrt{a}}-\dfrac{3}{2-2a}+\dfrac{1}{4-4\sqrt{a}}$ при $a=3$;

2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)$ при $x=3/4$.

11. Докажите неравенства:

1) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$; 2) $k+\dfrac{1}{k}\geqslant 2$, $k>0$;

3) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$, $ab>0$; 4) $\dfrac{2a}{1+a^2}\leqslant 1$, $a\in \boldsymbol{R}$.

12. Решите уравнение или неравенство:

1) $|x|=3$; 2) $|x-5|=2$; 3) $|x|\geqslant 3$;
4) $|x|<3$; 5) $|x-5|\leqslant 2$; 6) $|x-5|>2$;
7) $|x+2|=1$; 8) $|x+2|<1$; 9) $|x+2|\geqslant 1$;
10) $|x+2|=|x-2|$; 11) $|x+2|=x+2$;
12) $|x-2|=2-x$.

§ 2. Приближенные вычисления

1. Точные и приближенные значения величин. При измерениях зачастую в результате счета и операций над действительными числами получают приближенные значения величин. Числа, выражающие точное и приближенное значение величины, мы будем называть для краткости соответственно *точным и приближенным числом.*

13. Технические данные вертолета «Ми-8»: 1) число пассажирских мест — 28; 2) масса ненагруженного вертолета — 7,5 т; 3) крейсерская скорость — 200 км/ч; 4) дальность полета — 650 км; 5) число газотурбинных двигателей — 2; 6) диаметр несущего винта — 21,3 м; 7) высота вертолета — 4,7 м. Какие из этих чисел являются точными и какие приближенными?

14. Какие из приведенных в примерах чисел можно отнести к точным, а какие к приближенным: 1) в техникуме учится 1200 учащихся; 2) в городе живет 522 тысячи человек; 3) заработок рабочего за май 178 руб.; 4) художественный музей за месяц посетило 3200 человек; 5) книжный фонд библиотеки техникума 30 тысяч книг; 6) станок состоит из 82 деталей; 7) скорость звука в воздухе при температуре 20 °C равна 393,1 м/с; 8) расстояние от Земли до Солнца $1{,}5\cdot 10^8$ км?

15. Какие из перечисленных равенств являются точными, а какие приближенными:

1) $\sin 30^\circ = 0{,}5$; 2) $\operatorname{tg} 60^\circ = 1{,}73$; 3) $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$;
4) $\cos 45^\circ = 0{,}7$; 5) $\lg 2 = 0{,}3010$; 6) $\ln e = 1$;
7) $\sin(\pi/4) = 0{,}707$; 8) $\lg 100 = 2$; 9) $\operatorname{tg}(\pi/6) = 0{,}577$;
10) $\sin(\pi/2) = 1$; 11) $\ln 10 = 2{,}3026$.

2. Абсолютная погрешность и ее граница. Запись приближенного числа. Разность $x - a$ между точным числом x и приближенным a называется *погрешностью приближения*. Если погрешность отрицательна, то говорят, что приближение взято с избытком, если положительна — с недостатком. Модуль погрешности называется *абсолютной погрешностью* и обозначается $\Delta\, x$ или Δ_a:

$$\Delta_a x = |x - a|.$$

Погрешность и абсолютная погрешность имеют ту же размерность, что и рассматриваемая величина.

Число h_a, которое не меньше абсолютной погрешности $\Delta_a x$, называется *границей абсолютной погрешности*:

$$\Delta_a x \leqslant h_a; \quad |x - a| \leqslant h_a, \quad x - h_a \leqslant a \leqslant x + h_a.$$

Если задана граница абсолютной погрешности h_a, то говорят, что число a есть приближенное значение x с точностью до h_a и записывают: $x = a \pm h_a$.

Цифра приближенного числа a, записанного в виде десятичной дроби, называется *верной* (*точной*), если абсолютная погрешность $\Delta_a x$ приближения не превышает единицы того разряда, в котором стоит эта цифра. В противном случае она называется *сомнительной.*

Запись чисел с сохранением только верных цифр широко используется во всех математических таблицах, в физике, астрономии, технике. В данном пособии там, где не указана погрешность, также принято это соглашение. При этом по записи приближенного числа можно оценить погрешность приближения.

Если целое число содержит в конце нули, не являющиеся верными цифрами, то их заменяют множителем 10^p, где p — число таких нулей, или число в *стандартном виде* записывают так:

$$a = a_0{,}a_1a_2\ldots a_k\cdot 10^m, \qquad \text{где } 1 \leqslant a_0 < 10,$$

a_0, a_1, ..., a_k — все верные цифры числа. Показатель m называется *порядком числа.*

Если число, записанное в виде десятичной дроби, содержит только верные цифры, то все его цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля, называются *значащими.*

Округление числа — это замена его числом с меньшим количеством значащих цифр.

Чтобы округлить число до n-го разряда, нужно цифры, стоящие правее этого разряда отбросить, если $n < 0$, или заменить нулями, если $n > 0$. Такое округление называется *округлением по недостатку.* Если же цифру n-го разряда увеличить на единицу, то получим *округление по избытку.*

Если не оговорено, какое округление произведено, то будем считать, что взято округление по недостатку, если цифра первого отбрасываемого разряда меньше 5, и по избытку, если она больше или равна 5. В этом случае абсолютная погрешность округления не превосходит половины единицы соответствующего разряда.

На практике величину обычно измеряют несколько раз (не менее трех) и в качестве приближенного значения берут среднее арифметическое результатов измерений.

16. Округлите числа с заданной точностью:

1) 1,5783; 23,4997; 0,00025; 0,07964 до 10^{-3};

2) 4,761; 31,009; 471,2583; 0,00126 до 10^{-2};

3) 159734; 28,34; 7654321; 984,56 до 10^3.

Найдите погрешность округления. Запишите результаты округления в стандартном виде.

17. Дано, что $3{,}5 < a < 4{,}7$. Верно ли, что:

1) $3 < a < 4{,}5$; 2) $3{,}8 < a < 4$; 3) $3{,}6 < a < 4{,}9$; 4) $3{,}2 < a < 4{,}8$?

18. Период колебания маятника T находится в промежутке от 1,2 до 1,5 с. Оцените с точностью до 10^{-2} границы его частоты $\nu = 1/T$.

19. При нормальном давлении температура плавления: 1) алюминия — 660,4 °C; 2) висмута — 271,44 °C; 3) вольфрама — 3387 °C; 4) золота — 1064,43 °C; 5) калия — 63,6 °C; 6) олова — 231,9681 °C. Укажите число значащих цифр и число десятичных знаков в каждом из этих чисел. Запишите эти числа в стандартном виде.

20. Не изменяя точности, запишите: 1) 160 мм в метрах и сантиметрах; 2) 250 дм^3 в кубических метрах и сантиметрах.

21. В записи следующих чисел все нули справа — сомнительные цифры. Запишите эти числа без незначащих нулей: 7800 Дж; 9 200 000 Дж; 6 600 000 Ом; 11 200 Вт; 0,00237 Н.

22. Даны записи числа $40\,000 \pm 100$: $4{,}00 \cdot 10^4$; $4{,}0 \cdot 10^4$; $4 \cdot 10^4$; $40 \cdot 10^3$; $400 \cdot 10^2$; $0{,}4 \cdot 10^5$; $0{,}40 \cdot 10^5$; $0{,}400 \cdot 10^5$. Какие из них верны? Какая из них представляет стандартный вид?

23. По данным измерений найдите приближенное значение, если:

1) при определении плотности сухого воздуха получены значения 1,1271; 1,1275; 1,1276 кг/м^3;

2) четырехкратное измерение одной и той же длины дало результаты 19,38; 19,42; 19,37; 19,45 м.

24. Запишите приближенное число, сохраняя все его верные цифры:

1) 2566 ± 3; 2) 7841 ± 32; 3) $8{,}34 \pm 0{,}02$;
4) $0{,}2507 \pm 0{,}001$; 5) 174651 ± 342;
6) $0{,}000247 \pm 0{,}01$; 7) $40203 \pm 0{,}01$;
8) $3{,}927 \pm 0{,}0005$; 9) $94{,}7 \pm 0{,}1$.

25. Из таблицы взяты следующие данные: температура кипения золота — 2700 °C, иода — 182,8 °C. Каковы границы абсолютных погрешностей этих значений?

26. Найдите границы абсолютных погрешностей: 1) постоянной Планка $h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; 2) числа Авогадро $N_0 = 6{,}022045 \cdot 10^{23}$; 3) массы покоя электрона $m_e = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ кг; 4) гравитационной постоянной $G = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

3. **Относительная погрешность и ее граница.** Отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного числа, называется *относительной погрешностью приближения* и обозначается $\omega_a x$ или ω_a:

$$\omega_a = \frac{\Delta_a x}{|a|}.$$

Относительная погрешность является показателем качества данного приближения, и ее часто выражают в процентах. Число E_a, которое не меньше относительной погрешности $\omega_a x$, называется *границей относительной погрешности*:

$$E_a \geqslant \omega_a x.$$

Так как

$$\frac{h_a}{|a|} \geqslant \frac{\Delta_a}{|a|} = \omega_a x,$$

то $h_a/|a|$ можно принять за границу относительной погрешности. Если дана граница E_a относительной погрешности, то говорят, что приближение дано с относительной точностью до E_a и записывают:

$$x = a(\pm E_a) \quad \text{или} \quad x = a(\pm 100 E_a\,\%).$$

27. Найдите относительные погрешности округлений по данным задачи 16 (с двумя значащими цифрами).

28. Скорость света в вакууме $(299\,792{,}5 \pm 0{,}4)$ км/с, а скорость звука в воздухе $(331{,}63 \pm 0{,}04)$ м/с. Что измерено с большей точностью?

29. Найдите границы значений грузоподъемности автомобиля ГАЗ-51А, если она равна 2,5 (± 15 %) т.

30. Найдите границы относительной погрешности чисел: 1) 2; 0,2; 0,02; 2) 17; 1,7; 0,17; 3) 3,71; 37,1; 371.

31. Какие из равенств точнее:

1) $\sqrt{46} = 6{,}78$ или $7/13 = 0{,}54$;

2) $\sin 15° = 0{,}259$ или $\sqrt{17} = 4{,}12$;

3) $\lg 31 = 1{,}49$ или $\operatorname{tg}(\pi/8) = 0{,}414$;

4) $\cos(\pi/6) = 0{,}87$ или $\ln 87 = 4{,}466$?

32. Какая из характеристик самолета «Ан-24» дана точнее: размах крыла 29,2 м; взлетная масса 21 т; собственная масса 13,9 т; практический потолок высоты 8,9 км?

33. Докажите, что относительная погрешность приближенного числа не превосходит:

1) 10 %, если в его записи две значащие цифры;

2) 1 %, если в его записи три значащие цифры.

34. Граница относительной погрешности приближенного значения 37,542 числа x равна 3 %. Сколько в записи 37,542 значащих цифр?

4. Погрешности вычислений с приближенными данными. При оценке границ погрешностей результатов действий по границам погрешностей исходных данных пользуются следующими правилами.

1. При сложении и вычитании границы абсолютных погрешностей исходных данных складываются.

2. При умножении и делении границы относительных погрешностей исходных данных складываются.

3. При возведении в степень граница относительной погрешности основания степени умножается на показатель степени.

Действия с приближенными числами на практике выполняют по более простым правилам, позволяющим получать достаточную точность при меньшей вычислительной работе.

Они называются *правилами подсчета цифр*.

1. При сложении и вычитании десятичных дробей в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их в числе с наименьшим числом десятичных знаков.

При сложении и вычитании целых чисел их записывают в стандартном виде и, вынося за скобки наибольшую степень десяти, используют вышеприведенное правило.

2. При умножении и делении приближенных чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в числе с наименьшим числом значащих цифр.

3. При возведении в квадрат и куб в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

4. При извлечении квадратного и кубического корня в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.

5. В промежуточных вычислениях сохраняют на одну цифру больше, чем это рекомендуется предыдущими правилами. В окончательном результате эта запасная цифра округляется.

6. Если данные имеют различное число десятичных знаков (при сложении и вычитании) или значащих цифр (при остальных действиях), то их округляют до наименее точного числа с одной запасной цифрой, которая в окончательном результате округляется.

35. Оцените $a+b$ и $a-b$, если:

1) $3{,}84 < a < 3{,}92$ и $4{,}17 < b < 4{,}23$;
2) $274 < a < 280$ и $126 < b < 128$;
3) $a = 0{,}351 \pm 0{,}0004$ и $b = 0{,}473 \pm 0{,}0007$;
4) $a = 3{,}5 \cdot 10^4 \pm 873$ и $b = 2{,}1 \cdot 10^4 \pm 157$;
5) $a = 124\,(\pm 5\,\%)$ и $b = 23\,(\pm 3\,\%)$;
6) $a = 0{,}056\,(\pm 0{,}3\,\%)$ и $b = 0{,}074\,(\pm 0{,}4\,\%)$.

36. Две силы, модули которых равны 0,860 Н и 0,855 Н, приложены к одной точке и действуют по одной прямой. Найдите модуль равнодействующей, если силы направлены: 1) в одну сторону; 2) в противоположные стороны.

37. Найдите сумму приближенных чисел $a = a_1 + a_2 + a_3$, если:

1) $a_1 = 12{,}3 \pm 0{,}04$; $a_2 = 131{,}71 \pm 0{,}03$; $a_3 = 4{,}5 \pm 0{,}02$;
2) $a_1 = 12{,}5784 \pm 0{,}00005$; $a_2 = 37{,}54 \pm 0{,}003$; $a_3 = 2{,}3 \pm 0{,}02$.

Оцените границу абсолютной погрешности суммы.

38. Участок цепи состоит из 4 последовательно соединенных резисторов сопротивлением $r_1 \approx 3{,}865$ Ом, $r_2 \approx 4{,}45$ Ом, $r_3 \approx 0{,}60$ Ом, $r_4 \approx 2{,}0$ Ом. Найдите общее сопротивление этого участка цепи.

39. Каково общее сопротивление внешнего участка цепи, состоящего из потребителя сопротивлением 305 Ом и соединительных проводов сопротивлением 0,37 Ом? Истолкуйте физический смысл ответа.

40. Выполните действия:

1) $1{,}038 + 12{,}5 + 2{,}349845$; 2) $4{,}00793 + 3{,}57999 - 2{,}74$;
3) $7{,}4 + 3{,}599 - 0{,}00017$;
4) $7{,}84 \cdot 10^5 + 2{,}639 \cdot 10^4 - 6{,}7983 \cdot 10^6$;
5) $27100 + 8250 + 58117 - 4931{,}96$;
6) $3{,}92 \cdot 10^{-3} - 2{,}74 \cdot 10^{-2} + 1{,}2 \cdot 10^{-1}$.

41. Периметр прямоугольника 28,36 м, одна из его сторон 4,963 м. Найдите длину другой стороны.

42. Чему равно сопротивление цепи, состоящей из 6 последовательно соединенных резисторов сопротивлением 30 Ом каждый? Каким будет сопротивление, если их соединить параллельно?

43. Оцените границы произведения приближенных чисел:

1) $13{,}2 < a < 13{,}4$ и $7{,}5 < b < 7{,}6$;

2) $a = 15,3 \pm 0,05$ и $b = 4,8 \pm 0,03$;
3) $0,98 < a < 1,01$ и $0,037 < b < 0,041$;
4) $a = 274 \pm 13$ и $b = 1,2 \pm 0,7$;
5) $a = 0,00386 (\pm 0,2\ \%)$ и $b = 4,52 (\pm 0,3\ \%)$.

44. За какое время свет проходит расстояние от Солнца до Земли, равное $1,50 \cdot 10^8$ км, если скорость света $3,00 \times 10^5$ км/с? С какой точностью получен ответ?

45. Расчет атмосферного давления произведен следующим образом: $p = \rho g h = 1380 \cdot 9,8 \cdot 0,76 = 10\,278$ Па. Правильно ли записан ответ?

46. Найдите произведение приближенных чисел и запишите его в стандартном виде:

1) $2,34 \cdot 0,027$; 2) $4,75 \cdot 10^4 \cdot 3,596 \cdot 10^{-2}$;
3) $1789,2 \cdot 0,342 \cdot 0,0052$; 4) $13567 \cdot 0,2834$;
5) $42,7683 \cdot 10^2 \cdot 1,592 \cdot 10^{-3}$; 6) $413 \cdot 5,672 \cdot 0,98$.

47. Найдите частное приближенных чисел:

1) $173 : 24,567$; 2) $34,75 : 2,6891$;
3) $0,0028 : 0,345897$; 4) $2,57 \cdot 10^4 : (3,28 \cdot 10^{-2})$;
5) $4,735 \cdot 10^{-2} : (1,26897 \cdot 10^{-5})$;
6) $2,39 : 8,514 : 1,7$;
7) $5,74 \cdot 10^5 \cdot 3,5964 \cdot 10^3 : 0,0073$.

48. С какой точностью надо измерить длину стороны квадрата, чтобы при вычислении его площади граница: 1) абсолютной погрешности не превышала 0,5 см^2; 2) относительной погрешности не превышала 1 %? Грубое измерение стороны квадрата дало $a \approx 12$ см.

49. С какой точностью следует измерить длины сторон a и b прямоугольника, чтобы граница относительной погрешности вычисленной площади не превышала 1,5 %? Грубое измерение дало $a \approx 6$ м, $b \approx 8$ м.

Решение. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = ab$. Следовательно, $E_s = E_a + E_b$. Заданное значение $E_s = 1,5\ \%$ распределим поровну между E_a и E_b: $E_a = 0,75\ \%$, $E_b = 0,75\ \%$. Тогда

$$h_a = E_a |a| = 0,0075 \cdot 6 = 0,045 \text{ м} = 4,5 \text{ см};$$
$$h_b = E_b |b| = 0,0075 \cdot 8 = 0,06 \text{ м} = 6 \text{ см}.$$

50. С какой точностью надо измерить радиус основания R и высоту h прямого кругового цилиндра и со сколькими значащими цифрами взять π, чтобы при вычислении его объема $V = \pi R^2 h$ граница относительной погрешности не превышала 2 %? Грубое измерение дало $R \approx 32$ см и $h \approx 61$ см.

5. Вычисления с помощью вычислительных средств. Выполните действия с приближенными данными (51—52):

51. 1) $12{,}384+42{,}1083-51{,}27$;
2) $24{,}396-0{,}2834-7{,}64157$;
3) $0{,}00857+0{,}024-0{,}03972$;
4) $1{,}5\cdot10^6+2{,}35\cdot10^4-3{,}17\cdot10^5$;
5) $3{,}74\cdot0{,}858\cdot6{,}12$;
6) $2{,}346782\cdot0{,}0989172\cdot88{,}374652$;
7) $100{,}21\cdot237{,}4+0{,}2834\cdot0{,}01287$;
8) $23{,}67:7{,}85-31{,}3:2{,}46$;
9) $\frac{34{,}72\cdot0{,}05876}{9{,}7385}$; 10) $\frac{63{,}792\cdot0{,}02453\cdot723{,}54}{83{,}425\cdot0{,}7653}$;
11) $125{,}37\cdot4{,}5897+13{,}4896:0{,}12493$;
12) $\frac{4{,}12\cdot10^2\cdot5{,}93\cdot10^{-3}}{7{,}42\cdot10^{-2}}$;
13) $\frac{2{,}3579\cdot10^4\cdot4{,}7003\cdot10^3}{1{,}59867\cdot10^5}+\frac{1{,}7821\cdot10^2\cdot3{,}4591\cdot10^3}{2{,}7186\cdot10}$.

52. 1) $3{,}57^2$; 2) $45{,}9^2$; 3) 1473^2; 4) $0{,}268^2$;
5) $0{,}03974^2$; 6) $542{,}37^2$; 7) $(2{,}5874\cdot10^{-2})^2$;
8) $0{,}00005867^2$; 9) $2{,}53^3$; 10) $41{,}7^3$; 11) 523^3;
12) $18{,}56^3$; 13) $2{,}46803^3$; 14) $0{,}391^3$; 15) $0{,}0007835^3$;
16) $(2{,}37\cdot10^2)^3$; 17) $0{,}5397219^3$; 18) $0{,}00297^3$;
19) $(2{,}508\cdot10^4)^3$.

53. С каким ускорением $a=F/m$ двигался при разбеге реактивный самолет массой $m\approx60{,}5$ т, если сила тяги двигателей $F\approx92{,}3$ кН?

54. По формуле $Q=I^2Rt$ определите количество теплоты Q, выделяемой в проводнике сопротивлением $R=25$ Ом в течение $t\approx12{,}5$ с, если сила тока в проводнике $I\approx0{,}45$ А.

55. По формуле $F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$ найдите силу F гравитационного взаимодействия Земли и Луны, если масса Земли $m_1\approx5{,}98\cdot10^{24}$ кг, масса Луны $m_2\approx7{,}35\cdot10^{22}$ кг, среднее расстояние между ними $r\approx3{,}84\cdot10^8$ м и гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг².

56. Для окраски пола размером $12{,}0\times4{,}0$ м² израсходовано 5,28 кг краски. Сколько потребуется краски для окраски пола комнаты размером $5{,}2\times4{,}6$ м²?

57. Вычислите массу стальной трубы длиной $l\approx3{,}75$ м, если внешний диаметр ее $D_1\approx155$ мм, внутренний $D_2\approx133$ мм, плотность стали — $7{,}9\cdot10^3$ кг/м³.

58. Определите, с какой силой надо давить на малый поршень гидравлической машины площадью 12 см², чтобы на большом поршне площадью 125 см^2 получить силу 455 Н. Указание: Без учета трения сила давления пропорциональна площади поршня.

59. Вычислите:

1) $\sqrt{1,753}$; 2) $\sqrt{39,251}$; 3) $\sqrt{0,0289}$;
4) $\sqrt{0,000064234}$; 5) $\sqrt{3,46\cdot 10^5}$; 6) $\sqrt[3]{2,35}$;
7) $\sqrt[3]{17,41}$; 8) $\sqrt[3]{0,00059342}$; 9) $\sqrt[3]{9,54\cdot 10^5}$;
10) $\sqrt[3]{3,7124\cdot 10^{-4}}$; 11) $1:395$; 12) $1:0,0371$.

60. По формуле $T=2\pi\sqrt{l/g}$ вычислите период колебания маятника длиной $l\approx 120,0$ см. Ускорение силы тяжести $g\approx 9,81$ м/с^2.

61. Цилиндр диаметром $(2\pm 0,01)$ см и высотой $(11\pm 0,02)$ см имеет массу, равную $(93,4\pm 0,001)$ г. Определите плотность материала, из которого сделан цилиндр.

62. Вычислите с точностью до 0,001:

1) $\sin 12°$; 2) $\sin 15°36'$; 3) $\sin(\pi/5)$; 4) $\cos(2\pi/7)$;
5) $\cos 27°47'$; 6) $\sin 763°$; 7) $\cos(7\pi/3)$; 8) $\operatorname{tg} 37°25'$;
9) $\operatorname{tg}(3\pi/8)$; 10) $\operatorname{ctg} 7°38'$; 11) $\operatorname{tg}(9\pi/13)$; 12) $\operatorname{ctg}(8\pi/17)$;
13) $\lg 7,234$; 14) $\lg 0,058$; 15) $\ln 178,35$;
16) $\ln 31,29$; 17) $10^{1,84}$; 18) $e^{0,541}$; 19) $10^{-0,5463}$;
20) e^{-47}; 21) $e^{4,2}$; 22)* e^{-235}; 23) $3,7^4$;
24) $0,596^{2,34}$; 25) $34,2^{-0,71}$; 26) $5,9843^{-1,342}$;
27)* $7,2^{153}$.

63. Решите прямоугольный треугольник ($\gamma=90°$, c — гипотенуза, a и b — катеты, противолежащие соответственно углам α и β) по следующим данным:

1) a, α; 2) $a=2,34$; $\alpha=17°42'$;
3) $b=0,04794$; $\alpha=40°23'$;
4) c, α; 5) $c=175,3$; $\beta=34°15'$;
6) $c=0,291$; $\alpha=72°36'$; 7) a, b; 8) $a=24,5$; $b=78,3$;
9) $a=0,0059341$; $b=0,0078261$; 10) a, c;
11) $c=72,308$; $b=51,462$; 12) $c=0,29$; $a=0,18$.

64. Решите треугольник (α, β, γ — углы треугольника, a, b, c — противолежащие им стороны) по следующим данным:

1) a, α, β; 2) $b=3,28$; $\alpha=28°36'$; $\gamma=59°12'$;
3) $c=0,2479$; $\alpha=43°18'$; $\gamma=53°$; 4) a, b, c;
5) $a=17,28$, $b=19,34$, $c=23,52$;
6) $a=0,0172$, $b=0,0253$; $c=0,0321$;
7) α, a, b; 8) $\gamma=57°43'$, $c=13,4$, $a=11,8$;

9) $b=0,3467$, $c=0,5218$, $\beta=38°24'$; 10) a, b, γ;
11) $b=3417$, $c=2853$, $\alpha=17°22'$; 12) $a=0,34$, $c=0,27$; $\beta=72°19'$.

65. Вычислите с точностью до 10^{-4} значения функции в указанных точках:

1) $f(x)=3\sin 2x+5,2$ при $x=\pi/12$; $\pi/6$; $\pi/4$;
2) $\varphi(x)=5\cos x-12\sin x$ при $x=15°$; $17°$; $19°$; $21°$;
3) $y=9e^{3x}-7,54$ при $x=-0,5$; $-0,25$; 0; $0,25$; $0,5$; $0,75$;
4) $y=0,2t^3-3,4t^2+2,5$ при $t=0$; $1,5$; $1,75$; $1,934$;
5) $f(x)=\frac{1-2\cos x}{2x}$ при $x=-0,3$; $-0,25$; $0,753$; $1,3452$;
6) $S=5,41\ln(2,31t+1,74)+4,89$ при $t=1$; $1,001$; $1,01$; $1,1$;
7) $y=2e^{-10t}\sin(30t+0,6)$ при $t=0$; 1; $2,5$.

66. Найдите корни уравнения с точностью до 10^{-3}:
1) $5x^2-7x+1=0$; 2) $12x^2+4x-15=0$;
3) $-3,7x^2-2,1x+1,4=0$; 4) $4,8x^2+7,3x-8,2=0$;
5) $17,5x^2-12,5x-24,1=0$;
6) $0,358x^2-0,642x-0,541=0$.

67. Вычислите силу взаимодействия между двумя тучами по формуле $F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где заряды туч $q_1=18$ Кл, $q_2=21$ Кл, расстояние между тучами $r\approx 12\,500$ м, электрическая постоянная $\varepsilon_0\approx\frac{8,85}{10^{12}}$ Ф/м.

6. Вычисления на микрокалькуляторе (МК) (дополнительный материал)

68. Выполните ввод чисел на МК:

1) 274; 2) 3586; 3) 456937; 4) 24,37; 5) 1,376;
6) 0,543; 7) 0,000983; 8) 0,0000654; 9) 234567891;
10) $2,46\cdot10^5$; 11) $3,574\cdot10^5$; 12) $2,4\cdot10^{-3}$;
13) $5,69\cdot10^{-12}$; 14) $1,8\cdot10^{-22}$; 15) $3,213\cdot10^{12}$;
16) $-45,65$; 17) $-7,132\cdot10^{43}$; 18) -27631;
19) $-3,2\cdot10^{-101}$.

Какие из этих чисел на вашем МК ввести нельзя?

69. Как будут высвечиваться на индикаторе микрокалькулятора БЗ-34, МК-54, МК-56 числа:

1) 25; 2) -123456789; 3) $-0,00123$; 4) 1,365;
5) $-0,5$; 6) $362,57\cdot10^5$;
7) $9746,351\cdot10^{-3}$; 8) $25,92\cdot10^{-8}$.

70. На индикаторе микрокалькулятора высвечиваются числа:

1) $\boxed{\text{36.07}}$; 2) $\boxed{\text{-1.8} \quad \text{-02}}$; 3) $\boxed{\text{19.}}$;

4) $\boxed{\text{-1.} \quad \text{-03}}$; 5) $\boxed{\text{2.1} \quad \text{09}}$; 6) $\boxed{\text{43275.68} \quad \text{-03}}$.

Запишите их, используя естественную запись числа.

71. Выполните действия, считая исходные данные точными:

1) $274+357$; 2) $1285-746$;
3) $0{,}00398-0{,}0576$; 4) $0{,}00074+0{,}0356$;
5) $4{,}32\cdot5{,}76$; 6) $32{,}84\cdot7{,}21$;
7) $0{,}352\cdot9864$; 8) $0{,}0078\cdot0{,}0361$;
9) $5762413:12$; 10) $0{,}0384:0{,}0006$;
11) $7{,}34:24{,}53$; 12) $3{,}28:0{,}05792$.

Всегда ли результат будет точным числом? Зависит ли ответ от типа МК?

72. Составьте программы для вычисления выражений:

1) $ab+c$; 2) $a(b+c)$; 3) $(a+b)(c+d)$;
4) a^2+b^2; 5) a^2-b^2; 6) $(a+b)^2$; 7) a^3+b^3;
8) $(a+b)^3$; 9) b^2-4ac; 10) $a/(b+c)$; 11) $(a+b)/c$;
12) $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{d+l}{f}$; 13) $(a+b)/(c+d)$; 14) $\sqrt{a^2+b^2}$;
15) $\sqrt{a^2-b^2}$; 16) $\sqrt{b^2-4ac}$; 17) ax^2+bx+c;
18) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

73. Запишите выражение, значение которого можно вычислить по следующей программе на указанном микрокалькуляторе (и ему подобных):

1) $\boxed{a}\boxed{\times}\boxed{b}\boxed{+}\boxed{c}\boxed{\times}\boxed{d}\boxed{/-/}\boxed{=}$, Б3-18, Б3-18М, Б3-32;

2) $\boxed{a}\boxed{\uparrow}\boxed{b}\boxed{+}\boxed{d}\boxed{\times}\boxed{e}\boxed{\div}$, Б3-34.

74. Составьте программы перехода от градусной меры к радианной и наоборот.

75. Вычислите с точностью до 10^{-3}:

1) $4{,}371+5{,}229$; 2) $3{,}598\cdot4{,}713$; 3) $0{,}471:2{,}35$;
$4{,}371+7{,}462$; $3{,}598\cdot12{,}54$; $0{,}471:12{,}7$;
$4{,}371+3{,}184$; $3{,}598\cdot168{,}4$; $0{,}471:0{,}325$;
$4{,}371-21{,}595$; $3{,}598\cdot0{,}8952$; $0{,}471:0{,}00743$;
$4{,}371-2{,}196$; $3{,}598\cdot0{,}004731$; $0{,}471:1250$.

76. Найдите значение многочлена с точностью до 10^{-4}:

1) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$, при $x = 2{,}74$; $-4{,}519$; $5{,}732 \cdot 10^2$.

Указание. Представьте многочлен $P(x)$ в виде $P(x) = ((2x - 3)x + 5)x - 7$.

2) $P(x) = 2{,}72x^4 + 3{,}52x^3 - 4{,}28x^2 - 1{,}17x - 3$ при $x = 1{,}12$; $-8{,}371$.

77. Вычислите значения дробно-рациональной функции с точностью до 10^{-4}:

1) $Q(x) = \dfrac{4x^2 - 7x + 3}{2x^2 + 5x - 7}$ при $x = -3{,}8$; $4{,}713$.

2) $R(x) = \dfrac{1{,}3x^3 - 2{,}7x^2 + 4{,}1x - 5{,}2}{3{,}6x^2 + 2{,}3x - 6{,}7}$ при $x = 0$; 2; $-1{,}41$; $2{,}308$.

78. Вычислите с точностью до 10^{-4} приращение функции $f(x)$ при изменении аргумента от $x_0 = 0$ до x_1 ($x_1 = 1$; $0{,}5$; $0{,}3$; $0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}02$; $0{,}01$). Найдите отношение приращения функции к соответствующему приращению аргумента:

1) $f(x) = 1 + 2x - x^2$;
2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$;
3) $f(x) = 5{,}1x^3 - 4{,}2x^2 + 1{,}8x - 2{,}3$.

79. Найдите члены последовательности (a_n) с точностью до 10^{-4} при заданных значениях n:

1) $a_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 4}{5n^2 - 7n + 1}$, $n = 3$; 13; 23; 33; 43; 53;

2) $a_n = \dfrac{4n^2 - 5n + 7}{2n^2 + 3n - 4}$, $n = 2$; 12; 22; 32; 42; 52;

3) $a_n = \dfrac{4{,}5672n + 2{,}7816}{3n - 0{,}4579}$, $n = 51$; 52; 53; 54; 55;

4) $a_n = \dfrac{23{,}7841n + 3{,}2159}{4{,}7184n - 2{,}3951}$, $n = 65$; 75; 85; 95.

80. Решите систему уравнений с точностью до 10^{-3}:

$$11{,}04x - 10{,}49y = 1,$$
$$10{,}49x - 10{,}04y = 0.$$

Затем решите систему, предварительно округлив коэффициенты: 1) до двух; 2) до трех значащих цифр. Сравните полученные результаты.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Можно ли сравнить качество приближений по их абсолютным погрешностям?

2. Какой из результатов измерений точнее: 0,0025 т или 0,372 м?

3. Какое приближение точнее: $l_1=(2,56\pm0,01)$ м или $l_2=(376\pm1)$ м?

4. Сколько десятичных знаков в записи следующих приближенных чисел: $a=0,37$; $b=0,0451$; $c=0,003072$; $d=0,056890$? Сколько в каждом из них значащих цифр?

5. Приведите примеры приближенных чисел, в которых количество десятичных знаков: 1) больше числа значащих цифр; 2) меньше числа значащих цифр; 3) равно числу значащих цифр.

6. Какова граница относительной погрешности приближенного числа, имеющего две значащие цифры? три значащие цифры?

7. Можно ли округлять абсолютную и относительную погрешности приближения по недостатку?

8. Округлите числа 273,521, 0,03984, 1,0053 до двух: 1) значащих цифр; 2) десятичных знаков.

9. Всегда ли граница абсолютной погрешности суммы двух приближенных чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых?

§ 3. Комплексные числа

1. Развитие понятия числа.

81. Какая операция не всегда выполнима на множестве натуральных чисел, но выполнима на множестве целых чисел?

82. Какая операция не всегда выполнима на множестве целых чисел, но выполнима на множестве рациональных чисел?

83. Всякое ли натуральное число является целым? А наоборот? Всякое ли рациональное число является целым? А наоборот? Всякое ли действительное число является рациональным? А наоборот?

84. Если a и b — натуральные числа, то в множестве каких чисел всегда имеет решение каждое из следующих уравнений:

1) $x/a=b$; 2) $ax=b$; 3) $x+a=b$; 4) $x-a=b$; 5) $ax^2=b$?

85. При каких целых значениях a и b уравнение $ax=b$ разрешимо на множестве целых чисел? В каком множестве это уравнение всегда разрешимо при целых a и b?

86. При каких действительных значениях a и b уравнение $ax^2=b$ разрешимо на множестве действительных чисел?

87. Верны ли утверждения: а) каждому рациональному числу соответствует вполне определенная точка числовой оси; б) каждой точке числовой оси соответствует вполне определенное рациональное число?

88. Какие из следующих уравнений имеют и какие не имеют корней на множестве действительных чисел:

1) $x^2-7x+11=0$; 2) $2x^2-4x+7=0$;
3) $x^2+x-5=0$; 4) $3x^2-4x+1=0$;
5) $x^2-x+5=0$; 6) $x^2+2x+1=0$?

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. *Комплексные числа* имеют вид $a+bi$, где a и b — действительные числа, i — некоторый символ, удовлетворяющий условию

$$i^2=-1.$$

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$. *Сумма и произведение комплексных чисел* определяются следующим образом:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Способ записи комплексных чисел в виде $a+bi$ принято называть *алгебраической формой.*

Действительные числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой частью* комплексного числа $z=a+bi$.

Комплексные числа вида $a+0i$ отождествляются с действительными числами a. Комплексные числа вида $0+bi$ обозначают bi и называют *чисто мнимыми числами*. Числа $a+bi$, где $b\neq 0$, иногда называют мнимыми числами. Таким образом, множество комплексных чисел состоит из действительных и мнимых чисел.

Сопряженным с комплексным числом $z=a+bi$ называется число $\bar{z}=a-bi$; комплексное число $-z=-a-bi$ называется *противоположным* числу $z=a+bi$.

Пример 1. Найти комплексное число z из уравнения

$$(1+i)z=-2+3i.$$

Решение. Пусть $z=x+yi$. Тогда $(1+i)(x+yi)=$ $=-2+3i$. Выполнив умножение в левой части, получим $(x-y)+(x+y)i=-2+3i$. Из условия равенства двух комплексных чисел имеем

$$x-y=-2,$$
$$x+y=3.$$

Решив эту систему, найдем $x=0{,}5$; $y=2{,}5$.

Ответ: $z=0{,}5+2{,}5i$.

Вычитание и деление комплексных чисел являются действиями, обратными соответственно сложению и умножению. Отсюда получаются следующие правила вычитания и деления комплексных чисел:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i;$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Последнюю формулу можно не запоминать: она получается умножением числителя и знаменателя дроби $\frac{a+bi}{c+di}$ на число, сопряженное со знаменателем. При этом знаменатель, равный произведению двух сопряженных комплексных чисел, станет действительным числом.

Пример 2. Решить уравнение $(3-2i)\,z=3+i$.

Решение. $z=\frac{3+i}{3-2i}=\frac{(3+i)\,(3+2i)}{(3-2i)\,(3+2i)}=\frac{9+3i+6i+2i^2}{9+4}=$
$=\frac{7+9i}{13}=(7+9i)\cdot\frac{1}{13}=\frac{7}{13}+\frac{9}{13}i.$

89. Выполните действия:

1) $(4-3i)+(-2+i)$; 2) $(5+6i)+(7-6i)$;
3) $(-0{,}7+0{,}3i)+(0{,}9-1{,}7i)$; 4) $(-0{,}4-2{,}1i)+(0{,}6+3i)$;
5) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$; 6) $(2+3i)(6-5i)$;
7) $(-3+2i)\cdot 2+(7-5i)\cdot 3$; 8) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}4+0{,}5i)$;
9) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}i\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)$; 10) $(2-3i)^2$; 11) $(-1+i)^2$;
12) $3+i+(-2+5i)(-1-2i)$;
13) $(3-2i)(1+4i)+(-6-i)$;
14) $(4-5i)(-2+3i)+(1+2i)(-3+4i)$;
15) $(-7+i)-(-2-3i)$;
16) $(5+i)(15-3i)$; 17) $\frac{3-2i}{5}$.

90. Найдите действительные числа x и y из уравнений:

1) $-\frac{2}{y}+xi=3$; 2) $x^2-3(x+1)+2i=yi-5$;
3) $(1+i)\,x+(1-i)\,y=3-i$;
4) $(2-i)\,x+(1+i)\,y=5-i$;

5) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$;

6) $(x+3yi)+\left(\frac{3}{2}y+2xi\right)=4+8i$;

7) $\frac{i}{x}+\frac{i}{y}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5i}{y}$; 8) $x+y+ixy=1$;

9) $(-3y+0{,}5xi)-(-8x+5yi)=-2+9{,}5i$;

10) $x+y+ixy=i$.

91. Назовите комплексные числа, противоположные и сопряженные данным:

1) $3+i$; 2) $1-5i$; 3) $-2i$; 4) $4i$; 5) 0;
6) $-7+i$; 7) 5; 8) $-3-2i$.

92. Найдите произведение двух сопряженных комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$.

93. Разложите на множители:

1) a^2+b^2; 2) $a+b$, $a>0$; $b>0$; 3) $2+\sqrt{3}$;
4) $9a^2+16b^2$; 5) $36a^2+25b^2$.

94. Сократите дробь:

1) $\frac{9m^2+4n^2}{3m-2in}$; 2) $\frac{x+1}{\sqrt{x}+i}$; 3) $\frac{a+b}{\sqrt{a}-i\sqrt{b}}$.

95. Выполните действия:

1) $\frac{1}{1-i}$; 2) $\frac{5}{1+2i}$; 3) $\frac{2+i}{2-i}$; 4) $\frac{3i}{1+i}$;

5) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$; 6) $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{5-4i}{4+5i}$;

7) $\frac{m\sqrt{n}-n\sqrt{m}\,i}{n\sqrt{m}+m\sqrt{n}\,i}$; 8) $\frac{1+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}+2i$; 9) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

96. Решите уравнение:

1) $(2-5i)z=2+5i$; 2) $(2+5i)z=2-5i$.

97. Докажите, что числа $\frac{1-i}{1+i}$ и $\frac{1+i}{1-i}$ являются противоположными.

98. Проверьте равенство:

1) $\frac{2+i}{3-i}=\frac{13+4i}{17-9i}$; 2) $\frac{\sqrt{m}+i\sqrt{n}}{\sqrt{m}-i\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}+i\sqrt{m}}{\sqrt{n}-i\sqrt{m}}=\frac{2(m-n)}{m+n}$,

$m>0$, $n>0$.

99. Докажите, что следующие числа действительны:

1) $z+\bar{z}$; 2) $\frac{1}{i}(z-\bar{z})$; 3) $\frac{z}{\bar{z}}-\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{2z\bar{z}}$.

100. Покажите, что для любого целого числа k справедливы равенства: $i^{4k}=1$; $i^{4k+1}=i$; $i^{4k+2}=-1$; $i^{4k+3}=-i$.

101. Вычислите:

1) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$; 2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$;

3) $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}$; 4) $(1+i)^{-3}$; 5) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$;

6) $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$; 7)* $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i(1+i)^{98}}$;

8)* $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\ldots i^{100}$; 9) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}$, где $k\in \boldsymbol{N}$.

102. Найдите значение многочлена:

1) $x^{25}-8x^{14}+5x^4-4x^2-10$ при $x=i$;
2) x^3+x^2+x+1 при $x=1+i$.

103*. Найдите чисто мнимые числа u и v из равенств
1) $u+iv=-3+2i$; 2) $5u-6iv=-24-5i$.

104*. Найдите комплексные числа, каждое из которых сопряжено со своим квадратом.

105. Докажите, что квадрат комплексного числа $a+bi$ представляет собой действительное число тогда и только тогда, когда либо $a=0$, либо $b=0$.

106. При каком условии квадрат комплексного числа $a+bi$ является чисто мнимым числом?

107. При каких действительных значениях x числа

$$z_1=x+(3i-1)^2 \text{ и } z_2=2x^2+6i+2i^2$$

будут противоположными?

3. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. Корни любого квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ с действительными коэффициентами и дискриминантом $D=b^2-4ac$ находятся по известной формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$

где $\sqrt{D}=i\sqrt{|D|}$, если $D<0$.

Пример. Решить уравнение $x^3=-8$.

Решение. Разложив левую часть уравнения $x^3+8=0$ на множители, получим $(x+2)(x^2-2x+4)=0$. Отсюда $x+2=0$, т. е. $x=-2$, или $x^2-2x+4=0$. Дискриминант последнего уравнения $D=4-4\cdot1\cdot4=-12<0$. Поэтому $x=1+i\sqrt{3}$ или $x=1-i\sqrt{3}$.

Ответ: $x_1=-2$; $x_2=1+i\sqrt{3}$; $x_3=1-i\sqrt{3}$.

108. Решите уравнение:

1) $x^2=-16$; 2) $x^2=-2$; 3) $3x^2=-5$; 4) $x^2+0{,}09=0$.

109. Решите уравнение:

1) $x^2-2x+5=0$; 2) $3x^2+4x+3=0$;
3) $x^2-8x+20=0$; 4) $5x^2-4x+8=0$.

110. Решите систему уравнений:

1) $x+y=6,$ $xy=45;$ 2) $2x+3y=1,$ $xy=1;$ 3) $x^2+y^2=1,$ $x-y=3.$

111. Докажите, что корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом являются сопряженными.

112. Докажите, что теорема Виета справедлива для квадратных уравнений с отрицательными дискриминантами.

113. Составьте квадратное уравнение по его корням:
1) $x_1=3+2i$; $x_2=3-2i$; 2) $x_1=-1+4i$; $x_2=-1-4i$.

114. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее данный корень;

1) $2-i$; 2) $-1+\frac{1}{2}i$; 3) $\sqrt{5}-i\sqrt{2}$; 4) $0{,}5-1{,}5i$.

115. Решите уравнение:

1) $x^3=8$; 2) $x^3=-27$; 3) $x^4=16$; 4) $x^4=81$.

116*. Извлечение квадратного корня из комплексного числа $z=a+bi$ можно выполнить решением уравнения $(x+yi)^2=a+bi$. Найдите квадратные корни из следующих комплексных чисел z:

1) $z=i$; 2) $z=3+4i$.

4. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Каждому комплексному числу $z=a+bi$ можно сопоставить точку плоскости с координатами $(a;\ b)$. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Это соответствие позволяет комплексные числа называть точками и говорить, например, о точке $a+bi$. Комплексное число $a+bi$ можно изображать также в виде вектора с координатами $(a;\ b)$. При этом сумма и разность двух комплексных чисел изображаются соответственно суммой и разностью соответствующих векторов.

117. Постройте на координатной плоскости точки z, $\bar{z}$, $-z$, если:

1) $z=3+i$; 2) $z=-1+2i$; 3) $z=2i$; 4) $z=3$;
5) $z=-3i$; 6) $z=-2i-3$; 7) $z=-4$; 8) $z=4-i$.

118. Какое комплексное число соответствует точке плоскости:

1) (0; 2); 2) (2; 3); 3) (—3; 0); 4) (5; —5);
5) (0; —2); 6) (—2; 4); 7) (3; 0); 8) (—1; —1)?

119. Постройте вектор, соответствующий комплексному числу:

1) $z=-3$; 2) $z=2i$; 3) $z=2+3i$; 4) $z=-2+3i$;
5) $z=-1-i$; 6) $z=3-2i$.

120. Какое число соответствует точке, симметричной точке (—2; 3) относительно: 1) оси x; 2) оси y; 3) начала координат?

121. Дана точка $a+bi$. Постройте на той же плоскости точку:

1) $a-bi$; 2) $-a+bi$; 3) $a+0i$; 4) $0+bi$;
5) $-a+0i$; 6) $0-bi$; 7) $-a-bi$.

122. Дана точка $a-bi$. Постройте на той же плоскости точку:

1) $3a+0i$; 2) $-5a+0i$; 3) $0+2bi$; 4) $0-bi$.

123. Изобразите на плоскости множество точек $z=x+yi$, если

1) $x>0$; 2) $x<-2$; 3) $y>3$; 4) $y<1$;
5) $x=3$; 6) $y=0$; 7) $x=1$; $y=3$; 8) $1<x<3$;
9) $0\leqslant y\leqslant 4$; 10) $1<x<2$; $-1<y\leqslant 1$;
11) $x=1$; $-1\leqslant y\leqslant 2$.

124. Постройте сумму векторов, изображающих следующие комплексные числа:

1) $z_1=2-i$; $z_2=-3+2i$; 2) $z_1=6i$; $z_2=-5-2i$.

125. Какое число соответствует середине отрезка, концы которого расположены в точках $z_1=1$, $z_2=i$?

126. На плоскости даны две точки: $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$. Где находится точка $(z_1+z_2)/2$?

127*. Вершины четырехугольника O, A, B, C находятся соответственно в точках 0, $1+i$, 3 и $2-i$. Пользуясь геометрической интерпретацией действий над комплексными числами, найдите точку пересечения диагоналей OB и AC четырехугольника.

128. Укажите на плоскости точки z, для которых:

1) $\bar{z}=1/z$; 2) $z=1+i-\bar{z}$; 3) $\bar{z}=-1/z$.

5. Модуль и аргумент комплексного числа. *Модулем* числа $z = a + bi$ называется число

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$|z|$ — расстояние от точки O до точки z (рис. 1). Модуль разности двух комплексных чисел z_1 и z_2 есть расстояние между точками z_1 и z_2. Часто модуль комплексного числа обозначают буквой r.

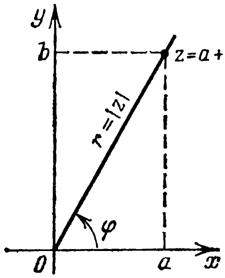


Рис. 1

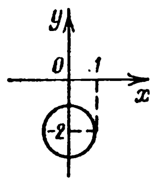


Рис. 2

Пример 1. Построить множество точек z, удовлетворяющих условию $|z + 2i| = 1$.

Решение. Число $z + 2i$ можно представить в виде $z-(-2i)$. Так как $|z-(-2i)| = 1$, то точки z находятся на расстоянии 1 от точки $-2i$, т. е. они лежат на окружности с центром в точке $-2i$ и радиусом 1 (рис. 2).

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется угол между положительным направлением оси x и лучом Oz (рис. 1). Аргумент обозначается φ или $\arg z$. Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ находится из соотношений

$$\cos\varphi = a/|z|, \qquad \sin\varphi = b/|z|.$$

Для комплексного числа $z \neq 0$ он определен неоднозначно. Если φ — аргумент числа z, то $\varphi + 2k\pi$ при любом целом k также является аргументом этого числа. Аргумент нуля не определен. То значение аргумента, которое заключено в промежутке $]-\pi;\ \pi]$, будем называть *главным значением аргумента.*

Пример 2. Найти модуль и аргумент числа $z = -3 + i$.

Решение. Модуль числа z равен

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

Аргумент числа $z=a+bi\neq 0$ можно находить следующим образом: выяснить в какой четверти находится точка z; найти в этой четверти угол φ, решив одно из уравнений $\cos\varphi=a/r$ или $\sin\varphi=b/r$ или, если $a\neq 0$, уравнение $\operatorname{tg}\varphi=b/a$. В нашем случае $a=-3$, $b=1$, $\operatorname{tg}\varphi=-1/3$. Так как точка z лежит во второй четверти и $\operatorname{tg}\varphi=-1/3$, то $\varphi=180°-\operatorname{arctg}(1/3)\approx 180°-18°26'=161°34'$.

Итак, главное значение аргумента числа z

$$\varphi\approx 161°34'.$$

Все значения аргумента z имеют вид

$$\arg z\approx 161°34'+360°k,\qquad k\in \mathbf{Z}.$$

129. Найдите модуль и все значения аргумента комплексного числа:

1) 3; 2) i; 3) $-5i$; 4) -2; 5) $1+i$; 6) $3-4i$;
7) $-\sqrt{3}+i$; 8) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; 9) $\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/3)$.

130. По данным модулю и аргументу комплексного числа постройте соответствующий ему вектор:

1) 1; 180°; 2) 2; 45°; 3) 3; 90°; 4) 1/3; —90°;
5) 1,5; 60°; 6) 3/4; 150°; 7) 5; —135°.

131. Найдите главное значение φ аргумента комплексного числа, если

1) $\sin\varphi=-0{,}5$; 2) $\cos\varphi=\sqrt{2}/2$; 3) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$; 4) $\sin\varphi=0{,}7$.

132. Постройте комплексное число z с аргументом φ, если известно, что:

1) $\sin\varphi=1/2$; $|z|=2$; 2) $\cos\varphi=1/2$; $|z|=1$;
3) $\operatorname{tg}\varphi=1/2$; $|z|=3$.

133. На оси x дан единичный вектор, отложенный от начала координат. Над ним выполнили следующие операции: 1) растяжение в 3 раза и поворот на угол 180°; 2) растяжение в 2 раза и поворот на 90°; 3) растяжение в 4 раза и поворот на 30°. Постройте полученные векторы и укажите соответствующие им комплексные числа.

134. Найдите расстояние между точками:

1) 0 и -4; 2) 5 и -2; 3) 3 и $4i$;
4) -7 и i; 5) $5i$ и $-3i$; 6) 0 и $1-i$;
7) $1+i$ и $2+3i$; 8) $3-2i$ и $1+4i$.

135. Постройте множество точек z, удовлетворяющих условиям:

1) $|z|=3$; 2) $\arg z=3\pi/4$; 3) $|z|=1$; $\arg z=\pi/4$;
4) $|z|\leqslant 2$; 5) $|z|>4$; 6) $1\leqslant|z|\leqslant 2$;
7) $2<|z|\leqslant 4$, $\arg z=\pi/3$; 8) $\pi/6<\arg z<\pi/2$;
9) $z=2$, $0<\arg z<\pi/4$;
10) $|z|\leqslant 1$, $\pi/4<\arg z<3\pi/4$;
11) $|z-1|=1$; 12) $|z-2+i|=2$;
13) $|z-2|<3$; 14) $|z-i|>2$;
15) $|z-1+2i|<4$; 16) $|z+2-i|>1$;
17) $|z-1|=|z-i|$; 18) $\lg|z+2i|<1$.

136. На плоскости дана окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5. При каком условии точка, изображающая комплексное число z, будет лежать:

1) внутри круга, 2) на окружности, 3) вне круга?

137. Каким условиям удовлетворяют комплексные числа z, изображенные на: 1) рис. 3; 2) рис. 4; 3) рис. 5?

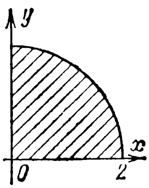


Рис. 3

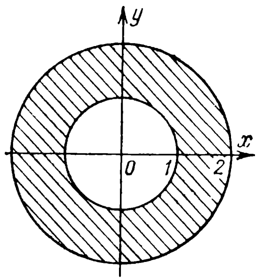


Рис. 4

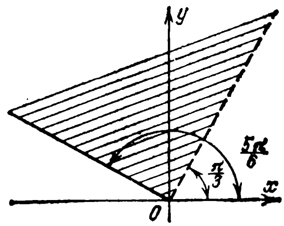


Рис. 5

138. Решите уравнение:

1) $z^2+|z|^2=0$; 2) $|z|-iz=1-2i$.

6. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Любое комплексное число $z\neq 0$ можно представить в виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где $r=|z|$, $\varphi=\arg z$. Эта форма записи называется *тригонометрической*.

Обозначим $\cos\varphi+i\sin\varphi$ через $e^{i\varphi}$. Запись комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в виде

$$z=re^{i\varphi}$$

называется *показательной формой комплексного числа*.

По определению

$$e^{x+yi}=e^{x}(\cos y+i\sin y),$$

т. е. e^{x+yi} есть комплексное число, модуль которого e^{x}, а аргумент равен y. Для степени e с комплексным показателем сохраняются все свойства степеней с действительными показателями.

139. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексное число:

1) $z=3(\cos 0+i\sin 0)$; 2) $z=\sqrt{2}(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$;
3) $z=2(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))$;
4) $z=4(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3))$;
5) $z=\cos\pi+i\sin\pi$; 6) $z=\sqrt{3}(\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2))$;
7) $z=\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))$;
8) $z=6(\cos(2\pi/9)+i\sin(2\pi/9))$;
9) $z=\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ$; 10) $z=5(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))$.

140. Представьте в тригонометрической и показательной формах число:

1) 2; 2) -3; 3) $6i$; 4) $-4i$; 5) $-1+i$;
6) $\sqrt{3}-i$; 7) $-2-2i$; 8) $-3+4i$; 9) $-5+i$;
10) $7{,}2+5{,}1i$; 11) $-0{,}7+1{,}2i$; 12) $1+i\operatorname{tg}1$;
13) $2(\cos 20^\circ-i\sin 20^\circ)$; 14) $\sin\varphi+i\cos\varphi$;
15) $-5(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)$;
16*) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

141. Представьте в тригонометрической и алгебраической формах число:

1) $3e^{2\pi i/3}$; 2) $4e^{-i\pi/4}$; 3) e^{i}; 4) e^{0i};
5) $2e^{\pi i/2}$; 6) $5e^{-\pi i/2}$; 7) $\sqrt{2}e^{\pi i}$; 8) $3e^{2\pi i}$;
9) $2e^{2+i\pi}$; 10) $6e^{1{,}5i}$; 11) e^{2-i}; 12) $14e^{-i\cdot 17\pi/90}$; 13) $2e^{1+\pi i}$.

142. Докажите, что $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\cos\varphi-i\sin\varphi$.

143. Постройте точки, изображающие комплексные числа с модулем равным 1, аргументы которых:

1) 120°; 240°; 360°; 2) 30°; 120°; 210°; 300°.

Покажите, что сумма этих чисел равна нулю.

144. Представьте в алгебраической форме числа:

1) $e^{\alpha+\beta i}$; 2) $e^{\alpha-\beta i}$; 3) $Ce^{\alpha+\beta i}$; 4) $e^{\alpha_1+\beta_1 i}+e^{\alpha_2+\beta_2 i}$;
5) $C_1e^{\alpha_1+\beta_1 i}+C_2e^{\alpha_2+\beta_2 i}$ (α, β, α_1, β_1, α_2, β_2, C, C_1, C_2 — действительные числа).

7. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. С помощью тригонометрической и показательной форм удобно выполнять умножение, деление, возведение в степень комплексных чисел, извлечение корня. Пусть

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда:

1. $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

Эта формула справедлива для произведения любого конечного числа сомножителей. В частности, имеет место *формула Муавра*:

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\qquad n\in\boldsymbol{N}.$$

2. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

3) Корни $z_k\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ n-й степени из комплексного числа

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

находятся по формулам

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Геометрически все корни n-й степени из комплексного числа z совпадают с вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в начале координат радиусом $\sqrt[n]{|z|}$.

Пусть $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$. Тогда:

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z_1^n=r_1^ne^{in\varphi_1},\qquad n\in\boldsymbol{Z}.$$

Корни $z_k\,(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ n-й степени из комплексного числа $z=re^{i\varphi}$ вычисляются по формулам

$$z_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i(\varphi+2k\pi)/n},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

145. Выполните действия:

1) $2(\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ)\cdot 4(\cos 140^\circ+i\sin 140^\circ)$;
2) $3(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))\cdot\sqrt{3}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))$;
3) $(\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6))\sqrt{2}(\cos(-\pi/12)+i\sin(-\pi/12))$;
4) $5(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ)\times$
$\times 4(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ)$;
5) $(\cos 3+i\sin 3)(\cos 2+i\sin 2)$;
6) $6(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ):(2(\cos(-50^\circ)+i\sin(-50^\circ)))$;
7) $4(\cos(5\pi/12)+i\sin(5\pi/12)):\ (\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))$;

8) $3(\cos(-5\pi/6)+i\sin(-5\pi/6)):$
$:(\sqrt{3}(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)))$.

146. Выполните действия:

1) $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$; 2) $\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta-i\sin\beta}$;

3) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$;

4) $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)$;

5) $\dfrac{-\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta-i\sin\beta}$; 6) $\dfrac{-\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ}{-\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ}$.

147. Дан вектор, изображающий комплексное число z. Его растянули в t раз и повернули на угол φ. Найдите комплексное число, соответствующее новому вектору, если:

1) $z=1+i$; $t=\sqrt{2}$; $\varphi=\pi/4$; 2) $z=2+3i$; $t=2$; $\varphi=-\pi/2$;
3) $z=-2+i$; $t=3$; $\varphi=\pi$.

148. Вычислите:

1) $(6(\cos(7\pi/8)+i\sin(7\pi/8)))^4$;
2) $(2(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ))^{12}$;
3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^{100}$; 4) $(\sqrt{3}+i)^{50}$; 5) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^8$;

6) $(-2-3i)^5$; 7) $\left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)^{10}$; 8) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;

9) $\dfrac{1}{(\cos 9^\circ+i\sin 9^\circ)^5}$; 10) $(1+i\sqrt{3})^3(1-i)^7$.

149*. Применяя формулу Муавра, докажите справедливость следующих тождеств:

1) $\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$;
2) $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$, $\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$.

150. Найдите все корни n-й степени из числа z:
1) $n=2$, $z=\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ$; 2) $n=4$; $z=1$;
3) $n=3$, $z=8$; 4) $n=4$, $z=-1$; 5) $n=3$, $z=i$;
6) $n=3$, $z=1+i$; 7) $n=4$, $z=1-i\sqrt{3}$;
8) $n=3$, $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

151. Решите уравнения:

1) $z^5=1$; 2) $z^5=i$; 3) $z^4=-16$; 4) $z^4+z^2+1=0$;
5) $z^6-9z^3+8=0$.

152. Постройте все корни n-й степени из 1 при $n = 3, 4, 5, 6$. Докажите, что они являются вершинами правильного n-угольника.

153. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах.

1) $2e^{i\cdot 7\pi/18}\cdot 3e^{i\cdot 11\pi/18}$; 2) $e^{i\pi/6}\cdot 4e^{i\pi/12}$;

3) $6e^{i}:(3e^{-i})$; 4) $4e^{i5\pi/9}:(\sqrt{2}\,e^{i\pi/9})$;

5) $(\sqrt{2}\,e^{i2\pi/9})^3$; 6) $(2e^{i\cdot 7\pi/9})^{10}$.

154. Найдите корни n-й степени из числа z:

1) $n=2$; $z=2e^{i\pi/3}$; 2) $n=3$, $z=e^{i\pi}$.

155. Представив числа $z_1=-1+i\sqrt{3}$ и $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ в показательной форме, вычислите:

1) $z_1\cdot z_2$; 2) z_1/z_2; 3) z_2/z_1; 4) z_1^6; 5) z_2^4; 6) z_1^{-3}.

156. Выполните действия, используя показательную форму комплексного числа:

1) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}$; 2) $\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

157. Докажите, что последовательность чисел (z_n), где

$$z_n=\cos nx+i\sin nx,$$

есть геометрическая прогрессия. Найдите ее знаменатель.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Что означает каждое из следующих утверждений: а) комплексное число $a+bi$ равно нулю; б) комплексное число $a+bi$ не равно нулю; в) два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ не равны друг другу?

2. Могут ли быть сопряженными: а) два действительных числа; б) действительное и мнимое число; в) два чисто мнимых числа?

3. Какое число сопряжено с $\bar{z}$?

4. При каком условии сумма двух комплексных чисел есть: а) действительное число? б) чисто мнимое число?

5. При каком условии разность двух комплексных чисел есть: а) действительное число? б) чисто мнимое число?

6. Что можно сказать о двух комплексных числах, если сумма и разность одновременно представляют собой: а) действительные числа; б) чисто мнимые числа?

7. Приведите примеры комплексных чисел и действий над ними, результат которых есть действительное число.

8. Может ли сумма квадратов двух комплексных чисел быть отрицательной?

9. Может ли квадратное уравнение с действительными коэффициентами иметь корни $1+i$ и $1+2i$?

10. В какой четверти координатной плоскости расположены точки, изображающие числа $2+7i$; $5-i$; $-3+2i$; $-1-i$?

11. Что можно сказать о комплексных числах, для которых соответствующие точки расположены на прямой, параллельной: 1) оси y, 2) оси x?

12. Приведите пример комплексных чисел, которым соответствуют два перпендикулярных вектора.

13. Напишите условие того, что точка z_1 находится на расстоянии 2 от точки z_2.

14. Что можно сказать о модулях двух сопряженных комплексных чисел?

15. Пусть $\arg z=\varphi$. Чему равен $\arg \bar{z}$, $\arg(-z)$?

16. Чему равен аргумент: а) чисто мнимого числа; б) любого отрицательного числа; в) любого положительного числа; г) нуля?

17. Какие знаки имеют числа a и b, если аргумент φ комплексного числа $a+bi$ удовлетворяет условию: а) $\varphi=0$; б) $0<\varphi<\pi/2$; в) $-\pi/2<\varphi<0$; г) $\varphi=\pi/2$?

18. В каких пределах заключено главное значение аргумента комплексного числа, расположенного в: а) первой четверти; б) второй четверти; в) третьей четверти; г) четвертой четверти?

19. Какие значения может принимать главное значение аргумента комплексного числа $a+bi$, если: а) $a>0$; б) $a<0$; в) $b>0$; г) $b<0$; д) $a\geqslant 0$; $b>0$; е) $a>0$; $b\leqslant 0$; ж) $a<0$; $b\geqslant 0$; з) $a\leqslant 0$; $b<0$?

20. Как располагаются векторы, изображающие два комплексных числа, если модуль суммы этих чисел равен: а) сумме модулей их? б) разности модулей?

21. Какие из следующих выражений не являются тригонометрической формой комплексного числа и почему:

а) $6(\cos(-\pi/4)+i\sin(\pi/4))$; б) $-2(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$;

в) $4(\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2))$; г) $\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)$;

д) $\sqrt{2}(\cos(\pi/3)+i\sin(-\pi/3))$; е) $3(\cos(\pi/6)-i\sin(-2\pi/3))$;

ж) $\sqrt{3}(\cos(4\pi/3)+i\sin(-2\pi/3))$;

з) $-2\cos(5\pi/9)(\cos(-4\pi/9)+i\sin(-4\pi/9))$?

22. Число $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ можно выразить через тригонометрические функции следующим образом:

а) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos(5\pi/3)+i\sin(5\pi/3)$;

б) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos(-5\pi/3)+i\sin(5\pi/3)$;

в) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)$;

г) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos(5\pi/3)+i\sin(-\pi/3)$;

д) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos(\pi/3)-i\sin(\pi/3)$.

Какая из этих записей будет тригонометрической формой числа z?

23. Вычислите: 1) $|\cos\varphi+i\sin\varphi|$; 2) $|e^{i\varphi}|$.

24. Какие из следующих выражений представляют собой показательную форму комплексного числа: $2e^{\pi/3}$; $-2e^{i\pi/3}$; $2e^{-i\pi/3}$; $ie^{\pi/3}$; e^{i}; $3e^{i\pi/12}$?

25. Как изменяются модуль и аргумент комплексного числа в результате умножения этого числа на: а) i; б) $-i$; в) $2i$; г) $-3i$; д) 4; е) 5?

Глава 2
МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. Векторы и координаты

1. Векторы. Векторные величины изображают с помощью направленных отрезков. Для изображения некоторых векторных величин (скорость поступательного движения твердого тела и др.) выбор начала направленного отрезка не существен. Направленные отрезки, имеющие равные длины и одинаковые направления, называют *равными*. Совокупность всех направленных отрезков, равных данному, определяет *вектор*. Обозначают векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., или $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$, *или* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,...

Все направленные отрезки, изображающие вектор $\vec{a}$, имеют одну и ту же длину и одно и то же направление, которые называют соответственно *длиной* (*модулем*, *абсолютной величиной*) и *направлением* вектора $\vec{a}$. Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|=a$.

Отрезки, начало и конец которых совпадают, определяют вектор, который называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю. Понятие направления для нулевого вектора не определено.

Для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ через $-\vec{a}$ обозначают вектор, *противоположный* данному (он имеет такую же длину, как и вектор $\vec{a}$, но противоположное направление).

Построение направленного отрезка с началом в данной точке M, изображающего данный вектор $\vec{a}$, называют *откладыванием* вектора $\vec{a}$ от точки M.

158. Какие из указанных ниже величин являются векторными, а какие — скалярными: масса, энергия, скорость, сила, площадь, объем, время, ускорение, стоимость, температура, работа, перемещение, напряженность электрического поля?

159. Подсчитайте, сколько различных векторов изображено на рис. 6 и 7.

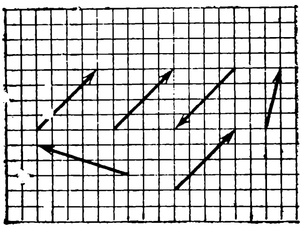


Рис. 6

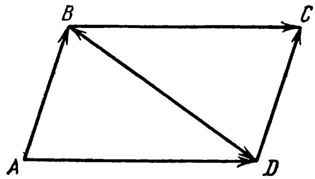


Рис. 7

160. Подсчитайте число ненулевых различных векторов, определяемых вершинами: 1) треугольника; 2) параллелограмма; 3) тетраэдра; 4)* параллелепипеда; 5)* правильного пятиугольника; 6)* правильного шестиугольника.

161. Докажите, что точки A, B, C, D — вершины параллелограмма, если известно, что они не лежат на одной прямой и ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны.

162. Даны вектор $\vec{a}$ и точки A, B, C, D. Отложите: 1) от точки A вектор $\vec{a}$, а от точки B вектор, противоположный $\vec{a}$; 2) от точки C какой-нибудь вектор, одинаково направленный с $\vec{a}$, а от точки D вектор, противоположно направленный $\vec{a}$.

163. Точки A, B, C, D — вершины параллелограмма, O — точка пересечения его диагоналей, а M — середина стороны AB. Укажите пары точек, определяющие: 1) один и тот же вектор; 2) векторы, одинаково направленные с $\overrightarrow{AC}$; 3) противоположные векторы; 4) векторы, противоположно направленные $\overrightarrow{AD}$.

164. Данный вектор отложен от всех точек: 1) прямой; 2) отрезка; 3) плоскости; 4) треугольника; 5) круга; 6) шара; 7) тетраэдра. Какую фигуру образуют концы полученных направленных отрезков?

2. Сложение и вычитание векторов. Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ геометрически можно найти *по правилу треугольника* (рис.8) или *параллелограмма* (рис. 9). Так как $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, то построение разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сводится к применению указанных правил сложения (рис. 10). Сумму трех или большего числа векторов находят по *правилу многоугольника* (рис. 11).

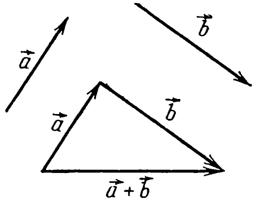


Рис. 8

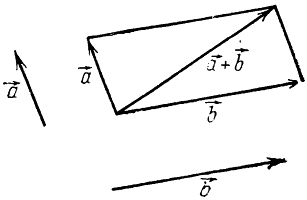


Рис. 9

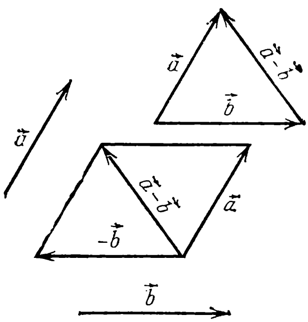


Рис. 10

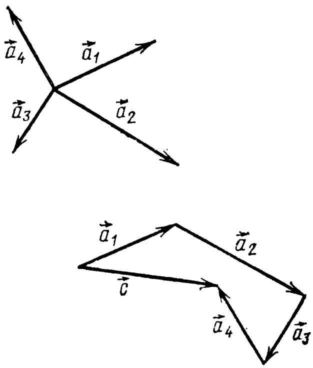


Рис. 11

Свойства сложения векторов:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$; 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

165. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на стороне CD. Найдите сумму векторов:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; 2) $(-\overrightarrow{AM})+\overrightarrow{DM}$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$;

4) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BM}$.

166. На материальную точку действуют две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные под углом α друг к другу. Найдите модуль равнодействующей, если: 1) $|\vec{F}_1|=3$ Н, $|\vec{F}_2|=4$ Н,

$\alpha=90°$; 2) $|\vec{F}_1|=3$ Н, $|\vec{F}_2|=7$ Н, $\alpha=30°$; 3) $|\vec{F}_1|\approx 11{,}7$ Н, $|\vec{F}_2|\approx 20{,}5$ Н, $\alpha\approx 35°$.

167. Груз спускается на парашюте со скоростью $\vec{v}_1$. Ветром его относит в сторону со скоростью $\vec{v}_2$. Под каким углом к вертикали будет спускаться груз, если $|\vec{v}_1|=3$ м/с, $|\vec{v}_2|=2$ м/с?

168. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

169. Постройте равнодействующую сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, изображенных на: 1) рис. 12; 2) рис. 13; 3) рис. 14; 4) рис. 15; 5) рис. 16.

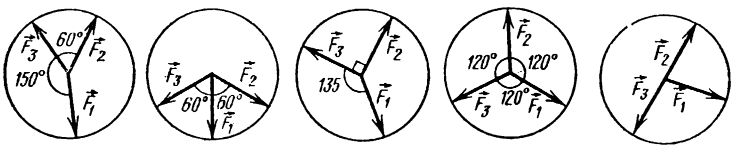


Рис. 12 Рис. 13 Рис. 14 Рис. 15 Рис. 16

170. Отложите от данной точки A четыре таких различных вектора, чтобы их сумма была равна $\vec{0}$.

171. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей. Назовите вектор, равный вектору:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$; 2) $\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}$; 4) $-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$.

172. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Найдите:

1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$;

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$.

173. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите:

1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}$;

3) $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{D_1A_1}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{D_1D}$; 4) $\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CC_1}$.

174. Найдите модуль равнодействующей трех взаимно перпендикулярных сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, приложенных к одной точке, если:

1) $|\vec{F}_1|=2$ Н, $|\vec{F}_2|=3$ Н, $|\vec{F}_3|=6$ Н;

2) $|\vec{F}_1|=3$ Н, $|\vec{F}_2|=6$ Н, $|\vec{F}_3|=12$ Н.

3. Умножение вектора на число. *Произведением ненулевого вектора* $\vec{a}$ *на число* $\lambda \neq 0$ *является вектор* $\lambda\vec{a}$, модуль которого равен $|\lambda||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору $\vec{a}$. Вектор $\vec{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

Свойства умножения вектора на число:

1) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$; 2) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

3) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

175. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы:

1) $3\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)$; 2) $\frac{1}{2}\left(3\vec{a}\right)$; 3) $\frac{3}{2}\vec{a}$; 4) $1\cdot\vec{b}$;

5) $-\frac{3}{2}\vec{a}$; 6) $\left(2+\frac{3}{2}\right)\vec{a}$; 7) $2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{a}$; 8) $-2(\vec{a}+\vec{b})$;

9) $-2\vec{a}-2\vec{b}$; 10) $2(\vec{a}-\vec{b})+3\vec{b}-\vec{a}$;

11) $\frac{3}{4}(\vec{a}+2\vec{b})-\frac{1}{4}(\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}-\vec{b}$.

176. Даны векторы $\vec{a}$ и $x\vec{a}$. При каких значениях x эти векторы: 1) равны; 2) противоположны; 3) противоположно направлены; 4) одинаково направлены; 5) коллинеарны?

177. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите x, если:

1) $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{OA}$; 3) $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{DB}=x\overrightarrow{OB}$.

178. Выразите через $\vec{F}_1$ равнодействующую сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, изображенных на: 1) рис. 13; 2) рис. 14; 3) рис. 12.

179*. Докажите, что точка M принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда при любом выборе точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$, где α — некоторое число. Каким должно быть α, чтобы точка M

была: 1) серединой отрезка AB, 2) внутренней точкой отрезка AB, 3) внешней точкой отрезка AB?

4. Скалярное произведение векторов. Углом между ненулевыми векторами называется угол $\leqslant \pi$ между изображающими их направленными отрезками, отложенными от одной точки. Если один из векторов нулевой, то угол между векторами не определен.

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами.

Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Длину вектора $\vec{a}$ и угол φ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по формулам:

$$|\vec{a}|^2=\left(\vec{a}\right)^2, \quad \cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

где $\left(\vec{a}\right)^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ — скалярный квадрат вектора $\vec{a}$.

Свойства скалярного произведения векторов:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Вектор называется *единичным*, если его длина равна единице.

180. Найдите угол между ненулевыми векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ противоположно направлены; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ одинаково направлены; 3) точки A, B, C — вершины прямоугольного треугольника, в котором катет BC равен половине гипотенузы AB.

181. Изобразите на плоскости два ненулевых вектора, скалярное произведение которых: 1) равно 0; 2) положительно; 3) отрицательно.

182. Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точки M и N — середины сторон AB и BC. Найдите скалярные произведения векторов:

1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MN}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MA}$;
4) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{NC}$; 5) $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{CN}$; 6) $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{CM}$.

183. Докажите равенство $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2\left(\left(\vec{a}\right)^2+\left(\vec{b}\right)^2\right)$ и выясните его геометрический смысл.

184. Найдите длину суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=30$.

185. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол в 120°. Зная, что $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, вычислите:

1) $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$; 2) $(2\vec{a}+\vec{b})^2$; 3) $|2\vec{a}-\vec{b}|$;
4) $|\vec{a}+2\vec{b}|$; 5) $|\vec{b}-3\vec{a}|$; 6) $(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

186. Вычислите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ единичны и угол между ними равен 60°.

187. Докажите, что длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ — перпендикулярны.

188. Единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол φ. Найдите φ, если векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $5\vec{a}-4\vec{b}$ перпендикулярны.

189. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины всех ребер равны единице, а угол $BAD=60°$. Вычислите: 1) длину диагонали DB_1 и угол между диагоналями DB_1 и AD_1; 2) длину диагонали AC_1 и угол между диагоналями AC_1 и DB_1.

5. Разложение вектора. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ плоскости неколлинеарны, то любой вектор $\vec{m}$ плоскости можно представить единственным образом в виде

$$\vec{m}=x\vec{a}+y\vec{b},$$

где x, y — действительные числа.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ пространства *некомпланарны*, т. е. непараллельны одной и той же плоскости, то любой вектор $\vec{m}$ пространства можно представить единственным образом в виде

$$\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

где x, y, z — действительные числа.

190. Дан параллелограмм $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей, P — середина стороны BC. Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{DO}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{PC}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$;

3) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{OB}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

191. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — середина ребра DD_1, N — середина CC_1, P — середина BC_1. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ следующие векторы:

1) $\overrightarrow{AB_1}$; 2) $\overrightarrow{AC_1}$; 3) $\overrightarrow{AM}$; 4) $\overrightarrow{AN}$; 5) $\overrightarrow{AP}$; 6) $\overrightarrow{PN}$;
7) $\overrightarrow{PM}$; 8) $\overrightarrow{MN}$.

192. Дан вектор $\vec{a}$ на плоскости. Представьте его в виде суммы двух векторов, если известны: 1) направления слагаемых; 2) направление и длина одного из слагаемых; 3) направление одного и длина другого слагаемого; 4) длины обоих слагаемых.

193. Величина равнодействующей двух взаимно перпендикулярных сил равна 10 Н. Найдите модуль одной составляющей, если модуль другой равен: 1) 8 Н; 2) 4 Н.

194. Груз массой m подвешен на шнуре и оттянут горизонтальной оттяжкой. Найдите модули сил натяжения шнура и оттяжки, если угол между шнуром и оттяжкой равен α и:

1) $m \approx 1{,}0$ кг, $\alpha \approx 120°$; 2) $m \approx 0{,}6$ кг, $\alpha \approx 150°$.

195. Между двумя стенами висит на веревках фонарь массой m. Левая веревка образует со стеной угол α, а правая угол β. Найдите натяжение обеих веревок, если:

1) $m = 2$ кг, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$;
2) $m \approx 2{,}3$ кг, $\alpha \approx 46°$, $\beta \approx 54°$.

196. От пристани к противоположному берегу реки отправляется лодка с собственной скоростью $\vec{v}$. Скорость течения реки 5 км/ч. В каком направлении следует править, чтобы лодка двигалась поперек реки, и какой будет скорость лодки относительно берега, если: 1) $|\vec{v}| = 10$ км/ч; 2) $|\vec{v}| = 6$ км/ч?

6. Прямоугольные координаты. На плоскости (в пространстве) задана прямоугольная система координат xy (xyz). Через $\vec{i}$, $\vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) обозначают единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями соответственно оси x, оси y (оси x, оси y, оси z). Координаты вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат на плоскости (в пространстве) обозначают $\vec{a}(x;\ y)$ ($\vec{a}(x;\ y;\ z)$).

Действия над векторами на плоскости и в пространстве, которые заданы своими координатами, выполняются по следующим правилам.

1. Координаты суммы (разности) двух векторов равны сумме (разности) соответствующих координат этих векторов.

2. Координаты произведения вектора на число равны произведению соответствующих координат данного вектора на это число.

3. Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Длина вектора $\vec{a}(x;\ y;\ z)$, расстояние d между двумя точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляются соответственно по формулам

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ;$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Для вычисления угла φ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ используют формулу

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\ .$$

Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Векторы $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ коллинеарны, если существует такое число λ, что

$$x_1 = \lambda x_2, \qquad y_1 = \lambda y_2, \qquad z_1 = \lambda z_2.$$

Соответствующие формулы на координатной плоскости получаются из указанных выше формул, если координаты z (аппликаты) положить равными нулю.

197. Найдите координаты точек, симметричных точке M относительно осей и начала координат, если:

1) $M(1;\ -2)$; 2) $M(-3;\ -1)$.

198. Найдите координаты проекций точки A на координатные оси, если:

1) $A(2;\ -1)$; 2) $A(-1;\ 3;\ 0)$; 3) $A(-3;\ -2;\ 3)$.

199. Выпишите координаты вершин: 1) квадрата со стороной a, если диагонали квадрата совпадают с осями координат; 2) правильного шестиугольника со стороной a, если одна из диагоналей совпадает с осью x, а центр лежит в начале координат.

200. Выпишите координаты вершин: 1) куба с ребром a, если одна из вершин основания лежит в начале координат, а ребра трехгранного угла в этой вершине совпадают с осями координат; 2)* правильной треугольной пирамиды с высотой h, если вершина находится в начале координат, а вершины оснований — на координатных осях.

201. На плоскости даны точки A и B. Постройте систему координат, в которой точки A и B будут иметь координаты (1; 2) и (—1; 2).

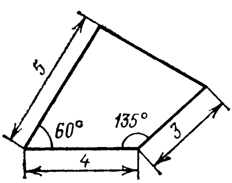


Рис. 17

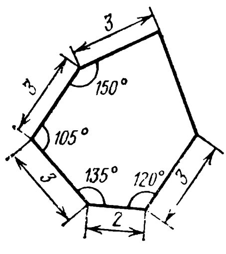


Рис. 18

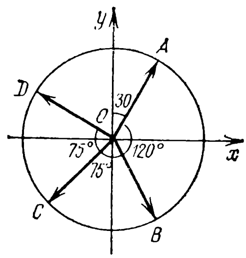


Рис. 19

202. Выберите прямоугольную систему координат на плоскости и найдите в ней координаты вершин многоугольника, изображенного на: 1) рис. 17; 2) рис. 18.

203. Найдите углы между координатными осями и вектором:

1) $\vec{i}+\vec{j}$; 2) $\vec{i}-\vec{j}$; 3) $2\vec{i}+3\vec{j}$; 4) $4\vec{i}-3\vec{j}$; 5) $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$;
6) $\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; 7) $-3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$; 8) $2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

204. Найдите координаты векторов, изображенных на рис. 19.

205. Найдите координаты единичного вектора $\vec{a}$ пространства, если он образует с осями x, y, z соответственно углы α, β, γ. Докажите равенство $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

206. Вектор $\vec{a}$ пространства составляет с осью x угол α, а с осью y угол β. Какой угол он составляет с осью z, если: 1) $\alpha=60°$, $\beta=45°$; 2) $\alpha=30°$, $\beta=120°$?

207. Даны точки $O(0;\ 0)$, $A(-1;\ 2)$, $B(4;\ 5)$, $C(-1;-3)$; $D(2;\ 6)$. Найдите координаты векторов:

1) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

208. Дан вектор $\overrightarrow{AB}(-1;\ -2)$. Найдите координаты точки B, если известны координаты точки A:

1) $(1;\ 3)$; 2) $(-1;\ 2)$; 3) $(-4;\ -1)$; 4) $(0;\ 1)$.

209. Даны векторы $\vec{a}(2;\ 3;\ 0)$, $\vec{b}(-1;\ 2;\ 2)$ и $\vec{c}(3;\ 1;\ 0)$. Найдите координаты вектора:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}+\vec{c}$; 3) $3\vec{a}$; 4) $\vec{a}-2\vec{c}$;
5) $-2\vec{a}-3\vec{b}$; 6) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 7) $(\vec{a}+2\vec{b})-(2\vec{a}+\vec{b})$;
8) $(3\vec{a}-4\vec{b})+(2\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}-3\vec{c})$.

210. Найдите равнодействующую сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ приложенных к одной точке, если известны проекции сил на координатные оси:

1) $\vec{F}_1(2;\ -5)$, $\vec{F}_2(-5;\ -1)$, $\vec{F}_3(3;\ 6)$;
2) $\vec{F}_1(2;\ 3;\ -4)$, $\vec{F}_2(-5;\ 2;\ 1)$, $\vec{F}_3(3;\ -4;\ 2)$.

211. Дан вектор $\vec{a}(-3;\ 4;\ 0)$. Найдите вектор: 1) противоположный данному; 2) единичный, одинаково направленный с данным; 3) единичный, противоположно направленный данному.

212. Коллинеарны ли векторы:

1) $\vec{a}(1;\ 2)$ и $\vec{b}(-2;\ -4)$; 2) $\vec{a}(1;\ -1;\ 2)$ и $\vec{b}(2;\ 2;\ -4)$;
3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(8;\ -2)$, $B(3;\ 4)$, $C(11;\ 7)$, $D(-21,\ 19)$;
4) $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{NP}$, если $K(-2;\ 3;\ 1)$, $M(1;\ 5;\ -2)$, $N(4;\ 5;\ -8)$, $P(1;\ 3;\ -5)$?

213. Вычислите скалярное произведение векторов:

1) $\vec{a}(-2;\ 3)$ и $\vec{b}(3;\ 4)$; 2) $\vec{a}(\sqrt{3};\ 1)$ и $\vec{b}(\sqrt{3}/2;\ 2)$;

3) $\vec{a}(4;\ -2;\ 0)$ и $\vec{b}(1;\ 2;\ 3)$;

4) $\vec{a}(1;\ -1;\ 3)$ и $\vec{b}(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 0)$; 5) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, где $A(-2;\ 4)$, $B(3;\ -6)$, $C(5;\ -3)$;

6) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$, где $M(1;\ 3;\ 7)$, $N(-1;\ -2;\ 1)$, $P(0;\ 5;\ 1)$, $Q(-2;\ -3;\ 0)$;

7) $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$;

8) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

214. Перпендикулярны ли векторы:

1) $\vec{a}(-2;\ 3)$ и $\vec{b}(-1;\ 2)$; 2) $\vec{c}(4;\ -1)$ и $\vec{d}(3;\ 12)$;

3) $\vec{a}(3{,}5;\ 2;\ -1)$ и $\vec{b}(4;\ -1{,}25;\ 0{,}5)$;

4) $\vec{m}(2;\ 3;\ -5)$ и $\vec{n}(-1;\ 4;\ 2)$;

5) $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$;

6) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

215. Найдите длину вектора:

1) $\vec{a}(3;\ 4)$; 2) $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$;

3) $\overrightarrow{MN}$, где $M(-1;\ 5;\ 2)$, а $N(2;\ 5;\ -2)$;

4) $\overrightarrow{AB}$, где $A(1;\ 3)$, а $B(-2;\ 0)$.

216. Вычислите координаты точки, равноудаленной от точек $A(-4;\ 0)$ и $B(-3;\ -7)$ и расположенной: 1) на оси x; 2) на оси y.

217. Тело, движущееся под углом α к горизонту, имеет горизонтальную и вертикальную составляющие скорости $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$. Найдите модуль скорости и угол α, если:

1) $|\vec{v}_x|=2$ м/с; $|\vec{v}_y|=1$ м/с.

2) $|\vec{v}_x|=3$ м/с; $|\vec{v}_y|=4$ м/с.

218. Найдите угол между векторами:

1) $\vec{a}(1;\ 1)$ и $\vec{b}=\vec{i}$; 2) $\vec{a}(1;\ 1)$ и $\vec{b}=\vec{j}$;

3) $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}$ и $\vec{b}=9\vec{i}-12\vec{j}$;

4) $\vec{c}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ и $\vec{d}=4\vec{i}-\vec{j}$;

5) $\vec{a}(-2;\ 3)$ и $\vec{b}(3;\ 1)$;

6) $\vec{c}(2;\ -2;\ 1)$ и $\vec{d}(-4;\ 1;\ 1)$;

7) $\vec{a}(1;\ 9;\ 3)$ и $\vec{b}(-2;\ 4;\ 5)$.

219. В точке приложены силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$. Вычислите углы, которые равнодействующая этих сил образует с составляющими, если:

1) $\vec{F}_1(3;\ 4)$; $\vec{F}_2(1;\ -2)$, $\vec{F}_3(-1;\ 3)$;

2) $\vec{F}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{F}_2 = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{F}_3 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

220. Проверьте, являются ли данные точки A, B, C, D вершинами параллелограмма, если:

1) $A(1;\ 3)$, $B(4;\ 7)$, $C(2;\ 8)$, $D(-1;\ 4)$;

2) $A(1;\ 0)$, $B(3;\ 4)$, $C(2;\ -1)$, $D(2;\ 5)$.

221. Проверьте, являются ли точки A, B, C, D вершинами трапеции, если

1) $A(2;\ 3)$, $B(7;\ 5)$, $C(10;\ 2)$, $D(0;\ -2)$;

2) $A(1;\ 1)$, $B(2;\ -1)$, $C(4;\ 0)$, $D(8;\ -3)$.

222. Даны точки $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 6)$, $C(6;\ 4)$, $D(5;\ 2{,}5)$. 1) Является ли четырехугольник $ABCD$: а) трапецией; б) параллелограммом? 2) Найдите координаты такой точки M, чтобы четырехугольник $ABCM$ был параллелограммом. Является ли $ABCM$: а) прямоугольником; б) квадратом? 3) Является ли треугольник ABD: а) равнобедренным; б) равносторонним?

223. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если:

1) $A(1;\ 3)$, $B(2;\ 1)$, $C(-1;\ 3)$, $D(-2;\ 5)$;

2) $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ 5)$, $C(-3;\ 8)$, $D(-6;\ 4)$.

224. Найдите периметр треугольника ABC и величины его углов, если:

1) $A(6;\ 7)$, $B(3;\ 3)$, $C(1;\ -5)$;

2) $A(1;\ -1;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 1)$, $C(-1;\ 1;\ 3)$.

225. Определите вид треугольника ABC, если:

1) $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 3)$;

2) $A(1;\ 3)$, $B(2;\ -1)$, $C(4;\ 6)$.

226. Даны четыре вершины $A(3;\ 0;\ 2)$, $B(2;\ 4;\ 5)$, $A_1(5;\ 3;\ 1)$, $D_1(7;\ 1;\ 2)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите координаты вершин:

1) D; 2) B_1; 3) C_1; 4) C.

7. Деление отрезка в данном отношении. Координаты x_M, y_M точки M, делящей отрезок AB на плоскости, считая от точки A, в отношении $\lambda = AM/BM$, вычисляются по формулам

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},$$

где $(x_A;\ y_A)$ — координаты точки A, а $(x_B;\ y_B)$ — координаты точки B.

Если $\lambda = m:n$, то формулы можно записать в виде

$$x_M = \frac{nx_A + mx_B}{m+n}, \quad y_M = \frac{ny_A + my_B}{m+n}.$$

Аналогичные формулы имеют место для координат x_M, y_M и z_M точки M, делящей отрезок AB пространства в отношении $\lambda > 0$.

В механике доказывается, что точка M, определяемая этими равенствами, есть центр масс системы точек A и B, в которых сосредоточены массы соответственно n и m.

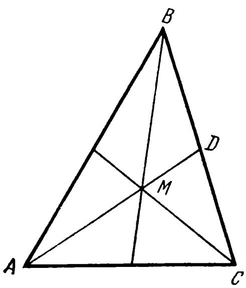


Рис. 20

Пример. Даны вершины треугольника $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $C(x_C;\ y_C)$. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

Решение. Точка пересечения медиан треугольника делит каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от соответствующей вершины. Пусть D—середина стороны BC, а M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 20).

Точка D делит отрезок BC в отношении $1:1$ и поэтому ее координаты равны

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Тогда координаты точки M, делящей отрезок AD в отношении $2:1$, равны

$$x_M = \frac{x_A + 2x_D}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};$$

$$y_M = \frac{y_A + 2y_D}{3} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

227. Найдите координаты середины отрезка AB, если:

1) $A(3; -2)$, $B(5; 12)$; 2) $A(-1; 2; 3)$, $B(1; 3; 1)$;
3) $A(-4; 3)$, $B(-2; 5)$;
4) $A(-1; -2; 2)$, $B(0; -3; -4)$.

228. Дан отрезок с концами $A(1; -3)$ и $B(31; 17)$. Определите координаты точек отрезка, делящих его: 1) пополам; 2) на три равные части; 3) на шесть равных частей.

229. Найдите координаты концов отрезка, лежащих на осях координат, если его середина находится в точке: 1) $(2; -1)$; 2) $(3; 4)$.

230. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-4; -7)$ и $B(2; 6)$ и точка пересечения его диагоналей $M(3; 1)$. Найдите координаты вершины: 1) противолежащей A; 2) противолежащей B.

231. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если:

1) $A(9; -7)$, $B(1; 5)$, $C(-10; -4)$;
2) $A(1; 3)$, $B(3; -7)$, $C(-1; 4)$;
3) $A(2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(0; 2)$;
4) $A(2; -3)$, $B(4; 4)$, $C(-3; 5)$;
5) $A(-1; 3; 1)$; $B(-3; 2; 4)$, $C(1; 1; 4)$;
6) $A(2; 5; -3)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(3; 0; 3)$.

232. Найдите координаты центра масс M системы двух точек $A(4; -3)$ и $B(12; 7)$, в которых сосредоточены массы n и m, если:

1) $n=1$ кг, $m=1$ кг; 2) $n=1$ кг, $m=2$ кг;
3) $n=2$ кг, $m=3$ кг; 4) $n=3$ кг, $m=5$ кг.

233. В точках $A(-3; 2)$, $B(-1; 6)$ и $C(7; 2)$ сосредоточены соответственно массы m_1, m_2, m_3. Найдите координаты центра масс этой системы точек, если:

1) $m_1=2$ кг, $m_2=1$ кг, $m_3=1$ кг;
2) $m_1=3$ кг, $m_2=2$ кг, $m_3=5$ кг.

234*. Найдите координаты центра масс системы трех точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, в которых соответственно сосредоточены массы m_1, m_2, m_3.

8. Применение векторов и координат к решению задач.

235. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и длина ее равна полусумме длин оснований.

236. На стороне AD и на диагонали AC параллело-

грамма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AM=\frac{1}{5}AD$ и $AN=\frac{1}{6}AC$. Покажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой. В каком отношении точка N делит отрезок BM?

237. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а O — произвольная точка пространства, то $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})/3$.

238. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что центр тяжести треугольника BA_1D лежит на диагонали AC_1 и делит ее в отношении $1:2$.

239. Докажите, что если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M плоскости выполняется равенство

$$MA^2+MC^2=MB^2+MD^2.$$

240. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

241. Найдите величины углов между диагональю DB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и диагоналями его боковой грани AA_1B_1B.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Следует ли из равенства $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ равенство $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$?

2. Каково взаимное расположение точек A, B и M, если векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны?

3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, чтобы вектор $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ делил пополам угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$?

4. Как следует направить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых известны, чтобы длина вектора $\vec{a}+\vec{b}$ была: 1) наибольшей; 2) наименьшей?

5. Верно ли, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы неравенства $||\vec{a}|-|\vec{b}||\leqslant|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$?

6. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имели место соотношения:

1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;
3) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; 4) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$?

7. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если коллинеарны векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$?

8. При каких значениях k длина вектора $k\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$: 1) равна длине вектора $\vec{a}$; 2) больше длины вектора $\vec{a}$; 3) меньше длины вектора $\vec{a}$; 4) равна нулю?

9. Как расположены точки M, A и B, если:

1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$; 2) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$; 3) $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; 4) $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$?

10. Может ли угол между векторами равняться: 270°; 180°; 0°; 45°?

11. В каком промежутке находится угол α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$?

12. Какова длина отрезка AB, если $\overrightarrow{AB}^2 = 4$?

13. Как расположены прямые AB и AC, если $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2$?

14. Следует ли из равенства $\vec{a}\cdot\vec{e} = \vec{b}\cdot\vec{e}$, где $\vec{e}$ — единичный вектор, равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

15. Равны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ плоскости, если равенство $\vec{x}\cdot\vec{a} = \vec{x}\cdot\vec{b}$ выполняется: 1) для любых векторов $\vec{x}$; 2) для двух перпендикулярных векторов $\vec{x}$?

16. Какой угол образует вектор $\vec{a}(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ с вектором: 1) $\vec{i}$; 2) $\vec{j}$?

17. Может ли вектор пространства составлять с осью x угол в 30°, а с осью z угол в 45°?

18. Какая из точек $A(2;\ -5)$, $B(3;\ 2)$, $C(-4;\ 1)$, $D(-1;\ -2)$ расположена: 1) дальше всех от оси x; 2) ближе всех от оси y; 3) во второй четверти; 4) в четвертой четверти?

19. При каких значениях a точки $A(3;\ 2)$ и $B(a;\ -1)$ расположены: 1) на одной прямой, параллельной оси y; 2) на одинаковом расстоянии от оси y?

20. При каких значениях m вектор $\vec{a}(2;\ m)$ равен вектору $\vec{b}(2;\ 1/m)$?

21. При каком значении k вектор $\vec{a}(k;\ 0)$ коллинеарен вектору $\vec{b}(0;\ k)$?

22. Перпендикулярны ли векторы $\vec{n}(a;\ b)$ и $\vec{m}(-b;\ a)$?

23. Лежат ли на одной прямой точки $(3;\ -7)$, $(-5;\ 4)$, $(27;\ -40)$?

24. Параллельны ли прямые, проходящие соответственно через точки $(1;\ -1)$, $(2;\ 1)$ и $(3;\ 5)$, $(-1;\ -3)$?

§ 2. Уравнения фигур на плоскости

1. Уравнения с двумя переменными. Уравнение с двумя переменными x и y называется *уравнением фигуры* на плоскости xy, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки фигуры и не удовлетворяют координаты никакой точки, не принадлежащей этой фигуре.

Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

является *уравнением окружности* радиусом R с центром в точке $(a;\ b)$.

Уравнение

$$ax+by+c=0,$$

где a и b не равны нулю одновременно, является *уравнением прямой*.

242. Определите, какие из перечисленных точек: $A(-2;\ 1)$, $B(-2;\ 4)$, $C(-3;\ 4)$, $D(1;\ -1)$ принадлежат фигуре, заданной уравнением:

1) $x^2+y^2=25$; 2) $x+3y-1=0$;
3) $y=x^2$; 4) $x=-2$; 5) $x^2+y^2=0$;
6) $x^2-y^2=0$; 7) $xy=-2$; 8) $y=-1$.

Принадлежит ли фигуре начало координат?

243. Дано уравнение фигуры:

1) $x-2y=1$; 2) $x-y=0$; 3) $x=2$;
4) $y=0$; 5) $x^2+y^2=4$; 6) $y=\frac{1}{4}x^2$;
7) $xy=2$; 8) $x^2-y^2=0$.

Найдите точки фигуры: а) имеющие абсциссу, равную 2; б) удаленные от оси абсцисс на расстояние 1; в) имеющие равные абсциссы и ординаты. Укажите хотя бы одну точку, не принадлежащую фигуре.

244. Линия задана уравнением:

1) $x^2+y^2=16$; 2) $x+y=0$; 3) $y=4x^2$;
4) $xy=1$; 5) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$; 6) $2x-3y+1=0$;
7) $y=(x+1)^2$; 8) $(x-1)y=1$.

а) Выберите произвольную точку на линии и укажите точки, ей симметричные относительно осей и начала координат. Принадлежат ли они линии? б) Симметрична ли линия относительно осей и начала координат? в)* Укажите оси симметрии и центр симметрии линии.

245. Докажите, что линия, заданная уравнением

$$(x^2+y^2+y)^2=x^2+y^2:$$

1) симметрична относительно оси y; 2) не симметрична относительно оси x.

246. Изобразите фигуру, заданную уравнением:

1) $x+y=0$; 2) $3x-2y+1=0$; 3) $x=-3$;
4) $y=2$; 5) $x^2+y^2=1$; 6) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$;
7) $y=\frac{1}{2}x^2$; 8) $y=2x^2$;
9) $y=x^2-2x-1$; 10) $x^2-y^2=0$; 11) $y^2=1$;
12) $x^2+y^2=0$; 13) $y=|x|$; 14) $|x|+|y|=1$;
15)* $\frac{x}{|x|}=\frac{y}{|y|}$; 16)* $|x|+x=|y|+y$.

247. Составьте уравнение фигуры, состоящей из точек: 1) разность квадратов расстояний от которых до точек $A(1;\ 0)$ и $B(-1;\ 2)$ равна 1; 2) сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$ равна 12; 3) равноудаленных от начала координат и от точки $A(-4;\ 2)$; 4) расстояние от которых до начала координат вдвое больше, чем до точки $B(0;\ 1)$; 5) равноудаленных от прямых $x=2$ и $x=-4$; 6) находящихся на расстоянии 1 от оси x; 7) равноудаленных от точки $A(0;\ 2)$ и прямой $y=-2$.

248. Изобразите множество точек, удовлетворяющих соотношению:

1) $x-y>0$; 2) $2x-y+1\geqslant 0$; 3) $x>2$;
4) $y\leqslant -2$; 5) $x^2+y^2>4$; 6) $x^2+y^2\leqslant 16$;
7) $(x-1)^2+(y+2)^2>9$.

2. Параметрическое уравнение линии. Пусть линия на плоскости xy является траекторией движения. Тогда она состоит из точек $(x(t);\ y(t))$, где $x=x(t)$ и $y=y(t)$ — функции параметра t, изменяющегося на промежутке $[a;\ b]$. Уравнения $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, называются *параметрическими уравнениями линии*.

Уравнения

$$x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t,\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega,$$

являются параметрическими уравнениями окружности радиусом R с центром в начале координат и описывают равномерное вращение точки A_t вокруг начала координат с угловой скоростью ω (рис. 21).

Уравнения

$$x=x_0+v_1t,\quad y=y_0+v_2t,\qquad -\infty<t<+\infty,$$

являются параметрическими уравнениями прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{v}(v_1; v_2)$, и описывают равномерное и прямолинейное движение точки M_t со скоростью $\vec{v}(v_1; v_2)$ (рис. 22).

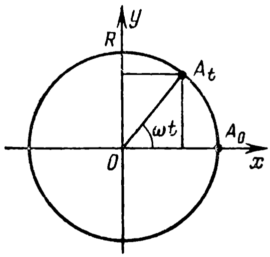


Рис. 21

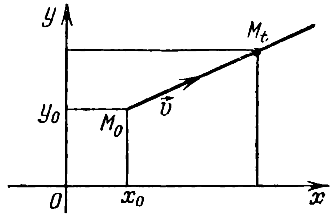


Рис. 22

В параметрических уравнениях кривой промежуток изменения параметра часто не указывают. Он естественно определяется выражениями для функций $x(t)$ и $y(t)$ и условиями задачи. Параметрические уравнения линии иногда можно привести к уравнению с двумя переменными. Для этого нужно исключить параметр t из параметрических уравнений, выразив его из одного уравнения и подставив в другое, или другим способом.

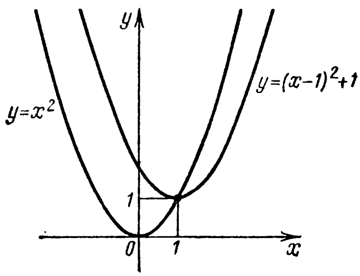


Рис. 23

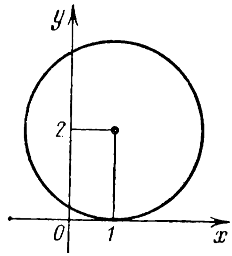


Рис. 24

Пример 1. Построить линию $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 4t^2$.

Решение. Найдем t из первого уравнения и, подставив во второе, получим

$$y = 1 + 4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad y = (x-1)^2 + 1.$$

Эта линия — парабола $y = (x-1)^2 + 1$, которую можно построить с помощью сдвига параболы $y = x^2$ вдоль осей x и y (рис. 23).

Пример 2. Определить траекторию движения точки по ее уравнению движения:

$$x=2\cos 3t+1, \quad y=2\sin 3t+2.$$

Решение. Исключим параметр t из уравнений, воспользовавшись равенством $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$:

$$(\cos 3t)^2+(\sin 3t)^2=\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-2}{2}\right)^2=1.$$

Преобразовав полученное уравнение, получим

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4.$$

Искомая траектория — окружность радиусом 2 с центром в точке (1; 2) (рис. 24).

249. Выясните, какие из точек $A(0;\ 2)$, $B(3;\ 4)$, $C(2;\ 0)$, $D(2;\ 1)$ лежат на линии, заданной уравнением:

1) $x=1+2t,\ y=3+t$; 2) $x=2\cos t,\ y=2\sin t$;
3) $x=1+t^2,\ y=1-t^2$; 4) $x=t+1,\ y=1/t$.

250. Постройте линию:

1) $x=2-t,\ y=1+t$; 2) $x=-1+3t,\ y=4-2t$;
3) $x=t,\ y=1+t^2$; 4) $x=2+t,\ y=1-2t^2$;
5)* $x=3+t^2,\ y=2-t^2$; 6)* $x=1-2t^2,\ y=4-3t^2$.

251. Постройте траекторию движения точки, если известны уравнения ее движения:

1) $x=\cos t,\ y=\sin t$; 2) $x=\cos t,\ y=-\sin t$;
3) $x=\cos 3t,\ y=\sin 3t$; 4) $x=\sin t,\ y=\cos t$;
5) $x=\cos t+1,\ y=\sin t-1$;
6) $x=2\sin t-2,\ y=2\cos t+1$;
7)* $x=\cos t,\ y=\sin^2 t$; 8)* $x=\cos^2 t;\ y=\sin^2 t$.

252. Движение снаряда, выпущенного из орудия, задано уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ (x, y — горизонтальная и вертикальная составляющие движения в метрах, t — в секундах). Определите максимальную высоту подъема снаряда и дальность стрельбы, если:

1) $x(t)=40\sqrt{2}\,t,\ y(t)=-5t^2+40\sqrt{2}\,t$;
2) $x(t)=40\sqrt{3}t,\ y(t)=-5t^2+40t$;
3) $x(t)=40t,\ y(t)=-5t^2+40\sqrt{3}\,t$.

253. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку (3; —2) параллельно вектору: 1) $\vec{a}(-2;\ 3)$; 2) $\vec{a}(-1;\ 2)$.

254. Точка движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}(1;\ 2)$. Составьте параметрические уравнения траектории движения точки, если в начальный момент $(t=0)$ она находилась в точке $(2;\ 4)$.

255*. Отрезок постоянной длины l скользит своими концами по сторонам прямого угла. Постройте траекторию движения середины этого отрезка.

3. Уравнения прямой. Любая прямая на плоскости xy задается уравнением вида

$$ax+by+c=0, \qquad a^2+b^2>0,$$

которое называется *общим уравнением прямой.*

Если в общем уравнении прямой коэффициент b не равен нулю, т. е. прямая не параллельна оси y, то это уравнение можно записать в виде

$$y=kx+l, \quad \text{где } k=-a/b,\ l=-c/b.$$

Здесь k — *тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси* x, а l — *ордината точки пересечения прямой с осью* y (рис. 25). Коэффициент k называется *угловым коэффициентом прямой.*

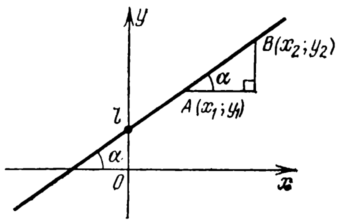


Рис. 25

Различные прямые $y=k_1x+l_1$ и $y=k_2x+l_2$ параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты: $k_1=k_2$. Это условие параллельности для прямых

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{и} \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

принимает вид

$$a_1b_2=a_2b_1 \ \text{ или } \ a_1/a_2=b_1/b_2 \quad (a_2\neq 0,\ b_2\neq 0).$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$, можно представить в виде

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \quad \text{или} \quad y=k(x-x_0)+y_0.$$

Коэффициенты a и b являются координатами вектора, перпендикулярного прямой.

