Л. А. Сантало

ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕГРАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

И * Л

Издательство

иностранной

литературы

*

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1198

PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE
L'UNIVERSITE DE NANCAGO

INTRODUCTION
to
INTEGRAL GEOMETRY

by
L. A. SANTALÓ

PARIS

HERMANN & Cie ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1953

Л. А. САНТАЛО

ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕГРАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Перевод с английского

М. Г. ШЕСТОПАЛ

Под редакцией

А. М. ЛОПШИЦА и И. М. ЯГЛОМА

С дополнением

И. М. ЯГЛОМА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1956

АННОТАЦИЯ

Интегральная геометрия — своеобразное направление современной геометрии, в котором соединяются идеи, идущие из дифференциальной геометрии, теории выпуклых тел, теории вероятностей и теории меры. Основная задача в интегральной геометрии — определение меры в различных однородных пространствах. Сопоставление мер геометрических объектов разного рода позволило получить чрезвычайно много конкретных геометрических теорем.

Книга рассчитана на широкий круг математиков (научных работников, аспирантов и студентов старших курсов), в первую очередь геометров.

Редакция литературы по математическим наукам

Заведующий редакцией профессор А. Г. КУРОШ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ

Интегральная геометрия является одной из самых молодых геометрических дисциплин — выделение ее в самостоятельное направление произошло лишь в 30-х годах нашего столетия в работах В. Бляшке и его учеников, из числа которых в первую очередь следует отметить автора настоящей книги, аргентинского математика Л. А. Сантало. Зарождение интегральной геометрии обычно связывается со значительно более ранними работами английского математика М. В. Крофтона. Общематематическое значение этой ветви геометрии не очень велико: основное место занимает в ней задача определения меры в разных однородных пространствах (например, в пространстве прямых двумерной евклидовой геометрии) — задача, которую довольно легко решить в общем виде (см. § 18 настоящей книги). Однако, несмотря на отсутствие больших общих идей, на пути сопоставления мер геометрических объектов разного рода удалось получить чрезвычайно много конкретных геометрических теорем. Это поразительное богатство результатов привело Бляшке к убеждению, что «интегральная геометрия» вырастет в новую отрасль геометрии, сравнимую по своему значению с классической дифференциальной геометрией; именно поэтому он и предложил такое название предмета. Несмотря на то, что дальнейшее развитие науки пока не оправдало этого прогноза, все же интегральная геометрия заслуживает серьезного внимания, как своеобразная глава геометрии, находящаяся на стыке различных разделов математики (дифференциальной геометрии, теории выпуклых тел, теории вероятностей, теории меры).

На русском языке имеется первая часть интересной и яркой книжки Бляшке «Лекции по интегральной геометрии», посвященная геометрии на плоскости (см. «Успехи математических наук», вып. V, 1938 г.). Однако объем материала в этой книжке, написанной еще в 1935—1937 гг., на заре зарождения интегральной геометрии, весьма ограничен; кроме того, номер журнала, в котором был напечатан перевод, сейчас уже трудно достать. Таким образом, настоящая книга, оригинал которой появился в 1953 г. в известной французской серии обзоров «Actualités scientifiques et industrielles», ликвидирует пробел в нашей литературе.

Автор этой книги стремился охватить все аспекты предмета. Наряду с работами первого периода, рассмотренными в первой части книги (содержание этой части довольно близко к первой части книги Бляшке, о которой говорилось выше), автор уделяет также много внимания идущему от румынского математика М. Хаймовича перенесению идей интегральной геометрии на внутреннюю геометрию произвольной поверхности (см. ч. II книги). Наконец, ч. III книги в значительной мере связана с интересной работой 1942 г. американского математика Чжень Шен-шеня[1]) об интегральной геометрии в произвольном однородном пространстве (впрочем, автора интересовали не столько конкретные результаты Чжень Шен-шеня, сколько его общие идеи). К сожалению, Сантало, повидимому, остались неизвестными выполненные в Москве работы П. К. Рашевского и его учеников (в первую очередь Б. В. Лесового), которые позволяют распространить теоремы интегральной геометрии на довольно широкий класс неоднородных пространств и проливают новый свет на упомянутые выше результаты Хаймовича. Для того, чтобы дать читателям более полное представление о путях развития интегральной геометрии, мы приложили к переводу краткое дополнение, дающее обзор основных полученных в этом направлении результатов.

Следует сказать несколько слов о характере изложения в книге Сантало. У автора чувствуется определенная увлеченность излагаемыми результатами, однако при изложении их доказательств проявляется иногда некоторая небрежность. Поэтому в нескольких местах нам пришлось отклониться от авторского текста. Так, серьезная ошибка вкралась в

[1]) Мы придерживаемся транскрипции, принятой в Р. Ж. Мат. Раньше писали *Черн*.

изложение п. 1 § 11, в связи с чем этот пункт полностью заменен новым текстом; некоторые изменения внесены также в изложение начала ч. III, не совсем строгое у автора.

Кроме того, в русском издании вынесена в конец библиография, в оригинале рассредоточенная по всему тексту книги. При этом библиография нами значительно пополнена; добавленные названия отмечены звездочкой.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Название «Интегральная геометрия» было введено Бляшке в его «Лекциях по интегральной геометрии» [4, 15][1]) и в ряде других работ, принадлежащих самому Бляшке и его школе.

Основные идеи этой области математики возникли при изучении геометрических вероятностей[2]). Используя основные понятия теории вероятностей, Крофтон впервые получил некоторые замечательные интегральные формулы для плоских выпуклых фигур. Эти формулы носят чисто геометрический характер, и их связь с теорией вероятностей имеет второстепенное значение. Их можно рассматривать как один из отправных пунктов интегральной геометрии (§§ 3 и 4). Рассмотрение геометрических вероятностей поставило также задачу (которая составляет одну из центральных проблем интегральной геометрии) о нахождении меры множества геометрических объектов (точек, прямых, конических сечений, пар точек, . . .), инвариантной относительно некоторой заданной группы преобразований. Построив такие инвариантные меры, интегральная геометрия стремится использовать их для получения результатов, касающихся геометрических фигур (в частности, выпуклых областей) в пространстве с заданной группой. В первую очередь были рассмотрены группы евклидовых и неевклидовых движений; соответствующие меры были построены Э. Картаном [2].

В настоящей работе изложено содержание курса лекций, прочитанного мною в университете г. Чикаго в течение

[1]) В этой книге имеется обширная библиография. [В 1955 г. вышло новое издание обеих частей «Лекций» Бляшке, см. Бляшке [21]. — *Прим. ред.*]

[2]) Речь идет о задачах теории вероятностей, в которых исход события зависит от непрерывно меняющегося параметра. — *Прим. ред.*

летнего семестра 1948 г. Я стремился вести изложение так, чтобы оно содержало все необходимое для понимания материала и чтобы можно было почти полностью обойтись без ссылок на другие источники.

Изложение разделено на три части. Первая часть содержит первоначальные понятия, из которых возникла интегральная геометрия. Они могут показаться весьма элементарными и простыми, но я считал полезным на них остановиться, чтобы обеспечить лучшее понимание дальнейших обобщений. Многие результаты, изложенные в этой части книги, были в дальнейшем обобщены на n-мерные евклидовы и неевклидовы пространства; в рассмотрение этих обобщений мы входить не будем.

Во второй части книги излагается интегральная геометрия на поверхности. Рассматриваемая здесь «метрическая» интегральная геометрия (единственная исследованная до настоящего времени) существенно отличается от интегральной геометрии на плоскости. Действительно, если исключить случай поверхностей постоянной кривизны, то не существует транзитивной группы изометрических преобразований, отображающих поверхность на себя. Можно, однако, по аналогии с мерой множества прямых на плоскости так определить меру множества геодезических линий на поверхности, что некоторые результаты плоской интегральной геометрии получают обобщение в интегральной геометрии на поверхности.

Третья часть содержит введение в общую интегральную геометрию, т. е. интегральную геометрию общей группы преобразований. Необходимые для понимания текста сведения из теории групп Ли изложены в §§ 16 и 17. При этом я полностью придерживался изложения, данного Картаном, которое, как это стало ясно после работ Чжень Шен-шеня, можно считать наиболее подходящим для целей интегральной геометрии.

Буэнос-Айрес, 14 июля 1951 г.

Часть I

МЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Плотность и мера множества точек

1. Плотность и мера множества точек. Пусть x, y — ортогональные декартовы координаты точки P.

Группа $\mathfrak{M}$ движений на плоскости определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha, \\ y &= b + x^* \sin\alpha + y^* \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Поставим себе задачу определить *меру* множества X точек P так, чтобы она была *инвариантна относительно преобразований группы* $\mathfrak{M}$. Мы ограничимся мерами, которые могут быть выражены двойным интегралом вида[1])

$$m(X) = \iint\limits_X f(x, y)\, dx\, dy. \tag{1.2}$$

Иначе говоря, мы стремимся определить функцию $f(x, y)$ так, чтобы мера $m(X)$ была инвариантна относительно группы $\mathfrak{M}$.

