Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2015 года

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 51-8
ББК 22.10
З15

Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2015 года
Составители К. П. Кохась, С. Л. Берлов, Ф. В. Петров, А. И. Храбров
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
128 с.
ISBN 978-5-4439-3001-5

Книга предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. Читатель найдет в ней задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2015 года, а также открытой олимпиады ФМЛ № 239, которая, не будучи туром Санкт-Петербургской олимпиады, по характеру задач, составу участников и месту проведения является прекрасным дополнением к ней.

Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

В качестве дополнительного материала приводится отчет об олимпиаде «Туймаада–2014», статья о восстановлении многочленов по их значениям в нескольких точках и эссе о сюжетах задач Петербургской олимпиады по математике.

Подготовлено на основе книги: Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2015 года / Сост. К. П. Кохась, С. Л. Берлов, Ф. В. Петров, А. И. Храбров. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-1001-7.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-3001-5

В 2014/15 учебном году в Санкт-Петербурге проводилась 81-я городская олимпиада школьников по математике. Первый тур проходил 6 декабря 2014 г., в нем приняли участие около 10 тысяч школьников Санкт-Петербурга. Победители первого тура, а также победители городской олимпиады 2014 года были приглашены на второй тур. Для 6–8 классов второй тур олимпиады проходил 8 февраля 2015 г. на математическом факультете Российского государственного педагогического университета, для 9–11 классов — 1 марта 2015 г. на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета.

Продолжительность первого тура — 3 часа, второго тура (во всех классах, кроме 6-го) — 3 часа плюс еще час для участников, которые решили не менее трех задач из первых четырех задач варианта. В 6-м классе — 2,5 и 3,5 часа соответственно.

В составлении вариантов олимпиады участвовали:

6 класс: К. П. Кохась;

7 класс: А. А. Солынин, К. А.Сухов;

8 класс: А. С. Голованов, А. С. Чухнов;

9 класс: Д. В. Карпов, А. В. Пастор;

10 класс: Ф. В. Петров, А. С. Смирнов;

11 класс: С. Л. Берлов, Д. А. Ростовский, А. И. Храбров.

Много сил в организацию олимпиады вложили Л. А. Жигулёв, М. Н. Воронина. Проведение олимпиады было бы невозможно без помощи многочисленных энтузиастов — студентов, учителей и преподавателей вузов. Составители благодарны Ю. Ахметшину за тщательное прочтение рукописи. Задачи олимпиады и текущую информацию можно найти на нашей интернет-страничке www.pdmi.ras.ru/~olymp

В городском туре олимпиады по приглашению жюри принимали участие гости — школьники из Витебска, Вологды, Каунаса, Вильнюса, Кирова, Минска, Москвы, Переславля-Залесского, Рыбинска, Ярославля и других городов.

Победители олимпиады 2015 года

6 класс

Диплом первой степени

Березовой Михаил (5)	366
Лялинов Иван	239
Огнёв Александр	239
Слепанчук Артем	277

Диплом второй степени

Волков Иван	419
Поляничко Григорий (5)	239
Туревский Максим (4)	130

Диплом третьей степени

Жаворонков Дмитрий	239	Оксаниченко Фёдор	им. Горчакова
Зелигер Борис	239	Павленко Даниил	533
Ким Владимир	239	Плаксин Михаил	328
Кудряшов Максим (5)	239	Солнышкин Григорий (5)	610
Леонтьев Лев (5)	610	Сысоев Сергей	597
Мамыкин Максим	33	Чернова Антонина (5)	610

7 класс

Диплом первой степени

Морозов Александр	239

Диплом второй степени

Кочеткова Екатерина	г. Ярославль	Мовсин Марат	101
Кравченко Егор	239	Можаев Андрей	239
Малиновский Владимир	Балт. колл.	Петров Владимир	239

Диплом третьей степени

Лялинов Иван (6)	239	Радивончик Дмитрий	533
Павлова Александра	533	Сукнев Дмитрий	239
Пьянков Сергей	533	Туркин Игорь	239

8 класс

Диплом первой степени

Крымский Станислав	ФТШ
Лупуляк Василий	239
Сафонов Иван	239
Толокно Изабелла	239

Диплом второй степени

Беляков Артём	533
Дидин Александр	г. Переславль-Залесский
Дидин Павел	г. Переславль-Залесский
Мильшин Владислав	239
Олейник Иван	239
Фёдоров Даниил	533

Диплом третьей степени

Дамбаев Юрий	30
Серикова Екатерина	533

9 класс

Диплом первой степени

Мигрин Виктор	239
Мильшин Владислав (8)	239

Диплом второй степени

Жуков Матвей	239
Иванов Михаил	239
Крымский Станислав (8)	ФТШ
Сафонов Иван (8)	239

Диплом третьей степени

Вирачев Арсений	239
Карагодин Никита	239
Конева Елизавета (8)	239
Лисоветин Никита	239
Лупуляк Василий (8)	239
Максименко Дмитрий	366
Мартынова Ольга	64
Петров Владимир (7)	239
Решетова Софья	533
Толокно Изабелла (8)	239
Чарковский Георгий	239
Вепрев Георгий	г. Рыбинск
Долгих Сергей	г. Рыбинск
Панкратов Виктор	г. Долгопрудный
Пренас Владимир	г. Долгопрудный
Пучинин Сергей	г. Ярославль
Студеникина Алевтина	г. Москва
Токмачев Александр	г. Ярославль
Шеремет Артём	г. Москва

10 класс

Диплом первой степени

Губкин Павел	239

Диплом второй степени

Губкин Павел	239
Байтенов Егор	г. Рыбинск
Киракосян Александр	239
Лупуляк Ольга	239
Мосеева Татьяна	г. Ярославль

Диплом третьей степени

Алексеев Ярослав	30
Волковыский Станислав	239
Грачева Анастасия	366
Елфимова Олеся	ФТШ
Завалишин Арсений	239
Захаров Алексей	366
Коненков Степан	239
Пюккенен Армас-Пиетари	239
Малышев Дмитрий	239
Матвеев Глеб	239
Пахомов Дмитрий	г. Омутнинск
Семёнов Никита	г. Минск
Смирдин Андрей	239
Сундуков Вячеслав	533
Щербаков Илья	АГ

11 класс

Диплом первой степени

Кузнецов Александр	239

Диплом второй степени (6 задач)

Богданов Илья	г. Москва
Макаров Владислав	450
Мягков Константин	30

Диплом второй степени (5 задач)

Гаевой Никита	30
Лосев Илья	239
Ходунов Павел	239

Диплом третьей степени (4 задачи)

Евтушевский Всеволод	239	Кутенин Даниил	г. Самара
Житнухин Николай	239	Монаков Григорий	533
Куликов Алексей	30	Охотников Артём	ФТШ
Тульчинский Эдуард	г. Самара		

Диплом третьей степени (3 задачи)

Багиров Фарид	533	Коданева Надежда	г. Сыктывкар
Гинзбург Михаил	30	Петров Степан	30
Елизаров Никита	30	Смирнов Лев	г. Вологда

Статистические данные олимпиады 2015 года

Критерий пропуска на второй тур олимпиады

Класс	6	7	8	9	10	11
Количество задач	3	2−	3+	2,5	2	3

Второй тур

В левой таблице по каждой задаче приведено количество решивших ее участников; также указаны общее количество приглашенных на олимпиаду и количество прошедших в выводную аудиторию*. В правой таблице указано количество участников, решивших данное количество задач.

Класс	Номер задачи 1	2	3	4	5	6	7	Всего	Вывод
6	97	31	23	34	7	24	–	130	54**
7	77	49	77	37	14	19	1	95	58
8	27	63	20	9	18	15	4	94	32**
9	66	82	58	27	6	3	5	117	51
10	65	66	27	2	3	2	0	122	33
11	32	24	29	7	9	9	1	100	20

Класс	Количество задач 1	2	3	4	5	6	7
6	47	23	12	12	3	4	–
7	12	16	23	22	6	6	1
8	34	6	13	2	7	0	4
9	13	24	26	19	4	2	0
10	22	38	15	4	0	1	0
11	9	8	6	7	3	3	1

* В начале олимпиады все участники получают карточку с условиями четырех задач. Во время олимпиады участников, решивших три задачи, переводят в отдельную (выводную) аудиторию, где они получают условия еще трех (в шестом классе — двух) задач.

** Проход в вывод по двум задачам.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

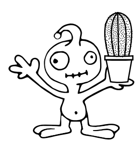
Первый тур

6 класс

1. В гильдии ювелиров есть два кольца ценой 10 и 30 гулденов и 4 драгоценных камня ценой 60, 70, 80 и 90 гулденов. В гильдии можно заказать изготовление перстня Мудрости, для этого требуется кольцо и два драгоценных камня. Цена такого заказа равна произведению цен требуемых компонентов. У послушника Васи есть всего 200 000 гулденов. Сможет ли он заказать себе два перстня? (*А. Храбров, К. Сухов, К. Кохась*)

2. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (*К. Кохась*)

3. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыли 107 зеленых и фиолетовых человечков. Зеленые человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зеленый кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошел к кому-то, сказал «*Какой вы фиолетовый!*» и подарил кактус. Докажите, что хотя бы один человек на фестивале не получил такого подарка. (*А. Чухнов*)



4. Антиподом натурального числа называется число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Федя взял пятизначное число, в записи которого нет нулей и все цифры различны, причем первая цифра больше пятой. Далее Федя вычел из этого числа его антипод; результат оказался пятизначным числом. Этот результат Федя сложил с его антиподом. Какие ответы могли получиться у Феди? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*Ф. Бахарев*)

7 класс

5. См. задачу 2.

6. На новогодний праздник пришло 99 мстительных детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причем никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить огромное мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.

(*А. Солынин*)

7. Можно ли прямоугольник разрезать на три прямоугольника A, B, C так, чтобы у A был самый большой периметр, у B самая большая площадь, а у C самая большая диагональ? Не забудьте обосновать ответ. (*К. Кохась*)

8. На извилистой реке расположены три города A, B и C (не обязательно именно в таком порядке и не обязательно в одном часовом поясе). Между городами ходят катерá, скорость кáтера в 6 раз больше скорости реки. Ниже приведен фрагмент расписания, время везде указано местное, каждое путешествие укладывается в один день.

Маршрут	Отправление	Прибытие
Из C в B	7:00	15:00
Из A в C	7:00	20:00
Из B в A	7:00	22:00

Таня, находясь в самом верхнем (по течению реки) из трех городов, уронила мячик. Через какое время его увидят жители самого нижнего города, если мячу не мешать плыть по течению? (*А. Солынин*)

8 класс

9. См. задачу 2.

10. Какие простые числа можно представить в виде

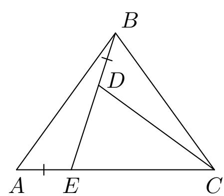
$$|n-1|+|n-2|+|n-3|+|n-4|+|n-5|$$

при целых n? (*А. Храбров, В. Франк, Д. Ростовский*)

11. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыло 107 зеленых и фиолетовых человечков. Зеленые человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зеленый кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошел к кому-то, сказал «*Какой вы фиолетовый!*» и подарил кактус. Какое наименьшее количество человечков могло не получить ни одного кактуса? (*А. Чухнов*)

12. См. задачу 8.

13. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E, а на отрезке BE – точка D. Известно, что $CE = CD = BE$, $BD = AE$. Докажите, что $\angle B > 60°$. (*А. Смирнов*)



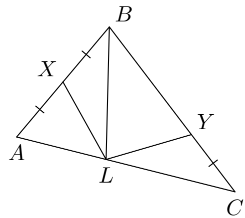
9 класс

14. См. задачу 2.

15. Даны 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 40-го и 61-го чисел тоже больше 1000. (*С. Берлов, А. Солынин*)

16. Натуральные числа a, b таковы, что $p = 8a + 19b$ — простое число. Докажите, что число $n = ab - 7a - 18b + 1$ не делится на p. (*Ф. Петров*)

17. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB$. Точка X — середина стороны AB, а точка Y на стороне BC такова, что $CY = AX$. Докажите, что прямая XY касается описанной окружности треугольника LCY. (*А. Пастор*)



18. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ с неотрицательными коэффициентами p и q, имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа a и b таковы, что $f(a) < f(b) < 1{,}001f(a)$. Докажите, что $f(b) - f(a) > 4001$.

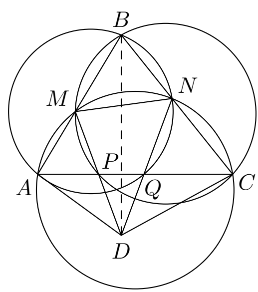
(*А. Храбров*)

10 класс

19. Дано 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма чисел в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 50-го и 51-го чисел тоже окажется больше 1000.

(*С. Берлов*)

20. На сторонах AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Отрезки MD и ND пересекают диагональ AC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что четырехугольники $BMPC$, $BNQA$ и $AMNC$ вписанные. Докажите, что $\angle BDN = \angle BDM$. (*А. Смирнов*)



21. См. задачу 16.

22. У Саши на калькуляторе есть лишь три кнопки. Они запрограммированы на вычисление трех функций:

$$\frac{x+2}{2x+3}, \qquad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \qquad \text{и} \qquad \sin(5x)$$

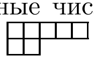
(при $x = -3/2$ первая кнопка не работает). Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горит число 1/2. Может ли Саша получить на экране число, большее миллиона? (*А. Храбров, А. Смирнов, Ф. Петров*)

23. В таблице 8×10 отмечены клетки, лежащие в двух левых столбцах, а также клетки, лежащие в двух нижних строках (всего 32 клетки). Юный шахматист Алёша хочет обойти все эти клетки по разу ходом шахматного короля, начав и закончив движение в левом нижнем углу. Сколькими способами Алёша может осуществить задуманное? (*А. Федотов*)

11 класс

24. В выборах царя зверей в зоопарке участвовало четыре кандидата: Кабан, Лев, Медведь и Носорог. Число проголосовавших за Кабана оказалось ровно в 3 раза больше, чем результат Льва в процентах. Число проголосовавших за Льва в 3 раза больше результата Медведя в процентах; число проголосовавших за Медведя в 3 раза больше результата Носорога в процентах. Наконец, число проголосовавших за Носорога в 3 раза больше результата Кабана в процентах. Сколько зверей проголосовало за Кабана? (*А. Чухнов*)

25. У Саши на калькуляторе всего четыре кнопки. С их помощью можно вычислять функции $x+5$, x^3, $\sin x$, $\cos x$. Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горело число 2. Можно ли получить на экране число 3? (*А. Храбров*)

26. В прямоугольной таблице с 21 строками и 70 столбцами расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в каждой фигурке вида  равна 1 (при этом фигурка может быть как угодно повернута и перевернута). Найдите сумму чисел в нижней строке. (*С. Берлов, А. Храбров, Д. Ростовский*)

27. Найдите все пары натуральных чисел p и q, для которых

$$p^3 - p^2q - 18p = 2q^2 - 3q + 1$$

и при этом p — простое число. (*А. Солынин*)

28. Могут ли четыре диагонали параллелепипеда (не обязательно прямоугольного) иметь длины 2, 3, 5 и 11?

(*Ф. Петров, А. Смирнов*)

Второй тур

6 класс

29. Про натуральное число n известно, что НОД$(1000, n) = 4$ и НОД$(1000, n+1) = 5$. Чему равен НОД$(1000, n+2)$?

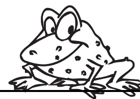
(*Д. Максимов*)

30. В магазине проходит акция «*Каждый третий товар — бесплатно*». При печати чека покупки выстраиваются по убыванию цены, и все товары с номерами, кратными трем, выдаются бесплатно. Петя и Маша выбрали товаров в сумме на 30 000 рублей и оплатили их двумя чеками. Благодаря акции каждый из них сэкономил по 1000 руб. Какое максимальное количество денег могли бы они сэкономить, если бы оплачивали покупки сообща одним чеком? (*А. Солынин*)

31. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. На каждой клетке плоскости написано, за какое *наименьшее* число ходов шахматный конь может дойти от этой клетки до какой-нибудь отмеченной. Андрей вырезал из плоскости полоску 5×1, не содержащую отмеченных клеток. Докажите, что в клетках этой полоски есть два равных числа. (*А. Солынин*)

32. На доске написано 88 различных натуральных чисел, больших 1000. Их сумма равна 999 999. Сережа прибавил к каждому числу число, образованное его тремя последними цифрами. (Например, из числа 1111 получилось бы 1222, из числа 1011 — число 1022, а из числа 10 000 — оно само.) Все 88 результатов Сережа записал в тетрадь. Докажите, что в тетради записано хотя бы 45 различных чисел. (*С. Берлов*)

33. Компания из 99 Кощеев Бессмертных гуляет по прямой дороге. Они все вместе идут с постоянной скоростью, а направление движения (вперед или назад) раз в час выбирают большинством голосов. В момент выхода Кощеи единогласно решили идти вперед. Первый Кощей меняет мнение о том, куда он хочет идти, каждый час; второй Кощей — каждые два часа; третий — каждые три, и т. д. Докажите, что в какой-то момент они вернутся в начало маршрута. (*О. Иванова*)



Каким способом перемещается «классический» Кощей Бессметрный: ходит, летает, скачет на коне, телепортируется?

34. В классе учится 30 учеников, один из них — Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно 5 общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечетным числом друзей. (*С. Берлов*)

7 класс

35. На доске написано 2015 чисел (необязательно различных). Для каждого из этих чисел подсчитали, сколько чисел на доске меньше него и сколько чисел на доске больше него. Может ли так оказаться, что для каждого числа на доске эти две величины имеют разную четность? (*К. Сухов*)

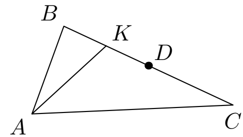
36. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. На каждой клетке плоскости написано, за какое *наименьшее* число ходов шахматный конь может дойти от этой клетки до какой-нибудь отмеченной. Андрей вырезал из плоскости прямоугольник 2×3, не содержащий отмеченных клеток. Докажите, что в клетках этого прямоугольника не более четырех различных чисел. (*А. Солынин*)

37. В турнире участвовало 98 шахматистов. Для игры в очередном туре их как-нибудь разбивают на пары. Проигравший в паре выбывает из турнира, а если была ничья, оба игрока проходят в следующий тур. В случае когда количество участников тура нечетно, один из шахматистов «отдыхает» и проходит в следующий тур без игры. Оказалось, что единоличный победитель определился после семи туров. Какое наибольшее количество «отдыхавших» могло быть в турнире?

(*А. Солынин*)

38. См. задачу 32.

39. Дан треугольник ABC, в котором $BC = 2AB$. Точка D — середина стороны BC, точка K — середина отрезка BD. Докажите, что $AC = 2AK$. (*С. Берлов*)



40. Гриша вычислил произведение всех чисел, не превосходящих миллиона и не кратных 29, и сократил его на максимально возможную степень числа 31. Стас нашел произведение всех чисел, не превосходящих миллиона и не кратных 31, и сократил его на максимально возможную степень числа 29. Чей результат больше?

(*А. Голованов*)

41. На доске 2015×2015 стоят 1800 фигур — ладей и ферзей. Они бьют все незанятые клетки доски. (Фигура бьет все клетки, до которых может дойти по шахматным правилам, не проходя сквозь другие фигуры.) Докажите, что ферзей не меньше 214.

(*А. Солынин*)

8 класс

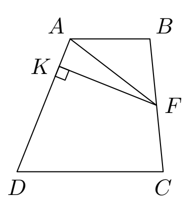
42. Целые ненулевые числа a, b, c, d таковы, что

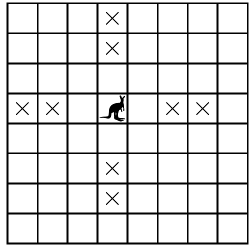
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{b}{c} + \frac{d}{a},$$

причем эти четыре дроби несократимы, не являются целыми числами и необязательно положительны. Найдите $ad + bc$.

(*А. Чухнов*)

43. В трапеции $ABCD$ точка F — середина боковой стороны BC, точка K на другой боковой стороне AD является основанием перпендикуляра, опущенного из точки F. Оказалось, что $3AK \leqslant KD$. Докажите, что $AB + CD \geqslant 2AF$. (*С. Берлов*)

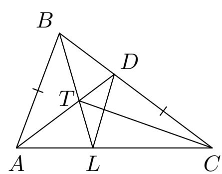




44. Шахматная фигура *кенгуру* бьет 8 клеток, которые расположены от нее на две или три клетки левее, правее, выше или ниже (а соседние клетки не бьет). Какое наибольшее число не бьющих друг друга кенгуру можно расставить на доске 8×8? (*А. Чухнов*)

45. У каждого из 30 различных натуральных чисел предпоследняя цифра больше 5. Все эти числа поделили с остатком на 99 и полученные неполные частные и остатки выписали на доску. Докажите, что среди 60 выписанных чисел не менее 9 различных. (*М. Антипов*)

46. Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2015}$. Оказалось, что a_k в пять раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать k? (*Д. Максимов*)

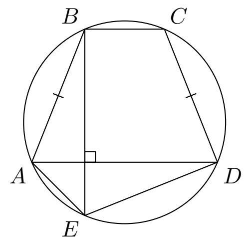


47. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $\angle B = 2\angle C$. На стороне BC отмечена такая точка D, что $AB = CD$. Прямые AD и BL пересекаются в точке T. Докажите, что площади треугольников ALD и CLT равны. (*С. Берлов*)

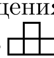
48. Каждый член Клуба веселых дальтоников знаком не более чем с 10 другими. Клуб закупил тапочки 23 различных цветов (тапок каждого цвета бесконечно много). На новогодний фуршет члены клуба прибывали по одному, и каждый, входя, обнаруживал, что те из уже пришедших, с кем он знаком, между собой тоже знакомы. Докажите, что после боя курантов каждому члену клуба можно подарить тапочки разных цветов так, что у любых двух знакомых членов клуба окажутся тапочки четырех различных цветов, а у любых двоих, имеющих общего знакомого, — тапочки не менее трех разных цветов. (*К. Кохась*)

9 класс

49. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{2}\,))=0$? (*А. Храбров*)



50. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), в которой $AD > BC$. На ее описанной окружности отмечена такая точка E, что $BE \perp AD$. Докажите, что $AE + BC > DE$. (*А. Пастор*)

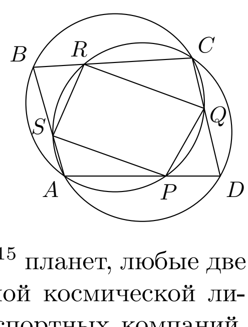
51. Клетки квадрата 2015×2015 раскрашены в 4 цвета. Рассматриваются все способы размещения внутри этого квадрата четырехклеточной фигурки вида  (фигурку можно поворачивать). Докажите, что фигурка содержит клетки четырех разных цветов менее чем в 51 % из этих способов. (*Д. Карпов*)

52. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Докажите, что $4x + y + z \geqslant 2$. (*А. Храбров*)

53. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и DC в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника ADC пересекает стороны AB и BC в точках S и R соответственно. Оказалось, что четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм. Докажите, что и четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. (*С. Берлов*)



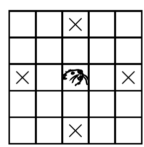
54. В межгалактической империи 10^{2015} планет, любые две из которых соединены двусторонней прямой космической линией. Этими линиями владеют 2015 транспортных компаний. Император хочет закрыть k компаний так, чтобы, пользуясь только рейсами оставшихся, можно было бы с любой планеты добраться до любой другой. При каком наибольшем k он гарантированно сможет осуществить свой план? (*Д. Карпов*)

55. Последовательность натуральных чисел определена следующим образом: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, a_n — наименьшее натуральное число, не встречавшееся раньше, взаимно простое с a_{n-1} и не взаимно простое с a_{n-2}. Докажите, что в этой последовательности встречаются ровно по одному разу все натуральные числа. (*М. Иванов*)

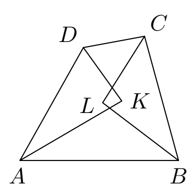
10 класс

56. Не менее половины всех палат в лагере — четырехместные, остальные — трехместные. Не менее двух третей всех девочек в лагере живут в трехместных палатах. Докажите, что более 35 % личного состава составляют мальчики. (Все палаты заполнены, мальчики и девочки в одной палате не живут.) (*А. Солынин*)

57. Шахматная фигура *бобер* ходит на две клетки по вертикали или по горизонтали в любом направлении. В какое наименьшее число цветов можно раскрасить доску 100×100 так, чтобы любые две клетки, отстоящие на ход коня или на ход бобра, были разного цвета? (*А. Голованов*)



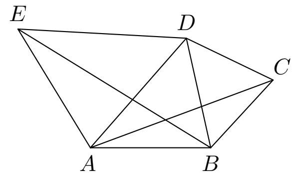
58. Биссектрисы углов A и D выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K; биссектрисы углов B и C — в точке L. Докажите, что $2KL \geqslant |AB - BC + CD - DA|$. (*А. Смирнов, Ф. Петров*)



59. Назовем натуральное число n олимпиадным, если найдется такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f\big(f(\sqrt{n}\,)\big) = 0$. Найдите наибольшее олимпиадное число, не превосходящее 2015. (*А. Храбров*)

60. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ выполнены равенства углов $\angle BCA = \angle BEA = \frac{1}{2}\angle BDA$, $\angle BDC = \angle EDA$. Докажите, что $\angle DEB = \angle DAC$.

(*Ф. Петров, по мотивам задачи 69*)



61. См. задачу 55.

62. В выпуклом n-угольнике провели все стороны, а также все диагонали из одной вершины. На полученных $2n-3$ отрезках написали положительные числа. Разрешается взять такой четырехугольник $ABCD$, что все его стороны и диагональ AC — проведенные отрезки, стереть диагональ AC, провести диагональ BD и написать на ней число $(xz+yt)/w$, где x, y, z, t, w — числа на отрезках AB, BC, CD, DA, AC соответственно. Докажите, что если в какой-то момент проведенными окажутся те же $2n-3$ отрезка, что в начале, то на них будут написаны те же числа, что и в начале. (*Фольклор*)

11 класс

63. Числа x и y удовлетворяют условиям $20x^3 - 15x = 3$ и $x^2 + y^2 = 1$. Найдите $|20y^3 - 15y|$. (*К. Тыщук*)

64. Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что числа a^2+b и $a+b^2$ простые. Докажите, что числа $ab+1$ и $a+b$ взаимно простые. (*С. Берлов*)

65. Набор разновесов содержит по одной гире каждого из весов 1, 3, 5, 7, 9, ... граммов. Для натурального $n > 1$ докажите, что количество способов набрать этими гирями n граммов не больше, чем количество способов набрать $n+1$ грамм.

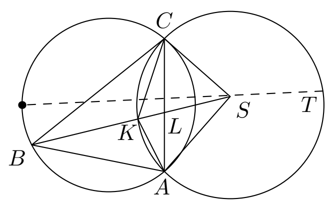
(*Ф. Петров*)

66. См. задачу 53.

67. Бумажный квадрат со стороной 100 разрезали 99 вертикальными и 99 горизонтальными прямыми, получив таким образом 10 000 прямоугольников (необязательно с целыми сторонами). У какого наименьшего количества прямоугольников площадь может оказаться меньшей или равной 1? (*Н. Филонов*)

68. В стране Центумии некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит ровно 100 дорог. *Пучком* называется набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков. (*С. Берлов*)

69. На биссектрисе BL остроугольного треугольника ABC выбрали такую точку K, что $\angle AKC - \angle ABC = 90°$. На продолжении биссектрисы BL за точку L выбрали такую точку S, что $\angle ASC = 90°$. Точка T диаметрально противоположна точке K на описанной окружности треугольника AKC. Докажите, что прямая ST проходит через середину дуги ABC. (*С. Берлов*)

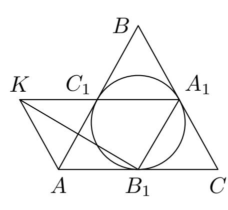


Олимпиада 239 школы

8, 9 класс

70. Есть 10 камней различных весов, причем все попарные суммы этих весов тоже различны. Также есть специальные весы. На эти весы можно класть только по два камня на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Докажите, что с помощью этих весов можно найти или самый тяжелый камень, или самый легкий. (*С. Берлов*)

71. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, CA треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямая A_1C_1 пересекает прямую, проходящую через A и параллельную BC, в точке K. Докажите, что $\angle KB_1A_1 = 90°$. (*С. Берлов*)



72. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух чисел a и b одного цвета верно, что если число $a - 10b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

(*С. Берлов*)

73. На окружности выбрали 4 точки и для каждой перемножили расстояния до остальных. Могли ли получиться числа от 1 до 4 (в некотором порядке)?

(*Ф. Петров по мотивам фольклора*)

74. Ребра полного графа на $2m$ вершинах правильно покрашены в $2m - 1$ цвет. Для любых двух цветов оказалось, что все ребра этих двух цветов представляют собой объединение нескольких 4-циклов. Докажите, что тогда m — степень двойки.

(*H.-L. Fu , Y.-H. Lo*)

75. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 1000. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди стирают написанные числа. Начинает Петя. Тот из мальчиков, после хода которого все оставшиеся числа (быть может, одно) будут иметь натуральный общий делитель, больший единицы, проигрывает. Если же на доске останется только единица, то игра считается завершившейся вничью. Каков будет результат при правильной игре обоих соперников? (*С. Берлов*)

76. На плоскости дана замкнутая n-звенная ломаная. По ней строится новая ломаная, рёбра которой соединяют середины соседних звеньев предыдущей; затем предыдущая ломаная стирается, и процедура повторяется. Известно, что для каждой полученной ломаной все вершины различны, и не все вершины лежат на одной прямой. При каких n одна из полученных ломаных обязательно окажется выпуклым n-угольником?

(*А. Антропов, И. Богданов*)

77. Для положительных чисел a, b, c выполнено равенство

$$2a^3b + 2b^3c + 2c^3a = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Докажите неравенство

$$2ab(a-b)^2 + 2bc(b-c)^2 + 2ca(c-a)^2 \geqslant (ab + bc + ca)^2$$

(*И. Богданов, С. Берлов*)

10, 11 класс

78. См. задачу 71.

79. Докажите, что C_{k+n}^n можно представить в виде произведения n попарно взаимно простых сомножителей: $C_{k+n}^n = a_1 a_2 \ldots a_n$, где a_j — делитель числа $k+j$ при $j = 1, \ldots, n$.
(*А. Храбров*)

80. Каждое ребро некоторого графа G окрашено в один из двух цветов. Для каждого из цветов все компоненты связности графа, образованного только ребрами этого цвета, содержат не более $n > 1$ вершин. Докажите, что все вершины графа G можно окрасить в n цветов правильным образом. (*С. Слободянюк*)

81. Дано натуральное число n. Многочлен $f(x, y)$ степени не выше $n-1$ таков, что при любых натуральных $x, y \leqslant n$, $x + y \leqslant n + 1$, выполняется равенство $f(x, y) = x/y$. Найдите $f(0, 0)$. (*Ф. Петров*)

82. Узлы трехмерной единичной кубической решетки, все три координаты которых четны, покрашены в красный цвет, а остальные узлы — в синий. Дан выпуклый многогранник, все вершины которого красные. Количество красных вершин на его границе обозначим через n. Сколько синих вершин может быть на его границе? (*А. Храбров*)

83. См. задачу 77.