256. Постройте прямую:

1) $x-y=0$; 2) $x-y+1=0$; 3) $x+y=0$;
4) $x+y-2=0$; 5) $x-2y=0$; 6) $x-3y=0$;
7) $2x-y=0$; 8) $2x-2y+2=0$.

257. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми:

1) $2x-y+4=0, \quad y=0, \quad x=0;$
2) $2x-y+4=0, \quad y=0, \quad x=1;$
3) $2x-y+4=0, \quad y=0, \quad x=1, \quad x=5;$
4) $2x-y+4=0, \quad y=1, \quad x=1, \quad x=5;$
5)* $2x-y+4=0, \quad y=1, \quad y=10, \quad x=1, \quad x=5.$

258. Найдите угловой коэффициент прямой, если она: 1) задана уравнением $2x-3y+1=0$; 2) образует угол 30° с осью x; 3) параллельна прямой $8x+4y+3=0$; 4) проходит через точки (1; 1) и (4; 3); 5) параллельна оси абсцисс; 6) задана уравнением $x=1+2t$, $y=2-5t$.

259. Найдите угол наклона прямой $2x+by+1=0$ к оси x, если она проходит через точку: 1) $M(1/2;\ 1/2)$; 2) $N(1;\ 3)$; 3) $K(-2;\ 5)$.

260. Напишите уравнения прямых, изображенных на: 1) рис. 26; 2) рис. 27.

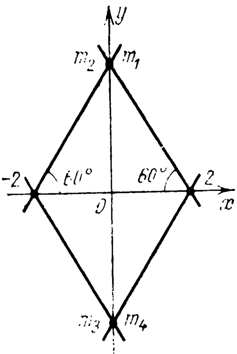


Рис. 26

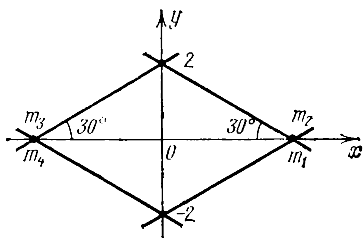


Рис. 27

261. При каких значениях a прямая

$$(a+2)x+(a^2-9)y+1=0:$$

1) параллельна оси абсцисс; 2) параллельна оси ординат?

262. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\ -2)$: 1) параллельно оси x; 2) и образующей с осью x угол 135°; 3) параллельно оси y; 4) параллельно вектору $\vec{a}(2;\ 3)$; 5) и точку $B(-3;\ 2)$; 6) параллельно прямой $3x-2y-3=0$; 7) параллельно биссектрисе первого координатного угла; 8) перпендикулярно вектору $\vec{a}(2;\ -1)$; 9) перпендикулярно прямой $3x-y-5=0$; 10)* и отсекающей на оси ординат отрезок длиной 3.

263. Даны точки $M(1;\ 2)$, $N(-3;\ -2)$, $P(2;\ -1)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через: 1) точки M и N; 2) точки N и P; 3) точки M и P; 4) начало координат параллельно прямой MN; 5) точку N параллельно прямой MP; 6) точку N перпендикулярно прямой MP; 7) точку P и середину отрезка MN; 8) середину отрезка MN перпендикулярно прямой NP.

264. Даны вершины треугольника $A(-3;\ 6)$, $B(4;\ -1)$, $C(-3;\ -5)$. Составьте уравнение прямой, содержащей: 1) сторону AB; 2) высоту, опущенную из вершины C; 3) сторону AC; 4) медиану, проведенную из вершины A; 5) сторону BC; 6) среднюю линию, параллельную стороне BC.

265. Дана прямая $x-2y+6=0$. 1) Найдите углы наклона прямой к осям x и y; 2) вычислите длину отрезка прямой, заключенного между осями; 3) напишите уравнение прямой, симметричной данной относительно оси x; 4) напишите уравнение прямой, симметричной данной относительно оси y; 5) составьте уравнение прямой, симметричной данной относительно начала координат; 6) составьте уравнение прямой, полученной поворотом данной прямой вокруг точки ее пересечения с осью x на угол $90°$.

266. Составьте уравнение прямой, отрезок которой, заключенный между осями координат, делится в точке $A(2;\ -1)$ пополам.

267. Точка, двигаясь прямолинейно, в некоторые моменты времени занимает положение $A(5;\ 2)$ и $B(-1;\ -2)$. Определите положение этой точки в момент нахождения ее на оси x.

268. Точка движется прямолинейно и в некоторые моменты времени имеет координаты $(-6;\ 1)$ и $(-4;\ 3)$. Какая из точек $(1;\ 8)$ и $(3;\ 9)$ лежит на ее траектории?

269. Луч света, пройдя через точку $A(2;\ 3)$ под углом α к оси x, отразился от нее и прошел через точку $B(-5;\ 4)$. Определите угол α.

4. Взаимное расположение прямых на плоскости. Прямые

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \text{ и } a_2x+b_2x+c_2=0$$

имеют одну общую точку тогда и только тогда, когда векторы

$$\vec{n}_1(a_1;\ b_1) \text{ и } \vec{n}_2(a_2;\ b_2)$$

не коллинеарны, т. е. $a_1b_2 \neq a_2b_1$ или $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$ ($a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$).

Для перпендикулярности этих прямых необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ были перпендикулярны, т. е. выполнялось условие

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Для прямых, заданных уравнениями

$$y = k_1x + l_1 \text{ и } y = k_2x + l_2,$$

это условие принимает вид

$$k_1k_2 = -1 \quad \text{или} \quad k_1 = -1/k_2.$$

Прямые, заданные общими уравнениями, совпадают тогда и только тогда, когда их коэффициенты пропорциональны.

Угол φ между прямыми

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

можно вычислить, пользуясь формулой

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

270. Найдите точку пересечения прямых:

1) $x - 2y = 4$, $x + y = 1$;
2) $x + 3y - 3 = 0$, $3x - y + 11 = 0$;
3) $3x - y + 11 = 0$, $3x - 11y - 29 = 0$;
4) $7x - 5y + 13 = 0$, $-2x + y - 8 = 0$.

271. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми:

1) $x - 2y + 2 = 0$, $x + y - 4 = 0$, $y = 0$;
2) $x - 2y + 2 = 0$, $x + y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = 1$;
3) $x - 2y + 2 = 0$, $x + y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;
4) $x - 2y + 2 = 0$, $x + y - 4 = 0$, $y = 0$, $x - 4y + 1 = 0$.

272. Найдите периметр треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

1) $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$, $3x + y + 5 = 0$;
2) $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$.

273. Найдите точку, равноудаленную от точек:

1) $A(1; 2)$, $B(-3; 1)$, $C(2; -1)$;
2) $A(6; -3)$, $B(-10; 5)$, $C(2; 9)$.

274. При каких значениях m пересекаются прямые:

1) $x+y-3=0,\quad mx+4y-6=0;$
2) $mx+3y-10=0,\quad x-2y-4=0;$
3) $x-2y+m=0,\quad x-my-2=0?$

275. При каких значениях p и q прямые $px+2y=q$ и $x+py=1$ пересекаются в точке: 1) (3; —4); 2) (—1; 3)?

276. Докажите, что прямая $2x-3y+6=0$ не пересекает отрезка, ограниченного точками $M_1(-2; -3)$ и $M_2(1; -2)$.

277. При каких значениях m параллельны прямые:

1) $mx+2y-1=0,\quad x+y-3=0;$
2) $x+my+4=0,\quad mx+9y-2=0;$
3) $2x+my+4=0,\quad 4x-5y+m=0?$

278. При каких значениях m перпендикулярны прямые:

1) $mx+2y-1=0,\quad x+y-3=0;$
2) $4x-my+2=0,\quad x+my-2=0;$
3) $mx+6y-1=0,\quad 2x+3y+3=0?$

279. При каком значении p совпадают прямые:

1) $2x-3y-1=0,\quad px-6y-2=0;$
2) $3x-py-5=0,\quad 9x-3y-p=0;$
3) $px-y-p=0,\quad 4x-py-4=0?$

280. При каких значениях a и c прямая $ax+2y+c=0$; 1) проходит через точки (2; 1) и (—4; —1/2); 2) параллельна прямой $2x-2y+13=0$; 3) перпендикулярна прямой $6x+y-1=0$; 4) пересекается с прямой $x-3y+4=0$?

281. Определите, имеют ли общую точку прямые:

1) $3x+5y=34,\quad 4x-5y=-13,\quad 2x-y=1;$
2) $6x-5y=-15,\quad 13x+3y=-86,\quad 3x+y=-18;$
3) $y=2x-5,\quad y=x+2,\quad y=3x-12;$
4) $3x+3y=10,\quad x-2y=4,\quad y-x+2=0.$

282. Найдите значения k, при которых данные прямые пересекаются в одной точке:

1) $2x-y-5=0,\quad x-y+2=0,\quad kx-y-12=0;$
2) $3x+y+4=0,\quad x+ky+1=0,\quad 2x-y-3=0.$

283. Найдите угол между прямыми:

1) $2x-3y+1=0, \quad 3x+y-4=0$;
2) $x+y+1=0, \quad x-y-2=0$;
3) $x-y-3=0, \quad 2x+y-1=0$;
4) $6x-2y+1=0, \quad 5x+y-11=0$.

284. Найдите углы треугольника, стороны которого расположены на прямых, заданных уравнениями:

1) $18x+6y-17=0, \quad 14x-7y+15=0,$ $5x+10y-9=0$;
2) $x+2y-2=0, \quad 2x+y-13=0,$ $x-2y+6=0$.
3) $x+3y-3=0, \quad 3x-11y-29=0,$ $3x-y+11=0$.

285. Определите координаты точек пересечения прямой $x-y-1=0$ с окружностью:

1) $x^2+y^2=25$; 2) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

286. При каких значениях a прямая $x+y=a$ касается окружности $x^2+y^2=1$?

287. Найдите точку на окружности $x^2+y^2=4$, ближайшую к точке $(-8; -6)$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Является ли уравнение $y^2-x^2=0$ уравнением прямой, содержащей биссектрису первого координатного угла?
2. Является ли уравнение $|x|+|y|=0$ уравнением прямой?
3. Проходит ли линия, заданная уравнением $x^2+6xy+8y^2-2x+4y=0$, через начало координат?
4. При каких значениях a прямая $x+y+a^2-2a+1=0$ проходит через начало координат?
5. Симметрична ли фигура, заданная уравнением

$$(x^2+y^2-4)(x^2+y^2)=0$$

относительно осей координат?

6. Принадлежит ли точка $(-3; 1)$ линиям $y-x=4$ и $xy=-3$?
7. Верно ли, что точка $M(2;1)$ лежит внутри круга, ограниченного окружностью $(x-3)^2+(y+4)^2=30$?
8. Всегда ли угол между прямыми равен углу между двумя векторами, перпендикулярными этим прямым?

§ 3. Кривые второго порядка

1. Парабола. *Уравнение параболы* имеет вид

$$y = ax^2 + bx + c \text{ или } y = a(x - x_0)^2 + y_0 \qquad (a \neq 0).$$

Прямая $x = x_0$ является осью симметрии параболы и называется *осью параболы*. Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной параболы* (рис. 28).

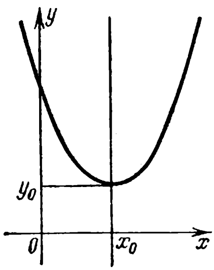


Рис. 28

288. Известно, что точка $M(1; -2)$ принадлежит параболе $y = ax^2 + y_0$. Напишите координаты еще одной точки, принадлежащей параболе.

289. Найдите вершину и ось параболы:

1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = (x + 1)^2 + 2$; 3) $y = -x^2 + 4x - 3$; 4) $y = 2x^2 - x + 1$.

290. Постройте параболу:

1) $y = x^2$; 2) $y = (x - 1)^2$; 3) $y = -(x - 1)^2 + 2$; 4) $y = -2x^2$; 5) $y = 2(x + 1)^2 + 6$; 6) $y = 4x^2 + 8x + 12$.

291. Постройте линию, определяемую уравнением:

1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$; 3) $x = y^2$; 4) $x = y^2 + 2y + 1$; 5) $x = 2y^2 + 3y - 4$.

292. Найдите точки пересечения прямой $y = 2x - 1$ с параболой:

1) $y = x^2$; 2) $y = -2x^2 - 1$; 3) $y = x^2 - 3x + 3$.

293. При каких значениях k прямая $y = kx + 2$:

1) пересекает параболу $y = 4x^2$;
2) не пересекает параболу $y = -2x^2$?

294. Составьте уравнение параболы: 1) симметричной относительно прямой $x = 2$ и проходящей через точки $(3; 2)$ и $(-1; 10)$; 2) с вершиной в точке $(4; 3)$ и проходящей через точку $(5; 1)$, если ее ось параллельна оси y.

295. Стальной трос, подвешенный за два конца на одинаковой высоте, имеет форму дуги параболы. Расстояние между точками крепления концов 20 м. Размер прогиба троса на расстоянии 2 м от точки крепления равен 13 см. Определите размер прогиба троса посередине между креплениями.

296. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 4 м. Описав параболическую траекторию, он упал в 32 м от точки бросания. На какой высоте находился камень на расстоянии 8 м от точки бросания по горизонтали?

2. Окружность.

297. Какие из точек $A(2;\ 1)$, $B(3;\ -2)$, $C(-3;\ 2)$, $D(-2;\ -4)$ лежат внутри круга, ограниченного окружностью:

1) $x^2+y^2=9$;
2) $(x-1)^2+y^2=16$;
3) $(x+2)^2+(y-1)^2=25$?

298. Напишите уравнение окружности: 1) с радиусом 3 и центром в точке $(1;\ -2)$; 2) с центром в точке $(-2;\ 3)$, проходящей через точку $(-5;\ 6)$; 3) с центром в начале координат, касающейся прямой $y=2$; 4) с центром в точке $(-3;\ 2)$, касающейся оси x; 5) с диаметром MN, если $M(3;\ -5)$, $N(7;\ -3)$; 6) касающейся осей координат в точках $(-3;\ 0)$, $(0;\ -3)$; 7)* проходящей через точки $A(2;\ -2)$, $B(1;\ -1)$, $C(0;\ 2)$.

299. Дана окружность $(x+1)^2+(y-2)^2=1$. Составьте уравнение окружности: 1) симметричной данной относительно оси y; 2) симметричной данной относительно оси x; 3) симметричной данной относительно начала координат; 4) полученной параллельным переносом данной на вектор $\vec{a}(-1;\ 1)$.

300. Определите взаимное расположение окружностей (пересекаются, касаются, не имеют общих точек):

1) $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ и $(x+2)^2+(y+5)^2=25$;
2) $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ и $(x+2)^2+(y-1)^2=9$;
3) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ и $(x-1)^2+(y+2)^2=9$;
4) $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ и $(x+5)^2+(y+2)^2=16$.

301*. Докажите, что линия, заданная уравнением

1) $x^2+2x+y^2=0$; 2) $x^2+y^2-4y=0$;
3) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$;
4) $x^2+y^2-8x+2y-64=0$,

является окружностью.

3. Эллипс. *Уравнение эллипса* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>0,\ b>0).$$

При $a=b$ это уравнение совпадает с уравнением окружности.

Эллипс можно получить *сжатием* (*растяжением*) *окружности* $x^2+y^2=a^2$ к оси x (от оси x). Для этого каждой точке окружности с координатами $(x;\ y)$ нужно сопоставить точку с координатами $(x;\ y_1)$, где $y_1=\frac{b}{a}y$ (b/a — коэффициент сжатия).

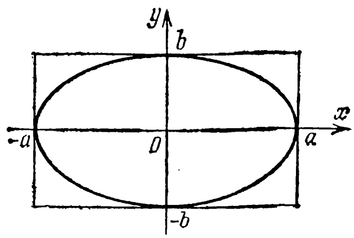


Рис. 29

Эллипс (рис. 29) состоит из графиков двух функций:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ и } y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Осями его симметрии являются оси координат, центром симметрии — начало координат. Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются *вершинами эллипса*, а числа a, b — *полуосями*.

302. Дан эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Найдите точки эллипса: 1) абсцисса которых равна 2; 2) лежащие на осях координат; 3) принадлежащие прямой $x=-2$; 4) отстоящие от оси y на расстояние 2; 5) удаленные от начала координат на 2; 6) принадлежащие параболе $y=\frac{1}{4}x^2-2$.

303. Вычислите периметр четырехугольника, вершины которого совпадают с вершинами эллипса:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$.

304. Докажите, что эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ лежит в прямоугольнике, образованном прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$.

305. Выберите произвольную точку на эллипсе $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ и укажите ей симметричные относительно осей и начала координат. Принадлежат ли они эллипсу?

306. Известно, что точка $M(2; -3)$ принадлежит эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Найдите координаты еще трех точек, принадлежащих эллипсу.

307. Найдите полуоси эллипса:

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $9x^2+16y^2=1$; 3) $25x^2+16y^2=1$.

308. Как запишется уравнение эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, если его повернуть на 90° вокруг начала координат?

309. Постройте линию, которая получится, если: 1) ординаты точек окружности $x^2+y^2=16$ уменьшить в 2 раза, не изменяя абсцисс; 2) абсциссы точек окружности $x^2+y^2=9$ уменьшить в 2 раза, не изменяя ординат.

310. Составьте уравнение линии, полученной сжатием окружности $x^2+y^2=25$ к оси x с коэффициентом сжатия k, если: 1) $k=3/5$; 2) $k=2/5$.

311. Определите радиус окружности, сжатием которой к оси x получен эллипс: 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

312. Постройте линию, заданную уравнением:

1) $y=\sqrt{4-x^2}$; 2) $y=-2\sqrt{4-x^2}$;

3) $y=\frac{2}{3}\sqrt{4-x^2}$; 4) $y=-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$.

313. Постройте линию, определяемую уравнениями:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

3) $x=5\cos t,\ y=3\sin t$; 4) $x=5\sin t,\ y=4\cos t$.

314. По данным уравнениям движения точки определите траекторию:

1) $x=5\cos 10t,\ y=5\sin 10t$;

2) $x=5\cos 10t,\ y=3\sin 10t$;

3) $x=4\sin 2t,\ y=-6\cos 2t$;

4) $x=-2\cos(t/2),\ y=\sin(t/2)$.

315. Составьте уравнение эллипса, проходящего через точки M и N, если:

1) $M(4; 0)$, $N(-2; 3)$; 2) $M(3; -2)$, $N(-2\sqrt{3}; 0)$.

316. Напишите уравнение траектории движения точки на плоскости, если эта точка все время остается в два раза дальше от прямой $x=4$, чем от точки $F(1;\ 0)$.

317*. Отрезок, длина которого равна 3, скользит по сторонам прямого угла. Определите траектории точек отрезка, делящих его в отношении $1:2$.

318*. Докажите, что сумма расстояний от любой точки эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ до точек $F_1(c;\ 0)$ и $F_2(-c;\ 0)$ (называемых *фокусами*), где $c^2=a^2-b^2$, постоянна и равна $2a$.

4. Гипербола. *Уравнение гиперболы* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>0,\ b>0).$$

Гипербола (рис. 30) состоит из двух частей, называемых *ветвями*. Ее можно рассматривать как объединение графиков функций

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \text{ и } y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

При $a=b$ гипербола называется *равносторонней* (*равнобочной*) и ее уравнение имеет вид $x^2-y^2=a^2$, где $a\neq 0$.

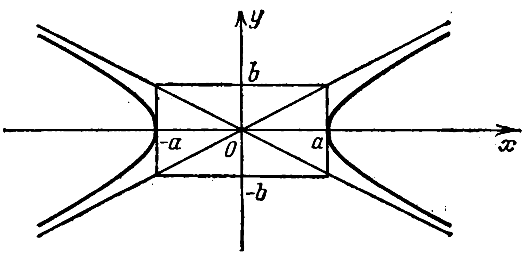


Рис. 30

Осями симметрии гиперболы являются оси координат, центром симметрии — начало координат. Точки пересечения гиперболы с осью x называются *вершинами гиперболы*, а числа a, b — *полуосями*.

Прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ являются *асимптотами гиперболы*: если абсцисса точки гиперболы по абсолютной величине неограниченно возрастает, то расстояние от этой точки до ближайшей асимптоты неограниченно убывает.

319. На гиперболе $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ найдите точки: 1) абсциссы которых равны 15; 2) лежащие на осях координат; 3) принадлежащие прямой $x=4$; 4) отстоящие от оси x на расстояние 4.

320. Выберите произвольную точку на гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. Принадлежат ли гиперболе точки, симметричные выбранной относительно осей и начала координат?

321. Постройте линию, определяемую уравнением:

1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 3) $x^2-y^2=4$;

4)* $x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$, $y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$.

322. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Найдите: 1) угол между асимптотами; 2) площадь фигуры, ограниченной асимптотами и прямой $x=6$.

323. Составьте уравнение гиперболы, проходящей через точки M и N, если:

1) $M(4;\ 3)$, $N(2\sqrt{2};\ 0)$; 2) $M(4;\ 0)$, $N(4\sqrt{2};\ 2)$.

324. Составьте уравнение равносторонней гиперболы, проходящей через точку:

1) $(2;\ 0)$; 2) $(6;\ -4)$.

325*. Докажите, что модуль разности расстояний от любой точки гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до точек $F_1(c;\ 0)$ и $F_2(-c;\ 0)$ (называемых *фокусами*), где $c^2=a^2+b^2$, есть величина постоянная, равная $2a$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Имеет ли парабола центр симметрии?

2. Верно ли, что окружности $x^2+y^2=4$ и $(x-3)^2+(y-3)^2=1$ пересекаются?

3. Верно ли, что сумма длин полуосей эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ равна 12?

4. Является ли эллипс графиком некоторой функции?

5. Какая фигура получится в результате сжатия окружности сначала к оси x с коэффициентом 2, а затем к оси y с коэффициентом 1/3?

6. Верно ли, что расстояние между вершинами гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ равно 10?

7. При каких значениях m прямая $x=m$ пересекает:

1) эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) гиперболу $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$?

8. При каких значениях m уравнение $9x^2+my^2=1$ является уравнением: 1) эллипса; 2) окружности; 3) гиперболы?

9. Сколько осей симметрии имеет: 1) парабола; 2) окружность; 3) эллипс; 4) гипербола?

Глава 3
ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Свойства и графики элементарных функций

1. Понятие числовой функции, ее простейшие свойства. Задать на некотором числовом множестве функцию $y=f(x)$ — это значит указать правило, которое каждому числу x из этого множества ставит в соответствие одно определенное число y, называемое *значением функции*. Множество чисел, на котором задана функция, называется *областью определения функции*.

Существуют различные способы задания функций: аналитический, графический, табличный, словесный. При аналитическом способе задания функции под ее областью определения (если она не указана) понимается множество всех тех значений x, при которых формула, определяющая функцию, имеет смысл.

График функции $y=f(x)$ — это множество точек координатной плоскости вида $(x;\ f(x))$, где x — произвольное число из области определения функции.

Функция $y=f(x)$ называется *четной (нечетной)*, если для каждого x из области определения функции число $-x$ также принадлежит ее области определения и выполняется равенство

$$f(-x)=f(x) \qquad (f(-x)=-f(x)).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной — относительно начала координат.

Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T\neq 0$, что для каждого x из области определения функции значения $x+T$ и $x-T$ также принадлежат ее области определения, и при этом выполняются равенства

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T).$$

Число T называется *периодом функции* $y=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей (убывающей) на множестве* X, если для любых x_1 и x_2 из этого множества и таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$). Если функция возрастает (убывает) на всей области определения, то говорят, что $y = f(x)$ *возрастающая (убывающая) функция.*

326. Установите зависимость: 1) объема цилиндра с радиусом основания $r=2$ см от его высоты h и постройте график этой зависимости; 2) объема цилиндра высотой $h=5$ см от радиуса r его основания и постройте график этой зависимости; 3) высоты h цилиндра от радиуса r его основания, если объем цилиндра равен 1 см³. Постройте график этой зависимости.

327*. Точка равномерно движется по окружности с центром в начале координат и радиусом 1 м. Найдите зависимость ординаты точки от времени, если в моменты $t=0$, $t=1$ с точка имела соответственно координаты (1; 0) и $(1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$.

328. Выразите зависимость длины одного катета прямоугольного треугольника от длины другого при постоянной гипотенузе. Постройте график этой зависимости.

329. Функция задана формулой

1) $y=(x-1)/2$; 2) $y=(x^2-1)/(2x+2)$;

3) $y=-0{,}1x^2-0{,}2x+0{,}3$; 4) $y=\sqrt{x}$;

5) $y=1/x$; 6) $y=10^{\lg x}$; 7) $y=10^{-\lg x}$;

8) $y=\begin{cases} x-1, & \text{если } x \leqslant 0 \\ x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$; 9) $y=|x^2-1|$.

Какие из чисел -1, 0, 1 принадлежат области определения функции? Найдите соответствующие им значения функции. Принадлежит ли множеству значений функции число -1; число $-1/2$; число 0? Постройте график функции.

Найдите область определения функции (330—335):

330. 1) $y=\dfrac{3x+5}{7x+1}$; 2) $y=\dfrac{x-5}{2x^2-10x-28}$;

3) $y=\dfrac{1}{x^2-2x+3}$; 4) $y=\dfrac{2}{x^3-x}$;

5) $y=\dfrac{8x-4}{2x-1}$; 6) $y=\dfrac{1}{|x|-4}$.

331. 1) $y=\sqrt{-x}$; 2) $y=\sqrt{4x-x^2-3}$;

3) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{3+x}}$; 4) $y=\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x}$;

5) $y=\sqrt{3-|x|}$; 6) $y=\sqrt{|x|-3}$.

332. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2-2}}$; 2) $y=3\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$;

3) $y=\frac{\sqrt{2x+18}}{x^2+3,8x-6}$; 4) $y=\frac{4x}{\sqrt{x-5}}$;

5) $y=\frac{4x}{x+5}-\sqrt{x^2-7x+6}$; 6) $y=\frac{\sqrt{x+9}-1}{x^2-2x-80}$.

333. 1) $y=(1/2)^{x+1/x}$; 2) $y=\frac{1}{(1/2)^x-2}$;

3) $y=\sqrt{(0,1)^{x^2-1}-1}$.

334. 1) $y=\lg(4-x)$; 2) $y=\frac{x^2-1}{\lg x+3}$;

3) $y=\log_{0,1}\frac{2x-5}{x}$; 4) $y=\log_2(x^2-7x+12)+\sqrt{x-1}$;

5) $y=\sqrt{\lg\frac{x+8}{x-1}-1}$.

335. 1) $y=1/(\sqrt{2}\sin x-1)$; 2) $y=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x-1}$;

3) $y=(\cos x)/\sin x$; 4) $y=1/\operatorname{tg} x$;

5) $y=\lg(\sin x+2)$; 6) $y=\log_{0,5}(1+\cos x)$.

336. Приведите пример функции, областью определения которой является: 1) множество всех действительных чисел за исключением $x=0$; 2) множество всех действительных чисел за исключением $x=0$ и $x=1$; 3) отрезок $[-1; 1]$; 4) интервал $]-1; 1[$.

337. Найдите множество значений функции:

1) $y=(1/3)^x$, $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $y=1/x$, $-1<x<0$;

3) $y=\lg x$, $10\leqslant x\leqslant 100$; 4) $y=3+2x-x^2$;

5) $y=3+2x-x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 3$; 6) $y=\cos x$, $-\pi/4\leqslant x\leqslant \pi/4$.

338. Пользуясь графиком функции $y=f(x)$, изображенным: 1) на рис. 31; 2) на рис. 32, укажите область определения функции; множество значений функции; точки, в которых функция обращается в нуль; промежутки, на которых функция сохраняет знак; промежутки возрастания и убывания функции.

339. Найдите промежутки возрастания и убывания функций, рассмотренных в задаче 329.

340. Докажите, что если функция $y=f(x)$ возрастает на некотором множестве, то функция $y=-f(x)$ убывает на этом множестве.

341. Докажите, что сумма двух возрастающих (убывающих) функций также является функцией возрастающей (убывающей).

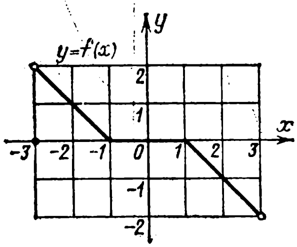


Рис. 31

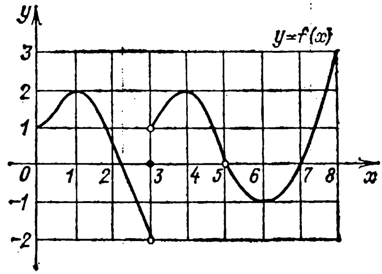


Рис. 32

342. Докажите, что если функция $y = f(x)$ возрастает и $f(x) > 0$ на некотором множестве, то функция $y = 1/f(x)$ убывает на этом множестве.

343. Будет ли возрастающей (убывающей) функция:

1) $y = 7$; 2) $y = 1 - \frac{x}{2}$; 3) $y = x^2 + 2x + 1$;

4) $y = x^2 + 2x + 1$, $x \geqslant -1$;

5) $y = -3/x$; 6) $y = (1/2)^{-x}$; 7) $y = x + \sqrt{x}$;

8) $y = 2x + \lg x$; 9) $y = \frac{1}{\log_{0,1} x}$;

10) $y = 1/(x^2 + x + 1)$; 11) $y = |x|$; 12) $y = -1/\sqrt{x}$?

344. Какие из следующих функций — четные, какие — нечетные, а какие не принадлежат ни одному из этих классов:

1) $y = 1$; 2) $y = x^4 + 3x^2 + 1$; 3) $y = 2x - x^2$;

4) $y = 1/x$; 5) $y = \frac{5x^4}{2x^6 + 7}$; 6) $y = \sqrt{x^2}$;

7) $y = (\sqrt{x})^2$; 8) $y = x + \sin x$; 9) $y = x^2 + \sin x$;

10) $y = x \cos x$; 11) $y = x^2 \cos x$;

12) $y = \sin x - \cos x$; 13) $y = x 2^x$;

14) $y = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geqslant 0; \end{cases}$ 15) $y = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$

16) $y = |x - 1|$?

345. На рис. 33 изображены графики некоторых функций. Достройте их, если можно, до графиков: 1) четных; 2) нечетных функций, заданных на $[-1; 1]$.

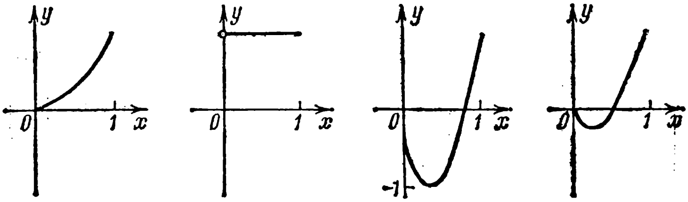


Рис. 33

346. Подберите значения a, b так, чтобы функция $y=ax+b$ была: 1) четной; 2) нечетной; 3) и четной и нечетной.

347*. Найдите все четные и все нечетные функции среди функций вида:

1) $y=a\cos x+b\sin x$; 2) $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

348. Подберите значения a, b, c так, чтобы функция $y=ax^2+bx+c$ была: 1) четной; 2) нечетной.

349. Какие из следующих функций являются периодическими? Найдите их наименьший положительный период, если он существует:

1) $y=5\sin 3x$; 2) $y=4\cos(2x+1)$; 3) $y=5$;

4) $y=x^2$; 5) $y=\frac{1}{\sin x}$; 6) $y=\operatorname{tg} x+3$;

7) $y=2\sin 3x+\cos 3x$; 8) $y=\sin x+\cos 5x$;

9) $y=\cos^2 x$; 10) $y=2\operatorname{tg} x+5\sin x$; 11)* $y=\sin(1/x)$.

350. Какие из следующих чисел: -2; -1; 0; 1; 2 принадлежат области определения функции:

1) $y=f(f(x))$; 2) $y=g(g(x))$;

3) $y=f(g(x))$; 4) $y=g(f(x))$,

если $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=x^4-4$? Найдите значения функций, соответствующие этим числам.

351. Задайте с помощью формул функции $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$, $y=f(f(x))$, $y=g(g(x))$ и укажите их области определения, если:

1) $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$; 2) $f(x)=x^2$, $g(x)=1-2x$;

3) $f(x)=x^2$, $g(x)=10^x$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sin x$.

352. Представьте функцию $y=F(x)$ как сложную, составленную из более простых функций, если:

1) $F(x)=(3x+4)^7$; 2) $F(x)=\sqrt{2x+1}$;
3) $F(x)=\cos(5x+2)$; 4) $F(x)=1/(x^2+1)$;
5) $F(x)=\sin^2 x$; 6) $F(x)=10^{1/x}$; 7) $F(x)=\sqrt{3-\lg x}$;
8) $F(x)=\lg(x^2+4x+1)$; 9) $F(x)=\operatorname{tg}(e^x+1)$.

2. Простейшие преобразования графиков функций.

1. График функции $y=f(x)+a$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ сдвигом последнего вдоль оси y на $|a|$ единиц: в положительном направлении оси, если $a>0$, и в отрицательном, если $a<0$ (рис. 34).

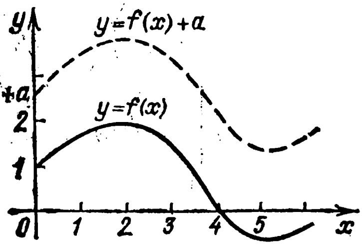


Рис. 34

2. График функции $y=f(x+b)$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ сдвигом последнего вдоль оси x на $|b|$ единиц: в отрицательном направлении оси, если $b>0$, и положительном, если $b<0$ (рис. 35).

3. График функции $y=kf(x)$, где $k\neq 0$, можно получить из графика функции $y=f(x)$ растяжением последнего от оси абсцисс в $|k|$ раз, если $|k|>1$, или сжатием

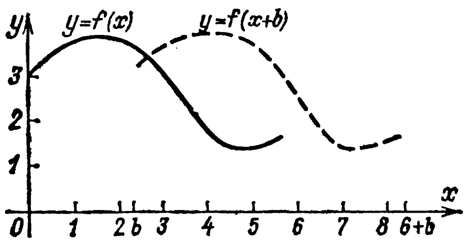


Рис. 35

его к оси абсцисс в $1/|k|$ раз, если $|k|<1$. При $k<0$ дополнительно выполняется преобразование симметрии относительно оси x (рис. 36).

4. График функции $y=f(wx)$, где $w\neq 0$, можно получить из графика функции $y=f(x)$ сжатием последнего к оси ординат в $|w|$ раз, если $|w|>1$, или растяжением его от оси ординат в $1/|w|$ раз, если $|w|<1$. При $w<0$

дополнительно выполняется преобразование симметрии относительно оси y (рис. 37).

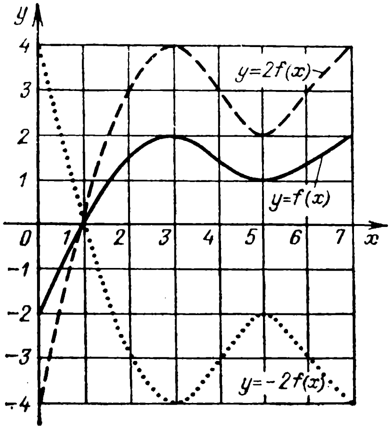


Рис. 36

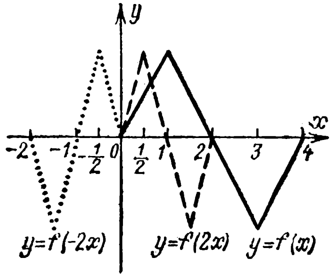


Рис. 37

5. График функции

$$y = kf(wx+b)+a = kf\left(w\left(x+\frac{b}{w}\right)\right)+a$$

может быть получен из графика функции $y=f(x)$ последовательным выполнением преобразований 4, 2, 3, 1.

Пример 1. Построить график функции $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. График данной функции $y = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ получается из графика функции $y = \sin x$ последовательным выполнением следующих преобразований: а) сжатия его к оси y в 2 раза; 2) растяжения от оси x в 3 раза; в) сдвига вдоль оси x на $\pi/6$ единиц в положительном направлении (рис. 38).

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{4x+3}{2x+1}$.

Решение. Выделив «целую часть» дроби, получим

$$\frac{4x+3}{2x+1} = \frac{(4x+2)+1}{2x+1} = 2 + \frac{1}{2x+1} = 2 + \frac{1}{2(x+1/2)}.$$

График этой функции получается из графика $y = 1/x$ следующими преобразованиями: а) сжатием его к оси y

в 2 раза; б) сдвигом вдоль оси x на $1/2$ единицы в отрицательном направлении оси x; в) сдвигом вдоль оси y на 2 единицы в положительном направлении оси y (рис. 39).

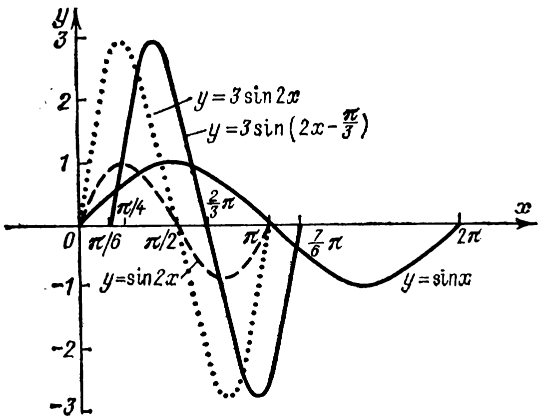


Рис. 38

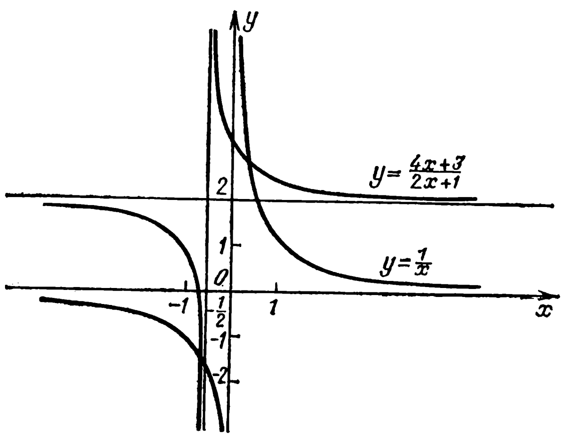


Рис. 39

Постройте график функции (353—358):

353. 1) $y=x^2+2$; 2) $y=\sqrt{x}-4$;

3) $y=(1/2)^x-1$; 4) $y=\frac{5}{x}+3$.

354. 1) $y=(x+2)^2$; 2) $y=\sqrt{x+4}$;
3) $y=(1/2)^{x-1}$; 4) $y=5/(x-3)$.

355. 1) $y=x^2-5x+6$; 2) $y=\sqrt{x-1}+2$;
3) $y=(1/2)^{x-1}+1$; 4) $y=\frac{x+2}{x+1}$;
5) $y=(x+1)^3-3$; 6) $y=2+\lg(x-1)$;
7) $y=\frac{1}{3}+\log_3\frac{2x+1}{2}$; 8) $y=(4\sin x-5)/4$.

356. 1) $y=-\lg x$; 2) $y=\lg(1-x)$;
3) $y=\sqrt{4-x}$; 4) $y=2-\sin x$.

357. 1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sin 2x$;
3) $y=\sqrt{x}/3$; 4) $y=\ln(x/3)$.

358. 1) $y=-4x^2+12x-5$; 2) $y=2\sin(x+1)$;
3) $y=(1-\cos x)/3$; 4) $y=\cos 2x+\sin 2x$;
5) $y=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x$; 6) $y=\sin^2 x$;
7) $y=2e^{x/2}-3$; 8) $y=\frac{x}{2x-8}$; 9) $y=\frac{4x+3}{x+1}$.

359. Определите графически, сколько корней имеет уравнение:

1) $x^3=1-\frac{x}{2}$; 2) $2^x=2-x^2$; 3) $x-1=\sqrt[3]{x^2}$;
4) $\sqrt{x}=(x-3)^2$; 5) $\sin x=1/x$; 6) $\cos x=1/x$; $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$;
7) $\ln(-x)=(2+x)^2$; 8) $10^x=\lg x$;
9)* $e^x-1=\ln(x+1)$; 10) $x^2=2\sin x$;
11) $0{,}1x=\log_{0,1}x$; 12) $xe^x=1$.

360. При каких значениях a уравнение
1) $1/x=ax$; 2) $e^{ax}=x$; 3) $a\cos(ax+1)=1$
не имеет решений? Имеет единственное решение? Имеет два решения? Имеет более двух решений?

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Может ли график функции пересекаться в нескольких точках прямой: 1) $y=a$; 2) $x=a$?

2. Может ли график функции быть симметричным: 1) относительно оси абсцисс; 2) относительно оси ординат?

3. При каких значениях a и b функция $y=ax+b$ является: 1) возрастающей; 2) убывающей?

4. При каких значениях a функция $y=a^{-x}$ является: 1) возрастающей; 2) убывающей?

5. Функция $y=f(x)$ возрастает на $]-\infty; +\infty[$. Будет ли возрастающей или убывающей функция: 1) $y=-f(x)$; 2) $y=f(-x)$; 3) $y=f(5x)$; 4) $y=f(1-5x)$; 5) $y=f(2^x)$; 6) $y=2^{f(x)}$; 7) $y=(1/2)^{f(x)}$; 8) $y=f(\cos x)$?

6.* Функция $y=f(x)$ убывает на каждом из промежутков 1) $[0; 1]$ и $[1; 2]$; 2) $[0; 1[$ и $[1; 2]$. Обязательно ли она убывает на $[0; 2]$?

7. Укажите такое α, чтобы функция $y=x^\alpha$ была: 1) возрастающей; 2) убывающей; 3) четной; 4) нечетной.

8. Может ли функция быть четной или нечетной, если ее областью определения является промежуток $]-1; 1]$?

9. Областью определения нечетной функции является промежуток $[a, b]$. Что можно сказать о числах a и b?

10. Известно, что функция $y=f(x)$ нечетная и число $x=0$ принадлежит ее области определения. Найдите $f(0)$.

11. Существует ли нечетная функция, принимающая только положительные значения?

12.* Приведите примеры функций, являющихся одновременно и четными, и нечетными.

13. Четной или нечетной функцией является произведение: 1) двух нечетных функций; 2) двух четных функций; 3) четной и нечетной функций?

14. Будет ли четной (нечетной) функцией сумма: 1) двух нечетных функций; 2) двух четных функций; 3) четной и нечетной функций?

15.* Четной или нечетной является функция $y=f(g(x))$, если: 1) $u=g(x)$ — четная функция; 2) $u=g(x)$ — нечетная; а $y=f(u)$ — четная функция; 3) обе составляющие функции — нечетные?

16. Наименьшие положительные периоды функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ соответственно равны ω и $\omega/2$. Какой наименьший положительный период будет иметь функция: 1) $y=f(x+a)$; 2) $y=f(\omega x)$; 3) $y=k\cdot f(x)$, $k\neq 0$; 4) $y=g(\omega x+\varphi)$; 5) $y=g(x)+b$; 6) $y=f(x)+g(x)$?

17. Может ли возрастающая (убывающая) функция быть: 1) четной; 2) нечетной; 3) периодической?

18. В какой точке u_0 надо знать значение функции $y=f(u)$, чтобы вычислить значение функции: 1) $y=f(e^x)$ в точке $x_0=\ln 2$; 2) $y=f(\sin x)$ в точке $x_0=\pi/2$?

19. Переменная x обратно пропорциональна y; y — обратно пропорциональна z; переменная z, в свою очередь, обратно пропорциональна u. В какой зависимости находятся переменные u и x?

20. Область определения функции $y=f(x)$ — отрезок $[0; 1]$. Укажите область определения функции: 1) $y=f(2x+1)$; 2) $y=f(x^2)$; 3) $y=f(\cos x)$.

§ 2. Предел и непрерывность функции

1. Непрерывные функции, их свойства. Число A называют *пределом функции* $y=f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$), если для любого положительного числа ε можно указать такую окрестность точки x_0, т. е. интервал, содержащий точку x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

При вычислении пределов пользуются следующими правилами: если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, где k — постоянная;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x+12}{4x+5}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to -1}(4x+5)=4\lim\limits_{x\to -1} x+\lim\limits_{x\to -1} 5=-4+5=1\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x+12)=\lim\limits_{x\to -1} x^2-3\lim\limits_{x\to -1} x+\lim\limits_{x\to -1} 12=16$, то, применяя правило 4 о пределе частного, получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x+12}{4x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x+12)}{\lim\limits_{x\to -1}(4x+5)}=\frac{16}{1}=16.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x+1}$.

Решение. Правило нахождения предела частного здесь неприменимо, так как предел знаменателя при $x\to -1$ равен нулю. Преобразуем дробь, разложив числитель на множители:

$$\frac{x^2+x}{x+1}=\frac{x(x+1)}{x+1}=x \text{ при } x\neq -1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim_{x\to -1} x=-1.$$

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если: а) она определена в этой точке; б) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; в) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Пример 3. При каком значении A функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{при } x\neq-2,\\ A & \text{при } x=-2\end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x=-2$?

Решение. Непрерывность функции в точке $x=-2$ обеспечивается выполнением равенства $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=A$. Так как

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x-2)=-4,$$

то $A=-4$.

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка, называется *непрерывной на этом промежутке*. Если непрерывность функции нарушается в некоторой точке, то эту точку называют *точкой разрыва функции*.

Степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические функции непрерывны в своих областях определения.

Непрерывные функции обладают следующими свойствами.

1. Сумма, разность, произведение непрерывных в точке функций также непрерывны в этой точке.

2. Частное $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ двух непрерывных в точке x_0 функций есть функция, непрерывная в этой точке, если $g(x_0)\neq 0$.

3. Если непрерывная на некотором отрезке функция принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка, в которой данная функция обращается в нуль.

Или иначе: если функция на некотором промежутке непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом промежутке сохраняет постоянный знак.

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию:

$$1)\ f(x)=\frac{x^2+\cos x}{x^4+1};\quad 2)\ g(x)=\frac{3^x+1}{x^2-1}.$$

Решение. 1) Функции $y=x^2+\cos x$ и $y=x^4+1$ непрерывны на $]-\infty; +\infty[$ как суммы непрерывных функций. Следовательно, функция $y=f(x)$, представляющая собой частное двух непрерывных функций со знаменателем, всюду отличным от нуля, также будет непрерывной на $]-\infty; +\infty[$.

2) Функция $y=g(x)$, представляющая собой частное двух всюду непрерывных функций, будет непрерывной в своей области определения, т. е. на множестве всех действительных чисел, за исключением $x=\pm 1$. Точки $x_1=-1$, $x_2=1$ являются ее точками разрыва.

Непрерывность функции можно использовать для вычисления пределов. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то для нахождения предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ достаточно вычислить значение этой функции в точке x_0, так как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1+2\sin x}{3x+\cos x}$.

Решение. Функция $y=\dfrac{1+2\sin x}{3x+\cos x}$ непрерывна в точке $x=\pi/2$, поэтому

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1+2\sin x}{3x+\cos x}=\frac{1+2\sin(\pi/2)}{3\pi/2+\cos(\pi/2)}=\frac{2}{\pi}.$$

Пример 6. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что уравнение $x^5-3x=1$ имеет по крайней мере один корень в промежутке $[1; 2]$.

Решение. Функция $y=f(x)=x^5-3x-1$ непрерывна на отрезке $[1; 2]$, $f(1)=-3<0$, $f(2)=25>0$. Поэтому, согласно свойству 3, существует точка $x_0 \in [1; 2]$, в которой данная функция обращается в нуль, т. е. $x_0^5-3x_0-1=0$. Это и требовалось доказать.

Пример 7. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x}>1$.

Решение. Заданное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sqrt{x+5}+x-1}{1-x}>0.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}+x-1}{1-x}$, которая определена и непрерывна на множестве $[-5; 1[\cup]1; +\infty[$.

Решив уравнение $\sqrt{x+5}+x-1=0$, находим точку $x=-1$, в которой эта функция обращается в нуль. Согласно свойству 3, функция $y=f(x)$ сохраняет знак на каждом из промежутков $[-5;\ -1[$, $]-1;\ 1[$, $]1;\ +\infty[$. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значения функции в какой-либо одной точке для каждого промежутка. Так как $f(-5)=-1$, $f(0)=\sqrt{5}-1>0$, $f(4)=-2$, то $f(x)>0$ на интервале $]-1;\ 1[$.

Ответ: $]-1;\ 1[$.

361. На рис. 40 изображены графики некоторых функций. 1) Укажите точки разрыва этих функций. Какое

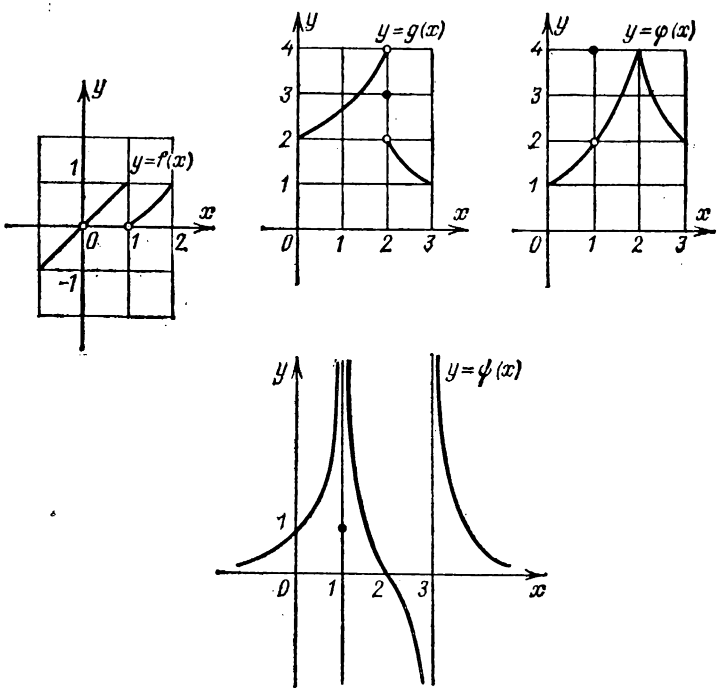


Рис. 40

условие непрерывности нарушено в каждой из этих точек? 2) Найдите значения функций в тех точках разрыва, которые входят в их область определения.

362. Приведите примеры функций, непрерывных: 1) в любой точке числовой прямой; 2) при всех значениях x, кроме $x=0$; 3) при всех значениях x, кроме $x=0$, $x=1$.

363. Фигуру $ABEHFCD$, изображенную на рис. 41, пересекает прямая d, параллельная ее основанию. 1) Установите зависимость между длиной отрезка, получаемого в сечении фигуры, и расстоянием x от вершины фигуры H до этой прямой, если $AD=OH=4$ см, $EF=AB=2$ см. Постройте график этой функции. Будет ли функция непрерывной? 2) Установите зависимость между площадью части фигуры, лежащей выше прямой d, и расстоянием x. Постройте график этой функции. Будет ли она непрерывной?

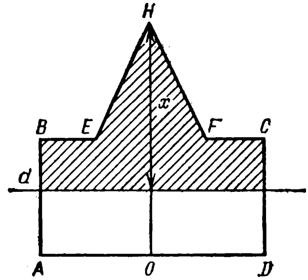


Рис. 41

364. Исследуйте функцию на непрерывность. Найдите ее точки разрыва и постройте эскиз графика функции в окрестностях этих точек:

1) $y=\frac{1}{3x+1}$; 2) $y=\frac{1}{x^2+2x^4}$; 3) $y=\frac{x-1}{x-1}$;

4) $y=\frac{2x+x^2}{x}$; 5) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+5}$; 6) $y=\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$;

7) $y=\frac{1}{|x|+10}$; 8) $y=\frac{1}{|x|-10}$; 9) $y=\frac{x+1}{3^x}$;

10) $y=\frac{1}{2^x-1}$; 11) $y=\frac{x}{1+\cos x}$; 12)* $y=\frac{\sqrt{2x+3}}{x^2+4x+3}$.

365. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+5x-6)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+2e^x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(3x-5)^{10}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1/3}(2^x+9x^2-\sqrt[3]{2})$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+8x^3}{2x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2+8x+15}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-8x+15}$; 8) $\lim\limits_{t\to 1/2}\frac{2t^2+t-1}{4(1-t^2)-3}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to \ln 2}\frac{e^{2x}+e^x-2}{e^x+2}$;

11) $\lim\limits_{x\to \ln 2}\frac{e^{2x}-e^x-2}{e^x-2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$;

13) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{\sqrt{x-2}}+1\right)$; 14) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$; 16) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x}$;

17) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

366. При каком значении A функция

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\neq x_0,\\ A & \text{при } x=x_0\end{cases}$$

будет непрерывной в точке x_0, если

1) $f(x)=(x^2+1)^5$, $x_0=0$; 2) $f(x)=\frac{3x-2}{9x-6}$, $x_0=2/3$;

3) $f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x+5}$, $x_0=-5$; 4) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $x_0=1$?

Постройте графики функций $y=f(x)$, $y=F(x)$.

367. Используя свойства непрерывных функций, докажите, что следующее уравнение имеет решение на указанном промежутке:

1) $x^3+3x+1=0$, $-1\leqslant x\leqslant 0$;
2) $x^6-5x+1=0$, $1\leqslant x\leqslant 2$;
3) $\sin x-x+1=0$, $0\leqslant x\leqslant \pi$;
4) $x=2^{-x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

368*. Докажите, что все три корня уравнения $x^3-3x+1=0$ лежат на отрезке $[-2; 2]$.