Следовательно, должно выполняться равенство

$$\iint\limits_X f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{X^*} f(x^*, y^*)\, dx^*\, dy^*. \tag{1.3}$$

С другой стороны, в силу правила замены переменных в двойном интеграле, имеем

$$\iint\limits_X f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{X^*} f(x, y)\, dx^*\, dy^*, \tag{1.4}$$

---

[1]) Более общее определение меры рассмотрено в работах Банаха [1], Колмогорова [1], Хадвигера [5, 6, 8]. — *Прим. ред.*

так как, согласно (1.1), $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x^*, y^*)} = 1$. Из формул (1.3) и (1.4) вытекает, что

$$\int\limits_{X^*} f(x, y)\, dx^*\, dy^* = \int\limits_{X^*} f(x^*, y^*)\, dx^*\, dy^*.$$

Так как это равенство должно иметь место для всякого множества X^*, необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$f(x, y) = f(x^*, y^*).$$

Но точку (x, y) можно с помощью движения перевести в любую другую точку (x^*, y^*); поэтому из последнего равенства вытекает, что функция $f(x, y)$ имеет одно и то же значение во всех точках плоскости. Таким образом,

$$f(x, y) = \mathrm{const}.$$

Полагая эту постоянную равной единице, приходим к следующему результату:

Мера множества X точек $P(x, y)$ определяется формулой

$$m(X) = \int\limits_{X} dx\, dy. \qquad (1.5)$$

Эта мера является единственной (с точностью до постоянного множителя) мерой, инвариантной относительно группы движений на плоскости.

Дифференциальная форма, стоящая под знаком интеграла (1.5), называется *плотностью* множества точек; мы будем обозначать ее через dP.

2. Замечания о плотности. Если мы выразим $dP = dx\, dy$ через другие переменные u, v, связанные с переменными x, y равенствами

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad (1.6)$$

то получим

$$dP = dx\, dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv. \qquad (1.7)$$

Таким образом, вместо *обычного умножения* дифференциалов $dx = x_u\, du + x_v\, dv$, $dy = y_u\, du + y_v\, dv$ мы должны пользоваться правилом (1.7). Такое умножение дифференциалов dx и dy мы будем называть *внешним*. Чтобы подчеркнуть указанное различие, условимся для обозначения *внешнего произведения* употреблять квадратные скобки. Таким образом, мы будем писать

$$dP = [dx\,dy]. \tag{1.8}$$

Правила *внешнего умножения* дифференциальных форм, весьма полезные в большом числе вопросов, помимо вычисления якобианов, состоят в следующем[1]):

1. Произведение нескольких форм равно нулю, если какие-либо две из перемножаемых форм равны друг другу.

2. Произведение не меняется после выполнения четного числа перестановок сомножителей и меняет знак после выполнения нечетного числа таких перестановок.

Вычисляя, например, внешнее произведение форм

$$dx = x_u\,du + x_v\,dv, \qquad dy = y_u\,du + y_v\,dv$$

и используя соотношения

$$[du\,du] = 0, \qquad [dv\,dv] = 0, \qquad [du\,dv] = -[dv\,du],$$

мы получаем

$$[dx\,dy] = (x_u y_v - x_v y_u)\,[du\,dv],$$

в полном соответствии с формулой (1.7).

Приведенные выше соображения о плотности множества точек окажутся применимыми и для различных других плотностей, которые нам встретятся в этой книге. Это будут всегда внешние дифференциальные формы. Сверх того, поскольку мы хотим исключить из рассмотрения отрицательные плотности, *мы будем считать, что при вычислении плотностей внешние произведения берутся по абсолютной величине*[2]).

3. Одна интегральная формула. С целью указать одно приложение изложенных выше идей рассмотрим выпуклую

---

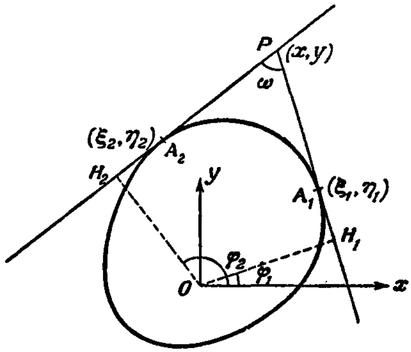
[1]) См. также Картан [3] или Рашевский [2]. — *Прим. ред.*

[2]) Так что формулу (1.8) следовало бы писать в виде

$$dP = |\,[dx\,dy]\,|.$$

Знак абсолютной величины автор всюду в аналогичных случаях опускает. — *Прим. ред.*

плоскую кривую K, имеющую касательную в каждой своей точке. Пусть O — точка, лежащая внутри (замкнутой) кривой K. Из каждой точки P, лежащей вне K, можно провести к ней две касательные PA_1 и PA_2. Каждой из этих



Фиг. 1

касательных отвечает угол φ_1 (соответственно φ_2), образованный перпендикуляром OH_1 (соответственно OH_2) к ней с некоторым фиксированным направлением Ox на плоскости. Обратно, всякие два угла φ_1 и φ_2 определяют точку P. *Найдем выражение для плотности dP через координаты* φ_1, φ_2.

Пусть ξ_1, η_1 — координаты точки касания A_1, а x, y — координаты точки P. Уравнение прямой PA_1 имеет вид

$$(x-\xi_1)\cos\varphi_1+(y-\eta_1)\sin\varphi_1=0, \tag{1.9}$$

и аналогично уравнение второй касательной PA_2 записывается в виде

$$(x-\xi_2)\cos\varphi_2+(y-\eta_2)\sin\varphi_2=0. \tag{1.9*}$$

Дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned}\cos\varphi_1\,dx+\sin\varphi_1\,dy-\cos\varphi_1\,d\xi_1-\sin\varphi_1\,d\eta_1=\\=((x-\xi_1)\sin\varphi_1-(y-\eta_1)\cos\varphi_1)\,d\varphi_1.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Так как PA_1 — касательная к кривой K и ее угловой коэффициент равен $-\operatorname{ctg}\varphi_1$, то $d\eta_1/d\xi_1=-\operatorname{ctg}\varphi_1$; поэтому

$$\cos\varphi_1\,d\xi_1+\sin\varphi_1\,d\eta_1=0.$$

Если, далее, t_1 есть длина касательной PA_1, то

$$(x-\xi_1)\sin\varphi_1-(y-\eta_1)\cos\varphi_1=-PA_1=-t_1,$$

и соотношение (1.10) может быть записано в виде

$$\cos\varphi_1\,dx+\sin\varphi_1\,dy=-t_1\,d\varphi_1.$$

Аналогично, равенство (1.9*) дает

$$\cos\varphi_2\,dx+\sin\varphi_2\,dy=-t_2\,d\varphi_2.$$

Выполнив почленное внешнее умножение последних двух равенств, получим

$$\sin(\varphi_2-\varphi_1)\,[dx\,dy]=t_1t_2\,[d\varphi_1\,d\varphi_2].$$

Так как, далее, $\varphi_2-\varphi_1=\pi-\omega$, где ω — угол A_1PA_2, составленный касательными, проведенными из точки P, то мы имеем

$$dP=[dx\,dy]=\frac{t_1t_2}{\sin\omega}\,[d\varphi_1\,d\varphi_2]. \tag{1.11}$$

Перепишем эту формулу в виде

$$\frac{\sin\omega}{t_1t_2}\,dP=[d\varphi_1\,d\varphi_2] \tag{1.12}$$

и проинтегрируем обе ее части по всем возможным различным значениям переменных. Точка P будет пробегать всю область, *внешнюю* по отношению к кривой K, а углы φ_1 и φ_2 будут меняться от 0 до 2π. При этом, если мы в каждом положении поменяем ролями φ_1 и φ_2, то придем к той же точке P; поэтому для того, чтобы учитывать каждую точку только один раз, следует разделить получаемый интеграл на 2. Таким образом мы приходим к равенству[1])

$$\int\limits_{P\,\overline{\in}\,K}\frac{\sin\omega}{t_1t_2}\,dP=2\pi^2. \tag{1.13}$$

Эта интегральная формула, принадлежащая Крофтону, замечательна по своей общности: ее правая часть совсем не зависит от выбора замкнутой выпуклой кривой.

---

[1]) Запись $P\,\overline{\in}\,K$, где K — замкнутая кривая, здесь и в дальнейшем означает, что точка P лежит *вне области, ограниченной кривой* K. Аналогично, запись $P\in K$ означает, что P содержится внутри области, ограниченной K, а запись $K_1\subset K$ — что кривая K_1 заключена в этой области. — *Прим. ред.*

Из формулы (1.13) можно получить целый ряд других интегральных формул. Так, например, если кривая K имеет непрерывный радиус кривизны ρ, то

$$\rho_1\, d\varphi_1 = ds_1, \qquad \rho_2\, d\varphi_2 = ds_2,$$

где ds_1 и ds_2 — дифференциалы дуги линии K в точках A_1 и A_2. Равенство (1.12) принимает теперь вид

$$\frac{\sin\omega}{t_1 t_2}\rho_1\rho_2\, dP = [ds_1\, ds_2];$$

интегрируя обе его части по всем возможным значениям переменных, получим

$$\int\limits_{P\in K}\frac{\sin\omega}{t_1 t_2}\rho_1\rho_2\, dP = \frac{1}{2}L^2, \tag{1.14}$$

где L — длина кривой K.