84. Два фокусника собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность, у которой отмечена одна полуокружность. Зрители отмечают на этой окружности 100 точек, затем первый фокусник стирает одну из них. После этого второй впервые глядит на рисунок и по оставшимся 99 точкам определяет, лежала ли стертая точка на отмеченной полуокружности. Докажите, что такой фокус удастся не всегда.
(*И. Богданов, А. Акопян*)

85. На окружности выбрали 100 точек и для каждой перемножили расстояния до остальных. Могли ли получиться числа от 1 до 100 (в некотором порядке)?
(*Ф. Петров по мотивам теоремы Мак-Дугалла*)

Вторые варианты задач

1. В гильдии ювелиров есть две цепочки ценой 10 и 50 гулденов и 4 жемчужины ценой 50, 60, 70 и 80 гулденов. В гильдии можно заказать изготовление ожерелья Попутного Ветра, для этого требуется цепочка и две жемчужины. Цена такого заказа равна произведению цен требуемых компонентов. У начинающего пирата Кирюши есть всего 210 000 гулденов. Сможет ли он заказать себе два ожерелья?

2. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по две скамейки. Вася заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Вася подсчитал, на скольких скамейках сидит 2 человека и на скольких не сидит никто. Найдите сумму Васиных чисел.

3. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыли 125 сиреневых и оранжевых человечков. Оранжевые человечки правильно воспринимают цвета, а сиреневым, к сожалению, сиреневый цвет кажется оранжевым, и наоборот. Осмотревшись, каждый участник фестиваля подошел к кому-то, сказал «*Какой вы сиреневый!*» и подарил фикус. Докажите, что хотя бы один человек на фестивале не получил такого подарка.

4. Антиподом натурального числа называется число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Федя взял пятизначное число, в записи которого нет нулей и все цифры различны, причем первая цифра меньше пятой. Далее Федя вычел это число из его антипода; результат оказался пятизначным числом. Этот результат Федя сложил с его антиподом. Какие ответы могли получиться у Феди? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

5. См. задачу 2.

6. На новогодний праздник пришли 89 мстительных детей. В гардеробе каждый из них наступил на ногу кому-то из остальных, причем никому не наступили на ногу дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить огромный торт, а вторым — чтобы его обидчик не получил торта. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.

7. Можно ли прямоугольник разрезать на три прямоугольника A, B, C так, чтобы у A был самый маленький периметр, у B самая маленькая площадь, а у C самая маленькая диагональ? Не забудьте обосновать ответ.

8. На извилистой реке расположены три города A, B и C (не обязательно именно в таком порядке и не обязательно в одном часовом поясе). Между городами ходят катера, скорость катера в 6 раз больше скорости реки. Ниже приведен фрагмент расписания, время везде указано местное, каждое путешествие укладывается в один день.

Маршрут	Отправление	Прибытие
Из B в C	8:00	17:00
Из C в A	8:00	20:00
Из A в B	8:00	23:00

Гек и Джим, находясь в самом верхнем (по течению реки) из трех городов, отправились в путешествие на плоту. Через какое время они увидят самый нижний город, если будут плыть по течению и нигде не останавливаться?

9. См. задачу 2.

10. Какие простые числа можно представить в виде

$$|n-1| + |n-2| + \ldots + |n-7|$$

при целых n?

11. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыло 125 оранжевых и сиреневых человечков. Оранжевые человечки правильно воспринимают цвета, а сиреневым, к сожалению, сиреневый цвет кажется оранжевым, и наоборот. Осмотревшись, каждый участник фестиваля подошел к кому-то, сказал «*Какой вы сиреневый!*» и подарил фикус. Какое наименьшее количество человечков могло не получить ни одного фикуса?

12. См. задачу 8.

13. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке AD — точка E так, что $AD = CE = CD$ и $BD = AE$. Докажите, что $\angle A > 60^\circ$.

14. См. задачу 2.

15. Даны 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма в каждой паре больше 2000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 30-го и 71-го чисел тоже больше 2000.

16. Натуральные числа m, n таковы, что $p = 11m + 17n$ — простое число. Докажите, что число $k = mn + 12m + 18n + 1$ не делится на p.

17. На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении стороны CA за точку A — точка E так, что $BE = 2DC$ и $\angle EBC = 2\angle ABC$. Точка F — середина отрезка BE. Докажите, что прямая DF касается описанной окружности треугольника ADC.

18. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ с неотрицательными коэффициентами a и b, имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа m и n таковы, что $f(m) < f(n) < 1{,}002f(m)$. Докажите, что $f(n) - f(m) > 2001$.

19. Дано 200 различных натуральных чисел. Они разбиты на 100 пар так, что сумма чисел в каждой паре меньше 2014. Докажите, что если выписать все 200 чисел в порядке возрастания, то сумма 100-го и 101-го чисел тоже окажется меньше 2014.

20. На сторонах AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Отрезки MD и ND пересекают диагональ AC в точках X и Y соответственно. Оказалось, что четырехугольники $AMYD$, $CNXD$ и $MNYX$ вписанные. Докажите, что $\angle ABD = \angle CBD$.

21. См. задачу 16.

22. У Феди на калькуляторе есть лишь три кнопки. Они запрограммированы на вычисление трех функций:

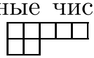
$$\frac{x+2}{x-4}, \qquad \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \qquad \text{и} \qquad \cos(7x)$$

(при $x = 4$ первая кнопка не работает). Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горит число $3/4$. Может ли Федя получить на экране число, большее ста тысяч?

23. В таблице 9×9 отмечены клетки, лежащие в двух левых столбцах, а также клетки, лежащие в двух верхних строках (всего 32 клетки). Любитель шахмат Алексей хочет обойти все эти клетки по разу ходом шахматного короля, начав и закончив движение в левом верхнем углу. Сколькими способами Алексей может осуществить задуманное?

24. В выборах первой красавицы зоопарка участвовало пять кандидаток: Косуля, Лиса, Мартышка, Норка и Овца. Число проголосовавших за Косулю оказалось ровно в 2 раза больше, чем результат Лисы в процентах. Число проголосовавших за Лису в 2 раза больше результата Мартышки в процентах; число проголосовавших за Мартышку в 2 раза больше результата Норки в процентах; число проголосовавших за Норку в 2 раза больше результата Овцы в процентах. Наконец, число проголосовавших за Овцу в 2 раза больше результата Косули в процентах. Сколько зверей проголосовало за Овцу?

25. У Димы на калькуляторе всего четыре кнопки. С их помощью можно вычислять функции $x + 6$, x^5, $\sin x$, $\cos x$. Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горело число 3. Можно ли получить на экране число 4?

26. В прямоугольной таблице с 14 строками и 77 столбцами расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в каждой фигурке вида  равна 1 (при этом фигурка может быть как угодно повернута и перевернута). Найдите сумму чисел в первом столбце.

27. Найдите все пары натуральных чисел p и q, для которых

$$p^3 - p^2q - 26p = 2q^2 - q - 1$$

и при этом p — простое число.

28. Могут ли четыре диагонали параллелепипеда (не обязательно прямоугольного) иметь длины 1, 2, 3 и 7?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. *Ответ*: да, Вася сможет заказать два перстня. Для первого перстня следует взять кольцо за 10 гулденов и камни за 80 и 90 гулденов, такой перстень стоит $10 \cdot 80 \cdot 90 = 72\,000$ гулденов, а из остальных материалов нужно заказать второй перстень. Тогда второй перстень стоит $30 \cdot 60 \cdot 70 = 126\,000$ гулденов.

Гарри Поттер хочет купить две книжки, каждая из которых стоит 100 рублей. Он может взять в руки (одну) книжку, прочесть заклинание, и от этого цена книжки сразу же уменьшится. Гарри подготовил четыре заклинания: первое уменьшает цену на 10 %, второе на 20 %, третье на 30 %, четвертое на 40%. Каждое заклинание можно использовать лишь один раз. У Гарри есть всего 110 рублей. Как ему следует действовать, чтобы купить обе книжки?

2. *Ответ*: 20.

Решение 1 (варианты рассадки). Если на двух трехместных скамейках сидит 5 человек, то это возможно, только если на одной скамейке сидит 2 человека, а на другой 3. Значит, Костя при подсчете учтет в этом ряду одну скамейку. Если же на двух скамейках сидит три человека, то возможны два варианта: на одной скамейке три человека, а на другой — ноль, либо на одной скамейке два человека, на другой — один. Как видим, в обоих случаях и в этом ряду при подсчете Костя учтет ровно одну скамейку. Таким образом, результат Кости равен числу рядов.

Решение 2 (четность). Количество людей в ряду — это число людей на первой скамейке плюс число людей на второй. Когда два слагаемых в сумме дают нечетное число (5 или 3), одно из слагаемых нечетно, а второе четно. Так как слагаемые не превосходят 3, четное слагаемое обязательно равно 0 или 2. Таким образом, на каждом ряду есть ровно одна скамейка, которую подсчитал Костя. Значит, сумма Костиных чисел равна 20.

3. Каждый зеленый человечек подарил кактус кому-то из фиолетовых, а каждый фиолетовый — кому-то из зеленых. Поскольку общее число участников фестиваля нечетно, человечков какого-то цвета больше, чем человечков другого цвета. Вот кому-то из этого «большинства» и не достанется кактуса.

4. Ответ: 99 099 или 109 890. Эти ответы нетрудно найти подбором: проделать действия, указанные в условии, с какими-нибудь пятизначными числами. Например, первый ответ получится, если начать с числа 73 152, а второй — с числа 75 132.

Докажем, что у Феди могли получиться только эти два ответа. Пусть $\overline{abcde}$ — исходное число. По условию $a > e$. Пусть еще $d > b$, случай $d < b$ мы разберем позже.

Выполним первое вычитание. Цифры, значения которых записаны формулами, мы для наглядности обвели в рамочки.

$$
\begin{array}{rccccc}
 & a & b & c & d & e \\
- & e & d & c & b & a \\
\hline
 & \boxed{a-1-e} & \boxed{10+b-d} & 0 & \boxed{d-1-b} & \boxed{10+e-a}
\end{array}
$$

Разберем это вычитание подробнее. В младшем разряде нужно из e вычесть a. Поскольку $e < a$, мы при вычитании занимаем одну единицу второго разряда, и тогда результат вычитания в младшем разряде равен $10+e-a$. Во втором разряде у уменьшаемого остается цифра $d-1$, которая не меньше b. Значит, в результате вычитания во втором разряде получится цифра $d-1-b$. В третьем разряде, очевидно, вычитание даст 0. В четвертом разряде при вычитании мы занимаем единицу старшего разряда (поскольку $b < d$), и тогда в ответ идет цифра $10+b-d$. Наконец, в пятом разряде с учетом занятой единицы мы получаем $a-1-e$.

Теперь прибавим к полученному ответу его антипод.

$$
\begin{array}{rccccc}
 & \boxed{a-1-e} & \boxed{10+b-d} & 0 & \boxed{d-1-b} & \boxed{10+e-a} \\
+ & \boxed{10+e-a} & \boxed{d-1-b} & 0 & \boxed{10+b-d} & \boxed{a-1-e} \\
\hline
 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9
\end{array}
$$

Здесь все поразрядные сложения выполняются непосредственно. При этом даже нет никаких переносов.

Разберем второй случай: $d < b$. Снова рассмотрим первое вычитание.

$$\begin{array}{rccccc} - & a & b & c & d & e \\ & e & d & c & b & a \\ \hline & \boxed{a-e} & \boxed{b-1-d} & 9 & \boxed{9+d-b} & \boxed{10+e-a} \end{array}$$

В младшем разряде вычитание выполняется как в первом примере. Во втором разряде, после того как мы заняли из него единицу, уменьшаемое содержит цифру $d-1$, которая меньше, чем b. Поэтому для вычитания нам снова придется занимать единицу, и тогда результат в этом разряде равен $10+(d-1)-b = 9 + d - b$. Теперь в третьем разряде уменьшаемое содержит $c-1$, а вычитаемое — c, нужно снова занимать единицу, и тогда результат вычитания в этом разряде равен $10 + (c-1) - c = 9$. В остальных разрядах вычитание выполняется непосредственно.

Теперь опять прибавим к полученному результату антипод.

$$\begin{array}{cccccc} + & \boxed{a-e} & \boxed{b-1-d} & 9 & \boxed{9+d-b} & \boxed{10+e-a} \\ & \boxed{10+e-a} & \boxed{9+d-b} & 9 & \boxed{b-1-d} & \boxed{a-e} \\ \hline 1 & 0 & 9 & 8 & 9 & 0 \end{array}$$

Здесь при сложении возникают переносы из первого, третьего и пятого разрядов.

Как видим, варианты выполнения Фединых действий возникают только при первом вычитании, после чего остальные действия выполняются однозначно. Таким образом, разобранные два случая полностью описывают все возможности, которые могли получиться у Феди.

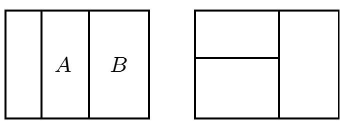
6. Предположим, что у каждого ребенка сбылось либо два, либо ни одного желания. Если у ребенка сбылось два желания, то его обидчик не получил мороженого, значит, у него одно из желаний не сбылось, значит, у него оба желания не сбылись. И наоборот: если у ребенка не сбылись оба желания, то обиженный им ребенок получил мороженое, значит, у обиженного сбылось одно из желаний, и тогда по нашему предположению у обиженного ребенка должны были сбыться оба желания.

Расставим детей в две шеренги: в первую поставим всех, у кого сбылись два желания, а во вторую шеренгу поставим тех, у кого не сбылось ни одного желания, по правилу: за каждым ребенком из первой шеренги ставим того, кто его обидел. При этом каждый, у кого не сбылось ни одного желания, найдет себе место во второй шеренге: он будет находиться за тем, кого обидел.

Таким образом, общее количество детей должно быть четным. Но условию задачи количество детей — 99, т. е. нечетно. Следовательно, предположение, которое мы сделали в первой строчке решения, не может быть верным. Таким образом, у кого-то сбылось ровно одно желание.

7. Ответ: нельзя.

Если два прямоугольника имеют общую сторону, для определенности вертикальную, то у того прямоугольника, который шире, и площадь, и периметр, и диагональ больше, чем у того, который у́же. Например, на рисунке ниже прямоугольник B по этим трем параметрам больше прямоугольника A.



Очевидно, есть две различные конфигурации разрезания (см. рисунок). В обеих конфигурациях легко указать два прямоугольника, имеющих общую сторону, тогда у большего из них все три параметра — площадь, периметр, диагональ — больше, чем у второго. Это противоречит требованию условия задачи.

8. Ответ: 105 часов.

Рассмотрим сначала случай, когда все города находятся в одном часовом поясе. Тогда суммарная длительность путешествия катера из самого нижнего города в самый верхний и обратно равна сумме длительностей упомянутых в расписании маршрутов, т. е. 36 часов.

Если же какие-то города, скажем A, требуют поправки на часовой пояс, то, как нетрудно видеть, в сделанном подсчете эта поправка сокращается, потому что в этом вычислении время отправления из A и время прибытия в A присутствуют с противоположными знаками.

Итак, получилась стандартная задача: течение имеет скорость v, скорость катера $6v$, на дорогу туда и обратно катер потратил 36 часов; сколько времени потребуется плоту, чтобы проплыть от начала в конец. Решаем ее. Чтобы не возиться с формулами, сделаем пробный заплыв: пусть по течению катер проплыл 5 часов (со скоростью $7v$), тогда обратно (со скоростью $5v$) он будет плыть 7 часов, в сумме получаем 12 часов — в три раза меньше, чем нужно. Значит, для 36-часового рейса нужно плыть по течению 15 часов, а тогда плот поплывет в 7 раз дольше, т. е. 105 часов.

10. Ответ: в таком виде представимо только число 7 (при $n = 2$ или 4).

Если $n \geqslant 5$, то все выражения под модулями неотрицательны. Тогда указанная сумма равна

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)=5n-15.$$

При $n \geqslant 5$ это число не меньше 10 и к тому же делится на 5. Значит, в этом случае сумма не может быть простым числом.

Если $n \leqslant 1$, то все выражения под модулями неположительны. Тогда указанная сумма равна

$$-(n-1)-(n-2)-(n-3)-(n-4)-(n-5)=15-5n.$$

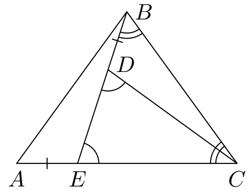
Опять получилось, что сумма не меньше 10, делится на 5 и поэтому не простая.

Осталось посмотреть, какие значения принимает сумма при $n = 2, 3, 4$. При $n = 3$ сумма равна 6, а при $n = 2$ и 4 сумма равна 7.

11. Ответ: 1 человечек.

Оценка. Хотя бы один человечек заведомо не получил кактус — см. рассуждение в задаче 3.

Пример. Во время традиционного утреннего хоровода 106 человечков попеременно: зеленый, фиолетовый, зеленый, фиолетовый и т. д. стали в круг. После хоровода каждый человечек подарил соседнему справа кактус. Тогда лишь 107-й человечек, проспавший это мероприятие, оказался без кактуса.



13. Решение 1 (сравниваем углы). Заметим, что $\angle CDE = \angle DEC$, следовательно, равны также углы, смежные с этими углами. Тогда треугольники CDB и AEB равны по двум сторонам и углу. Значит, $CB = AB$ и, следовательно, $\angle BCA = \angle BAC$. При этом $\angle ABC > \angle EBC = \angle BCA$. Таким образом, $\angle B$ — наибольший угол в треугольнике ABC.

Решение 2 (неравенство треугольника). По неравенствам треугольника для треугольников AEB и BDC имеем:

$$AB < BE + EA = CE + EA = AC$$

и

$$BC < CD + BD = CE + EA = AC.$$

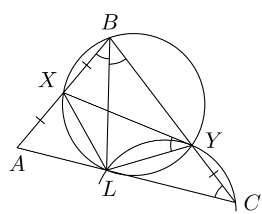
Следовательно, $AC > AB$ и $AC > BC$. Значит, сторона AC — наибольшая в треугольнике ABC. Поскольку против большей стороны лежит больший угол, $\angle ABC$ — наибольший угол в треугольнике ABC. Если бы он был не больше 60°, то сумма углов треугольника ABC была бы меньше 180°, что невозможно. Стало быть, $\angle ABC > 60^\circ$.

15. Если бы это было неверно, то каждое из чисел с 1-го по 40-е было бы в паре с каким-то числом, стоящим после 61-го. Это невозможно, так как там только 39 чисел.

16. Если n делится на простое число p, то

$$n + p = (ab - 7a - 18b + 1) + (8a + 19b) = (a + 1)(b + 1)$$

тоже делится на p. Тогда одно из натуральных чисел — $a+1$ или $b+1$ — делится на p и, в частности, не меньше p. Но в любом из этих случаев число $8a+19b$ оказывается существенно больше p.



17. Очевидно, $\angle ABL = \angle LBC = \angle ACB$ и $BL = LC$. Следовательно, треугольники LBX и LCY равны по двум сторонам и углу. Тогда

$$\angle BXL = \angle LYC = 180^\circ - \angle LYB,$$

т. е. четырехугольник $BXLY$ вписанный.

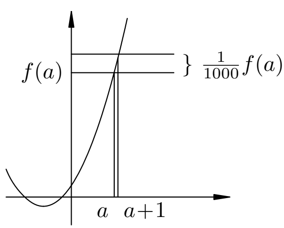
Следовательно, $\angle XYL = \angle XBL = \angle YCL$. Тогда прямая YX образует с хордой LY угол, равный вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. Значит, XY касается окружности LCY.

18. Решение 1. Очевидно, что при $x > 0$ трехчлен $f(x)$ положителен. Следовательно, оба корня отрицательны, трехчлен возрастает при $x > 0$, поэтому из условия $f(a) < f(b)$ следует, что $a < b$.

Далее заметим, что если для какого-то натурального a нашлись натуральные b, удовлетворяющие неравенству $f(a) < f(b) < 1{,}001f(a)$, то, конечно, этому неравенству удовлетворяет и наименьшее из таких чисел b — число $b_0 = a+1$. Если мы докажем утверждение задачи для числа b_0, то для остальных b утверждение будет заведомо выполнено, поскольку при $b > b_0$ будет выполнено неравенство $f(b) - f(a) > f(b_0) - f(a) > 4001$.

Итак, достаточно доказать утверждение задачи лишь для случая $b = a + 1$, т. е. мы решаем следующую задачу.

Квадратный трехчлен $f(x) = x^2+px+q$, где p, $q \geqslant 0$, имеет два различных вещественных корня. Натуральное число a таково, что $f(a+1)<1{,}001f(a)$. Докажите, что $f(a+1)-f(a)>4001$.



Картинку можно двигать по горизонтали! С помощью сдвига можно еще уменьшить число параметров, например добиться того, что $q = 0$.

В дальнейших рассуждениях будем считать, что число a неотрицательное (не пользуясь тем, что оно натуральное). Пусть x_0 — бо́льший корень трехчлена $f(x)$, и пусть $\alpha = a - x_0$. Рассмотрим квадратный трехчлен $g(x) = f(x + x_0)$, у него один корень отрицателен, обозначим его $-c$, другой корень равен 0, а коэффициент при x^2 равен 1, поэтому $g(x) = x^2 + cx$. Этот трехчлен удовлетворяет условию $g(\alpha) < g(\alpha + 1) < 1{,}001g(\alpha)$. Утверждение задачи будет доказано, если мы проверим, что $g(\alpha + 1) - g(\alpha) > 4001$.

Заметим, что

$$g(\alpha + 1) - g(\alpha) = (\alpha + 1)^2 + c(\alpha + 1) - \alpha^2 - c\alpha = 2\alpha + 1 + c.$$

Запишем неравенство $g(\alpha+1) < 1{,}001 g(\alpha)$ в виде

$$g(\alpha+1) - g(\alpha) < \tfrac{1}{1000} g(\alpha),$$

т. е.

$$\frac{\alpha(\alpha+c)}{1000} - (2\alpha+1+c) > 0. \qquad (*)$$

Итак, мы хотим проверить, что все положительные α, удовлетворяющие этому неравенству, удовлетворяют также неравенству $2\alpha+1+c > 4001$ или, что то же самое, неравенству

$$\alpha > 2000 - \frac{c}{2}.$$

Очевидно, при $\alpha = 0$ неравенство $(*)$ не выполняется. Проверим, что при $\alpha = 2000 - \frac{c}{2}$ неравенство $(*)$ тоже не выполняется. В самом деле, при этом α

$$\frac{\alpha(\alpha+c)}{1000} - (2\alpha+1+c) = \frac{1}{1000}\Bigl(2000 - \frac{c}{2}\Bigr)\Bigl(2000 + \frac{c}{2}\Bigr) - 4001 = \\ = \frac{1}{1000}\Bigl(2000^2 - \frac{c^2}{4}\Bigr) - 4001 = -\frac{c^2}{4} - 1 < 0.$$

Таким образом, левая часть неравенства $(*)$, являющаяся квадратным трехчленом относительно α, отрицательна и при всех промежуточных значениях $\alpha \in \bigl[0, 2000 - \frac{1}{2}c\bigr]$. Следовательно, все положительные α, удовлетворяющие неравенству $(*)$, превосходят $2000 - \frac{c}{2}$, чтд.

Решение 2 (вспомогательные трехчлены). Будем решать задачу от противного. Предположим, что $f(b) - f(a) \leqslant 4001$.

Поскольку трехчлен имеет два корня, его дискриминант неотрицателен. Стало быть, $p^2 \geqslant 4q$. Очевидно, трехчлен $f(x)$ положителен при $x > 0$. Следовательно, оба его корня неположительны и трехчлен возрастает при $x > 0$. Поэтому из условия $f(a) < f(b)$ следует, что $a < b$, а значит, и $b \geqslant a+1$.

Рассмотрим разность

$$f(b) - f(a) = (b^2 + pb + q) - (a^2 + pa + q) = \\ = (b-a)(b+a+p) \geqslant b+a+p \geqslant 2a+p+1.$$

Следовательно, $2a + p \leqslant 4000$ и, значит, $a \leqslant 2000 - \frac{p}{2}$ и $p \leqslant 3998$.

По условию $f(b) < 1{,}001 f(a)$, поэтому

$$1000(2a+p+1) \leqslant 1000\big(f(b)-f(a)\big) < f(a) = a^2 + ap + q.$$

Значит, разность правой и левой части положительна, т. е.

$$g(a) = a^2 + (p-2000)a + q - 1000p - 1000 > 0.$$

Рассмотрим $g(a)$ как квадратный трехчлен относительно a. Его старший коэффициент положителен, поэтому ветви параболы направлены вверх. Чтобы получить противоречие со сделанным в начале решения предположением, покажем, что $g(a)$ не может быть положительным на отрезке $[1, 2000-\frac{p}{2}]$. Для этого достаточно убедиться в том, что $g(1) \leqslant 0$ и $g(2000-\frac{p}{2}) \leqslant 0$.

Проверим первое неравенство. Так как $p^2 \geqslant 4q$, получаем

$$g(1) = q - 999p - 2999 \leqslant \frac{p^2}{4} - 999p - 2999 = h(p).$$

Рассмотрим выражение $h(p)$ как квадратный трехчлен относительно p. Его старший коэффициент положителен, поэтому ветви параболы направлены вверх. Тогда, поскольку $h(0) = -2999 < 0$ и $h(3998) = -1000 < 0$, квадратный трехчлен отрицателен на отрезке $[0, 3998]$, в частности, отрицательно и $g(1)$.

Теперь установим второе неравенство:

$$g\left(2000-\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2}{4} + q - 1000 \leqslant -1000 < 0.$$

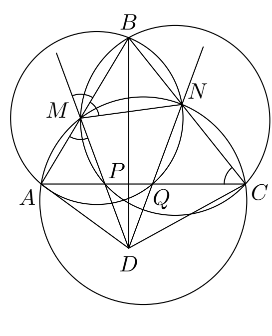
19. Если бы это было неверно, то каждое из чисел с 1-го по 50-е было бы в паре с каким-то числом, стоящим после 51-го. Это невозможно, так как там только 49 чисел.

20. Пользуясь тем, что сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°, заключаем, что для четырехугольника $BMPC$

$$\angle AMP = 180^\circ - \angle PMB = \angle BCP,$$

а для четырехугольника $AMNC$

$$\angle NMB = 180^\circ - \angle AMN = \angle ACN.$$



Отметив угол, вертикальный с углом AMP, получаем, что прямая MB —

биссектриса внешнего угла треугольника MDN. Аналогично NB — тоже биссектриса внешнего угла треугольника MDN. Как известно, биссектрисы двух внешних углов и биссектриса третьего угла треугольника пересекаются в одной точке (центре вневписанной окружности). Следовательно, DB — биссектриса угла MDN, чтд.

22. Ответ: не может.

Как нетрудно убедиться, на отрезке $[-1, 1]$ каждая из трех функций, которые умеет вычислять калькулятор, принимает значения, также принадлежащие отрезку $[-1, 1]$. Таким образом, все значения, которые может получить Саша, заведомо лежат на отрезке $[-1, 1]$.

23. Ответ: $10 \cdot 2^{12}$ маршрутов. При этом мы имеем в виду, что маршрут не ориентирован, т. е. маршрут — это линия, по которой двигается король; если учитывать еще и направление движения, то число маршрутов будет в 2 раза больше.

Алёшина фигура имеет вид крюка толщиной две клетки, вырезанного из прямоугольника 8×10, для краткости будем говорить, что мы имеем дело с крюком 8×10. Ключевое соображение: если увеличить на 1 высоту или ширину такого крюка, то число искомых маршрутов увеличится в два раза.

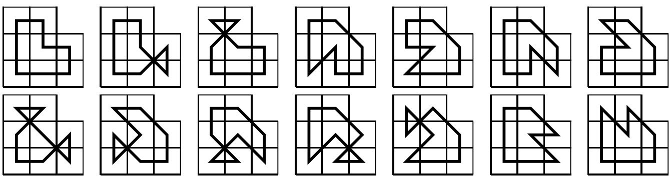
Ю	*Я*
A	B
C	D
$\dots$	

Докажем это. Пусть S — количество маршрутов короля для крюка 7×10. Проверим, что для крюка 8×10 количество маршрутов равно $2S$. Пусть A, B, C, D — верхние клетки крюка 7×10, *Ю* и *Я* — две верхние клетки крюка 8×10.

Сначала сделаем наблюдение: любой маршрут короля, обходящий все клетки крюка 8×10, должен содержать отрезок *Ю*–*Я*. Действительно, если король сначала пришел на клетку *Ю*, но не прошел по отрезку *Ю*–*Я*, то он двигался по пути A–*Ю*–B или B–*Ю*–A и, таким образом, он посетил уже клетки A и B. Но король должен когда-то посетить и клетку *Я*. Тогда, уходя с нее, он повторно посетит клетку A или B, что невозможно.

Итак, маршрут короля, обходящий все клетки крюка 8×10, содержит отрезок *Ю*–*Я*. И тогда очевидно, что любой такой маршрут не содержит отрезок A–B. С другой стороны, каждый маршрут короля, обходящий все клетки крюка 7×10, содержит отрезок A–B. Тогда ясно, что каждый маршрут в крюке 8×10 получается из маршрута в крюке 7×10 несложной перестройкой: нужно заменить фрагмент A–B на A–$Ю$–$Я$–B или A–$Я$–$Ю$–B. Таким образом, число маршрутов в крюке 8×10 в 2 раза больше, чем в крюке 7×10.

Рассуждая аналогично, мы получим, что число маршрутов в крюке 8×10 в 2^2 раз больше, чем в крюке 7×9, в 2^3 раз больше, чем в крюке 6×9 и т. д., наконец, в 2^{12} раз больше, чем в крюке 3×3. А маршруты в крюке 3×3 нетрудно подсчитать перебором — их всего 14.



Но следует иметь в виду, что последние 4 варианта в нижнем ряду не удовлетворяют наблюдению, сделанному выше. Например, самый последний маршрут не может быть перестроен в маршрут для крюка 4×3.

Остальные 10 маршрутов годятся, значит, для крюка 8×10 имеется $10 \cdot 2^{12}$ маршрутов.

24. Ответ: 75 зверей.

Р е ш е н и е 1 (уравнения). Обозначим количества проголосовавших за Кабана, Льва, Медведя и Носорога буквами K, $Л$, M и H соответственно, а общее количество голосовавших обозначим через x. Ясно, что

$$x = K + Л + M + H.$$

Тогда доля проголосовавших за Льва равна $Л/x$, а утроенное количество процентов — $300Л/x$. Следовательно, по условию $K = 300Л/x$. Аналогично выпишем равенства $Л = 300M/x$, $M = 300H/x$ и $H = 300K/x$. Просуммируем все выписанные равенства и получим, что

$$K + Л + M + H = \frac{300}{x} \cdot (Л + M + H + K),$$

откуда сразу же устанавливаем, что $x = 300$. Стало быть, $K = Л = M = H$ и, значит, все звери набрали поровну голосов, т. е. по $\frac{300}{4} = 75$. В частности, столько проголосовало и за Кабана.