369. Решите неравенство:

1) $(x-2)(x+1)(x-5)<0$;
2) $x(4x^2-1)\geqslant 0$; 3) $(x^2+6x-7)(3x+2)\leqslant 0$;
4) $\frac{5x-2}{x+1}<5$; 5) $\frac{1+x^2}{2x}\leqslant 1$; 6) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}<\frac{3}{x+2}$;
7) $\frac{x-1}{x^2-4}>0$; 8) $\frac{x(x^2-1)}{(3x-1)(x+1)}\leqslant 0$; 9) $\frac{x^3-8}{1-5x}\geqslant 0$;
10) $(2x-5)^3(7x-x^2-12)<0$;
11) $(x-1)^2(x+3)(x-5)\geqslant 0$;
12) $\frac{(x+1)^5(3x-1)}{x^2}\leqslant 0$; 13) $\frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x+3)}>0$;
14) $x+4<\sqrt{x+46}$; 15) $\frac{(x+3)\sqrt{x^2-x-12}}{x(x+4)}\geqslant 0$;
16) $\frac{\sqrt{2x}-1}{x-5}\geqslant 1$; 17) $(1+x)\sqrt{x^2+1}>1-x^2$.

2. Предел функции на бесконечности. Число A называют *предел функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к*

$+\infty$, и пишут

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

если для любого положительного числа ε можно указать такой промежуток $]M;\ +\infty[$, что для всех x из этого промежутка выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Число A называют *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x \to -\infty$ и пишут

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A,$$

если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = A$.

Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ одновременно, то число A называют *пределом функции при* x, *стремящемся к* ∞, и пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Для этих пределов сохраняются все вышеприведенные свойства предела функции в точке.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(e^{-x}+\dfrac{5x^2+x+1}{x^2+0{,}3}\right)$.

Решение. На основании свойств показательной функции $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}=0$. Найдем предел второго слагаемого: $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{5x^2+x+1}{x^2+0{,}3}$. Предел и числителя, и знаменателя не существует, поэтому непосредственно применять теорему о пределе частного нельзя. В этом случае числитель и знаменатель делим на x^2, а затем применяем теоремы о пределах:

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{5x^2+x+1}{x^2+0{,}3}=\lim_{x \to +\infty}\frac{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{0{,}3}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\frac{0{,}3}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 5+\lim\limits_{x \to +\infty}(1/x)+\lim\limits_{x \to +\infty}(1/x^2)}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\lim\limits_{x \to +\infty}(0{,}3/x^2)}=\frac{5+0+0}{1+0}=5.$$

Тогда

$$\lim_{x \to +\infty}\left(e^{-x}+\frac{5x^2+x+1}{x^2+0{,}3}\right)=\lim_{x \to +\infty} e^{-x}+\lim_{x \to +\infty}\frac{5x^2+x+1}{x^2+0{,}3}=$$

$$=0+5=5.$$

370. На рис. 42 изображены графики функций. Какие из них имеют предел при: 1) $x \to +\infty$; 2) $x \to -\infty$; 3) $x \to \infty$?

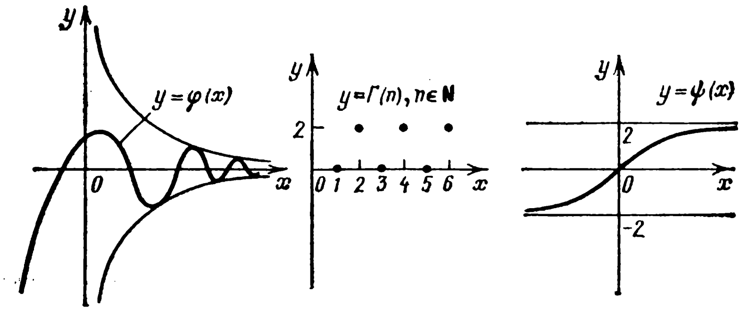


Рис. 42

371. Имеет ли функция $y = f(x)$ предел при $x \to +\infty$, если:

1) $f(x) = 1$; 2) $f(x) = 10^x$; 3) $f(x) = (0,1)^x$;
4) $f(x) = 1000/x$; 5) $f(x) = 1 + x + x^2$; 6) $f(x) = \sin x$?

372. Имеет ли предел последовательность (x_n), если:

1) $x_n = (-1)^n$; 2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 3) $x_n = n$; 4) $x_n = (0,1)^n$?

373. Постройте график какой-либо функции, если известно, что: 1) ее предел при $x \to +\infty$ равен -1; 2) она не имеет предела при $x \to -\infty$; 3) ее предел при $x \to \infty$ равен 1; 4) ее предел при $x \to +\infty$ равен 1, а при $x \to -\infty$ равен -1.

Вычислите предел (374—375).

374. 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x+4}{10x+1}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^4+2x+1}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2x+5)^2}{8x^2}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{x+4}\right)$; 6) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3-n}{2n+1} - \frac{3n^2+2}{4n^2-1}\right)$;

7) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n}{n^2+1} + \frac{1}{n}\right)$; 8) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+x+1} - x\right)$;

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(10 + \frac{3}{x} + e^{-x}\right)$;

375. 1) $\lim\limits_{n \to \infty} (5 + (-1/2)^n)$; 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{3^x+1}$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+2^n+3^n}{3^n+3}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-1} - \dfrac{x^2}{x+2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{7x+4}$; 6)* $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$;

7) пределы функции $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2x+1}, & \text{если } x > 0, \\ \dfrac{5x}{4x-1}, & \text{если } x \leqslant 0 \end{cases}$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Пусть x_0 — точка разрыва функции $y=f(x)$. Следует ли отсюда, что: 1) точка x_0 не входит в область определения этой функции; 2) не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; 3) x_0 — точка разрыва функции $y=f(x)+a$; 4) x_0 — точка разрыва функции $y=f(x+a)$, $a \neq 0$?

2. Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны на некотором промежутке. Обязательно ли непрерывна на этом промежутке функция $y=f(x)/g(x)$?

3. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $y=g(x)$ разрывна в этой точке. Что можно сказать о непрерывности их суммы в точке x_0?

4. Приведите пример функции, которая разрывна в точке $x=0$.

5. Функция не обращается в нуль ни при одном значении x. Следует ли отсюда, что функция имеет один и тот же знак при всех значениях x?

6. Функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Следует ли отсюда, что уравнение $f(x)=0$: 1) имеет корень на $[a; b]$; 2) имеет единственный корень на $[a; b]$?

7. Приведите пример функции, предел которой при $x \to \infty$ равен: 1) 0; 2) 1; 3) 1/4.

8. Приведите пример функции, не имеющей предела при $x \to +\infty$.

9. Верно ли, что: 1) из существования $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ следует существование $\lim\limits_{n \to \infty} f(n)$, $n \in N$; 2) из существования $\lim\limits_{n \to \infty} f(n)$, $n \in N$ следует существование $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; 3) из существования $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ следует существование $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$; 4) из существования $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ следует существование $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; 5) если $f(x)$ — четная функция и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=A$, то существует $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=A$; 6) если $f(x)$ — нечетная функция и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=A$, то

существует $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$; 7) если $f(x)$ — нечетная функция и существует $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, то существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -A$?

§ 3. Производная и дифференциал

1. Производная, ее физический и геометрический смысл. *Производной функции $y = f(x)$ в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

в точке x_0 к приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$, когда последнее стремится к нулю. Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $y'(x_0)$. Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производную $f'(x_0)$ можно трактовать как скорость изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0. В частности, если $x = x(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то скорость движения в момент времени t_0 равна производной $x'(t_0)$ координаты по времени при $t = t_0$.

Операция вычисления производной называется *дифференцированием*. Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется *дифференцируемой в этой точке*. Функция, имеющая производную в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой на этом промежутке*.

Степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции дифференцируемы на любом интервале, где они определены, и их производные находятся по формулам:

1) $(C)' = 0$; 2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; 3) $(\sin x)' = \cos x$;
4) $(\cos x)' = -\sin x$; 5) $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$;
6) $(a^x)' = a^x \ln a$; 7) $(e^x)' = e^x$; 8) $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$;
9) $(\ln x)' = 1/x$; 10) $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}$;
11) $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1 + x^2)$.

Для дифференцируемых функций справедливы следующие правила нахождения производных:

1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;

2) $(kf(x))' = kf'(x)$, где k — постоянная;

3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ $(g(x) \neq 0)$;

5) $(f(g(x)))' = f'(u) \cdot g'(x)$, где $u = g(x)$.

Пример 1. Вычислить производную функции $y = \frac{x^2}{e^x + 1}$ в точке $x = 0$.

Решение. Применяя последовательно правила дифференцирования 4 и 1, а также формулы 2 и 7, получим

$$y' = \frac{(x^2)'(e^x+1) - x^2(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = \frac{2x(e^x+1) - x^2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Отсюда $y'(0) = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{3x^2+5}$.

Решение. Будем рассматривать данную функцию как сложную, составленную из функций $y = \sqrt{u}$, $u = 3x^2 + 5$. Тогда, согласно правилу 5, получим

$$y' = (\sqrt{u})'(3x^2+5)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+5}}.$$

Пример 3. Угол φ поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\varphi = (2t^2 + 3t + 1)$ рад. Найти угловую скорость ω при $t = 4$ с.

Решение. Если $\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ — угол поворота шкива за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$, то $\frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$ — средняя угловая скорость шкива, а

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \varphi'(t)$$

— угловая скорость $\omega(t)$ в момент времени t. Следовательно, $\omega(4) = \varphi'(4)$ рад/с. Так как $\varphi'(t) = 4t + 3$, то $\varphi'(4) = 19$ рад/с и $\omega(4) = 19$ рад/с.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то существует касательная к ее графику в точке $(x_0; f(x_0))$, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0)$. *Уравнение касательной* имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример 4. В каких точках касательные к кривой $y = x^3 + x - 2$ параллельны прямой $y = 4x - 1$?

Решение. Из условия параллельности двух прямых следует, что угловой коэффициент касательных в искомых точках должен быть равен 4. Тогда абсциссы точек касания найдем, используя равенство $y'(x)=4$, т. е. $3x^2+1=4$, отсюда $x_1=1$, $x_2=-1$. Соответствующие ординаты равны $y_1=0$, $y_2=-4$. Искомые точки (1; 0), (—1; —4).

Найдите производную функции (376—380).

376. 1) $y=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4$; 2) $y=x-\operatorname{tg}x+1$;
3) $y=2x+\sin x$ в точке $x=\pi/3$;
4) $y=x^{\sqrt{2}}+(\sqrt{2})^x$; 5) $y=e^x+4\sqrt{x}-\sqrt[4]{3}$ в точке $x=1$;
6) $y=\frac{4x^3-2x^2+x+1}{x^2}$; 7) $y=\frac{5\sqrt{x}+x+1}{\sqrt{x}}$;
8) $y=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$; 9) $y=\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$;
10) $y=\frac{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}{3^x}$ в точке $x=0$.

377. 1) $y=(x^2+5x+1)(x^2-3x+5)$;
2) $y=(\sqrt{x}+\sqrt{2})(e^x+e^2)$;
3) $y=(2+\sqrt{x})(1+\sqrt[4]{x})$ в точке $x=16$;
4) $y=-\frac{x}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x$; 5) $y=e^x\sin(x/2)\cos(x/2)$;
6) $y=\frac{x^2+1}{x^2}\operatorname{arctg}x$; 7) $y=\frac{3^x}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{3}$;
8) $y=x\lg x+10^x$ в точке $x=1$;
9) $y=\frac{\ln x\cdot\sin x}{3\cos x}$; 10) $y=\frac{1}{x}\left(x^3\sqrt{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}\right)$.

378. 1) $y=\frac{1}{1-x^2}$; 2) $y=\frac{2x+1}{x+2}$;
3) $y=\frac{1}{t^2+t+1}$ в точке $t=3$;
4) $y=\frac{3\sqrt{x}}{0{,}1-2x^2}$; 5) $y=\frac{1}{\ln x}+\ln x$ в точке $x=e$;
6) $y=\frac{4^x}{(x+1)2^{x+1}}$; 7) $y=\frac{3^x+3x}{3^x-3x}$ в точке $x=0$;
8) $y=\frac{\sin 2\alpha}{\alpha(1-\cos 2\alpha)}$ в точке $\alpha=\pi/2$;
9) $y=\frac{x+\pi\cos x}{\cos x}$; 10) $y=\frac{\lg x+2}{\sqrt{x}}$ в точке $x=e^2$.

379. $y=(2x+1)^{10}$; 2) $y=(5-3x)^4$;
3) $y=\cos^2 x$; 4) $y=(1-3\sqrt{x})^3$; 5) $y=(v^2+v+1)^{3/2}$;

6) $y=\sqrt{5t^2+1}$; 7) $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 8) $y=\sqrt{x/(x+1)}$;
9) $y=\sqrt{1{,}5+\ln 10\cdot\lg x}$; 10) $y=\sqrt[3]{(x+e^x)/4}$;
11) $y=\left(1+\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right)^5$; 12) $y=1/(x-5x^2+1)^2$;
13) $y=(\sin x/(1+\cos x))^3$; 14) $y=1/\sqrt{\sin x}$;
15) $y=e^{2x+1}/2$; 16) $y=(0{,}1)^{x^2/2+x+0{,}5}$;
17) $y=e^{\sqrt{x}}+\sqrt{e^x}$; 18) $y=10^{(x-1)/(x+1)}$;
19) $y=\ln\left(\frac{u}{5}-\frac{1}{2}\right)$; 20) $y=\lg(1-3\sqrt[3]{x})$;
21) $y=\ln(\sin x+\cos x)$; 22) $y=\operatorname{tg}((x+2)/10)$;
23) $y=\frac{\sin(0{,}5x+1)}{\sin 0{,}5}$; 24) $y=\sin(1/x)+1/\sin x$;
25) $y=1/\cos(4-7x)$; 26) $y=\operatorname{ctg}((x^2+x+1)/0{,}2)$;
27) $y=\operatorname{arctg}(\sqrt{x}/(\sqrt{x}+1))$.

380. 1) $y=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; 2) $y=\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{e^\varphi}$;
3) $y=\frac{x^3+1}{x^2-1}$; 4) $y=\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$; 5) $y=\sqrt{e^{2x/(x+1)}}$;
6) $y=\ln\frac{3x+1}{x+3}$; 7) $y=e^{(\ln(\cos x))/2}$;
8) $y=\frac{x}{\operatorname{tg}(x/2)+\operatorname{ctg}(x/2)}$; 9) $y=\lg\sqrt{x/10^x}$.

381. Дано уравнение прямолинейного движения тела: $s=3t^2+2$, где s — путь, пройденный телом, м; t — время, с. Найдите: 1) среднюю скорость движения за следующие промежутки времени: [1; 2], [1; 1,1], [1; 1,01], [1; 1,001]; 2) скорость тела в момент времени $t=1$ с.

382. Высота брошенного вертикально вверх тела изменяется по закону $h=2+9t-3t^2$, где h — высота, м; t — время, с. Найдите: 1) начальную скорость движения; 2) скорость тела в моменты времени $t_0=0{,}5$ с, $t_1=1$ с; 3) наибольшую высоту его подъема.

383. Точка движется по прямой так, что ее расстояние от начального пункта увеличивается пропорционально квадрату времени. Найдите скорость точки через 3 с после начала движения, если к этому моменту времени она прошла путь, равный 18 м. Сравните ее со средней скоростью движения за указанный промежуток времени.

384. Материальная точка совершает гармоническое колебание по закону

$$x=\frac{3\sin\pi t}{\pi},$$

где x — координата точки, t — время. 1) Найдите скорость движения в моменты времени $t_1 = 1/6$, $t_2 = 1/4$, $t_3 = 1$, с. 2) В какие моменты времени меняется направление движения? 3) В какие моменты времени точка имеет наибольшую скорость?

385. При торможении угол поворота маховика изменяется по закону $\varphi = 8 + 50t - 5t^2$, где φ — угол поворота, рад; t — время, с. Найдите: 1) величину угловой скорости в моменты времени $t_1 = 0{,}1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1{,}9$ с; 2) момент времени, когда вращение прекратится.

386. Тело массой 1,5 кг движется прямолинейно по закону $s = t^3 - 16t^2 + 64t$, где s — путь, пройденный телом, м; t — время, с. Определите: 1) в какие моменты времени тело находилось в начале координат; 2) в какие моменты времени его скорость равнялась нулю; 3) кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения.

387. Прямолинейное движение точки совершалось по закону

$$s = \begin{cases} 3t^2 - t^3 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 2; \\ 4 & \text{при } 2 < t \leqslant 3; \\ t^2 - 6t + 13 & \text{при } 3 < t \leqslant 4; \\ 2t - 3 & \text{при } 4 < t \leqslant 6, \end{cases}$$

где s — путь, пройденный точкой, м; t — время, с. 1) Укажите промежуток времени, когда точка двигалась равномерно; когда сделала остановку. 2) Определите скорость движения в моменты $t_1 = 1$ с, $t_2 = 3{,}5$ с, $t_3 = 5$ с. 3) Определите среднюю скорость за первые две секунды; за четвертую секунду; за 6 с движения. 4) Постройте график зависимости скорости точки от времени. В какой момент времени точка имела наибольшую скорость?

388. Барометрическое давление p изменяется с высотой h по закону $p = p_0 e^{ch}$, где p_0 — нормальное давление, c — некоторая постоянная. На высоте 5540 м давление равно половине нормального. Установите зависимость скорости изменения давления от высоты.

389. Какая из функций $y = 2x + 5$, $y = e^x$, $y = 3x^2/2$ имеет наибольшую скорость изменения в точке:

1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = 1$; 3) $x_0 = 2$?

390. Через точки $A_1(0;\ 0)$ и $A_2(x_0;\ y_0)$ кривой $y = x^3$ проведена секущая A_1A_2. Найдите угловой коэффициент: 1) секущей, если $x_0 = 1$, $x_0 = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}01$, $x_0 = 0{,}001$; 2) касательной к данной кривой в точке A_1.

391. Напишите уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 2x - 15$ в точках: 1) с абсциссой $x = 0$; 2) с абсциссой $x=-1$; 3) с ординатой $y=-7$; 4) пересечения ее с осью абсцисс; 5) пересечения ее с прямой $y=1-2x$.

392. Напишите уравнение касательной к гиперболе $y=(x+3)/(x+1)$ в точке: 1) пересечения ее с осью y; 2) пересечения ее с осью x; 3) с абсциссой $x=1$.

393. В каких точках касательные к кривой $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+\frac{5}{3}$, параллельны: 1) оси x; 2) прямой $y=3x+1$; 3) касательной к кривой $y=-x-\frac{1}{x}$ в точке (1/3, —10/3)?

2. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выражение вида $f'(x_0)\Delta x$, где $\Delta x=x-x_0$, называется *дифференциалом функции в точке* x_0 и обозначается $df(x_0)$ или $dy(x_0)$. Дифференциал независимой переменной dx считают равным ее приращению Δx, поэтому

$$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx.$$

Если провести касательную к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$, то дифференциал $f'(x_0)dx$ равен приращению ординаты этой касательной, соответствующему приращению $\Delta x=x-x_0$.

Если $f'(x_0)\neq 0$, то значение функции $y=f(x)$ в точке x, близкой к x_0, можно приближенно вычислить по формуле

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \qquad (1)$$

Пример 1. Вычислить приближенно значение функции $f(x)=\sqrt{4x^2+3x+2}$ в точке $x=1{,}003$.

Решение. Значение функции и ее производной

$$f'(x)=\frac{8x+3}{2\sqrt{4x^2+3x+2}}$$

легко вычислить при значении $x_0=1$, которое близко к $x=1{,}003$. Поэтому $f(1)=3$, $f'(1)=11/6$, $\Delta x=0{,}003$ и, согласно формуле (1), имеем $f(1{,}003)\approx 3+\frac{11}{6}\cdot 0{,}003=3{,}0055$.

Пример 2. Вычислите приближенно $10^{0{,}99}$.

Решение. Положим в формуле (1) $f(x)=10^x$ и $x_0=1$. Тогда $f'(x)=10^x\ln 10$, $\Delta x=-0{,}01$ и

$$10^{0{,}99}\approx 10-10\cdot 0{,}01\cdot\ln 10\approx 10-0{,}1\cdot 2{,}303=9{,}7697.$$

Формулу (1) применяют также для приближенного вычисления приращения функции в точке.

Пример 3. Даны два кубика, ребра которых соответственно равны 5 см и 4,98 см. На сколько объем второго кубика меньше объема первого?

Решение. Объем v куба с ребром x равен $v = x^3$. Вычислим приближенно приращение этой функции при $x = 5$ по формуле (1). Так как $v' = 3x^2$, $v'(5) = 75$, $\Delta x = 4{,}98 - 5 = -0{,}02$, то $\Delta v(5) \approx 75(-0{,}02) = -1{,}5$, т. е. объем второго кубика меньше объема первого приближенно на 1,5 см^3.

394. Найдите приращение и дифференциал функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ при: 1) $\Delta x = 1$; 2) $\Delta x = 1/2$; 3) $\Delta x = 1/4$. Проиллюстрируйте на чертеже зависимости величины $|\Delta y - dy|$ от приращения аргумента Δx.

395. Для функции $y = x^3 + x$ найдите Δy и dy в точке $x = 1$, если: 1) $\Delta x = 1$; 2) $\Delta x = 0{,}1$; 3) $\Delta x = 0{,}01$. Какова абсолютная и относительная погрешности от замены Δy на dy?

396. Найдите дифференциал функции:

1) $y = 1/2\sqrt{x}$ в точке $x = 1$; 2) $y = x\cos x + \sin x$;
3) $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$; 4) $y = \ln(\sin x)$; 5) $y = \sqrt{5x + 2}$;
6) $y = 2^{-1/x + x}$; 7) $y = |x|$ в точках $x = \pm 1$;
8) $y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \ln x & \text{при } x > 1 \end{cases}$ в точках $x = 0$, $x = 2$.

397. Вычислите приближенно значение функции:

1) $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 1$ в точке $x = 1{,}01$;
2) $f(x) = (x - 1)^2 (x - 2)^4 (x - 3)$ в точке $x = 2{,}99$;
3) $f(x) = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 1}}$ в точке $x = 3{,}032$;
4) $f(x) = e^{\sqrt{x - 2}}$ в точке $x = 3{,}97$;
5) $f(x) = x\ln(x - 2)$ в точке $x = 3{,}012$;
6) $f(x) = \sin 2x$ в точке $x = 0{,}015$.

398. Вычислите приближенно:

1) $(1{,}025)^{10}$; 2) $(2{,}987)^4$; 3) $\sqrt[3]{0{,}95}$; 4) $\sqrt[5]{32{,}02}$;
5) $\sqrt{3621}$; 6) $\sqrt{7741}$; 7) $\sin 179°$; 8) $\sin 12'$;
9) $\operatorname{tg} 46°$; 10) $\cos^2 44°$; 11) $\ln 0{,}98$;
12) $\ln(1{,}003e)$; 13) $\ln(1{,}05)^5$; 14) $10^{3\lg 2{,}994}$;
15) $e^{0{,}07}$; 16) $e^{-0{,}005}$; 17) $\sqrt{e^{0{,}1}}$.
18) $e^{1{,}015} \cdot e^{-0{,}945}$; 19) $\operatorname{arctg} 1{,}032$.

399. На сколько приближенно изменится значение степени 2^5, если основание: 1) увеличится на 0,003; 2) уменьшится на 0,003?

400. Тело движется прямолинейно по закону $s = 10t + 18t^2 - 2t^3$, где s — путь, пройденный телом, м; t — время, с. Вычислите приближенно: 1) путь, пройденный телом за промежуток времени [1; 1,009]; 2) изменение скорости тела за этот промежуток времени.

401. Сторона квадратного листа жести, равная 15 см, после нагревания увеличилась на 0,001 см. Вычислите приближенно, на сколько изменилась площадь этого листа.

402. Требуется изготовить квадратную пластинку со стороной $x_0 = 10$ см. В каких пределах допустимо изменить сторону пластинки, чтобы ее площадь отличалась от проектной не более чем на $\pm 0{,}01$ см^2?

403. Боковую поверхность стального цилиндра с диаметром основания 20 см и высотой 15 см отшлифовали, после чего диаметр стал равен 19,95 см. На сколько приближенно изменилась масса цилиндра, если плотность стали равна 7,80 г/см^3?

404. Угол 30° определен с точностью до 1°. Какова граница абсолютной погрешности при вычислении косинуса этого угла?

405. Какова граница абсолютной погрешности вычисления $\operatorname{tg} \varphi$, если $\varphi = 60° \pm 1°$?

406*. Докажите, что для всех малых значений x справедливы следующие приближенные формулы:

1) $e^x \approx 1 + x$; 2) $\sin x \approx x$; 3) $\operatorname{tg} x \approx x$;
4) $\ln(1 + x) \approx x$; 5) $\sqrt[n]{1 + x} \approx 1 + x/n$.

407. Вычислите приближенно:

1) $\sin 0{,}012$; 2) $e^{0{,}0041}$; 3) $\sqrt{34}$; 4) $\sqrt[3]{128}$;
5) $\operatorname{tg} 1°30'$; 6) $\cos 89°$; 7) $e^{-0{,}032}$; 8) $\sqrt[5]{0{,}998}$.

3. Производная второго порядка. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке, то ее производная $y = f'(x)$ также является функцией, заданной на этом промежутке. Если $y = f'(x)$ дифференцируема, то ее производную называют *второй производной функции* $y = f(x)$ и обозначают $f''(x)$ или $\frac{d^2f}{dx^2}$, т. е. $f''(x) = (f'(x))'$.

Вторая производная $f''(x)$ выражает скорость изменения первой производной, т. е. ускорение изменения функции $y=f(x)$ в точке x. Если $x(t)$ — координата прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то $x''(t)$ — ускорение точки в этот момент времени.

408. Найдите вторую производную функции:

1) $y=x^5+\frac{1}{3}x^4+2x^3+4$ в точке $x=-1$; 2) $y=\sqrt{x}$;

3) $y=1/(1+2x)$ в точке $x=2$; 4) $y=(2x+1/2)^5$;

5) $y=e^{1-3x}$ в точке $x=1$; 6) $y=\frac{\ln(5x+2)}{3}$;

7) $y=\sin^2(x/2)$; 8) $y=x(e^x+1)$;

9) $y=\ln x+x^2$; 10) $y=\frac{1+x}{1-x}$ в точке $x=0$; 11) $y=\operatorname{tg} x$.

409. Точка движется прямолинейно по закону $s(t)=\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{2}-3t^2+4$, где s — координата точки, м; t — время, с. 1) Найдите ее скорость и ускорение в моменты $t=1$ с, $t=3$ с, $t=4$ с. 2) Определите момент времени, когда ускорение равно нулю. 3) В какие промежутки времени скорость возрастает? 4) В какие промежутки времени скорость убывает?

410. По прямой линии движутся две точки. Закон движения первой точки задан функцией $y=f(t)$, а закон движения второй точки — функцией $y=g(t)$. Определите, в какие моменты времени точки имеют одинаковое ускорение, если:

1) $f(t)=\sin 2t$, $g(t)=2t^2+3t+1$;

2) $f(t)=t^4+2t^3+5t+1$, $g(t)=12t^2$;

3) $f(t)=e^t$, $g(t)=5t^2+\frac{4}{3}t+\frac{1}{2}$.

11. Найдите модуль силы, действующей на тело массой 300 г, в момент времени $t_0=1$ с, если тело движется прямолинейно и его скорость изменяется по закону: 1) $v=2t^3+3$; 2) $v=\frac{1}{1+t}$, где v — скорость, м/с; t — время, с.

412. Тело, постоянной массы, движется по закону $s=t^2+4$, где s — путь, пройденный телом, м; t — время, с. Докажите, что сила, действующая на него, постоянна.

413. Докажите, что величина ускорения гармонического колебания $x=5\sin(2t+1)$ пропорциональна отклонению x от положения равновесия. Найдите коэффициент пропорциональности.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Что следует понимать: 1) под средней скоростью повышения уровня воды в течение некоторого промежутка времени; 2) под скоростью повышения уровня воды в некоторый момент времени; 3) под средней скоростью охлаждения тела за данный промежуток времени; 4) под скоростью охлаждения тела в некоторый момент времени?

2. Тело движется прямолинейно по закону $s=s(t)$. Что можно сказать о движении, если: 1) $s'(t)=1$; 2) $s'(t)=2t$; 3) $s''(t)=0$; 4) $s''(t)>0$; 5) $s''(t)<0$?

3. Тело движется прямолинейно по закону $y=at^2+bt+c$. При каких значениях a, b, c движение будет: 1) равномерным; 2) равноускоренным; 3) равнозамедленным?

4. Существует ли точка на кривой $y=1/x$ такая, что касательная к кривой в этой точке 1) параллельна оси x; 2) параллельна прямой $y=x$; 3) параллельна прямой $y=-x$?

5. В какой точке нельзя провести касательную к графику функции $y=|x-1|$?

6. Всякая ли непрерывная функция дифференцируема?

7. Всякая ли дифференцируемая функция непрерывна?

8. Постройте график какой-либо функции, непрерывной на $]-\infty; +\infty[$, но не дифференцируемой: 1) в точке $x=0$; 2) в точках $x=0$ и $x=1$.

9. В какой точке надо знать производную функции $y=f(u)$, чтобы можно было вычислить производную функции: 1) $y=f(\sin x)$ в точке $x_0=\pi/4$; 2) $y=f\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ в точке $x_0=0$; 3) $y=f(3x^2+5x-4)$ в точке $x_0=2$; 4) $y=f(1+\ln x)$ в точке $x_0=e$?

10. Дифференциал функции в некоторой точке x_0 равен нулю при любом приращении аргумента. Что означает это геометрически?

11. Для какой функции ее дифференциал в каждой точке совпадает с ее приращением?

12. Построить график какой-либо функции $y=f(x)$, у которой в заданной точке x_0: 1) $df(x_0)>\Delta f(x_0)$; 2) $df(x_0)<\Delta f(x_0)$; 3) $df(x_0)=\Delta f(x_0)$.

§ 4. Приложения производной

1. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума. С помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции. Для этого рекомендуется:

1) Найти область определения функции, если она не указана.

2) Найти производную и критические точки функции, т. е. точки из области определения функции, в которых

ее производная равна нулю или не существует. Критическими точками область определения функции разбивается на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет свой знак.

3) Установить знак производной на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале производная функции положительна (отрицательна), то на этом интервале функция возрастает (убывает).

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y=\frac{x^2}{2}-6\ln(x-1).$$

Решение. Функция определена и дифференцируема на интервале $]1; +\infty[$. Найдем ее производную:

$$y'=x-\frac{6}{x-1}=\frac{x^2-x-6}{x-1}=\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}.$$

Уравнение $\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}=0$ имеет два корня: $x_1=-2$ и $x_2=3$. Однако критической точкой функции будет только $x_2=3$, так как первая не принадлежит области определения функции. Критическая точка $x_2=3$ разбивает область определения функции на два интервала $]1; 3[$ и $]3; +\infty[$, на каждом из которых производная сохраняет свой знак. Так как $y'(2)=-4<0$ и $y'(4)=2>0$, то производная отрицательна на $]1; 3[$ и положительна на $]3; +\infty[$. Следовательно, функция убывает на интервале $]1; 3[$ и возрастает на $]3; +\infty[$.

Пример 2. Доказать, что уравнение $\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}+x=1$ имеет единственное решение.

Решение. Функция $f(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}+x-1$ непрерывна в своей области определения и $f(0)=-1<0$, $f(2)=\ln 3>0$. Поэтому, согласно свойству 3 непрерывных функций, на промежутке $]0; 2[$ существует по крайней мере одна точка x_0 такая, что $f(x_0)=0$. Следовательно, $x=x_0$ является решением нашего уравнения. А так как функция $y=f(x)$ возрастающая $\left(f'(x)=1+\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0\right.$ при $\left.x>-1\right)$, то это решение единственное.

Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) *функции* $y=f(x)$, если для всех $x\neq x_0$ из некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x)<$

$< f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Точки максимума и минимума называются *точками экстремума.*

Для нахождения точек экстремума функции надо:

1) Найти производную и критические точки функции.

2) Исследовать знак производной в некоторой окрестности каждой критической точки. Если функция непрерывна в критической точке x_0, а ее производная меняет знак при переходе через x_0, то x_0 — точка экстремума функции. При этом x_0 — точка максимума, если знак меняется с плюса на минус, и минимума, если знак меняется с минуса на плюс. Если же знак производной сохраняется при переходе через рассматриваемую точку, то функция не имеет экстремума в этой точке.

Иногда для нахождения точек экстремума удобно пользоваться следующим правилом.

Если в некоторой точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то в этой точке функция имеет экстремум, а именно: максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Пример 3. Найти точки экстремума функции $y = x(x+1)^3$.

Решение. Способ I. Функция определена и дифференцируема на $]-\infty; +\infty[$. Найдем ее производную: $y' = (x+1)^2(4x+1)$. Производная равна нулю в точках $x = -1$ и $x = -1/4$, т. е. это критические точки функции. Проверим, меняет ли производная знак при переходе через эти точки. На интервалах $]-\infty; -1[$ и $]-1; -1/4[$ производная отрицательна, а на $]-1/4; +\infty[$ — положительна. Следовательно, $x = -1/4$ — точка минимума, а в точке $x = -1$ экстремума нет.

Способ II. Найдем вторую производную: $y'' = 6(x+1)(2x+1)$. Так как $y''(-1/4) = 9/4 > 0$, то $x = -1/4$ — точка минимума; $y''(-1) = 0$, поэтому с помощью второй производной установить наличие экстремума в точке $x=0$ невозможно.

414. На рис. 43 изображен график функции $y = f(x)$. Укажите: 1) интервалы, на которых производная данной функции положительна; 2) интервалы, на которых производная данной функции отрицательна; 3) точки, в которых производная равна нулю; 4) точки, в которых производная не существует; 5) точки максимума функции; 6) точки минимума функции.

415. На рис. 44 изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$. Укажите: 1) промежутки, на которых функция $y=f(x)$ постоянна; 2) промежутки, на которых функция $y=f(x)$ линейна; 3) интервалы возрастания и убывания функции $y=f(x)$; 4) точка максимума и минимума функции $y=f(x)$.

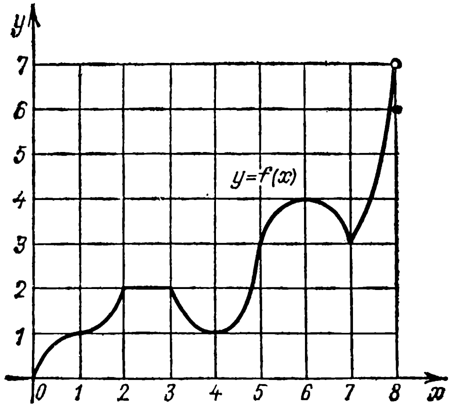


Рис. 43

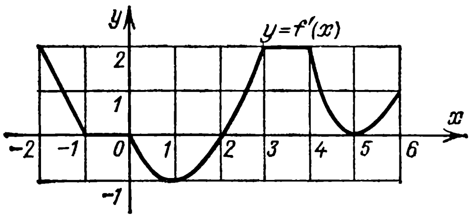


Рис. 44

416. Докажите, что функция $y=f(x)$ возрастающая:

1) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+7x+1$; 2) $f(x)=2x^3-3x^2+6x-1$;

3) $f(x)=\sin x+2x+1$; 4) $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+3x^2$.

417. Найдите интервалы возрастания (убывания) и точки экстремума функции:

1) $y=15-x^2-2x$; 2) $y=4x^3-9x^2+6x$;

3) $y=2x^3-6x^2-18x+7$; 4) $y=3x^4+16x^3+18x^2$;

5) $y=\frac{x^4}{4}-x+5$; 6) $y=x^5-5x-4$;

7) $y=3x^4-4x^3-6x^2+12x$; 8) $y=e^{x(x-1)}$;
9) $y=e^{5x}-5x+1$;
10) $y=e^x\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi$;
11) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; 12) $y=x+1/x$;
13) $y=x-\sqrt{3-x}$; 14) $y=\sqrt{1-x^2}$;
15) $y=\sqrt{x^2-1}$; 16) $y=\sqrt{x^2-x+2}$;
17) $y=x(\ln x-2)$; 18) $y=x\ln^2 x+x+4$.

418. При каких значениях a функция $y=\dfrac{x^3}{3}+ax^2+x$: 1) возрастает на $]-\infty;\ +\infty[$; 2) убывает на $]-\infty;\ +\infty[$?

419. При каком значении a функция $y=a\ln x+x^2-3x$ имеет экстремум в точке $x=1$? Будет ли $x=1$ точкой максимума или минимума в этом случае?

420. Сколько корней имеет уравнение:

1) $x^5+x^3+2=0$; 2) $x^3-x^2+3x+5=0$;
3) $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-2}=2$; 4) $\cos x=x+\dfrac{x^3}{6}+1$?

2. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. График дифференцируемой функции называется *выпуклым вверх* (*вниз*) на некотором интервале, если в пределах указанного интервала он лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции надо:

1) Найти область определения функции, если она не указана.

2) Найти вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю или не существует.

3) Установить знак второй производной в каждом из интервалов, на которые разбивается область определения функции найденными точками.

Если в рассматриваемом интервале вторая производная положительна, то на этом интервале график функции выпукл вниз, если же вторая производная отрицательна, то — выпукл вверх.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. Точка $(x_0;\ f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции, если при переходе через нее кривая меняет направление выпуклости.

Для нахождения точек перегиба графика нужно:

1) Найти все точки из области определения функции,

в которых вторая производная обращается в нуль или не существует.

2) Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности каждой из этих точек. Если функция непрерывна в точке x_0, а ее вторая производная меняет знак при переходе через эту точку, то x_0 является абсциссой точки перегиба графика данной функции.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y=x^4-6x^2+5$.

Решение. Находим первую и вторую производные функции:

$$y'=4x^3-12x;\ y''=12x^2-12=12(x-1)(x+1).$$

Вторая производная всюду существует и обращается в нуль в точках $x=1$, $x=-1$. Область определения функции разбивается этими точками на три интервала: $]-\infty; -1[$, $]-1; 1[$, $]1; +\infty[$, в каждом из которых вторая производная сохраняет свой знак: $f''(x)>0$ при $|x|>1$, $f''(x)<0$ при $|x|<1$. Следовательно, на интервалах $]-\infty; -1[$ и $]1; +\infty[$ график функции выпуклый вниз, а на интервале $]-1; 1[$ — выпуклый вверх. Точки $x=-1$ и $x=1$ — точки перегиба графика.

421. На рис. 43 изображен график функции $y=f(x)$. Укажите: 1) промежутки, на которых вторая производная данной функции положительна, отрицательна, равна нулю; 2) точки перегиба графика функции.

422. Найдите интервалы выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба графика функции:

1) $y=x^3-10x+1$;	2) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;
3) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$;	4) $y=x+36x^2-2x^3-x^4$;
5) $y=(x-1)^4(3x+7)$;	6) $y=x/(1+x^2)$;
7) $y=1/(x^2-x+1)$;	8) $y=(x^2+4)/x$;
9) $y=x+\sqrt{x}$;	10) $y=e^{2x}-4e^x+2$;
11) $y=x^2\ln x$;	12) $y=\ln x+1/x$.

423. При каких значениях a кривая $y=x^4+2ax^3+6x^2+1$ выпукла вниз на интервале $]-\infty; +\infty[$?

424. Постройте график какой-либо функции $y=g(x)$, заданной на $]-\infty; +\infty[$, если известно, что:

1) точка $M(1; 1)$ является его точкой перегиба и $g'(1)=0$;

2) точка $M(1; 1)$ является его точкой перегиба и $g'(1)=1$;

3) $M_1(0; 0)$ и $M_2(1; 1)$ — его точки перегиба.

425. Постройте график какой-либо функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0, если:

1) $f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0$;
2) $f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0$;
3) $f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ f''(x)>0$ при $x<x_0$ и $f''(x)<0$ при $x>x_0$;
4) $f(x_0)=0,\ f'(x_0)=1,\ f''(x)<0$ при $x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x>x_0$.

426. По графику функции, изображенному на: 1) рис. 45; 2) рис. 46, постройте эскиз графика ее производной.

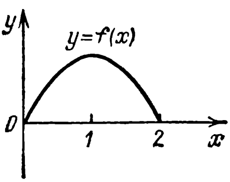


Рис. 45

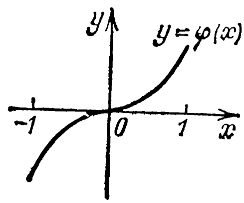


Рис. 46

3. **Построение графиков функций.** Исследование функции и построение ее графика целесообразно проводить по следующей схеме.

1) Найти область определения функции, если она не указана.

2) Выяснить, будет ли функция четной или нечетной.

3) Выяснить, будет ли функция периодической.

4) Найти, если это позволяет область определения, предел функции на бесконечности.

5) Исследовать функцию на непрерывность; изучить поведение функции в окрестности точек разрыва, если они существуют.

6) Найти интервалы возрастания и убывания функции, ее точки экстремума; вычислить значение функции в точках максимума и минимума.

7) Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не приводит к уравнениям, методы решения которых неизвестны).

8) На основании полученных результатов построить эскиз графика функции.

9) Для уточнения графика, если это нужно, найти промежутки его выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба.

П р и м е р 1. Построить график функции $f(x)=16x(x+1)^3$.

Р е ш е н и е. 1) Функция определена на $]-\infty; +\infty[$.

2) Она не является ни четной, ни нечетной.

3) Функция непериодическая.

4) При $x \to \pm\infty$ $y=f(x)$ принимает как угодно большие по модулю значения.

5) Функция непрерывна в области определения.

6) Найдем ее производную $f'(x)=16(x+1)^2(4x+1)$. Критические точки функции $x_1=-1$, $x_2=-1/4$. Функция убывает на интервале $]-\infty; -1/4[$ и возрастает на $]-1/4; +\infty[$. Точка $x=-1/4$ — ее точка минимума. Значение функции в точке минимума равно $f(-1/4)=-27/16$.

7) Точки пересечения с осями координат $(0; 0)$; $(-1; 0)$.

8) Построим эскиз графика функции (рис. 47).

9) Уточним эскиз графика с помощью второй производной: $f''(x)=96(x+1)(2x+1)$. Она обращается в нуль в точках $x_1=-1$, $x_2=-1/2$. На интервалах $]-\infty; -1[$ и $]-1/2; +\infty[$ график функции выпуклый вниз; на интервале $]-1; -1/2[$ — выпуклый вверх. Точки $(-1; 0)$, $(-1/2; -1)$ — точки перегиба графика функции.

10) Результаты исследований представим в виде следующей таблицы:

x	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; -1/2[$	$-1/2$	$]-1/2; -1/4[$	$-1/4$	$]-1/4; +\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$		$(-1; 0)$ точка перегиба графика		$(-1/2; -1)$ точка перегиба графика		точка минимума	

Используя полученные результаты, строим график функции (рис. 48).

П р и м е р 2. Построить график функции $f(x)=x^2/(x^2-1)$.

Р е ш е н и е. 1) Область определения функции — вся числовая прямая, кроме $x_1=-1$, $x_2=1$.

2) Функция четная, так как $f(-x)=f(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно оси ординат.

Поэтому для построения графика достаточно исследовать функцию на $[0; +\infty[$.

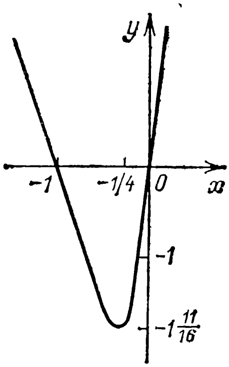


Рис. 47

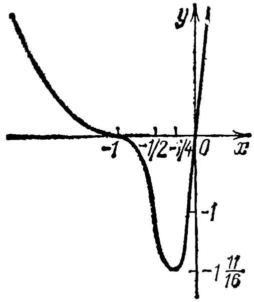


Рис. 48

3) Функция непериодическая.

4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$.

5) Функция непрерывна в своей области определения. Точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ — ее точки разрыва. При $x \to 1$ функция принимает сколь угодно большие по модулю значения, причем справа от точки $x = 1$ — положительные, слева — отрицательные.

6) Найдем производную: $f'(x) = -2x/(x^2-1)^2$. Так как на $]0; 1[$ и $]1; +\infty[$ производная отрицательна, то функция убывает на этих интервалах.

Результаты исследований заносим в таблицу и на основании их строим график функции (рис. 49).

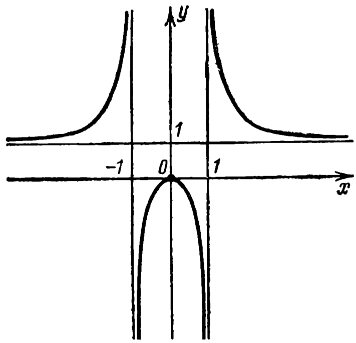


Рис. 49

427. Постройте на $]a; b[$ график какой-либо функции $y = f(x)$, если известно, что для всех x из этого интервала выполняются соотношения:

1) $f(x) > 0$, $f'(x) = 0$;
2) $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$;
3) $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$;
4) $f'(x) > 0$, $f''(x) = 0$.

Постройте графики следующих функций (428—432).

428. 1) $y=4x^3+15x^2+12x+1$;

2) $y=-x^3+3x^2+9x-12$;

3) $y=16x^4+15x^2-1$, 4) $y=x^2(2-x)^2$;

5) $y=x^5-3x+1$; 6) $y=\frac{x^5}{5}-4x^2$;

7) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^3$; 8) $y=5(x^2-1)^3$.

429. 1) $y=1+\frac{2x}{1+x^2}$; 2) $y=\frac{x^2-3}{x^2+3}$;

3) $y=\frac{1}{x^2+x+1}$.

430. 1) $y=\frac{16}{x^2}+x^2$; 2) $y=\frac{1}{x(x-1)}$;

3) $y=\frac{3}{x^2-x-6}$.

431. 1) $y=x^2-\sqrt{2x}$; 2) $y=(x-3)\sqrt{x}$;

3) $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$.

432. 1) $y=\ln(1+x^2)$; 2) $y=\ln(x^2-1)$;

3) $y=e^{-x^2}$; 4) $y=\sqrt{x}e^x$; 5) $y=\sqrt{\sin x}$; 6) $y=1/\cos x$.

433. Сколько корней имеет уравнение:

1) $\sqrt{1+x^4}=1/x$; 2) $1/(1+x^2)=x^2-x$;

3) $\ln(x^2+1)=1-x^2$?

4. Наибольшее и наименьшее значения функции. Значение функции $y=f(x)$ в некоторой точке x_0 множества X называется *наибольшим* (*наименьшим*) *значением функции на этом множестве*, если для каждого $x\in X$ выполняется неравенство

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (f(x)\geqslant f(x_0)).$$

Непрерывная на отрезке функция всегда имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции в этих критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Если на некотором промежутке непрерывная функция $y=f(x)$ имеет единственную критическую точку x_0 и x_0 — точка максимума (минимума), то $f(x_0)$ будет наибольшим (наименьшим) значением функции на этом промежутке.

Пример 1. Выяснить, существуют ли наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}$ на промежутке: 1) $[1; 10]$; 2) $]0; +\infty[$. Если существуют, найти их.

Решение. 1) Функция непрерывна на отрезке $[1; 10]$, поэтому она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Найдем производную функции $y'=2(x^4-16)/x^3$. Критическими точками функции будут точки $x=2$, $x=-2$. Однако только одна из них, $x=2$, принадлежит отрезку $[1; 10]$. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения данной функции находятся среди значений $f(1)=17$; $f(2)=8$; $f(10)=100{,}16$. Наибольшее значение $f(10)=100{,}16$ функция принимает на правом конце отрезка, наименьшее $f(2)=8$ — в своей точке минимума.

2) В случае бесконечного промежутка заранее нельзя сказать, имеет ли функция наибольшее и наименьшее значения. На интервале $]0; +\infty[$ находится единственная критическая точка функции $x=2$. Так как, переходя через эту точку, производная меняет знак с минуса на плюс, то $x=2$ — точка минимума функции, а следовательно, $f(2)=8$ — наименьшее значение функции на $]0; +\infty[$. Наибольшего значения на этом интервале функция не имеет.

Пример 2. Доказать неравенство $x^2 \ln x \geqslant -1/(2e)$.

Решение. Найдем наименьшее значение функции $f(x)=x^2 \ln x$ на $]0; +\infty[$. Так как $f'(x)=2x\ln x+x$, то единственной критической точкой, попадающей в заданный промежуток, будет точка $x=1/\sqrt{e}$. Это точка минимума, поэтому в ней функция принимает наименьшее значение $f(1/\sqrt{e})=-1/(2e)$. Следовательно, $f(x)\geqslant -1/(2e)$, т. е. $x^2 \ln x \geqslant -1/(2e)$.

434. На рис. 43 изображен график функции $y=f(x)$. Имеет ли эта функция наибольшее и наименьшее значения на промежутке

1) $[0; 1]$; 2) $]1; 2[$; 3) $[2; 4]$; 4) $]2; 4[$; 5) $]2; 5[$; 6) $[5; 8]$? Если имеет, укажите их.

435. Постройте график какой-либо функции, заданной на отрезке $[-1; 1]$ и обладающей следующими свойствами: 1) наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах отрезка; 2) наибольшее и наименьшее значения функция принимает в точках экстремума; 3) наибольшее и наименьшее значения функции совпадают; 4) функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

5) функция имеет один минимум, два максимума и не имеет наименьшего значения.

436. Выясните, существуют ли наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на указанном промежутке и, если существуют, найдите их:

1) $f(x)=2x-1$, $[0; 1]$; 2) $f(x)=2x-1$, $]0; 1]$;
3) $f(x)=x^2-6x+8$, $[1; 4]$; 4) $f(x)=x^2-6x+8$, $]1; 4[$;
5) $f(x)=x^2-6x+8$, $]1; +\infty[$;
6) $f(x)=3x^3-4x+8$, $[-1; 1]$;
7) $f(x)=3x^4+4x^3+1$, $[0; 1]$;
8) $f(x)=3x^4+4x^3+1$, $[-2; 1]$;
9) $f(x)=3x^4+4x^3+1$, $]-\infty; +\infty[$;
10) $f(x)=\sin x+2x$, $[-\pi; \pi]$;
11) $f(x)=\sin^2 x$, $[\pi/4; 2\pi/3]$;
12) $f(x)=\sin x-x-x^3/3$, $[0; \pi]$;
13) $f(x)=1/x+x$, $[0,1; 10]$;
14) $f(x)=1/x+x$, $]0; +\infty[$;
15) $f(x)=x/(x-x^2-1)$, $[-2; 2]$;
16) $f(x)=x\ln x-x$, $[1/e, e]$;
17) $f(x)=xe^{x+1}$, $[-2; 0]$;
18) $f(x)=xe^{x+1}$, $[-2; +\infty[$.

437. Докажите справедливость неравенства:

1) $0\leqslant x^3-3x+2\leqslant 20$ при $-1\leqslant x\leqslant 3$;
2) $x^8-8x+7\geqslant 0$;
3) $1+x\leqslant e^x$; 4) $|x^5-5x|\leqslant 4$ при $|x|\leqslant 1$;
5) $\sin x\leqslant x$ при $0\leqslant x\leqslant \pi/2$; 6) $\sin x\leqslant x$ при $x\geqslant 0$.

438. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x=-\frac{t^3}{3}+2t^2+5t-1$, где t — время, с; $|x|$ — расстояние от точки до начала координат, м. Найдите: 1) наибольшее и наименьшее отклонения точки от начала координат за первую секунду движения; 2) наибольшую и наименьшую мгновенные скорости точки за первые две секунды движения, за первые пять секунд движения, 3) наибольшее и наименьшее ускорения точки за вторую секунду движения.

439. Какое положительное число, будучи сложенным с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

440. Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

441. Число 162 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы одно из них было в 5 раз больше другого, а произведение этих трех чисел было наибольшим.

442. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 2 см и 4 см, впишите прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными катетам треугольника.

443. Докажите, что на изготовление цилиндрической бочки заданной вместимости пойдет наименьшее количество материала в том случае, если ее высота равна диаметру основания.

444. Населенный пункт A расположен на расстоянии 3 км от автомагистрали и 5 км от города B, через который проходит эта магистраль. Под каким углом к автомагистрали нужно построить подъездную дорогу, чтобы затраты времени на перевозку грузов из A в B были наименьшими, если допустимая скорость движения автомобилей по магистрали — 90 км/ч, а по подъездной дороге — 45 км/ч?

445. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных резисторов. При каком соотношении между сопротивлениями этих резисторов сопротивление цепи минимально, если при последовательном соединении оно равно R Ом?

446. Разрежьте отрезок длиной 18 см на две части так, чтобы взяв их за катеты, получить прямоугольный треугольник с наименьшей гипотенузой.

447. Через точку $P(4; 1)$ проведите прямую, не проходящую через начало координат, так, чтобы: 1) сумма длин отрезков, отсекаемых ею на положительных координатных полуосях, была наименьшей; 2) прямоугольный треугольник, образованный этой прямой и осями координат, имел наименьшую площадь.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Функция возрастает на некотором интервале. Следует ли отсюда, что ее производная положительна на этом интервале?

2. Производная функции в точке x_0 равна нулю. Следует ли отсюда, что x_0 — точка экстремума этой функции?

3. Пусть x_0 — точка экстремума функции. Следует ли отсюда, что производная функции в этой точке равна нулю?