Для получения еще одной интегральной формулы воспользуемся известным соотношением[1])

$$\int\limits_0^\pi |\sin^m(a-\tau)|\, d\tau = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\sqrt{\pi}, \tag{1.15}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (x>1), \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Умножив обе части равенства (1.12) на $\sin^{m-1}(\varphi_2-\varphi_1) = \sin^{m-1}\omega$ и проинтегрировав, как и раньше, по всем возможным значениям переменных, получим следующую формулу:

$$\int\limits_{P\in K}\frac{\sin^m\omega}{t_1 t_2}\, dP = \frac{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\cdot\pi^{3/2}.$$

[1]) Оно справедливо при всех $m > -1$ (ср. Рыжик и Градштейн [1], формула 3.421,1). В тексте принимается, что m — целое положительное. — *Прим. ред.*

Упражнение. Пользуясь теми же обозначениями, вывести формулу

$$\int\limits_{P \in K} \frac{\sin \omega}{t_1 t_2} (\rho_1 + \rho_2)\, dP = 2\pi L$$

и более общую:

$$\int\limits_{P \in K} \frac{\sin^m \omega}{t_1 t_2} (\rho_1 + \rho_2)\, dP = \frac{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \sqrt{\pi} L.$$

Библиография. Другие интегральные формулы того же типа приводятся в статье Лебега [1]. Оригинальную работу Крофтона (Крофтон [3]) можно найти в Британской Энциклопедии (слово «Probability»); см. также Крофтон [1] и [2].

§ 2. Плотность и мера множества прямых

1. Плотность и мера множества прямых. Прямая G на плоскости может быть определена *нормальными координатами* p, φ. Уравнение ее имеет вид

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0. \tag{2.1}$$

Под *мерой* множества X прямых G мы будем понимать интеграл вида

$$m(X) = \int\limits_X f(p, \varphi)\, dp\, d\varphi \tag{2.2}$$

при условии, что *этот интеграл инвариантен относительно группы движений* $\mathfrak{M}$ (1.1).

Движение, определяемое формулой (1.1), преобразует прямую (2.1) в прямую

$$(a + x^* \cos \alpha - y^* \sin \alpha) \cos \varphi + \\ + (b + x^* \sin \alpha + y^* \cos \alpha) \sin \varphi - p = 0,$$

т. е.

$$x^* \cos (\varphi - \alpha) + y^* \sin (\varphi - \alpha) - (p - a \cos \varphi - b \sin \varphi) = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2.1), мы видим, что движение, определяемое параметрами (a, b, α), преобразует координаты p, φ прямой G по формулам

$$p^* = p - a\cos\varphi - b\sin\varphi, \qquad \varphi^* = \varphi - \alpha. \tag{2.3}$$

Если $m(X)$ инвариантна относительно таких преобразований, то должно иметь место соотношение

$$\int_{X^*} f(p^*, \varphi^*)\, dp^*\, d\varphi^* = \int_X f(p, \varphi)\, dp\, d\varphi.$$

С другой стороны, согласно (2.3), мы имеем

$$\int_{X^*} f(p^*, \varphi^*)\, dp^*\, d\varphi^* = \int_X f(p^*, \varphi^*)\, dp\, d\varphi,$$

поскольку

$$\frac{\partial(p^*, \varphi^*)}{\partial(p, \varphi)} = \begin{vmatrix} 1 & a\sin\varphi - b\cos\varphi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Последние два равенства дают

$$\int_X f(p, \varphi)\, dp\, d\varphi = \int_X f(p^*, \varphi^*)\, dp\, d\varphi.$$

Для того, чтобы это было справедливо для любого множества X, должно выполняться условие $f(p, \varphi) = f(p^*, \varphi^*)$. Так как движением можно данную прямую $G(p, \varphi)$ перевести в любую другую прямую $G^*(p^*, \varphi^*)$, то из последнего равенства вытекает, что функция $f(p, \varphi)$ должна иметь одно и то же значение для всех прямых плоскости, т. е. $f(p, \varphi) = \mathrm{const}$. Полагая эту постоянную равной единице, имеем:

Мера $m(X)$ множества X прямых $G(p, \varphi)$ определяется формулой

$$m(X) = \int_X dp\, d\varphi. \tag{2.4}$$

Эта мера является единственной (с точностью до постоянного множителя) мерой, инвариантной относительно группы движений плоскости.

Дифференциальная форма, стоящая под знаком интеграла, называется *плотностью* множества прямых и обозначается через

$$dG = [dp\, d\varphi]. \tag{2.5}$$

Квадратные скобки указывают на то, что это *внешняя* дифференциальная форма; согласно замечанию в п. 2 § 1, мы ее будем рассматривать только по абсолютной величине.

2. Упражнения. Доказать, что если координатами прямой G считать коэффициенты u, v ее уравнения $ux + vy + 1 = 0$, то

$$dG = \frac{[du\, dv]}{(u^2+v^2)^{3/2}}. \tag{2.6}$$

Если задать прямую G отрезками α, β, которые она отсекает на координатных осях, то

$$dG = \frac{\alpha\beta\,[d\alpha\, d\beta]}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}. \tag{2.7}$$

3. Множество прямых, пересекающих заданную кривую. Пусть C — фиксированная *кривая, состоящая из конечного числа дуг, имеющих касательную в каждой своей точке.* Мы предположим, что C имеет конечную длину L и что она задана параметрическими формулами

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \tag{2.8}$$

в которых параметр s представляет собой длину дуги. Рассмотрим прямую G, пересекающую кривую C в точке (x, y) и образующую с касательной, проведенной к кривой в этой точке, угол θ. Задание параметра s и соответствующего ему угла θ определяет прямую G. Мы поставим себе задачу определить плотность dG не через координаты p и φ, а через координаты s и θ.

Пусть τ — угол, образованный касательной к линии C с осью x-ов. В таком случае

$$\varphi = \theta + \tau - \frac{\pi}{2}. \tag{2.9}$$

Далее, так как x и y — точки прямой G, то

$$p = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \tag{2.10}$$

откуда следует, что

$$dp = \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\, d\varphi.$$

Приняв во внимание, что $dx = \cos\tau\, ds$ и $dy = \sin\tau\, ds$, будем иметь

$$dp = \cos(\varphi - \tau)\, ds + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\, d\varphi.$$

Умножая внешним образом на $d\varphi$, приходим к равенству

$$[dp\, d\varphi] = \cos(\varphi - \tau)\,[ds\, d\varphi]. \tag{2.11}$$

Из формулы (2.9) следует, что $d\varphi = d\theta + \tau'\, ds$, так как τ есть функция только от s. Подставляя это выражение в (2.11), получаем

$$dG = [dp\, d\varphi] = |\sin\theta|\,[ds\, d\theta]. \tag{2.12}$$

В правой части мы написали $|\sin\theta|$, так как считаем все плотности положительными.

Проинтегрируем теперь обе части равенства (2.12) по всем прямым G, пересекающим кривую C. Правая часть равенства даст

$$\int_0^L ds \int_0^\pi |\sin\theta|\, d\theta = 2L.$$

При вычислении левой части следует учесть, что каждую прямую нужно считать столько раз, сколько она имеет точек пересечения с кривой C. Обозначая это число через n, получаем

$$\int n\, dG = 2L, \tag{2.13}$$

где за область интегрирования можно принять множество всех прямых плоскости (для прямых G, не пересекающих C, число n равно нулю).

Формула (2.13) справедлива для любой *спрямляемой кривой*. Доказательство этого более общего предложения имеется в книге Бляшке [4] [1]).

Фавар [1] принимает левую часть формулы (2.13) в качестве определения «длины» точечного континуума

[1]) См. стр. 139 русского перевода. — *Прим. ред.*

и доказывает, что в случае спрямляемой кривой она совпадает с обычной длиной (см. также Шерман [1])[1].

Мы не будем останавливаться на обсуждении этих более общих вопросов, предпочтя этому рассмотрение некоторых приложений формул (2.12) и (2.13).

4. Случай выпуклой кривой. Если C — замкнутая выпуклая кривая K, то $n=2$ для всех прямых G, которые пересекают C (за исключением прямых, касающихся C, множество которых имеет меру нуль). Таким образом,

$$\int_{G\cdot K\neq 0} dG = L, \tag{2.14}$$

т. е. *мера множества прямых, пересекающих выпуклую кривую, равна длине этой кривой.*

Допустим теперь, что кривая C длины L может быть расположена внутри выпуклой кривой C_1 длины L_1. Рассмотрим совокупность всех прямых, пересекающих C_1; *среднее значение* числа точек пересечения с кривой C для этих прямых будет равно

$$\bar{n} = \frac{\int n\,dG}{\int dG} = \frac{2L}{L_1}. \tag{2.15}$$

Учитывая теперь, что необходимо должны существовать такие прямые, число точек пересечения которых с C не меньше $\bar{n}$, мы приходим к следующему выводу:

Если кривая C длины L может быть заключена внутри выпуклой кривой длины L_1, то существуют прямые, число точек пересечения которых с C не меньше $2L/L_1$[2].

Упражнения. 1. n окружностей радиуса r расположены внутри окружности радиуса R; доказать, что существуют такие прямые, что число пересекаемых ими внутренних окружностей не меньше rn/R.