Решение 2 (масштаб $1:3$). Если мы не путаем, вроде бы то ли фессалийские, то ли каппадокийские звероловы использовали для перевозки диких зверей клетки специальной конструкции. В каждую клетку вмещалось три зверя. Такая клетка называлась *прóцентом.*

Воспользуемся этими древнегреческими наработками. По условию ясно, что количество зверей, проголосовавших за каждого кандидата делится на 3, и значит, мы можем рассадить этих зверей-единомышленников по фессалийским клеткам. Тогда получается, что:

> число прóцентов, проголосовавших за Кабана, равно результату Льва в процéнтах; число прóцентов, проголосовавших за Льва, равно результату Медведя в процéнтах; число прóцентов, проголосовавших за Медведя, равно результату Носорога в процéнтах; наконец, число прóцентов, проголосовавших за Носорога, равно результату Кабана в процéнтах.

Из этого наблюдения следует, что суммарное количество прóцентов равно суммарному количеству процéнтов, т. е. 100. Но тогда результат каждого зверя в процéнтах равен количеству прóцентов, отдавших за него голоса! Получается, что результат Кабана равен результату Льва, результат Льва равен результату Медведя и т. д. Таким образом, все звери получили поровну голосов. Значит, за Кабана проголовало 25 прóцентов, или 75 зверей.

25. Ответ: нет.

Первая же операция выведет нас из диапазона (1,4]. Ни один следующий результат не сможет оказаться в этом диапазоне, так как, это легко видеть, все результаты будут либо в промежутке $[-1; 1]$, либо больше 4.

26. Ответ: 10.

Сложим из указанных фигурок прямоугольник 7×2. Такими прямоугольниками нетрудно замостить всю таблицу (укладывая их вертикально), а также всю таблицу без последней строки (укладывая их горизонтально). В первом случае нам для этого потребуется $S/7$ фигурок (где S — площадь таблицы), в частности, это значит, что сумма чисел во всей таблице равна $S/7$. Поскольку в последней строке 70 клеток, во втором случае потребуется $(S-70)/7$ фигурок. Значит, сумма чисел в таблице без последней строки равна $(S-70)/7$. Тогда сумма чисел в последней строке равна

$$\frac{S}{7}-\frac{S-70}{7}=10.$$

27. Ответ: $p=7$, $q=4$.

Левая часть делится на p. Разложим правую часть на множители: $(2q-1)(q-1)$. При $q=1$ получающееся уравнение на p не имеет натуральных корней. При остальных натуральных q правая часть уравнения положительна и делится на простое число p. Значит, либо $q-1$, либо $2q-1$ делится на p.

Если $q-1$ делится на p, то $q-1\geqslant p$, и сразу видно, что левая часть уравнения отрицательна и решений нет. Аналогично, если $2q-1$ делится на p и $2q-1\geqslant 2p$. Осталось разобраться со случаем $2q-1=p$. Подставляя $p=2q-1$, получаем квадратное уравнение

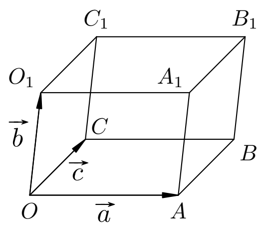
$$(4q^2-4q+1)-q(2q-1)-18=q-1,$$

т. е. $2q^2-4q-16=0$. Подходит положительный корень $q=4$, при этом $p=2q-1=7$.

28. Ответ: нет, не могут.

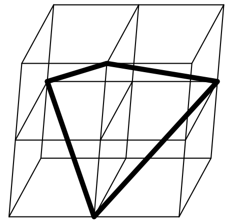
Решение 1 (сумма векторов). Пусть стороны параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$ задаются векторами $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OO_1}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$. Тогда диагонали параллелепипеда задаются векторами

$$\overrightarrow{B_1O}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c},$$
$$\overrightarrow{O_1B}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},$$
$$\overrightarrow{AC_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},$$
$$\overrightarrow{CA_1}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}.$$



Как видим, сумма этих векторов равна нулю. Значит, по неравенству треугольника ни один из них не может быть длиннее, чем сумма длин остальных трех.

Решение 2 (смотри!). В параллелепипеде общего вида 4 различных главных диагонали. На рисунке показаны 4 копии параллелепипеда и отмечено по одной диагонали каждого вида. Получился пространственный четырехугольник. Отсюда следует, что длины p, q, r, s этих диагоналей (при записи в любом порядке) удовлетворяют обобщенному неравенству треугольника



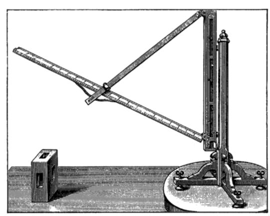
$$p + q + r \geqslant s.$$

Но для заданных чисел одно из таких неравенств неверно: $11 > 2 + 3 + 5$.

29. Ответ: $\text{НОД}(1\,000, n + 2) = 2$.

Заметим, что все делители 1000 суть произведения степеней двойки и степеней пятерки. Поэтому $\text{НОД}(1000, n + 2)$ может быть лишь числом такого вида. Из равенства $\text{НОД}(1000, n+1) = 5$ следует, что $n + 1$ делится на 5. Стало быть, $n + 2$ на 5 не делится. Значит, $\text{НОД}(1000, n + 2)$ может быть лишь степенью двойки. Поскольку $\text{НОД}(1000, n) = 4$, число n делится на 4. Следовательно, $n + 2$ четно и не делится на 4. Но тогда $\text{НОД}(1000, n + 2)$ равен 2.

30. Ответ: 10 000 рублей.



Трикветрум

Сначала приведем пример, показывающий, что экономия в 10 000 руб. возможна. Пусть в магазине продавались трикветрумы по 9 000 руб.* и гномоны по 1 000 руб. за штуку. Если Петя купил два трикветрума и один гномон, а Маша — один трикветрум и два гномона, то их чеки выглядят так:

Трикветрум	9 000
Трикветрум	9 000
Гномон	1 000

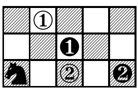
Трикветрум	9 000
Гномон	1 000
Гномон	1 000

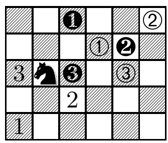
* Читатель может подумать, что 9 000 руб. дороговато для трикветрума, но следует иметь в виду, что вещь это антикварная, изысканная и не для массового пользования.

и у каждого экономия в 1 000 рублей. Но если бы чек был общий, то бесплатным бы оказался один трикветрум и один гномон, что вместе стоит 10 000 рублей.

С другой стороны, больше 10 000 рублей они сэкономить не могли, поскольку непосредственно перед каждым бесплатным товаром в чеке заведомо идут два небесплатных, каждый из которых не дешевле его и за которые пришлось заплатить. Таким образом экономия составляет не больше трети стоимости покупки, т. е. не больше 10 000 рублей.

31. Заметим, что от одной клетки полоски до другой клетки того же цвета (в этой же полоске) можно дойти за два хода коня (см. левый рисунок).





Поэтому числа, написанные в клетках полоски одинакового цвета, различаются не более чем на два. С другой стороны, от любой белой клетки до любой черной клетки из той же полоски можно добраться за три хода коня (правый рис.). Поэтому числа, написанные в клетках разного цвета, различаются не более чем на три. Значит, все числа в полоске отличаются друг от друга не более чем на три. А если бы все числа в полоске были различны, то самое большое от самого маленького отличалось бы хотя бы на четыре. Поэтому все числа различными быть не могут.

32. Очевидно, что числа, которые записывает Сережа, четны. При выполнении операции число увеличивается менее чем на 1000. Поэтому каждое число, которое Сережа записывает в тетрадку, могло получиться не более чем из двух разных чисел, а именно, число $1000a + 2b$ может получиться либо из числа, находящегося в той же тысяче, т. е. из числа $1000a + b$, либо из числа из предыдущей тысячи, в этом случае при выполнении операции был перенос, и исходное число было равно $1000(a - 1) + (b + 500)$.

Из написанных формул следует, что сумма чисел, из которых при выполнении получаются одинаковые результаты, обязательно четна.

Поскольку вначале было 88 чисел, при выполнении операций должно было получиться не менее 44 различных результатов. Но если их получилось ровно 44, то это значит, что все числа можно разбить на пары чисел, дающих одинаковый результат при выполнении операции. Тогда сумма чисел в каждой паре четна, и значит, сумма всех чисел тоже четна, что по условию не так. Следовательно, должно было получиться не менее 45 различных результатов.

У Сережи могло образоваться ровно 45 различных чисел. Пусть на доске написаны числа 1500, 1501, ..., 1542, 2000, 2001, ..., 2042. В тетрадку Сережа должен написать числа 2000, 2002, ..., 2084 (каждое по два раза), итого 43 различных числа. Если набор чисел на доске дополнить двумя произвольными числами, большими тысячи, так чтобы сумма всех чисел оказалась равна 999 999 (например, 3000 и 844 693), то в тетрадке у Сережи окажется ровно 45 различных чисел.

33. Пусть прогулка началась в момент времени $t = 0$, а в момент $t = 99!$ часов Кощеи устроили привал. К этому моменту времени каждый из Кощеев четное число раз поменял свое мнение, поскольку все частные

$$\frac{99!}{1}, \quad \frac{99!}{2}, \quad \frac{99!}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{99!}{99}$$

суть четные числа. Отсюда следует, что если какой-либо Кощей на k-м часу прогулки, т. е. в промежутке времени между $t = k-1$ и $t = k$, хотел идти в какую-то сторону, то на $(99! - k + 1)$-м часу (т. е. в промежутке времени между $t = 99! - k$ и $t = 99! - k + 1$) этот же Кощей хотел идти в противоположную сторону. Это очевидно: возьмем, к примеру десятого Кощея. Первые 10 часов прогулки он хочет идти вперед, потом следующие 10 часов хочет идти назад, следующие 10 часов – опять вперед и т. д. В момент $t = 99!$ он сменил свое мнение четное число раз, и значит, после этого момента он снова хочет идти вперед. Значит, 10 часов до наступления привала он хотел идти назад, 10 часов перед этим он хотел идти вперед, еще 10 часов перед этим он хотел идти назад и т. д.

Таким образом, картина мнений Кощеев о том, в какую сторону идти, имеет следующую симметрию: если на k-м часу своей прогулки Кощеи проголосовали идти в какую-то сторону, то на $(99! - k + 1)$-м часу Кощеи проголосуют идти в противоположную сторону. Отсюда следует, что если на k-м часу прогулки Кощеи идут влево, то на $(99! - k + 1)$-м часу Кощеи идут вправо, и значит, за эти два часа суммарное перемещения Кощеев равно нулю. Суммируя такие перемещения для $k = 1, 2, \ldots, 99!/2$, получаем, что привал состоялся в начальной точке маршрута.

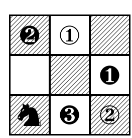
34. Допустим, что это не так, и каждый ученик в классе имеет четное число друзей. Разобьем класс на три группы. В первой группе будет только Вася. Во второй группе — Васины друзья (по нашему предположению их четное число). Оставшиеся одноклассники Васи — а их получается нечетное количество — пусть образуют третью группу.

Каждый школьник из третьей группы имеет четное число друзей, причем 5 из них – во второй группе, значит, остальные его друзья (опять нечетное количество) — в третьей группе. Таким образом, в третьей группе нечетное число школьников и каждый из них имеет нечетное число друзей в третьей группе. Это невозможно. Напомним почему.

Предположим, на секундочку, что это возможно и представим себе, что каждые два друга обменялись рукопожатием. Тогда каждый протягивал руку для рукопожатия нечетное число раз. А поскольку количество человек нечетно, всего было протянуто нечетное количество рук. Но при этом все руки разбились на пары при рукопожатиях. Противоречие.

35. Ответ: не может.

Предположим, что так оказалось. Заметим, что для каждого числа сумма трех величин: количества чисел, меньших его, количества чисел, больших его, и количества чисел, равных ему (с учетом его самого), в точности равна 2015. Тогда для каждого числа количество чисел, равных ему (с учетом его самого), четно. Но тогда и общее количество чисел четно, что невозможно, поскольку их 2015.



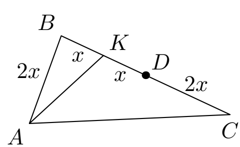
36. Заметим, что от любой клетки до соседней с ней можно дойти за три хода коня. Поэтому числа, написанные в соседних клетках, различаются не более чем на 3. А от клетки до клетки, расположенной через одну от нее, или клетки, соседней по диагонали, можно добраться за два хода коня. Поэтому числа, написанные в этих клетках различаются не более чем на 2. Таким образом, все числа в прямоугольнике 2×3 отличаются друг от друга не более чем на 3. Но если в нем есть хотя бы пять различных чисел, то самое большое от самого маленького отличается хотя бы на 4. А это, как мы уже знаем, невозможно.

37. Ответ: 4 «отдыхавших».

Пример. Если ничьих вообще не было, то после первого тура осталось 49 шахматистов. Они образовали 24 пары и одного «отдыхавшего», поэтому после второго тура осталось 25 шахматистов. Аналогично в третьем туре они образовали 12 пар и одного «отдыхающего», и, значит, в четвертый тур вышло 13 шахматистов. В пятый тур вышло семеро, в шестой четверо, которые за оставшиеся два тура и выявили победителя. В разобранном случае было как раз четверо «отдыхавших».

Оценка. Заметим, что в предпоследний тур не могло пройти больше четырех шахматистов, так как иначе они не смогли бы за два тура выявить победителя. С другой стороны, в каждом туре вылетает не более половины участников, поэтому к шестому туру останется не менее $\frac{98}{2^5} = 3\frac{1}{16}$ шахматистов. Стало быть, в шестом (=предпоследнем) туре играли ровно четверо. Тогда в последних двух турах не было «отдыхавших», равно как не могло быть их и в первом туре. Следовательно, туров, в которых они могли быть, не больше четырех.

39. Это следует из того, что треугольники KBA и ABC подобны по двум сторонам и углу с коэффициентом подобия 2.



40. Ответ: результат Стаса больше.

Рассмотрим вспомогательную таблицу:

	делится на 31	не делится на 31
делится на 29	A	B
не делится на 29	C	D

В клетки A, B, C, D этой таблицы впишем все числа от 1 до 1 000 000, в зависимости от их свойств делимости на 29 и 31.

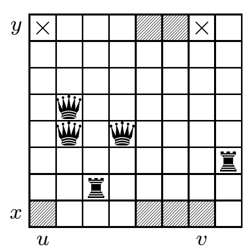
Например, числа 1 и 291 будут записаны в клетке D, а число 62 — в клетке C. По условию задачи Гриша перемножил все числа из клеток C и D, а Стас — все числа из клеток B и D.

Заметим, что числа из клетки D не вносят в произведение ни одного множителя 29 и ни одного множителя 31. Поэтому сокращение на степень 29 или степень 31 эти числа никак не затрагивает. Значит, чтобы сравнить результаты Гриши и Стаса, мы можем просто сократить эти результаты на произведение всех чисел клетки D.

Тогда получится, что у Гриши подсчитано произведение всех чисел клетки C, т. е. чисел вида $1 \cdot 31$, $2 \cdot 31$, $\ldots$, не делящихся на 29 и меньших миллиона, после чего в полученном произведении сокращены все множители 31. Ясно, что тогда произведение Гриши равно произведению всех чисел, не делящихся ни на 29, ни на 31 и меньших $\frac{1\,000\,000}{31}$. Аналогично у Стаса подсчитано произведение всех чисел, не делящихся ни на 29, ни на 31 и меньших $\frac{1\,000\,000}{29}$.

Значит, каждое число, которое присутствует в произведении Гриши, встретится и у Стаса. Но у Стаса перемножается больше чисел, например, у него среди сомножителей есть число 34 000 (поскольку $34\,000 \cdot 29 = 986\,000 < 1\,000\,000$), а у Гриши его нет (поскольку $34\,000 \cdot 31 = 1\,054\,000 > 1\,000\,000$).

41. Назовем горизонтальную или вертикальную линию *исключительной*, если на ней не стоит ни одной из наших фигур. В каждом из двух направлений имеется не менее 215 исключительных линий. Клетку, лежащую как на вертикальной, так и на горизонтальной исключительной линии, назовем *особой*. На рисунке показана доска, на которой стоит 5 фигур, имеется 4 горизонтальных и 4 вертикальных исключительных линии. Закрашено множество M, состоящее из $2 + 4$ особых клеток.



Пусть x, y, u, v — соответственно самая нижняя, самая верхняя, самая левая, самая правая исключительные линии. Не умаляя общности, можно считать, что расстояние между x и y не меньше, чем между u и v. Рассмотрим множество M

особых клеток в строках x и y за исключением двух крайних особых клеток строки y. В этом множестве не менее $215+213$ клеток. Они могут быть побиты только диагональным ходом ферзя. Но каждая диагональная линия пересекает множество M не более чем в одной точке, поэтому ферзей должно быть не меньше $(215+213)/2=214$.

42. Ответ: $ad+bc=0$.

Решение 1 (наблюдения за делимостью). Домножив на знаменатели, получим равенство

$$a^2cd+abc^2=(ad+bc)ac=(ab+cd)bd=ab^2d+bcd^2.$$

Стало быть,

$$bcd^2=a^2cd+abc^2-ab^2d,$$

что делится на a. По условию дроби a/b и d/a несократимы, поэтому числа b и d взаимно просты с a. Следовательно, c делится на a. Аналогично устанавливаем, что a делится на c. Таким образом, числа a и c делятся друг на друга и, значит, $a=\pm c$. Из тех же соображений получаем, что $b=\pm d$. Если в равенствах $a=\pm c$ и $b=\pm d$ знаки расставлены противоположным образом, то $ad+bc=0$. Рассмотрим теперь случай, когда знаки расставлены одинаково. Тогда

$$2\cdot\frac{c}{d}=\frac{\pm c}{\pm d}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{c}+\frac{d}{a}=\frac{\pm d}{c}+\frac{d}{\pm c}=\pm 2\cdot\frac{d}{c}.$$

Поэтому $c^2/d^2=\pm 1$. Знак минус невозможен, а знак плюс означает, что $c=\pm d$ и, следовательно, дробь c/d равна ± 1, что невозможно по условию.

Решение 2 (выделяем общие множители). Наибольший общий делитель чисел a и b будем обозначать (a,b). По условию $(a,b)=(b,c)=(c,d)=(d,a)=1$. Пусть $r=(a,c)$ и $s=(b,d)$. Тогда $a=a_1r$, $b=b_1s$, $c=c_1r$, $d=d_1s$ и числа a_1, b_1, c_1 и d_1 попарно взаимно просты. Кроме того, число r не имеет общих делителей с числами b_1, d_1 и s, а число s — с числами a_1, c_1 и r. Перепишем условие задачи в новых обозначениях:

$$\frac{r}{s}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{c_1}{d_1}\right)=\frac{a_1r}{b_1s}+\frac{c_1r}{d_1s}=\frac{b_1s}{c_1r}+\frac{d_1s}{a_1r}=\frac{s}{r}\left(\frac{b_1}{c_1}+\frac{d_1}{a_1}\right).$$

После домножения на знаменатели получим равенство

$$a_1c_1r^2(a_1d_1 + b_1c_1) = b_1d_1s^2(a_1b_1 + c_1d_1).$$

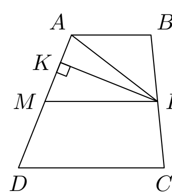
Пусть p — простой делитель числа a_1. Тогда на p не могут делиться числа b_1, d_1 и s. Значит, $a_1b_1 + c_1d_1$ делится на p. Поскольку a_1 делится на p, c_1d_1 также делится на p. Но это невозможно, ибо числа c_1 и d_1 на p не делятся. Следовательно, такого простого числа p не существует. Стало быть, $a_1 = \pm 1$. Аналогично устанавливаем, что $b_1 = \pm 1$, $c_1 = \pm 1$ и $d_1 = \pm 1$. Если все числа одного знака, то

$$a_1c_1(a_1d_1 + b_1c_1) = b_1d_1(a_1b_1 + c_1d_1) \neq 0 \qquad (*)$$

и, значит, $r^2 = s^2$. Поэтому $r = \pm s$ и, из-за взаимной простоты, $r = \pm 1$ и $s = \pm 1$. Но в этом случае все дроби из условия оказываются целыми числами. Если два числа одного знака, а два — другого, то опять же сначала получаем равенство $(*)$, а затем и противоречие. Наконец, если три числа одного знака, а четвертое — другого, то $a_1d_1 + b_1c_1 = 0$ и, значит, $ad + bc = 0$. Откуда и приходим к ответу.

Приведем пример чисел, показывающих, что ситуация из условия задачи возможна. Если $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$ и $d = 3$, то

$$\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{3}{-2} + \frac{3}{2}.$$



43. Из неравенства $3AK \leqslant KD$ следует, что $4AK \leqslant AD$ и, значит, $AK \leqslant \frac{AD}{4}$. Пусть M — середина стороны AD. Тогда FM — средняя линия трапеции и она равна $\frac{1}{2}(AB + CD)$. Таким образом, надо доказать, что $FM \geqslant AF$. Это можно сделать разными способами.

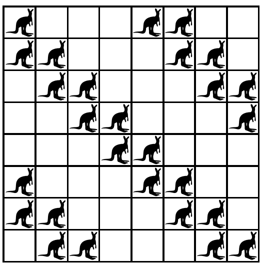
П е р в ы й с п о с о б. По теореме Пифагора

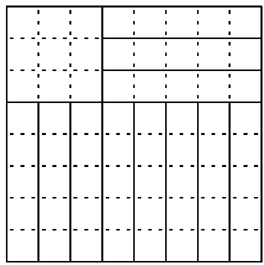
$$FM^2 = FK^2 + KM^2 \geqslant FK^2 + AK^2 = AF^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $AK \leqslant MK$, поскольку $AK \leqslant \frac{AD}{4} = \frac{AM}{2}$.

В т о р о й с п о с о б. На луче KD отметим такую точку L, что $KL = AK$. Тогда отрезок FK — высота и медиана треугольника AFL. Следовательно, $AF = FL$. Поэтому осталось доказать неравенство $FM \geqslant FL$. Поскольку $AK \leqslant \frac{AD}{4} = \frac{AM}{2}$, точка L лежит на отрезке KM. Если треугольник FLM оказался вырожденным, то мы имеем равенство $FL = FM$. Если же он невырожденный, то $\angle FLM$ дополняет острый угол $\angle FLA$ до 180° и, значит, является тупым. Тогда он наибольший в треугольнике FLM и напротив него лежит наибольшая сторона FM. Стало быть, $FM > FL$.

44. Ответ: 27 кенгуру. Пример расстановки показан на левом рисунке.





Докажем, что больше 27 не бьющих друг друга кенгуру расставить нельзя. Для этого заметим, что в полоске 1×5 кенгуру могут стоять либо рядом, либо на противоположных концах полоски и, в любом случае, их не больше двух. Рассмотрим далее квадрат 3×3. В паре клеток, помеченных одинаковыми цифрами, может стоять лишь один кенгуру. Поэтому в квадрате 3×3 их не более пяти.

1	4	1
2		2
3	4	3

Разрежем теперь доску 8×8 на один квадрат 3×3 и 11 полосок 1×5, например, как показано на рисунке выше. По доказанному на доске не более чем $5 + 11 \cdot 2 = 27$ кенгуру.

45. Будем по выписанным числам восстанавливать исходные 30 чисел. Допустим из какого-то числа n и в качестве остатка, и в качестве неполного частного получилось число a. Тогда $n = 99a + a = 100a$ и, следовательно, предпоследняя цифра числа n равна нулю, что невозможно. Значит, для каждого числа остаток и неполное частное различны. Рассмотрим теперь числа $a \neq b$, оказавшиеся на доске. Если для какого-то одного исходного числа a оказалось остатком, а b неполным частным, а для какого-то другого числа — b оказалось остатком, а a неполным частным, то сумма этих чисел равна $(99a+b)+(99b+a)=100(a+b)$. Таким образом, у суммы предпоследняя цифра равна нулю, что невозможно для суммы двух чисел, у которых предпоследние цифры больше 5. Следовательно, любая пара различных выписанных чисел (a,b) могла получиться либо как остаток и неполное частное, либо как неполное частное и остаток. Но, если среди выписанных на доску чисел не более 8 различных, то пар различных чисел не более чем $\frac{7\cdot 8}{2}=28$ и, значит, исходных чисел не более 28. Следовательно, на доске хотя бы 9 различных чисел.

46. Ответ: наименьшее возможное k равно 1614.

Сначала покажем, что k может равняться 1614. Рассмотрим 2015 чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 1613,\ n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+401.$$

Их упятеренное среднее арифметическое равно

$$5\cdot\frac{1+2+\ldots+1613+1+2+\ldots+401+402n}{2015}=\frac{s+402n}{403},$$

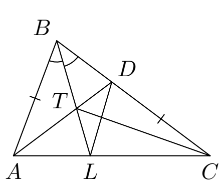
где $s=1+2+\ldots+1613+1+2+\ldots+401$. Заметим, что дробь $\frac{s+402n}{403}$ равна n при $n=s$. Поэтому мы нашли требуемый пример.

Покажем, что $k\geqslant 1614$. Если a_k в пять раз больше среднего арифметического всех чисел, то

$$a_k=5\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2015}}{2015}>5\cdot\frac{a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{2015}}{2015}>$$
$$>5\cdot\frac{(2016-k)a_k}{2015}=\frac{(2016-k)a_k}{403}.$$

Таким образом, $1>\frac{2016-k}{403}$ и, значит, $k>2016-403=1613$, т. е. $k\geqslant 1614$.

47. Заметим, что у треугольников ALT и CLT общая высота из вершины T, следовательно,



$$S_{\triangle CLT}:S_{\triangle ALT}=CL:AL=CB:BA,$$

последнее равенство — по свойству биссектрисы. Далее, у треугольников ALT и ALD общая высота из вершины L, поэтому

$$S_{\triangle ALT} : S_{\triangle ALD} = AT : AD = AB : (AB + BD).$$

Осталось заметить, что $AB + BD = BC$, и перемножить эти два равенства.

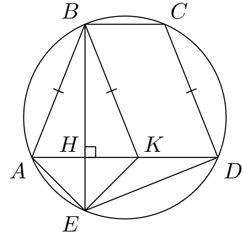
48. Докажем, что тапочки можно выдавать члену клуба в момент его прихода, т. е. когда еще неясно, кто из членов клуба присутствует и какая у них схема знакомств. Рассуждение будем вести по индукции. Первому пришедшему выдаем тапочки двух произвольных цветов.

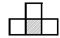
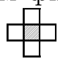
Если очередной пришедший обнаружил среди присутствующих x знакомых, то им подарено $2x$ тапочек, значит, для пришедшего нужно выбирать тапки из $23 - 2x$ оставшихся цветов (это количество положительно, поскольку по условию $x \leqslant 10$). При этом у каждого из x знакомых есть не более $10 - x$ «знакомых второго ранга» — итого в сумме у них не более $x(10 - x)$ комплектов тапок. Осталось заметить, что $C_{23-2x}^2 \geqslant x(10-x)+1$ (оно равносильно неравенству $(x-9)(3x-28) \geqslant 0$), что означает, что из разрешенных цветов удастся выбрать пару тапок, не совпадающую с тапками вторичных знакомых.

49. Ответ: существует. Например, $f(x) = x^2 - 1$.

Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{3})) = 0$? А такой, что $f(f(\sqrt{5})) = 0$?

50. Обозначим через H точку пересечения отрезков AD и BE. Отметим на луче DA такую точку K, что $KD = BC$. Тогда четырехугольник $KBCD$ является параллелограммом и, значит, $KB = CD$. Но по условию $AB = CD$, поэтому $AB = BK$. Таким образом, BH — высота равнобедренного треугольника ABK. Тогда она является медианой и, значит, $AH = HK$. Отсюда следует, что треугольники AEH и KEH равны (по двум сторонам и углу между ними). Стало быть, $AE = KE$. Осталось лишь заметить, что по неравенству треугольника $DE < DK + KE = BC + AE$.



51. Назовем *центром* отмеченную клетку фигурки . А фигурку, содержащую клетки четырех разных цветов, назовем хорошей. Заметим, что положение фигурки на доске определяется положением центра и одним из четырех углов поворота. Посчитаем, сколькими способами можно разместить фигурку на доске. Если ее центр расположен не на границе (это 2013^2 способов), то фигурку можно повернуть четырьмя способами. Если же ее центр на границе, то положение фигурки определено однозначно и таких фигурок $4 \cdot 2013$, поскольку в углу центр располагаться не может. Рассмотрим фигурку, центр которой не лежит на границе. Тогда крест  целиком помещается на доске и в нем найдутся две клетки одного цвета. Поэтому среди фигурок, центр которых совпадает с центром креста, не более двух хороших. Следовательно, всего хороших не более чем $2 \cdot 2013^2 + 4 \cdot 2013$. Осталось заметить, что это меньше, чем $0,51(4 \cdot 2013^2 + 4 \cdot 2013)$, поскольку $0,01 \cdot 4 \cdot 2013^2 > 4 \cdot 2013$.

52. Решение 1. Поскольку числа положительны, достаточно доказать, что

$$S = 16x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 8xz + 2yz = (4x + y + z)^2 \geqslant 4.$$

По неравенству $y^2 + z^2 \geqslant 2yz$ имеем:

$$\begin{aligned} S &\geqslant 16x^2 + 8xy + 8xz + 4yz = \\ &= 16x^2 + 4(xy + yz + zx + 2xyz) + 4xy + 4xz - 8xyz = \\ &= 16x^2 + 4 + 4xy + 4xz - 8xyz. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно проверить, что $16x^2 + 4xy + 4xz \geqslant 8xyz$, т. е. что $4x + y + z \geqslant 2yz$. Это неравенство выполнено в силу того, что

$$4x + y + z \geqslant y + z \geqslant 2\sqrt{yz} \geqslant 2yz,$$

здесь в первом неравенстве отброшен положительный x, в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что по условию $yz = 1 - xy - xz - 2xyz \leqslant 1$.

Решение 2. Предположим противное, тогда $4x+y+z < 2$. Домножим числа x, y и z на такое число $k > 1$, что $4kx + ky + kz = 2$. Тогда

$$kx \cdot ky + ky \cdot kz + kz \cdot kx + 2kx \cdot ky \cdot kz > k^2(xy + yz + zx + 2xyz) > 1.$$

Таким образом, достаточно доказать, что для положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $4a+b+c=2$, выполнено неравенство $ab+bc+ca+2abc \leqslant 1$. Тогда, подставив в это утверждение числа kx, ky и kz, мы придем к противоречию.