4. Постройте график какой-либо функции, заданной на множестве всех действительных чисел, если ее производная на всей области определения функции: 1) равна нулю; 2) равна единице; 3) положительна за исключением точки $x=0$, в которой она равна нулю.

5. Функция определена на $[a; b]$. Может ли точка $x=a$ быть точкой экстремума этой функции?

6. Может ли значение функции в некоторой точке минимума быть больше значения функции в некоторой точке максимума?

7. Может ли возрастающая функция иметь: 1) точки экстремума; 2) точки перегиба?

8. Сколько экстремумов может иметь периодическая функция?

9. Приведите пример функции, имеющей бесконечно много экстремумов.

10. Точка x_0 является точкой максимума четной (нечетной) функции. Является ли точка $-x_0$ точкой экстремума?

11. Может ли нечетная функция, заданная на $[-a; a]$, иметь экстремум в точке $x=0$?

12. Может ли четная (нечетная) функция иметь: 1) одну точку экстремума; 2) две точки экстремума; 3) три точки экстремума?

13. Что можно сказать о поведении функции в точки x_0, если: 1) $f'(x_0)=0$; 2) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$; 3) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$; 4) $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$?

14. Может ли многочлен третьей степени иметь: 1) три экстремума; 2) два экстремума; 3) два максимума (минимума); 4) две точки перегиба; 5) два экстремума и ни одной точки перегиба?

15. Какую наименьшую степень может иметь многочлен, график которого изображен на: 1) рис. 50, *а*; 2) рис. 50, *б*?

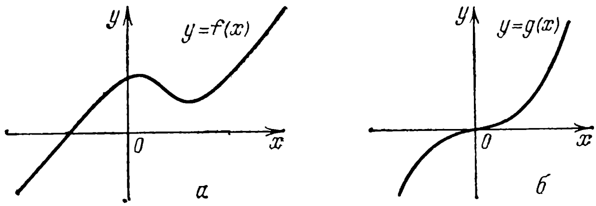


Рис. 50

16. Какое наибольшее число точек экстремума и точек перегиба может иметь многочлен 10-й степени?

17. Существует ли функция, положительная на промежутке $]-\infty; +\infty[$ и имеющая всюду на этом промежутке: 1) отрицательную первую производную; 2) отрицательную вторую производную?

18. Обязательно ли наибольшее значение функции совпадает со значением функции в некоторой точке максимума?

19. Пусть $f(x_0)$ — наибольшее (наименьшее) значение функции на промежутке $]a; b[$. Следует ли отсюда, что x_0 — точка максимума (минимума) функции?

20. Может ли непрерывная функция не иметь наибольшего или наименьшего значения: 1) на некотором отрезке; 2) на некотором конечном интервале?

Глава 4
ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Неопределенный интеграл

1. Неопределенный интеграл и его свойства. Функция $y=F(x)$ называется *первообразной для функции* $y=f(x)$ *на некотором промежутке*, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.

Если $y=F(x)$ — первообразная для функции $y=f(x)$ на некотором промежутке, то существует бесконечно много первообразных для $y=f(x)$ на этом промежутке, и все они имеют вид $y=F(x)+C$, где C — произвольная постоянная. Геометрически это означает, что графики всех первообразных можно получить из графика какой-нибудь одной из них сдвигом этого графика вдоль оси y. Выбором постоянной C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

Пример 1. Для функции $y=1/\sqrt{x}$ на $]0; +\infty[$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(9; -2)$.

Решение. Так как $(2\sqrt{x})'=1/\sqrt{x}$ на $]0; +\infty[$, то функция $y=2\sqrt{x}$ является первообразной для функции $y=1/\sqrt{x}$ на этом промежутке. Тогда функции вида $y=2\sqrt{x}+C$ также являются первообразными для данной функции. Выберем из этого семейства ту функцию, график которой проходит через точку $M(9; -2)$. Постоянная C должна удовлетворять уравнению $2\sqrt{9}+C=-2$. Отсюда $C=-8$. Следовательно, $y=2\sqrt{x}-8$ — искомая первообразная.

Совокупность первообразных $y=F(x)+C$ для функции $y=f(x)$ на некотором промежутке называется *неопределенным интегралом функции на этом промежутке* и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, т. е. $\int f(x)\,dx=F(x)+C$.

Нахождение неопределенного интеграла называют *интегрированием функции*.

Справедливы следующие формулы интегрирования (*табличные интегралы*):

1) $\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1;$ 2) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$

3) $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, в частности $\int e^x\,dx=e^x+C;$

4) $\int\cos x\,dx=\sin x+C;$ 5) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C;$

6) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C;$ 7) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C;$

8) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C;$ 9) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C.$

Чтобы найти неопределенный интеграл, достаточно свести его к табличным. Это часто удается сделать путем преобразования подынтегрального выражения и применения *основных правил интегрирования*:

1) $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$, где k — постоянная;

2) $\int(f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx;$

3) если $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то $\int f(kx+b)dx=$ $=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$, где k и b — постоянные.

Пример 2. Найти $\int\left(5\cos x-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx.$

Решение. Применяя последовательно второе и первое правила интегрирования, представим интеграл в виде суммы табличных интегралов:

$$\int\left(5\cos x-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx=5\int\cos x\,dx-3\int x^2\,dx+\int\frac{dx}{x}=$$
$$=5\sin x-x^3+\ln|x|+C.$$

Пример 3. Найти $\int\frac{2x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

Решение. Преобразовав подынтегральное выражение, а затем последовательно применив второе и первое правила интегрирования, получим

$$\int\frac{2x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int(2x^{1/2}+1+x^{-1/2})\,dx=2\int x^{1/2}\,dx+\int dx+$$
$$+\int x^{-1/2}\,dx=\frac{4}{3}x^{3/2}+x+2x^{1/2}+C=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}+C.$$

Пример 4. Найти $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

Решение. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx =$
$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$

Пример 5. Найти $\int e^{3x+2}\,dx$.

Решение. Так как $\int e^x\,dx = e^x + C$, то, согласно правилу 3, $\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3} e^{3x+2} + C$.

Пример 6. Найти $\int \frac{dx}{x^2-4x+6}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{x^2-4x+6} = \frac{1}{(x-2)^2+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}\right)^2}.$$

Так как $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, то, применив последовательно первое и третье правила интегрирования, получим

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+6} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{2}} + C.$$

448. Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$ на $]0; +\infty[$, если:

1) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + x$, $\quad f(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1$;

2) $F(x) = \ln(x^2+x)$, $\quad f(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$;

3) $F(x) = \frac{1}{x^2} - e^{1/x}$, $\quad f(x) = (xe^{1/x} - 2)/x^3$.

449. Является ли первая из указанных функций первообразной для второй на интервале $]1/2; 2[$:

1) $F(x) = \frac{x^4}{2} + 3x + 1$, $\quad f(x) = 2x^3 + 3$;

2) $F(\varphi) = \cos 5\varphi + \varphi$, $\quad f(\varphi) = -5\sin 5\varphi + 1$;

3) $F(x) = 1/(x-1)$, $\quad f(x) = -1/(x-1)^2$;

4) $F(u) = \frac{1}{2}\ln(1+u^2)$, $\quad f(u) = \frac{u}{u^2+1}$;

5) $F(x)=\ln(2x-1)$, $\quad f(x)=\dfrac{2}{2x-1}$;

6) $F(t)=e^{1/t}$, $\quad f(t)=\dfrac{-1}{t^2}e^{1/t}$?

450. Найдите:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}$; 2) $\displaystyle\int(1/2)^x\,dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x}$ при $x<0$; 4) $\displaystyle\int 3\,dx$.

Найдите интеграл (**451—452**).

451. 1) $\displaystyle\int 7\sqrt[4]{x^3}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\left(\frac{x^2}{3}+x+4\right)dx$;

3) $\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{5t}+\frac{3}{2t^2}\right)dt$; 4) $\displaystyle\int x\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx$;

5) $\displaystyle\int(\sin\varphi+3\cos\varphi)\,d\varphi$; 6) $\displaystyle\int\left(\frac{\sin x}{2}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$;

7) $\displaystyle\int\left(\frac{5^t+t}{\sqrt{5}}\right)dt$; 8) $\displaystyle\int\frac{y^6+8y^4+1}{y}\,dy$;

9) $\displaystyle\int\frac{x^3+2x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$; 10) $\displaystyle\int 2^x\cdot 3^x\,dx$;

11) $\displaystyle\int\frac{24^x-2^x}{4^x}\,dx$; 12) $\displaystyle\int\frac{3e^{2x}+e^x\cos x}{e^x}\,dx$;

13) $\displaystyle\int(x+1)^2(3x-4)\,dx$; 14) $\displaystyle\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)dx$;

15) $\displaystyle\int\left(\frac{2u-1}{3u}\right)^2du$; 16) $\displaystyle\int\frac{x^3-8}{2-x}\,dx$;

17) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}-4}{6e^x-12}\,dx$; 18) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{4\sqrt{x}}\,dx$;

19) $\displaystyle\int\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\,d\theta$; 20) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$;

21) $\displaystyle\int\frac{1}{2}\sin^2(\varphi/2)\,d\varphi$; 22) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$;

23) $\displaystyle\int\sin(t/2)\cos(t/2)\,dt$; 24) $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{tg}(x/2)+\operatorname{ctg}(x/2)}$;

25) $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx$; 26) $\displaystyle\int\frac{d\psi}{1+\cos 2\psi}$;

27) $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x+2\cos x-3}{3+\cos x}\,dx$.

452. 1) $\displaystyle\int(x+4)^8\,dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{2\,dx}{x+1}$; 3) $\displaystyle\int\sqrt{t-1}\,dt$;

4) $\displaystyle\int\frac{dx}{4x+1}$; 5) $\displaystyle\int\frac{dy}{(2-5y)^{100}}$; 6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x/2}}$;

7) $\displaystyle\int\frac{\sin(\theta/2)\,d\theta}{3}$; 8) $\displaystyle\int\sin\frac{2x-1}{4}\,dx$; 9) $\displaystyle\int 2e^{(x-1)/2}\,dx$;

10) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$; 11) $\int \frac{du}{4+u^2}$; 12) $\int \frac{dx}{7\cos^2(3-x)}$;

13) $\int \frac{dy}{\sqrt{4-9y^2}}$; 14) $\int (1+e^{\sqrt{2}x+1})\,dx$;

15) $\int \sin 3\varphi \cos 3\varphi \, d\varphi$; 16) $\int (\cos 2x+\sin 2x)^2\,dx$;

17) $\int \sin x \cos 7x \, dx$; 18) $\int \cos(x/2)\sin(x/3)\,dx$;

19)* $\int \cos^4 x\,dx$.

453. Для функции $y=f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M_0, если:

1) $f(x)=0$, $M_0(1/2;\ 2)$; 2) $f(x)=2$, $M_0(0{,}1;\ 10)$;
3) $f(x)=1/x$, $M_0(e^3;\ 3)$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $M_0(1;\ 1)$;
5) $f(x)=((x+1)/4)^3$, $M_0(0;\ 0)$;
6) $f(x)=\sin((x+\pi)/4)$, $M_0(-\pi;\ 5)$;
7) $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$, $M_0(1;\ 3/2)$;
8) $f(x)=e^x+\sin x$, $M_0(0;\ \sqrt{2})$.

454. Найдите уравнение линии, проходящей через точку $A(2;\ 1)$, если угловой коэффициент касательной к ней в каждой точке равен: 1) нулю; 2) единице; 3) абсциссе этой точки; 4) квадрату абсциссы этой точки.

455. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(0;\ 7)$, если угловой коэффициент касательной к ней в точке с абсциссой x равен: 1) $3-\frac{x}{5}$; 2) e^x; 3) $\frac{1}{2x+1}$.

2. Приложение неопределенного интеграла к решению физических задач. Пусть материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v=v(t)$, где t — время. Если $x(t)$ — ее координата в момент t, то $x'(t)=v(t)$, т. е. функция $x=x(t)$ является одной из первообразных для $v=v(t)$. Положение точки на оси будет определено, если задано начальное условие, т. е. указана координата точки в какой-либо момент t_0.

456. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v=3t^2+1$, где v — скорость, м/с; t — время, с. Найдите зависимость координаты точки от времени, если в момент $t=0$: 1) точка находилась в начале координат; 2) координата точки равнялась 0,5 м.

457. На рис. 51 изображены графики скоростей некоторых прямолинейных движений. Найдите для каждого случая закон движения тела, если в момент времени $t=1$ с оно находилось в начале координат.

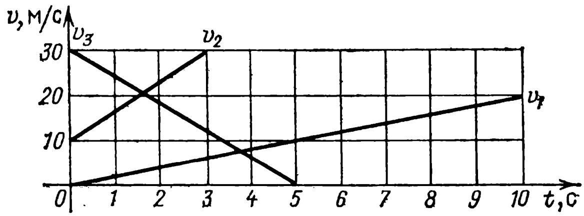


Рис. 51

458. Зависимость скорости прямолинейно движущейся точки от времени выражается формулой $v=\sin(\pi t/2)$, где v — скорость, м/с; t — время, с. Найдите координату точки в начальный момент времени ($t=0$), если в момент времени $t=1$ с она равнялась 1 м.

459. Найдите закон движения тела массой 10 кг под действием постоянной силы $F=6$ Н, если в момент времени $t=0$ тело покоилось в начале координат.

460. Ускорение прямолинейно движущейся точки меняется по закону $a=1{,}5t$, где a — ускорение, м/с²; t — время, с. Найдите: 1) зависимость скорости движения от времени; 2) закон движения тела. Известно, что к концу первой секунды тело прошло 6 м и скорость его была равна 3,75 м/с.

461. Тело массой 4 кг совершает прямолинейное движение из состояния покоя под действием переменной силы, которая изменяется по закону $F=\frac{2}{\sqrt{t+1}}$, где F — сила, Н; t — время, с. Через 3 с после начала движения сила прекращает действовать, и тело движется равномерно с набранной к этому моменту скоростью. Найдите зависимость скорости движения от времени. Постройте график этой зависимости.

3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки). В основе метода подстановки лежит следующая формула:

$$\int f(x)\,dx=\int f(u(t))\,u'(t)\,dt, \qquad (1)$$

где переменные x и t связаны соотношением

$$x=u(t). \qquad (2)$$

Формулой (1) можно пользоваться следующим образом: подобрать функцию $x=u(t)$ так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл $\int f(u(t))\,u'(t)\,dt$.

Найти его, а затем вернуться к переменной x с помощью соотношения (2).

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Решение. С целью упрощения подынтегрального выражения полагаем $x-3=t$. Отсюда $x=t+3$, $dx=dt$. Заменив всюду под интегралом x на $u(t)=t+3$, получим

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int (t+3)\sqrt{t}\,dt=\int (t^{3/2}+3t^{1/2})\,dt=$$
$$=\frac{2}{5}t^{5/2}+3\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}+C=\frac{2}{5}(x-3)^{5/2}+2(x-3)^{3/2}+C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{x\,dx}{(2x+5)^3}$.

Решение. Положим $2x+5=t$. Отсюда

$$x=(t-5)/2,\qquad dx=\frac{dt}{2}.$$

Подставив полученные выражения для x и dx в подынтегральное выражение, получим

$$\int\frac{x\,dx}{(2x+5)^3}=\frac{1}{4}\int\frac{(t-5)\,dt}{t^3}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{5}{t^3}\right)dt=$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2}-\frac{5}{4}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{4t}+\frac{5}{8t^2}+C=-\frac{4x+5}{8(2x+5)^2}+C.$$

В тех случаях, когда подынтегральное выражение имеет вид $f(u(x))\,u'(x)\,dx=f(u(x))\,du(x)$ или приводится к этому виду, формулой (1) удобнее пользоваться справа налево, а именно: заменить $u(x)$ на t, найти полученный интеграл $\int f(t)\,dt$, а затем вернуться к переменной x с помощью соотношения $t=u(x)$.

Пример 3. Найти $\int \cos^5 x\sin x\,dx$.

Решение. Представив подынтегральное выражение в виде $\cos^5 x\sin x\,dx=\cos^5 x(-\cos x)'\,dx=-\cos^5 x\,d(\cos x)$ и выполнив замену $\cos x=t$, получаем

$$\int\cos^5 x\sin x\,dx=-\int\cos^5 x\,d(\cos x)=-\int t^5\,dt=$$
$$=-\frac{t^6}{6}+C=-\frac{\cos^6 x}{6}+C.$$

Пример 4. Найти $\int\frac{\ln x}{x}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \, d(\ln x) = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{(x+0,5)\, dx}{x^2+x+3}$.

Решение.

$$\int \frac{(x+0,5)\, dx}{x^2+x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\, dx}{x^2+x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2+x+3)}{x^2+x+3} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+3| + C.$$

Найдите следующие интегралы методом замены переменной (**462 — 463**).

462. 1) $\int \frac{x\, dx}{x^2+9}$; 2) $\int y\sqrt{3y^2+1}\, dy$; 3) $\int xe^{-x^2} dx$;

4) $\int \frac{3x^2\, dx}{(1-5x^3)^3}$; 5) $\int \cos\varphi \sqrt{\sin\varphi}\, d\varphi$; 6) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$;

7) $\int \operatorname{tg}\theta\, d\theta$; 8) $\int \frac{\operatorname{tg} x+1}{\cos^2 x} dx$; 9) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$;

10) $\int 4\sin^3 x\, dx$; 11) $\int (1+e^t)^{20} e^t\, dt$; 12) $\int \frac{e^x\, dx}{2-3e^x}$;

13) $\int \frac{\sqrt{\ln y}}{y} dy$; 14) $\int \frac{2\ln^2 x+3}{x} dx$; 15) $\int \frac{\operatorname{arctg} u}{1+u^2} du$.

463. 1) $\int x\sqrt{2x+1}\, dx$; 2) $\int \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \sqrt{1-x}\, dx$;

3) $\int \frac{4x+3}{\sqrt[3]{3x+2}} dx$; 4) $\int \frac{2x\, dx}{(5-2x)^3}$; 5) $\int \frac{x^2\, dx}{x+1}$;

6)* $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+\sqrt{x}}$.

Найдите интеграл (**464 — 465**).

464. 1) $\int \frac{dx}{\left(1-\frac{2}{3}x\right)^2}$; 2) $\int \frac{dt}{6+3t^2}$; 3) $\int \frac{ax}{x^2+10x+30}$;

4) $\int \frac{(x+5)\, dx}{x^2+10x+30}$; 5) $\int (x+2)\sqrt{5-4x-x^2}\, dx$;

6) $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin x} dx$; 7) $\int \left(5^{x+1} + \frac{1}{3^x}\right) dx$;

8) $\int x\cos(x^2+1)\, dx$; 9) $\int \cos(x/3)\cos(x/2)\, dx$;

10)* $\int (\cos 2\psi - \sin^2\psi)^2\, d\psi$; 11)* $\int (\cos x - \sin x)^3\, dx$;

12)* $\int \sin^4\theta\, d\theta$; 13) $\int \cos^2(2x+1)\, dx$;

14) $\int \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}}dx$; 15) $\int \frac{\sin y\,dy}{\sin^2 y+2\cos^2 y}$;

16) $\int (5\sin^3 x+x)\,dx$; 17) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

18) $\int e^x \sqrt{\frac{e^x+1}{2}}\,dx$; 19) $\int \frac{dt}{t\ln t}$; 20) $\int x\sqrt[3]{1-\frac{x}{2}}\,dx$;

21) $\int \frac{4x\,dx}{(2+7x)^{3/2}}$; 22) $\int \frac{z+2}{z+1}dz$; 23) $\int \frac{x\,dx}{3x+2}$;

24) $\int (5+3x)^{12}\,dx$.

465. 1) $\int \frac{2t}{t+2}dt$; 2) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-3)}$; 3) $\int \frac{du}{u(u+7)}$;

4) $\int \frac{dx}{x^2+x}$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$; 6) $\int \frac{dx}{4+x+x^2}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Является ли функция $y=-1/x$ первообразной для $y=1/x^2$ на промежутке: 1) $[0;\ 1]$; 2) $]0;\ 1[$?

2. При каких значениях x справедливы формулы: 1) $\int \frac{dx}{x}=\ln x+C$; 2) $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$; 3) $\int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$; 4) $\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$; 5) $\int \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$; 6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x$?

3. Известно, что: 1) $f'(x)=g'(x)$ на $[a;\ b]$; 2) $\int f(x)\,dx=\int g(x)\,dx$ на $[a;\ b]$. Следует ли отсюда, что $f(x)=g(x)$ на этом промежутке?

4. Однозначно ли определяется по заданной скорости координата точки, движущейся по прямой? Что необходимо знать дополнительно, чтобы решение было однозначным?

5. Найдите: 1) $\int 0\cdot dx$; 2) $\int dx$; 3) $\left(\int dx\right)'$; 4) $\int (u'(x)+v'(x))\,dx$; 5) $\int (u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x))\,dx$; 6) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$; 7 $\int f(x)\,f'(x)\,dx$.

§ 2. Определенный интеграл

1. Формула Ньютона — Лейбница. Основные свойства определенного интеграла. Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции $y=f(x)$ равен приращению первообразной $y=F(x)$ для этой функции на указанном промежутке, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \quad (\textit{формула Ньютона—Лейбница}).$$

При вычислениях обычно пользуются сокращенной записью

$$F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b.$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Первообразной для функции $y=1/\cos^2 x$ на отрезке $[0;\ \pi/4]$ является функция $y=\operatorname{tg} x$. Поэтому, применив формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi/4}=\operatorname{tg}(\pi/4)-\operatorname{tg} 0=1.$$

Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

1) $\int\limits_a^b kf(x)\,dx=k\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где k — постоянная;

2) $\int\limits_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx\pm\int\limits_a^b g(x)\,dx$;

3) $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$, где $c\in\,]a;\ b[$;

4) $\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx$;

5) $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$;

6) если $f(x)\geqslant g(x)$ при всех $x\in[a;\ b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\geqslant\int\limits_a^b g(x)\,dx;$$

7) если $m\leqslant f(x)\leqslant M$ при всех x из промежутка $[a;\ b]$, то

$$m(b-a)\leqslant\int\limits_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a).$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_1^4\left(1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$.

Решение. Используя свойства 1, 2, представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона—Лейбница:

$$\int_1^4\left(1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx=\int_1^4 dx+5\int_1^4 x\,dx+\frac{3}{2}\int_1^4\sqrt{x}\,dx=$$

$$=x\Big|_1^4+\frac{5}{2}x^2\Big|_1^4+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4=$$

$$=(4-1)+\frac{5}{2}(4^2-1)+(4^{3/2}-1)=47{,}5.$$

Пример 3. Не вычисляя, определить, какой из интегралов больше: $\int_1^2 \ln x\,dx$ или $\int_1^2 \ln^2 x\,dx$.

Решение. Сравним подынтегральные функции. Так как $0\leqslant \ln x<1$ на отрезке $[1;\ 2]$, то $\ln^2 x\leqslant \ln x$ на этом отрезке. Из свойства 6 следует, что $\int_1^2 \ln x\,dx\geqslant\int_1^2 \ln^2 x\,dx$.

Пример 4. Доказать, что $0{,}15<\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{4+x^2}dx<1{,}2$.

Решение. Оценим сверху и снизу подынтегральную функцию на отрезке $[1;\ 4]$. Так как числитель $\sqrt{x}\leqslant\sqrt{4}=2$, а знаменатель $4+x^2\geqslant 5$ на рассматриваемом отрезке, то $\sqrt{x}/(4+x^2)<0{,}4$ на $[1;\ 4]$. Учитывая, что $\sqrt{x}\geqslant 1$ и $4+x^2\leqslant 4+4^2=20$ на $[1;\ 4]$, получаем $\sqrt{x}/(4+x^2)>0{,}05$. Тогда на основании свойства 7) имеем

$$0{,}15<\int_1^4\frac{\sqrt{x}}{4+x^2}dx<1{,}2.$$

Вычислите определенный интеграл (**466 — 468**).

466. 1) $\int_{1/e}^{e}\frac{dx}{x}$; 2) $\int_0^1 t\sqrt{t}\,dt$; 3) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$;

4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x/2)\,dx$; 5) $\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)^3dx$; 6) $\int_4^5\frac{dx}{(x-3)^2}$;

7) $\int\limits_{-\pi}^{3\pi} \sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right) dx$; 8) $\int\limits_{100}^{101} \left(\frac{u-1}{\sqrt{u}+1} - \sqrt{u} + 2\right) du$.

467. 1) $\int\limits_{-2}^{-1} \left(x + \frac{1}{3x^5} + \frac{1}{2}\right) dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1,5} \frac{x^2+2x+1}{x+1} dx$;

3) $\int\limits_{1}^{4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x}}{x} dx$; 4) $\int\limits_{0}^{-1} \frac{t^4-1}{1+t^2} dt$; 5) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2+x-2}{x-1} dx$;

6) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\sqrt{4+4x+x^2}}{x+2} dx$; 7) $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{\sqrt{4+4x+x^2}}{x+2} dx$;

8) $\int\limits_{0}^{2\pi} (\sin 3\varphi + 5\cos(\varphi/2))\, d\varphi$; 9) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin(\psi/3)\cos(\psi/3)\, d\psi$;

10) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos 2x}$; 11) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt$;

12) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \sin 3x \cos x\, dx$; 13) $\int\limits_{0}^{\ln 3} (e^{2t} - e^{-t/2})\, dt$;

14) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2^x - 3^x}{6^x} dx$; 15) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x + e^{-1}}{e^{x-1}} dx$.

468. 1) $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\, dx$, если $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{при } x > 0; \end{cases}$

2) $\int\limits_{-1}^{1} |u|\, du$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}\, d\varphi$;

4) $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}\, d\varphi$; 5) $\int\limits_{0}^{2\pi} |\sin 2x|\, dx$.

469. Не вычисляя интеграла, определите его знак:

1) $\int\limits_{0}^{\pi} x \sin x\, dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \lg x\, dx$; 3) $\int\limits_{1}^{2} \log_{0,1} x\, dx$;

4) $\int\limits_{1}^{1,1} (x^2-3x+2)\,dx$; 5) $\int\limits_{10}^{11} (x^2-3x+2)\,dx$;

6) $\int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,dx$.

470. Не вычисляя, определите, какой из интегралов больше:

1) $\int\limits_{0}^{0,9} x^{10}\,dx$ или $\int\limits_{0}^{0,9} x^{11}\,dx$;

2) $\int\limits_{1}^{90} x^{10}\,dx$ или $\int\limits_{1}^{90} x^{11}\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx$ или $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$;

4) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$ или $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x\,dx$;

5) $\int\limits_{0}^{1} 2^{-x}\,dx$ или $\int\limits_{0}^{1} 3^{-x}\,dx$; 6) $\int\limits_{-1}^{0} 2^{-x}\,dx$ или $\int\limits_{-1}^{0} 3^{-x}\,dx$.

471. Докажите, что:

1) $\pi/128 < \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx < \pi/4$; 2) $2 < \int\limits_{1}^{2} 2^{x^2}\,dx < 16$;

3) $\frac{e}{3} < \int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{\ln x+2} < \frac{e}{2}$;

4) $-\frac{1}{5} < \int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{1+x-2x^2} < -\frac{1}{14}$;

5) $-\frac{2}{11} < \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin x}{10+x}\,dx < \frac{2}{9}$; 6) $\frac{3}{2} < \int\limits_{1/2}^{2} \frac{4^x}{x}\,dx < 48$.

2. Замена переменной в определенном интеграле. Замену переменной в определенном интеграле выполняют по формуле

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u(t))\,u'(t)\,dt, \qquad (1)$$

где пределы интегрирования a, b и α, β связаны соотношениями

$$a = u(\alpha), \qquad b = u(\beta). \tag{2}$$

Формулой (1) можно пользоваться следующим образом:

1) подобрать функцию $x = u(t)$ так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл;

2) ввести новые пределы интегрирования α, β, найденные из соотношений (2).

В отличие от неопределенного интеграла возвращаться к первоначальной переменной при вычислении определенного интеграла не требуется.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+2\sqrt{x}}$.

Решение. Чтобы освободиться от иррациональности в подынтегральном выражении, выполним замену $\sqrt{x} = t$. Отсюда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $\sqrt{x} = t$: если $x = 1$, то $t = 1$, если $x = 4$, то $t = 2$. Применив формулу (1), получим

$$\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+2\sqrt{x}} = \int\limits_1^2 \frac{2t\,dt}{1+2t} = \int\limits_1^2 \frac{(1+2t)-1}{1+2t}\,dt = \int\limits_1^2 dt - \int\limits_1^2 \frac{dt}{1+2t} =$$

$$= t\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{dt}{1+2t} = t\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln|1+2t|\Big|_1^2 = 1 + \frac{1}{2}\ln(3/5).$$

Если подынтегральное выражение имеет вид

$$f(u(x))\,u'(x)\,dx = f(u(x))\,du(x)$$

или приводится к этому виду, то формулой (1) удобнее пользоваться справа налево.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Решение. Подынтегральное выражение представимо в виде

$$x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+9}\,d(x^2+9).$$

Поэтому целесообразно сделать замену $t = x^2 + 9$. Отсюда, полагая $x = 0$ и $x = 4$, получим новые пределы интегрирования, соответственно $t=9$, $t=25$. Следовательно,

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,d(x^2+9)=\frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_9^{25}=98/3.$$

Вычислите следующие интегралы методом замены переменной (472—475).

472. 1) $\int\limits_{-1}^{0} 2x(x^2-1)^9\,dx$; 2) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

3) $\int\limits_0^{1/2} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$; 4) $\int\limits_{-\sqrt[3]{3}}^{0} x^2e^{x^3/3+1}\,dx$;

5) $\int\limits_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{x\sin x^2}{2}\,dx$; 6) $\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{0} \frac{x\,dx}{5\sqrt{1-x^4}}$.

473. 1) $\int\limits_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$; 2) $\int\limits_1^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$;

3) $\int\limits_0^1 (e^x-1)^{10}e^x\,dx$.

474. 1) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x}\sin x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x+3\sin x+1)\cos x\,dx$;

3) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \sin^3 x\,dx$; 4) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} u\,du$; 5) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+5\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$.

475. 1) $\int\limits_0^1 \frac{9x^2\,dx}{1+3x}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dy}{2+\sqrt{y}}$; 3) $\int\limits_{1/2}^{1} x\sqrt[4]{2x-1}\,dx$.

476. Вычислите:

1) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(7-3x)^3}$; 2) $\int\limits_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} xe^{x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x\,dx}{3(1-2e^x)}$;

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$; 5) $\int\limits_{-\pi/12}^{\pi/4} \cos\left(4\varphi+\frac{\pi}{3}\right)d\varphi$;

6) $\int\limits_1^2 \frac{6x+5}{(3x^2+5x+1)^2}\,dx$;

7) $\int\limits_0^1 (t^2+3)^2\,dt$; 8) $\int\limits_0^1 x(x^2+3)^4\,dx$;

9) $\int\limits_{-\sqrt[6]{3}}^{\sqrt[6]{3}} \frac{z^2}{z^6+1}\,dz$; 10) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

11) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} (\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)^2\,d\theta$;

12) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\sin 4x\,dx$; 13) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$;

14) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$; 15) $\int\limits_1^4 \frac{9x-1}{3\sqrt{x}+1}\,dx$;

16) $\int\limits_0^{1/9} \frac{9dx}{3\sqrt{x}+1}$; 17) $\int\limits_0^1 \frac{9x-1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$;

18) $\int\limits_0^{\pi} (\cos^4 x-\sin^4 x)\,dx$.

§ 3. Приложения определенного интеграла

1. Вычисление площадей. Фигура $aABb$, ограниченная графиком непрерывной, неотрицательной функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью x (рис. 52), называется *криволинейной трапецией*. Ее площадь S равна

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y=-1/x$ и прямыми $y=0$, $x=-1$, $x=-2$.

Решение. Фигура представляет собой криволинейную трапецию (рис. 53). Поэтому, применяя формулу (1), получаем

$$S = -\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = -\ln|x|\Big|_{-2}^{-1} = -(\ln 1 - \ln 2) = \ln 2.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 1/x^2$, $y = 0$, $x = 2$ $(x \geqslant 0)$.

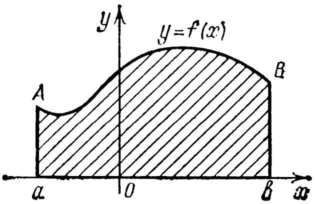


Рис. 52

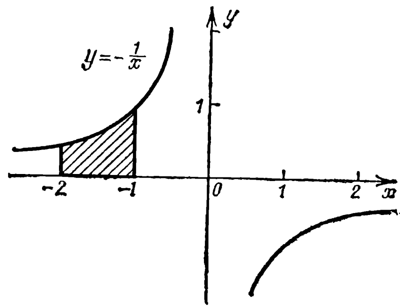


Рис. 53

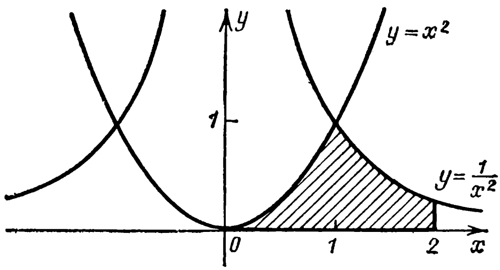


Рис. 54

Решение. Кривые $y = x^2$ и $y = 1/x^2$ пересекаются в точке с абсциссой $x = 1$. Заданная фигура (рис. 54) является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1/x^2, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

По формуле (1)

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{5}{6}.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-e^x$, $x=0$, $x=\ln(1/2)$, $y=0$.

Решение. Данная фигура симметрична относительно оси x криволинейной трапеции, ограниченной линиями

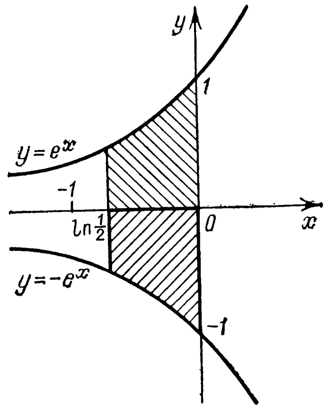


Рис. 55

$y=e^x$, $x=0$, $x=\ln(1/2)$, $y=0$ (рис. 55). Симметричные фигуры имеют равные площади. Следовательно,

$$S=\int\limits_{\ln(1/2)}^{0} e^x\,dx=e^x\Big|_{\ln(1/2)}^{0}=\frac{1}{2}.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$, $y=1$, $y=4$, $x=0$.

Рис. 56

Решение. Заданная фигура симметрична относительно прямой $y=x$ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=1$, $x=4$, $y=0$ и графиком функции $y=\sqrt{x}$, обратной к $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$ (рис. 56). Поэтому эти фигуры имеют равные площади:

$$S=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4=14/3.$$

Площадь фигуры $ACDB$ (рис. 57), ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ и графиками непрерывных функций

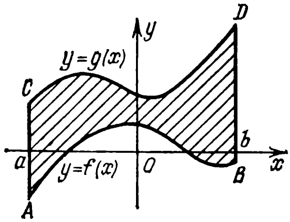


Рис. 57

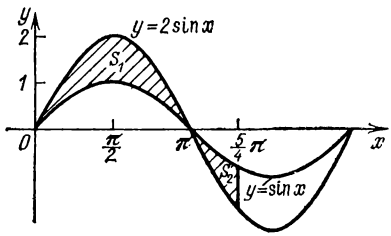


Рис. 58

$y=f(x)$, $y=g(x)$ таких, что $g(x)\geqslant f(x)$ на $[a;\ b]$, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx. \tag{2}$$

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=5\pi/4$, $x=0$.

Решение. Искомая площадь S равна сумме площадей S_1 и S_2 двух фигур, первая из которых ограничена линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, вторая — линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$ (рис. 58). Для вычисления площадей S_1 и S_2 применим формулу (2):

$$S_1=\int_0^\pi (2\sin x-\sin x)\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=2,$$

$$S_2=\int_\pi^{5\pi/4} (\sin x-2\sin x)\,dx=-\int_\pi^{5\pi/4} \sin x\,dx=$$

$$=\cos x\Big|_\pi^{5\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1.$$

Тогда

$$S=S_1+S_2=3-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}293.$$

Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями (477—478).

477. 1) $y=4-x^2$, $y=0$;
2) $y=x^2+2x+2$, $y=0$, $x=0$, $x=-3$;
3) $y=-x^2+7x-10$ $(2\leqslant x\leqslant 3)$, $y=0$, $x=3$;
4) $y=1/x$, $x=e$, $x=e^2$, $y=0$;
5) $y=1+e^x$, $x=0$, $x=-4$, $y=0$;
6) $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$;
7) $y=1/x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;
8) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi/4)$, $y=0$, $x=0$.

478. 1) $y=x$, $y=4-x$, $y=0$, $x=3$;
2) $y=1$, $y=1/x$, $x=0$, $x=e$, $y=0$;
3) $y=x$, $y=1/x^2$, $y=0$, $x=2$;
4) $y=x^2+1$, $y=2x+9$, $x=0$, $y=0$;
5) $y=x^2$, $y=0$, $x=5$, $y=1/x^2$ $(x\geqslant 0)$;
6)* $y=\sin x$, $y=3x/\pi$, $y=0$.

479. Докажите, что площадь S фигуры, ограниченной графиком непрерывной, неположительной функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью x, равна

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

480. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^2-7x+10$, $y=0$;
2) $y=x-2x^2-1$, $x=0$, $x=1/2$; $y=0$;
3) $y=x^2-3x-4$, $y=0$, $x=5$;
4) $y=e^x-1$, $x=\ln(1/2)$, $y=0$;
5) $y=2\sin(x/2)$, $y=0$, $x=\pi/2$, $x=3\pi$;
6) $y=x^3-4x$, $y=0$.

481*. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, $c<d$, осью y и графиком непрерывной, возрастающей (убывающей) функции $y=f(x)$ $(x\geqslant 0)$, равна

$$S=\int_c^d \varphi(x)\,dx,$$

где $y=\varphi(x)$—функция, обратная функции $y=f(x)$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями (482—484).

482. 1) $y=x^2-2$ $(x\geqslant 0)$, $y=-1$, $y=7$, $x=0$;

2) $y=\sqrt{x-1}$, $y=1$, $y=0$, $x=0$;
3) $y=1/x^2$, $y=1$, $y=4$, $x=0$;
4) $y=\ln x$, $x=0$, $y=1$, $y=-1$.

483. 1) $y=x$, $y=2x$, $x=4$;
2) $y=-x$, $y=2-x$, $x=-2$, $x=4$;
3) $y=(x+1)^2$, $y=4$; 4) $y=e^x$, $y=e$, $x=-1$;
5) $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$; 6) $y=4x^2$, $y=x^2+3$;
7) $y=x^2$, $y=8-x^2$;
8) $y=\sin x$, $y=1$, $x=0$, $x=\pi$;
9) $y=\sin x$, $y=x$, $x=\pi$; 10) $y=1/x^2$, $y=x$, $x=3$.

484. 1) $y=3^x$, $y=2^x$, $x=1$; 2) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{1-x}$, $y=0$;
3) $y=1/x^2$, $y=-1/x^2$, $x=-3$, $x=-1$;
4)* $y=x^3-3x$, $y=x$;
5) $y=-x$, $y=2-x$, $y=-4$, $y=3$;
6) $y=-x^2+4$, $y=x^2-2x$;
7) $y=x^2/2$, $y=x^2+1$, $x=-1$, $x=1$;
8) $y=\sin x$, $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$, $y=0$;
9) $y=\sin x$, $y=\cos x$ $(\pi/4\leqslant x\leqslant 5\pi/4)$;
10)* $y=x$, $y=2x$, $y=x^2$.

485. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2$, касательной к ней в точке $M(1;\ 3)$ и осью ординат.

486. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=e^x$, касательной к ней в точке $(0;\ 1)$ и прямой $x=1$.

487. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=1/x$, касательной к ней в точке $(1;\ 1)$ и прямой $x=3$.

488. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=1/x$, касательной к ней в точке $(1;\ 1)$, прямой $x=3$ и осью x.

489. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла вычислите:

$$1)\ \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx;\quad 2)\ \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx;\quad 3)\ \int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin x\,dx.$$

490. При каком значении a прямая $x=a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1/x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ пополам?

491. При каком значении a площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+a^2x+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$, будет наименьшей?

492. При каком положительном значении a площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=a$, $x=a+3$, принимает наименьшее значение?

493. Найдите площадь поперечного сечения канала для орошения, имеющего форму параболического сегмента (рис. 59).

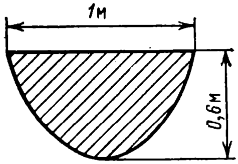


Рис. 59

494. Серповидная опора, у которой верхний и нижний контуры представляют собой параболы (рис. 60), изготовлена из 10-миллиметрового плоского стального листа.

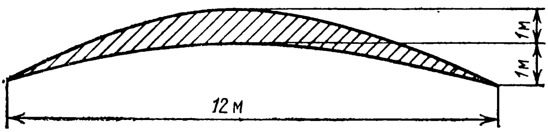


Рис. 60

Найдите массу этой опоры по формуле $m=\rho\cdot Sd$, где $\rho=7{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность стали, S — площадь сечения опоры, d — ее толщина.

2. Приближенные методы вычисления определенного интеграла. Для приближенного вычисления определенных интегралов используют

формулу прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right),$$

где $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$, $i=0, 1, \ldots, n$;

или *формулу трапеций*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2},$$

где $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$, $i=0, 1, \ldots, n$.

495. Криволинейная трапеция ограничена параболой $y=x^2+1$ и прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$. Найдите приближенное значение площади этой трапеции, заменив ее ступенчатой фигурой, состоящей из n прямоугольников с основаниями $[i/n;\ (i+1)/n]$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, и высотами, соответственно равными $f(i/n)$, если: 1) $n=2$; 2) $n=4$; 3) $n=8$.

Укажите (в %) точность этих приближений.

496. Вычислите площадь поперечного сечения судна по данным рис. 61. Измерения даны в метрах.

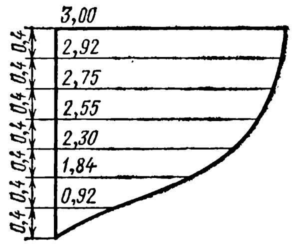


Рис. 61

497. Вычислите по формулам прямоугольников и трапеций, полагая $n=10$, приближенные значения интеграла:

$$1)\ \int_0^5 (3x^2+2x)\,dx;\quad 2)\ \int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx;\quad 3)\ \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Найдите относительные погрешности результатов.

498. Зная, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\pi/4,$$

вычислите приближенно число π, пользуясь: 1) формулой прямоугольников при $n=5$, $n=7$, $n=10$; 2) формулой трапеции при $n=5$, $n=7$, $n=10$. Полученные результаты сравните с табличным значением числа π.

499. Вычислите приближенно число

$$\ln 10=\int_1^{10} \frac{dx}{x}:$$

1) по формуле прямоугольников при $n=10$; 2) по формуле трапеций при $n=10$. Полученные результаты сравните с табличным значением $\ln 10$.

500. Вычислите приближенно по формуле трапеций интеграл:

$$1)\ \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}dx\ (n=3,\ 6,\ 9);\quad 2)\ \int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{\ln x}\ (n=3,\ 6,\ 9).$$

3. Механические и физические приложения определенного интеграла. Если $v(t)$ — скорость прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то перемещение точки, т. е. приращение ее координаты, за промежуток времени $[a;\ b]$ равно

$$x=\int\limits_{a}^{b} v(t)\,dt. \qquad (1)$$

Если $v(t)\geqslant 0$ на промежутке $[a;\ b]$, то интеграл $\int\limits_{a}^{b} v(t)\,dt$ равен пути, пройденному точкой.

Пример 1. Скорость движения тела в момент времени t задается формулой $v=15-3t$, где v — скорость, м/с; t — время, с. Какой путь пройдет тело от начала отсчета времени до остановки?

Решение. Так как в момент остановки тела скорость его равна 0, то нам нужно определить путь, пройденный телом от момента времени $t_1=0$ до $t_2=5$ с. Согласно формуле (1), получим

$$S=\int\limits_{0}^{5}(15-3t)\,dt=\left(15t-\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^5=37{,}5\text{ м}.$$

Если материальная точка движется вдоль оси x под действием переменной силы, проекция $F(x)$ которой на ось x есть функция от координаты x, то работа силы по перемещению точки из положения $x=a$ в положение $x=b$ равна

$$A=\int\limits_{a}^{b} F(x)\,dx. \qquad (2)$$

Пример 2. Материальная точка M движется по координатной прямой под действием силы, величина которой меняется прямо пропорционально расстоянию точки до начала координат O. Известно, что направление силы совпадает с направлением оси и что она равнялась 1 Н, когда расстояние MO было 3 м. Вычислить работу этой силы по переносу точки на расстояние 15 м от начала координат.

Решение. Из условия задачи следует, что сила $F(x)$, действующая на точку, меняется по закону $F(x)=kx$, где коэффициент пропорциональности k находится из уравнения $1=k\cdot 3$, $k=1/3$. Таким образом, $F(x)=x/3$ и работа силы на пройденном пути, согласно (2), равна

$$A=\int_0^{15}\frac{x}{3}\,dx=\left.\frac{x^2}{6}\right|_0^{15}=37{,}5\ \text{Дж}.$$

Если в жидкость с плотностью ρ вертикально погружена пластинка $ABCD$ (рис. 62), то сила давления жидкости P на нее равна

$$P=\rho g\int_a^b xf(x)\,dx, \qquad (3)$$

где $y=f(x)$ — функция, выражающая зависимость длины поперечного сечения пластины от уровня погружения x, g — ускорение свободного падения.

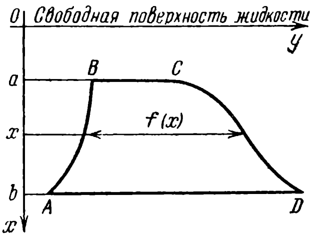


Рис. 62

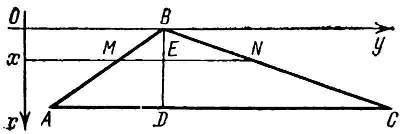


Рис. 63

Пример 3. Вычислить силу давления воды на треугольную пластину ABC с основанием $AC=9$ м и высотой $BD=2$ м, вертикально погруженную, если вершина B лежит на свободной поверхности жидкости, а AC — параллельно ей (рис. 63).

Решение. Пусть MN — поперечное сечение пластины на уровне $BE=x$. Найдем зависимость длины MN от x. Из подобия треугольников MBN и ABC имеем $MN/AC=$ $=BE/BD$ или $MN/9=x/2$. Отсюда $MN=f(x)=4{,}5x$. На основании формулы (3) получим

$$P=\rho g\int_0^2 4{,}5x^2\,dx=4{,}5\rho g\left.x^3/3\right|_0^2=12\rho g\approx 1{,}2\cdot 10^5\ \text{Н},$$

так как плотность воды 1000 кг/м³ и $g\approx 9{,}8$ м/с².

501. Скорость движения точки меняется по закону $v = 4t - t^2$, где v — время, м/с; t — время, с. Найдите: 1) путь, пройденный точкой за первые три секунды движения; 2) путь, пройденный точкой за третью секунду; 3) путь, пройденный точкой от начала движения $t = 0$ до ее остановки; 4) среднюю скорость движения за промежуток времени [0; 2]; 5) перемещение точки за первые 6 секунд движения; 6) путь, пройденный точкой за промежуток времени [0; 6].

502. Тело падает с высоты $h = 2000$ м без начальной скорости. На какой высоте оно будет через: 1) одну секунду после начала падения; 2) через две секунды после начала падения? 3) Через сколько секунд тело достигнет Земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

503. Мяч брошен с высоты 2 м вертикально вверх с начальной скоростью 15 м/с. На какую наибольшую высоту он поднимется?

504. Найдите путь, пройденный автобусом за время от начала торможения до полной остановки, если при торможении его скорость изменялась по закону $v = 20 - 4t$, где v — скорость, м/с; t — время, с.

505. Турбина компрессора раскручивается с угловым ускорением, изменяющимся по закону $\varepsilon = 24t$, где ε — угловое ускорение, рад/с^2; t — время, с. Определите угловую скорость и угол поворота лопастей турбины через 5 с после запуска.

506. Тело массой 4 кг начинает двигаться без начальной скорости вдоль координатной прямой под действием периодически меняющейся со временем силы. Зависимость силы от времени выражается формулой $F = \pi^2 \cos(\pi t/2)$, где F — сила, Н; t — время, с. Найдите: 1) перемещение тела за первые четыре секунды движения; 2) путь, пройденный телом за это время.

507. Груз массой в 3 кг растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу он при этом совершает?

508. Вычислите работу, совершаемую при сжатии пружины на 0,05 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила в 10 Н.

509. Для растяжения пружины на 0,03 м необходимо совершить работу 16 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 144 Дж?

510. Рессора прогибается под нагрузкой 1,5 т на 1 см. Какую работу нужно затратить для деформации рессоры на 3 см? (Сила деформации пропорциональна величине деформации.)

511*. Два электрических заряда e_1 и e_2 по 10 Кл каждый закреплены неподвижно на расстоянии 5 см друг от друга. Разделяющей их средой служит воздух. Затем заряд e_2 освобождается и удаляется от заряда e_1 под действием силы отталкивания, которая меняется по закону Кулона

$$F = k\frac{e_1e_2}{\varepsilon r^2},$$

где F — сила, Н; e_1, e_2 — взаимодействующие заряды, Кл; r — расстояние между ними, см; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды, $k = 9 \cdot 10^9$ Н$\cdot$м^2/Кл^2 — коэффициент пропорциональности. Какую работу совершит сила отталкивания, если заряд e_2 удалится от e_1 на расстояние: 1) 10 см; 2) 15 см?

512. Вычислите силу давления воды на прямоугольные ворота шлюза, ширина которых 24 м, а высота 6 м, если шлюз заполнен водой только на две трети.

513. Найдите силу давления воды на боковые стенки и дно резервуара, имеющего форму куба с ребром, равным 0,8 м, если он заполнен водой: 1) доверху; 2) наполовину.

514. Треугольная пластинка ABC с боковыми сторонами, равными 5 см, и основанием $AC = 8$ см погружена вертикально в воду. Найдите силу давления воды на эту пластинку, если: 1) вершина B лежит на поверхности воды, а основание AC параллельно поверхности; 2) вершина B лежит на 1 см ниже поверхности воды, а основание AC параллельно поверхности; 3) основание AC лежит на поверхности воды; 4) вершина B лежит на 1 см выше поверхности воды, а основание AC параллельно этой поверхности.

515. Круглый иллюминатор диаметром 30 см на вертикальном борту судна наполовину погружен в воду. Найдите силу давления воды на погруженную часть иллюминатора.

516. Определите массу стержня длиной 10 см, если линейная плотность стержня меняется по закону $\mu = 6 + 0{,}3x$, где μ — линейная плотность, кг/м; x — расстояние от точки стержня до одного из его концов, м.

517. Вычислите работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой $h = 6$ м и с радиусом основания $r = 3$ м.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Найдите: 1) $\int\limits_a^b dx$; 2) $\left(\int\limits_{-1}^{1} dx\right)'$; 3) $\left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right)'$; 4) $\int\limits_a^b f'(x)\,dx$,

если функция $y=f(x)$ имеет равные значения в точках $x=a$ и $x=b$ и непрерывную производную. Объясните геометрический смысл полученного результата.

2. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$. Следует ли отсюда, что $f(x)\equiv 0$ на $[a;\ b]$?

3. Известно, что $y=f(x)$ — непрерывная функция и $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx=0$. Следует ли отсюда, что $f(x)\equiv 0$ на $[a;\ b]$?

4. Известно, что $f(x)\equiv 0$ на $[a;\ b]$. Следует ли отсюда, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$?

5. Известно, что $y=f(x)$, $y=g(x)$ — дифференцируемые функции и $f(x)\geqslant g(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Следует ли отсюда, что: 1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$; 2) $f'(x)\geqslant g'(x)$ на отрезке $[a;\ b]$?

6. Определите знак интеграла: 1) $\int\limits_a^b f'(x)\,dx$, если $y=f(x)$ — возрастающая (убывающая) на $[a;\ b]$; 2) $\int\limits_a^b f''(x)\,dx$, если график функции $y=f(x)$ выпуклый вверх (вниз) на $[a;\ b]$.

7. Найдите ошибку в рассуждениях:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-1/x\Big|_{-1}^{1}=-(1+1)=-2,$$

но подынтегральная функция $y=1/x^2$ принимает только положительные значения.

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения, содержащие производные искомой функции, называют *дифференциальными*. Наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.

Решением дифференциального уравнения называется функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. Решить дифференциальное уравнение — значит найти все его решения. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Простейшим дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение

$$y' = f(x),$$

где $f(x)$ — заданная функция. Множество решений этого уравнения является неопределенным интегралом функции $f(x)$:

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Многие дифференциальные уравнения первого порядка можно записать в виде

$$y' = f(x, y) \quad \text{или} \quad dy = f(x, y)\,dx.$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить единственное решение уравнения, достаточно задать значение искомой функции при фиксированном значении аргумента.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0,$$

где x_0, y_0 — заданные числа, называется *задачей Коши*.

Условие $y(x_0)=y_0$ называется *начальным условием*, так как с физической точки зрения оно означает, что в фиксированный (начальный) момент времени задано положение материальной точки.

Геометрический смысл задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой уравнения, проходящей через заданную точку.

Пример 1. Найти решение задачи Коши

$$y'=2x+1, \qquad y(1)=3.$$

Решение. Решениями данного уравнения являются функции

$$y=\int(2x+1)\,dx=x^2+x+C,$$

где C — произвольная постоянная. Пользуясь начальным условием, имеем $y(1)=1+1+C=3$. Следовательно, $C=1$ и искомое решение $y=x^2+x+1$.