---

[1] См. также Нёбелинг [1, 2, 3] и Оуэнс [1]. — *Прим. ред.*

[2] Таким образом, для каждой кривой C можно найти прямую, число точек пересечения которой с C не меньше $2L/L_1$, где L_1 — периметр *выпуклой оболочки* кривой C (наименьшей выпуклой фигуры, содержащей C внутри себя). — *Прим. ред.*

2. Пусть $(h+1)(k+1)$ целых чисел x_i, y_j удовлетворяют неравенствам

$$a \leqslant x_i \leqslant a+h, \qquad b \leqslant y_j \leqslant b+k.$$

Доказать существование такой линейной формы $ux+vy+1$, что число пар значений (x_i, y_j), для которых удовлетворяется неравенство

$$|ux_i+vy_j+1| \leqslant \rho\sqrt{u^2+v^2},$$

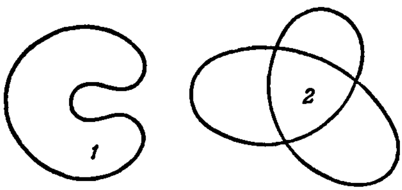
не меньше

$$(h+1)(k+1)\frac{\pi\rho}{h+k+4\rho}.$$

5. Другие интегральные формулы. Пусть кривая C обладает *непрерывной кривизной* $\varkappa$. Интеграл

$$c = \int_C \varkappa\, ds, \tag{2.16}$$

где s есть длина дуги на кривой C, мы назовем *полной кривизной* кривой C. Так как $\varkappa = d\tau/ds$, где τ — угол, образованный касательной в текущей точке кривой с осью x,



Фиг. 2

то полная кривизна c представляет собой полную вариацию угла τ при обходе всей кривой C. Например, для кривой *1* (фиг. 2) $c=2\pi$, а для кривой *2* полная кривизна $c=4\pi$.

Умножим левую и правую части равенства (2.12) на $\varkappa$ и выполним интегрирование по всем прямым, имеющим общие точки с кривой C. Интегрируя правую часть, получим

$$\int_C \varkappa\, ds \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = 2c.$$

Интегрируя же левую часть, мы заметим, что каждая прямая G будет фигурировать как общий множитель при кривизнах $\varkappa_i$ во всех n точках пересечения этой прямой G с кривой C. В соответствии с этим получим формулу

$$\int\left(\sum_1^n \varkappa_i\right)dG = 2c, \tag{2.17}$$

в которой за область интегрирования можно принять множество всех прямых G плоскости.

Если, например, C — выпуклая кривая и $\varkappa_1, \varkappa_2$ — ее кривизны в двух точках, в которых прямая G пересекает C, то

$$\int(\varkappa_1 + \varkappa_2)\,dG = 4\pi, \tag{2.18}$$

так как полная кривизна c выпуклой кривой всегда равна 2π.

Умножая левую и правую части формулы (2.12) на $\sin^m\theta$ и поступая так же, как и выше, получаем, используя соотношение (1.15),

$$\int\left(\sum_1^n \sin^m\theta_i\right)dG = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}\sqrt{\pi}L; \tag{2.19}$$

здесь θ_i — углы, образованные прямой G с касательными к кривой C, проведенными в n точках пересечения G с C, m — целое положительное число, L — длина кривой C, а областью интегрирования служит множество всех прямых G плоскости.

6. Средние значения. Если C — кривая, расположенная внутри выпуклой кривой C_1 длины L_1, то мы получаем следующие средние значения:

$$\overline{\left(\sum_1^n \varkappa_i\right)} = \frac{2c}{L_1}, \qquad \overline{\left(\sum_1^n \sin^m\theta_i\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}\sqrt{\pi}\,\frac{L}{L_1}.$$

Таким образом, *существуют прямые, пересекающие кривую C в таких точках, что*

$$\sum_{1}^{n} x_i \geqslant \frac{2c}{L_1}, \qquad \sum_{1}^{n} \sin^m \theta_i \geqslant \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)} \sqrt{\pi}\, \frac{L}{L_1}.$$

7. Упражнения. Используя прием, указанный выше, вывести интегральные формулы

$$\int \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{\sin \theta_i} \right) dG = \pi L, \qquad \int \left(\sum_{1}^{n} \frac{x_i}{\sin \theta_i} \right) dG = \pi c,$$

$$\int \left(\sum_{1}^{n} \theta_i \right) dG = 2\pi L$$

(областью интегрирования служит множество всех прямых G плоскости).

§ 3. Множества пар точек

1. Плотность множества пар точек. Пару точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ можно задать четырьмя координатами x_1, y_1, x_2, y_2. Положение этих точек определяется также координатами p, φ прямой G, соединяющей точки P_1 и P_2, и расстояниями t_1 и t_2 этих точек от основания перпендикуляра, опущенного из начала координат O на прямую G. Выразим произведение $[dP_1\, dP_2] = [dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2]$ через координаты p, φ, t_1, t_2. Учитывая, что

$$x_i = p \cos \varphi - t_i \sin \varphi, \qquad y_i = p \sin \varphi + t_i \cos \varphi \quad (i = 1, 2),$$

получаем

$$\begin{aligned} dx_i &= \cos \varphi\, dp - (p \sin \varphi + t_i \cos \varphi)\, d\varphi - \sin \varphi\, dt_i \\ dy_i &= \sin \varphi\, dp + (p \cos \varphi - t_i \sin \varphi)\, d\varphi + \cos \varphi\, dt_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2),$$

и, следовательно,

$$[dx_i\, dy_i] = p\,[dp\, d\varphi] + [dp\, dt_i] - t_i\,[d\varphi\, dt_i]. \qquad (3.1)$$

Полагая $i = 1, 2$ и составляя снова внешнее произведение, получаем

$$[dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2] = (t_2 - t_1)\,[dp\, d\varphi\, dt_1\, dt_2].$$

Принимая во внимание, что $[dp\, d\varphi] = dG$, запишем полученную формулу в виде

$$[dP_1\, dP_2] = |t_2 - t_1|\,[dG\, dt_1\, dt_2]. \tag{3.2}$$

Вместо разности $t_2 - t_1$ мы взяли ее абсолютную величину, так как мы рассматриваем только положительные плотности.

2. Интегралы от степеней хорд выпуклой кривой. Пусть K — некоторая замкнутая выпуклая кривая. Обозначим через σ длину хорды кривой K, определяемой прямой G. Рассмотрим интегралы

$$I_n = \int \sigma^n\, dG, \tag{3.3}$$

где n — целое положительное число, а интеграл берется по всем прямым G, пересекающим K.

Рассмотрим также интеграл

$$J_n = \int r^n\, [dP_1\, dP_2], \tag{3.4}$$

где r — расстояние между точками P_1 и P_2, расположенными внутри кривой K, а интегрирование распространяется на все возможные пары таких точек.

Используя формулу (3.2) и учитывая, что $r = |t_2 - t_1|$, из равенства (3.4) получаем

$$J_n = \int |t_2 - t_1|^{n+1} dG\, dt_1 dt_2 =$$

$$= \int dG\, dt_1 \left[\int_{t_1}^{b} (t_2 - t_1)^{n+1}\, dt_2 + \int_{a}^{t_1} (t_1 - t_2)^{n+1}\, dt_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{n+2} \int dG \int_{a}^{b} [(b - t_1)^{n+2} + (t_1 - a)^{n+2}]\, dt_1 =$$

$$= \frac{2}{(n+2)(n+3)} \int (b - a)^{n+3}\, dG,$$

где b и a — значения t, соответствующие концам хорды σ, так что $b - a = \sigma$.

Полученное соотношение можно записать в виде

$$J_n = \frac{2}{(n+2)(n+3)} I_{n+3}; \tag{3.5}$$

оно имеет место для всякого $n \geqslant -1$. Можно переписать его также в виде равенства

$$I_n = \frac{n(n-1)}{2} J_{n-3}, \tag{3.6}$$

справедливого для всех $n \geqslant 2$.

Значения I_n для $n = 0, 1$ легко находятся:

$$I_0 = L, \tag{3.7}$$

где L — длина кривой K, в силу формулы (2.14), и

$$I_1 = \int \sigma\, dp\, d\varphi = \int \sigma\, dp \int_0^{\pi} d\varphi = \int_0^{\pi} F d\varphi = \pi F, \tag{3.8}$$

где F — площадь фигуры, ограниченной кривой K, ибо $\sigma\, dp$ есть элемент площади, ограниченной кривой K.

При $n = 2$ равенства (3.6) и (3.4) дают

$$I_2 = \int \sigma^2 dG = \int \frac{dP_1 dP_2}{r}. \tag{3.9}$$

При $n = 3$

$$I_3 = \int \sigma^3 dG = 3F^2, \tag{3.10}$$

так как, в силу определения (3.4), $J_0 = F^2$. Замечательная интегральная формула (3.10) принадлежит Крофтону.

Обозначив через $\bar{r}$ *среднее расстояние* между двумя точками внутри кривой K, т. е. положив

$$\bar{r} = \frac{\int r\, dP_1 dP_2}{\int dP_1 dP_2} = \frac{J_1}{F^2},$$

мы получим при $n = 4$

$$I_4 = \int \sigma^4 dG = 6\bar{r} F^2. \tag{3.11}$$

Для окружности единичного радиуса имеем[1])

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{2\cdot 4\ \ldots\ n}{3\cdot 5\ \ldots\ (n+1)}\, 2^{n+1}\pi & \text{при четном } n, \\[2ex] \dfrac{1\cdot 3\ \ldots\ n}{2\cdot 4\ \ldots\ (n+1)}\, 2^{n}\pi^2 & \text{при нечетном } n. \end{cases} \qquad (3.12)$$

3. Неравенства для I_n. Величины I_n не независимы — они связаны некоторыми неравенствами. Одно из них, а именно

$$I_0^2 - 4I_1 \geqslant 0, \qquad (3.13)$$

есть не что иное, как классическое *изопериметрическое неравенство*; мы его рассмотрим позднее. Равенство в формуле (3.13) имеет место только в том случае, когда K — окружность.