Выразим a из условия: $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(b+c)$, подставим его в доказываемое неравенство и преобразуем. Получим неравенство

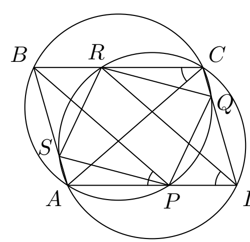
$$1 \geqslant a(b+c)+bc(1+2a)=$$
$$=\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(b+c)\Big)(b+c)+bc\Big(1+2\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(b+c)\Big)\Big)=$$
$$=\frac{1}{4}\big(2(b+c)-(b+c)^2+bc(8-2(b+c))\big),$$

которое нужно доказать при условии, что $b+c<2$. Поскольку bc умножается на $8-2(b+c)>0$, правая часть увеличится, если мы заменим bc на большее его число $\frac{1}{4}(b+c)^2$. Таким образом, достаточно установить неравенство

$$4 \geqslant 2(b+c)-(b+c)^2+2(b+c)^2-\frac{1}{2}(b+c)^3=2s+s^2-\frac{s^3}{2}$$

где $s=b+c$, или, что тоже самое, $s^3-2s^2-4s+8 \geqslant 0$. Но последнее неравенство переписывается в виде $(s-2)^2(s+2) \geqslant 0$, в котором оно очевидно.

53. Заметим, что $\angle ADR=\angle ACR=\angle ACB=\angle APB$ по свойствам вписанных углов, откуда $PB \parallel DR$. Аналогично, $DS \parallel BQ$. Следовательно, симметрия относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма $PQRS$ переводит треугольник SDR в треугольник QBP, в частности, D отображается в B. Тогда точка пересечения прямых BR и DQ переходит в точку пересечения симметричных им прямых DP и BS, т. е. C переходит в A. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно той же точки, и значит, является параллелограммом.



54. Ответ: $k=1007$.

Покажем сначала, что всегда найдутся 1008 компаний, с помощью которых можно добраться от любой планеты до любой другой. Выберем произвольно 1008 компаний, назовем их стремительными, а остальные — надежными. Предположим, что посредством стремительных компаний нельзя добраться, скажем, с Венеры на Сатурн. Это значит, что Венеру и Сатурн соединяет рейс надежной компании, и любая другая планета соединена рейсом надежной компании либо с Венерой, либо с Сатурном. Отсюда следует, что с любой планеты до любой можно добраться рейсами надежных компаний (через Венеру и Сатурн). Добавляя к надежным компаниям любую стремительную, получаем требуемые 1008 компаний.

Теперь приведем пример, показывающий, что $k = 1008$ компаний закрыть с выполнением требований удастся не всегда. Для каждого множества U из 1008 авиакомпаний может найтись такая планета $f(U)$, на которую летают только компании из U. Планет для выполнения такого требования нужно не более чем 2^{2015} (общее число подмножеств множества компаний), а у нас их больше. При этом для любых двух планет $f(U), f(V)$ их можно соединить рейсом компании из $U \cap V$ — это множество непусто. Как соединяются другие пары планет, неважно.Теперь при закрытии любого множества U из 1008 компаний планета $f(U)$ становится изолирована от остальной галактики.

55. Предположим, что в последовательности отсутствует некоторое натуральное число x. Поскольку числа в последовательности не повторяются, $a_i > x$ при достаточно больших i, скажем, при $i > M$. Если $k > M$ и a_k не взаимно просто с x, то a_{k+1} тоже не взаимно просто с x: иначе вместо $a_{k+2} > x$ следовало бы включить в последовательность x (или еще меньшее число). Тогда все a_i при $i > k$ не взаимно просты с x. Таким образом, имеет место дихотомия: либо все члены последовательности с некоторого места взаимно просты с x, либо все они с некоторого места не взаимно просты с x. Рассмотрим два случая.

Дихотомия — это наличие альтернативы.

1) Последовательность содержит все степени двойки. Пусть в ней нет какого-то нечетного числа k. Тогда, начиная с некоторого места, все члены последовательности должны быть взаимно просты с k (другой случай дихотомии нарушался бы степе-

нями двойки). Значит, последовательность не содержит чисел вида $w = 2^M k$ при достаточно больших M. Но сколь угодно далеко есть как взаимно простые с w (любое далекое нечетное), так и не взаимно простые (степени 2). Противоречие.

2) Последовательность не содержит число 2^m. Тогда, начиная с некоторого места, все члены последовательности — нечетные числа (построение последовательности на базе второго варианта дихотомии сразу ведет к противоречию). Пусть p — простое число, тогда при достаточно большом M последовательность не содержит число $2^M p$, значит,

начиная с некоторого места, все члены последовательности взаимно просты с $2^M p$. $\quad (*)$

Итак, каждое простое число является делителем лишь конечного количества членов нашей последовательности. Заметим, что если $a_n = p$ — простое число, то либо a_{n+1} четно, либо $a_{n+2} = 2p$, либо $2p = a_k$ при некотором $k < n$.

Каждый из этих вариантов приводит нас к четному числу, а последовательность содержит лишь конечное число четных чисел. Таким образом, количество простых чисел p, которые содержатся в нашей последовательности, также конечно, пусть P — наибольшее из них. Подберем номер n, для которого все простые делители числа a_n больше P, это удастся сделать в силу $(*)$. Если q — наименьший простой делитель числа a_n, то $a_{n+2} = q$. Противоречие.

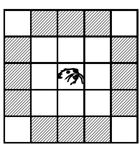
56. Решение 1. Пусть девочки занимают k трехместных палат. Тогда в трехместных палатах живет $3k$ девочек. Поскольку это не менее двух третей от количества всех девочек, то всего девочек не более чем $\frac{9k}{2}$. Кроме того, трехместных палат в лагере не меньше чем k, а четырехместных не меньше, чем трехместных, поэтому в лагере не меньше k четырехместных палат и, значит, хотя бы $7k$ детей. Следовательно, девочки составляют не более чем $\frac{9k/2}{7k} = \frac{9}{14} < 0{,}65$ от общего количества детей. Поэтому мальчиков не меньше 0,35 от общего количества детей.

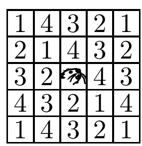
Решение 2. Будем выгонять из лагеря мальчиков. Сначала выгоним всех мальчиков, живущих в трехместных палатах. Условие задачи от этого не нарушится, а процент мальчиков разве что уменьшится. Затем будем выгонять из лагеря мальчиков целыми четырехместными палатами до тех пор, пока количество трехместных и четырехместных палат не окажется равным*. Условие задачи опять же не нарушится, а процент мальчиков не увеличится. Пусть теперь в лагере k трехместных и k четырехместных палат. Все трехместные палаты заняты девочками, поэтому девочек в них проживает $3k$, и по условию это более чем $\frac{2}{3}$ от общего числа девочек. Поэтому в четырехместных палатах проживает не более чем $\frac{3k}{2}$ девочек. И занимают они не более чем $\frac{3k}{8}$ четырехместных палат. Тогда мальчики занимают не менее чем $\frac{5k}{8}$ четырехместных палат и, значит, их не менее чем $\frac{5k}{2}$. Так как всего детей $7k$, доля мальчиков не меньше $\frac{5k/2}{7k} = \frac{5}{14} > 0{,}35$.

57. Ответ: в 4 цвета.

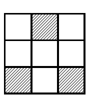
Назовем боброконем фигуру, которая ходит и как конь, и как бобер. Отметим клетки, которые находятся под боем боброконя (см. рис. ниже слева).

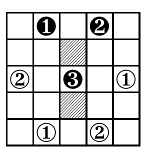
Покрасим доску в четыре цвета диагоналями, как показано на правом рисунке. Если боброконь стоит в центральной клетке, т. е. в клетке первого цвета, то он не бьет ни одной клетки своего цвета.





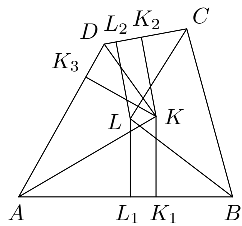
Докажем теперь, что в три цвета так покрасить доску нельзя. Предположим противное. Поскольку из каждой заштрихованной клетки можно ходом боброконя попасть в любую другую заштрихованную клетку, меньше чем тремя цветами не обойтись (см. рис. слева). Причем заштрихованные клетки должны быть разных цветов.





* При таких действиях количество мальчиков неожиданно может стать отрицательным, но, как мы поймем далее, такого заведомо не случится.

Поэтому, стартовав с клеток, отмеченных черными кружочками, мы однозначно определяем цвета, в клетках с белыми кружочками. Но тогда две заштрихованные клетки должны быть третьего цвета, поскольку от них ходом коня можно попасть как в клетку первого цвета, так и в клетку второго цвета. Но они не могут быть одного цвета, так как из одной в другую можно попасть ходом бобра.



58. Пусть K_1, L_1 — проекции точек K, L на прямую AB, K_2, L_2 — проекции на прямую DC. Легко видеть, что точка K_1 лежит на луче AB, L_1 — на луче BA, поэтому $K_1L_1 = |AB - AK_1 - BL_1|$, аналогично $K_2L_2 = |DC - DK_2 - CL_2|$. Кроме того, если точка K_3 — проекция K на AD (она лежит на отрезке AD), то $AD = AK_3 + DK_3 = AK_1 + DK_2$. Аналогично $BC = BL_1 + CL_2$. Осталось заметить, что

$$2KL \geqslant K_1L_1 + K_2L_2 = |AB - AK_1 - BL_1| + |DC - DK_2 - CL_2| \geqslant$$
$$\geqslant |AB - AK_1 - BL_1 + DC - DK_2 - CL_2| = |AB + DC - AD - BC|.$$

На самом деле, $K_1L_1 = K_2L_2$. Это следует, например, из того, что точки K и L лежат на биссектрисе угла, образованного прямыми DC и AB (или на средней линии трапеции $ABCD$, если $AB \parallel CD$).

59. Ответ: 2010.

Пусть n — олимпиадное число. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $f(x) = ax^2 + c$. Тогда число $k = f(\sqrt{n}) = an + c$ есть корень трехчлена $f(x)$. Отсюда получаем, что $c = -ak^2$, $n = \frac{k-c}{a} = \frac{k}{a} + k^2$. Если $|k| \geqslant 46$, то $n \geqslant 46^2 - 46 = 2070$; настолько крупные олимпиадные числа нас не интересуют. Если $|k| \leqslant 44$, то $n \leqslant 44^2 + 44 = 1980$. Наконец, если $|k| = 45$, то $\frac{k}{a} = n - 2025 \leqslant -10$ — целый делитель числа 45, откуда $\frac{k}{a} \leqslant -15$, и тогда $n \leqslant 2010$. Случай $n = 2010$ реализуется для трехчлена $f(x) = -3x^2 + 6075$.

2) Пусть теперь коэффициент при x трехчлена $f(x)$ не равен 0. Обозначим $w = \sqrt{n}$. Тогда $f(w) = A + Bw$, где A, B — целые числа, $B \neq 0$. По определению олимпиадного числа $A + Bw$

есть корень трехчлена $f(x)$, тогда $A - Bw$ — тоже корень, и

$$f(x) = C(x - A - Bw)(x - A + Bw),$$

где коэффициент C — целое число (это старший коэффициент трехчлена $f(x)$). Подставим в эту формулу w:

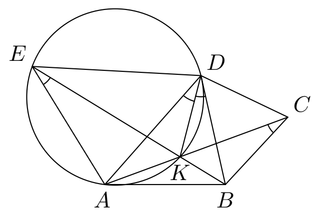
$$A + Bw = f(w) = C\bigl(A + (B-1)w\bigr)\bigl(A - (B+1)w\bigr) = \\ = C\bigl(A^2 - n(B^2-1)\bigr) - 2ACw.$$

Таким образом, $B = -2AC$ и $A = C(A^2 - n(B^2 - 1))$. Из этих равенств следует, что

$$A(AC - 1) = nC(B^2 - 1) = nC(2AC - 1)(2AC + 1).$$

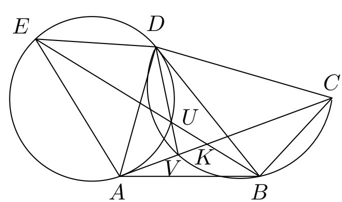
Но правая часть больше по модулю, чем левая. Противоречие. Значит, этот случай не дает примеров олимпиадных чисел.

60. Обозначим через K точку пересечения диагоналей EB и AC. Проведем биссектрису угла ADB. Если она прошла через точку K, то $\angle KEA = \frac{1}{2}\angle BDA = \angle KDA$, так что четырехугольник $DEAK$ — вписанный, откуда $\angle DEK = \angle DAK$, что и требуется.



В противном случае, не умаляя общности, можно считать, что биссектриса угла ADB пересекла отрезок AK в точке V и отрезок KE в точке U (второй случай получается из этого переобозначениями). Четырехугольники $BCDV$ и $UDEA$ вписанные, откуда

$$\angle BDC = \angle BVC < \angle EKA < \\ < \angle EUA = \angle EDA,$$



что противоречит условию.

62. Пусть $A_1 \ldots A_n$ — данный n-угольник, диагонали изначально проведены из точки A_1. Число на отрезке A_iA_j, $i < j$, будем обозначать $f(i,j)$. Подберем такие вещественные числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, что $f(i,j) = x_iy_j - x_jy_i$ для всех пар (i,j), где $i = 1$ или $j = i+1$, т. е. все исходные числа $f(i,j)$

будут записаны в таком виде. Это несложно сделать: например, положим $y_1 = x_2 = 0$, $x_1 = 1$, $y_2 = f(1,2)$, после чего последовательно при $k = 3, 4, \ldots, n$ полагаем

$$y_k = f(1,k), \qquad x_k = \frac{x_{k-1}y_k - f(k-1,k)}{y_{k-1}}$$

(знаменатель равен $y_{k-1} = f(1,k-1) \neq 0$). Пусть теперь $g(i,j) = x_i y_j - x_j y_i$ при всех $i < j$. Заметим, что числа $g(i,j)$ удовлетворяют при любых $i < j < k < l$ тождеству

$$g(i,j)g(k,l) + g(j,k)g(i,l) = g(i,k)g(j,l).$$

Отсюда индукцией по числу операций немедленно получаем, что число, написанное на диагонали A_iA_j (если она проведена), равно $g(i,j)$.

63. Ответ: 4.

Решение 1 (тригонометрия). Подберем α таким образом, чтобы выполнялись равенства $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$. Тогда $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3x - 4x^3 = -3/5$. Следовательно,

$$|20y^3 - 15y| = |20\cos^3\alpha - 15\cos\alpha| = |5\cos 3\alpha| = 5\sqrt{1-\sin^2 3\alpha} = 4.$$

Решение 2. Найдем значение выражения $|4y^3 - 3y|$. Для этого достаточно найти значение его квадрата, а потом извлечь корень. Но квадрат этого выражения равен

$$|4y^3 - 3y|^2 = y^2(4y-3)^2 = y^2(16y^4 - 24y^2 + 9).$$

Подставим $1 - x^2$ вместо y^2, преобразуем и получим выражение

$$-16x^6 + 24x^4 - 9x^2 + 1 = 1 - x^2(4x-3)^2 = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

Следовательно, $|4y^3 - 3y|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$, откуда и находим ответ.

64. Будем решать задачу от противного. Предположим, что числа $ab+1$ и $a+b$ имеют общий простой делитель p. Тогда произведение

$$(a^2+b)(b^2+a) = a^2b^2 + ab + a^3 + b^3 = ab(ab+1) + (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

тоже делится на p. Но поскольку $p \leqslant a + b < \min(a^2+b, b^2+a)$, число p является собственным делителем какого-то из чисел $a^2 + b$ или $a + b^2$, что противоречит их простоте.

65. Пусть имеется a_n способов набрать n граммов без использования гири в 1 г и b_n способов набрать n граммов с использованием гири в 1 г.

Добавив к каждому из способов первой группы гирю в 1 г, мы получим суммарный вес $n+1$ граммов. Значит, $b_{n+1} \geqslant a_n$. С другой стороны, если для каждого способа набрать n граммов с использованием гири в 1 г мы уберем эту гирю и заменим самую большую использованную гирю в этом способе на ту, которая весит на 2 г больше, снова получится суммарный вес $n+1$ граммов. Следовательно, что $a_{n+1} \geqslant b_n$. Сложив эти два неравенства, получим требуемое.

67. Ответ: у 100 прямоугольников.

Пример. Одну из сторон разобьем на 100 отрезков длины 1, а другую — на 99 отрезков длины 1,01 и оставшийся отрезок длины 0,01. Тогда только 100 прямоугольников с узкой стороной длины 0,01 имеют площадь меньше 1.

Оценка. Первый способ. Пусть одна из сторон разбита на отрезки длины $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{100}$, а другая — на отрезки $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{100}$. Рассмотрим числа $\sqrt{a_1 b_{100}}$, $\sqrt{a_2 b_{99}}$, $\ldots$, $\sqrt{a_{100} b_1}$. В силу неравенства $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$, сумма всех этих чисел не превосходит половины суммы всех a_i и b_i т. е. не превосходит 100. Поэтому найдется такой номер j, что $a_j b_{101-j} \leqslant 1$. Но тогда и для всех пар k, n при $k \leqslant j$, $n \leqslant 101-j$ тоже выполнено неравенство $a_k b_n \leqslant 1$, причем количество таких пар равно $j(101-j) \geqslant 100$. Это значит, что все прямоугольники со сторонами a_k и b_n имеют площадь не больше 1 и число этих прямоугольников не меньше 100.

Второй способ. Пусть одна из сторон разбита на отрезки длины a_0, a_1, $\ldots$, a_{99}, а другая — на отрезки b_0, b_1, $\ldots$, b_{99}. Для удобства будем считать, что отрезки занумерованы остатками от деления на 100. Возьмем произвольное k от 0 до 99 и рассмотрим выражение

$$\left(\sqrt{a_0 b_k} + \sqrt{a_1 b_{k+1}} + \sqrt{a_2 b_{k+2}} + \ldots + \sqrt{a_{99} b_{k+99}}\right)^2.$$

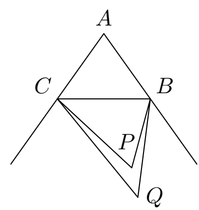
По неравенству Коши–Буняковского оно не превосходит

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_{99})(b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{k+99}) = 100^2.$$

Следовательно, $\sqrt{a_0 b_k} + \sqrt{a_1 b_{k+1}} + \sqrt{a_2 b_{k+2}} + \ldots + \sqrt{a_{99} b_{k+99}} \leqslant \leqslant 100$, и значит, одно из его слагаемых не превосходит 1. Стало быть, мы доказали существование прямоугольника малой площади, у которого номера сторон различаются ровно на k. А поскольку k может быть любым числом от 0 до 99, существует не менее 100 таких прямоугольников.

68. Рассмотрим граф G, в котором вершины — это города, а рёбра — дороги. Степени всех вершин этого графа равны 100. Разобьем все рёбра графа G на реберно непересекающиеся циклы. В каждом цикле зададим произвольно порядок обхода и ориентируем рёбра в направлении обхода цикла. Тогда в каждую вершину G входит 50 ребер и из каждой вершины выходит тоже 50 ребер. Разобьем все ребра, выходящие из каждой вершины, на 5 пучков. Тогда все рёбра графа G разобьются на пучки.

69. Л е м м а. Вне равнобедренного треугольника ABC (где $AB = AC$), но внутри угла BAC выбраны точки P и Q, такие что



$$\angle ACP + \angle QBC = 180^\circ,$$
$$\angle ABP + \angle QCB = 180^\circ. \qquad (*)$$

Тогда прямая PQ проходит через точку A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку треугольник равнобедренный, с учетом $(*)$ имеем $\angle PBC = \angle PBA - \angle CAB = 180^\circ - -\angle QCB - \angle BCA = 180^\circ - \angle QCA$. Аналогично доказывается, что $\angle PCB = 180^\circ - \angle QBA$. Отсюда и из данных в условии равенств следует, что

$$\sin\angle PCA = \sin\angle QBC,$$
$$\sin\angle PBA = \sin\angle QCB,$$
$$\sin\angle PBC = \sin\angle QCA,$$
$$\sin\angle PCB = \sin\angle QBA.$$

Тригонометрическая теорема Чевы. Для любых четырех различных точек плоскости A, B, C, P выполнено равенство

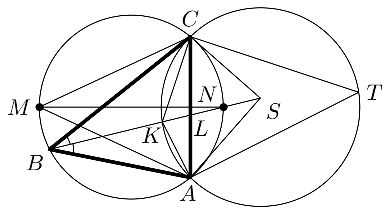
$$\sin\angle PAC \sin\angle PCB \sin\angle PBA = = \sin\angle PAB \sin\angle PBC \sin\angle PCA.$$

Тогда в силу тригонометрической теоремы Чевы

$$\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}=\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PCB}\cdot\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}=$$
$$=\frac{\sin\angle QBC}{\sin\angle QBA}\cdot\frac{\sin\angle QCA}{\sin\angle QCB}=\frac{\sin\angle QAC}{\sin\angle QAB}.$$

Поэтому лучи AP и AQ совпадают.

Попросту говоря, композиция симметрии относительно серединного перпендикуляра к BC и изогонального сопряжения относительно треугольника ABC переводит точку Q в точку P, а луч AQ переводит в себя. Следовательно, лучи AP и AQ совпадают.

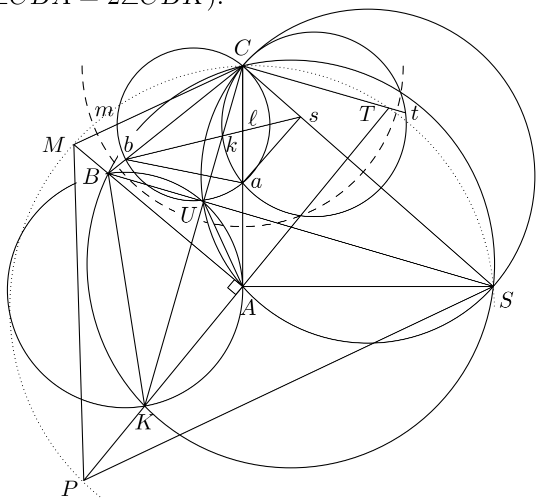


Приступим к решению задачи. Не умаляя общности будем считать, что $AB\leqslant BC$. Обозначим через M середину дуги ABC, а через N — точку пересечения BS с описанной окружностью ABC. Выберем точку S' на луче BK таким образом, что $AB/BK=S'B/BC$. Заметим, что тогда треугольники ABK и $S'BC$ подобны по углу и отношению прилежащих к нему сторон. Треугольники ABS' и KBC тоже подобны по той же причине. Но тогда $\angle AS'B=\angle KCB$ и $\angle BS'C=\angle KAB$. Сумма углов $\angle KCB+\angle KAB=90^\circ$, с другой стороны, это равно $\angle AS'B+\angle BS'C$, откуда $S=S'$. Тогда

$$\angle MAS+\angle ACT=\angle BAS-\angle BAM+90^\circ-\angle KCA=$$
$$=\angle BKC-\angle BNM-\angle KCA+90^\circ=$$
$$=90^\circ+\angle KLC-\angle KNM=180^\circ.$$

Аналогично доказывается, что $\angle MCS+\angle CAT=180^\circ$. Тогда в силу леммы, примененной к треугольнику AMC и точкам S и T, точки S, T, M лежат на одной прямой.

Решение 2 (инверсия). Обозначим середину дуги ABC через M и выполним инверсию с центром в точке C (и любым радиусом; на рисунке на следующей странице окружность, относительно которой делается инверсия, изображена пунктиром). Образы точек после инверсии будем обозначать теми же буквами (кроме точки C, которая останется C), на рисунке исходные точки помечены строчными буквами. Загадочное условие $\angle AKC - \angle ABC = 90^\circ$ превратится в понятное условие $\angle CAK - \angle CAB = 90^\circ$, то есть, учитывая расположение точек, попросту $BA \perp AK$. При этом прямоугольный треугольник BAK построен вовне треугольника BAC, а на стороне AC вовне построен прямоугольный треугольник CAS (с прямым углом A). Кроме того, точки C, S, K, B лежат на одной окружности и $\angle CAB = 2\angle CKB = 2\varphi$ (это образ при инверсии углов из условия $\angle CBA = 2\angle CBK$).



Аналогично решению задачи 60 (для невыпуклого пятиугольника $CBKAS$) устанавливается,что если U — точка пересечения отрезков CK и BS, то AU — биссектриса угла CAB, четырехугольники $BUAK$, $CUAS$ вписаны в окружности с диаметрами BK, CS соответственно. Точка M на луче AB такова, что $AM = AC$. Точка T на прямой KA такова, что $TC \perp CK$. Требуется доказать, что точки S, T, C, M лежат на одной окружности. Отметим точку P на луче AK так, что $AP = AS$. Тогда $SCMP$ — равнобочная трапеция (симметричная относительно прямой AU). Таким образом, S лежит на окружности

CMP, и нам осталось проверить, что на ней лежит и T. Имеем

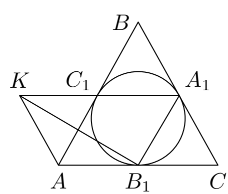
$$\angle TCM = \angle TCK + \angle MCA - \angle ACU = 90^\circ + 90^\circ - \varphi - \angle ACU = \\ = 180^\circ - \angle CSU - \angle USA = 180^\circ - \angle CSA = 180^\circ - \angle MPA, \text{ чтд.}$$

70. Проведем все возможные взвешивания. Тогда найдутся пары, которые во всех взвешиваниях оказались тяжелее. Назовем такие пары *тяжелыми*. Очевидно, что пары, состоящие из двух самых тяжелых камней, а также из самого тяжелого и третьего по весу — тяжелые. Тогда, если какой-то камень входит во все тяжелые пары, то он и есть самый тяжелый. Если такого камня нет, то будет всего три тяжелых пары (A, B), (A, C) и (B, C) где A, B, C — три самых тяжелых камня. Действительно, только пара из второго и третьего по весу камней может не содержать самого тяжелого и не быть легче ни одной из оставшихся пар этой тройки. Но тогда остальные пары легче какой-то пары из этой тройки.

Аналогично разберемся с легкими камнями. Получим три пары (a, b), (b, c), (a, c), которые легче остальных. Рассмотрим теперь два тяжелых камня из трех (например, A и B) и два легких (a и b). Посмотрим на результаты взвешиваний этих четырех камней. По этим результатам нетрудно определить либо более легкий из A, B, либо более тяжелый из a, b. Ни один из этих камней нам не нужен. Отбросим его, выберем еще две аналогичные пары, отбросим еще камень и т. д. В итоге останется один камень либо среди тяжелых, либо среди легких. Этот камень и будет тем, который нас интересует.

Замечание: нетрудно доказать, что именно самый тяжелый камень можно определить не всегда.

71. Заметим, что треугольники A_1BC_1 и KAC_1 подобны. Поскольку $BA_1 = BC_1$, то тогда и $KA = C_1A$. Следовательно, $KA = C_1A = B_1A$ и $\angle AKB_1 = \angle AB_1K$. Но тогда



$$180^\circ - \angle AB_1K = \angle CB_1A_1 + \angle AB_1K = \\ = 90^\circ - \angle ACB/2 + 90^\circ - \angle CAK/2 = 90^\circ.$$

Откуда $\angle A_1B_1K = 90^\circ$.

72. Ответ: $2^{10} = 1024$ раскраски. Пример: для каждого натурального числа $k \leqslant 10$ все числа, сравнимые с k по модулю 10, будем красить в один и тот же цвет. Такие раскраски, очевидно, подходят, и их ровно 1024.

Докажем, что других раскрасок не существует. Не умаляя общности можно считать, что единица — синяя. Тогда по условию если число $t > 10$ — синее, то и число $t - 10$ — синее. Тогда для любого $k \leqslant 10$ все числа, сравнимые с k по модулю 10 либо окрашены в один и тот же цвет, либо найдется такое k, что оба цвета присутствуют. Но тогда все числа, меньшие некоторого s, сравнимые с k по модулю 10, окрашены в синий цвет, а число s, и все бо́льшие его — в красный. Но тогда по условию число $10s + k - 10s = k$ окрашено в красный цвет, что противоречит предположению. Следовательно, других раскрасок не бывает.

73. Ответ: нет.

Предположим, что такие четыре точки существуют. Будем считать, что они образуют вписанный четырехугольник $ABCD$, а радиус его описанной окружности обозначим через R. Тогда заметим, что

$$AB \cdot BC \cdot CA + CD \cdot DA \cdot AC = 4R\big(S(ABC) + S(CDA)\big) =$$
$$= 4R\big(S(DAB) + S(BCD)\big) = DA \cdot AB \cdot BD + BC \cdot CD \cdot DB.$$

Но если разделить это равенство на произведение всех шести отрезков, то получится, что сумма каких-то двух из чисел 1, 1/2, 1/3, 1/4 равна сумме двух других, а это не так.

74. Проверим индукцией по k, что граф содержит клику на 2^k вершинах, ребра которой правильно окрашены (раскраской из условия) в $2^k - 1$ цвет.

База $k = 2$ очевидна. Переход: предположим, для некоторого k такая клика уже построена. Рассмотрим какой-то новый цвет c_1 и добавим к имеющимся вершинам все концы ребер, выходящих из вершин клики и имеющих этот цвет. Пронумеруем все вершины первой клики числами от 1 до 2^k и теми же числами вершины второй клики так, чтобы вершины с одинаковыми номерами были соединены цветом c_1. Тогда по условию рёбра, соединяющие вершины с номерами i и j в обеих кликах, должны быть одного цвета. Рассмотрим теперь цвета́ ребер, соединяющих вершины i и j из разных клик. Заметим, что все рёбра, выходящие из вершины 1 первой клики, должны иметь разные цвета. Пусть вершина 1 первой клики соединена ребром цвета c_k с вершиной k второй клики. В силу условия на 4-циклы вершина 1 второй клики соединена ребром цвета c_k с вершиной k первой клики. Рассмотрим вершину i первой клики. Пусть она соединена с вершиной 1 первой клики ребром цвета x. Тогда по предположению индукции для любой вершины j второй клики из нее выходит ребро цвета x к какой-то вершине k второй клики. Но тогда цвет ребра, соединяющего эти вершины i и j разных клик совпадает с цветом ребра, соединяющего вершины 1 и k разных клик. В силу произвольности выбора i и j, полученные 2^{k+1} вершин соединяются ребрами ровно $2^{k+1}-1$ цветов.

Из этого рассуждения следует, что рано или поздно таким удвоением будут получены все вершины исходного графа. Но тогда количество вершин этого графа было степенью двойки.

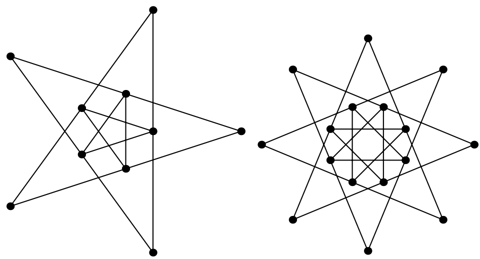
75. Ответ: выигрывает Вася.