Пример 2. Составить дифференциальное уравнение процесса изменения скорости тела при замедленном прямолинейном движении под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости.

Решение. Пусть $v(t)$ — скорость тела в момент времени t. Тогда скорость изменения $v(t)$ (ускорение) равна $v'(t)$ и, согласно закону Ньютона, $mv'(t)=F(t)$, где m — масса тела, а $F(t)$ — сила, действующая на тело в момент времени t. По условию $F(t)=-kv^2(t)$, $k>0$ — коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $v=v(t)$ является решением дифференциального уравнения $v'=$ $=-\frac{k}{m}v^2$.

518. Проверьте, является ли заданная функция решением данного дифференциального уравнения:

1) $y=e^{2x}$, $y'=2y$; 2) $y=e^{-x}+1$, $\frac{dy}{dx}=-y+1$;

3) $v=\frac{1}{3(t+1)}$, $v'=3v^2$; 4) $y=e^{-2x}+e^x$, $y'+3y=3e^x$;

5) $y=\frac{1}{\sqrt{x+C}}$, $y'=-\frac{1}{2}y^3$; 6) $y=-\frac{2}{x^2+C}$, $dy=xy^2\,dx$.

519. Найдите значения k, при которых заданная функция является решением данного уравнения:

1) $y=kx+1$, $y'=2$; 2) $x=kt^2$, $x'=12t$;

3) $y=e^{kx}$, $y'=y$; 4) $x=e^{-t}$, $x'=kx$;

5) $v=t^3$, $v'=kt^2$; 6) $y=1/(x+1)$, $y'=ky^2$.

520. Составьте дифференциальное уравнение, решениями которого являются функции:

1) $y=\frac{1}{2}x^2+C$; 2) $y=x^3+C$; 3) $y=Ce^{2x}$;

4) $y=Ce^{-2x+1}$; 5) $y=Ce^{-x}+e^{3x}$; 6) $y=Cx^3$;

7) $y=-1/(x+C)$; 8) $y=(x-C)^3$.

521. Найдите угловой коэффициент касательной к интегральной кривой данного дифференциального уравнения в точке (1; 2):

1) $y'=2x$; 2) $y'=-y$; 3) $y'=y+x$; 4) $y'+xy=1$.

522*. Докажите, что касательные ко всем интегральным кривым дифференциального уравнения $y'+xy=1$ в точках пересечения кривых с осью y параллельны.

523. Решите дифференциальное уравнение:

1) $y'=3$; 2) $\frac{dy}{dx}=x$; 3) $y'+4x=0$; 4) $\frac{dy}{dx}=2-3x$;

5) $y'=\frac{2}{3}x^{-1/3}$; 6) $x'=2t^3+3t+5$; 7) $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}$;

8) $\frac{ds}{dt}=4\cos t$; 9) $y'=x+\sin x$; 10) $y'=e^{-3x}$;

11) $y'=\frac{1}{2}x+\operatorname{tg} x$; 12)* $e^{y'}=1$; 13)* $\cos y'=1$.

524. Изобразите семейство интегральных кривых дифференциального уравнения:

1) $y'=1/2$; 2) $y'=\cos x$; 3) $y'=e^{-x}$; 4) $\frac{dy}{dx}=1/x$.

525. Решите задачу Коши:

1) $y'=3x^2+2x+1$, $y(1)=4$; 2) $y'=4x^{-3}$, $y(1)=2$;

3) $y'=\frac{1}{3}\sin 3x$, $y(0)=5/6$; 4) $y'=e^{3x/2}+1$, $y(0)=-2$;

5) $\frac{ds}{dt}=3-\frac{1}{3}t^2+8t^3$, $s(0)=3$; 6) $\frac{dx}{dt}=-2$, $x(-1)=1$.

526. Через точку $A(1; 2)$ проведите интегральную кривую дифференциального уравнения:

1) $\frac{dy}{dx}=2x+1$; 2) $y'=-1/x^2$; 3) $y'=1/\sqrt{x}$; 4) $y'=e^{x-1}$.

527. Найдите кривую, проходящую через точку $A(1; 5)$, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен:

1) $4x^2+8x$; 2) $2/(x+1)^2$; 3) $3\sqrt{2x-1}$;

4) $\sin(x-1)$; 5) e^{-3x}.

528. Тело движется прямолинейно со скоростью $v=v(t)$, где v — скорость, м/с; t — время, с. Найдите закон движения тела, если: 1) $v=4t$, и при $t=1$ с тело находилось в начале координат; 2) $v=kt^2+1$, $k>0$, тело начало двигаться из начала координат и за три первых секунды прошло путь, равный 30 м; 3) $v=18-2t^2$, и в момент остановки тело находилось на расстоянии 12 м от начала координат.

529. Дано дифференциальное уравнение $y'=ky$. Являются ли функции $y=Ce^{kx}$ решениями уравнения? Найдите решение уравнения, удовлетворяющее условию $y(0)=1$. Найдите такие значения k, при которых полученное решение удовлетворяет условию $y(4)=6$.

530. Составьте дифференциальное уравнение процесса: 1) изменения скорости при замедленном прямолинейном движении тела под действием силы сопротивления среды, пропорциональной скорости v; 2) радиоактивного распада вещества, если скорость распада пропорциональна массе m нераспавшегося вещества; 3) потери сообщенного телу заряда в слабо проводящей среде, если скорость изменения количества заряда пропорциональна имеющемуся заряду Q; 4) увеличения числа микробов N в питательной среде, если число делящихся в единицу времени микробов пропорционально имеющемуся числу микробов; 5) изменения температуры тела T в среде с температурой T_1, если скорость изменения T пропорциональна разности температур тела и среды.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно привести к виду

$$y'=f(x)\,g(y).$$

Уравнение этого вида решается с помощью разделения переменных

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)\,dx$$

и интегрирования обеих частей полученного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$y'=2y/x.$$

Решение. Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}\,dx.$$

Интегрируя обе части полученного уравнения, имеем

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\,dx \quad \text{или} \quad \ln|y| = 2\ln|x| + C_1,$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Для удобства потенцирования запишем $C_1 = \ln C$ и, выразив y через независимую переменную x и произвольную постоянную C, получим решения дифференциального уравнения

$$y = Cx^2.$$

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными возможна потеря решений при разделении переменных. В решении примера 1 мы фактически предполагали, что $y \neq 0$, т. е. функцию $y = 0$ исключили из рассмотрения. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y = 0$ является решением данного уравнения. Это решение может быть получено из множества решений $y = Cx^2$ при $C = 0$. Поэтому в рассмотренном примере потери решений не произошло.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = 2x(y-1)^2.$$

Решение. Разделив переменные:

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = 2x\,dx,$$

и проинтегрировав, получим

$$-\frac{1}{y-1} = x^2 + C,$$

где C — произвольная постоянная. Отсюда следует, что решениями данного уравнения являются функции

$$y = -\frac{1}{x^2+C} + 1.$$

Функция $y = 1$ является решением уравнения. Однако она не входит в полученное множество решений, так как равенство $-\frac{1}{x^2+C} + 1 = 1$ не выполняется ни при каких значениях C. Поэтому решениями данного уравнения являются функции

$$y=-\frac{1}{x^2+C}+1, \quad y=1.$$

Пример 3. Материальная точка замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости $v(t)$. Найти зависимость скорости от времени, если $v(0)=0{,}5$ м/с, а $v(1)=0{,}25$ м/с. Какова будет скорость точки через 3 с после начала замедления движения? В какой момент времени скорость будет равна 0,1 м/с?

Решение. Замедленное движение материальной точки под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости v, описывается дифференциальным уравнением

$$v'=-\frac{k}{m}v^2,$$

где k — коэффициент пропорциональности, m — масса тела (см. решение примера 2 п. 1). Решив полученное уравнение с разделяющимися переменными, имеем

$$v=\frac{1}{\frac{k}{m}t+C}, \quad v=0.$$

Для определения параметров C и k/m воспользуемся условиями:

$$v(0)=1/C=0{,}5, \ \ v(1)=\frac{1}{k/m+C}=0{,}25.$$

Отсюда $C=2$, $k/m=2$. Следовательно, скорость материальной точки изменяется по закону

$$v=\frac{1}{2(t+1)}.$$

Вычислим скорость точки через 3 с после начала замедления движения:

$$v(3)=\frac{1}{2(3+1)}=0{,}125 \text{ м/с}.$$

Момент времени, для которого скорость будет равна 0,1 м/с, определяется из уравнения

$$\frac{1}{2(t+1)}=0{,}1.$$

Отсюда $t=4$ с.

531. Среди приведенных уравнений укажите дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

1) $y'=1/(x-1)$; 2) $y'=xy^2$; 3) $v'+t^2v=e^t$;

4) $\sqrt{y}\,dx+x^2\,dy=0$; 5) $x'=kx$; 6) $y'=y^2(x+1)$;

7) $\frac{1}{x}y'=3y\cos x+x$; 8) $y'+y=x^2$; 9) $y'=ay+b$.

532. Дано уравнение $y'=y^2$. 1) Докажите, что функции $y=-1/(x+C)$ являются его решениями. 2) Содержится ли решение $y=0$ среди этих функций? 3) Найдите решение уравнения, удовлетворяющее условию а) $y(1)=1$; б) $y(1)=0$.

533. Решите уравнение:

1) $y'=y$; 2) $3y'=(1+x^2)/y^2$; 3) $tx'=1+x$;

4) $(x^2+1)\,dy-xy\,dx=0$; 5) $\sqrt{y}\,dx+x^2\,dy=0$;

6) $v'-2tv=0$; 7) $y'=2y-1$; 8) $y'=-y+2$;

9) $y'=ay+b$, $a\neq 0$; 10) $v'=-kv^2$.

534. Решите задачу Коши:

1) $x\,dy=y\,dx$, $y(2)=6$; 2) $3y^2\,dy=x^2\,dx$, $y(3)=1$;

3) $y'=xe^{-y}$, $y(1)=0$; 4) $x'=2+x$, $x(0)=3$;

5) $y'-y/x=0$, $y(1)=5$; 6) $(x-1)\,dy=(y+1)\,dx$, $y(2)=3$;

7) $y\operatorname{tg}x\,dx+dy=0$, $y(\pi/3)=4$;

8) $y'=ky$, $y(0)=3$;

9) $y'=ay+b$, $y(0)=0$, $(a\neq 0)$;

10) $v'=kv$, $v(0)=v_0$.

535. Проведите через точку $M(1;\ 4)$ интегральную кривую уравнения:

1) $y'=y/x$; 2) $y'=2\sqrt{y}$; 3) $y'=-y$.

536. Найдите кривую, проходящую через точку $A(-2;\ 1)$, если: 1) угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен ординате этой точки; 2) угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен квадрату ординаты этой точки; 3) точка пересечения любой касательной к кривой с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания; 4) отрезок любой касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

537. Материальная точка замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной скорости. Найдите зависимость скорости точки от времени, если в момент $t=0$ скорость равнялась 5 м/с, а через 1 с — 2 м/с. Определите скорость движения точки через четыре секунды. В какой момент времени скорость будет равна 1 м/с?

538. Вращающийся в жидкости диск замедляет свое движение под действием силы трения, пропорциональной угловой скорости ω. Известно, что в начале замедления $\omega=12$ рад/с, а через 40 с $\omega=8$ рад/с. Найдите зависимость угловой скорости от времени. С какой угловой скоростью будет вращаться диск в момент $t=120$ с? В какой момент времени угловая скорость вращения диска равна 1 рад/с?

539. Автомобиль в момент выключения двигателя шел со скоростью 20 м/с. Через 25 с скорость автомобиля уменьшилась до 5 м/с. Определите, через сколько секунд после выключения двигателя скорость окажется равной 1,25 м/с, если движение автомобиля замедляется под действием силы трения пропорциональной скорости движения.

540. Изолированный проводник вследствие несовершенства изоляции теряет сообщенный ему заряд со скоростью, пропорциональной наличному заряду в данный момент времени. Найдите зависимость количества заряда проводника от времени, если в начальный момент времени ($t=0$) проводнику сообщен заряд 2000 Кл, а за первые 2 минуты потеряно 150 Кл. Через сколько минут заряд проводника уменьшится вдвое?

541. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна наличной его массе. Определите, какой процент массы m_0 радия распадается через 200 лет, если известно, что период полураспада радия (время, за которое масса вещества уменьшается вдвое) равен 1590 лет.

542. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его имеющейся массе. Через 2 часа после начала брожения масса фермента составила 2 г, а через 3 часа — 3 г. Какова была первоначальная масса фермента?

543. В комнате с температурой воздуха 20 °С некоторое тело охлаждается от 100 до 60 °С за 20 минут. Считая скорость остывания тела пропорциональной разности температур тела и окружающей среды, определите, за какое время тело остынет до 30 °С.

544. В 1970 г. население СССР составляло 241,7 млн. человек, а годовой прирост равнялся 2,2 млн. человек.

1) Найдите ожидаемую численность населения СССР в 1973, 1975, 1979 и 1983 гг. считая, что скорость при-

роста населения в данный момент времени пропорциональна числу жителей в тот же момент.

2) Определите, с какой точностью (в %) полученные результаты соответствуют статистическим данным:

Годы	1973	1975	1979	1983
Население (млн. чел.)	248,7	253,3	262,4	271,2

3) Что можно сказать о правомерности использования приведенного закона изменения скорости прироста населения: а) на небольших промежутках времени; б) на больших промежутках времени?

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = f(x),$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — заданные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Если $f(x) = 0$, то уравнение принимает вид

$$y' + p(x)\,y = 0$$

и называется *линейным однородным.* Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

Если $f(x) \neq 0$, то рассматриваемое уравнение называется *линейным неоднородным* и может быть решено с помощью подстановки $y = uv$, где u и v — функции от x. Тогда $y' = uv' + vu'$. Подставляя y и y' в уравнение, получим

$$uv' + vu' + p(x)\,uv = f(x)$$

или

$$uv' + v(u' + p(x)\,u) = f(x).$$

Выберем функцию u так, чтобы $u' + p(x)\,u = 0$, т. е. u — решение линейного однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному. Тогда v можно найти из уравнения

$$uv' = f(x).$$

Пример 1. Решить уравнение

$$y' - \frac{2}{x}\,y = x.$$

Решение. Положим $y=uv$. Тогда $y'=uv'+vu'$. Подставим эти значения y и y' в данное уравнение:

$$uv'+vu'-\frac{2}{x}uv=x.$$

Сгруппировав члены, содержащие v, получим

$$uv'+v\left(u'-\frac{2}{x}u\right)=x.$$

Выберем функцию u так, чтобы сомножитель при v обратился в нуль, т. е.

$$u'-\frac{2}{x}u=0.$$

Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получим $u=Cx^2$. Выберем одно из решений, например $u=x^2$. Тогда уравнение примет вид $x^2v'=x$.

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$v=\ln|x|+C.$$

Искомое решение

$$y=x^2(\ln|x|+C).$$

545. Среди приведенных уравнений в задаче 531 укажите линейные дифференциальные уравнения.

546. При каком значении коэффициента p функция $y=e^{3x}$ является решением уравнения:

1) $y'+py=0$; 2) $y'+py=e^{3x}$; 3) $y'+py=e^{4x}$?

547. Найдите такие функции $p(x)$ и $f(x)$, чтобы решениями уравнения $y'+p(x)y=f(x)$ являлись функции:

1) $y=2$ и $y=x^2+2$; 2) $y=\sin x-1$ и $y=-1$.

548. Решите уравнение:

1) $y'+y=2$; 2) $y'-\frac{2}{x}y=2x^4$; 3) $xy'-3y=x^4$;

4) $\frac{dy}{dx}+2y=e^x$; 5) $x'-3x=e^{-t}$;

6) $y'+2xy=2xe^{x^2}$; 7) $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-2y=(1-x^2)e^{x^2}$;

8) $y'\cos x+y\sin x=1$; 9) $(x+1)\frac{dy}{dx}-2y=(x+1)^4$;

10) $(x+1)y'+y=\cos x$.

549. Найдите решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

1) $y'-2y=1$, $y(0)=1/2$; 2) $y'-\frac{3}{x}y=x$, $y(1)=1$;

3) $2y'-y=e^x$, $y(0)=5$; 4) $\frac{dy}{dx}-2xy=e^{x^2}$, $y(2)=0$;

5) $x'-\frac{3}{t}x=t^3e^{t-1}$, $y(1)=-2$;

6) $x(y'-x\cos x)=y$, $y(\pi/2)=\pi/2$;

7) $xy'+y=\sin x$, $y(\pi/2)=1/\pi$;

8) $x^2y'+2xy=-4$, $y(-1)=0$.

550. Материальная точка массой $m=0{,}75$ кг погружается в жидкость без начальной скорости. На нее действуют сила тяжести и сила сопротивления жидкости, пропорциональная скорости погружения (коэффициент пропорциональности $k=3$). Найдите зависимость скорости движения точки от времени. Вычислите скорость точки через 2 с и 10 с после начала погружения.

551. Цепь с сопротивлением $R=15$ Ом и индуктивностью $L=3$ Гн включена на постоянное напряжение $U=300$ В. Найдите зависимость силы тока от времени, если в момент включения ($t=0$) сила тока равна нулю. К какому значению приближается сила тока с течением времени? За какое время с момента замыкания цепи сила тока достигнет 99 % своей предельной величины?

552. Участок цепи с индуктивностью L и сопротивлением R включается на внешнее напряжение $U=f(t)$. Найдите силу тока в цепи через 5 секунд, если в момент включения сила тока равна нулю и: 1) $L=2$ Гн, $R=4$ Ом, $f(t)=20e^{-3t}$; 2) $L=2$ Гн, $R=4$ Ом, $f(t)=U_0$.

553*. Докажите, что в цепи, содержащей индуктивность L, сопротивление R и источник тока, напряжение которого меняется по закону $U=U_0\sin t$, сила тока меняется периодически.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Может ли дифференциальное уравнение $y'=f(x)$ иметь конечное число решений?

2. Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y'=f(x)$ пересекаться?

3. Является ли дифференциальное уравнение $y'=ky$: 1) уравнением с разделяющимися переменными; 2) линейным уравнением?

4. Существует ли интегральная кривая уравнения $y'=ky$, проходящая через точки: 1) $M(1;\ 2)$; 2) $M(1;\ 2)$ и $N(2;\ 3)$; 3) $M(1;\ 2)$ и $P(1;\ 3)$?

5. Можно ли множество всех решений уравнения $y'=y$ представить в виде: 1) $y=Ce^x$; 2) $y=C^2e^x$; 3) $y=(\ln C)\,e^x$; 4) $y=(\cos C)\,e^x$?

6. Может ли множество всех решений дифференциального уравнения с разделяющимися переменными иметь вид $y=C_1x+C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные?

7. Могут ли решения уравнения $y'=x^2+y^2+1$ иметь точки экстремума?

8. Может ли решение уравнения $y'=y$, не обращающееся в нуль ни для каких значений аргумента, иметь точки экстремума?

9. Какой знак имеет коэффициент k, если решение уравнения $y'=ky$, удовлетворяющее условию $y(0)=1$: а) возрастает; б) убывает?

§ 2. Дифференциальные уравнения второго порядка

1. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка. Многие дифференциальные уравнения второго порядка можно записать в виде

$$y''=f(x,\ y,\ y') \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right).$$

Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение

$$y''=f(x).$$

Его решения можно получить путем двукратного интегрирования.

Пример 1. Решить уравнение

$$y''=e^{2x}+\sin x.$$

Решение. Так как $y''=(y')'$, то, интегрируя правую часть уравнения, имеем

$$y'=\int(e^{2x}+\sin x)\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}-\cos x+C_1.$$

Интегрируя еще раз, получим все решения данного уравнения

$$y=\frac{1}{4}e^{2x}-\sin x+C_1x+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Множество решений дифференциального уравнения второго порядка определяется двумя постоянными. Чтобы выделить единственное решение уравнения, достаточно задать значение функции и ее производной при фиксированном значении аргумента.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего условиям

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y'_0,$$

где x_0, y_0, y'_0 — заданные числа, называется *задачей Коши*.

Эти условия называются *начальными условиями*, так как с физической точки зрения они означают, что в фиксированный (начальный) момент времени заданы положение материальной точки и ее скорость.

Геометрический смысл задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный угловой коэффициент касательной в этой точке.

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$x''=2, \quad x(1)=0, \quad x'(1)=4.$$

Решение. Найдем решения данного уравнения:

$$x'=2t+C_1, \quad x=t^2+C_1t+C_2.$$

Воспользовавшись начальными условиями, значения констант C_1 и C_2 определим из системы уравнений

$$\begin{aligned} 1+C_1+C_2&=0,\\ 2+C_1&=4. \end{aligned}$$

Следовательно, $C_1=2$, $C_2=-3$ и искомое решение

$$x=t^2+2t-3.$$

Дифференциальные уравнения вида

$$y''=f(x, y')$$

заменой $y'=v$ сводятся к уравнениям первого порядка.

Пример 3. Решить уравнение

$$y''=-2y'^2.$$

Решение. Сделав в уравнении замену $y'=v$, имеем

$$v'=-2v^2.$$

Решив полученное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, найдем v:

$$v=1/(2x+C_1).$$

Следовательно, искомое решение

$$y=\int\frac{1}{2x+C_1}dx=\frac{1}{2}\ln|2x+C_1|+C_2.$$

554. Решите уравнение:

1) $y''=2$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}=-2x$; 3) $\frac{d^2s}{dt^2}=1-2\sin t$;

4) $y''=e^{2t}$; 5) $y''=\cos^2 x$; 6) $y''=\frac{1}{2}e^{-x}$;

7) $mx''=\cos\omega t$; 8)* $e^{y''}=1$; 9)* $\ln y''=0$.

555. Составьте дифференциальное уравнение, решениями которого являются функции:

1) $y=\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$; 2) $x=\cos 2t+C_1t+C_2$.

556. Решите задачу Коши:

1) $\frac{d^2s}{dt^2}=6t-4$, $s(2)=5$, $\frac{ds}{dt}(2)=6$;

2) $y''=12x^2$, $y(1)=1$, $y'(1)=4$;

3) $y''=e^{3x}+2x$, $y(0)=y'(0)=0$;

4) $x''=\sin 2t$, $x(0)=x'(0)=0$.

557. Из семейства интегральных кривых уравнения $y''=6(1-x)$ выделите ту, которая в точке $(1;\ 5)$ имеет касательную с углом наклона к оси x, равным $\pi/4$.

558. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a=12t-1$, где a — ускорение, м/с^2; t — время, с. Начальное положение $x(0)=0$ и начальная скорость $v(0)=10$ м/с. Найдите закон движения точки, положение и скорость в момент $t=3$ с; момент времени, когда скорость будет наименьшей.

559. Тело массой m под действием постоянной силы F начало двигаться $(t=0)$ из начала координат со скоростью v_0. Найдите закон движения точки. Определите положение точки через 3 с после начала движения, если $v_0=4$ м/с, $F=6$ Н, $m=4$ кг.

560. Найдите начальную скорость, при которой тело массой $m=3$ кг за 10 с от начала движения пройдет 60 м под действием силы $F=3$ Н.

561. Тело свободно падает на Землю без начальной скорости с высоты 1000 м. Найдите закон свободного падения тела. Через сколько времени тело достигнет Земли?

562. Локомотив движется по горизонтальному участку пути со скоростью $v_0=20$ м/с. При торможении сопротивление движению пропорционально массе локомотива с коэффициентом пропорциональности 0,2. Определите: через какое время от начала торможения он остановится; путь, пройденный локомотивом от начала торможения до остановки.

563. Решите уравнение:

1) $x'' = -x'$; 2) $x'' = -x'^2$; 3) $\frac{d^2y}{dx^2} = -0{,}1y'$;

4) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}y'^2$; 5) $x'' = 2x' - 10$; 6) $x'' = -x' - 10$.

564. Найдите решение задачи Коши:

1) $x'' = -2x'$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$;

2) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x+2}\frac{dy}{dx}$, $y(2) = 2$, $\frac{dy}{dx}(2) = 8$;

3) $s'' = -\frac{1}{t}s'$, $s(1) = 2$, $s'(1) = 1$.

565. Тело массой m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной скорости. Найдите закон движения тела, если $m = 20$ кг, коэффициент пропорциональности $k = 0{,}7$, и в начале замедления движения скорость равнялась 1,4 м/с. Определите путь, пройденный телом за 10 с от начала замедления движения.

566. Тело массой m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости. Найдите закон движения тела, если $m = 100$ кг, коэффициент пропорциональности $k = 0{,}3$ и в начале замедления движения скорость равнялась 40 м/с. Определите путь, пройденный телом от начала замедления до момента, когда скорость будет равна 1 м/с.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q — некоторые действительные числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Функция вида $y = e^{kx}$ является решением рассматриваемого уравнения тогда и только тогда, когда число k является корнем квадратного уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением.*

Решения уравнения в зависимости от значений корней k_1 и k_2 характеристического уравнения имеют следующий вид:

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если k_1, k_2 — действительны и $k_1 \neq k_2$;
$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$, если $k_1 = k_2$;
$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$, если $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$.

Пример 1. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + 4y = 0, \quad y(\pi/4) = 1, \quad y'(\pi/4) = -2.$$

Решение. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$. Дискриминант уравнения $D = -16 < 0$. Следовательно, корни характеристического уравнения $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ и решения уравнения имеют вид

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Воспользовавшись начальными условиями, значения постоянных C_1 и C_2 определим из системы уравнений

$$0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 = 1,$$
$$-2 \cdot 1 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot 0 = -2.$$

Имеем $C_1 = 1$, $C_2 = 1$.

Искомое решение

$$y = \cos 2x + \sin 2x.$$

К линейным дифференциальным уравнениям второго порядка приводит описание колебательных процессов. Гармонические колебания, например малые колебания маятника, описываются *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

где ω — частота гармонических колебаний.

567. Среди данных дифференциальных уравнений укажите линейные однородные второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + 2y' - y = 0$; 2) $y'' - y = 0$; 3) $y'' - y^2 = 0$;
4) $y' + 2y = 0$; 5) $y'' = x$; 6) $y'' - xy' + y = 0$;
7) $y'' - y' + 3y = x$; 8) $(y'')^2 + 2y' + 3y = 0$;
9) $y'' + y' = 0$.

568. Являются ли данные функции решениями данного уравнения:

1) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$, $y'' + 2y' + 2y = 0$;
2) $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$, $y'' + 6y' + 9y = 0$;
3) $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$, $y'' - 2y' + 2 = 0$?

569. Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, если:

1) характеристическое уравнение имеет вид

а) $k^2 + 3k + 2 = 0$, б) $2k^2 - 3k - 5 = 0$, в) $k^2 - 1 = 0$;

2) известны корни его характеристического уравнения

а) $k_1 = 4$, $k_2 = -2$, б) $k_1 = k_2 = -2$, в) $k_{1,2} = 5 \pm 2i$;

3) его решения имеют вид

а) $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$, б) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$,
в) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$, г) $y = e^x(C_1\cos x - C_2\sin x)$.

570. Решите уравнение:

1) $y'' + 3y' = 0$; 2) $y'' - 2y' - 8y = 0$;
3) $y'' + 14y' + 49y = 0$; 4) $y'' + 6y' + 25y = 0$;
5) $y'' + 8y' + 15y = 0$; 6) $y'' - 2y = 0$;
7) $y'' + 16y = 0$; 8) $y'' + 4y = 0$; 9) $y'' + \omega^2y = 0$.

571. Решите задачу Коши:

1) $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 3/2$, $y'(0) = 1$;
2) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$;
3) $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$;
4) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$;
5) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$;
6) $y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
7) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
8) $y'' - 8y' + 20y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

572. Докажите, что решения уравнения $y'' + \omega^2y = 0$ можно представить в виде $y = A\cos(\omega t + \varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные.

573. Составьте дифференциальное уравнение гармонических колебаний, решением которого является функция:

1) $y = 3\sin(2x - \pi/4)$; 2) $y = 2\cos(\pi/5 - 4x)$;
3) $y = \cos 2t + \sin 2t$.

574. Тело массой m закреплено на пружине (рессоре). Считая, что на него действует только сила упругости $F=-ky$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности, y — положение тела на оси, найдите закон движения тела, если в начальный момент $t=0$ тело находилось в положении $y=y_0$ и имело скорость v_0.

575. На тело массой $m=0{,}2$ кг, закрепленное на пружине, действует упругая сила, пропорциональная смещению тела с коэффициентом $k_1=175$ Н/м и сила сопротивления среды, пропорциональная скорости с коэффициентом $k_2=12$ Н·с/м. Найдите закон движения тела, если в момент $t=0$ тело покоилось.

576. Заряженный конденсатор емкостью C замкнут на катушку с индуктивностью L. Найдите закон изменения заряда на конденсаторе, если в момент замыкания $t=0$ заряд равен Q_0.

577. Колебательный контур содержит индуктивность $L=0{,}1$ Гн, сопротивление $R=2$ Ом и емкость $C=0{,}01$ Ф. Найдите зависимость изменения заряда на конденсаторе от времени, если в момент замыкания контура заряд равен Q_0.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Должно ли дифференциальное уравнение второго порядка содержать: 1) вторую производную функции; 2) первую производную; 3) искомую функцию; 4) независимую переменную в явном виде?

2. Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y''=f(x)$: 1) пересекаться; 2) касаться, т. е. иметь общую касательную в точке пересечения?

3. Известно, что $y=e^x$ и $y=2e^x$ являются решениями уравнения $y''-py'+y=0$. Можно ли утверждать, что $y=C_1e^x+2C_2e^x$ — множество всех решений данного уравнения?

4. Может ли множество всех решений уравнения $y''+\omega^2y=0$ иметь вид:

$$1)\ y=C(\cos\omega x+\sin\omega x);\quad 2)\ y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x;$$

$$3)\ y=A\cos(\omega t+\varphi);\qquad 4)\ y=C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}?$$

5. Каким дифференциальным уравнением описывается движение тела по закону 1) $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$; 2) $x=A\cos(\omega t+\alpha)$?

6. При каких значениях b все решения уравнения

$$y''+by'+4y=0:$$

1) стремятся к нулю, если x неограниченно возрастает;
2) являются периодическими функциями?

7. Какой физический смысл имеют постоянные A и φ в решении $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ уравнения $x''+\omega^2x=0$?

Глава 6
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Случайные события

1. Вероятностная модель случайного опыта. Исходными понятиями теории вероятностей являются понятия случайного опыта, случайного события и вероятности случайного события.

Термин «случайный опыт» или «случайный эксперимент» используется для описания любого действия, которое можно повторить большое число раз в одинаковых условиях и результаты которого нельзя предугадать заранее. Примерами случайных опытов могут служить однократное или двукратное подбрасывание монеты, подбрасывание шестигранной игральной кости, стрельба по мишени и др.

Пусть A — один из возможных результатов эксперимента. Будем называть его также *случайным событием.*

Примеры. Выпадение любой фиксированной цифры от 1 до 6 при подбрасывании игральной кости; выпадение герба не менее одного раза при двух бросаниях монеты; непопадание в цель при одном выстреле и др.

Относительной частотой случайного события A называется отношение $n(A)/n$ числа $n(A)$ экспериментов, в которых произошло событие A, к числу n всех экспериментов.

Если относительная частота события A в сериях из n опытов при достаточно большом n колеблется около одного и того же числа p, то такие опыты называются *статистически устойчивыми*, а число p — *вероятностью события* A.

Теория вероятностей имеет дело только со статистически устойчивыми экспериментами.

Когда говорят, что вероятность некоторого события равна, например, 0,56, то это практически означает, что в среднем в каждых 100 опытах это событие наступит примерно 56 раз.

Приведенное эмпирическое определение статистической устойчивости и вероятности события характеризует естественно-научное содержание понятия вероятности, но не является его формальным определением.

Рассмотрим другое определение вероятности, связанное с построением математической модели эксперимента, в которой отражены все его возможные исходы.

Вместе с каждым случайным опытом рассматривается некоторое множество U, элементами которого являются предполагаемые исходы данного опыта, взаимно исключающие друг друга. Множество U называется *пространством элементарных исходов* (ПЭИ), а его элементы — *элементарными исходами*.

Пример 1. Бросается игральная кость. $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, где каждая цифра означает число выпавших очков.

Пример 2. Дважды бросается монета. $U=\{$ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ$\}$. Здесь, например, «ГЦ» означает, что при первом бросании выпал герб, при втором — цифра.

Пример 3. Стрелок, имея 4 патрона, стреляет до первого попадания в цель. $U=\{$П, НП, ННП, НННП, НННН$\}$. Здесь «НП» означает, что стрелок при первом выстреле не попал, а при втором — попал в цель.

Под *случайным событием* понимают произвольное подмножество (часть) ПЭИ.

В примере 1 событие $A=\{2, 4, 6\}$ состоит в том, что выпало четное число очков; в примере 2 событие A — «герб выпал по крайней мере один раз» составлено из исходов ГГ, ГЦ, ЦГ.

Событие, наступающее при любом исходе эксперимента, называется *достоверным*. Это событие совпадает со всем множеством U.

Событие, не наступающее ни при одном исходе опыта, называется *невозможным*. Это событие совпадает с пустым множеством V.

Событие $\bar{A}$, наступающее тогда и только тогда, когда A не наступает, называется *противоположным* A. Так, в примере 1 событием, противоположным $A=\{2, 4, 6\}$, является событие $\bar{A}=\{1, 3, 5\}$, состоящее в том, что выпало нечетное число очков.

В опыте с подбрасыванием игральной кости, ввиду симметричности ее, у каждой из шести граней равные шансы оказаться сверху, а именно один шанс из шести. Поэтому естественно считать вероятность выпадения любого фиксированного числа очков равной 1/6. В ПЭИ примера 2 также естественно принять, что исходы равновозможны и вероятность каждого исхода считать равной 1/4. Однако не всегда есть основания считать исходы опыта равновозможными. Например, ПЭИ опыта, состоящего в одном выстреле по мишени, содержит два, вообще говоря, неравновозможных исхода. Их вероятности в этом случае можно принять равными относительным частотам соответствующих исходов при большом числе повторений опыта.

Пусть каждому элементарному исходу u_i из $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ поставлено в соответствие некоторое число $p_i = P(u_i)$, называемое *вероятностью* элементарного исхода, которое удовлетворяет условиям: 1) $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ для всех i; 2) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Тогда вероятностью события A называется сумма вероятностей элементарных исходов, образующих это событие.

Если ПЭИ опыта состоит из N равновозможных исходов, то

$$P(A) = \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N},$$

где число слагаемых $N(A)$ равно числу элементарных исходов, составляющих событие A, т. е.

$$P(A) = N(A)\frac{1}{N}.$$

Это равенство обычно называют *классическим определением вероятности*.

Если в задаче говорится, что выбор производится наугад, наудачу, случайным образом, то это означает, что его элементарные исходы равновозможны.

Задачи на вычисление вероятности события целесообразно решать по следующей схеме:

1) по условию задачи выяснить, что собой представляет случайный опыт и его исходы;

2) построить ПЭИ опыта;

3) приписать вероятности элементарным исходам. Если из условия задачи следует, что исходы равновозможны, то, сосчитав их число N, элементарные вероятности положить равными $1/N$;

4) выяснить, какие элементарные исходы составляют событие A (благоприятствуют событию A). Если исходы равновозможны, то подсчитать число благоприятствующих исходов $N(A)$;

5) определить вероятность события A, сложив вероятности элементарных исходов, составляющих его.

В классическом случае вычислить

$$P(A) = N(A)\frac{1}{N}.$$

Реализация первых трех этапов завершает построение вероятностной модели опыта.

Пример 4. Из цифр от 1 до 9 включительно, наугад выбирается одна. Найти вероятность того, что выбранное число будет простым.

Решение. Опыт состоит в выборе наугад одной цифры из девяти. ПЭИ опыта $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; исходы равновозможны, $N = 9$, поэтому $p_i = 1/9$, $i = 1, 2, \ldots, 9$.

$$A = \{2, 3, 5, 7\};\ N(A) = 4;\ P(A) = 4/9.$$

578. Для контроля качества продукции одного завода из каждой партии готовых изделий выбирают для проверки 100 деталей. Проверку не выдерживают в среднем 8 изделий. Чему равной можно принять вероятность того, что наугад взятое изделие этого завода будет качественным? Сколько примерно бракованных изделий будет в партии из 10 000 единиц?

579. На некотором предприятии было замечено, что при определенных условиях в среднем 1,6% изготовленных предметов оказываются неудовлетворяющими стандарту и идут в брак. Сколько примерно непригодных изделий будет в партии из 1000 изделий?

580. Вероятность того, что размеры детали, выпускаемой станком-автоматом, окажутся в пределах заданных допусков, равна 0,96. Какое количество годных деталей в среднем будет содержаться в каждой партии объемом 500 штук?

581. Для проверки на всхожесть было посеяно 200 семян, из которых 170 проросло. Чему равной можно принять вероятность прорастания отдельного семени в этой партии? Сколько семян в среднем взойдет из каждой тысячи посеянных?

582*. Число N животных в стаде неизвестно. Из этого стада наугад отбирают M животных, которые клеймятся и возвращаются в стадо. Затем отбирается n животных, среди которых m оказываются клеймеными. Укажите приближенное значение для величины N.

583. Из четырех карточек с номерами 1, 2, 3, 4 последовательно наугад выбирают две. Опишите ПЭИ этого опыта, если элементами его служат: 1) наборы номеров двух извлеченных карточек; 2) двузначные числа, образованные из номеров извлеченных карточек; 3) суммы номеров извлеченных карточек.

584. Селекционер скрещивает две породы, каждая из которых обладает парой генов (a, A). Каждая из родительских особей передает потомку один из этих генов (либо a, либо A). Два гена — один отцовский и один материнский — составляют пару генов потомка. Опишите ПЭИ, элементами которого являются пары генов возможных потомков.

585. Из трех мужчин (Олег, Игорь, Владимир) и двух женщин (Елена, Галина) избирается комиссия в составе двух человек. Опишите ПЭИ этого эксперимента.

586. Монета бросается до тех пор, пока либо выпадет герб, либо четыре раза подряд выпадет цифра. Опишите ПЭИ этого эксперимента.

587. Опыт состоит в последовательном подбрасывании сначала игральной кости, а потом монеты. Опишите ПЭИ и введите вероятности элементарных исходов.

588. Правильная монета подбрасывается дважды.

1) Опишите ПЭИ этого опыта и события: A — «цифра выпала при первом подбрасывании»; B — «цифра выпала точно один раз»; C — «выпал ровно один герб»; D — «герб выпал хотя бы один раз»; E — «результаты опыта одинаковы при обоих подбрасываниях».

2) Опишите словесно события: $F = \{ЦЦ, ЦГ, ГЦ\}$; $G = \{ГГ, ГЦ\}$.

3) Введите вероятности элементарных исходов.

4) Найдите вероятности событий A, B, C, D, E.

589. В ПЭИ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ заданы вероятности

$$P(1) = 1/4;\ P(2) = 1/12;\ P(3) = 1/3;$$
$$P(4) = 1/6;\ P(5) = 1/12;\ P(6) = 1/12.$$

Что можно сказать о примерном числе появлений каждого исхода в 120 опытах? Найдите вероятности событий $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2\}$, $\bar{B}$.

590. Из цифр от 1 до 9 включительно наугад выбирается одна. Опишите ПЭИ и найдите вероятность того, что выбранное число будет: 1) четным; 2) нечетным; 3) простым; 4) большим 7.

591. Монета подбрасывается трижды. Чему равна вероятность того, что герб выпадет хотя бы один раз?

592. Опыт состоит в подбрасывании игральной кости дважды. 1) Опишите ПЭИ этого опыта, если его элементами служат упорядоченные пары выпавших очков. 2) Назовите элементы ПЭИ, составляющие события: A — «оба раза выпало одинаковое число очков»; B — «сумма очков равна 7»; C — «хотя бы на одной кости выпала 1»; D — «сумма очков делится на 3». 3) Опишите словесно события:

$$E = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1)\}, \quad F = \{(4, 6); (5, 5); (6, 4)\}.$$

4) Введите элементарные вероятности, считая равновозможным выпадение любой пары очков и найдите вероятности событий A, B, C, D, E, F.

593. Игральная кость бросается дважды. 1) Опишите ПЭИ этого опыта, если его элементами служат суммы выпавших очков. 2) Введите элементарные вероятности, считая равновозможным выпадение любой пары очков. 3) Найдите вероятности событий G — «сумма очков больше 10»; H — «сумма очков делится на 2».

594. В ящике в 5 раз больше красных шаров, чем черных (шары одинаковые во всем, за исключением цвета). Наугад вынимается один шар. Найдите вероятность того, что он будет красным.

595. Совхоз получает 30% тракторов из г. Харькова. Какова вероятность того, что наугад выбранный трактор изготовлен не в Харькове?

596. В ящике 10 белых и 15 черных шаров (шары одинаковые во всем, за исключением цвета). Извлекается наудачу один шар. Опишите ПЭИ этого опыта и найдите вероятность того, что вынутый шар окажется белым.

597. Выполните следующий эксперимент: бросьте две монеты одновременно 50 раз. Подсчитайте число наступлений следующих исходов: два герба, один герб и одна цифра, две цифры. Вычислите частоту каждого из этих исходов. Подтверждают ли ваши вычисления гипотезу о том, что эти исходы равновозможны?

2. Элементы комбинаторики. При вычислении вероятностей важную роль играют методы комбинаторики.

Основное правило комбинаторики. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе n_2 способами, третье n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ способами.

Рассмотрим опыт, состоящий в выборе наудачу одного за другим r шаров из n пронумерованных шаров, содержащихся в корзине. Этот опыт будем называть *выбором с возвращением*, если после каждого извлечения шар возвращается обратно. В противном случае он называется *выбором без возвращения.*

Номера извлеченных шаров образуют выборку объема r. Различают выборки упорядоченные и неупорядоченные. В первом случае выборки одинакового состава, но отличающиеся порядком следования элементов, считаются различными. Во втором случае порядок следования элементов не принимается во внимание и такие же выборки считаются тождественными.

Рассмотрим выбор r из n шаров с возвращением. Если ПЭИ этого опыта образовано упорядоченными выборками, то число его элементов в этом случае равно $N=n^r$. Если осуществляется выбор без возвращения, то в случае упорядоченных выборок элементы ПЭИ называются также *размещениями из n элементов по r.* Их число равно

$$N=n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

и обозначается A_n^r. В случае когда $r=n$, элементы ПЭИ называются *перестановками*, и число их

$$N=n(n-1)\ldots 2\cdot 1=n!.$$

Если при выборе без возвращения рассматривать неупорядоченные выборки, то элементы ПЭИ называются *сочетаниями из n элементов по r.* Число их

$$N=C_n^r=A_n^r/r!.$$

Для числа сочетаний C_n^r справедливы равенства:

$$C_n^r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!},\qquad C_n^{n-r}=C_n^r.$$

598. Из города A в город B можно добраться четырьмя дорогами, из B в C ведут две дороги, из C в D — три дороги. Сколькими путями можно добраться: 1) из A в C; 2) из B в D; 3) из A в D?

599. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на нее и спуститься вниз? Дайте ответ на тот же вопрос, если подъем и спуск осуществляются различными путями.

600. Металлург, изучающий сплавы, при проведении эксперимента может использовать 3 различных температурных режима, 6 различных значений времени остывания и 4 различных присадки меди. Выбор температурного режима, значения времени остывания и типа присадки полностью определяют эксперимент. На эксперимент уходит один рабочий день. Хватит ли трех месяцев для проведения всей работы, если в месяце 25 рабочих дней?

601. Из корзины, содержащей 4 занумерованных шара, последовательно берут два шара. Определите число элементов ПЭИ этого опыта, если шары в корзину после каждого извлечения: 1) возвращаются; 2) не возвращаются.

602. Из цифр 0, 1, 2, ..., 9 образуются всевозможные двузначные числа. 1) Найдите количество всех этих чисел. 2) Сколько среди них образовано различными цифрами; одинаковыми? 3) Сколько имеется двузначных чисел, в записи которых обе цифры нечетные, обе цифры четные? 4) Сколько имеется двузначных чисел, в записи которых отсутствует «0» и обе цифры четные?

603. Опишите ПЭИ опыта, состоящего в выборе наудачу 5 шаров из 20 занумерованных шаров в случае, когда: 1) шары выбираются последовательно один за другим с возвращением после каждого извлечения; 2) шары выбирают один за другим, не возвращая; 3) выбирают сразу 5 шаров. Укажите число элементов ПЭИ для каждого случая.

604. В распоряжении агрохимика есть шесть различных типов минеральных удобрений. Он изучает совместное влияние каждой тройки удобрений на опытном участке площадью 1 га. Какой должна быть площадь всего опытного поля, если все возможные эксперименты проводятся одновременно?

605. Некто забыл номер нужного ему телефона. Помня только, что все 5 цифр номера различны, набирает номер наудачу. Какова вероятность того, что нужный номер будет угадан? (Считать, что номер может начинаться и с цифры 0.)

606. Технология предусматривает обработку детали последовательно на трех станках одного вида и двух другого вида с непременным чередованием видов станков. Чему равна вероятность того, что при случайном распределении станков в ряд будет соблюдена технология?

607. Чему равна вероятность того, что наудачу выбранные последовательно 4 цифры: 1) не содержат 0; 2) все различны; 3) образуют четырехзначное число? Если опыт повторить 100 раз, то сколько примерно раз будет задумано четырехзначное число?

608. На полку наудачу ставят четырехтомное собрание сочинений М. Ю. Лермонтова. Какова вероятность того, что в начале будет стоять первый том, а в конце — четвертый?

609. 12 мест стоянки автомобилей расположены в один ряд. На стоянке случайным образом размещены 8 автомобилей. Какова вероятность того, что 4 пустых места следуют одно за другим?

610. Чему равна вероятность того, что два лица A и B окажутся рядом, если они рассаживаются наудачу вместе с 8 остальными произвольным образом: 1) в ряд из 10 мест; 2) за круглым 10-местным столом?

611. Каждый из трех пассажиров с равной вероятностью может сесть в любой из 10 вагонов пассажирского поезда. Какова вероятность того, что все трое попадут: 1) в первый вагон? 2) в первые 5 вагонов? 3) в разные вагоны? 4) в один вагон?

612. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляют всевозможные трехзначные числа с неповторяющимися цифрами. Какова вероятность того, что наудачу взятое число: 1) равно 123; 2) будет четным; 3) будет нечетным; 4) делится на 4? Найдите вероятности этих событий, если числа образуются из цифр 0, 1, 2, 3, 5.

613. Магазин принимает партию из 10 радиоприемников, если при проверке двух из них, выбранных наугад, оба оказываются исправными. Какова вероятность того, что магазин примет партию, содержащую 4 неисправных радиоприемника? Можно ли считать удовлетворительной такую процедуру приема товара? Как можно улучшить процедуру приема?

614. В лотерее из 15 билетов 5 выигрышных. Некто купил два билета. Найдите вероятность того, что: 1) оба билета выигрышные; 2) ни один из билетов не выигрышный; 3) среди купленных билетов ровно один выигрышный.

615. Из ящика, содержащего 10 красных и 5 синих шаров, наудачу извлекается 3 шара. Чему равна вероятность того, что: 1) все шары окажутся красными; 2) выбраны только синие шары; 3) выбраны один синий и два красных шара; 4) среди выбранных шаров не более двух красных?

616. В группе учащихся 15 девушек и 10 юношей. Для выполнения некоторой работы наудачу выбирают 5 человек. Чему равна вероятность того, что: 1) будут выбраны только юноши; 2) выбраны только девушки; 3) выбранными окажутся 3 девушки и двое юношей; 4) среди выбранных не более одного юноши?

617. В ящике имеется M предметов, обладающих некоторым свойством, и N предметов, которые этим свойством не обладают. Из ящика наудачу извлекается k предметов ($k \leqslant M$, $k \leqslant N$). Чему равна вероятность того, что: 1) все извлеченные предметы обладают указанным свойством; 2) ни один из извлеченных предметов этим свойством не обладает; 3) среди извлеченных предметов ровно n ($n \leqslant k$) обладают указанным свойством?

3. Операции над событиями. Теорема сложения вероятностей. Событие C, составленное из тех элементов ПЭИ, которые принадлежат или событию A, или событию B, или A и B вместе, называют *суммой (объединением) событий* A и B и обозначают $C = A + B$ или $C = A \cup B$. Другими словами, событие $A \cup B$ наступает тогда и только тогда, когда наступает или событие A, или B, или A и B одновременно.

Событие D, составленное из элементов ПЭИ, принадлежащих одновременно и событию A и событию B, называют *произведением событий* A и B и обозначают $D = AB$ или $D = A \cap B$. Иначе — событие $A \cap B$ наступает тогда и только тогда, когда наступают и событие A и событие B.

События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = V$. Для любых событий A и B справедлива *теорема сложения вероятностей*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Если A и B несовместны, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

618. В чем заключаются сумма и произведение указанных ниже событий, связанных с соответствующими испытаниями: 1) производится два выстрела по мишени; A — «попадание первым выстрелом»; B — «попадание вторым выстрелом»; 2) бросается игральная кость; A — «появление единицы», B — «появление двойки»; 3) бросается игральная кость; A — «непоявление тройки», B — «непоявление пятерки», C — «появление нечетного числа очков»? Опишите все события элементами ПЭИ.

619. В корзину трижды бросается мяч. Пусть события A_i ($i = 1, 2, 3$) состоят в том, что при i-м бросании мяч попадет в корзину. Выразите через A_1, A_2, A_3 событие: 1) B — «мяч не попал в корзину ни разу»; 2) C — «мяч по крайней мере один раз попал в корзину»; 3) H — «мяч попал в корзину при всех бросаниях»; 4) D — «мяч попал в корзину только при первом бросании»; 5) E — «мяч попал в корзину ровно один раз»; 6) F — «мяч попал в корзину только при первом и третьем бросаниях»; 7) G — «мяч попал в корзину ровно два раза».

620. Сделано три выстрела по мишени. Пусть событие A_i — «при i-м выстреле произошло попадание в мишень», $i=1, 2, 3$. Опишите ПЭИ этого опыта. Считая исходы опыта равновозможными, найдите вероятность события A, предварительно выразив его через A_i, если: 1) A — «произошло три попадания»; 2) A — «не было ни одного попадания»; 3) A — «было хотя бы одно попадание».

621. Игральная кость бросается дважды. Найдите: 1) вероятности событий $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, если A — «сумма выпавших очков четна», B — «выпадет хотя бы одна единица»; 2) вероятность того, что по крайней мере один раз выпадет меньше трех очков.

622. Завод в среднем дает 27% продукции высшего сорта и 70% первого сорта. Найдите вероятность того, что наудачу взятое изделие будет или высшего, или первого сорта.

623. Станок-автомат производит изделия трех сортов, при этом изделий первого и второго сорта 80% и 15% соответственно. Чему равна вероятность того, что наугад взятое изделие будет или второго, или третьего сорта?

624. В группе 25 студентов, из них отлично учится 5 человек, хорошо — 12, удовлетворительно 6 и слабо — 2. Преподаватель, не знакомый с группой, вызывает по списку одного из студентов. Определите вероятность того, что вызванный студент или отличник, или хорошист.

625. Из чисел 1, 2, ..., 20 наудачу выбирается число. Найдите вероятность того, что это число делится на 2, или на 3.

626. Стрелок попал в мишень, разделенную на три непересекающиеся части. Вероятность попадания в первую часть равна 0,45, во вторую — 0,35. Найдите вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет: 1) либо в I, либо во II часть; 2) в III часть.

627. Пусть A и B — некоторые события в произвольном ПЭИ, причем $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}3$, $P(A \cap B)=0{,}2$. Найдите вероятность события: 1) $A \cup B$; 2) $\overline{A}$; 3) $\overline{B}$; 4)* $\overline{A} \cap B$.

628. Из ящика, содержащего 15 красных и 5 синих шаров, наудачу выбирают 4 шара. Найдите вероятность того, что среди выбранных шаров: 1) не более одного синего; 2) не менее трех красных; 3) не менее половины красных.

629. ОТК проверяет половину изделий некоторой партии и признает годной всю партию, если среди проверенных изделий бракованных не более одного. Какова вероятность того, что партия из 20 изделий, в которой 2 бракованные, будет признана годной?

630.* Докажите, что если события $A_1, A_2, \ldots, A_m$ попарно несовместны и их объединение есть достоверное событие, то $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_m)=1$.

4. Независимые события. Условные вероятности. События A и B *независимы* тогда и только тогда, когда

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$

Если события A и B независимы, то независимы A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

События A_1, A_2, A_3 *независимы в совокупности*, если они попарно независимы и

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

События A_1, A_2, A_3, A_4 независимы в совокупности, если независимы в совокупности любые три из них и

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4);$$

и т. д.

Если $P(B)>0$, то *условная вероятность* $P(A/B)$ события A при условии, что событие B произошло, есть число, определяемое формулой

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Для опытов с равновозможными исходами

$$P(A/B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}.$$

События A и B, вероятности которых отличны от 0, являются *независимыми*, если

$$P(A/B)=P(A) \text{ или } P(B/A)=P(B).$$

Если $P(A)>0$, $P(B)>0$, то

$$P(A\cap B)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$$

(*теорема умножения вероятностей*).

При решении задач на теоремы сложения и умножения вероятностей целесообразно использовать следующую схему рассуждений:

1) обозначить все фигурирующие в условии задачи случайные события и выписать вероятности событий, указанных в условии задачи;

2) событие, вероятность которого нужно найти, выразить через события, вероятности которых известны или легко вычисляются с помощью операций сложения, умножения и перехода к противоположному событию;

3) используя теоремы сложения и умножения вероятностей, вычислить искомую вероятность.