Имеют место еще неравенства

$$15^2\pi^8 I_4^2 - 2^{16} I_1^5 \geqslant 0, \qquad (3.14)$$
$$16^2 I_1^3 - 3^2\pi^4 I_2^2 \geqslant 0.$$

Первое из них принадлежит Бляшке [1], а второе—Карлеману [1]. В обоих этих соотношениях равенство имеет место только для окружности.

Легко доказать неравенства

$$I_{m+n}^2 \leqslant I_{2m} I_{2n}, \qquad I_n^{p-m} \leqslant I_m^{p-n} I_p^{n-m} \qquad (3.15)$$

для любых целых m, n, p, таких, что $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant p$[2]).

В связи с этим вопросом Бляшке поставил проблему о нахождении необходимых и достаточных условий того, чтобы данная последовательность вещественных чисел представляла последовательность значений интегралов I_n для какой-либо замкнутой выпуклой кривой; в случае, если эти условия выполняются, требуется еще установить, является ли соответствующая выпуклая кривая единственной (см. Бляшке [4][3])). Эта проблема остается еще нерешенной.

[1]) Эти формулы легко получить, если воспользоваться тем, что $dG = [dp\, d\varphi]$ и что для единичного круга с центром в начале координат $\sigma = 2\sqrt{1-p^2}$. — *Прим. ред.*

[2]) Первое из них — непосредственное следствие элементарного неравенства Буняковского для интегралов, второе получается аналогично. — *Прим. ред.*

[3]) Стр. 143 русского перевода. — *Прим. ред.*

§ 4. Множества пар прямых линий

1. Плотность множества пар прямых. Пара прямых $G_1(p_1, \varphi_1)$, $G_2(p_2, \varphi_2)$ может быть определена координатами p_i, φ_i $(i = 1, 2)$. Положение этих прямых можно также задать координатами x, y точки P их пересечения и углами α_1, α_2, которые они составляют с каким-нибудь определенным направлением на плоскости, например с осью Ox.

В качестве задачи, «двойственной» рассмотренной в предыдущем параграфе, выразим произведение $[dG_1, dG_2]$ через координаты x, y, α_1, α_2.

Так как

$$\varphi_i = \alpha_i - \frac{\pi}{2} \quad (i = 1, 2)$$

и

$$p_i = x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i = x\sin\alpha_i - y\cos\alpha_i \quad (i = 1, 2),$$

то

$$d\varphi_i = d\alpha_i\,,$$

$$dp_i = \sin\alpha_i dx - \cos\alpha_i dy + (x\cos\alpha_i + y\sin\alpha_i)\,d\alpha_i.$$

Выполнив внешнее умножние, получим

$$[dp_i d\varphi_i] = \sin\alpha_i\,[dx\,d\alpha_i] - \cos\alpha_i\,[dy\,d\alpha_i\,] \quad (i = 1{,}2) \qquad (4.1)$$

и, следовательно,

$$[dp_1\,d\varphi_1\,dp_2\,d\varphi_2] = |\sin(\alpha_1 - \alpha_2)|\,[dx\,dy\,d\alpha_1\,d\alpha_2],$$

т. е.

$$[dG_1\,dG_2] = |\sin(\alpha_1 - \alpha_2)|\,[dP\,d\alpha_1\,d\alpha_2]. \qquad (4.2)$$

В правой части взята абсолютная величина, так как мы рассматриваем только положительные плотности.

Формула (4.2) «двойственна» формуле (3.2).

2. Интегральная формула Крофтона. Вычислим теперь интеграл от обеих частей равенства (4.2), распространенный на все пары прямых, пересекающих выпуклую кривую K.

Интегрируя левую часть равенства, получаем, используя формулы (2.14),

$$\int dG_1 dG_2 = \int\limits_{G_1K\neq 0} dG_1 \int\limits_{G_2K\neq 0} dG_2 = L^2, \qquad (4.3)$$

где L — длина кривой K.

Правую часть равенства (4.2) можно сначала проинтегрировать по тем точкам P, которые расположены внутри кривой K; мы получим

$$\int\limits_{P\in K} dP \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|\, d\alpha_1 d\alpha_2 = 2\pi F, \tag{4.4}$$

где F — площадь фигуры, ограниченной кривой K.

Если точка P не находится внутри кривой K, то, обозначив через α, β углы, которые образуют с осью x опорные прямые кривой K, проведенные через точку P, мы получим

$$\int\limits_\alpha^\beta \int\limits_\alpha^\beta |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|\, d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta d\alpha_1 \left\{ \int\limits_\alpha^{\alpha_1} \sin(\alpha_1-\alpha_2)\, d\alpha_2 + \int\limits_{\alpha_1}^\beta \sin(\alpha_2-\alpha_1)\, d\alpha_2 \right\} =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \{2-\cos(\alpha_1-\alpha)-\cos(\beta-\alpha_1)\}\, d\alpha_1 =$$

$$= 2(\beta-\alpha) - 2\sin(\beta-\alpha).$$

Если обозначить через $\omega=\beta-\alpha$ угол между двумя опорными прямыми кривой K, проведенными из точки P, то интеграл от правой части равенства (4.2) по всем точкам P, не содержащимся внутри K, будет равен

$$\int\limits_{P\bar{\in} K} dP \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_\alpha^\beta |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|\, d\alpha_1 d\alpha_2 = 2\int\limits_{P\bar{\in} K} (\omega-\sin\omega)\, dP. \tag{4.5}$$

Сумма правых частей равенств (4.4) и (4.5) должна быть равна правой части равенства (4.3). Отсюда получаем *формулу Крофтона*:

$$\int\limits_{P\bar{\in} K} (\omega-\sin\omega)\, dP = \frac{1}{2}L^2 - \pi F. \tag{4.6}$$

Она справедлива для любой замкнутой выпуклой кривой K.

§ 5. Кинематическая мера

1. Множества конгруэнтных фигур. Положение твердой фигуры K (области, отрезка, кривой, ...) на плоскости определяется положением одной точки $P(x, y)$ этой фигуры и углом φ, составленным направлением PA, фиксированным в фигуре K, с некоторым выбранным направлением Ox на плоскости. Мы будем говорить, что x, y, φ — *координаты* фигуры K. За меру множества X возможных положений фигуры K, или, иными словами, множества X фигур, конгруэнтных K, мы примем интеграл

$$m(X) = \int\limits_X f(x, y, \varphi)\, dx\, dy\, d\varphi, \tag{5.1}$$

удовлетворяющий условию *инвариантности относительно группы $\mathfrak{M}$ движений на плоскости.*

Группа движений определяется формулами (1.1) и $\varphi = \varphi^* + \alpha$:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha, \\ y &= b + x^* \sin\alpha + y^* \cos\alpha, \\ \varphi &= \varphi^* + \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Условие инвариантности $m(X)$ выражается равенством

$$\int\limits_X f(x, y, \varphi)\, dx\, dy\, d\varphi = \int\limits_{X^*} f(x^*, y^*, \varphi^*)\, dx^* dy^* d\varphi^*. \tag{5.3}$$

Из формул (5.2) следует, что

$$\frac{\partial(x, y, \varphi)}{\partial(x^*, y^*, \varphi^*)} = 1,$$

и поэтому

$$\int\limits_X f(x, y, \varphi)\, dx\, dy\, d\varphi = \int\limits_{X^*} f(x, y, \varphi)\, dx^* dy^* d\varphi^*. \tag{5.4}$$

Из равенств (5.3) и (5.4) получаем

$$\int\limits_{X^*} f(x^*, y^*, \varphi^*)\, dx^* dy^* d\varphi^* = \int\limits_{X^*} f(x, y, \varphi)\, dx^* dy^* d\varphi^*.$$

Для того, чтобы это равенство имело место для *любого* множества X^* фигур, должно выполняться условие $f(x, y, \varphi) = f(x^*, y^*, \varphi^*)$. Так как движением фигуру можно перевести из любого ее положения (x, y, φ) в любое другое положение (x^*, y^*, φ^*), то функция $f(x, y, \varphi)$ должна сохранять одно и то же значение для всех положений фигуры K, т. е. эта функция должна быть постоянной величиной.

Принимая эту постоянную равной единице, мы получаем:

Мера множества X фигур, конгруэнтных фигуре $K(x, y, \varphi)$, определяется формулой

$$m(X) = \int_X dx\, dy\, d\varphi. \tag{5.5}$$

С точностью до постоянного множителя она является единственной мерой, инвариантной относительно группы движений плоскости.

Дифференциальная форма под знаком интеграла (5.5), взятая по абсолютной величине, называется *кинематической плотностью* на плоскости; мы будем ее обозначать через dK, так что

$$dK = [dx\, dy\, d\varphi]. \tag{5.6}$$

Как и раньше, квадратные скобки [ ] служат для обозначения *внешнего произведения*. Мера (5.5) называется *кинематической мерой* множества фигур, конгруэнтных K, или *множества положений фигуры K*.

2. Два свойства инвариантности кинематической меры.

I. *Кинематическая мера инвариантна относительно обращения движения.* Это означает следующее: если предположить неподвижными оси $(P.\ x',\ y')$, связанные с фигурой K, а первоначальные оси $(O.\ x,\ y)$ — подвижными, то мера не изменится[1]).