Для этого он разбивает числа на пары $(2k-1, 2k)$ и отвечает ходом в парное число. Такой ход не проигрышный, поскольку после него заведомо остаются два числа с разностью 1. Вася продолжает так действовать, пока не останется 6 чисел. Если единица уже стерта (или Петя сейчас сходит в пару с единицей), то Вася продолжает стирать парные числа. Тогда в самом конце после хода Пети останется одно число, не равное единице, и он проиграет. Если же единица не стерта, на доске остались пары $(1, 2)$, $(2a-1, 2a)$, $(2b-1, 2b)$. Если Петя стирает $2a$, то Вася может убрать 1 и считать, что теперь числа 2 и $2a-1$ образуют пару. Аналогично, если Петя стирает $2b$. Если же Петя стирает $2a-1$ (или, аналогично, $2b-1$), то Вася стирает 1, оставляя 2, $2a$, $2b$, $2b-1$. Петя не может убрать $2b-1$. Значит, он убирает четное число, и Вася может убрать $2a$, если Вася выбрал не его, и $2b$ в противном случае. Тогда следующим ходом Петя оставит одно, не равное единице число и проиграет.

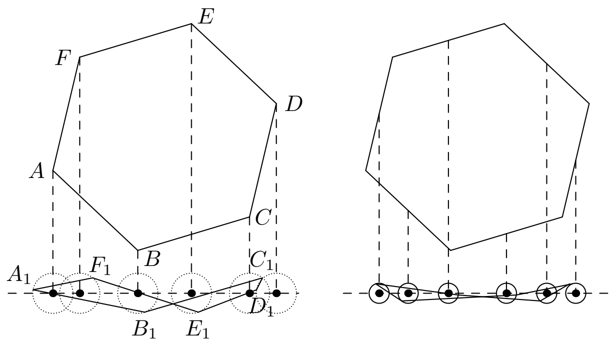
76. Ответ: Только при $n = 3$ или $n = 4$.

То, что при $n = 3$ или $n = 4$ получится выпуклая ломаная, очевидно.

При $n = 5$ или $n \geqslant 7$ можно нарисовать «звездочку» с вершинами правильного n-угольника (с шагом, взаимно простым с n). тогда с ней будет происходить поворотная гомотетия и мы никогда не получим выпуклую ломаную.



Интересен случай $n = 6$. Там тоже есть контрпример, его можно построить следующим образом. Возьмем правильный шестиугольник $ABCDEF$ и спроецируем его на какую-нибудь прямую так, чтобы проекции его вершин и середин сторон не совпадали. Пусть A_0, B_0, C_0 D_0, E_0, F_0 — проекции вершин (на рис. снизу слева обозначены жирными точками). Отложим от них маленькие векторы $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{B_0B_1}$, $\ldots$ так, что каждый следующий вектор получается из предыдущего поворотом на 120° (и ни один не параллелен и не перпендикулярен исходной прямой). Тогда $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — требуемая ломаная.



Проведение операций с этой ломаной мы можем сопровождать аналогичными операциями с исходным шестиугольником. За две операции шестиугольник $ABCDEF$ переходит в гомотетичный себе шестиугольник с коэффициентом $3/4$. Значит, ломаная $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ тоже с периодом 2 переходит в гомотетичную с коэффициентом $3/4$ ломаную. С векторами сдвигов будет происходить аналогичное преобразование, но с меньшим коэффициентом. Значит, форма ломаной $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ будет повторяться с шагом 2 (только векторы сдвигов будут всё время уменьшаться по сравнению с длиной отрезка, образованного базовыми точками — см. рис. справа на предыдущей странице). Шестиугольники не будут получаться выпуклыми, поскольку прямая, на которую проецировали, пересекает шестиугольник в 4 точках, совпадения вершин тоже не произойдет ввиду малости сдвигов и повторяемости конфигурации.

77. Сложим данное неравенство и равенство из условия. После раскрытия скобок, сокращения на 2 и переноса всех слагаемых в левую часть, получим

$$2a^3b+2b^3c+2c^3a+ab^3+bc^3+ca^3-\\ -3a^3b^2-3b^2c^2-3c^2a^2-a^2bc-b^2ac-c^2ab\geqslant 0.$$

Теперь снова прибавим данное равенство. Получим неравенство

$$4(a^3b+b^3c+c^3a)+(ab^3+bc^3+ca^3)-\\ -4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc(a+b+c)\geqslant 0.$$

После преобразований оно сводится к очевидному неравенству

$$bc(c-2b+a)^2+ab(b-2a+c)^2+ca(a-2c+b)^2\geqslant 0.$$

Для положительных чисел a, b и c выполнено равенство

$$2a^3b+2b^3c+2c^3a=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Докажите неравенство $ab^2+bc^2+ca^2\geqslant 2(a^2b+b^2c+c^2a)$.

79. Запишем C_{k+n}^n в виде

$$C_{k+n}^n=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}. \qquad (*)$$

Будем распределять все простые делители p числа́ C_{k+n}^n по множителям a_j таким образом, чтобы степени их вхождения в C_{k+n}^n и в $a_1a_2\ldots a_n$ были одинаковыми. Мы добьемся требуемой в условии задачи взаимной простоты сомножителей в разложении $C_{k+n}^n=a_1a_2\ldots a_n$, если каждое простое число p окажется ровно в одном множителе a_j. А условие $(k+j) \vdots a_j$ будет соблюдено, если каждое простое число p входит в разложение C^n_{k+n} в степени, не большей чем в разложение какого-то из чисел $k+j$ при $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть среди чисел $k+1$, $k+2$, …, $k+n$ на наибольшую степень простого числа p делится число $k+\ell$, и пусть оно делится в точности на p^m. Докажем, что C^n_{k+n} не делится на p^{m+1}. Если это так, то все множители p мы «отправим» в число a_ℓ. От этого не нарушится взаимная простота чисел a_j, и степени вхождения p в C^n_{k+n} и в $a_1a_2\ldots a_n$ окажутся одинаковыми.

Рассмотрим числа $k+1$, $k+2$, … …, $k+n$ по модулю p^m. Числа от $k+1$ до $k+\ell-1$ по модулю p^m сравнимы с -1, -2, …, $-(\ell-1)$, а числа от $k+\ell+1$ до $k+n$ сравнимы с $1, 2, \ldots, n-\ell$. Следовательно, суммарное вхождение p в числитель (кроме числа $k+\ell$) такое же, как в произведении

$$(-1)(-2)\ldots(-(\ell-1))\cdot 1\cdot 2\ldots(n-\ell) =$$
$$= (-1)^{\ell-1}(\ell-1)!(n-\ell)! = (-1)^{\ell-1}\frac{n!}{\ell C^\ell_n}.$$

Т е о р е м а Куммера. Степень вхождения простого числа p в C^n_{k+n} равна количеству переносов, которые возникают при сложении чисел k и n, записанных в системе счисления по основанию p.

Поскольку знаменатель последней дроби — целое число, это суммарное вхождение будет не больше чем в $n!$. Стало быть, C^n_{k+n} делится не более чем на m-ю степень p.

Пусть m — натуральное число, взаимно простое с k и с $n!$. Докажите, что число $\frac{(k+m)(k+2m)(k+3m)\ldots(k+nm)}{n!}$ можно представить в виде произведения n попарно взаимно простых сомножителей: $a_1a_2\ldots a_n$, где a_j — делитель числа $k+mj$.

80. Будем решать задачу индукцией по n. База для $n=1$ очевидна. Сделаем переход от $n-1$ к n. Из условия следует, что вершины G можно двумя способами так разбить на группы, в каждой из которых не более n вершин, что в первом разбиении все рёбра внутри групп были бы первого цвета, а во втором — второго. Добавим к графу G несколько изолированных вершин и распределим их по группам таким образом, чтобы в обоих разбиениях группы содержали ровно по n вершин. Полученный граф обозначим G'. Пусть k — это количество групп в каждом из разбиений. Рассмотрим вспомогательный двудольный граф H, такой что вершинами его первой доли будут группы из первого разбиения, вершинами второй доли — вершины второго разбиения; вершины соединены ребром, если соответствующие группы вершин имеют непустое пересечение. Тогда любому множеству из t вершин первой доли графа H соответствуют группы, содержащие nt вершин G'. Следовательно, множество этих nt вершин пересекают не менее t групп второго разбиения, а значит, существует не менее t вершин второй доли графа H, смежных с выбранными t вершинами первой доли. Тогда, в силу теоремы Холла, граф H имеет полное паросочетание. Это означает, что группы из разбиений можно разбить на пары пересекающихся. Выберем из пересечения каждой такой пары одну вершину графа G'. Тогда эти вершины попарно несмежны, удалим их. По предположению индукции остальные вершины можно правильно окрасить в $n-1$ цвет. Добавив к ним удаленные вершины, окрашенные в n-й цвет, получим переход индукции.

81. Ответ: $f(0,0)=\frac{1}{n}$.

Во-первых, докажем, что многочлен из условия задачи определен однозначно. Действительно, если нашлось два многочлена, удовлетворяющих условию, то их разность $g(x,y)$ обнуляется на указанном множестве из $n(n+1)/2$ точек. Тогда многочлен $g(x,1)$ имеет n корней как многочлен от x, отсюда $g(x,1)\equiv 0$, т. е. g делится на $y-1$. Обозначая $g(x,y)=(y-1)g_1(x,y)$ и подставляя $y=2$, аналогично получаем, что многочлен $g_1(x,2)$ имеет $n-1$ корней, так что $g_1(x,2)\equiv 0$, $g_1(x,y)=(y-2)g_2(x,y)$. Продолжая в том же духе, получим, что многочлен g, степень которого не превосходит $n-1$, делится на $(y-1)(y-2)\ldots(y-n)$, что возможно только при $g\equiv 0$.

Теперь предъявим многочлен, удовлетворяющий условию:

$$f(x,y)=\frac{x-(1-y)(1-\frac{y}{2})\ldots(1-\frac{y}{n-1})(x-\frac{y}{n})}{y}.$$

Непосредственно видно, что он удовлетворяет условию. Коэффициент в числителе при y равен $\frac{1}{n}$ — это и есть ответ.

Поясним, как может быть угадан многочлен. Многочлен $g(x, y) = yf(x, y) - x$ степени не больше n обращается в ноль во всех точках из условия задачи и равен x на прямой $y = 0$. Все многочлены, которые обращаются в ноль в указанных точках, можно выразить через $n + 1$ многочлен вида

$$(1-x)(2-x)\ldots(k-x)(1-y)(2-y)\ldots(n-k-y) \quad \text{при} \quad k = 0, \ldots, n.$$

Осталось найти их линейную комбинацию, которая дает x при $y = 0$. Оказывается, она выражается лишь через два первых, при $k = 0$ и $k = 1$.

Шокирующие подробности о восстановлении многочленов нескольких переменных по значениям в нескольких точках можно узнать из статьи Ф. Петрова в Уголке олимпиадофила.

82. Ответ: $3n - 6$ синих вершин.

Для решения задачи нам понадобится пара классических теорем.

Формула Эйлера.* Для любого выпуклого многогранника, имеющего V вершин, E ребер и F граней, справедливо равенство

$$V - E + F = 2.$$

Формула Пика.** Вершины многоугольника расположены в узлах целочисленной решетки на плоскости. Внутри него лежит n узлов решетки, а на границе m узлов. Тогда его площадь равна $n + \frac{m}{2} - 1$.

Определение. Пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — два неколлинеарных вектора на плоскости. Целочисленной решеткой, образованной векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$, называется множество концов векторов

$$L = \{a\vec{u} + b\vec{v} : a, b \in \mathbb{Z}\},$$

отложенных от фиксированной точки O.

---

* См., например, *Долбилин Н.* Три теоремы о выпуклых многогранниках // Квант, 2001, №5, С. 7–12 или *Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989. Задача 8.14.

** См., например, *Васильев Н. Б.* Вокруг формулы Пика // Квант. 1974. №12. С. 39–43 или *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006. Задача 24.7.

Следствие (формула Пика для произвольной решетки).* Вершины многоугольника расположены в узлах целочисленной решетки L. Внутри него лежит n узлов, а на границе m узлов. Тогда его площадь равна $(n+\frac{m}{2}-1)s$, где s — площадь параллелограмма, образованного векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Для доказательства следствия можно проделать те же действия, что и для доказательства формулы на квадратной решетке. Но можно вывести его и из формулы для квадратной решетки с помощью линейного преобразования. Для этого рассмотрим линейное преобразование T, переводящее вектор $(1,0)$ в $\vec{u}$, а вектор $(0,1)$ в $\vec{v}$, и заметим, что для любого треугольника отношение его площади к площади образа фиксировано. Вершины прообраза многоугольника при отображении T принадлежат квадратной целочисленной решетке, применим к прообразу формулу Пика, нарежем его на треугольники и отобразим их с помощью T в исходный многоугольник.

Перейдем теперь к решению задачи. Пусть в многограннике V вершин, E ребер и F граней.

Рассмотрим одну грань многогранника. Она является многоугольником с красными вершинами. Обозначим его площадь через S. Красные точки, лежащие в плоскости грани, образуют целочисленную решетку. Пусть a и b — количества красных точек внутри многоугольника и на его сторонах соответственно, а $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ — количества синих точек внутри грани и на ее сторонах. По формуле Пика $S=\left(a+\frac{b}{2}-1\right)s$. Теперь применим формулу Пика для красных и синих точек (они также образуют целочисленную решетку, только порожденную вдвое меньшими векторами). Получим формулу $S=\left(a+\widetilde{a}+\frac{b}{2}+\frac{\widetilde{b}}{2}-1\right)\frac{s}{4}$. Следовательно, $4\left(a+\frac{b}{2}-1\right)=a+\widetilde{a}+\frac{b}{2}+\frac{\widetilde{b}}{2}-1$. Стало быть,

$$\widetilde{a}+\frac{\widetilde{b}}{2}=3a+\frac{3b}{2}-3.$$

Просуммируем полученные равенства по всем граням. Пусть

* Собственно именно в таком виде формула и была приведена в оригинальной статье Пика (*Pick G.* Geometrisches zur Zahlenlehre // Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlich-medicinischen Vereines für Böhmen «Lotos» in Prag. Neue Folge. Bd. 19. 1899. S. 311–319).

a_k, b_k, $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ означают соответствующие количества точек для k-й грани:

$$\sum_{k=1}^{F}\left(\widetilde{a}_k+\frac{\widetilde{b}_k}{2}\right)=\sum_{k=1}^{F}\left(3a_k+\frac{3b_k}{2}-3\right)=3\sum_{k=1}^{F}\left(a_k+\frac{b_k}{2}\right)-3F.$$

Поскольку каждое ребро относится к двум граням, а его вершины не являются синими, каждая его синяя точка посчитана дважды, и значит, сумма в левой части в точности равна интересующему нас количеству синих вершин на границе многогранника. С суммой в правой части (обозначим ее Σ) надо обращаться аккуратнее, поскольку вершины ребер красные и поэтому учитываются в сумме Σ по несколько раз.

Рассмотрим i-ю вершину многогранника. Пусть она принадлежит e_i ребрам. Тогда она попала в сумму Σ с коэффициентом $\frac{1}{2}$ в точности $2v_i$ раз, поскольку для каждого ребра она была учтена дважды. Таким образом, если для i-й вершины вычесть из суммы Σ величину e_i-1, то останется в точности общее количество красных точек на границе многогранника, т. е. n. Следовательно,

$$\Sigma=n+\sum_{i=1}^{V}(e_i-1)=n+\sum_{i=1}^{V}e_i-V=n+E-V.$$

Стало быть, интересующее нас количество равно

$$3(n+E-V)-3F=3n+3(E-V-F)=3n-6$$

(в последнем равенстве мы воспользовались формулой Эйлера).

84. Нам понадобится следующее известное утверждение.

Л е м м а 1 (Рамсей). Для любых M, d, k существует такое $N=N(M,d,k)$, что в полном регулярном d-гиперграфе на n вершинах, ребра которого раскрашены в M цветов, найдутся k вершин, все ребра между которыми имеют одинаковый цвет.

Гиперграф — это обобщение графа. В графе ребро — это пара вершин. В гиперграфе ребром называют произвольный набор вершин. Если все наборы, задающие ребра, состоят из d вершин, говорят, что задан d-гиперграф.

Для натуральных r, s назовем *полным двудольным регулярным* (r,s)*-гиперграфом* $(r+s)$-гиперграф с долями V_1 и V_2, в котором ребром соединен любой набор вершин, содержащий r вершин из V_1 и s вершин из V_2.

Лемма 2. Для любых d, f, k существует $n = f(d,f,k)$, обладающее следующим свойством. Пусть ребра полного двудольного (d,f)-гиперграфа раскрашены в два цвета, а доли его состоят из n вершин каждая. Тогда найдутся такие $2k$ вершин, по k в каждой доле, что все ребра между ними одного цвета.

В частности, $f(d,0,k) = f(0,d,k) = N(2,d,k)$ из леммы 1.

Решим задачу, пользуясь леммой 2. Предположим, что фокус возможен. Рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned}
&k_n = n,\\
&k_{n-1} = f(0, n-1, k_n),\\
&k_{n-2} = f(1, n-2, k_{n-1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&k_1 = f(n-2, 1, k_2),\\
&k_0 = f(n-1, 0, k_1).
\end{aligned}$$

Нарисуем полный $(n-1)$-гиперграф, вершинами которого являются k_0 белых и k_0 черных точек окружности. Будем считать его вершины разбитыми на белую и черные доли. Назовем его ребро $(i, n-1-i)$-ребром, если оно содержит i белых и $n-1-i$ черных вершин. Все $(i, n-1-i)$-ребра образуют полный двудольный $(i, n-1-i)$-гиперграф.

Мы знаем, что второй фокусник по каждому набору из $n-1$ точек умеет определять, лежала ли выкинутая первым точка на белой или на черной полуокружности. В зависимости от этого раскрасим соответствующее $(n-1)$-ребро в белый или черный цвет.

Рассмотрим произвольные n белых точек $w_1, \ldots, w_n$. Пусть для определенности первый фокусник выкидывает из них точку w_n; тогда ребро $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ — белое. Итак, среди любых n белых вершин можно выбрать $n-1$ вершину так, что соответствующее ребро белое. Поэтому найдется k_1 белых (и k_1 черных точек), таких что любое $(n-1,0)$-ребро на них белое.

Выберем из них произвольные белые точки $w_1, \ldots, w_{n-1}$ и черную точку b_1. Если первый фокусник выкинет из этого набора точку b_1, то оставшееся $(n-1,0)$-ребро белое, и поэтому фокус не удастся. В противном случае без ограничения общности можно считать, что первый фокусник выкинет точку w_{n-1}, и тогда ребро $(w_1, \ldots, w_{n-2}, b_1)$ белое. Итак, для любых вершин $w_1, \ldots, w_{n-1}, b_1$ нашего множества можно найти белое $(n-2,1)$-ребро. Поэтому найдутся k_2 белых и k_2 черных вершин, на которых все $(n-2,1)$-рёбра белые (и, напомним, все $(n-1,0)$-ребра тоже белые).

Действуя аналогичным образом, мы в результате получим $k_n = n$ черных (и k_n белых, уже не нужных) вершин, таких что все ребра на них — белые. Однако первый фокусник должен из этих n черных вершин стереть одну так, чтобы оставшееся ребро было черным. Противоречие.

Доказательство леммы 2. Если $d = 0$ или $f = 0$, то утверждение — это лемма 1. Пусть теперь d, $f > 0$. Рассмотрим полный двудольный (d, f)-гиперграф, доли которого V_1 и V_2 содержат по n вершин, где n — достаточно большое число, величину которого мы оценим ниже. Выделим подмножество $U \subset V_2$ из произвольных $n_1 = N(2, f, k)$ вершин. Возьмем любой набор $\mathcal{A}$ из d вершин первой доли $w_1, \ldots, w_d \in V_1$. Этот набор вершин определяет раскраску полного f-гиперграфа на U следующим образом: ребро $(b_1, \ldots, b_f)$ имеет тот же цвет, что и $(d+f)$-ребро $(w_1, \ldots, w_d, b_1, \ldots, b_f)$ в исходном графе. По лемме 1 в этом f-гиперграфе существуют k вершин $B_1, \ldots, B_k$, все f-ребра на которых имеют одинаковый цвет. Набор $\{B_1, \ldots, B_k, color\}$, состоящий из этих k вершин и цвета $color$, будем называть *цветом* исходного набора $\mathcal{A}$. Таким образом, всего имеется $M = 2C_{n_1}^k$ цветов и все d-ребра доли V_1 оказались раскрашены в M цветов. По лемме 1 при $n > N(M, d, k)$ в V_1 найдется k вершин, все d-ребра на которых имеют одинаковый цвет $\{b_1, \ldots, b_k, x\}$ (x — это цвет, белый или черный). Эти k вершин, вкупе с k вершинами $b_1, \ldots, b_k$, образуют требуемое множество вершин.

85. Ответ: такого случиться не могло.

Положим для ясности $100 = 2n$.

Теорема Мак-Дугалла. Пусть на окружности отмечено

$2n$ точек. Обозначим через R_i произведение расстояний от i-й точки до остальных. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{2i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{2i-1}}.$$

Доказательство. Отождествим точки плоскости и комплексные числа. Пусть $x_1, \ldots, x_{2n}$ — точки на окружности (ее центр — комплексное число 0) в порядке против часовой стрелки. Положим

$$y_k = \frac{(-1)^k x_k^{n-1}}{\prod\limits_{j\neq k}(x_k - x_j)}.$$

Тогда $|y_k| = \frac{1}{R_k}$. Докажем, что любое частное $\frac{y_k}{y_m}$ — вещественное положительное число. Достаточно доказать это при $m = k+1$. Имеем

$$\frac{y_k}{y_{k+1}} = \left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^{n-1} \cdot \prod_{j\neq k,k+1} \frac{x_{k+1} - x_j}{x_k - x_j}.$$

Если обозначить $x_{k+1} = x_k e^{2i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$, то аргумент каждого выражения $\frac{x_{k+1}-x_j}{x_k-x_j}$ равен φ (вписанный угол вдвое меньше центрального), откуда и следует требуемое. Теперь с точностью до множителя слагаемые суммы $\sum(-1)^k|y_k|$ совпадают со слагаемыми суммы

$$\sum(-1)^k y_k = \sum \frac{x_k^{n-1}}{\prod\limits_{j\neq k}(x_k - x_j)} = 0.$$

Последнее равенство получается из интерполяционной формулы Лагранжа

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2n} f(x_k) \cdot \frac{\prod\limits_{j\neq k}(t - x_j)}{\prod\limits_{j\neq k}(x_k - x_j)}$$

для многочлена $f(t) = t^{n-1}$ — если взять из нее слева и справа только коэффициент при t^{2n-1}. $\square$

Осталось заметить, что никакая сумма $\pm\frac{1}{1} \pm \frac{1}{2} \pm \ldots \pm \frac{1}{100}$ не равна нулю, поскольку при приведении всех дробей к общему знаменателю числитель полученной дроби не будет делиться на 97.

УГОЛОК ОЛИМПИАДОФИЛА

Международная олимпиада «Туймаада–2014»

А. Голованов, М. Иванов, К. Кохась

Международная олимпиада школьников «Туймаада» проводится в Якутии ежегодно, начиная с 1994 г. С самого начала эта олимпиада была задумана не только как международная (кроме школьников из разных регионов России, в разные годы в ней участвовали представители Румынии, Болгарии, Монголии и других стран), но и как многопредметная — в состав олимпиады входят соревнования по математике, физике, химии и информатике. В последние 16 лет олимпиада по математике в значительной степени составляется членами жюри Петербургской олимпиады школьников по математике; опытный читатель без труда заметит, с одной стороны, некоторое стилистическое родство двух олимпиад, а с другой — присущий международным математическим соревнованиям технический уклон.

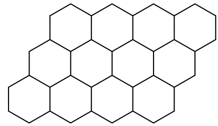
Младшая лига

Первый день

М1. Даны три различных простых числа. На какое наибольшее количество из них может делиться их сумма?

(А. Голованов)

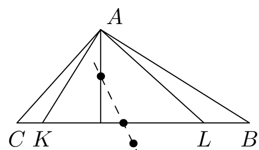
М2. На бумаге с шестиугольными клеточками отметили «параллелограмм» $k \times \ell$ клеток (он состоит из k горизонтальных рядов по ℓ клеток в каждом; для примера на рисунке изображен параллелограмм 3×4).



В этом параллелограмме выбрали набор непересекающихся сторон клеток, которые разбивают все узлы на пары. Сколько вертикальных отрезков может быть в таком наборе?

(*T. Došlić*)

М3. На стороне BC треугольника ABC нашлись точки K и L такие, что $\angle BAK = \angle CAL = 90°$. Докажите, что середина высоты, опущенной из вершины A, середина отрезка KL и центр описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.



(*А. Акопян, С. Боев, П. Кожевников*)

М4. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+1}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(*Н. Александров*)

Второй день

М5. Для двух квадратных трехчленов $P(x)$ и $Q(x)$ нашлась такая линейная функция $\ell(x)$, что $P(x) = Q(\ell(x))$ при всех вещественных x. Сколько может быть таких линейных функций $\ell(x)$?

(*А. Голованов*)

М6. Радиус окружности ω_A с центром в вершине A треугольника ABC равен радиусу вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Аналогично строятся окружности ω_B и ω_C. Докажите, что если какие-то две из этих окружностей касаются, то касаются любые две из них. (*Л. Емельянов*)

М7. На плоскости расположено n черных и n белых квадратов, каждый из которых может быть переведен в любой другой параллельным переносом. Каждые два квадрата разного цвета имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая хотя бы n квадратам. (*В. Дольников*)

М8. На левом берегу реки Лены стоят m деревень, на правом — n деревень, и еще одна деревня стоит на острове.* Известно, что НОД$(m+1, n+1) > 1$. Между каждыми двумя деревнями, разделенными водой, ходит паром с натуральным номером.

Жители каждой деревни утверждают, что все номера паромов, которые плавают в их деревню, различны, и эти номера составляют отрезок натурального ряда. Докажите, что хотя бы в одной деревне жители ошибаются. (*К. Кохась*)

Старшая лига

Первый день

С1. Четыре последовательных трехзначных числа делят с остатком соответственно на четыре последовательных двузначных числа. Какое наименьшее число разных остатков может получиться? (*А. Голованов*)

С2. См. задачу М3.

С3. См. задачу М4.

С4. На бумаге с шестиугольными клеточками отметили «параллелограмм» $k \times \ell$ клеток (он состоит из k горизонтальных рядов по ℓ клеток в каждом; для примера на рисунке изображен параллелограмм 3×4).

В этом параллелограмме выбрали набор непересекающихся сторон клеток, которые разбивают все узлы на пары. Сколькими способами это можно сделать? (*T. Došlić*)

Второй день

С5. На столе лежит четное число карточек, на каждой из которых написано натуральное число. Пусть a_k — количество

* Возможно, речь идет о населенном пункте Кытанах-Кырдал.

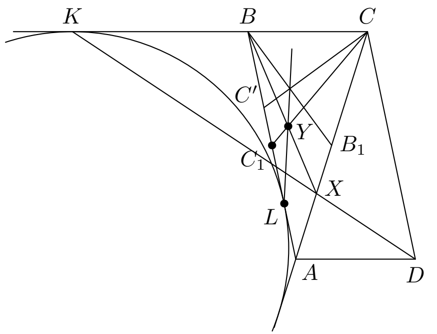
карточек, на которых написано число k. Оказалось, что

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots \geqslant 0$$

для каждого натурального n. Докажите, что карточки можно разложить по парам, в каждой из которых числа отличаются на 1. (*А. Голованов*)

С6. См. задачу М7.

С7. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке L, а продолжения стороны BC — в точке K. Прямая DK пересекает диагональ AC в точке X; прямая BX пересекает медиану CC_1 треугольника ABC в точке Y. Докажите, что прямая YL, медиана BB_1 треугольника ABC и его же биссектриса CC' пересекаются в одной точке. (*А. Голованов*)



С8. Пусть a, b, c — попарно взаимно простые натуральные числа. Обозначим через $g(a,b,c)$ наибольшее натуральное число, не представимое в виде $xa+yb+zc$ при натуральных x, y, z. Докажите, что

$$g(a,b,c) \geqslant \sqrt{2abc}.$$

(*М. Иванов*)

Решения задач

M1. Ответ: сумма может делиться самое большее на 2 числа.

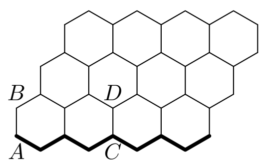
Пример трех простых чисел, сумма которых делится на два из них: 2, 3, 5.

Покажем, что сумма не может делиться на три числа. Пусть найдутся такие простые числа p, q, r, $p < q < r$, что $p + q + r$ делится на каждое из них. Так как $r < p+q+r < 3r$, то $p+q = r$. Тремя нечетными числа p, q и r быть не могут, значит $p = 2$, а тогда $p + q + r = 2 + q + q + 2 = q + 4$ не делится на q.

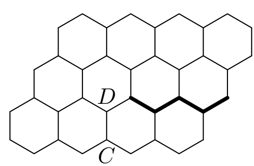
M2. Ответ: в наборе ровно k вертикальных отрезков.

Дело в том, что в каждом горизонтальном ряду клеток должен быть выбран ровно один отрезок.

Действительно, рассмотрим «нижнюю сторону» параллелограмма. Она содержит нечетное число узлов. Следовательно, хотя бы один из этих узлов принадлежит выбранному вертикальному отрезку. Если таких вертикальных отрезков больше одного, обозначим какие-нибудь два соседних выбранных отрезка AB и CD. Тогда на нижней стороне между A и C лежит нечетное число узлов. Их невозможно разбить на пары. Итак, в нижнем ряду клеток ровно одна вертикальная сторона является выбранным отрезком.

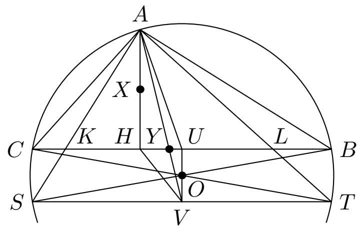


Аналогично обстоят дела в других горизонтальных рядах клеток. Например, рассмотрим второй ряд. Пусть CD — вертикальный отрезок, выбранный в первом ряду. Тогда фрагмент «горизонтальной» стороны второго ряда клеток справа от D (на рисунке выделен жирной линией) содержит нечетное число узлов. Рассуждая, как при рассмотрении первого ряда, находим, что ровно один узел этого фрагмента принадлежит выбранному вертикальному отрезку. Доказательство того, что во всем втором ряду не может быть выбрано больше одного вертикального отрезка, — такое же, как для нижней стороны.



Отметим одно следствие проделанных рассуждений. Пронумеруем слева направо в каждом горизонтальном ряду клеток вертикальные стороны. Тогда номера выбранных вертикальных отрезков образуют неубывающую последовательность (при перечислении отрезков снизу вверх).

М3. Решение 1. Пусть H — основание высоты, а X — ее середина. Продлим отрезки AK и AL до вторых точек пересечения с описанной окружностью — точек S и T соответственно. Поскольку углы $\angle BAS$ и $\angle CAT$ прямые, BS и CT — диаметры, пересекающиеся в центре описанной окружности, точке O. Отсюда следует, что хорды BC и TS параллельны, а значит, середины этих хорд и центр окружности лежат на одной прямой, причем O лежит на равном расстоянии от середин. Обозначим эти середины через U и V и рассмотрим трапецию $AHVU$.