Пример. Участок электрической цепи (рис. 64) состоит из трех элементов, каждый из которых работает независимо от других. Элементы не выходят из строя за

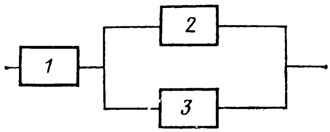


Рис. 64

определенный промежуток времени соответственно с вероятностями $p_1=0{,}9$, $p_2=p_3=0{,}7$. Найдите вероятность безотказной работы всего участка.

Решение. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что 1-й, 2-й, 3-й элемент не выйдет из строя за определенный промежуток времени, B — «участок цепи будет работать безотказно». $P(A_1)=0{,}9$; $P(A_2)=0{,}7$; $P(A_3)=0{,}7$. Участок цепи будет работать безотказно тогда и только тогда, когда не выйдут из строя первый и второй элементы, или не выйдут из строя первый и третий элементы, т. е. $B=(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)$. Так как события $A_1\cap A_2$ и $A_1\cap A_3$ совместны, то по теореме сложения вероятностей

$$P(B)=P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap A_3)-P(A_1\cap A_2\cap A_3).$$

В силу независимости работы всех трех элементов,

$$P(B)=P(A_1)P(A_2)+P(A_1)P(A_3)-$$
$$-P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}819.$$

Если одно из событий H_1, H_2, ..., H_n обязательно наступает, (т. е. событие $H_1\cup H_2\cup\ldots\cup H_n$ достоверно) и события H_1, H_2, ..., H_n попарно несовместны, то имеет место так называемая *формула полной вероятности*:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\ldots$$
$$\ldots+P(H_n)P(A/H_n).$$

631. Выясните, будут ли независимыми нижеперечисленные события A и B, связанные со следующими опытами:

1) бросается игральная кость; A — «число выпавших очков не более четырех»; B — «число выпавших очков нечетно»; 2) бросаются две монеты; A — «на первой монете выпал герб», B — «монеты упали одинаково»; 3) игральная кость бросается дважды; A — «при первом бросании не выпало 5 очков», B — «сумма выпавших очков равна 11»; 4) игральная кость бросается дважды; A — «при первом бросании выпало четное число очков», B — «сумма выпавших очков нечетная». Исходы опытов считать равновозможными.

632. Результаты экзаменов в некотором техникуме показывают, что 8% учащихся не смогли сдать математику, 6% — физику и 2% провалили экзамен как по физике, так и по математике. Наугад выбирается один учащийся. Будут ли события «выбранный учащийся не сдал математику» и «выбранный учащийся не сдал физику» независимыми?

633.* События A и B независимы. Докажите, что события $\bar{A}$ и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — независимы.

634. Электрические лампочки производятся на одной автоматической линии. В среднем одна лампочка из тысячи оказывается бракованной. Лампочки изготовляются независимо друг от друга. Чему равна вероятность того, что из двух взятых наугад лампочек: 1) окажутся исправными обе; 2) исправной будет только одна; 3) обе будут бракованными?

635. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента при включении прибора — 0,05; второго — 0,08. Найдите вероятность того, что при включении прибора: 1) выйдет из строя только первый элемент; 2) оба элемента выйдут из строя; 3) откажет только второй элемент; 4) оба элемента будут работать.

636. При каждом включении двигатель начинает работать с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что для запуска двигателя потребуется не более двух включений?

637. Дважды подбрасывается трехгранная линейка. На ее гранях стоят числа 1, 2, 3. Эти грани при подбрасывании оказываются внизу с вероятностями 0,5; 0,3; 0,2 соответственно. 1) Постройте ПЭИ этого опыта. 2) Назовите элементы ПЭИ, составляющие события: A — «номера нижних граней совпали при бросаниях», B — «сумма номеров нижних граней больше трех», C — «при первом бросании номер нижней грани больше, чем при втором»,

D — «выпали различные номера нижних граней». 3) Опишите словесно события:

$$E = \{(1,\ 1);\ (1,\ 2);\ (2,\ 1)\};$$
$$F = \{(1,\ 1);\ (1,\ 2);\ (1,\ 3);\ (2,\ 1);\ (3,\ 1)\}.$$

4) Введите вероятности элементарных исходов, считая исходы двух бросаний независимыми и вычислите вероятности событий A, B, C, D, E, F.

638. Игральная кость бросается дважды. Найдите $P(A/B)$ если: 1) A — «при первом бросании выпала единица», B — «сумма выпавших очков меньше четырех»; 2) A — «при втором бросании выпала пятерка», B — «сумма очков не меньше 10»; 3) A — «при втором бросании выпало четное число очков», B — «при первом бросании выпало нечетное число очков».

639. Монета подбрасывается либо до появления герба, либо до трехкратного выпадания цифры. Найдите $P(A/B)$, если: 1) A — «монета брошена два раза», B — «при первом бросании выпала цифра»; 2) A — «монета брошена три раза», B — «при первых двух бросаниях выпала цифра».

640. Из 12 билетов, пронумерованных числами от 1 до 12, наудачу один за другим выбирают два билета. Найдите вероятность того, что: 1) номер первого билета четный, а второго — нечетный; 2) оба номера четные; 3) оба номера нечетные; 4) один из номеров четный, а другой — нечетный; 5) хотя бы один номер четный; 6) второй номер четный.

641. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Известно, что в среднем одна из 30 грузовых и 2 из 50 легковых машин подъезжают к бензоколонке для заправки. Чему равна вероятность того, что: 1) к бензоколонке подъехала грузовая машина, и она будет заправляться; 2) к бензоколонке подъехала легковая машина, и она будет заправляться; 3) подъехавшая к бензоколонке машина будет заправляться?

642. С первого станка на сборку поступает 40%, со второго — 30% и с третьего — 30% всех деталей. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка соответственно равна 0,01; 0,03; 0,05. Найдите вероятность того, что наудачу поступившая на сборку деталь бракована.

643. На некоторой фабрике машина A производит 40% продукции, а машина B производит 60% продукции.

В среднем 9 единиц из 1000 единиц продукции, произведенных машиной A, и одна единица из 250 у машины B оказываются бракованными. Какова вероятность того, что единица продукции, выбранная случайным образом из всей дневной продукции фабрики, оказалась бракованной?

644. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынуты наудачу два шара и переложены в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Из второй урны наудачу выбирают шар. Чему равна вероятность того, что он белый?

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1. Приведите пример опыта с тремя элементарными исходами; со 100 исходами.

2. Какие из следующих наборов чисел задают вероятности в ПЭИ с четырьмя исходами: а) 1/5; —1/5; 1/2; 1/2; б) 1/10; 1/5; 3/10; 1/2; в) 1/5; 2/5; 3/10; 1/10; г) 1/5; 3/10; 3/10; 1/10?

3. Бросается игральная кость. Пусть A — «выпало 4 очка», B — «выпало четное число очков», C — «выпало нечетное число очков». Будут ли несовместны события A и B; B и C?

4. Будут ли несовместными независимые события с положительными вероятностями?

5. Может ли сумма двух событий совпадать с одним из слагаемых?

6. Может ли произведение двух событий совпадать с одним из сомножителей?

7. Что можно сказать о событиях, сумма и произведение которых совпадают?

8. Будут ли независимыми произвольное событие A и: 1) достоверное событие U; 2) невозможное событие V?

9. Пусть A и B — несовместные события и $P(B) \neq 0$. Найдите $P(A/B)$.

10. Пусть каждый элементарный исход события B входит также и в событие A. Найдите $P(A/B)$.

11. Как найти вероятность суммы двух независимых событий?

12. Верны ли следующие утверждения: 1) если события A и B независимы, то они и несовместны; 2) если события A и B несовместны, то они и независимы; 3) если события A и B независимы, то они совместны?

§ 2. Случайные величины

1. Случайная величина. Закон ее распределения. *Случайной величиной* называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных исходов. Функция, ставящая в соответствие каждому значению x случайной величины X вероятность $P(X=x)$, с которой она принимает это значение, называется *законом распределения случайной величины.*

Можно предложить следующую схему составления закона распределения случайной величины.

1. Построить для данного эксперимента пространство элементарных исходов и задать в нем вероятности.

2. Выписать значение случайной величины, соответствующее каждому элементарному исходу.

3. Выписать всевозможные различные значения x_1, x_2, ..., x_n случайной величины и соответствующие им вероятности p_1, p_2, ..., p_n. Вероятность p_i находится сложением вероятностей всех элементарных исходов, отвечающих значению x_i.

Так как события $(X=x_1)$, ..., $(X=x_n)$ попарно несовместны и одно из них обязательно наступает, то $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$. Это равенство используется для проверки правильности составления закона распределения случайной величины.

Пример. Стрелок, имея 4 патрона, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить закон распределения числа использованных патронов.

Решение. ПЭИ опыта $U=\{$П; НП; ННП; НННП; НННН$\}$. Так как результат каждого следующего выстрела естественно считать независящим от предыдущего, то вероятности элементарных исходов соответственно равны $P(\text{П})=0{,}6$; $P(\text{НП})=0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}24$; $P(\text{ННП})=0{,}4^2\cdot 0{,}6=$ $=0{,}096$; $P(\text{НННП})=0{,}4^3\cdot 0{,}6=0{,}0384$; $P(\text{НННН})=0{,}4^4=$ $=0{,}0256$. Элементарным исходам соответствуют следующие значения случайной величины — числа использованных патронов: 1, 2, 3, 4, 4.

Итак, закон распределения имеет вид

x_i	1	2	3	4
p_i	0,6	0,24	0,096	0,064

.

$(0{,}064=0{,}0384+0{,}0256)$.

645. Составьте закон распределения: 1) числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания при каждом броске 0,7; 2) числа выпавших очков при подбрасывании игральной кости; 3) числа выпавших гербов при трех бросаниях монеты; 4) количества делителей натурального числа, выбранного наугад из чисел от 1 до 10.

646. Выпущено 500 лотерейных билетов, причем 40 билетов принесут их владельцам выигрыш по 1 руб., 10 билетов — по 5 руб., 5 билетов — по 10 руб. Остальные билеты безвыигрышные. Найдите закон распределения выигрыша для владельца одного билета.

647.* Учащийся должен определить дату каждого из трех исторических событий: восстания Степана Разина, крестьянской войны Пугачева и восстания декабристов, пользуясь списком из трех дат: 1667 г., 1773 г., 1825 г. Не зная правильного ответа, он подбирает даты наугад. Составьте закон распределения числа правильно названных дат. Найдите вероятность того, что ученик угадает хотя бы одну дату.

648. Возможные значения случайной величины X таковы: $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=8$. Известны вероятности $P(X=2)=0{,}4$; $P(X=5)=0{,}15$. Найдите $P(X=8)$.

649. Случайная величина X распределена по закону

x_i	1	2	3	4	5
p_i	1/4	1/8	1/4	1/8	1/4

Найдите: 1) $P(X\leqslant 3)$; 2) $P(2\leqslant X<5)$; 3) $P(1\leqslant X\leqslant 4)$; 4) $P(X>2)$.

650. Дан закон распределения случайной величины X:

x_k	1	2	3	4	5
p_k	$1{,}5a^2$	a^2	a	a	0,5

Найдите: 1) a; 2) $P(X\geqslant 3)$; 3) $P(X<4)$; 4) наибольшее значение k, при котором $P(X\geqslant k)>0{,}75$.

651. На рис. 65 изображены графики законов распределения случайных величин X и Y соответственно. 1) Запишите законы распределения в виде таблиц. 2) Укажите значения случайных величин, имеющие наибольшую вероятность. 3) Найдите $P(X=3)$, $P(X>3)$, $P(X\leqslant 3)$, $P(X<3)$. 4) Найдите $P(Y=2)$, $P(Y>2)$, $P(Y\leqslant 2)$, $P(Y<2)$.

652. Производятся независимые испытания, в каждом из которых с вероятностью 0,6 может произойти событие A. Испытания производятся до первого появления события A, общее число испытаний не превосходит четырех. Найдите закон распределения числа испытаний.

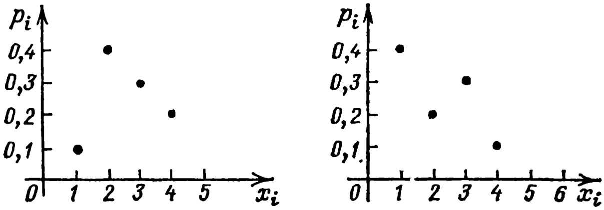


Рис. 65

653. Стрелок, имея три патрона, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,7. Найдите закон распределения числа произведенных выстрелов.

654. Урна содержит 5 черных и 10 красных мячей. Вынимается наудачу два мяча. Составьте закон распределения числа извлеченных черных мячей.

655. В сборной команде техникума по стрельбе 16 человек, из них 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух членов сборной. Составьте закон распределения числа перворазрядников среди выбранных.

2. Биномиальное распределение. *Испытаниями Бернулли* называются последовательные опыты, удовлетворяющие следующим условиям: 1) число опытов фиксировано; 2) каждый опыт приводит к одному из двух взаимно исключающих исходов, которые условно называют «успех» и «неудача»; 3) вероятности «успеха» от испытания к испытанию не меняются; 4) опыты независимы.

Вероятность того, что в n испытаниях Бернулли «успех» наступит ровно m раз, равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где p — вероятность «успеха» в каждом испытании, $q = 1 - p$, $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

О случайной величине — числе «успехов» в n испытаниях Бернулли — говорят, что она имеет *биномиальное распределение с параметрами n и p.*

656. На испытательный стенд поставлено 4 конденсатора. Вероятность пробоя конденсатора до истечения

1000 часов равна 0,01. Найдите вероятность того, что в течение испытания откажут ровно 3 конденсатора.

657. Пусть всхожесть ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет три?

658. Вратарь парирует в среднем 0,3 всех одиннадцатиметровых штрафных ударов. Какова вероятность того, что он возьмет ровно два из четырех мячей?

659. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 из 8?

660. Из 10 выстрелов стрелок поражает цель в среднем 8 раз. Какова вероятность того, что из трех независимых выстрелов он точно два раза попадет в цель?

661. Бросается 5 симметричных монет. Какова вероятность того, что: 1) выпало ровно 3 герба; 2) выпало более одного герба?

662. В цехе имеются три резервных мотора, работающих независимо друг от друга. Для каждого мотора вероятность того, что он включен в данный момент, равна 0,2. Найдите вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один мотор.

663. Стрелок производит три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,9. Составьте закон распределения числа попаданий.

664. Устройство состоит из трех взаимно независимых элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составьте закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Вычислите вероятность того, что отказавших элементов будет не менее двух.

665. Урна содержит один красный и два белых шара, одинаковые во всем, кроме цвета. Из урны извлекаются три шара так, что перед извлечением следующего шара предыдущий возвращается в урну. Найдите закон распределения числа белых шаров среди извлеченных.

666. При трех испытаниях Бернулли вероятность ровно двух «успехов» в 12 раз больше вероятности трех «успехов». Найдите вероятность «успеха» в каждом испытании.

667. Проводится три испытания Бернулли, вероятность наступления «успеха» в каждом испытании равна p. Докажите, что вероятность того, что число успехов равно 1 или 2, равна $3p(1-p)$.

668.* Сколько надо произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хоть один раз попасть в цель, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7?

669.* Какова должна быть вероятность попадания при каждом из 10 независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 имело место хотя бы одно попадание?

670. Пользуясь средствами дифференциального исчисления, найдите значение p, при котором вероятность $P_3(2)$ достигает максимума и вычислите этот максимум.

3. Числовые характеристики случайных величин. Пусть случайная величина X имеет закон распределения

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

,

где $x_1, \ldots, x_n$ — всевозможные значения случайной величины, а $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, \ldots n$. Сумма произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности называется *математическим ожиданием* или *средним значением случайной величины* X и обозначается MX:

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Случайные величины X и Y называются независимыми, если для любых их значений x и y имеет место равенство

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) P(Y = y).$$

Свойства математического ожидания:

1) $M(X + Y) = MX + MY$;

2) если случайные величины X и Y независимы, то

$$M(XY) = MX \cdot MY;$$

3) если C — константа, то

$$MC = C, \ M(CX) = CM(X);$$

4) если $X \geqslant 0$, то $MX \geqslant 0$.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}.$$

Свойства дисперсии:

1) $DX = MX^2 - (MX)^2$; 2) $DX \geqslant 0$;

3) если C — константа, то

$$DC = 0,\ D(CX) = C^2DX,\ D(X+C) = DX;$$

4) если X и Y — независимые случайные величины, то

$$D(X+Y) = DX + DY.$$

Если X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, то $MX = np$, $DX = np(1-p)$.

671. Случайная величина X имеет закон распределения:

1)

x_i	1	2	3
p_i	0,7	0,1	0,2

;

2)

x_i	—2	—1	1	2	3
p_i	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

;

3)

x_i	—2	—1	1	2
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

.

Найдите MX, DX, $\sigma(X)$.

672. Число очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух стрелков, имеет соответственно закон распределения:

x_i	8	9	10
p_i	0,4	0,1	0,5

x_i	8	9	10
p_i	0,1	0,6	0,3

.

Какой из стрелков стреляет лучше?

673. Случайная величина X принимает значения 7, -2, 1, -5, 3 с равными вероятностями. Найдите MX.

674. Найдите математические ожидания и дисперсии случайных величин, заданных в задачах 1) 645 (4); 2) 646; 3) 652.

675. Имеется 4 лампочки, каждая из них с вероятностью 0,1 имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон, и включается ток. При включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. В противном случае испытания прекращаются. Найдите математическое ожидание числа испробованных лампочек.

676. Согласно статистическим данным, вероятность того, что 25-летний человек проживет еще один год, равна 0,998. Госстрах предлагает 25-летнему человеку застраховаться на сумму 1000 руб., страховой взнос равен 3 рублям. Какую прибыль для организации помощи трудящимся в несчастных случаях ожидает получить Госстрах при страховании одного 25-летнего человека?

677. Станки расположены по кругу (рис. 66), расстояние между соседними станками равно a, число станков равно n. Рабочий обслуживает станки в порядке возникновения отказов, двигаясь по часовой стрелке. Вероятность возникновения требования об обслуживании на каждом из станков одна и та же и равна $1/n$. Найдите среднюю длину перехода, который должен сделать рабочий для ликвидации первого отказа. В начальный момент времени рабочий находится у станка с номером 0.

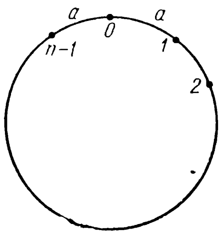


Рис. 66

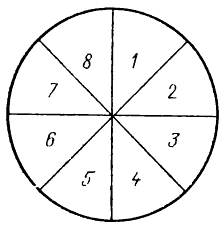


Рис. 67

678. Мишень установлена так, что может вращаться вокруг оси (рис. 67). При попадании в сектор 1 стрелок выигрывает 1 рубль, в сектор 2—2 рубля и т. д., в сектор 8—8 рублей. При достаточно большой угловой скорости вращения мишени стрелок не в состоянии различить цифры, выписанные на секторах, и поэтому он стреляет наугад. Будет ли игра беспроигрышной, если за право стрелять один раз надо платить 5 рублей?

679. Вероятность появления события A в испытании равна p. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа появлений события A в одном испытании.

680. Найдите математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадают при бросании двух игральных костей.

681. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель, равными соответственно 0,4; 0,3; 0,6. Найдите среднее число попаданий.

682.* Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа появлений события A в n испытаниях.

683. Игральная кость подбрасывается 15 раз. Сколько раз в среднем может появиться 4 очка?

684. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятность появления A в каждом испытании одна и та же и известно, что $MX=1{,}2$.

685. Найдите дисперсию числа появлений события в трех независимых испытаниях, если математическое ожидание этой случайной величины равно 0,9, а вероятность появления события от испытания к испытанию не меняется.

686.* Устройство состоит из 4 элементов. Вероятность отказа любого элемента за время опыта равна 0,2. Найдите математическое ожидание числа опытов, в каждом из которых откажет ровно один элемент, если всего произведено 100 независимых опытов.

687. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найдите эту вероятность, если дисперсия числа появлений события A в трех независимых испытаниях равна 0,63.

688. Случайная величина X имеет закон распределения

x_i	2	3	4	5
p_i	0,3	0,1	0,5	0,1

.

Найдите $M(2X+5)$ и $D(2X+5)$: 1) предварительно составив закон распределения случайной величины $2X+5$;

2) используя свойства математического ожидания и дисперсии.

689. Случайные величины X и Y имеют соответственно законы распределения:

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

;

y_i	-1	1	2	3
q_i	0,1	0,3	0,5	0,1

.

Найдите: 1) $M(3X-1)$; 2) $M(2X-3Y)$; 3) MY^2.

690. Случайная величина X принимает значения -1; 0; 1. Известно, что $MX=0{,}1$, $MX^2=0{,}9$. Найдите вероятности, с которыми X принимает свои значения.

691. Известно, что случайные величины X и Y независимы; $DX=2$, $DY=5$. Найдите $D(3X+Y)$.

692. Дисперсия каждой из 9 попарно независимых случайных величин равна 36. Найдите дисперсию среднего арифметического этих величин.

4. Неравенство Чебышёва. Понятие о задачах математической статистики. Для произвольного $\varepsilon>0$ имеет место *неравенство Чебышёва*:

$$P(|X-MX|>\varepsilon)\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Пусть в выборке из n наблюдений за случайной величиной X эта величина n_1 раз принимала значение x_1, n_2 раз — значение x_2, ..., n_m раз — значение x_m, $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$. *Выборочным средним* называется величина

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{m}x_i\frac{n_i}{n}.$$

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$S^2=\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2\frac{n_i}{n}.$$

693. Случайная величина X задана законом распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	27/64	27/64	9/64	1/64

.

Найдите: 1) MX; 2) DX; 3) $P(|X-MX|\leqslant 3/4)$; 4) $P(|X-MX|>3/4)$.

694. Пусть $MX=7$, $DX=4$. 1) Оцените с помощью неравенства Чебышёва $P(|X-7|>2{,}5)$ и $P(1\leqslant X\leqslant 13)$. 2) При каком значении k выполняется неравенство $P(|X-7|\leqslant k)\geqslant 0{,}99$?

695. Пусть X — случайная величина, MX — ее математическое ожидание, $\sigma(X)$ — среднеквадратическое отклонение. Оцените $P(|X-MX|\leqslant 3\sigma(X))$.

696. Вероятность производства нестандартной детали равна $p=0{,}01$. Оцените вероятность того, что число нестандартных среди 10 000 деталей будет заключено между 85 и 115?

697. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа в течение суток для каждого элемента равна 0,05. С помощью неравенства Чебышёва оцените вероятность того, что модуль разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за сутки окажется меньше 2.

698. В осветительную сеть включено параллельно 20 лампочек. Вероятность того, что в течение суток лампочка будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышёва, оцените вероятность того, что модуль разности между числом включенных ламп и средним числом включенных ламп за сутки окажется: 1) не больше трех; 2) больше трех.

699. Куплено 500 лотерейных билетов, причем на каждый из 40 билетов выпал выигрыш в 1 р., 10 билетов принесли их владельцам выигрыш по 5 р., 5 билетов — по 10 р. Найдите средний выигрыш, выпавший на 1 билет.

700. В половине наблюдений случайная величина равнялась 1, а в другой половине она равнялась 3. Найдите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

701. Результат пяти измерений равен 1, трех измерений равен 2, и одного измерения равен 3. Найдите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

702. В некотором доме три семьи не имеют велосипеда, 20 имеют по одному велосипеду, 15 семей — по 2 велосипеда и две семьи имеют по три велосипеда. Найдите среднее значение и среднее квадратическое отклонение числа велосипедов, имеющихся в одной семье.

703. При сборке прибора для точной подгонки некоторой детали требуется произвести ряд проб, причем деталь, забракованная при сборке одного прибора, уже не используется. Для решения задачи о числе деталей, которыми необходимо снабдить сборщика, было проведено 100 наблюдений. Оказалось, что в 7 случаях понадобилась только одна проба, в 16 — две, в 55 — три, в 21 — четыре и в одном случае пять проб. Найдите среднее число деталей, необходимое для сборки одного прибора, 50 приборов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ И ПОВТОРЕНИЯ

1) Привести примеры случайных величин и случайных событий, связанных со следующими опытами: а) игральная кость бросается 3 раза; б) 4 лампочки, среди которых есть и бракованные, последовательно вкручиваются в патрон до обнаружения бездефектной.

2. Какие из следующих таблиц:

а)

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,5	0,1	0,3

;

б)

x_i	1	2	3	4
p_i	0	0,4	0,2	0,3

;

в)

x_i	1	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

— задают закон распределения случайной величины?

3. Какие из следующих случайных величин имеют биномиальное распределение: а) число извлеченных последовательно (без возвращения) нестандартных деталей из партии в 100 деталей, среди которых 10 нестандартных; б) число попаданий в мишень при трех независимых выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле одна и та же; в) число очков, выпавших при бросании одной игральной кости; г) число гербов, выпавших при четырехкратном бросании монеты?

4. Как, пользуясь формулой Бернулли, найти вероятность того, что в n испытаниях Бернулли некоторое событие наступит n раз? Можно ли вычислить эту вероятность, не прибегая к формуле Бернулли?

5. Как, пользуясь формулой Бернулли, найти вероятность того, что в n испытаниях Бернулли некоторое событие не наступит ни разу? Можно ли вычислить эту вероятность, не прибегая к формуле Бернулли?

6. Как, пользуясь формулой Бернулли, найти вероятность того, что в n испытаниях Бернулли «успех» произойдет хотя бы один раз? Можно ли подсчитать эту вероятность, не прибегая к формуле Бернулли?

7*. Проводится n испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p в каждом испытании. Вероятность какого события равна $p^m (1-p)^{n-m}$?

8. Верно ли неравенство $DX < MX^2$? Может ли DX равняться MX^2?

9. Можно ли найти дисперсию биномиально распределенной случайной величины, зная только ее математическое ожидание?

10. Найдите ошибку в следующих рассуждениях. Пусть случайная величина X имеет закон распределения

x_k	-1	0	1
p_k	1/3	1/3	1/3

Отсюда $MX=0$,

$$MX^2 = M(X \cdot X) = MX \cdot MX = 0.$$

С другой стороны, закон распределения X^2:

x_k	1	0
p_k	2/3	1/3

т. е. $MX^2 = 2/3$.

11. Найдите ошибку в следующих рассуждениях. Пусть $DX=2$. Тогда $D(2X)=4DX=8$. С другой стороны, $D(2X)=D(X+X)=$ $=DX+DX=4$.

12. Известно, что X и Y — независимые случайные величины. $DX=1$; $DY=2$. Найдите ошибку в следующих вычислениях:

$$D(2X-3Y)=4DX-9DY=4-18=-14.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1. Числовые системы и приближенные вычисления

5. 1) 64; 2) 1,225; 3) $14\frac{6}{7}$; 4) $1\frac{1}{9}$. **6.** 1) $\frac{x-5}{x+2}$; 2) $\frac{3x+1}{x+2}$. **7.** 1) 126; 2) 2; 3) 4500; 4) 400; 5) 500; 6) 3,2. **8.** 1) 0,75; 2) 1,5; 3) 15/4. **9.** 1) 81/16; 2) 12/35. **10.** 1) 1/2; 2) 1/2. **16.** 1) 1,578; 23,500; 0,000; 0,080; 2) 4,76; 31,01; 471,26; 0,00; 3) $160\cdot10^3$; 0; $7654\cdot10^3$; $1\cdot10^3$. **17.** 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) да. **18.** $0,66 < v < 0,84$. **20.** 1) 16,0 см; 0,160 м. **23.** 1) 1,1274; 2) 19,41. **25.** 1°C; 0,1 °C. **26.** 1) 10^{-40}; 2) 10^{17}; 3) 10^{-37} кг; 4) 10^{-15} Н·м²/кг². **27.** 1) $2,0\cdot10^{-4}$; $1,3\cdot10^{-5}$; не определенна; $4,5\cdot10^{-3}$; 2) $2,1\cdot10^{-4}$; $3,3\cdot10^{-5}$; $3,7\cdot10^{-6}$; не определенна; 3) $1,7\cdot10^{-3}$; не определенна; $4,2\cdot10^{-5}$; $1,6\cdot10^{-2}$. **28.** Скорость света. **29.** 2,1; 2,9 т; **30.** 1) 50%; 2) 6%; 3) 0,3%. **31.** 1) 1-е; 2) 2-е; 3) 2-е; 4) 2-е. **32.** Размах крыла. **34.** Одна. **35.** 3) $0,824 \pm 0,0011$; $-0,122 \pm 0,0011$; 4) $5,6\cdot10^4 \pm 1030$; $1,4\cdot10^4 \pm 1030$; 5) $147 \pm 6,89$; $101 \pm 6,89$; 6) $0,130 \pm 0,000464$; $-0,018 \pm 0,000464$. **36.** 1) 1,715 Н; 2) 0,005 Н. **37.** 1) 148,5; 0,063; 2) 52,4; 0,02305. **38.** $\approx$10,9 Ом. **39.** $\approx$305 Ом. **40.** 1) 15,9; 2) 4,85; 3) 11,0; 4) $-5,988\cdot10^6$; 5) 88535; 6) 0,10. **41.** $\approx$9,22 м. **42.** $1,8\cdot10^2$ Ом; 5,0 Ом. **43.** 1) 99; 101,84; 2) 72,7425; 74,1405; 3) 0,03626; 0,04141; 4) 130,5; 545,3; 5) 0,01736; 0,01754. **44.** $\approx$ 500 с. **45.** Нет. **46.** 1) $6,3\cdot10^{-2}$; 2) $1,71\cdot10^3$; 3) 3,2; 4) $3,845\cdot10^3$; 5) 6,809; 6) $2,3\cdot10^3$. **47.** 1) 7,04; 2) $1,292\cdot10$; 3) $8,1\cdot10^{-3}$; 4) $7,84\cdot10^5$; 5) $3,731\cdot10^3$; 6) $1,7\cdot10^{-1}$; 7) $2,8\cdot10^{11}$. **48.** 0,021 см; 0,06 см. **50.** 0,21 см; 0,41 см; с 2 значащими цифрами. **51.** 1) 3,22; 2) 16,471; 3) $-0,007$; 4) $1,2\cdot10^6$; 5) 19,6; 6) 20,5150; 7) $2379\cdot10$; 8) $-9,7$; 9) 0,2095; 10) 17,73; 11) 683,39; 12) 32,9; 13) 23368. **52.** 1) 12,7; 2) $211\cdot10$; 3) $2170\cdot10^3$; 4) $7,18\cdot10^{-2}$; 5) $1,579\cdot10^{-3}$; 6) $29417\cdot10$; 7) $6,6946\cdot10^{-4}$; 8) $3,442\cdot10^{-9}$; 9) 16,2; 10) $725\cdot10^2$; 11) $1,43\cdot10^8$; 12) 6393; 13) 15,0332; 14) $5,98\cdot10^{-2}$; 15) $4,810\cdot10^{-10}$; 16) $13,3\cdot10^6$; 17) 0,1572208; 18) $2,62\cdot10^{-8}$; 19) $15,78\cdot10^{12}$. **53.** $\approx$ 1,53 м/с². **54.** $\approx$ 63 Дж. **55.** $\approx 1,99\cdot10^{20}$ Н. **56.** $\approx$ 2,7 кг. **57.** $\approx 1,5\cdot10^2$ кг; **58.** $\approx$ 44 Н. **59.** 1) 1,324; 2) 6,2651; 3) 0,170; 4) $8,0146\cdot10^{-3}$; 5) 588; 6) 1,33; 7) 2,592; 8) $8,4033\cdot10^{-2}$; 9) 98,4; 10) $7,1871\cdot10^{-2}$. **60.** $\approx$ 2,20 с. **61.** $2,703 \pm 0,032$. **62.** 1) 0,208; 2) 0,269; 3) 0,588; 4) 0,623; 5) 0,885; 6) 0,682; 7) 0,500; 8) 0,765; 9) 2,414; 10) 7,462; 11) $-1,449$; 12) 0,093; 13) 0,859; 14) $-1,237$;

15) 5,184; 16) 3,443; 17) 69,183; 18) 1,718; 19) 0,284; 20) 0,000; 21) 66,686; 22) 0,000; 23) 187,416; 24) 0,298; 25) 0,081; 26) 0,091; 27) с указанной точностью вычислить нельзя. **63.** 2) 72°18′; 7,70; 7,33; 3) 49°37′; 0,06294; 0,04078; 5) 55°45′; 144,9; 98,66; 6) 17°24′; 0,278; 0,0870; 8) 17°23′; 72°37′; 82,0; 9) 37°10′; 52°50′; 0,0098215; 11) 45°22′; 44°38′; 50,795; 12) 38°22′; 51°38′; 0,23. **64.** 2) 92°12′; 1,57; 2,82; 3) 83°42′; 0,2129; 0,3085; 5) 46°18′; 54°00′; 79°42′; 6) 32°11′; 51°35′; 96°14′; 8) 48°7′; 74°10′; 15,2; 9) 69°12′; 72°24′; 0,5320; или 110°48′; 30°48′; 0,2858; 11) 1099; 111°50′; 50°48′. **65.** 1) 6,7000; 7,7981; 8,2000; 2) 1,7238; 1,2731; 0,8208; 0,3675; 3) —5,5318; —3,2887; 1,4600; 11,5130; 32,7952; 77,8496; 4) 2,5000; —4,4750; —6,8406; —8,7704; 5) 1,5178; 1,8756; —0,3050; 0,2054; 6) 12,4571; 12,4601; 12,4878; 12,7572; 7) 1,1293; —0,0001; 0,0000. **66.** 1) 0,161; 1,239; 2) —1,297; 0,964; 3) —0,961; 0,394; 4) —2,273; 0,752; 5) —0,870; 1,584; 6) —0,625; 2,418. **67.** $\approx$ 21753 Н. **70.** 1) 36,07; 2) —0,018; 3) 19; 4) —0,001; 5) 2 100 000 000; 6) 43,27568; **71.** 1) 631; 2) 539; 3) —0,05362; 4) 0,03634; 5) 24,8832; 6) 236,7764; 7) 3472,128; 8) 0,00028158; 9) 480201,08; 10) 64; 11) 0,29922543; 12) 56,629834. **73.** 1) $(ab+c)\cdot(-d)$; 2) $(a+b)\,d:e$. **75.** 1) 9,600; 11,833; 7,555; —17,224; 2,175; 2) 16,957; 45,119; 605,903; 3,221; 0,017; 3) 0,200; 0,037; 1,449; 63,392; 0,000. **76.** 1) 25,3188; —275,4273; 2) —0,4539; 10998,151. **77.** 1) 30,3333; 0,9651; 2) 0,7761; 0,2114; 7,1767; 0,3297. **78.** 1) 1,0000; 0,7500; 0,5100; 0,1900; 0,0975; 0,0396; 0,0199; 2) 5,0000; 2,8750; 1,8570; 0,6710; 0,3426; 0,1388; 0,0697; 3) 2,7000; 0,4875; 0,2997; 0,1431; 0,0801; 0,0344; 0,0176. **79.** 1) 1,0000; 0,6424; 0,6217; 0,6146; 0,6110; 0,6088; 2) 1,3000; 1,6344; 1,7796; 1,8425; 1,8775; 1,8998; 3) 1,5452; 1,5448; 1,5443; 1,5439; 1,5435; 4) 5,0910; 5,0842; 5,0791; 5,0751. **80.** 12,527; 13,088. **81.** Вычитание. **82.** Деление, кроме деления на нуль. **89.** 1) $2-2i$; 2) 12; 3) $0{,}2-1{,}4i$; 4) $0{,}2+0{,}9i$; 5) $\frac{1}{6}-\frac{1}{4}i$; 6) $27+8i$; 7) $15-11i$; 8) $0{,}23-0{,}02i$; 9) $\frac{2}{5}-\frac{1}{30}i$; 10) $-5-12i$; 11) $-2i$; 12) 15; 13) $5+9i$; 14) $-4+20i$; 15) $-5+4i$; 16) 78; 17) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}i$. **90.** 1) $x=0$; $y=-2/3$; 2) $x=1$, $y=2$ или $x=2$, $y=2$; 3) $x=1$, $y=2$; 4) $x=2$, $y=1$; 5) $x=-4/11$, $y=5/11$; 6) $x=t$, $y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}t$, $t\in R$; 7) $x=4{,}5$; $y=18$; 8) $x=0$, $y=1$ или $x=1$, $y=0$; 9) $x=-1$, $y=-2$; 10) Нет таких действительных чисел. **92.** a^2+b^2; **93.** Например: 1) $(a+bi)(a-bi)$; 2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i)\times\times(\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i)$; 3) $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\,i)(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\,i)$; 4) $(3a+4bi)(3a-4bi)$; 5) $(6a+5bi)(6a-5bi)$; **94.** 1) $3m+2ni$; 2) $\sqrt{x}-i$; 3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i$. **95.** 1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; 2) $1-2i$; 3) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$; 4) $1{,}5+1{,}5i$; 5) $\frac{18}{13}-\frac{1}{13}i$;

6) $2i$; 7) $-i$; 8) $0{,}7+2{,}1i$; 9) $2-2i\sqrt{3}$. **96.** 1) $-\frac{21}{29}+\frac{20}{29}i$; 2) $-\frac{21}{29}-\frac{20}{29}i$. **101.** 1) 0; 2) i; 3) $-i$; 4) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$; 5) 0; 6) $-i$; 7) $-4/3$. Указание: $(1+i)^2=2i$; $(1-i)^2=-2i$. 8) -1; 9) 0. **102.** 1) $7+i$; 2) $5i$. **103.** $u=2i$, $v=3i$; 2) $u=-i$, $v=-4i$. **104.** 0; 1; $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **106.** $a=b$ или $a=-b$. **107.** $-2{,}5$; 2. **108.** 1) $\pm 4i$; 2) $\pm\sqrt{2}i$; 3) $\pm\sqrt{5/3}\,i$; 4) $\pm 0{,}3i$. **109.** 1) $1\pm 2i$, 2) $-\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{5}}{3}i$; 3) $4\pm 2i$; 4) $0{,}4\pm 1{,}2i$. **110.** 1) $x=3+6i$, $y=3-6i$; $x=3-6i$, $y=3+6i$; 2) $x=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{23}}{4}i$, $y=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{23}}{6}i$; $x=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{23}}{4}i$, $y=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{23}}{6}i$; 3) $x=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$, $y=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$; $x=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$, $y=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$. **113.** 1) $x^2-6x+13=0$; 2) $x^2+2x+17=0$. **114.** 1) $x^2-4x+5=0$; 2) $x^2+2x+1{,}25=0$; 3) $x^2-2\sqrt{5}x+7=0$; 4) $x^2-x+2{,}5=0$. **115.** 1) 2; $-1\pm\sqrt{3}i$; 2) -3; $1{,}5\pm 1{,}5\sqrt{3}i$; 3) ± 2; $\pm 2i$; 4) ± 3; $\pm 3i$. **116.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 2) $2+i$, $-2-i$. **120.** 1) $-2-3i$; 2) $2+3i$; 3) $2-3i$. **125.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. **127.** 1,5. **128.** 1) Окружность с радиусом 1 и центром в начале координат; 2) таких точек нет; 3) таких точек нет. **129.** 1) 3; $2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) 1; $\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) 5; $-\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) 2; $\pi+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 5) $\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}+2n\pi$; $n\in\mathbf{Z}$; 7) 2; $\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 8) 2; $\frac{5\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; 9) $\sqrt{1{,}5}$; $\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$. **131.** 1) $-\pi/6$ или $-5\pi/6$; 2) $\pi/4$ или $-\pi/4$; 3) $\pi/3$ или $-2\pi/3$; 4) $44°26'$ или $135°34'$. **133.** 1) -3; 2) $2i$; 3) $2\sqrt{3}+2i$. **134.** 1) 4; 2) 7; 3) 5; 4) $5\sqrt{2}$; 5) 8; 6) $\sqrt{2}$; 7) $\sqrt{5}$; 8) $2\sqrt{10}$. **136.** 1) $|z|<5$; 2) $|z|=5$; 3) $|z|>5$. **137.** 1) $|z|\leqslant 2$; $0\leqslant\arg z\leqslant\pi/2$; 2) $1\leqslant|z|\leqslant 2$; 3) $\pi/3<\arg z\leqslant 5\pi/6$. **138.** 1) $z=0$ или $z=bi$, $b\in\mathbf{R}$; 2) $z=2-1{,}5i$. **139.** 1) $3+0i=3e^{0i}$; 2) $0+\sqrt{2}\,i=\sqrt{2}\,e^{i\pi/2}$; 3) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2e^{i\pi/4}$; 4) $2-2\sqrt{3}\,i=4e^{-i\pi/3}$; 5) $-1+0i=e^{i\pi}$; 6) $0-\sqrt{3}\,i=\sqrt{3}\,e^{-i\pi/2}$; 8) $4{,}596+3{,}857i=6e^{i2\pi/9}$; 9) $0{,}913+0{,}407i=e^{i2\pi/15}$; 10) $2{,}5\sqrt{3}+2{,}5i=5e^{i\pi/6}$. **140.** 1) $2(\cos 0+i\sin 0)=2e^{i\cdot 0}$; 2) $3(\cos\pi+i\sin\pi)=3e^{i\pi}$; 3) $6(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))=6e^{i\pi/2}$; 4) $4(\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2))=4e^{-i\pi/2}$; 5) $\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))=\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}$; 6) $2(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6))=2e^{-i\pi/6}$;

7) $2\sqrt{2}(\cos(-3\pi/4)+i\sin(-3\pi/4))=2\sqrt{2}\,e^{-i3\pi/4}$; 8) $\approx 5(\cos 126°52'+$ $+i\sin 126°52')\approx 5e^{i\cdot 2{,}2143}$; 12) $\frac{1}{\cos 1}(\cos 1+i\sin 1)=\frac{1}{\cos 1}e^{i}$;

13) $2(\cos(-20°)+i\sin(-20°))=2e^{-i\pi/9}$; 14) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+$ $+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$; 15) $5(\cos(-140°)+i\sin(-140°))=$ $=5e^{-i\cdot 7\pi/9}$; 16) $2\cos(\alpha/2)(\cos(\alpha/2)+i\sin(\alpha/2))=2\cos(\alpha/2)\,e^{i\alpha/2}$.

141. 1) $3(\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3))=-1{,}5+1{,}5\sqrt{3}\,i$; 2) $4(\cos(-45°)+$ $+i\sin(-45°))=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$; 3) $\cos 1+i\sin 1\approx 0{,}54+0{,}84i$; 4) $\cos 0+i\sin 0=1$; 5) $2(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))=2i$; 6) $5(\cos(-\pi/2)+$ $+i\sin(-\pi/2))=-5i$; 7) $\sqrt{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt{2}$; 8) $3(\cos 2\pi+$ $+i\sin 2\pi)=3$; 9) $2e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2e^2$; 10) $6(\cos 1{,}5+i\sin 1{,}5)\approx$ $\approx 0{,}424+5{,}985i$; 11) $e^2(\cos(-1)+i\sin(-1))\approx 3{,}99-6{,}22i$; 12) $14(\cos(-34°)+i\sin(-34°))\approx 11{,}61-7{,}83i$; 13) $2e(\cos\pi+i\sin\pi)=$ $=-2e$. **144.** 1) $e^{\alpha}\cos\beta+ie^{\alpha}\sin\beta$; 2) $e^{\alpha}\cos\beta-ie^{\alpha}\sin\beta$; 3) $Ce^{\alpha}\cos\beta+iCe^{\alpha}\sin\beta$; 4) $(e^{\alpha_1}\cos\beta_1+e^{\alpha_2}\cos\beta_2)+i(e^{\alpha_1}\sin\beta_1+$ $+e^{\alpha_2}\sin\beta_2)$. **145.** 1) $-8i$; 2) $1{,}5\sqrt{3}+4{,}5i$; 3) $-1+i$; 4) $-20i$; 5) $\cos 5+i\sin 5$; 6) $3i$; 7) $2+2i\sqrt{3}$; 8) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-1{,}5i$.

146. 1) $\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$; 2) $\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(2\varphi-15°)+$ $+i\sin(2\varphi-15°))$; 4) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right)$; 5) $-\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$; 6) i. **147.** 1) $2i$; 2) $6-4i$; 3) $6-3i$.

148. 1) $-1296i$; 2) $-2^{11}-2^{11}\sqrt{3}\,i$; 3) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $2^{49}+2^{49}\sqrt{3}i$; 5) 1; 6) $-122+597i$; 7) $0{,}99+0{,}15i$; 8) $2^9(1-i\sqrt{3})$; 9) $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 10) $-64-64i$. **150.** 1) $\cos 50°+i\sin 50°$; $\cos 230°+i\sin 230°$; 2) ± 1; $\pm i$; 3) 2; $-1\pm\sqrt{3}i$; 4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 5) $-i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 6) $\sqrt[6]{2}(\cos 15°+i\sin 15°)$; $\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\sqrt[6]{2}(\cos 255°+i\sin 255°)$; 7) $\sqrt[4]{2}(\cos 75°+i\sin 75°)$; $\sqrt[4]{2}(\cos 165°+$ $+i\sin 165°)$; $\sqrt[4]{2}(\cos 255°+i\sin 255°)$; $\sqrt[4]{2}(\cos 345°+i\sin 345°)$; 8) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}(\cos(-5\pi/36)+i\sin(-5\pi/36))$; $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}(\cos(19\pi/36)+$ $+i\sin(19\pi/36))$; $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}(\cos(43\pi/36)+i\sin(43\pi/36))$. **151.** 1) $\cos(2k\pi/5)+$

$+i\sin(2k\pi/5)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$; 2) $\cos(\pi/10+2k\pi/5)+i\sin(\pi/10+2k\pi/5)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$; 3) $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i$; 4) $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) 1; $-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; $-1\pm i\sqrt{3}$; 2. **153.** 1) $6e^{i\pi}=6(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=$ $=-6$; 2) $4e^{i\pi/4}=4(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$; 3) $2e^{2i}=$ $=2(\cos 2+i\sin 2)\approx-0{,}832+1{,}819i$; 5) $2\sqrt{2}e^{2\pi i/3}=2\sqrt{2}(\cos(2\pi/3)+$ $+i\sin(2\pi/3))=-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$. **154.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 2) -1; $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; **155.** 1) $2e^{5\pi i/12}$; 2) $2e^{11\pi i/12}$; 3) $2^{-1}e^{-11\pi i/12}$; 4) 64; 5) -1; 6) 1/8; **156.** 1) -32; 2) -32. **157.** $\cos x+i\sin x$.

Глава 2. Метод координат

159. 4; 4. **160.** 1) 6; 2) 8; 3) 12; 4) 26; 5) 20; 6) 18. **164.** Указание: концы построенных направленных отрезков образуют фигуру, полученную из данной с помощью параллельного переноса. **165.** 1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{DA}$; 3) $\vec{0}$; 4) $\overrightarrow{CM}$. **166.** 1) 5 Н; 2) $\approx 9{,}71$ Н; 3) $\approx 30{,}8$ Н. **167.** $\approx 34^\circ$. **171.** 1) $\overrightarrow{OB}$; 2) $\overrightarrow{OC}$; 3) $\overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{BD}$. **172.** 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{AB}$; 3) $\vec{0}$. **173.** 1) $\overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{CC_1}$; 3) $\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{D_1B}$. **174.** 1) 7 Н; 2) $\approx 13{,}7$ Н. **176.** 1) 1; 2) -1; 3) $x<0$; 4) $x>0$; 5) $x\in R$. **177.** 1) -1; 2) -2; 3) $-1/2$; 4) 2. **178.** 1) $2\vec{F_1}$; 2) $(1-\sqrt{2})\vec{F_1}$; 3) $(1-\sqrt{3})\vec{F_1}$. **179.** Указание: докажите, что равенство $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$ справедливо тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BA}$. **180.** 1) 180°; 2) 0°; 3) 30°. **182.** 1) 2; 2) -2; 3) -2; 4) $-1/2$; 5) 0; 6) $-3/2$. **183.** Указание: раскройте скобки, пользуясь свойствами скалярного произведения. Воспользуйтесь тем, что $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$. **184.** 20. **185.** 1) -39; 2) 76; 3) $\sqrt{156}$; 4) 7; 5) $\sqrt{301}$; 6) -12. **186.** $\approx 65^\circ 12'$. **188.** 60°. **189.** 1) $\sqrt{2}$, $\approx 75^\circ 31'$; 2) 2, $\approx 69^\circ 18'$. **190.** 1) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$; $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})$; $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})$, $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$; 2) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$, $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$, $\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$, $\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$; 3) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$, $\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. **191.** 1) $\vec{a}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 3) $\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; 4) $\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; 5) $\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$; 6) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 7) $\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$; 8) $\vec{a}$. **192.** Указание: построение искомых векторов сводится

к построению треугольников по трем его элементам. **193.** 1) 6 Н; 2) $\approx 9{,}17$ Н. **194.** 1) ≈ 11 Н, $\approx 5{,}7$ Н; 2) $\approx 11{,}8$ Н; $\approx 10{,}2$ Н. **195.** 1) $\approx 14{,}4$ Н; $\approx 10{,}2$ Н; 2) $\approx 16{,}5$ Н; $\approx 18{,}5$ Н. **196.** Под углом $\alpha = 120°$ к направлению течения реки, $\approx 8{,}7$ км/ч; 2) под углом $\alpha \approx 146°$ к направлению течения реки, $\approx 3{,}3$ км/ч. **197.** 1) (1; 2), (—1; —2), (—1; 2); 2) (—3; 1); (3; —1); (3; 1). **199.** 1) $(a/\sqrt{2};\ 0)$; $(0;\ a/\sqrt{2})$; $(-a/\sqrt{2};\ 0)$; $(0;\ -a/\sqrt{2})$. **201.** Указание: воспользуйтесь тем, что данные точки симметричны относительно оси y.
203. 1) 45°; 45°; 2) 45°; 135°; 3) $\approx 56°19'$, $\approx 33°41'$; 4) $\approx 36°52'$, $\approx 126°52'$; 5) $\approx 54°44'$, $\approx 125°16'$, $\approx 54°44'$; 6) $\approx 65°54'$; $\approx 35°16'$, $\approx 114°6'$; 7) $\approx 143°18'$; $\approx 74°30'$, $\approx 57°41'$; 8) $\approx 54°44'$, $\approx 54°44'$, $\approx 54°44'$.
204. $\overrightarrow{OA}\,(3/2;\ 3\sqrt{3}/2)$, $\overrightarrow{OB}\,(3/2;\ -3\sqrt{3}/2)$, $\overrightarrow{OC}\,(-3\sqrt{2}/2;\ -3\sqrt{2}/2)$, $\overrightarrow{OD}\,(-3\sqrt{3}/2;\ 3/2)$. **205.** $\vec{a}\,(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$. **206.** 1) 60° или 120°. 2) 90°. **207.** 1) $\overrightarrow{OA}\,(-1;\ 2)$, $\overrightarrow{AB}\,(5;\ 3)$; $\overrightarrow{BD}\,(-2;\ 1)$; 2) $\overrightarrow{OB}\,(4;\ 5)$, $\overrightarrow{AC}\,(0;\ -5)$, $\overrightarrow{BC}\,(-5;\ -8)$. **208.** 1) (0; 1); 2) (—2; 0); 3) (—5; —3); 4) (—1; —1). **209.** 1) (1; 5; 2); 2) (5; 4; 0); 3) (6; 9; 0); 4) (—4; 1; 0); 5) (—1; —12; —6); 6) (—2; 4; 2); 7) (—3; —1; 2); 8) (4; —1; —6). **210.** 1) $\vec{0}$; 2) (0; 1; —1). **211.** 1) (3; —4; 0); 2) (—3/5; 4/5; 0); 3) (3/5; —4/5; 0). **212.** 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да. **213.** 1) 6; 2) 3,5; 3) 0; 4) 0; 5) —20; 6) 50; 7) 3; 8) 3. **214.** 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да; 6) нет. **215.** 1) 5; 2) $\sqrt{6}$; 3) 5; 4) $3\sqrt{2}$. **216.** 1) (21; 0); 2) (0; —3). **217.** 1) $\approx 2{,}23$ м/с, $\approx 26°34'$; 2) 5 м/с, $\approx 53°8'$. **218.** 1) 45°; 2) 45°; 3) $\approx 34°42'$; 4) $\approx 137°44'$; 5) $\approx 105°15'$; 6) 135°; 7) $\approx 40°2'$. **219.** 1) $\approx 5°54'$, $\approx 122°28'$, $\approx 49°24'$; 2) $\approx 48°11'$, $\approx 40°12'$, $\approx 80°24'$. **220.** 1) Да; 2) да. **221.** 1) Да; 2) да. **222.** 1) а) Да; б) нет; 2) (4; 1); а) да; б) да; 3) а) да; б) нет. **223.** 1) Параллелограмм; 2) квадрат. **224.** 1) $\approx 26{,}2$; $\approx 8°36'$; $\approx 14°15'$; $\approx 157°10'$; 2) $\approx 10{,}6$; 120°, 30°, 30°. **225.** 1) Равнобедренный, прямоугольный; 2) разносторонний, тупоугольный. **226.** 1) (5; —2; 3); 2) (4; 7; 4); 3) (6; 5; 5); 4) (4; 2; 6). **227.** 1) (4; 5); 2) (0; 2,5; 2); 3) (—3; 4); 4) (—0,5; —2,5; —1). **228.** 1) (16; 7); 2) (11; 11/3); (21; 31/3); 3) (6; 1/3), (11; 11/3), (16; 7), (21; 31/3), (26; 41/3). **229.** 1) (0; —2), (4; 0); 2) (0; 8), (6; 0). **230.** 1) (10; 9); 2) (4; —4). **231.** 1) (0, —2); 2) (1; 0); 3) (—1/3; 1/3); 4) (1; 2); 5) (—1; 2; 3); 6) (1; 2; 1). **232.** 1) (8; 2); 2) (28/3; 11/3); 3) (8,8; 3); 4) (9; 3,25). **233.** 1) (0; 3); 2) (2,4; 2,8).