В самом деле, координаты (x', y', φ') первоначальной системы относительно системы подвижных осей связаны с ко-

[1]) Другими словами, кинематическая мера множества «фигур» $(O.\ x,\ y)$ (координатных реперов), совершающих «обратное движение» относительно системы координат $(P. x',\ y')$, принятой за неподвижную, равна кинематической мере множества фигур $(O.\ x,\ y)$ (или, что то же самое, множества фигур K), движущихся в системе координат $(O.\ x,\ y)$. — *Прим. ред.*

ординатами подвижной системы формулами:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x\cos\varphi - y\sin\varphi,\\ y' &= x\sin\varphi - y\cos\varphi,\\ \varphi' &= -\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial(x', y', \varphi')}{\partial(x, y, \varphi)} = -1.$$

А так как мы считаем, что мера всегда положительна, то

$$\int\limits_X dx\,dy\,d\varphi = \int\limits_{X'} dx'\,dy'\,d\varphi',$$

чем и устанавливается требуемая инвариантность.

Пример. В качестве приложения этого свойства инвариантности рассмотрим меру множества фигур, конгруэнтных фигуре K и содержащих внутри себя некоторую определенную точку P.

В силу доказанного свойства инвариантности, мы получим тот же результат, если найдем меру множества точек P, рассматриваемых как фигуры и содержащихся внутри K. Иначе говоря,

$$m(K \ni P) = m(P \in K) = \int dx\,dy\,d\varphi = \int\limits_{P\in K} dx\,dy \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi F,$$

так как $P(x, y)$ пробегает все точки, находящиеся внутри K, и в каждом положении точки P угол φ изменяется от 0 до 2π.

Таким образом, *мера множества таких положений области K площади F, для которых фиксированная точка P содержится внутри K, равна*

$$m(K \ni P) = \int\limits_{P\in K} dK = 2\pi F. \tag{5.7}$$

II. *Кинематическая мера не изменится, если изменить подвижную систему координат.* Это означает, что для определения положения фигуры K можно вместо точки P и направления PA выбрать другую точку P_1 и другое направление P_1A_1; кинематическая мера при этом останется прежней.

Это свойство является следствием предыдущего свойства и основного свойства инвариантности относительно группы движений. В самом деле, инвариантность относительно группы движений означает инвариантность относительно изменения неподвижной системы координат. Подлежащее доказательству свойство состоит в инвариантности относительно замены подвижной системы координат, последняя же является неподвижной в обращенном движении.

Можно доказать это важное свойство и непосредственно. Если координаты новой системы осей с началом в точке P_1 относительно системы осей с началом в точке P обозначить через a, b, φ_0, то

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + a\cos\varphi - b\sin\varphi, \\ y_1 &= y + a\sin\varphi + b\cos\varphi, \\ \varphi_1 &= \varphi + \varphi_0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\frac{\partial(x_1, y_1, \varphi_1)}{\partial(x, y, \varphi)} = 1.$$

Таким образом,

$$\int_X dx\,dy\,d\varphi = \int_X dx_1 dy_1 d\varphi_1,$$

что и доказывает наше утверждение.

З а м е ч а н и е. Последнее свойство инвариантности играет очень важную роль и очень удобно в приложениях. Используя его, можно в каждом отдельном случае выбрать наиболее удобную подвижную систему координат.

Пусть K_0— некоторая фиксированная область с площадью F_0. Рассмотрим случай, когда подвижная фигура K сводится к одной точке P. Мера множества различных положений точки P внутри области K_0 выражается формулой

$$m(P \in K_0) = \int dP d\varphi = 2\pi F_0. \tag{5.8}$$

Для того, чтобы определить положение точки P, мы можем также выбрать некоторую точку Q, жестко связанную с точкой P, т. е. находящуюся от P на постоянном расстоянии $QP = r =$ const. Мера множества положений точки P внутри K_0 определится интегралом

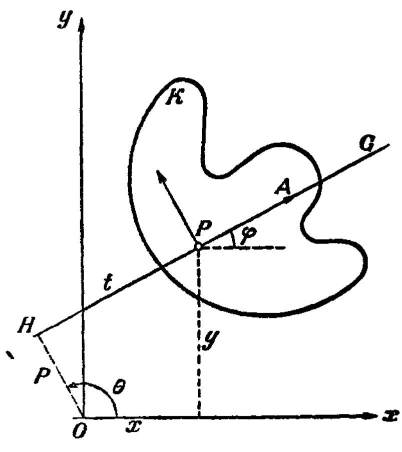
$$\int dQ\,d\varphi = \int \omega_Q\,dQ = \frac{1}{r}\int s\,dQ, \tag{5.9}$$

где φ означает центральный угол, соответствующий *находящейся внутри* K_0 точке окружности радиуса r, описанной из точки Q как из центра; ω_Q — сумму центральных углов всех заключенных внутри K_0 дуг такой окружности, а s — сумму длин всех этих дуг. Равенства (5.8) и (5.9) дают интегральную формулу

$$\int s\,dQ = 2\pi r F_0, \tag{5.10}$$

где интеграл можно считать распространенным на всю плоскость.

3. Другая форма для кинематической плотности. Вместо координат x, y, φ, определяющих положение фигуры K,



Фиг. 3

можно выбрать другие координаты. Положение фигуры K можно, например, определить заданием прямой PA, которую мы обозначим $G(p, \theta)$, и расстояния $t = HP$ от точки P до основания H перпендикуляра, опущенного из начала координат O на прямую G.

Формулы преобразования имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= p\cos\theta + t\sin\theta, \\ y &= p\sin\theta - t\cos\theta, \\ \varphi &= \theta - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial(x, y, \varphi)}{\partial(p, \theta, t)}\right| = 1,$$

и, следовательно,

$$dK = [d\vec{G}\, dt]. \tag{5.11}$$

Запись $\vec{G}$ указывает на то обстоятельство, что прямая G рассматривается как ориентированная, ибо при изменении направления этой прямой фигура K не совмещается с собою.

Полученное выражение (5.11) для dK понадобится нам в следующем параграфе.

Упражнение. Доказать, что если ξ, ζ — координаты центра вращения, совмещающего K с некоторым фиксированным положением K_0 той же самой фигуры, ω — угол поворота в этом вращении, то кинематическая плотность может быть записана в виде

$$dK = 4\sin^2\frac{\omega}{2}\,[d\xi\, d\zeta\, d\omega]. \tag{5.12}$$

§ 6. Множества отрезков

1. Мера множества отрезков заданной длины, имеющих общие точки с некоторой выпуклой фигурой. Пусть K — некоторый ориентированный отрезок длины l и K_0 — определенная выпуклая фигура, площадь которой равна F_0, а периметр L_0. Воспользуемся выражением (5.11) для кинематической плотности, полагая, что G — прямая, содержащая отрезок K, и обозначим через σ длину хорды, отсекаемой фигурой K_0 на прямой G. Мы получим

$$\int\limits_{K\cdot K_0 \neq 0} dK = \int (\sigma + l)\, d\vec{G}.$$

Принимая во внимание формулы (2.14) и (3.8) и учитывая, что каждую неориентированную прямую можно рассматривать как пару ориентированных прямых противоположных направлений, мы получим

$$\int\limits_{K \cdot K_0 \neq 0} dK = 2\pi F_0 + 2lL_0. \tag{6.1}$$

Таким образом, *кинематическая мера множества всех ориентированных отрезков длины l, имеющих общую точку с выпуклой фигурой площади F_0 и периметра L_0, равна* $2\pi F_0 + 2lL_0$.

2. Интегральная формула. Вычислим ту же меру с помощью формулы (5.6), предполагая, что точка P совпадает с началом отрезка K. При этом нужно учесть следующее: если P находится внутри K_0, то угол φ может изменяться от 0 до 2π; если точка P не содержится внутри K_0, то φ не может оказаться больше угла ω, образованного двумя отрезками длины l, начала которых совпадают с точкой P, а концы лежат на K_0. Таким образом,

$$\int\limits_{K \cdot K_0 \neq 0} dK = 2\pi F_0 + \int\limits_{P \in K_0} \omega \, dP.$$

Используя теперь соотношение (6.1), приходим к интегральной формуле

$$\int\limits_{P \bar{\in} K_0} \omega \, dP = 2lL_0. \tag{6.2}$$

3. Отрезки, пересекающие ломаную. Если K_0 есть отрезок длины l_0, то формула (6.1) дает[1])

$$\int\limits_{K \cdot K_0 \neq 0} dK = 4ll_0. \tag{6.3}$$

Пусть теперь K_0 — ломаная линия, длина которой равна L_0. Применив формулу (6.3) к каждому звену этой ломаной и сложив результаты, получим

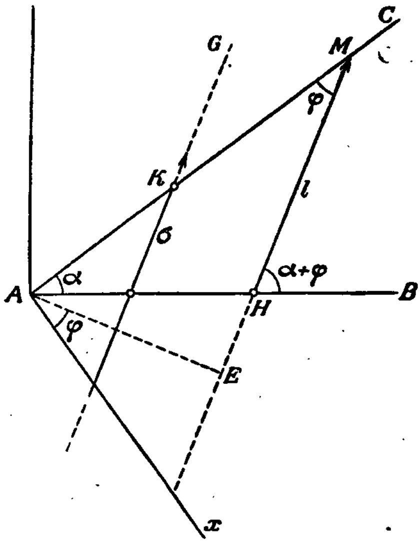
$$\int n \, dK = 4lL_0, \tag{6.4}$$

[1]) Дважды взятый отрезок K_0 можно рассматривать как вырожденный многоугольник (двуугольник), имеющий площадь 0 и периметр $2l_0$. Это соображение неоднократно используется и в дальнейшем. — *Прим. ред.*

где n — число звеньев ломаной K_0, которые пересекаются с K при данном положении отрезка.