Найдем точку Y пересечения диагоналей этой трапеции. Поскольку треугольники ALK и ATS подобны, AV делит LK в том же отношении, что и TS, т. е. пополам. Мы нашли все три необходимые нам точки — X, Y и O. Для доказательства того, то они лежат на одной прямой, достаточно заметить, что вторая средняя линия трапеции (соединяющая середины оснований) проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

Решение 2. Нам понадобится следующая вариация на тему «Теорема Фалеса».

Лемма. Пусть три точки X, Y, Z и непараллельные прямые ℓ_1, ℓ_2 таковы, что для проекций X_i, Y_i, Z_i этих точек на прямую ℓ_i выполняется равенство

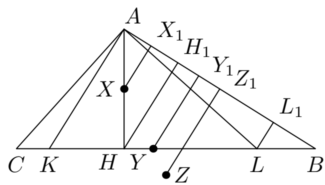
$$\frac{\overrightarrow{Z_1X_1}}{\overrightarrow{Z_1Y_1}} = \frac{\overrightarrow{Z_2X_2}}{\overrightarrow{Z_2Y_2}}.$$

Тогда точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Доказательство. Рассмотрим точку Z', в которой перпендикуляр к прямой ℓ_1, восставленный в точке Z_1, пересекает прямую XY, и точку Z'', определенную аналогично для второй прямой. По теореме Фалеса и данному равенству.

$$\frac{\overrightarrow{Z'X}}{\overrightarrow{Z'Y}} = \frac{\overrightarrow{Z_1X_1}}{\overrightarrow{Z_1Y_1}} = \frac{\overrightarrow{Z_2X_2}}{\overrightarrow{Z_2Y_2}} = \frac{\overrightarrow{Z''X}}{\overrightarrow{Z''Y}}.$$

Таким образом, точки Z' и Z'' совпадают, а перпендикуляры пересекаются в точке Z, лежащей на прямой XY. □



Обозначим через X, Y и Z три интересующие нас точки. Пусть H — основание высоты из вершины A; X_1, Y_1, Z_1, L_1, H_1 — проекции соответствующих точек на прямую AB. Обозначим $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.

Воспользуемся леммой для точек X, Y, Z и прямых AB и AC. Чтобы проверить условие леммы, подсчитаем отношение $\frac{\overrightarrow{Z_1X_1}}{\overrightarrow{Z_1Y_1}}$ и убедимся, что оно не меняется при перестановке местами α и β.

Как нетрудно видеть,

$$AZ_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\frac{AH}{\sin\beta},$$

$$AY_1 = \frac{1}{2}AL_1 = \frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\Big)AL = \frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\Big)\frac{AH}{\cos\gamma},$$

$$AX_1 = \frac{1}{2}AH_1 = \frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2} - \beta\Big)AH.$$

Таким образом,

$$\frac{\overrightarrow{Z_1X_1}}{\overrightarrow{Z_1Y_1}} = \frac{\frac{1}{\sin\beta} - \sin\beta}{\frac{1}{\sin\beta} - \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma}} =$$

$$= \frac{\cos^2\beta\cos\gamma}{\cos\gamma(\sin^2\beta + \cos^2\beta) - \sin(\beta+\gamma)\sin\beta} =$$

$$= \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma}.$$

Как видим, выражение симметрично относительно α и β. Теперь утверждение задачи сразу следует из утверждения леммы.

М4. Чтобы продемонстрировать читателям широту возможных методов, мы приведем несколько решений, в том числе решения, придуманные участниками олимпиады.

Р е ш е н и е 1. Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского – Шварца:

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+1}}\Big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\Big)\Big(\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\Big).$$

Далее, используя следствия неравенства о средних

$$\frac{1}{x^2-x+1} \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{\frac{1}{x}+1}{4},$$

получаем

$$\ldots \leqslant \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3\Big)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) = \frac{9}{2}.$$

Р е ш е н и е 2. Заметим, что для положительных a выполнено неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}} \leqslant \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{4\sqrt{2}}. \qquad (*)$$

$y = \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot x + \frac{1}{4\sqrt{2}}$ — это уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^3}+1}}$$

в точке $x = 1$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Действительно, после возведения в квадрат и домножения на знаменатель получим неравенство:

$$32a^2 \leqslant (a^3+1)(3a+1)^2.$$

После раскрытия скобок получаем

$$9a^5+6a^4-31a^3+9a^2+6a+1 = (a-1)^2(9a^3+24a^2+8a+1) \geqslant 0.$$

Сложив теперь неравенство $(*)$ с двумя аналогичными, получаем требуемое неравенство.

Р е ш е н и е 3 (Кэтэлин-Андрей Илие, Румыния). Заменой $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$ сведем неравенство к виду

$$\sqrt{\frac{2x^3}{x^3+1}}+\sqrt{\frac{2y^3}{y^3+1}}+\sqrt{\frac{2z^3}{z^3+1}} \leqslant 3$$

при $x+y+z=3$.

Поскольку $x^3+1 \geqslant 2\sqrt{x^3}$, нам достаточно доказать, что

$$x^{3/4}+y^{3/4}+z^{3/4} \leqslant 3.$$

Это, однако, непосредственно следует из неравенства о среднем степенном с показателем $3/4$ и среднем арифметическом.

Решение 4 (Темирлан Аустпек, Казахстан). Самое наглое решение, использует только неравенство о средних для двух чисел.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2a\sqrt{a}}}+\frac{1}{\sqrt{2b\sqrt{b}}}+\frac{1}{\sqrt{2c\sqrt{c}}} =\\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{a\sqrt{a}}}{a\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b\sqrt{b}}}{b\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{c\sqrt{c}}}{c\sqrt{c}}\right) \leqslant\\ \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a+\sqrt{a}}{a\sqrt{a}}+\frac{b+\sqrt{b}}{b\sqrt{b}}+\frac{c+\sqrt{c}}{c\sqrt{c}}\right) =\\ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3+\frac{\sqrt{a}}{a}+\frac{\sqrt{b}}{b}+\frac{\sqrt{c}}{c}\right) \leqslant\\ \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3+\frac{a+1}{2a}+\frac{b+1}{2b}+\frac{c+1}{2c}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Решение 5 (Александр Тарасов, Россия). Преобразуем неравенство так же, как в решении 3:

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}}+\sqrt{\frac{y^3}{y^3+1}}+\sqrt{\frac{z^3}{z^3+1}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

По неравенству Коши – Буняковского – Шварца

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}}+\sqrt{\frac{y^3}{y^3+1}}+\sqrt{\frac{z^3}{z^3+1}}\right)^2 \leqslant\\ \leqslant (x+y+z)\left(\frac{x^2}{x^3+1}+\frac{y^2}{y^3+1}+\frac{z^2}{z^3+1}\right) =\\ = 3\left(\frac{x^2}{x^3+1}+\frac{y^2}{y^3+1}+\frac{z^2}{z^3+1}\right).\end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\frac{x^2}{x^3+1}+\frac{y^2}{y^3+1}+\frac{z^2}{z^3+1}\leqslant\frac{x^2}{2\sqrt{x^3}}+\frac{y^2}{2\sqrt{y^3}}+\frac{z^2}{2\sqrt{z^3}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}\leqslant\frac{3}{2}$$

(последнее — по неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратичном).

Решение 6 (Алимжан Еркенулы, Казахстан). Очевидно,

$$a^3+1\geqslant a^2+a$$

при всех положительных a. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+1}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{a^2+a}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+b}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+c}}=$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x+1}}+\frac{y}{\sqrt{y+1}}+\frac{z}{\sqrt{z+1}},$$

где, как и в предыдущих решениях, $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$, $x+y+z=3$.

По неравенству Коши – Буняковского – Шварца

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}+\frac{y}{\sqrt{y+1}}+\frac{z}{\sqrt{z+1}}\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant(x+y+z)\left(\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}\right)=$$
$$=9-3\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 9-3\cdot\frac{9}{(x+1)+(y+1)+(z+1)}=\frac{9}{2},$$

откуда и вытекает требуемое неравенство (последняя оценка основана на неравенстве о среднем арифметическом и среднем гармоническом).

Решение 7 (Олжас Кадыракунов, Казахстан). Перейдем к обратным величинам. Воспользуемся неравенством

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)\geqslant(x+1)x.$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}}+\sqrt{\frac{y^3}{y^3+1}}+\sqrt{\frac{z^3}{z^3+1}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{x^3}{(x+1)x}}+\sqrt{\frac{y^3}{(y+1)y}}+\sqrt{\frac{z^3}{(z+1)z}}=$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x+1}}+\frac{y}{\sqrt{y+1}}+\frac{z}{\sqrt{z+1}}.$$

Теперь применим неравенство Йенсена к выпуклой вверх функции $\sqrt{x}$ с весами $x/3$, $y/3$, $z/3$:

$$\frac{x}{3}\sqrt{\frac{1}{x+1}}+\frac{y}{3}\sqrt{\frac{1}{y+1}}+\frac{z}{3}\sqrt{\frac{1}{z+1}}\leqslant\sqrt{\frac{x}{3(x+1)}+\frac{y}{3(y+1)}+\frac{z}{3(z+1)}}.$$

Осталось заметить, что

$$\frac{x}{3(x+1)}+\frac{y}{3(y+1)}+\frac{z}{3(z+1)}=$$
$$=\frac{1}{3}\left(3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\left(3-\frac{9}{(x+1)+(y+1)+(z+1)}\right)=\frac{1}{2}.$$

М5. О т в е т: всегда имеется ровно две линейные функции.

Квадратный трехчлен принимает одинаковые значения только в точках, симметричных относительно полусуммы корней. Или, говоря проще, существует единственное такое a, что

$$Q(a-x)=Q(x)\quad\text{при всех } x. \tag{$*$}$$

Если $P(x)=Q(\ell_1(x))=Q(\ell_2(x))$, то при каждом x либо $\ell_1(x)=\ell_2(x)$, либо $\ell_1(x)+\ell_2(x)=a$. Возьмем три разных значения x. Хотя бы одно из двух последних равенств выполнено при двух из этих значений x, а следовательно, всегда. Таким образом, если функции $\ell_2(x)$ и $\ell_1(x)$ не равны, то $\ell_2(x)=a-\ell_1(x)$. С другой стороны, так определенная функция ℓ_2 удовлетворяет условию в силу $(*)$.

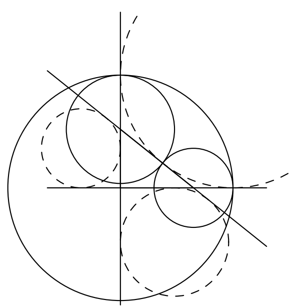
М6. Сначала исследуем вопрос, когда окружности ω_A и ω_B касаются внешним образом. Это происходит в том и только в том случае, когда расстояние между их центрами равно сумме радиусов:

$$c = r_a + r_b = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} = \frac{S \cdot c}{(p-a)(p-b)} \iff$$
$$(p-a)^2(p-b)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \iff$$
$$(b+c-a)(a+c-b) = (a+b+c)(a+b-c) \iff$$
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Таким образом, окружности ω_A и ω_B касаются внешним образом в том и только в том случае, когда угол C прямой.

Теперь исследуем случай внутреннего касания окружностей ω_A и ω_B. Это происходит тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами равно разности радиусов:

$$c = r_a - r_b = \frac{S}{p-a} - \frac{S}{p-b} = \frac{S \cdot (a-b)}{(p-a)(p-b)} \iff$$
$$c^2(p-a)^2(p-b)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)(a-b)^2 \iff$$
$$(b+c-a)(a+c-b)c^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b)^2 \iff$$
$$\bigl(c^2 - (a-b)^2\bigr)c^2 = \bigl((a+b)^2 - c^2\bigr)(a-b)^2 \iff$$
$$(c^2 + a^2 - b^2)(c^2 - a^2 + b^2) = 0.$$



Таким образом, окружности ω_A и ω_B касаются внутренним образом в том и только в том случае, когда один из углов A или B прямой.

Итак, если какие-то две окружности касаются, то треугольник прямоугольный, а тогда касаются любые две из них.

М7. Спроектируем все квадраты на прямую, параллельную одной из сторон квадратов (считаем эту прямую горизонтальной). На прямой окажутся n черных и n белых отрезков одинаковой длины. Докажем, что существует точка, покрытая хотя бы $\frac{3}{2}n$ отрезками.

Рассмотрим самый левый и самый правый отрезки. Если они разных цветов, то, по условию, они пересекаются, и тогда их пересечение содержится в любом отрезке. В этом случае существует точка, покрытая всеми отрезками. Если же они одного цвета, допустим черного, то любой белый отрезок покрывает правый конец левого черного и левый конец правого черного, значит, расстояние между ними не более длины отрезка. Тогда любой оставшийся черный отрезок пересекается либо с самым левым, либо с самым правым. Значит, правый конец левого отрезка или левый конец правого покрывается хотя бы половиной черных отрезков и всеми белыми, т. е. не менее чем $\frac{3}{2}n$ отрезками.

При проектировании на перпендикулярную прямую можно найти аналогичную точку. Следовательно, существует не менее n квадратов, проекции которых покрывают выбранные точки на обоих прямых. Докажем, что все эти квадраты имеют общую точку. Восставим перпендикуляры в данных точках и найдем их точку пересечения. Каждый квадрат пересекается с обоими перпендикулярами, а значит, содержит точку их пересечения, что и требовалось.

M8. Допустим, что ни в одной деревне жители не ошибаются. Пусть НОД$(m+1, n+1) = d > 1$. Обозначим через u_i деревни на правом берегу ($1 \leqslant i \leqslant n$), v_j — деревни на левом берегу ($1 \leqslant j \leqslant m$), w — деревню на острове. Множество номеров паромов, ходящих из деревни v, будем обозначать $S(v)$. Позволим себе считать, что номер парома может быть произвольным целым числом. Тогда по нашему предположению каждое множество $S(v)$ есть интервал в множестве целых чисел. Сдвигая, если нужно, множество всех номеров, мы можем добиться того, что $S(w) = \{1, 2, \ldots, n+m\}$.

Подсчитаем количество паромов, номера которых делятся на d. Обозначим это число через D. Для этого сначала для каждой деревни v подсчитаем, сколько из нее ходит паромов с номерами, делящимися на d. Обозначим это число через $D(v)$.

Поскольку множество $S(v)$ номеров паромов, заходящих в любую из деревень v, есть интервал, то ясно, что

$$D(u_i) = \frac{m+1}{d}, \qquad D(v_j) = \frac{n+1}{d},$$
$$D(w) = \left[\frac{m+n}{d}\right] = \frac{m+n+2}{d} - 1.$$

Просуммировав по всем деревням величину $D(v)$, мы получим $2D$. Таким образом,

$$2D = \frac{m+n+2}{d} - 1 + n\frac{m+1}{d} + n\frac{m+1}{d} =$$
$$= 2 \cdot \frac{(m+1)(n+1)}{d} - 1.$$

Противоречие: в правой части стоит нечетное число.

В статье *A. Grzesik, H. Hachatrian.* Interval edge-colorings of $K_{1,m,n}$ // `http://arxiv.org/1308.4431v1.pdf`, откуда взята эта задача, авторы называют утверждение задачи гипотезой Петросяна и приводят доказательство, изложенное выше. Там же доказано, что при условии НОД$(m+1, n+1) = 1$ нумерация паромов может быть такой, что все жители окажутся правы. Для построения такой нумерации обозначим деревни на берегах через u_0, u_1, ..., u_{m-1} и v_0, v_1, ..., v_{n-1}. Пусть паром, плавающий между u_i и v_j, имеет номер $i + j + 1$. Тогда паромы имеют номера от 1 до $m+n-1$ и для каждой деревни на берегу номера паромов составляют интервал в множестве натуральных чисел. Осталось расширить эту конструкцию, добавив деревню на острове и паромы, плавающие к ней, причем можно добиться того, что паромы, плавающие на остров, будут иметь номера от 1 до $m + n$. Предлагаем читателю самостоятельно изобрести, как это можно сделать, и разобраться, какую роль играет условие с наибольшим общим делителем.

С1. Ответ: 1 остаток. Например, для чисел 100, 101, 102, 103 и 90, 91, 92, 93.

Четыре последовательных трехзначных числа, бо́льших 200, делят с остатком соответственно на четыре последовательных двузначных числа. Какое наименьшее число разных остатков может получиться?

С2. См. задачу М3.

С3. См. задачу М4.

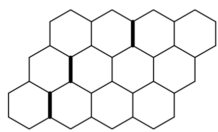
С4. О т в е т: это можно сделать $C_{k+\ell}^{k}$ способами.

Эту задачу (и более простое утверждение М2) мы взяли в статье *Došlić T.* Perfect matchings in lattice animals and lattice paths with constraints // Croatica Chemica Acta. 2005. Vol. 78 (2). P. 251–259.

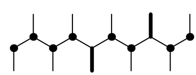
Р е ш е н и е 1. Пронумеруем слева направо в каждом горизонтальном ряду клеток вертикальные стороны числами от 1 до $k+1$.

Л е м м а. В каждом горизонтальном ряду клеток выбран ровно один вертикальный отрезок. Номера выбранных вертикальных отрезков образуют неубывающую последовательность (при перечислении отрезков снизу вверх).

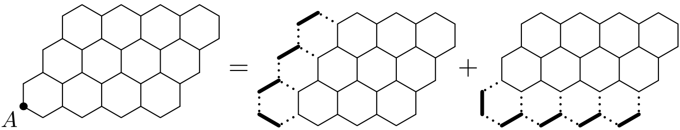
Д о к а з а т е л ь с т в о написано в решении задачи М2.



Заметим теперь, что каждая неубывающая последовательность из ℓ чисел от 1 до $k+1$ (а количество таких последовательностей как раз и равно $C_{k+\ell}^{k}$), однозначно задает выбор отрезков из условия задачи. Действительно, на «нижней стороне» параллелограмма расположено нечетное число узлов, один из них принадлежит вертикальному отрезку, при этом слева и справа от этого узла на нижней стороне находится четное число узлов, они однозначно разбиваются на пары. На «верхней стороне» ситуация аналогична, да и в каждом промежуточном горизонтальном слое узлов, в общем-то, тоже.



Р е ш е н и е 2. Начнем строить требуемый набор отрезков с того, что выберем один из двух отрезков, которому принадлежит точка A. После этого выберем отрезки, расположенные вдоль сторон параллелограмма, положение которых однозначно определено в силу выбора отрезка, содержащего точку A. Узлы, не принадлежащие ни одному из уже выбранных отрезков, в обоих случаях составляют параллелограмм меньшего размера. Мы приходим к прекрасному соотношению



(**)

Оно в точности соответствует соотношению с биномиальными коэффициентами

$$C_{k+\ell}^{k} = C_{k+\ell-1}^{k-1} + C_{k+\ell-1}^{\ell-1}.$$

Читатель легко проверит, что число способов при $k = 1$ или $\ell = 1$ равно $k+1$ и $\ell+1$ соответственно. Это означает, что начальные условия в рекуррентном соотношении (**) такие же, как в треугольнике Паскаля, поэтому искомое число действительно равно биномиальному коэффициенту $C_{k+\ell}^{k}$.

C5. Доказательство проведем индукцией по количеству карточек. В качестве базы индукции можно взять пустой набор карточек.

Переход. Пусть m — минимальное число, написанное на карточках. Тогда $a_m > 0$ и $a_k = 0$ при $k < m$. Значит, неравенство из условия задачи при $n = m+1$ можно записать в виде

$$a_{m+1} - a_m \geqslant 0.$$

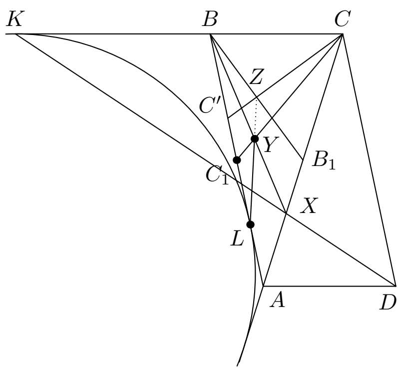
Отсюда $a_{m+1} > 0$. Удалим пару карточек с числами $m+1$ и m, тогда числа a_{m+1} и a_m уменьшатся на 1, а остальные числа a_i не изменятся. Значит, неравенства, в которых присутствуют оба числа a_{m+1} и a_m (а также неравенства, где оба эти числа отсутствуют) остались верными, да и единственное неравенство, в которое входит лишь одно из этих чисел, т. е. неравенство $a_m - a_{m-1} + a_{m-2} - \ldots \geqslant 0$, тоже осталось верным. Таким образом, оставшийся набор карточек удовлетворяет условию задачи, и к нему можно применить индукционное предположение.

Как можно понять из решения задачи, разбиение карточек на пары детерминировано. При этом числа $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots$, фигурирующие в правых частях неравенств, имеют комбинаторный смысл. Они равны количеству пар карточек с числами $n+1$, n.

C6. См. задачу M7.

С7. Обозначим точку пересечения чевиан BB_1 и CC' через Z. Тогда нам необходимо доказать, что точки L, Y и Z лежат на одной прямой. Обозначим стороны AB, AC, BC через c, b, a, полупериметр — через p. Тогда $BC' = \frac{ac}{a+b}$, $BL = p - a$, $BC_1 = \frac{c}{2}$, $KC = p$, поэтому

$$\frac{\overrightarrow{C'L}}{\overrightarrow{LC_1}} = \frac{p - a - \frac{ac}{a+b}}{(p-a) - \frac{c}{2}} = -\frac{a+b+c}{a+b}, \qquad \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XC}} = \frac{AD}{KC} = \frac{a}{p}.$$



Далее нам понадобится известная лемма.

Лемма. Пусть в треугольнике UVW чевианы US и VT пересекаются в точке O. Тогда $\frac{\overrightarrow{UO}}{\overrightarrow{OS}} = \frac{\overrightarrow{UT}}{\overrightarrow{TW}}\left(\frac{\overrightarrow{WS}}{\overrightarrow{SV}} + 1\right)$.

Применив лемму к треугольнику ABC и чевианам CC' и BB_1, находим соотношение $\frac{\overrightarrow{CZ}}{\overrightarrow{ZC'}} = \frac{a+b}{a}$. Применив лемму к треугольнику ABC и чевианам CC_1 и BX, получаем соотношение $\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YC_1}} = \frac{a+b+c}{a}$. Теперь осталось заметить, что для треугольника $CC'C_1$ и точек Z, L, Y выполнено утверждение теоремы Менелая:

$$\frac{\overrightarrow{CZ}}{\overrightarrow{ZC'}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'L}}{\overrightarrow{LC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1Y}}{\overrightarrow{YC}} = \frac{a+b}{a} \cdot \left(-\frac{a+b+c}{a+b}\right) \cdot \frac{a}{a+b+c} = 1.$$

Значит, точки L, Y и Z лежат на одной прямой. Осталось заметить, что на картинку решение не опиралось.

С8. Рассмотрим первые c чисел, которые больше либо равны $\sqrt{2abc}$. Предположим, что каждое из них представимо в виде $xa+yb+zc$. Рассмотрим для каждого числа соответствующую точку (x, y), координатами которой являются коэффициенты при a и b. Для рассматриваемых чисел эти точки будут различны.

С другой стороны, возможные точки лежат в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $xa+yb=\sqrt{2abc}$, площадь которого равна c. Количество «натуральных» точек в таком треугольнике меньше c (сопоставим каждой точке единичный квадрат, правой верхней вершиной которого она является). Значит, среди c точек, построенных в предыдущем абзаце, заведомо есть совпадающие. Противоречие.

В приведенном решении использовалось лишь то, что числа взаимно просты в совокупности, а не попарная взаимная простота.

Докажем более сильное неравенство: $g(a,b,c) \geqslant \sqrt{3abc}$. Константа 3 здесь — наилучшая возможная, как показывает равенство $g(3, 3k+1, 3k+2) = 9k+5$.

Все линейные комбинации ниже предполагаются с натуральными коэффициентами.

Будем считать, что $a > b > c$, и сначала разберем случай, когда a само является линейной комбинацией b и c. В этом случае, очевидно, $g(a,b,c) = g(b,c)+a$, и нам достаточно найти $g(b,c)$. Для двух чисел данная задача существенно проще, и у нее есть точный ответ: $g(b,c) = bc$. Действительно, последовательности $b+nc$, $2b+nc$, $\ldots$, $(c-1)b+nc$, $cb+nc$ покрывают все натуральные числа начиная с $bc+1$, поскольку каждая покрывает числа некоторого остатка по модулю c, и при этом все остатки разные. То, что число bc не представляется, очевидно. Для завершения рассуждения осталось заметить, что $bc+a \geqslant 2\sqrt{abc} \geqslant \sqrt{3abc}$ по неравенству о средних для двух чисел.

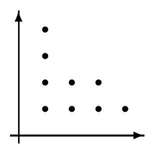
Далее мы будем считать, что a не является линейной комбинацией чисел b и c. Рассмотрим все натуральные числа, дающие некоторый остаток d при делении на c. Возьмем среди них наименьшее число, представимое в виде $xa+yb$, обозначим его N_d. Тогда числа $N_d + c$, $N_d + 2c$, ... представляются в виде линейной комбинации a, b и c. При этом само число N_d в таком виде не представляется, так как иначе, вычтя из него слагаемое, кратное c, мы нашли бы меньшее число, представимое в виде линейной комбинации $xa + yb$.

Для разных d мы построили разные числа N_d, и, таким образом, мы нашли ровно c чисел вида $xa + yb$, не представимых в искомом виде. Отметим на координатной плоскости соответствующие точки (x, y). Для доказательства неравенства достаточно найти отмеченную точку, удовлетворяющую неравенству

$$ax + by \geqslant \sqrt{3abc}, \tag{$*$}$$

т. е. лежащую выше прямой $ax + by = \sqrt{3abc}$.

В решении исходной задачи в этот момент мы остановились и доказали, что ниже прямой $ax + by = \sqrt{2abc}$ лежит меньше c «натуральных» точек. Теперь нам потребуется более точно изучить расположение отмеченных точек. Во-первых, заметим что если некоторое натуральное N представимо в виде линейной комбинации a, b и c, то числа $N + a$ и $N + b$ тоже представимы. Поэтому отмеченные точки образуют *диаграмму Ферре*, т. е. вместе с каждой точкой отмечены все точки, расположенные левее и ниже ее в первом квадранте.



Далее, пусть K — наименьшее такое число, что Kc представляется в виде $xa + yb$; L — наименьшее такое число, что La представляется в виде $yb + zc$; M — наименьшее такое число, что Mb представляется в виде $xa + zc$. Пусть

$$Kc = pa + qb, \qquad La = p_1 b + q_1 c, \qquad Mb = p_2 a + q_2 c.$$

Л е м м а. 1) Числа L и M не больше c;
2) точки $(L + 1, 1)$, $(1, M + 1)$ и $(p + 1, q + 1)$ не отмечены;
3) если существует другая линейная комбинация $Zc = xa + yb$, в которой $x \leqslant L$, $y \leqslant M$, то $x \geqslant p$, $y \geqslant q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $M > c$. Докажем, что существует представление $xb = a + yc$ при некотором $x \leqslant c$. Тогда минимальность M даст нам требуемое. Из теоремы о линейном представлении наибольшего общего делителя следует, что существуют такие целые x и y, что $xb - yc = a$. Равенство не нарушится, если мы будем делать замены $x \mapsto x \pm c$, $y \mapsto y \pm b$. Такими операциями можно добиться того, что $1 \leqslant \leqslant x \leqslant c$. Если при этом $y > 0$, то мы получили искомое, а если $y < 0$, то $a = xb + |y|c$, что мы исключили в самом начале.

Неравенство $L > c$ доказывается аналогично, в конце рассуждений мы воспользуемся тем, что b не есть линейная комбинация a и c с натуральными коэффициентами, поскольку $b < a$.

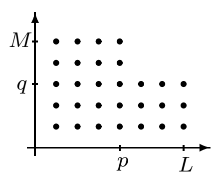
2) Для доказательства достаточно представить соответствующие числа в виде линейной комбинации a, b и c:

$$(L+1)a + b = a + (p_1+1)b + q_1c,$$
$$a + (M+1)b = (p_2+1)a + b + q_2c,$$
$$(p+1)a + (q+1)b = a + b + Kc.$$

3) Поскольку K — минимальное такое число, заключаем, что $Z \geqslant K$. Значит, хотя бы одно из неравенств выполняется, причем строго; пусть для определенности это неравенство $x > p$. Тогда если $y < q$ и $Z > K$, то

$$(x-p)a = (q-y)b + (Z-K)c,$$

что противоречит минимальности L. Если же $y < q$ и $Z = K$, то в силу взаимной простоты a и b из этого же равенства следует, что $x - p \geqslant b \geqslant c \geqslant L$ (последнее неравенство — по утверждению п. 1). Это противоречит выбору x. □



Утверждение пункта 2 леммы означает, что отмеченные точки содержатся в двухступенчатой диаграмме Ферре, показанной на рисунке. Осталось доказать, что они полностью заполняют эту диаграмму.

Для этого проверим, что все выражения $xa + yb$ для точек этой диаграммы имеют разные остатки при делении на c. Действительно, пусть это не так, а именно, существуют такие различные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), что

$$x_1a + y_1b \equiv x_2a + y_2b \pmod{c}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $x_1 > x_2$. Возможны следующие варианты.

1) $x_1 > x_2$, $y_1 > y_2$. Тогда существует линейная комбинация $(x_1 - x_2)a + (y_1 - y_2)b = Zc$, но пункт 3 леммы утверждает, что тогда $x_1 - x_2 \geqslant p$, $y_1 - y_2 \geqslant q$, что противоречит выбору (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из нашей диаграммы.

2) $y_1 = y_2$. Тогда, пользуясь взаимной простой a и c, получаем $|x_1 - x_2| \geqslant c$, что с доказанным в пункте 1 леммы неравенством $c \geqslant L$ дает противоречие.

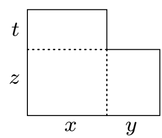
3) $x_1 > x_2$, $y_1 < y_2$. Тогда существует линейная комбинация $(x_1 - x_2)a = (y_2 - y_1)b + Zc$, что противоречит минимальности L.

Таким образом, вся диаграмма состоит из отмеченных точек.

Очевидно, что максимум выражения $xa + yb$ достигается в точке (p, M) или (L, q). Сопоставим каждой отмеченной точке единичный квадрат, правой верхней вершиной которого она является, забудем все теоретико-числовые истоки и будем решать следующую задачу:

Даны такие положительные вещественные числа x, y, z, t, что площадь фигуры на рисунке равна c. Докажите, что

$$\max\bigl((x + y)a + zb, xa + (z + t)b\bigr) \geqslant \sqrt{3abc}.$$



Иными словами, известно, что $xz + yz + xt = c$, докажите, что $ax + bz + \max(ay, bt) \geqslant \sqrt{3abc}$. Воспользовавшись неравенством $(u + v + w)^2 \geqslant 3(uv + uw + vw)$, получаем

$$\bigl(ax + bz + \max(ay, bt)\bigr)^2 \geqslant 3(ax \cdot bz + ax \cdot bt + bz \cdot ay) = \\ = 3ab(xz + yz + xt) = 3abc.$$

Итак, мы доказали, что хотя бы одна из отмеченных точек удовлетворяет неравенству $(*)$.