234. $\left(\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3};\ \dfrac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$. **241.** 90°; $\approx 35°16'$. **242.** 1) C; 2) A; 3) B; 4) A, B; 5) никакая; 6) D; 7) A; 8) D. **243.** 1) а) (2; 1/2); б) (3; 1), (—1; —1); в) (—1; —1); 2) а) (2; 2); б) (1; 1), (—1; —1); в) все точки прямой; 3) а) все точки прямой; б) (2; 1), (2; —1); в) (2; 2); 4) а) (2; 0); б) таких точек нет; в) (0; 0); 5) а) (2; 0); б) $(\sqrt{3};\ 1)$, $(-\sqrt{3};\ 1)$,

$(\sqrt{3};\ -1)$, $(-\sqrt{3};\ -1)$; в) $(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; 6) а) $(2;\ 1)$; б) $(2;\ 1)$, $(-2;\ 1)$; в) $(0;\ 0)$, $(4;\ 4)$; 7) а) $(2;\ 1)$; б) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$; в) $(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; 8) а) $(2;\ 2)$, $(2;\ -2)$; б) $(1;\ 1)$, $(-1;\ 1)$, $(1;\ -1)$, $(-1;\ -1)$; в) все точки прямой $x-y=0$. **247.** 1) $4x-4y+5=0$; 2) $x^2+y^2=5$; 3) $2x-y+5=0$; 4) $x^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=4/9$; 5) $x=-1$; 6) $y^2=1$; 7) $y=\frac{1}{8}x^2$. **249.** 1) B; 2) A, C; 3) C; 4) D. **252.** 1) 160 м и 640 м; 2) 80 м и ≈ 554 м; 3) 240 м и ≈ 554 м. **253.** 1) $x=3-2t$, $y=-2+3t$; 2) $x=3-t$, $y=-2+2t$. **254.** $x=2+t$, $y=4+2t$. **255.** Указание: выберите систему координат с центром в вершине прямого угла и осями, совпадающими со сторонами угла. В качестве параметра можно взять угол, образованный отрезком с одной из сторон угла. **257.** 1) 4; 2) 9; 3) 40; 4) 36; 5) 32. **258.** 1) 2/3; 2) $\sqrt{3}/3$; 3) -2; 4) 2/3; 5) 0; 6) $-2{,}5$. **259.** 1) $\approx 26°34'$; 2) $\approx 63°26'$; 3) $\approx 106°42'$. **260.** 1) $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$; 2) $x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$, $x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$, $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$, $x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$. **261.** 1) -2; 2) -3 и 3. **262.** 1) $y+2=0$; 2) $x+y+1=0$; 3) $x=1$; 4) $3x-2y-7=0$; 5) $x+y+1=0$; 6) $3x-2y-7=0$; 7) $x-y-3=0$; 8) $2x-y-4=0$; 9) $x+3y+5=0$; 10) $5x+y-3=0$ или $x-y-3=0$. **263.** 1) $x-y+1=0$; 2) $x-5y-7=0$; 3) $3x+y-5=0$; 4) $x-y=0$; 5) $3x+y+11=0$; 6) $x-3y-3=0$; 7) $x+3y+1=0$; 8) $5x+y+5=0$. **264.** 1) $x+y-3=0$; 2) $x-y-2=0$; 3) $x+3=0$; 4) $18x+7y+12=0$; 5) $4x-7y-23=0$; 6) $8x-14y+31=0$. **265.** 1) $\approx 26°34'$, $63°26'$; 2) $\sqrt{45}$; 3) $x+2y+6=0$; 4) $x+2y-6=0$; 5) $x-2y-6=0$; 6) $2x+y+12=0$. **266.** 1) $x-2y-4=0$. **267.** $(2;\ 0)$. **268.** $(1;\ 8)$. **269.** $45°$. **270.** 1) $(2;\ -1)$; 2) $(-3;\ 2)$; 3) $(-5;\ -4)$; 4) $(-9;\ -10)$. **271.** 1) 6; 2) 3,75; 3) 3,25; 4) 3,5. **272.** 1) $\approx 17{,}25$; 2) $\approx 13{,}48$. **273.** 1) $(-15/26;\ -5/26)$; 2) $(-2;\ 1)$. **274.** 1) $m \neq 4$; 2) $m \neq -1{,}5$; 3) $m \neq 2$. **275.** 1) 0,5 и $-0{,}65$; 2) 2/3 и 16/3. **277.** 1) 2; 2) 3; -3; 3) $-2{,}5$. **278.** 1) -2; 2) 2; -2; 3) -9. **279.** 1) 4; 2) ни при каком значении p; 3) 2; -2. **280.** 1) $a=-1/2$, $c=-1$; 2) $a=-2$; $c \in \boldsymbol{R}$, 3) $a=-1/3$, $c \in \boldsymbol{R}$; 4) $a \neq -2/3$, $c \in \boldsymbol{R}$. **281.** 1) $(3;\ 5)$; 2) не имеют; 3) $(7;\ 9)$; 4) не имеют. **282.** 1) 3; 2) 4/17. **283.** 1) $\approx 74°44'$; 2) $90°$; 3) $\approx 71°34'$; 4) $\approx 29°43'$. **284.** 1) $90°$, $45°$, $45°$; 2) $90°$, $53°8'$, $36°52'$; 3) $90°$, $56°19'$, $33°41'$. **285.** 1) $(4;\ 3)$, $(-3;\ -4)$; 2) $(\approx 5{,}39;\ \approx 4{,}39)$, $(\approx -1{,}39;\ \approx -2{,}39)$. **286.** $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$. **287.** $(-1{,}6;\ -1{,}2)$. **288.** $(-1;\ -2)$. **289.** 1) $(0;\ 1)$, $x=0$; 2) $(-1;\ 2)$, $x=-1$; 3) $(2;\ 1)$, $x=2$; 4) $(1/4;\ 7/8)$, $x=1/4$. **292.** 1) $(1;\ 1)$; 2) $(0;\ -1)$. $(-1;\ -3)$; 3) $(4;\ 7)$, $(1;\ 1)$. **293.** 1) $k \in \boldsymbol{R}$; 2) $|k| < 4$. **294.** 1) $y=(x-2)^2+1$; 2) $y=-2(x-4)^2+3$. **295.** $\approx 0{,}36$ м. **296.** 3 м. **297.** 1) A; 2) A, B; 3) A, C. **298.** 1) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2=18$; 3) $x^2+y^2=4$; 4) $(x+3)^2+(y-2)^2=4$; 5) $(x-5)^2+$

$+(y+4)^2=5$; 6) $(x+3)^2+(y+3)^2=9$; 7) $(x-5)^2+(y-2)^2=25$. **299.** 1) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$; 2) $(x+1)^2+(y+2)^2=1$; 3) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$; 4) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$. **300.** 1) Пересекаются; 2) касаются; 3), 4) — не имеют общих точек. **301.** У к а з а н и е: представьте уравнение в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2.$$

302. 1) $(2;\ \sqrt{3})$, $(2;\ -\sqrt{3})$; 2) $(4;\ 0)$, $(-4;\ 0)$; $(0;\ 2)$, $(0;\ -2)$, 3) $(-2;\ \sqrt{3})$; $(-2;\ -\sqrt{3})$; 4) $(2;\ \sqrt{3})$, $(2;\ -\sqrt{3})$, $(-2;\ \sqrt{3})$; $(-2;\ -\sqrt{3})$; 5) $(0;\ 2)$, $(0;\ -2)$; 6) $(2\sqrt{3};\ 1)$; $(-2\sqrt{3};\ 1)$, $(0;\ -2)$. **303.** 1) 20; 2) $8\sqrt{2}$. **306.** $(-2;\ -3)$, $(2;\ 3)$, $(-2;\ 3)$. **307.** 1) 5 и 2; 2) 1/3 и 1/4; 3) 1/5 и 1/4. **308.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **310.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; **311.** 1) 4; 2) 5. **314.** 1) Окружность радиусом 5; 2) эллипс с полуосями 5 и 3. **315.** 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 2) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$. **316.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **317.** См. указание к задаче 255. **319.** 1) $(15;\ 8\sqrt{2})$, $(15;\ -8\sqrt{2})$; 2) $(5;\ 0)$, $(-5;\ 0)$. **322.** 1) $\approx 67°23'$; 2) 24. **323.** 1) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. **324.** 1) $x^2-y^2=4$; 2) $x^2-y^2=20$.

Г л а в а 3. Производная и ее приложения

327. $y=\sin(\pi t/4)$ м. **330.** 1) $]-\infty;\ -1/7[\cup]-1/7;\ +\infty[$; 2) $]-\infty;-2[\cup]-2;\ 7[\cup]7;\ +\infty[$; 3) $]-\infty;+\infty[$; 6) $]-\infty;\ -4[\cup]-4;4^\circ[\cup]4;\ +\infty[$. **331.** 1) $]-\infty;0]$; 2) $[1;\ 3]$; 3) $]-3;\ 1]$; 4) $\varnothing$; 5) $[-3;\ 3]$; 6) $]-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty[$. **332.** 1) $\varnothing$; 2) $[-2;\ 1[$; 3) $[-9;\ -5[\cup]-5;\ 1{,}2[\cup]1{,}2;\ +\infty[$; 4) $[0;\ 25[\cup]25;\ +\infty[$; 5) $]-\infty;\ -5[\cup]-5;\ 1]\cup[6;\ +\infty[$; 6) $[-9;\ -8[\cup]-8;\ 10[\cup]10;\ +\infty[$. **333.** 1) $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$; 2) $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ +\infty[$; 3) $[-1;\ 1]$. **334.** 1) $]-\infty;\ 4[$; 2) $]0;\ 0{,}001[\cup]0{,}001;\ +\infty[$; 3) $]-\infty;\ 0[\cup]2{,}5;\ +\infty[$; 4) $[1;\ 3[\cup]4;\ +\infty[$; 5) $]1;\ 2]$. **335.** 1) $x\neq(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; 4) $x\neq k\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$; 5) $]-\infty;\ \infty[$; 6) $x\neq(2k+1)\pi,\ k\in Z$. **337.** 1) $[1/3;\ 1]$; 2) $]-\infty;\ -1[$; 3) $[1;\ 2]$; 4) $]-\infty;\ 4]$; 5) $[0;\ 4]$; 6) $[\sqrt{2}/2;\ 1]$. **349.** 1) $T=2\pi/3$; 2) $T=\pi$; 5) $T=2\pi$; 6) $T=\pi$; 7) $T=2\pi/3$; 8) $T=2\pi$; 9) $T=\pi$; 10) $T=2\pi$. **351.** 2) $y=(1-2x)^2$; $y=1-2x^2$, $y=x^4$, $y=4x-1$; 3) $y=10^{2x}$, $y=10^{x^2}$, $y=x^4$, $y=10^{10^x}$; 4) $y=\sqrt{\sin x}$, $y=\sin\sqrt{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$, $y=\sin(\sin x)$. **359.** 1) Один; 2) два; 3) один; 5) бесконечно много; 6) один; 8) ни одного; 9) один; 10) два; 12) один.

360. 1) При $a\leqslant 0$ не имеет решений, при $a>0$ — два решения;

3) при $|a|<1$ не имеет решений; при $|a|\geqslant 1$ — бесконечно мно... решений.

363. 1) $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2; \\ 4 & \text{при } 2<x\leqslant 4 \end{cases}$

2) $S(x)=\begin{cases} x^2/2 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 4x-6 & \text{при } 2<x\leqslant 4. \end{cases}$

364. 2) $x=0$ — точка разрыва; 3) $x=1$ — точка разрыва; 6) $x=-2$, $x=1{,}5$ — точки разрыва; 8) $x=\pm 10$ — точки разрыва; 11) $x=(2k+1)\pi$, $k\in \boldsymbol{Z}$ — точки разрыва; 12) $x=-1$ — точка разрыва.

365. 2) 2; 3) 2^{11}; 4) 1; 5) 1; 6) 0; 7) $-0{,}5$; 8) $-3/4$; 9) 0,5; 10) 1; 11) 3; 12) 0,6; 13) 1; 14) 1/6; 15) 4; 16) 0; 17) $\sqrt{2}$; 18) 2. **366.** 1) 1; 2) 1/3; 3) -6; 4) 2. **369.** 1) $]-\infty; -1[\cup]2; 5[$; 2) $[-1/2; 0]\cup[1/2; +\infty[$; 3) $]-\infty; -7]\cup[-2/3; 1]$; 4) $]-1; +\infty[$; 5) $]-\infty; 0[\cup\{1\}$; 6) $]-\infty; -3[\cup]-2; +\infty[$; 7) $]-2; 1[\cup]2; +\infty[$; 8) $]-\infty; -1[\cup]-1; 0]\cup]1/3; 1]$; 9) $]0{,}2; 2]$; 10) $]2{,}5; 3[\cup]4; +\infty[$; 11) $]-\infty;-3]\cup[5; +\infty[\cup\{1\}$; 12) $[-1; 0[\cup]0; 1/3]$; 13) $[0; 1[\cup]4; +\infty[$; 14) $[-46; 3[$; 15) $]-4; -3]\cup[4; +\infty[$; 16) $]5; 8]$; 17) $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$. **374.** 1) 3; 2) 0,5; 3) 0; 4) 0,5; 5) 3; 6) $-5/4$; 7) 0; 8) -1; 9) 10. **375.** 1) 5; 2) 1; 3) 1; 4) 2; 5) 0; 6) 0; 7) 1,25; 0. **376.** 2) $-\operatorname{tg}^2 x$; 3) 2,5; 4) $\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}+(\sqrt{2})^{x-2}\ln 2$; 5) $e+2$; 7) $\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$; 8) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 9) $\cos x-\sin x$; 10) $3\ln(2/3)$. **377.** 3) 9/16; 5) $\dfrac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)$; 6) $\dfrac{x-2\operatorname{arctg} x}{x^3}$; 8) $\dfrac{1+10\ln^2 10}{\ln 10}$; 9) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}+\dfrac{\ln x}{\cos^2 x}\right)$.
378. 3) $-7/169$; 4) $\dfrac{1{,}5\,(0{,}1+6x^2)}{\sqrt{x}\,(0{,}1-2x^2)^2}$; 5) 0; 6) $2^{x-1}\dfrac{(x+1)\ln 2-1}{(x+1)^2}$; 7) 6; 8) $-2/\pi$; 9) $\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$; 10) $-e^{-3}$. **379.** 3) $-\sin 2x$; 4) $-\dfrac{4{,}5}{\sqrt{x}}(1-3\sqrt{x})^2$; 7) $\dfrac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$; 8) $\dfrac{1}{2|x+1|\sqrt{x(x+1)}}$; 9) $\dfrac{1}{2x\sqrt{1{,}5+\ln x}}$; 13) $\dfrac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$; 14) $-\dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{\sin x}}$; 17) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}+\sqrt{xe^x}}{2\sqrt{x}}$; 18) $\dfrac{2\ln 10}{(x+1)^2}\cdot 10^{(x-1)/(x+1)}$; 20) $-1/\left(\sqrt[3]{x^2}-3x\right)\ln 10$; 21) $\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$; 24) $-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$; 27) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+2x+2\sqrt{x})}$.
380. 1) $\cos x\,(1-3\sin^2 x)$; 3) $x(x-2)/(x-1)^2$; 4) $-1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 5) $\dfrac{e^{x/(x+1)}}{(x+1)^2}$; 6) $8/(3x+1)(x+3)$; 7) $-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; 8) $\dfrac{1}{2}(\sin x+2\cos x)$; 9) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x\ln 10}-1\right)$. **382.** 1) 9 м/с; 2) 6 м/с; 3 м/с; 3) 8,75 м.

383. 12 м/с. **384.** 1) $3\sqrt{3}/2$ м/с, $3\sqrt{2}/2$ м/с, -3 м/с; 2) $(2k+1)/2$ с, где $k \in \mathbf{Z}$. **386.** 2) 8/3 с, 8 с; 3) 108 Дж. **387.** 1) $4 \leqslant t \leqslant 6$, $2 \leqslant t \leqslant 3$; 2) 3 м/с, 1 м/с, 2 м/с; 3) 2 м/с, 1 м/с, 1,5 м/с. **391.** 1) $2x+y+15=0$; 2) $4x+y+16=0$; 3) $6x+y+19=0$, $6x-y-31=0$; 4) $8x-y-40=0$; $8x+y+24=0$; 5) $6x-y-31=0$, $10x+y+31=0$. **393.** 1) (3; 5/3), (1; 3); 2) (0; 5/3), (4; 3); 3) (—1; —11/3); (5; 25/3). **396.** 1) $-\frac{dx}{4}$; 2) $(2\cos x - x\sin x)\,dx$; 4) $\operatorname{ctg} x\,dx$; 6) $\frac{x^2+1}{x^2}\ln 2\cdot e^{x-1/x}\,dx$; 7) dx, $-dx$; 8) $2\,dx$, $0{,}5\,dx$. **397.** 1) 1,09; 2) —0,04; 3) 0,506; 4) 0,9925; 5) 0,036; 6) 0,030. **398.** 1) 1,25; 2) 79,596; 3) 0,983; 4) 2,00025; 5) 60,175; 7) 0,0175; 10) 0,517; 11) —0,02; 12) 1,003; 13) 0,25; 14) 26,838; 17) 1,05; 18) 1,070. **399.** 1) 0,24; 2) —0,24. **400.** 1) 0,36 м; 2) 0,216 м/с. **401.** 0,03 см^2.

403. 184 г. **404.** 0,00873. **405.** 0,07. **408.** 1) —28; 2) $-1/(4x\sqrt{x})$; 3) 0,064; 5) $9e^{-2}$; 6) $-\frac{25}{3(5x+2)^2}$; 7) $\frac{\cos x}{2}$; 10) 4. **411.** 1) 0,18 Н; 2) —0,075 Н. **417.** 2) Возрастает на $]-\infty; 1/2[\,\cup\,]1; +\infty[$, убывает на $]1/2; 1[$, $x=1/2$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума; 3) возрастает на $]-\infty; -1[\,\cup\,]3; +\infty[$, убывает на $]-1; 3[$, $x=-1$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума; 4) убывает на $]-\infty; -3[\,\cup\,]-1; 0[$, возрастает на $]-3; -1[\,\cup\,]0; +\infty[$, $x=-3$, $x=0$ точки минимума, $x=-1$ — точка максимума; 5) убывает на $]-\infty; 1[$, возрастает на $]1; +\infty[$, $x=1$ — точка минимума; 7) убывает на $]-\infty; -1[$, возрастает на $]-1; +\infty[$, $x=-1$ — точка минимума; 8) убывает на $]-\infty; 1/2[$, возрастает на $]1/2; +\infty[$, $x=1/2$ — точка минимума; 10) возрастает на $]0; \pi/4[$, убывает на $]\pi/4; \pi[$, $x=\pi/4$ — точка максимума; 12) возрастает на $]-\infty; -1[\,\cup\,]1; +\infty[$, убывает на $]-1; 0[\,\cup\,]0; 1[$, $x=-1$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума; 13) возрастает на $]-\infty; 3[$; 14) возрастает на $]-1; 0[$, убывает на $]0; +1[$, $x=1$ — точка максимума; 15) убывает на $]-\infty; -1[$, возрастает на $]1; +\infty[$; 17) убывает на $]0; e[$, возрастает на $]e; +\infty[$, $x=e$ — точка минимума; 18) возрастает на $]0; +\infty[$. **418.** 1) $|a| \leqslant 1$; 2) ни при каком a. **419.** При $a=1$ в точке $x=1$ функция имеет минимум. **422.** 2) Выпукл вверх на $]-\infty; 1[$, выпукл вниз на $]1; +\infty[$, $x=1$ — абсцисса точки перегиба; 3) выпукл вверх на $]-\infty; 2[$, выпукл вниз на $]2; +\infty[$, $x=2$ — абсцисса точки перегиба; 4) выпукл вниз на $]-\infty; -3[\,\cup\,]2; +\infty[$, выпукл вниз на $]-3; 2[$, $x=-3$, $x=2$ — абсциссы точек перегиба; 5) выпукл вверх на $]-\infty; -1[$; выпукл вниз на $]-1; +\infty[$, $x=-1$ — абсцисса точки перегиба; 6) выпукл вверх на $]-\infty; -\sqrt{3}[\,\cup\,]0; \sqrt{3}[$, выпукл вниз на $]-\sqrt{3}; 0[\,\cup\,]\sqrt{3}; +\infty[$, $x=\pm\sqrt{3}$, $x=0$ — абсциссы точек перегиба; 7) выпукл вниз на $]-\infty; 0[\,\cup\,]1; +\infty[$; выпукл вверх на $]0; 1[$, $x=0$, $x=1$ — абсциссы точек перегиба; 8) выпукл вверх на $]-\infty; 0[$, выпукл вниз на $]0; +\infty[$; 9) выпукл вверх на $]0;\ +\infty[$; 10) выпукл вверх на $]-\infty;\ 0[$, выпукл вниз на $]0;\ +\infty[$, $x=0$ — абсцисса точки перегиба; 11) выпукл вверх на $]0;\ e^{-3/2}[$, выпукл вниз на $]e^{-3/2};\ +\infty[$, $x=e^{-3/2}$ — абсциссы точки перегиба; 12) выпукл вниз на $]0;\ 2[$, выпукл вверх на $]2;\ +\infty[$, $x=2$ — абсцисса точки перегиба. **423.** $|a|\leqslant 2$. **433.** 1) Один; 2) два; 3) два.

436. 1) $\max\limits_{[0,\,1]} f(x)=f(1)=1$, $\min\limits_{[0,\,1]} f(x)=f(0)=-1$; 2) $\max\limits_{]0;\,1]} f(x)=f(1)=1$; 3) $\max\limits_{[1;\,4]} f(x)=f(1)=3$, $\min\limits_{[1;\,4]} f(x)=f(3)=-1$; 5) $\min\limits_{]1;\,+\infty[} f(x)=f(3)=-1$; 6) $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(-2/3)=88/9$; $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(2/3)=56/9$; 7) $\max\limits_{[0;\,1]} f(x)=f(1)=8$, $\min\limits_{[0;\,1]} f(x)=f(0)=1$; 8) $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x)=f(-2)=17$, $\min\limits_{[-2;\,1]} f(x)=f(-1)=0$; 9) $\min\limits_{]-\infty;\,+\infty[} f(x)=f(-1)=0$; 15) $\max\limits_{[-2;\,2]} f(x)=f(-1)=1/3$, $\min\limits_{[-2;\,2]} f(x)=f(1)=-1$; 16) $\max\limits_{[e^{-1};\,e]} f(x)=f(e)=0$; $\min\limits_{[e^{-1};\,e]} f(x)=f(1)=-1$; 18) $\min\limits_{[-2;\,+\infty[} f(x)=f(-1)=-1$.

438. 1) $\max\limits_{[0;\,1]} |x(t)|=17/3$ м, $\min\limits_{[0;\,1]} |x(t)|=0$; 2) $\max\limits_{[0;\,2]} v(t)=9$ м/с, $\min\limits_{[0;\,2]} v(t)=5$ м/с, $\max\limits_{[0;\,5]} v(t)=9$ м/с, $\min\limits_{[0;\,5]} v(t)=0$; 3) $\max\limits_{[1;\,2]} x''(t)=2$ м/с^2, $\min\limits_{[1;\,2]} x''(t)=0$. **439.** 1. **440.** 2×2 м. **441.** 18; 90; 54. **444.** 60°. **445.** $r_1=r_2=R/2$. **446.** Отрезок разрезать пополам. **447.** 1) $2y+x-6=0$; 2) $4y+x-8=0$.

Глава 4. Интеграл и его приложения

449. 1) Да; 3) нет; 5) да; 6) да. **451.** 3) $t+\frac{1}{5}\ln|t|-\frac{3}{2t}+C$; 7) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{5^t}{\ln 5}+\frac{t^2}{2}\right)+C$; 8) $\frac{y^6}{6}+2y^4+\ln|y|+C$; 9) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+\ln|x|+C$; 10) $6^x/\ln 6+C$; 11) $\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{1}{2^x\ln 2}+C$; 14) $\frac{x^2}{2}-x+C$; 16) $-\frac{x^3}{3}-x^2-4x+C$; 17) $\frac{1}{6}(e^x+2x)+C$; 18) $\sqrt{x}/2+C$; 19) $\sin\theta-\cos\theta+C$; 20) $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$; 21) $\frac{1}{4}(\varphi-\sin\varphi)+C$. Указание: перейдите к тригонометрическим функциям двойного аргумента: 22) $\operatorname{tg}x-x+C$; 23) $-\frac{1}{2}\cos t+C$; 24) $-(\cos x)/2+C$; 25) $x-\cos x+C$; 26) $(\operatorname{tg}\psi)/2+C$; 27) $\sin x-x+C$. Указание: разложите на множители числитель. **452.** 1) $(x+4)^9/9+C$; 3) $\frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t-1}+C$; 4) $\frac{1}{4}\ln|4x+1|+C$; 5) $\frac{1}{495(2-5y)^{99}}+C$;

6) $-4\sqrt{1-\frac{x}{2}}+C$; 8) $-2\cos\frac{2x-1}{4}+C$; 9) $4e^{(x-1)/2}+C$; 10) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+C$; 11) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(u/2)+C$; 12) $-\frac{1}{7}\operatorname{tg}(3-x)+C$; 13) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}y+C$; 15) $-\frac{1}{12}\cos 6\varphi+C$; 16) $x-\frac{1}{4}\cos 4x+C$; 17) $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{12}\cos 6x+C$. Указание: преобразуйте произведение тригонометрических функций в сумму; 18) $3\left(\cos(x/6)-\frac{1}{5}\cos(5x/6)\right)+C$; 19) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. Указание: перейдите к тригонометрическим функциям двойного аргумента. **453.** 1) 2; 2) $2x+9{,}8$; 5) $((x+1)^4-1)/256$; 6) $9-4\cos((x+\pi)/4)$; 7) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}$; 8) $e^x-\cos x+\sqrt{2}$. **454.** 1) $y=1$; 2) $y=x-1$; 3) $y=\frac{x^2}{2}-1$; 4) $y=(x^3-5)/3$. **457.** t^2 м, $\left(\frac{10}{3}t^2+10t\right)$ м, $(30t-3t^2)$ м. **459.** $0{,}3t^2$ м. **460.** 1) $(0{,}75t^2+3)$ м/с; 2) $(0{,}25t^3+3t+2{,}75)$ м.

461. $v(t)=\begin{cases}(\sqrt{t+1}-1)/2 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 3,\\ 1/2 & \text{при } t>3.\end{cases}$

462. 1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+C$; 2) $\frac{1}{9}(3y^2+1)\sqrt{3y^2+1}+C$; 3) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; 5) $\frac{2}{3}\sin\varphi\sqrt{\sin\varphi}+C$; 7) $-\ln|\cos\theta|+C$; 8) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\operatorname{tg}x+C$; 10) $4\cos x(\cos^2 x-3)/3+C$. Указание: $\sin^3 x=(1-\cos^2 x)\sin x$; 11) $(1+e^t)^{21}/21+C$; 13) $\frac{2}{3}\ln y\sqrt{\ln y}+C$; 14) $\frac{2}{3}\ln^3 x+3\ln x+C$; 15) $(\operatorname{arctg}^2 u)/2+C$. **463.** 1) $\frac{(2x+1)^{3/2}(3x-1)}{15}+C$; 2) $\frac{-(1-x)^{3/2}(15x^2+54x+71)}{210}+C$; 3) $\frac{4}{15}(3x+2)^{5/3}+\frac{1}{6}(3x+2)^{2/3}+C$; 4) $\frac{4x-5}{4(5-2x)^2}+C$; 6) $(\sqrt{x}-1)^2+2\ln(1+\sqrt{x})+C$. **464.** 1) $\frac{4{,}5}{3-2x}+C$; 2) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(t/\sqrt{2})+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{\sqrt{5}}+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln|x^2+10x+30|+C$; 5) $-\frac{1}{3}(5-4x-x^2)^{3/2}+C$; 6) $-2\cos x+C$; 8) $\frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C$; 10) $\frac{11}{8}\psi+\frac{9}{32}\sin 4\psi-\frac{3}{4}\sin 2\psi+C$; 11) $\sin x+\cos x+\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{2}{3}\cos^3 x+C$; 12) $\frac{3}{8}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{32}\sin 4\theta+C$;

13) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin(4x+2)+C$; 14) $2(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})+C$; 15) $-\operatorname{arctg}(\cos y)+C$; 17) $\operatorname{arctg}(e^x)+C$; 18) $\frac{4}{3}\left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{3/2}+C$; 20) $-\frac{3}{7}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{4/3}(2x+3)+C$; 21) $\frac{8}{49}\frac{7x+4}{\sqrt{7x+2}}+C$; 22) $z+$ $+\ln|z+1|+C$; 23) $\frac{1}{9}(3x-2\ln|3x+2|)+C$. **465.** 1) $2t-$ $-4\ln|t+2|+C$; 2) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$. Указание: представьте числитель как $1=\frac{1}{5}((x+2)-(x-3))$; 3) $\frac{1}{7}\ln|(u/u+7)|+C$; 5) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$; 6) $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{15}}+C$. **466.** 5) 1/2; 8) 1. **467.** 1) —69/64; 2) 2,625; 3) $3\sqrt[3]{2}-4$; 4) 2/3; 5) 4,5; 6) 1; 7) —1; 9) 3/8; 10) 1; 11) $\pi/2$; 12) —1/2; 14) $\frac{8}{3\ln 3}-\frac{3}{2\ln 2}$; 15) $1+e-1/e$. **468.** 1) 13/6; 2) 1; 3) 2; 4) 2; 5) 4. **469.** 1) >0; 2) >0; 3) <0; 4) <0; 5) >0. Указание: установите знак подынтегральной функции на промежутке интегрирования. **472.** 1) 0,1; 2) 1; 3) $\ln(3/4)$; 4) $e-1$; 5) $2^{-5/2}$; 6) $-\pi/60$. **473.** 1) $\pi/12$; 2) 2/3; 3) $(e-1)^{11}/11$. **474.** 1) 3/4; 2) 8/3; 3) —2/3; 4) $(\ln 2)/2$; 5) $(8-\sqrt{3})/3$. **475.** 1) $\frac{1}{2}+$ $+\frac{\ln 4}{3}$; 2) $2(1+2\ln(2/3))$; 3) 14/45. **476.** 1) 17/9800; 2) 1/2; 3) $-(\ln 3)/6$; 4) $\sqrt{3}-1$; 6) 14/207; 7) 11,2; 8) 78,1; 9) $2\pi/9$; 10) $\pi/4$; 11) $2/\sqrt{3}$; 12) —8/15; 13) $1/\sqrt{3}$; 14) 1/2; 15) 11; 16) $2(1-\ln 2)$; 17) 2; 18) 0. **477.** 1) 32/3; 2) 6; 4) 1; 8) 1/2. **478.** 2) 2; 3) 1; 4) 131/12; 5) 17/15; 6) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{24}$. **480.** 1) 4,5; 3) 71/3; 5) $8+2\sqrt{2}$; 6) 8. **482.** 1) 52/3; 2) 4/3; 4) $e-1/e$. **483.** 1) 8; 2) 12; 4) $e+1/e$; 5) 4,5; 6) 4; 7) 64/3; 8) $\pi-2$; 9) $\pi^2/2-2$; 10) 10/3. **484.** 1) $\frac{2}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 2}$; 2) $\sqrt{2}/3$; 3) 4/3; 4) 8; 5) 14; 6) 9; 7) 7/3; 8) $2-\sqrt{2}$; 9) $2\sqrt{2}$; 10) 7/6. **485.** 1/3. **486.** $e-2{,}5$. **487.** ln 3. **488.** ln 3—0,5. **489.** 1) $\pi/4$; 3) 0. **490.** 4/3. **491.** 0. **492.** 1. **493.** 0,4 м². **494.** ≈ 624 кг. **495.** 1) ≈1,13, ≈17%; 2) ≈1,22; ≈9,3%; 3) ≈1,27, ≈4,7%. **496.** 11,8 м². **497.** 1) 149,69; ≈0,21%, 150,63; ≈0,42%; 2) 0,502; ≈0,4%, 0,495; ≈1% **500.** 2) 0,80534; 0,80433; 0,80415. **501.** 1) 9 м; 2) 11/3 м; 3) 32/3 м; 4) 8/3 м/с; 5) 0; 6) 64/3 м. **502.** 1) ≈1995 м; 2) ≈1980 м; 3) ≈20 с. **503.** ≈13,25 м. **504.** 50 м. **505.** 300 рад/с, 500 рад. **506.** 1) 0; 2) 4 м. **507.** ≈0,59 Дж. **508.** 0,625 Дж. **509.** 0,09 м. **510.** $\approx 6{,}6\cdot 10^2$ Дж. **512.** $\approx 1{,}9\cdot 10^6$ Н.

513. 1) $\approx 1{,}5\cdot 10^4$ Н; 2) $\approx 5\cdot 10^3$ Н. **514.** 1) $\approx 0{,}24$ Н; 2) $\approx 0{,}55$ Н; 3) $\approx 0{,}12$ Н; 4) $\approx 0{,}12$ Н. **515.** ≈ 23 Н.

516. $\approx 0{,}602$ кг. **517.** ≈ 508 Дж.

Глава 5. Дифференциальные уравнения

518. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) да; 6) да. **519.** 1) 2; 2) 6; 3) 1; 4) —1; 5) 3; 6) —1. **520.** Указание: продифференцируйте функцию и исключите константу C из производной (если она в ней содержится). **521.** 1) 2; 2) —2; 3) 3; 4) —1. **522.** Указание: сравните угловые коэффициенты касательных в указанных точках.

523. 1) $3x+C$; 2) $x^2/2+C$; 3) $-2x^2+C$; 4) $-\frac{3}{2}x^2+2x+C$; 5) $x^{2/3}+C$; 6) $\frac{1}{2}t^4+\frac{3}{2}t^2+5t+C$; 7) $\ln|t+1|+C$; 8) $4\sin t+C$; 9) $\frac{1}{2}x^2-\cos x+C$; 10) $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$; 11) $\frac{1}{4}x^2-\ln|\cos x|+C$; 12) C; 13) $2k\pi x+C$, $k\in\mathbf{Z}$. **525.** 1) x^3+x^2+x+1; 2) $-2/x^2+4$; 3) $-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{17}{18}$; 4) $\frac{2}{3}e^{3x/2}+x-8/3$; 5) $2t^4-\frac{1}{9}t^3+3t+3$; 6) $-2t-1$. **527.** 1) $\frac{4}{3}x^3+4x^2-\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{2}{x+1}+6$; 3) $\sqrt{(2x-1)^3}+4$; 4) $-\cos(x-1)+6$; 5) $-\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3}+5$. **528.** 1) $2t^2-2$; 2) t^3+t; 3) $18t-\frac{2}{3}t^3-24$ или $18t-\frac{2}{3}t^2-48$. **529.** Да; e^{kx}; $\frac{1}{4}\ln 6$. **530.** 1) $v'=-kv$, $k>0$; 2) $m'=km$, $k>0$; 3) $Q'=-kQ$, $k>0$; 4) $N'=kN$, $k>0$; 5) $T'=k(T-T_1)$. **531.** 1), 2), 4), 5), 6), 9).

532. 2) Нет; 3) а) $-1/(x-2)$; б) $y=0$. **533.** 1) Ce^x; 2) $\sqrt[3]{\frac{x^3}{3}+x+C}$; 3) $Ct-1$; 4) $C\sqrt{x^2+1}$; 5) $\left(\frac{1}{2x}+C\right)^2$, $y=0$; 6) Ce^{t^2}; 7) $Ce^{2x}+1/2$; 8) $Ce^{-x}+2$; 9) $Ce^{ax}-b/a$; 10) $-1/(kt+C)$, $v=0$. **534.** 1) $y=3x$; 2) $\sqrt[3]{\frac{x^3}{3}-8}$; 3) $\ln\frac{x^2+1}{2}$; 4) $5e^t-2$; 5) $5x$; 6) $4x-5$; 7) $8\cos x$; 8) $3e^{kx}$; 9) $\frac{b}{a}(e^{ax}-1)$; 10) v_0e^{kt}. **536.** 1) e^{x+2}; 2) $-1/(x+1)$; 3) $\frac{1}{4}x^2$; 4) $-2/x$. **537.** $v=5\cdot(0{,}4)^t$, где v — скорость, м/с; t — время, с; $v(4)\approx 0{,}13$ м/с, $t\approx 1{,}8$ с. **538.** $\omega=12\cdot(2/3)^{t/40}$, где ω — угловая скорость, рад/с; t — время, с, $\omega(120)\approx 3{,}6$ рад/с, $t\approx 245$ с. **539.** 50 с. **540.** $Q=2000\cdot(0{,}925)^{t/2}$, где Q — количество заряда, Кл; t — время, мин; ≈ 18 мин. **541.** $\approx 8{,}5\%$. **542.** $\approx 0{,}9$ г. **543.** ≈ 60 мин. **544.** 1) 248,4; 252,9; 262,2; 271,9; 2) $\approx 0{,}1\%$; $\approx 0{,}2\%$; $\approx 0{,}1\%$; $\approx 0{,}3\%$. **545.** 1), 3), 5), 7), 8), 9). **546.** 1) -3; 2) -2; 3) ни при каком. **547.** 1) $-2/x$; $-4/x$; 2) $-\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} x$. **548.** 1) $Ce^{-x}+2$; 2) $\frac{2}{3}x^5+Cx^2$; 3) x^4+Cx^3; 4) $\frac{1}{3}e^x+Ce^{-2x}$; 5) $-\frac{1}{4}e^{-t}+Ce^{3t}$; 6) $\frac{1}{2}e^{x^2}+Ce^{-x^2}$; 7) $e^{x^2}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+C\right)$; 8) $\sin x+C\cos x$; 9) $(x+1)^2\left(\frac{x^2}{2}+x+C\right)$; 10) $\frac{\sin x+C}{1+x}$. **549.** 1) $e^{2x}-1/2$; 2) $2x^3-x^2$; 3) $e^x+4e^{x/2}$; 4) $(x-2)e^{x^2}$; 5) $t^3(e^{t-1}-3)$; 6) $x\sin x$; 7) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}\cos x$; 8) $-\frac{4}{x^2}(x+1)$. **550.** $v=\frac{g}{4}(1-e^{-4t})$, где v — скорость, м/с; g — ускорение свободного падения, м/с^2; t — время, с; $v(2)\approx 2{,}45$ м/с, $v(10)\approx 2{,}45$ м/с.

551. $I=20(1-e^{-5t})$, где I — сила тока, А; t — время, с; 20 А; 0,92 с. Указание: воспользуйтесь законом Кирхгофа $LI'+RI=U$, где I — сила тока в цепи. **552.** 1) $\approx 5\cdot 10^{-6}$ А; 2) $\approx\frac{u_0}{4}$ А. См. указание к задаче 551. **553.** Указание: воспользуйтесь методом подстановки. Докажите, что функция $I=\frac{u_0}{L}e^{-Rt/L}\int e^{Rt/L}\sin t\,dt$ периодична. **554.** 1) $x^2+C_1x+C_2$; 2) $-\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$; 3) $\frac{t^2}{2}+2\sin t+C_1t+C_2$; 4) $\frac{1}{4}e^{2t}+C_1t+C_2$; 5) $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cos 2x+C_1x+C_2$; 6) $\frac{1}{2}e^{-x}+C_1x+C_2$; 7) $-\frac{1}{m\omega^2}\cos\omega t+C_1t+C_2$; 8) C_1x+C_2; 9) $\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$. **556.** 1) t^3-2t^2+2t+1; 2) x^4; 3) $\frac{1}{9}e^{3x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$; 4) $-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}t$. **557.** $-x^3+3x^2-2x+5$. **558.** $x=2t^3-\frac{1}{2}t^2+10t$; $x(3)=79{,}5$; $v(3)=61$ м/с; $t=\frac{1}{12}$ с. **559.** $x=\frac{F}{2m}t^2+v_0t$; $x(3)=18{,}75$ м. **560.** 1 м/с. **561.** $x=-\frac{gt^2}{2}+1000$, где g — ускорение свободного падения; через ≈ 14 с. **562.** Через 100 с; 1 км. **563.** 1) $C_1e^{-t}+C_2$; 2) $\ln|C_2(t+C_1)|$; 3) $C_1e^{-0{,}1x}+C_2$; 4) $-2\ln|C_2(t+C_1)|$; 5) $C_1e^{2t}+5t+C_2$; 6) $C_1e^{-t}-10t+C_2$. **564.** 1) $1-e^{-2t}$; 2) $x^2+4x-10$; 3) $\ln|t|+2$. **565.** $x=40(1-e^{-0{,}035t})$; ≈ 12 м. **566.** $\frac{1000}{3}\ln|0{,}12t+1|$; $\approx 1{,}2$ км. **567.** 1), 2), 9). **568.** 1) Нет; 2) да; 3) да. **570.** 1) $C_1+C_2e^{-3x}$; 2) $C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}$; 3) $(C_1+C_2x)e^{-7x}$; 4) $e^{-3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$; 5) $C_1e^{-5x}+C_2e^{-3x}$; 6) $C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}$; 7) $C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$; 8) $C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$; 9) $C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$. **571.** 1) $1+0{,}5e^{2x}$; 2) $e^{-x}-2e^{-2x}$; 3) $e^{-4x}(1+5x)$; 4) $\cos 3x+2\sin 3x$; 5) $e^{-x}(\cos 2x+\sin 2x)$; 6) $\frac{3}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$;

7) $e^{-2x}(2+5x)$; 8) $2e^{4x}\cos 2x$. **573.** 1) $y''+4y=0$; 2) $y''+16y=0$; 3) $y''+4y=0$.

574. $y_0\cos\left(\sqrt{k/m}\cdot t\right)+\sqrt{m/k}\,v_0\sin\left(\sqrt{k/m}t\right)$.

575. $y_0(3{,}5e^{-25t}-2{,}5e^{-35t})$. Указание: используя закон Ньютона, составьте дифференциальное уравнение $my''=-k_1y-k_2y'$ и решите его, пользуясь начальными условиями: $y(0)=y_0$, $y'(0)=0$.

576. $Q_0\cos\left(t/\sqrt{LC}\right)$. Указание: воспользуйтесь законом Кирхгофа: $LQ''+Q/C=0$ и условием $Q'(0)=0$.

577. $\left(\sqrt{10}/3\right)Q_0e^{-\omega t}\cos(30t+\varphi)$, где $\varphi=\arcsin\left(3/\sqrt{10}\right)$. Указание: воспользуйтесь законом Кирхгофа: $LQ''+RQ'+Q/C=0$ и условием $Q'(0)=0$.

Глава 6. Элементы теории вероятностей

578. 0,92; 800. **579.** 16. **580.** 480. **581.** 0,85; 850. **582.** Mn/m. **583.** 1) {(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4)}; 2) {12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43}; 3) {3, 4, 5, 6, 7}. **584.** {(a, a); (a, A); (A, a); (A, A)}. **586.** {Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ЦЦЦЦ}. **587.** {(1, Г); (1, Ц); (2, Г); (2, Ц); (3, Г); (3, Ц); (4, Г); (4, Ц); (5, Г); (5, Ц); (6, Г); (6, Ц)}; $p_i=1/12$, $i=1, 2, \ldots, 12$. **588.** 1) $U=${ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}; $A=${ЦГ, ЦЦ}; $B=C=${ГЦ, ЦГ}; $D=${ГГ, ГЦ, ЦГ}; $E=${ГГ, ЦЦ}; 3) $p_i=1/4$, $i=1, \ldots, 4$; 4) $P(A)=P(B)=P(C)=P(E)=1/2$; $P(D)=3/4$. **589.** $P(A)=2/3$; $P(B)=1/3$. **590.** 1) 4/9; 2) 5/9; 3) 4/9; 4) 2/9. **591.** 7/8. **592.** 1) $U=${(i, k), i, $k=1, \ldots, 6$}, $A=${(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}, $B=${(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}, $C=${(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)}; $D=$({1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)}; 4) $p_i=1/36$; $i=1, 2, \ldots, 36$. **593.** 1) $U=$ ={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}; 2) $P(2)=P(12)=1/36$; $P(3)=P(11)=$ $=1/18$, $P(4)=P(10)=1/12$, $P(5)=P(9)=1/9$, $P(6)=P(8)=5/36$, $P(7)=1/6$. 3) $P(G)=1/12$, $P(H)=1/2$. **594.** 5/6. **595.** 0,7. **596.** 0,4. **598.** 1) 8; 2) 6; 3) 24. **599.** 49; 42. **600.** Да. **601.** 1) 16; 2) 12. **602.** 1) 90; 2) 81; 9; 3) 25; 20; 4) 16. **603.** 1) 20^5; 3) C_{20}^5. **604.** 20 га. **605.** 1/30240. **606.** 0,1. **607.** 1) $(0{,}9)^4$; 2) 0,504; 3) 0,9. **608.** 1/12. **609.** 1/55. **610.** 1) 1/5; 2) 2/9. **611.** 1) 0,001; 2) 0,125; 3) 0,72; 4) 0,01. **612.** 1) 1/60; 2) 2/5; 3) 3/5; 4) 0,2. **613.** 1/3. **614.** 1) 2/21; 2) 3/7; 3) 10/21. **615.** 1) 24/91; 2) 2/91; 3) 45/91; 4) 67/91.

617. 1) $\dfrac{C_M^k}{C_{M+N}^k}$; 2) $\dfrac{C_N^k}{C_{M+N}^k}$; 3) $\dfrac{C_M^nC_N^{k-n}}{C_{M+N}^k}$. **620.** 1) 1/8; 2) 1/8; 3) 7/8.

621. 1) 2/3; 5/36; 13/36; 2) 5/9. **622.** 0,97. **623.** 0,2. **624.** 0,68. **625.** 0,65. **626.** 1) 0,8; 2) 0,2. **627.** 4) 0,1. Указание: используя геометрическую интерпретацию действий над событиями, покажите предварительно, что $B=(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B)$.

628. 1) $\dfrac{C_{15}^4+C_5^1C_{15}^3}{C_{20}^4}$; 3) $\dfrac{C_{15}^2C_5^2+C_{15}^3C_5^1+C_{15}^4}{C_{20}^4}$. **629.** 29/38. **631.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да. **632.** Нет. **634.** 1) $\approx 0{,}998$; 2) 0,001998; 3) 10^{-6}. **635.** 1) 0,046; 2) 0,004; 3) 0,076; 4) 0,874. **636.** 0,96. **637.** 1) $U=\{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3)\}$; 2) $A=\{(1, 1); (2, 2); (3; 3))\}$; $B=\{(2, 2); (1, 3); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3)\}$; $C=\{(2, 1); (3, 1); (3, 2)\}$; $D=\{(1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 2)\}$; 4) $P(1, 1)=0{,}25$; $P(1, 2)=P(2, 1)=0{,}15$; $P(1, 3)=P(3, 1)=0{,}1$; $P(2, 2)=0{,}09$; $P(2, 3)=P(3, 2)=0{,}06$; $P(3, 3)=0{,}04$; $P(A)=0{,}38$; $P(B)=0{,}45$; $P(C)=0{,}31$; $P(D)=0{,}62$; $P(E)=0{,}55$; $P(F)=0{,}75$. **638.** 1) 2/3; 2) 1/3; 3) 1/2. **639.** 1) 1/2; 2) 1. **640.** 1) 3/11; 2) 5/22; 3) 5/22; 4) 6/11; 5) 17/22; 6) 1/2. **641.** 1) 0,02; 2) 0,016; 3) 0,036. **642.** 0,028. **643.** 0,006. **644.** 0,52.

645. 1)

0	1
0,3	0,7

; 2)

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

;

3)

0	1	2	3
1/8	3/8	3/8	1/8

; 4)

1	2	3	4
0,1	0,4	0,2	0,3

.

646.

0	1	5	10
0,89	0,08	0,02	0,01

. **647.**

0	1	3
1/3	1/2	1/6

;

2/3. **648.** 0,45. **649.** 1) 5/8; 2) 1/2; 3) 3/4; 4) 5/8. **650.** 1) 0,2; 2) 0,9; 3) 0,3; 4) 3.

652.

1	2	3	4
0,6	0,24	0,096	0,064

. **653.**

1	2	3
0,7	0,21	0,09

.

654. $P(X=k)=\dfrac{C_5^kC_{10}^{2-k}}{C_{15}^2}$, $k=0, 1, 2$.

655.

0	1	2
3/8	1/2	1/8

. **656.** $396\cdot 10^{-8}$. **657.** 0,0729.

658. 0,2646. **659.** Три из четырех. **660.** 0,384. **661.** 1) 5/16; 2) 13/16. **662.** 0,488.

663.

0	1	2	3
0,001	0,027	0,243	0,729

665.

0	1	2	3
1/27	2/9	4/9	8/27

666. 0,2. **668.** Не менее двух. **699.** $\geqslant 1-\frac{1}{\sqrt[10]{10}} \approx 0{,}206$.

670. 2/3; 4/9. **671.** 1) 1,5; 0,65; $\approx 0{,}81$; 2) 0,6; 4,24; $\approx 2{,}06$; 3) 0,5; 1,65; $\approx 1{,}28$. **672.** Второй. **673.** 0,8. **675.** 1,111. **676.** 1 руб. **677.** $a(n-1)/2$. **678.** Нет. Указание: найдите математическое ожидание выигрыша при одном выстреле. **679.** p; $p(1-p)$. **680.** 7. Указание: X_i — число очков, выпавших при бросании i-й кости, $i=1, 2$; X — сумма числа очков; $X=X_1+X_2$. **681.** 1,3. См. указание к задаче 680. **683.** 2,5. **684.** 0,48. **685.** 0,63. **686.** 40,96. **687.** 0,7 или 0,3. **688.** 11,8; 4,16. **689.** 1) —0,1; 2) —3,9; 3) 3,3. **690.**

−1	0	1
0,4	0,1	0,5

. **691.** 23. **692.** 4. **693.** 1) 3/4; 2) 9/16; 3) 27/32; 4) 5/32. **694.** 1) $\leqslant 0{,}64$; $\geqslant 8/9$; 2) $\geqslant 20$. **695.** $\geqslant 8/9$. **696.** $\geqslant 14/25$. **697.** $\geqslant 0{,}881$. **698.** 1) $> 0{,}64$; 2) $\leqslant 0{,}36$. **699.** 0,28 руб. **700.** 2; 1. **701.** $\approx 1{,}56$; $\approx 0{,}469$. **702.** 1,4; 0,7. **703.** $\approx 2{,}93$; ≈ 147.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

СТЕПЕНЬ

$$a^0 = 1; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{nm};$$
$$(a \cdot b)^m = a^m b^m; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

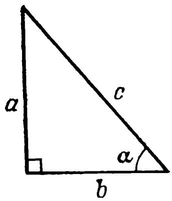
ЛОГАРИФМЫ

$$a > 0; \ a \neq 1; \ b > 0; \ b \neq 1; \ x > 0; \ y > 0$$
$$a^{\log_a x} = x; \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a x^n = n \log_a x$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

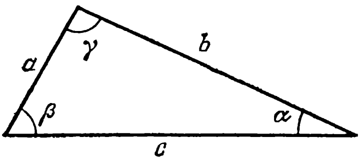


$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (теорема Пифагора)}$$

$$a = c\sin\alpha; \quad b = c\cos\alpha; \quad a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}ab$$

СООТНОШЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



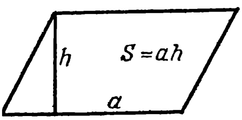
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

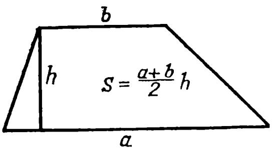
(теорема синусов)

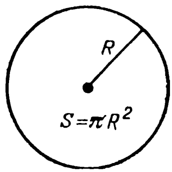
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

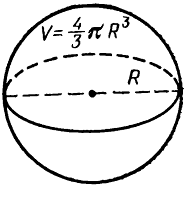
(теорема косинусов)

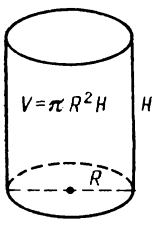
ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

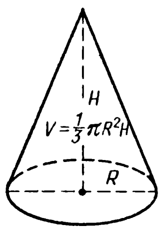












НЕКОТОРЫЕ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПОСТОЯННЫЕ

$$\pi \approx 3{,}1416; \quad \frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183; \quad \pi^2 \approx 9{,}8696$$

$$e \approx 2{,}7183; \quad \frac{1}{e} \approx 0{,}3679; \quad e^2 \approx 7{,}3891$$

1 радиан $\approx 57°17'45''$; $1° \approx 0{,}01745$ радиан

$g \approx 9{,}8071$ Н/кг

НЕКОТОРЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Ольга Николаевна Афанасьева
Яков Соломонович Бродский
Изя Ильич Гуткин
Александр Леонидович Павлов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

для техникумов (на базе средней школы)

Редактор *А. Ф. Лапко*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *О. М. Березина*

ИБ № 32465

Сдано в набор 04.08.86. Подписано к печати 03.02.87.
Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 10,92. Усл. кр.-отт. 11,13. Уч.-изд. л. 12,14. Тираж 260 000 экз.
Заказ № 2900. Цена 35 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография»
имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054 Москва М-54, Валовая, 28

35 коп.