Формула (6.4) представляет собой частный случай более общей формулы, которую мы получим в § 7.

4. Множество отрезков, пересекающих две стороны угла. Вычислим теперь кинематическую меру множества



Фиг. 4

ориентированных отрезков K длины l, которые пересекают обе стороны заданного угла BAC величины α.

Обозначив через σ длину хорды, отсекаемой сторонами угла A на прямой G, определяемой отрезком K, получим

$$m(K \cdot AB \neq 0,\, K \cdot AC \neq 0) = \int d\vec{G}\, dt = 2 \int\limits_{\sigma \leqslant l} (l - \sigma)\, dG. \quad (6.5)$$

Далее,

$$\int l\, dG = l \int dp\, d\varphi = \int l\, d\varphi \int\limits_0^{AE} dp = \int l \cdot AE\, d\varphi = 2 \int T d\varphi,$$

где T — площадь треугольника AHM с основанием $HM = l$, отсекаемого от угла прямой с нормальными координатами $p = AE$, φ. С другой стороны,

$$\int \sigma\, dG = \int \sigma\, dp\, d\varphi = \int d\varphi \int_0^{AE} \sigma\, dp = \int T d\varphi.$$

Следовательно,

$$m = 2 \int T d\varphi.$$

Чтобы найти значение этого интеграла, заметим (принимая ось x-ов перпендикулярной AC), что

$$2T = \frac{l^2}{\sin \alpha} \sin \varphi \sin (\alpha + \varphi)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} m &= \frac{l^2}{\sin \alpha} \int_0^{\pi - \alpha} \sin \varphi \sin (\alpha + \varphi)\, d\varphi = \\ &= \frac{l^2}{2 \sin \alpha} [\sin \alpha \sin^2 \varphi + \cos \alpha (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)]_0^{\pi - \alpha} = \qquad (6.6) \\ &= \frac{l^2}{2} (1 + (\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \alpha). \end{aligned}$$

Таким образом, *мера множества ориентированных отрезков длины l, которые пересекают обе стороны угла величины α, выражается формулой* (6.6).

5. Множество отрезков, заключенных внутри данного выпуклого многоугольника. Пусть K_0 — выпуклый многоугольник, а K — ориентированный отрезок длины l, который *не может пересекать две несмежные стороны многоугольника K_0*[1].

Пусть M_i ($i = 0, 1, 2$) — мера множества возможных положений отрезка K, при которых он имеет i общих точек с контуром многоугольника K_0 (M_0 — мера множества отрезков K, заключенных *внутри* многоугольника K_0).

[1]) Т. е. такой, что l не превосходит кратчайшей из диагоналей, соединяющих вершины многоугольника, следующие через одну.— *Прим. ред.*

Формулы (6.1), (6.4) и (6.6) можно записать в виде

$$M_0 + M_1 + M_2 = 2\pi F_0 + 2lL_0,$$
$$M_1 + 2M_2 = 4lL_0,$$
$$M_2 = \sum_{\alpha_i} \frac{1}{2} l^2 (1 + (\pi - \alpha_i) \operatorname{ctg} \alpha_i),$$

где α_i — углы многоугольника K_0. Из этой системы уравнений получаем

$$M_0 = 2\pi F_0 - 2lL_0 + \frac{1}{2} l^2 \sum_{\alpha_i} [1 + (\pi - \alpha_i) \operatorname{ctg} \alpha_i],$$

$$M_1 = 4lL_0 - l^2 \sum_{\alpha_i} [1 + (\pi - \alpha_i) \operatorname{ctg} \alpha_i], \tag{6.7}$$

$$M_2 = \frac{1}{2} l^2 \sum_{\alpha_i} [1 + (\pi - \alpha_i) \operatorname{ctg} \alpha_i].$$

Если рассматривать неориентированные отрезки, то каждое из этих выражений следует разделить на 2.

Относительно приложений этих результатов к исчислению геометрических вероятностей см. Сантало [7].

§ 7. Множества спрямляемых кривых

1. Множества ломаных линий. Пусть K_0 — фиксированная ломаная длины L_0, а K — подвижная ломаная длины L. Применяя формулу (6.4) к звену l_i ломаной K, получаем

$$\int n_i dK = 4l_i L_0,$$

где n_i — число точек пересечения звена l_i с ломаной K_0.

Запишем эту формулу для всех звеньев ломаной K и сложим левые и правые части [в силу свойства инвариантности кинематической меры относительно выбора подвижной системы координат (§ 5, п. 2, II), мы можем выбрать одну и ту же систему координат для всех сторон l_i ($i = 1, 2, \ldots, m$)]. Полагая $\sum_{1}^{m} n_i = n$, мы получаем

$$\int n\, dK = 4LL_0, \tag{7.1}$$

где n — общее число точек пересечения ломаных K и K_0. Интеграл можно считать распространенным по всем возможным положениям ломаной K.

2. Множества кривых. Формула (7.1) имеет место при гораздо более общих предположениях. В действительности она справедлива в том случае, когда K_0 и K — любые спрямляемые кривые (см. Мак [3, 5], Нёбелинг [3][1])).

Для наших целей будет достаточно доказать (7.1) *для кривых, имеющих в каждой точке касательную или состоящих из конечного числа дуг, обладающих этим свойством.* Пусть K_0 — некоторая фиксированная спрямляемая кривая такого рода, имеющая длину L_0, и пусть в некоторой системе координат ($O.\, x, y$) она задана формулами

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \tag{7.2}$$

где параметр s — длина дуги.

Выберем подвижную систему координат ($P.\, X, Y$); пусть ξ, η — координаты точки P, а φ — угол, образованный осью PX с осью Ox. Тогда кинематическая плотность есть $dK = [d\xi\, d\eta\, d\varphi]$.

Пусть K — подвижная кривая, заданная в системе ($P.\, X, Y$) формулами

$$X = X(\sigma), \qquad Y = Y(\sigma), \tag{7.3}$$

где σ — длина дуги кривой K. В системе ($O.\, x, y$) эта кривая определяется формулами

$$x = \xi + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \quad y = \eta + X\sin\varphi + Y\cos\varphi. \tag{7.4}$$

Точки пересечения кривых K и K_0 определяются системой двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= \xi + X(\sigma)\cos\varphi - Y(\sigma)\sin\varphi, \\ y(s) &= \eta + X(\sigma)\sin\varphi + Y(\sigma)\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

[1]) См. также Нёбелинг [4,5]. — *Прим. ред.*

с двумя неизвестными s, σ. Из системы (7.5) получаем

$$d\xi = x'ds - (X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi)\,d\sigma + (X\sin\varphi + Y\cos\varphi)\,d\varphi,$$
$$d\eta = y'ds - (X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi)\,d\sigma - (X\cos\varphi - Y\sin\varphi)\,d\varphi,$$

и внешнее умножение дает

$$[d\xi\, d\eta\, d\varphi] = ((X'y' - x'Y')\cos\varphi - (Y'y' + X'x')\sin\varphi)\,[ds\, d\sigma\, d\varphi].$$

Если θ_0 — угол, составленный касательной к кривой K_0 в точке ее пересечения с кривой K и осью x-ов, а θ — угол, составленный касательной к кривой K в этой же точке и осью X-ов, то

$$x' = \cos\theta_0,\quad y' = \sin\theta_0,\quad X' = \cos\theta,\quad Y' = \sin\theta.$$

и, следовательно,

$$[d\xi\, d\eta\, d\varphi] = \sin(\theta_0 - \theta - \varphi)\,[ds\, d\sigma\, d\varphi].$$

Если, далее, ω — угол между касательными к кривым K_0 и K в точке их пересечения, то $\omega = \theta_0 - \theta - \varphi$, а так как θ_0 и θ зависят только от s и σ, то

$$dK = |\sin\omega|\,[ds\, d\sigma\, d\omega]. \qquad (7.6)$$

Это выражение для dK очень важно и полезно.

Взяв интеграл от правой части равенства (7.6) по всем возможным значениям s, σ, ω, получим

$$\int_0^{L_0} ds \int_0^{L} d\sigma \int_0^{2\pi} |\sin\omega|\, d\omega = 4LL_0.$$

При вычислении интеграла, стоящего в левой части, каждое положение кривой K учитывается столько раз, сколько она имеет точек пересечения с кривой K_0. Таким образом,

$$\int n\, dK = 4LL_0, \qquad (7.7)$$

где интеграл распространен на все возможные положения кривой K, а n есть число точек пересечения кривой K с K_0.

Формула (7.7) в интегральной геометрии известна как *формула Пуанкаре.*

Частный случай. Если кривая K есть окружность радиуса r, можно выбрать ее центр (x, y) за начало подвижной системы; тогда для каждого положения центра (x, y) при изменении угла φ от 0 до 2π число n останется неизменным. Значит,

$$\int n\,dK = \int n\,dx\,dy\,d\varphi = 2\pi \int n\,dx\,dy,$$

и формула (7.7) дает

$$\int n\,dx\,dy = 4rL_0, \qquad (7.8)$$

где интеграл берется по всей плоскости. Эта формула (7.8) может быть принята в качестве *определения длины* точечного множества K_0. Она справедлива вообще для кривых и сфер в n-мерном евклидовом пространстве (см. Сантало [8][1])).

3. Другие интегральные формулы. Из формулы (7.6) для плотности dK можно получить много других интегральных формул.