Восстановление многочлена по его значениям

Ф. В. Петров

Восстановление (интерполяция) многочлена одной переменной по его значениям в $n+1$ точке — тема хорошо известная, в том числе большим количеством приложений. Случай нескольких переменных, которому посвящены задача 81 и предлагаемая заметка, незаслуженно менее популярен.

Многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ степени не выше n восстанавливается, причем однозначно, по его значениям $w_0, \ldots, w_n$ в $n+1$ различной точке $x_0, \ldots, x_n$. Это соответствует представлениям о размерности или «количестве степеней свободы»: $n+1$ неизвестных $a_0, \ldots, a_n$ определяются из $n+1$ уравнений $f(x_0) = w_0, \ldots, f(x_n) = w_n$. Эти уравнения линейные относительно неизвестных $a_0, \ldots, a_n$, и оказывается, что соответствующая линейная система размера $(n+1) \times (n+1)$ имеет единственное решение. Оно может быть записано явно с помощью интерполяционной формулы Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} w_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \qquad (1)$$

Единственность решения можно получить и априорно: если бы нашлись два требуемых многочлена f, g, то их разность, т. е. многочлен $h = f - g$, будучи многочленом степени не выше n, обнулялся бы в точках $x_0, \ldots, x_n$, а это возможно только при $h \equiv 0$. Существование решения системы линейных уравнений, в которой поровну уравнений и неизвестных, следует из единственности — это базовое утверждение линейной алгебры. Однако явная формула (1) дает больше информации, чем сам факт существования решения.

Сложнее дело обстоит с восстановлением многочлена $f(x, y)$ от двух переменных степени не выше n по его значениям. Два таких многочлена могут совпадать даже в бесконечном количестве точек. Например, многочлены $f(x, y) = x^2 + y^2$ и $g(x, y) = 1$ совпадают во всех точках вида $(\cos t, \sin t)$. Тем не менее, для некоторых наборов точек $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, N$, восстановление многочлена по значениям $w_i = f(P_i) = f(x_i, y_i)$ возможно, причем единственным способом. Такие наборы точек будем называть *интерполирующими.*

Прежде всего поймем, чему может быть равно N у интерполирующего набора. Многочлен $f(x,y) = \sum a_{i,j}x^i y^j$ степени не выше n задается значениями своих коэффициентов $a_{i,j}$, где условие на индексы i, j таково:

$$i, j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant i,\ j,\ i + j \leqslant n. \tag{2}$$

Несложно понять, что таких пар индексов (i, j) ровно $n(n+1)/2$, но, даже не понимая этого, мы можем потребовать, чтобы точки интерполирующего набора нумеровались парами (i, j), удовлетворяющими условию (2), — тогда автоматически на многочлен оказывается наложено столько же условий, сколько он имеет неизвестных коэффициентов. Другое дело, что не всегда эти $n(n+1)/2$ условий независимы. Но попробуем какие-нибудь наборы. Какие же точки плоскости естественно нумеровать парами (i, j)? Естественная попытка — нумеровать парой (i, j) точку (i, j). И это работает!

Теорема 1. *Многочлен $f(x, y)$ степени не выше n однозначно задается своими значениями $w_{i,j} = f(i, j)$ в точках (i, j), удовлетворяющих условию* (2).

Прежде чем доказывать теорему, введем несколько полезных (не только для ее доказательства) обозначений. Множество точек (i, j), удовлетворяющих (2), обозначим Δ_n^2 (верхний индекс 2 — это число переменных в многочлене $f(x, y)$). Введем многочлены

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\ldots(x-k+1), \qquad \binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}.$$

Степень этих многочленов относительно переменной x равна k, при $k = 0$ положим $x^{\underline{0}} = \binom{x}{0} \equiv 1$. Если x — целое неотрицательное число, то $x^{\underline{k}}$ — количество k-элементных подмножеств x-элементного множества.

Доказательство. Как уже упоминалось, единственность и существование многочлена с предписанными значениями равносильны, поскольку речь идет о системе линейных уравнений, имеющей столько же уравнений, сколько неизвестных.

Единственность можно доказать как в решении задачи 81. Если нашлось два многочлена $f(x,y)$, $f_1(x,y)$, совпадающих на Δ_n^2, то их разность $g(x,y) = f(x,y) - f_1(x,y)$ обнуляется на Δ_n^2. Тогда многочлен $g(x,0)$ имеет n корней как многочлен от x, следовательно, $g(x,0) \equiv 0$, т. е. g делится на y. Обозначая $g(x,y) = yg_1(x,y)$ и подставляя $y = 1$, аналогично получаем, что многочлен $g_1(x,1)$ имеет $n-1$ корней, так что $g_1(x,1) \equiv 0$, $g_1(x,y) = (y-1)g_2(x,y)$. Продолжая в том же духе, получим, что многочлен g, степень которого не превосходит n, делится на $y(y-1)(y-2)\ldots(y-n)$, что возможно только при $g \equiv 0$.

Докажем существование, предъявив явно многочлен с предписанными значениями $w_{i,j}$:

$$f(x,y) = \sum_{(i,j)\in\Delta_n^2} w_{i,j}\binom{x}{i}\binom{y}{j}\binom{n-x-y}{n-i-j}. \tag{3}$$

Доказательство равенства $f(i,j) = w_{i,j}$ при $(i,j) \in \Delta_n^2$ проводится непосредственно: если $(i_1,j_1) \neq (i,j)$, то либо $i_1 > i$, либо $j_i > j$, либо $n - i_1 - j_1 > n - i - j$, в любом из трех случаев получаем, что $\binom{i}{i_1}\binom{j}{j_1}\binom{n-i-j}{n-i_1-j_1} = 0$, так что соответствующее слагаемое в правой части (3) равно 0, и остается только слагаемое $w_{i,j}\binom{i}{i}\binom{j}{j}\binom{n-i-j}{n-i-j} = w_{i,j}$. □

Выделим особый случай формулы (3), относящийся к многочленам, обращающимся в 0 на Δ_{n-1}^2. В этом случае имеем

$$f(x,y) = \sum_{i,j\geqslant 0,\, i+j=n} w_{i,j}\binom{x}{i}\binom{y}{j}. \tag{4}$$

Применим эту формулу к многочлену $f(x,y) = \binom{x+y}{n}$. Получим *тождество Чу – Вандермонда*:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{i,j\geqslant 0,\, i+j=n} \binom{x}{i}\binom{y}{j}. \tag{5}$$

В случае целых неотрицательных x, y тождество (5) имеет простой комбинаторный смысл: для выбора n животных из группы, содержащей x кошек и y собак, следует выбрать пару чисел i, j с суммой n, затем выбрать i кошек из x и j собак из y. Однако мы продолжим смотреть на тождество (5) как на равенство двух многочленов. Оставим в обеих частях равенства только члены степени n. Тогда от выражения $\binom{x}{i} = x^{\underline{i}}/i!$ останется только одночлен $x^i/i!$, аналогично с $\binom{y}{j}$ и $\binom{x+y}{n}$. Получим формулу

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{i,j\geqslant 0, i+j=n} \frac{x^i y^j}{i!\,j!}.$$

Умножая на $n!$, получаем то, что известно как *бином Ньютона*:

$$(x+y)^n = \sum_{i,j\geqslant 0, i+j=n} \frac{n!}{i!\,j!} x^i y^j.$$

Эту формулу можно получить и многими другими способами. Наш путь имеет то преимущество, что на нем можно получить и много других интересных формул.

Вернемся пока что к вопросу об интерполяции многочленов. Мы собирались искать интерполирующие наборы точек, пронумерованных парами (i, j), удовлетворяющими (2). Следующий пример обобщает теорему 1.

Теорема 2. *Пусть* $\{x_0, \ldots, x_n\}, \{y_0, \ldots, y_n\}$ — *два набора по* $n + 1$ *различных чисел. Тогда многочлен* $f(x, y)$ *однозначно задается своими значениями* $w_{i,j} = f(x_i, y_j)$, *где пары* (i, j) *удовлетворяют условию* (2).

Отметим, что при $x_i = y_i = i$ получается в точности теорема 1.

Доказательство. Доказательство единственности полностью аналогично доказательству единственности в теореме 1. Предъявить явную формулу сложнее (причина в том, что точки (x_i, y_j), $i + j = n$, теперь не обязаны лежать на одной прямой). Тем не менее, в полезном частном случае, когда $w_{i,j} = 0$ при $i + j < n$, формулу написать можно:

$$f(x,y) = \sum_{\substack{i,j\geqslant 0,\\ i+j=n}} w_{i,j} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})} \cdot \frac{(y-y_0)\ldots(y-y_{j-1})}{(y_j-y_0)\ldots(y_j-y_{j-1})}. \quad (6)$$

Общий случай сводится к такому, если использовать индукцию по n. Именно, представим, что уже построен многочлен $f_1(x,y)$ степени не выше $n-1$, принимающий значения $w_{i,j}$ в точках $(x_i, y_j), i+j \leqslant n-1$. Тогда многочлен $g = f - f_1$ принимает в этих точках значение 0, а в точках (i,j), $i+j=n$, — заданные значения $g(x_i, y_j) = w_{i,j} - f_1(x_i, y_j)$. □

Типичный пример использования теоремы 2 — так называемые q-тождества. Напомним, что q-аналогом натурального числа n называют сумму

$$(n)_q = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

а q-аналогом факториала — произведение $(n!)_q = \prod\limits_{k=1}^{n} (k)_q$. Аналогом биномиального коэффициента $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ служит аналогичное частное с q-факториалами. При $q = 1$ все q-тождества превращаются в «классические» тождества.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$(x-y)(x-qy)\ldots(x-q^{n-1}y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{k(k-1)/2} \frac{(n!)_q}{(k!)_q((n-k)!)_q} \times$$
$$\times (x-1)(x-q)\ldots(x-q^{n-k-1})(y-1)(y-q^{-1})\ldots(y-q^{1-k}).$$

Доказательство Положим $x_i = q^i$, $y_j = q^{-j}$ и применим формулу (6) к многочлену в левой части. Вынося из всех сомножителей степень q, получаем требуемое. □

Рассматривая в установленном тождестве однородные части степени n (отметим между делом, что левая часть однородна по x, y априори, а правая нет), получаем *q-биномиальную теорему*:

$$(x-y)(x-qy)\ldots(x-q^{n-1}y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{k(k-1)/2} \frac{(n!)_q}{(k!)_q((n-k)!)_q} x^{n-k} y^k.$$

Отметим, что комбинаторное доказательство q-биномиальной теоремы уже заметно сложнее, чем биномиальной, в то время как полиномиальные практически идентичны.

Следующее, что мы рассмотрим — многочлены от произвольного количества переменных. Теорема 2 обобщается следующим естественным образом:

Теорема 4. *Пусть для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ выбрано числовое множество $A_i = \{x_{i0}, x_{i1}, \ldots, x_{in}\}$ из $n + 1$ числа. Тогда многочлен $f(x_1, \ldots, x_k)$ степени не выше n однозначно задается своими значениями на «комбинаторном симплексе»*

$$\Delta = \left\{(x_{1t_1}, x_{2t_2}, \ldots, x_{kt_k}) \colon \sum t_i \leqslant n\right\}.$$

Доказательство Существование доказывается индукцией по n как в теореме 2. Единственность можно доказать аналогично теореме 2, если вести индукцию по k. □

В случае когда $A_i = \{0, 1, \ldots, n\}$ при всех i, множество Δ будем обозначать

$$\Delta_n^k = \left\{(m_1, \ldots, m_k) \colon m_i \in \mathbb{Z},\ m_i \geqslant 0,\ \sum m_i \leqslant n\right\}.$$

Аналогично формуле (4) можно написать формулу, восстанавливающую многочлен степени не выше n, обращающийся в 0 на Δ_{n-1}^k, по его значениям на $\Delta_n^k \setminus \Delta_{n-1}^k$:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_k=n,\\ m_1\geqslant 0,\ldots,m_k\geqslant 0}} f(m_1, \ldots, m_k) \prod_{i=1}^{k} \binom{x_i}{m_i}. \tag{7}$$

Для многочлена $f(x_1, \ldots, x_k) = \binom{x_1+\ldots+x_k}{n}$ получаем обобщенное тождество Чу – Вандермонда

$$\binom{x_1 + \ldots + x_k}{n} = \sum_{m_1+\ldots+m_k=n} \prod_{i=1}^{k} \binom{x_i}{m_i},$$

старшая однородная компонента которого дает мультиномиальную теорему

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{m_1+\ldots+m_k=n} \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!} \prod_{i=1}^{k} x_i^{m_i}.$$

Старшие члены в следующем тождестве дают полиномиальное выражение знаменитой *формулы крюков* для количества таблиц Юнга заданной формы (подробнее см. далее).

Теорема 5. *Для переменных $x_1, \ldots, x_k$ и натурального n имеет место тождество*

$$\left(\prod_{i<j}(x_j - x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i - \frac{k(k-1)}{2}\right)^{\underline{n}} =$$

$$= \sum_{m_1+\ldots+m_k = n+\frac{k(k-1)}{2}} \frac{n!}{\prod m_i!} \cdot \prod_{i<j}(m_j - m_i) \cdot \prod x_i^{\underline{m_i}}.$$

(здесь и далее естественные условия в суммировании — например, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, — опускаются).

Доказательство Применим формулу (7) к многочлену в левой части (степени $n + k(k-1)/2$). $\square$

Рассматривая старшую однородную компоненту, получаем

Следствие. Для набора целых неотрицательных чисел m_1, $\ldots$, m_k обозначим через $G(m_1, \ldots, m_k)$ коэффициент многочлена

$$\prod_{i<j}(x_j - x_i)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^n$$

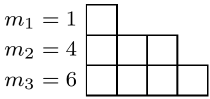
при одночлене $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_k^{m_k}$ (здесь $n = m_1 + \ldots + m_k - \frac{k(k-1)}{2}$). Тогда

$$G(m_1, \ldots, m_k) = \frac{\left(\sum m_i - \frac{k(k-1)}{2}\right)!}{\prod m_i!} \prod_{i<j}(m_j - m_i).$$

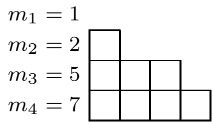
Теперь покажем, как связана эта формула со знаменитой *формулой крюков* для числа заполнений диаграммы Юнга.

Разобьем первый квадрант координатной плоскости на единичные клетки. *Диаграмма Юнга* есть конечное (быть может, пустое) объединение клеток, содержащее вместе с каждой клеткой все клетки, которые одновременно не выше и не правее ее. Если в диаграмме Юнга не более чем k (непустых) строк, их длины (сверху вниз) обозначим $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 - 1 \leqslant m_3 - 2 \leqslant \ldots \leqslant \leqslant m_k - (k-1)$. Тогда $0 \leqslant m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_k$, а общее количество клеток в диаграмме равно $n = m_1 + \ldots + m_k - k(k-1)/2$.

Так, для пустой диаграммы имеем $m_i = i - 1$. На рисунке приведена диаграмма Юнга с 3 непустыми строчками, которую можно рассматривать как при $k = 3$, так и при $k = 4$.



$k = 3$



$k = 4$

Поставим следующий вопрос: сколько имеется способов получить данную диаграмму Юнга из пустой за n шагов, последовательно добавляя клеточки — так, что на каждом шаге снова получается диаграмма Юнга? Ясно, что каждый шаг соответствует увеличению одного из параметров $m_1, \ldots, m_k$ на 1, при этом должно сохраняться условие $m_1 < \ldots < m_k$.

Для целых неотрицательных чисел $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_k$ обозначим через $F(m_1, \ldots, m_k)$ количество путей, ведущих из точки $(0, 1, \ldots, k-1)$ в точку $(m_1, \ldots, m_k)$ и целиком лежащих в области $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ (каждый шаг пути состоит в увеличении одной из координат на 1). Иными словами, $F(m_1, \ldots, m_k)$ равно 0, если среди чисел $m_1, \ldots, m_k$ есть равные, в противном случае $F(m_1, \ldots, m_k)$ есть количество способов получить диаграмму Юнга с длинами строк $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 - 1 \leqslant m_3 - 2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant m_k - (k-1)$ из пустой диаграммы последовательным добавлением клеточек.

Теорема 6. *Количество способов получить диаграмму Юнга задается формулой*

$$F(m_1, \ldots, m_k) = \frac{\left(\sum m_i - \frac{k(k-1)}{2}\right)!}{\prod m_i!} \prod_{i<j} (m_j - m_i).$$

Теорема 6 следует из такого факта:

Предложение. $F(m_1, \ldots, m_k) = G(m_1, \ldots, m_k)$ при $0 \leqslant \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_k$.

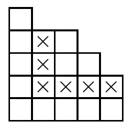
Доказательство. Функции F, G могут быть заданы одними и теми же четырьмя свойствами (формулируем их для F):

1) если среди чисел $m_1, \ldots, m_k$ есть равные, то $F(m_1, \ldots, m_k) = 0$ (для G это непосредственно видно из полученной формулы);
2) при $k = 1$ имеем $F(0) = 1$;
3) если $0 = m_1 < m_2 < \ldots < m_k$, то

$$F(m_1, \ldots, m_k) = F(m_2 - 1, m_3 - 1, \ldots, m_k - 1);$$

4) если $0 < m_1 < \ldots < m_k$, то

$$F(m_1, \ldots, m_k) = F(m_1 - 1, m_2, \ldots, m_k) + F(m_1, m_2 - 1, \ldots, m_k) + \ldots + F(m_1, m_2, \ldots, m_k - 1). \quad \square$$



Переформулируем теорему 6 с помощью крюков. *Крюком* клетки диаграммы Юнга назовем объединение всех клеток в ее столбце не ниже нее и всех клеток в ее строке не левее нее. Количество клеток в крюке называется *длиной крюка*. На рисунке справа изображена диаграмма и крюк длины 6.

Наблюдение: если клетки a, b, c таковы, что a, b лежат в одной строке, b, c — в одном столбце, то для длин $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$ их крюков выполняется неравенство $h(b) \neq h(a) + h(c)$. Это проще всего понять самостоятельно.

Рассмотрим диаграмму Юнга, длины строк которой равны $0 < m_1 \leqslant m_2 - 1 \leqslant \ldots \leqslant m_k - (k-1)$, тогда $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ — длины крюков первого столбца, $n = \sum m_i - \frac{k(k-1)}{2}$ — общее число клеток в диаграмме. Утверждается, что произведение длин крюков всех клеток диаграммы равняется

$$\frac{\prod m_i!}{\prod_{i<j}(m_j - m_i)}.$$

Это следует из того, что длины крюков клеток j-й сверху строчки (длины $m_j - (j-1)$) суть различные числа от 1 до m_j, среди которых, в силу наблюдения, не может присутствовать ни одно из чисел $m_j - m_i$, $i = 1, 2, \ldots, j-1$. Таким образом, количество способов получить нашу диаграмму из пустой последовательным добавлением клеток равно частному

$$\frac{n!}{\text{произведение длин крюков всех клеток}}.$$

УГОЛОК ОЛИМПИАДОФОБА

Санкт-Петербургская олимпиада по математике как литературный и исторический памятник

К. Кохась

В этой заметке мы описываем окружающий мир таким, каким он видится из формулировок задач Санкт-Петербургской олимпиады по математике. Туристы, пионеры и автобусы — вот чуть ли не весь список, описывающий пересечение мира из условий задач с окружающей реальностью. Но в 1990-е гг. сухой «классический» стиль условий задач советского времени заменяется пестрыми сюжетами и красочными, если не сказать буйными, фантазиями. В условиях появляются разнообразные персонажи, литературные заимствования и подробности быта. Хотя основная масса задач осталась в рамках традиционных тем и формулировок, с появлением новых сюжетов математика на олимпиаде сменила имидж: вместо педантичной скрупулезной сухой строгой дисциплины перед нами веселая, несерьезная, задорная и не желающая быть скучной, но вместе с тем по-прежнему содержательная и изощренная наука.

Приметы времени в задачах

Зарисовки с натуры. Традиционны текстовые задачи первого тура на тему «движение», в которых встречаются практически все виды транспорта, некоторые, по нашим меркам, уже устарели — колхозник едет на телеге (61-I-6) или на лошади (76-I-6), геологи тоже передвигаются верхом на лошади (61-I-8), крупнофасованный груз перевозят на полуторатонке, это не очень удобно (62-II-9). Автобусы, судя по ответу, ездят по шоссе со скоростью 30 км/ч (63-II-6), а легковые машины — 80 км/ч (81-I-6).

Номера телефонов были шестизначные (82-II-6). А номера автомобилей — с незапамятных времен (65-I-6) четырехзначные. Несколько раз (1969, 1987, 1989) упоминаются шестизначные трамвайные или автобусные билеты, в том числе счастливые. В 1990-е годы в городском транспорте (опять) появились кондукторы, в задаче (98-II-10) два кондуктора пытаются продать как можно больше билетов, а пассажиры их неохотно покупают.

В 1990-е годы вообще многое изменилось. Кооператоры (знаете, кто это?) заняты товарообменом на черном рынке (91-II-6), бизнесмены торгуют алкоголем (96-I-6) и разъезжают на «Мерседесах» розового цвета (01-I-7), олигархи зажигают в клубе «Народные богатства» (04-II-9). Возродившийся губернатор совершает инспекционную поездку по городу (97-II-7) — раньше вместо него был председатель горисполкома или первый секретарь обкома (в условиях задач не представлены).

В жизнь постепенно входят новые предметы: калькулятор (88-I-9) — умеет делать всего три операции, но это преуменьшение — в то время еще существовали отечественные инженерные и даже программируемые калькуляторы; компьютер (90-II-7), пазл (07-II-9) — 25 лет назад их еще не было, навигатор (13-I-9).

В следующей таблице перечислены многочисленные крупицы реальности.

Таблица 1. Исторические детальки в условиях задач

Год, тур, класс	Детальки	Как они проявляются
1947	Мост	Республиканский. Сразу после этого был переименован обратно в Дворцовый.
51-I-6	Лодка	«На речной лодочной станции гражданин взял лодку напрокат»
51-I-6	Летний театр	В зрительном зале рассаживают зрителей по 5 человек на скамью
51-I-6	Чернигов	Из Чернигова в Нежин со скоростью 12 км/ч ездят колхозники.

Продолжение на следующей странице

Таблица 1 (продолжение)

61-I-6	Телега	Колхозник едет 6,5 ч. из города в деревню (40,5 км), частично пешком, частично на телеге.
64-I-6	Кофе	Обязательно смешивают с цикорием, в дорогой смеси цикория меньше
65-I-6	Вожатая	раздает открытки пионерам
65-II-6	Покрышка	автомобильного колеса. Стирается за 25 000 км
69-II-7	Колхоз	Состоит из 4 деревень, расположенных довольно далеко друг от друга, причем дорог нет
69-II-9	Дом отдыха	Вместимость 60 человек, четырехразовое питание, смена 15 дней.
70-I-6	Сливки	35%-ные сливки смешивают с 20%-ными, и потом добавляют 1 л воды. Цинично.
71-I-6	Зерно	Его нужно просушивать! Тогда влажность упадет с 34 % до 12 %
72-II-6	Экзамены	Школьники сдают 7 экзаменов, причем только четверки и пятерки! Что здесь правда, а что выдумка?
75-I-5	Девочки	«Маша была бы старше Тани, если бы она была не моложе Гали». Вечные проблемы
76-I-7	ГТО	96 % участников лыжного забега выполнили норму ГТО. Неплохо! Где теперь эти массовые лыжные забеги? ГТО, впрочем, возвращается.
79-II-5	Пионер	В классе 19 парт и 31 пионер. Вот такая наполняемость классов.
81-I-8	Горький	Город на Волге. Ныне опять Нижний Новгород.
84-I-5	Стройотряд	«Студенческие стройотряды отправлялись на БАМ тремя эшелонами».
84-I-7	45 точек	45 — это номер 45 интерната при ЛГУ — сильной в то время математической школы.
90-II-6	Тетрадь	96 листов. Используется для вырывания листов
91-II-6	Рынок Талон	черный. Находится в деревне Перестройкино 2 талона на колбасу можно поменять на 3 талона на масло
97-I-7	Бутылки	«Молоко и сливки продаются в одинаковых бутылках», которые к тому же можно сдавать в магазин! Имеются в виду стеклянные бутылки. Пластмассовых еще не было, коробки были уже в 70-е гг, но были мало распространены
97-I-7	Банки по 0,5, 0,7 и 1 л.	Ерунда это. Не банки, а бутылки из-под спиртного. Просто постеснялись написать
99-II-8	Мэрия	Это тоже вернулось. Характерно, что в мэрии работают как честные сотрудники, так и взяточники. «Ничего не изменилось», — сказал бы Салтыков-Щедрин

Продолжение на следующей странице

Таблица 1 (продолжение)

01-II-10	Intel-Пень-V	Название на перспективу. За год до этого начался выпуск процессоров «Пентиум 4».
01-III-10	Шахматы	«В шахматном клубе любители могут играть друг с другом или с компьютером». То есть компьютер играл в шахматы уже весьма прилично.
02-II-9	Гарри	«Гарри может превращать лягушат в мышат». Гарри — это Гарри Поттер. Первая книга о Г. Поттере вышла в 1997 г. (на русском языке — в 2000 г.)
02-II-9	Письмо	«Тедди получил 90 писем» от сотрудников компании Кака-кола. Видимо, это письма по электронной почте
10-II-7	Часовщик	Вымирающая профессия. У часовщика 5 будильников. Будильники, видимо, тоже скоро вымрут
12-II-9	ЕГЭ	В задаче описаны не совсем реалистичные правила экзамена
12-II-11	Украина	Некоторые города России были соединены международными авиалиниями с некоторыми городами Украины. Хорошее было время!
13-II-6	Запорожец	Дают на сдачу при покупке БМВ. Вымершая марка автомобиля.
13-II-11	Девушки	На математическом факультете учатся 40 юношей и 10 девушек. Похоже на правду. Правильней сказать на отделении чистой математики матмеха СПбГУ. Сейчас квоты уменьшились.
13-II-8	Авиалиния	Президент приказал соединить ближайшие города авиалинией. Наверно, опечатка. Нужно читать «электричкой».
14-I-8	146 %	голосов насчитал Незнайка на выборах губернатора Цветочного города Ростовской области.
15-I-6	Скамейки	В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки.
15-I-7	Пояс	часовой. Нестабильность этого понятия привлекла внимание жюри. «На длинной извилистой реке стоят три города, находящиеся не обязательно в одном часовом поясе».
15-II-6	Акция	рекламная. «Каждый третий товар — бесплатно»
15-II-7	Гриша	и Стас что-то перемножают. Это имена математиков Г. Перельмана и С. Смирнова.

Цены. Из условий можно узнать некоторые цены: лимон стоит 25 коп. за штуку (61-I-6); проезд в автобусе (кстати, автобус оказался без кондуктора) стоит 5 коп. (63-II-7) и в 1977 г. — тоже 5 коп. (77-I-6), а в 2007 г. — 12 руб. (07-II-7); карандаш стоит 2–4 коп. за штуку (65-I-6); 3- и 5-копеечные марки (66-I-6) свидетельствуют о ценах услуг почты; за 1 руб. 80 коп. можно купить (уцененную) книгу (66-I-6), говорят, немного позже на черном рынке из соображений конспирации назывались такие же цены, но при этом подразумевалось масштабирование в 10 раз; заплатив две монеты по 15 или 20 коп. можно сходить в кино (72-I-5); на рубль можно купить 8 пирожков с рисом (82-III); банку консервов в 1985 г. можно было купить за 60–80 коп. (85-I-5), а в 1994 г. банка тушенки стоила от 600 до 1000 руб. (94-II-8).

Есть и неисторические примеры: в лавке можно обменять 3 мыла на 1 шило (01-I-8), входной билет в Центральный парк Монголии стоит 4 тугрика (02-II-6) (цена взята с потолка: 1 тугрик в то время — это примерно 2–3 копейки).

Чем занимаются школьники. Отряд пионеров (64-II-6) построился прямоугольником, октябрята держат флажки (87-I-5), октябренок, пионер и комсомолец едут в пионерский лагерь (77-I-5). Чем занимаются пионеры? Ходят на озеро (85-I-6) и по грибы (76-I-6, 85-I-6), собирают марки (65-I-6), дружат (79-II-5). Короче, никакие они не пионеры, просто нормальные дети. В 1998 г. пионеры уже вымерли, поэтому сказано: дети выходят из лесу, где они собирали орехи (98-I-6), а в лагерь заезжают просто школьники (98-II-8). Что-то мы при этом потеряли: когда нужно рассматривать две группы детей, мы можем назвать их мальчики или девочки, десятиклассники или девятиклассники (11-I-11), из такого кружка или из сякого кружка, а раньше можно было сказать еще и пионеры или октябрята. И в шеренгу теперь дети строятся разве лишь на уроке физкультуры (12-I-8), а раньше это было просто частью образа жизни.

Обычно в задачах школьники выступают как статисты, сюжет не о них, а, например, об оценках в школе (11-II-6) или на экзамене (72-II-6). На контрольной по алгебре оказалось, что средний балл у мальчиков почти на четверть выше, чем у девочек (83-I-6). Сейчас это назвали бы неполиткорректностью.

Занятия у школьников обычные: ходят на консультации (61-II-6) и вечеринки (08-II-9), участвуют в различных турнирах (92-II-6), Международной (01-II-9) и Всесоюзной (80-II-9) олимпиадах, сдают ЕГЭ (12-II-9), танцуют (82-II-6), начинают новую жизнь (в смысле кардинально меняют старую) (12-II-6). Иногда шалят: строятся в шеренгу и все время меняются местами (03-II-9), приходят на медосмотр с хомячками (04-II-6), втихаря ставят оценки в классный журнал (13-II-6). Вася съедает в день или 3 сосиски и 1 котлету или 5 сосисок и 3 котлеты (10-II-6).

Замечательный сюжет содержит задача 68-I-6. Вместо занятий в кружке (91-II-6), покупки школьных принадлежностей (68-I-6) или собирания земляники (73-I-5) здесь ребята играют в «Бум!»: нужно по очереди называть все натуральные числа, начиная с 1, а вместо числа, которое делится на 3 или в котором есть цифра 3, нужно кричать «Бум!». Характерно, что другой игрой с числами, где нужно щелкать друг друга по лбу, занимаются козлята (00-II-6).

Встречаются упоминания не только о школе, но и о детском саде. Очень важно, чтобы дети с малых лет правильно писали слова «кот» (00-I-6), «няня» (01-I-6) и «крокодиллл» (06-I-6), «Карабас» (13-I-6) и надевали на ноги одинаковое количество носков (01-I-7).

Сюжеты олимпиадных задач

Профессии, события, деятельность. Многочисленные пешеходы, туристы, велосипедисты, путешественники, мотоциклисты, бегуны были весьма популярными персонажами в текстовых задачах. Реалистичной выглядит подробность о том, что туристы иногда приседают на пенек отдохнуть (08-I-8). Что касается профессиональной деятельности, трактористы пашут (64-I-6), рабочие работают (61-II-6) или изготавливают детали (72-I-6), рыбаки подсчитывают улов (77-I-5), в анкете просят указать любимого писателя, художника и композитора (80-III).

Очень постепенно условия задач наполняются более разнообразными персонажами, деятельность которых мало относится к реальности. Джентльмены встречаются в клубе и время от времени надевают друг на друга шляпы (02-I-6); а контролеры, кондукторы, граждане, выдающие себя за контролеров, и граждане, выдающие себя за кондукторов, едут в трамвае (99-I-9). Едут и смеются, пряники жуют. Астроном считает расстояния до звезд (87-II-9) — классическое понимание профессии; сержанты командуют рядовыми во взводе национальной гвардии (92-II-10); маляр перекрашивает пол в комнатах замка (88-II-6); лесник Ермолай сажает деревья вдоль забора (00-II-11); бедный дехканин владеет 70 лошадьми и 6 верблюдами (02-I-6).

Обычно действия персонажей предсказуемы: стрелок стреляет в мишень и получает за это очки (64-II-6), жюри составляет олимпиаду (89-II-5), хозяйка печет пироги (90-II-9), ныряльщики добывают жемчуг (91-II-6), делегат участвует в симпозиуме (91-II-9), нумизмат укладывает в коробку свою коллекцию (92-II-6), стражники охраняют замок (92-II-6), а охранники — тюрьму на острове (02-III-10), мудрецы размышляют (97-I-6), математики угадывают числа, не задавая ни одного вопроса (69-II-6); библиотекарь (89-I-7) и уборщица (94-I-10) переставляют книги; фокусники показывают фокус (99-III-11, 01-II-8), алхимик превращает одни вещества в другие (02-III-10). Четыре плиточника за 3 дня замостили плитками 50 см $\times$ 50 см комнату 6 м $\times$ 6 м (11-II-6). Это не тройное правило, это имитация, так сказать, винтаж.

Не обходится без курьезов. Государственные служащие передавали друг другу деньги, в конце у одного из них осталось 17 копеек (98-II-7). Это шутка. В 1998 г. случилась девальвация рубля. 17 коп. — это примерно 3 цента США до девальвации или 1 цент после. Директор поручил Александру Владимировичу купить к Новому году 1 торт, 3 бутылки шампанского и 20 хрустальных фужеров, а тот ровно на те же деньги купил 1 фужер, 3 торта и 20 бутылок шампанского (06-II-6). 40 членов жюри подбирают вторую задачу для 9 класса и собираются поставить задачу, которую умеют решать не менее половины всех членов жюри (09-II-9) — такого никогда не было! Члены клуба веселых дальтоников дарят друг другу на новый год разноцветные тапочки (15-II-8). 40 первоклассников заблудились и пришли не в свою школу (12-I-6). Президенты бывших республик Советского Союза посылают друг другу на день рождения торты (97-I-6). Юноши угощают девушку, бедняжке достанется 1000 конфет (06-III-10).

Какие события упоминаются в задачах? Разнообразные спортивные соревнования: велоэстафета, волейбол, спринт, теннис, футбол, шахматы, олимпиады по математике. Позже, когда традиционные вида спорта наскучили, упоминаются соревнования по рыбной ловле (00-I-10) и художественному скалолазанию (00-I-11). Упоминаются и выборы, например, доля проголосовавших в 2008 г. за партию Ведро (08-III-10) на каждом участке была равна явке избирателей на этом участке. Грибник каждый найденный белый гриб считает за 5 грибов (78-I-5) — видимо, подрабатывает в Центризбиркоме.

Предприятия и учреждения. В тех редких случаях, когда сюжет задачи обращается к реальному миру, упоминаются многочисленные школы, магазины, склады, колхозы, заводы и т.д. Например, где нужно построить школу, чтобы было удобно школьникам из нескольких соседних деревень (76-II-6)? Встречается также карьер (72-I-8, 81-I-7), переплетная мастерская (65-II-6), пост ДПС (12-I-9).

В таблице 2 указано несколько выдуманных учреждений.

Таблица 2. Несколько выдуманных организаций

Год	Предприятие	Чем занимается
87-I-7	«Рога и Копыта»	Контора, строящая дорогу из Арбатова в Черноморск. Успешно, но очень долго.
94-II-10	«Елки-палки»	Акционерное общество. Все дольщики мелкие. Упоминается также конструктор «Елки-палки» (02-I-10), возможно, выпускаемый этим АО
95-I-6	«Пень-инвест»	Лесозаготовительная компания, варварски вырубающая леса
95-I-9	«Спорт-ЗаРазум»	Футбольная федерация.
04-I-6	«Крокодило»	А также «Зубило» и «Дробило» — это футбольные команды. «Зубило» забило 60 голов!

Военная тематика. В общем, отсутствует. Василий Иванович и Петька воюют с белогвардейцами (00-I-8). Почти хрестоматийный старшина отправляет солдат в поле красить траву (13-II-10), новобранцев в наряд на чистку сортира (95-II-11) или даже составляет расписание нарядов (97-II-7). Агент потенциального противника подсчитывает способы подломить прибор (97-III-11). Шпионы (лучше сказать, разведчики) обмениваются кодами к сейфу ФБР (02-III-10). На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран (97-II-8), организаторы озадачены тем, что некоторые песни оскорбительны для других участников. Солдаты армий Толстых и Тонких убивают друг друга (97-I-7), последнее, видимо, какой-то временный конфликт, поскольку чуть позже Толстые и Тонкие с удовольствием проводят время в Клубе Любителей Вкусной Еды (98-I-10).

Текст песни «На Берлин» из репертуара Л. Утёсова: «С боем взяли мы Орёл, город весь прошли, И последней улицы название прочли...» — подсказал остроумный способ задания ориентированного графа (96-II-7).

Животный мир. Присутствует для одушевления скучных, в общем-то, событий. Например, на доску поставили фишку. Давайте делаем фишку живой — пусть она сама движется! В результате вместо фишки мы получаем блоху (76-II-6), кузнечика (76-II-7, 82-II-6), жуков (88-III-11), лягушку (92-II-7), козу (10-I-7). Отметим, что кузнечик может не только прыгать, но и петь при этом песенки (02-II-10). Точно так же вместо движущихся точек используются: улитка (61-II-10, 86-II-6), мухи и жуки (73-III), только мухи (93-III-11).

Ну и конечно, чтобы не говорить о людях, например, из боязни кого-нибудь обидеть, можно говорить то же самое о животных: на кошачьем конкурсе красоты оценивалась усатость, хвостатость и кусатость (08-II-7).

Иногда животные изображают самих себя: волк и собаки гоняют друг друга с риском для жизни (69-II-8), обезьянка убегает от сторожей в зоопарке (75-I-10), на кошачьей выставке рядом с любой кошкой сидит более толстый кот (01-II-6); мартышки кидаются друг в друга кокосовым орехом (02-I-7) или пинаются, мартышка, которую пнули, называется *пнутая* *мартышка* (98-II-7). «В Бразилии живет много-много диких обезьян» (03-I-7) — это «Здравствуйте, я ваша тетя».

Менее типичные случаи представлены в таблице 3.

Таблица 3. Поведение животных

Год	Животное	Чем занимается
66-I-6	Куры	и кролики. Перемешались. У кроликов в сумме на 8 ног больше чем у кур. Классика жанра.
74-II-8	Бактерия	Делится
85-I-6	3 кузнечика	Играют в чехарду
87-II-8	Вороны	Рассаживаются по веткам дуба
90-I-9	Слоны	Весят очень много, выступают в цирке.
95-I-7	Червяк	Червяк — тощий, если съел мене 1/5 гриба. в котором живет
95-II-6	Амебы	Плавают в луже, сливаются, делятся.
97-II-6	Осьминожки	живут в море Дождей, постоянно то краснеют, то синеют.
97-II-11	Ерши	Колючие и толстые: каждый не менее четверти фунта.
07-I-7	Хамелеон	юный. Выполняет контрольную работу по перекрашиванию.
15-I-11	Кабан	а также Лев, Медведь и Носорог. Кандидаты на пост царя зверей.

Отметим, что растительный мир тоже довольно богат: дубы, сосны, кедры, лиственницы, березы, кактусы. И еще грибы.

Персонажи

Рыцари и лжецы. Как правило, рыцари и лжецы живут на острове (видимо, очень удаленном, именно поэтому они, вероятно, не перемешиваются с обычными людьми). Попадаются названия: остров Логика (90-I-8), остров Невезения (95-I-7) — название навеяно песней из кинофильма «Бриллиантовая рука». Известно, что на одном из островов живет 54 054 рыцаря (11-I-8), другой остров явно где-то в тропиках: на нем живут, точнее, жили 2011 негритят (12-I-11).

Обычно они распространяют слухи друг о друге — перемывают косточки знакомым (90-I-8); обвиняют друг друга во лжи (83-II-6), причем иногда они это делают, построившись в шеренгу (08-II-6), а иногда — собравшись на конференцию «Истина и ложь в современном обществе» (12-II-8); выясняют, кто сколько работает и кто сколько получает (94-II-9). Некоторым удалось побеседовать с Фантомасом (05-II-6).

О том, как живут рыцари и лжецы, сведений немного: кто-то живет в деревне, дома которой расположены в клетках квадратной решетки (08-II-7). На острове Невезения у каждого жителя есть своя собственная станция метро и жители обсуждают, до кого они могут доехать после прохождения тайфуна «Элизабет» (97-II-8).

Кто они в жизни? Инженеры и коммерсанты (65-II-8), физики и химики (89-II-7), сотрудники НИИ (94-II-9). Иногда они религиозны (95-I-7) — поклоняются богам Солнца, Луны и Земли, а иногда чересчур политизированы (95-I-10) и состоят в каких-то политических партиях. Непонятно, что хуже. Доходит до того, что на острове Невезения проходят выборы (93-I-10) президента Ёлкина (в 1993 г., эта фамилия вызывала определенные ассоциации), впрочем, победил на них Палкин.

После выхода переводов книг Р. Смаллиана эта тема не могла остаться без модификаций. В конторе работают 200 психически здоровых и 1999 сумасшедших сотрудников (99-II-7), имеющих сформированное мнение о психическом здоровье своих коллег. Циссильванские вампиры (99-II-7) пытаются с помощью ложных ответов затеряться среди обычных людей. Джентльмены же всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым (14-I-6) — прямо скажем, воровская этика.

Приключения барона Мюнхгаузена. В 1979 г. вышел фильм Марка Захарова по сценарию Григория Горина «Тот самый Мюнхгаузен». Барона Мюнхгаузена великолепно сыграл Олег Янковский. Барон — абсолютно честный человек, несмотря на всеобщее недоверие и совершенно невероятные истории, которые с ним происходят. Этот персонаж стал любимым персонажем жюри на многие годы, в задачах он попадает во всевозможные математические затруднения и при этом всегда оказывается прав. Впрочем, позже, по мере обновления состава жюри, случалось, что барон порою ошибался.

В задачах барон путешествует во времени (83-II-5), подсчитывает в своем лесу елки и березы (88-II-8), успешно охотится на уток (91-II-6, 05-II 11), укладывает в гостиной ковер очень сложной формы (01-II 7) и даже собирает пазл (07-II 9).

Отрицательные герои. Их почти нет. Фальшивомонетчики и чеканщики изготавливают фальшивые монеты (64-III), гангстеры стреляют друг в друга (69-III), злоумышленник переставляет кнопки в лифте (96-I-8), хулиган Вася совершает немотивированные или антиобщественные действия, например, разрушает улицы бульдозером (08-II-6).

Другие персонажи. Когда речь идет о каких-то участниках событий, их упоминают либо безлично (рабочие, ученики, игроки, ученики), либо широко распространенными именами: Коля и Петя вычеркивают числа (69-II-6), Миша и Саша едут на велосипедах (69-II-6), Коля, Женя и Надя сдают экзамены (71-II-6), Аня, Ваня и Саня рисуют чертиков (99-I-7) и т. п. Впрочем, возможно, некоторые имена навеяны книгами или фильмами, ныне малоизвестными. Временами используется мнемоника: стрелки́ Анилов, Борисов и Воробьев (64-II-6) — т. е. А, Б, В; мотоциклисты Петров и Петровский (сходство фамилий облегчает восприятие условия) или просто шахматисты А, Б, В, Г, Д (94-I-11). В последнее время «случайные» имена персонажей — это просто имена членов жюри — авторов задачи или составителей варианта.

Часто о персонажах сообщается некоторая информация, довольно скудная — так появляются марсиане, просто как объекты статистических подсчетов (86-I-6); чудаки — те, у кого все знакомые малообщительные (93-II-7); богатые наследники — те, кто получил в наследство больше 10 000 рублей (93-II-9).

Увлечение именами и ненужными деталями — чрезмерное, вплоть до абсурда: вместо слов «дано уравнение», «дан многочлен» и т. п. пишут «Сережа решает уравнение» (96-I-11), «Костя взял многочлен» (98-I-11), «Владик умножает пятизначные числа» (99-I-8), вместо слов «двое играют в следующую игру» — «два сумасшедших геометра играют в следующую игру» (03-II-10).

В более позднее время персонажи-статисты часто персонифицированы: это могут быть либо выдуманные персонажи — профессор Смит, помогающий своему коллеге профессору Джонсу бороться с фобией (89-III-8); Царь Бюрократ, учреждающий комиссии из своих замов (76-II-9), — или литературные персонажи, занимающиеся несвойственным им занятием: Чебурашка и Крокодил Гена делят числа с остатком (93-I-7) и проделывают другие арифметические штучки (01-II-6), Винни-Пух и его друзья едят бананы (98-I-6), раньше-то, при социализме, бананы были редкостью. В играх в 1990-е годы появляются «устойчивые» пары фольклорных или литературных персонажей Волк и Заяц (90-II-6) (герои «Ну, погоди!», кстати, выигрывает Волк — жизненно), Баба Яга и Кощей (94-I-7), Чук и Гек (94-III-11), Малыш и Карлсон (95-II-6, 98-II-6), в обеих играх, кстати, нужно съедать кусочки шоколадки. Отметим, что при этом Карлсон, оказывается, не самый большой обжора: в задаче (03-II-7) два неназванных персонажа едят шоколадку 712×2003. В последнее время (например, 12-I-6) в играх чаще встречаются игроки Петя и Вася, благодаря нехитрой мнемонике: Петя — первый, Вася — второй. Порой доходит до полной мешанины: собрались как-то Буратино, Остап Бендер и Крокодил Гена и стали что-то-там умножать и складывать (08-II-7).

Впрочем, многие персонажи занимаются своими обычными делами: Буратино выращивает на Поле Чудес деревья с золотыми монетами (93-I-7) или закапывает деньги (10-I-6); ослик Иа-Иа складывает из палочек многоугольник (94-II-9, 02-II-6) или вместе с Винни-Пухом и друзьями измеряет расстояние между Шестью Соснами (99-II-6), а Тигра в это время проверяет съедобность хлопушек (99-II-7), Остап Бендер организует шахматные турниры в Васюках (93-II-7), электрик Петров — персонаж из стихотворения О. Григорьева (того самого: «Я спросил электрика Петрова...») — соединяет столбы проводами (97-I-7, 00-I-6), в том числе, на улице разбитых фонарей (01-I-6), Штирлиц взламывает сейф Мюллера (99-II-9), скупой рыцарь кладет монеты в «шестой сундук, еще неполный» (00-I-6), Дед Мороз дарит детям конфеты (06-II-8), а также мандарины и хлопушки (08-I-6) и выполняет желания (15-I-7), семеро козлят (00-I-6) задумали по трехзначному числу (это нетипично), после чего играют в «щелбаны» (а это типично).

В прекрасной стране Ачухонии (02-II-7) рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят рыцарей! Когда добрая фея взмахивает волшебной палочкой, появляются 103 карамельки и 94 ириски (08-I-6). На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыли 107 зеленых и фиолетовых человечков (15-I-6). Компания из 99 Кощеев Бессмертных гуляет по прямой дороге (15-II-6). На выборах в Солнечном Городе можно было проголосовать за Кнопочку, Винтика, Шпунтика (14-I-8), не путайте двух последних персонажей с винтиками и шпунтиками из наборов «Юный техник» (09-II-6). Еще несколько симпатичных персонажей перечислено в таблице 4.

География

Петербургские мотивы. Характерные свойства Ленинграда–Петербурга обнаружены в задаче 67-I-6: в Ленинграде в любой момент найдутся два человека, у которых поровну знакомых ленинградцев, и в задаче 04-II-6: город называется большим северным, если при сравнении с каждым из остальных городов оказывается, что он или больше, или севернее (или и то, и другое). Признаем некоторый недостаток этого определения: Москва тоже является большим северным городом!

Город расположен на нескольких островах, соединенных между собой мостами. Однажды один из мостов закрыли (98-II-10). Речь идет о капитальном ремонте Большеохтинского моста. Вдоль 60-й параллели растут деревья одинаковой высоты (97-II-9). 60-я параллель — знаете, где это? Вот то-то! Пловец, плывущий против течения Невы, возле Республиканского моста потерял пустую флягу (1947). Республиканский мост — это Дворцовый.

Упоминаются и ближайшие к Петербургу города. Например, Псков находится в 451 км от Лодейного Поля (68-II-6), а расстояние от Гадюкино до Мартышкино не менее 9 км. Мартышкино — это поселок вблизи кампуса СПбГУ в Петергофе. А Гадюкино — чистая фантазия.

Таблица 4. Несколько симпатичных персонажей

Год	Персонаж	Чем занимается
78-I-6	Старушка	Старушка с базара домой принесла картошку, капусту, морковку, горох. Это из Юлиана Тувима: «..петрушку и свеклу. Ох!»
78-I-6	Дама	Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж. Нужно разобраться с весами этих предметов.
84-II-6	Шалтаи	и Болтаи. 175 Шалтаев сто́ят дороже, чем 125 Болтаев
87-II-8	Багдадский	вор. Убегает от стражи во дворце султана
94-II-6	Лимон	Принц. Вельможа, у которого были весьма агрессивные подданные. Уцелел лишь барон Апельсин.
95-II-7	Икторн	Герцог. Персонаж мультфильмов про мишек Гамми. Если бы под его началом оказалось бы что-нибудь поумнее гоблинов, уже давно бы завоевал весь мир.
95-III-10	Коротышки	Жители Цветочного города. Меняются монетами. Мир портится.
96-I-6	Чонкин	рядовой. Стоит в ряд вместе с офицерами
98-II-11	Папа	ПАПАСПАСПСА, что дало нам прекрасную топологическую изюминку.
03-III-9	Дед Мороз	У него в каждом мешке лежит 2 предмета, каждый из которых — либо подарок, либо мешок.
07-I-6	Матроскин	Кот. У него на тельняшке 40 полосок.
09-I-7	Кикимора	болотная. Писаными красавицами являются не более половины из них.
12-I-9	Сильвер	Джон, капитан, пират. Пьет ром в таверне «Подзорная труба».
13-I-6 14-I-6	Поттер	Гарри. Телепортируется от елки к ближайшему дубу. Хранит в ящике волшебные шарики.

В Военной галерее Эрмитажа размещено 5 рядов по 19 портретов героев войны 1812 г. (07-II-8). Это художественное преуменьшение: на самом деле там 332 портрета. Но постоянно некоторые из них на реставрации, поэтому описанная в задаче игра с переворачиванием портретов тыльной стороной к зрителю кажется правдоподобной.

Сорок путешественников выехало в январе из Санкт-Петербурга (13-II-6) — это еще до массовых банкротств туроператоров (2014).

Страны, города, населенные пункты. Названия стран обычно выдуманные, многие из них упомянуты ниже в разделе «Эх, дороги». Отметим еще Анчурию (87-I-5), Диллию и Даллию, где в ходу денежные единицы диллеры и даллеры (87-I-6).

Города встречаются реальные — уже упоминавшиеся Чернигов и Нежин (51-I-6), а также Псков и Лодейное Поле (68-II-6), город Дальний (ныне Далянь) (74-II-6), Астрахань, от которой всего за 72 часа можно по Волге добраться до Горького (81-I-8) и Нью-Йорк, куда якобы ходят поезда из Москвы (05-I-7). Но поскольку задачи все же не о географических подробностях, большинство городов — выдуманные: Метрополис (72-II-6), Арбатов и Черноморск (87-II-7) Райземнойск (87-II-8), Фоминск (88-II-9), Мартышкино (90-II-9) — к реальному поселку Мартышкино вряд ли имеет отношение, Гайдаровск (92-II-7) и столица шахматной мысли Васюки (93-II-7).

Математика в быту

Энциклопедии, справочники, собрания сочинений. Задачи о перестановках требуют достойного объекта и мотивированности для совершения этих перестановок. Перестановками занимаются библиотекарь (89-II-7), уборщица (94-II-10) Популярной является тема перестановки томов энциклопедии «Всё о собаках» (95-II-7, 12-II-11), в которой имеются тома «Болонки», «Моськи», «Мопсы», «Пудели», «Таксы» и, вероятно, другие. Серьезным объектом служит 100-томное собрание сочинений Л. Н. Толстого (90-III-10). Еще встречаются тасование колоды карт (91-II-10) или штабеля контейнеров (85-II-7) и парковочная функция (96-I-9) — один из известных сюжетов на тему перестановок.

Отметим также упоминание о справочнике «Юный Арифмометр», в котором напечатаны все числа от 1 до 300 000, видимо, он очень полезен для тех, кто пишет числа неправильно.

Взвешивания. Монеты часто взвешивают на двухчашечных весах в поиске фальшивых, впрочем, иногда взвешивают точно, так, 15 копеечная монета весит 2,5 г. (88-I-5).

Взвешиванию подлежат не только монеты. Взвешивать можно все: овощи на складе (82-I-5), слонов в цирке (90-I-9), гранитные плиты – 9 тонн (81-I-7), детей — 50 кг две штуки (87-I-6), Малыша. Карлсона и фрекен Бок, а также Пятачка, Кролика и Винни Пуха (91-I-6) и его горшки с медом (04-II-6). Необычная мотивировка для взвешиваний дана в задаче 04-II-7: необходимо определить, в каких бочонках с медом утонули шмели. Наконец, взвешиванию на двухчашечных весах подлежат также животные в зоопарке (02-II-11)!

Для интересных вопросов обычных двухчашечных весов уже недостаточно. Требуется более изощренные приборы: весы трехчашечные — определяют средний по весу предмет (93-II-6); детектор, который сортирует по весу и раскладывает по двум чашам 5 заложенных в него предметов (09-II-7).

Эх,... дороги... Традиционный способ формулирования задач по теории графов — в терминах дорог, рейсов, и т. п. в какой-нибудь далекой стране, или даже на Марсе (06-II-9), или межгалактической империи (15-II-9). Так, Швамбрания (86-II-8) богата авиалиниями и, между прочим, традициями проведения теннисных турниров (94-III-9), государство АБ состоит из республики А и республики Б (90-III-9), реализующих двудольный граф, страна Далекая (90-II-8), планета Транай (91-II-11, 97-II-11) и Однобокое графство (00-II-7) имеют много односторонних дорог, в Северной Балбесии 100 городов (95-III-11), страна прославилась еще и тем, что ее президент выбран при активной поддержке малограмотного населения (96-I-10).

Встречаются и решетчатые графы: в стране Дураков (1983) города располагаются в узлах прямоугольной сетки. Интересное это место — страна Дураков: средняя зарплата штатного педагога в ней 45 грошей в месяц (12-I-10). Прямоугольная сетка — это схема улиц в городе Альфинске (13-I-7) и многих других, по одному из таких городов на бульдозере разъезжает хулиган Костя и разрушает улицы (08-II-6). Впрочем, разрушают дороги не только хулиганы, но и министерства, мешая этим проводить приватизацию (10-II-9).

Справедливости ради скажем, что кольцевая структура Москвы тоже упоминается (09-III-11). А прекрасным образцом нешаблонного мышления является граф, реализованный в виде этажей здания Московского университета, соединенных многочисленными лифтами (96-III-10).

Что происходит с этими городами, дорогами, авиалиниями? Правительство, Министерство транспорта (96-III-9), народный Хурал (96-II-7), туристическое агентство «Гамильтон» (96-II-10) все время заняты ремонтом и приватизацией, зачем-то вводят одностороннее движение или новые рейсы (96-II-8) и маршруты. Изучаются вопросы удаленности станций большого метрополитена (96-III-11).

Графы традиционно задаются и как схемы знакомств. В городе Незнакомске (97-II-9), позднее переименованном в Угрюмов (11-II-9), довольно многие знакомы друг с другом. Опытный вожатый в оздоровительном лагере должен как следует разбираться с тем, кто с кем знаком (98-II-8). Сотрудники компании «Кака-кола» пишут письма, кто знакомым, а кто — незнакомым (02-II-9). Счетная Палата анализирует деловые контакты олигархов (04-II-9) — такой вот извращенный вид знакомства. А в тайном обществе знакомые все время перечисляют друг другу деньги (11-II-11).

Но графы используются и для визуализации других отношений между людьми, в том числе международных. Организаторы международной олимпиады, рассаживая участников, должны пресечь не то что знакомства, но даже саму возможность того, чтобы сидящие рядом люди знали хоть какой-нибудь общий язык (01-II-9). А жители острова Новая Вавилония (99-II-9), наоборот, ищут возможность найти общий язык для общения, что непросто сделать, поскольку на этом острове используется 45 языков. Не надо было строить слишком высокий небоскреб!

Шахматные фигуры. В задачах встречаются обычные шахматные фигуры: король (78-II-6), ферзь (86-II-5), конь (62-II-6), ладья (69-II-6). Но встречаются и модифицированные фигуры: хромая ладья (1947) и хромой слон по кличке «фишка» (81-II-6), которые ходят в положенном направлении, но лишь на одну клетку; модифицированная пешка, делающая ход вперед или вправо (74-II-8); хромой король (05-II-10), сохранивший способность двигаться в трех направлениях из восьми возможных; суперконь, совершающий единым махом два хода коня (08-II-9), и любитель шахмат, не делающий никаких ходов, но делающий заявления (07-II-6).

Есть и совсем новые фигуры: маляр — ходит как хромая ладья, но при этом перекрашивает клетку (10-II-7); бадья — занимает 4 клетки, ходит как ладья, если на пути нет помех (14-II-6); кенгуру — ходит по вертикали или горизонтали на две или три клетки (15-II-8); бобер — ходит по вертикали или горизонтали на две клетки (15-II-10).

Бытовые предметы Традиционны задачи о размене монет, ценах на товары, о расположении населенных пунктов, длинах дорог. В 1960-е годы очень популярны задачи о подсчете денег, лежащих в кошельке (64-I-6, 69-I-6 и др.). В качестве штучных предметов в играх или процессах используются орехи, конфеты, спички, камни, телевизоры, булочки, марки, шишки, желуди, дубы, березы, жемчужины (91-II-6) и даже грубые ошибки в диктанте (02-I-8).

Из конкретных товаров упоминаются набор деталей «Юный техник», пазл с эклектичным названием «Растишка на севере», различные микрокалькуляторы и компьютеры. Великолепный свежий математический объект обнаружен в обычных калькуляторах — переполнение, благодаря чему таблица, в которой записаны произведения разных чисел может содержать много букв «Е» (12-I-7).

Окружающие нас объекты интересуют математика с совершенно разных точек зрения: часы интересны тем, каков на них угол между стрелками (61-I-9); в серебряных ложках — представляет интерес проба серебра (70-I-5); ванна будит любопытство на тему скорости заполнения, если включено два крана (70-I-6, классика жанра); сапог (85-II-5) будоражит воображение своей левостью или правостью; лифт в 100-этажном доме особенно интересен, если в нем имеются всего две кнопки (82-I-5). Несколько менее типичных применений бытовых предметов приведено в таблице 5.

Таблица 5. Математическое использование бытовых предметов

Год,	Объект	Как используется
73-II-6	Шоколадка	Клетчатый прямоугольник
74-III	Спутник	Точка возле сферы
75-I-6	Домино	Выкладывают. Две косточки распилены пополам
79-I-6	Часы	песочные. Две модели: на 5 и на 7 минут. На 5 минут — чтобы варить яйцо вкрутую. А на 7 минут зачем?
89-II-5 03-II-6	Дорога	железная детская. Комбинаторика поворотов налево-направо Комбинаторика переключения стрелок
99-III-11	Шарики	воздушные. Летают под куполом цирка. Проблема в том, что некоторые из них летают внутри других.
09-I-7	Жемчужина	Маленькая настоящая жемчужина весит в 5 раз меньше, чем большая фальшивая, а сто́ит в 7 раз больше.
10-I-6	Пуговица	с двумя или четырьмя дырками. Явно недооцененный математиками объект.
11-I-6	Паштет	В городе Моськин дикие крысы съели 80 % всего паштета. Пострадали ли школьные столовые?
11-II-10	Гирлянда	Комбинаторика бинарных слов

Заключение

Каких еще изменений в стиле формулировок ожидать в будущем — время покажет. Некоторые резервы для развития видны уже сейчас. До сих пор не встречаются условия задач, написанные в стихотворной форме, или, скажем, с помощью палиндромов. А ни разу не процитированный фольклор просто подавляет своими объемами. Изготовление макетов условий на компьютере позволяет использовать в задачах таблицы, всевозможные поясняющие рисунки и схемы — сейчас такие задачи редки, хотя, казалось бы, это значительно расширяет возможности задать интересный вопрос. Отметим задачу 03-I-7, где требовалось разобраться с намеренно искаженным чертежом, и уже упоминавшуюся задачу 12-I-7, где приведен фрагмент таблицы умножения больших чисел.

Откат назад к сухому академическому стилю, видимо, уже невозможен. В 1960-е годы нельзя было и подумать о появлении варианта олимпиады, где в первой задаче ученики сами себе ставят оценки в журнал, в третьей — маньяк Вася перемножает цифры разных чисел, в четвертой бизнесмен Вася при покупке БМВ получает на сдачу коробок спичек, а в пятой обсуждаются проблемы фирмы, изготавливающей с помощью 20 химических формул напиток «кккола» (13-II-6).

Хотя... в каком смысле откат невозможен? Могут ли Аня, Ваня и Саня рисовать чертиков сегодня, можно ли в условии упоминать вампиров — или это задевает чьи-нибудь религиозные чувства? (В последнем случае — сразу всех конфессий и даже атеистов, но главным образом — идиотов.) Не являются ли сюжеты «Вася переставил кнопки в лифте», «бульдозер разрушает улицу» подстрекательством к противоправной деятельности? Допустимо ли в условиях использование слов «выборы», «правительство», «лжец» или это тоже потенциальное нарушение? Не нужно ли поставить на условие гриф, особенно на предмет благонадежности?

Тем не менее, задачи о кузнечном прессе, печатающем заготовки, трубах, наполняющих бассейн, и землекопах, копающих от забора до обеда, отбившие вкус к математике у нескольких предыдущих поколений, надеюсь, навсегда ушли в прошлое. Да и некоторые популярные 40 лет назад темы — составление разных смесей, разложение на множители — тоже полностью сошли на нет. Ждем не дождемся, когда к этим темам присоединятся квадратные уравнения и стереометрия!

Содержание