Если мы умножим обе части равенства (7.6) на ω и проинтегрируем по всем значениям s, σ, ω (считая, что величина угла ω всегда $\leqslant \pi$), то получим в правой части

$$2\int_0^{\pi} \omega \sin\omega\,d\omega \int_0^{L_0} ds \int_0^{L} d\sigma = 2\pi L L_0.$$

Интегрируя же левую часть, мы заметим, что каждое положение K будет фигурировать в качестве общего множителя при всех углах ω_i, которые K образует с K_0 в n точках пересечения этих кривых. В результате мы получим

$$\int \left(\sum_1^n \omega_i\right) dK = 2\pi L L_0, \qquad (7.9)$$

где интеграл распространяется на все возможные положения кривой K.

[1]) См. также Курита [1]. — *Прим. ред.*

Вообще, если обе части равенства (7.6) мы умножим на произведение $f_0(s)\cdot f(\sigma)\cdot g(\omega)$, где f_0, f, g — какие-то заданные интегрируемые функции, то получим

$$\int \left(\sum_1^n f_0(s_i)\, f(\sigma_i)\, g(\omega_i)\right) dK =$$

$$= 2\int_0^s g(\omega)\sin\omega\, d\omega \int_0^{L_0} f_0(s)\, ds \int_0^L f(\sigma)\, d\sigma,$$

где суммирование слева производится по всем точкам пересечения кривых K и K_0, а область интегрирования образуют все положения кривой K.

Если, например, кривые K и K_0 имеют в каждой точке кривизны $\varkappa(\sigma)$, $\varkappa_0(s)$, то

$$\int \left(\sum_1^n (\varkappa_0)_i\, \varkappa_i\right) dK = 4cc_0, \tag{7.10}$$

где $(\varkappa_0)_i$, $\varkappa_i$ — кривизны этих кривых в точках их пересечения, а c и c_0 — *полные кривизны* кривых K и K_0 (см. § 2, п. 5).

Такого рода формулы можно найти в работе Сантало [6].

§ 8. Основная формула Бляшке

1. Интегральные формулы для областей. I. Под термином *область* мы будем понимать конечную часть плоскости, ограниченную конечным числом замкнутых кривых, не имеющих двойных точек. Мы будем предполагать эти замкнутые кривые «право-ориентированными», т. е. такими, что при обходе, соответствующем этой ориентации, область остается слева.

Пусть K_0 — некоторая фиксированная область площади F_0 и K_1 — подвижная область площади F_1; dK_1 есть кинематическая плотность для множества положений области K_1.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{P\in K_1\cdot K_0} dP\, dK_1, \tag{8.1}$$

где $P(x, y)$ — точка плоскости, $dP = [dx\,dy]$ — плотность множества точек P и интеграл берется по всем возможным положениям области K_1 и всем положениям точки P в пересечении областей K_1 и K_0.

Если сначала фиксировать положение точки P, то, в силу (5.7), интегрируя (8.1), мы немедленно получаем

$$I = \int\limits_{P\in K_0} dP \int\limits_{P\in K_1} dK_1 = 2\pi F_1 \int\limits_{P\in K_0} dP = 2\pi F_1 F_0. \tag{8.2}$$

Если же фиксировать сначала положение области K, то формула (8.1) дает

$$I = \int\limits_{K_1\cdot K_0\neq 0} dK_1 \int\limits_{P\in K_1\cdot K_0} dP = \int F_{01} dK_1, \tag{8.3}$$

где F_{01} — площадь пересечения K_0 и K_1.

Из равенств (8.2) и (8.3) вытекает интегральная формула

$$\int F_{01} dK_1 = 2\pi F_1 F_0. \tag{8.4}$$

II. Предположим теперь, что кривые, ограничивающие области K_1 и K_0, спрямляемы.

Пусть $A(s)$ — точка границы области K_0 (s — длина дуги). Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int\limits_{A\in K_1} ds\, dK_1. \tag{8.5}$$

Фиксируя сначала положение точки A, получаем

$$I_1 = \int\limits_0^{L_0} ds \int\limits_{A\in K_1} dK_1 = 2\pi F_1 L_0, \tag{8.6}$$

где L_0 — полная длина границы области K_0.

Можно также сначала фиксировать положение области K_1. Тогда, обозначая через l_{01} длину той части границы области K_0, которая находится внутри области K_1, получаем

$$I_1 = \int\limits_{K_1\cdot K_0\neq 0} dK_1 \int\limits_0^{l_{01}} ds = \int l_{01} dK_1. \tag{8.7}$$

Из формул (8.6) и (8.7) следует, что

$$\int l_{01} dK_1 = 2\pi F_1 L_0. \tag{8.8}$$

Принимая во внимание инвариантность кинематической меры относительно обращения движения (§ 5, п. 2), можно получить формулы, аналогичные (8.8):

$$\int l_{10} dK_1 = 2\pi F_0 L_1, \tag{8.9}$$

где l_{10} — длина той части границы области K_1, которая находится внутри области K_0. Складывая почленно равенства (8.8) и (8.9), получаем

$$\int L_{01} dK_1 = 2\pi (F_0 L_1 + F_1 L_0). \tag{8.10}$$

где $L_{01} = l_{01} + l_{10}$ обозначает длину кривой, ограничивающей пересечение $K_1 \cdot K_0$ областей K_1 и K_0.

2. Основная формула Бляшке. Формулы (8.4) и (8.10) выражают интегралы от площади F_{01} и периметра L_{01} пересечения $K_{01} = K_0 \cdot K_1$ областей K_0 и K_1, распространенные на все возможные положения области K_1.

Более интересный результат получится, если мы рассмотрим *полную кривизну* C_{01} границы области K_{01}.

Допустим, что замкнутые кривые, которые ограничивают области K_0 и K_1, составлены из конечного числа дуг с непрерывно меняющейся касательной. Каждая из этих дуг предполагается ориентированной так же, как выше (п. 1). *Полная кривизна* произвольной простой замкнутой кривой этого рода определяется формулой

$$\sum_i \int_{a_i} d\tau + \sum_i \omega(A_i), \tag{8.11}$$

где a_i — составляющие эту кривую дуги с непрерывно меняющейся касательной, τ — угол между касательной к дуге a_i и фиксированным направлением плоскости, A_i — угловые точки, $\omega(A_i)$ — внешний угол кривой в угловой точке A_i.

Поэтому, если обозначить через a_i^j дуги с непрерывно меняющейся касательной, составляющие границу области K_j $(j = 0, 1)$, и через $\omega(A_i^j)$ — внешние углы в угловых точках A_i^j этой кривой, то ее полная кривизна будет равна

$$C_j = \sum_i \int_{a_i^j} d\tau + \sum_i \omega(A_i^j) \qquad (j = 0, 1). \tag{8.12}$$

Если через $P(s)$ обозначить точку граничной кривой области K_0 и через $Q(\sigma)$ — точку граничной кривой области K_1 (s и σ — длины соответствующих дуг), то полная кривизна граничной кривой области K_{01} будет равна

$$\begin{aligned} C_{01} = \sum \int_{P \in K_1} d\tau(s) + \sum \int_{Q \in K_0} d\tau(\sigma) + \sum_{A_i^0 \in K_1} \omega(A_i^0) + \\ + \sum_{A_i^1 \in K_0} \omega(A_i^1) + \sum \omega_i, \end{aligned} \tag{8.13}$$

где ω_i — углы, под которыми пересекаются границы областей K_0 и K_1.

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_{P(s) \in K_1} d\tau(s)\, dK_1.$$

Имеем

$$I_1 = \int_{K_0} d\tau(s) \int_{P \in K_1} dK_1 = 2\pi F_1 \int_{K_0} d\tau(s) = 2\pi F_1 \sum_i \int_{a_i^0} d\tau$$

и также

$$I_1 = \int_{K_0 \cdot K_1 \neq 0} dK_1 \int_{P \in K_1} d\tau(s) = \int \Big(\sum \int_{P \in K_1} d\tau(s) \Big) dK_1.$$

Поэтому

$$\int \Big(\sum \int_{P \in K_1} d\tau(s) \Big) dK_1 = 2\pi F_1 \sum_i \int_{a_i^0} d\tau. \tag{8.14}$$

С другой стороны,

$$\int \Big(\sum_{A_i^0 \in K_1} \omega(A_i^0) \Big) dK_1 = \sum \int_{A_i^0 \in K_1} \omega(A_i^0)\, dK_1 = 2\pi F_1 \sum_i \omega(A_i^0). \tag{8.15}$$

Меняя местами индексы 0 и 1 в формулах (8.14) и (8.15) и принимая во внимание, что, в силу инвариантности относительно обращения движений, можно положить $dK_0 = dK_1$, получаем

$$\int \Big(\sum_{Q \in K_0} \int d\tau(\sigma) \Big) dK_1 = 2\pi F_0 \sum_i \int_{a_i^1} d\tau(\sigma), \tag{8.16}$$

$$\int \Big(\sum_{A_i^1 \in K_0} \omega(A_i^1) \Big) dK_1 = 2\pi F_0 \sum_i \omega(A_i^1); \tag{8.17}$$

кроме того, формула (7.9) дает

$$\int \sum_i \omega_i dK_1 = 2\pi L_0 L_1. \tag{8.18}$$

Складывая почленно равенства (8.14), (8.15), (8.16), (8.17) и (8.18) и учитывая формулы (8.13) и (8.12), мы придем к следующей *основной формуле Бляшке*:

$$\int C_{01} dK_1 = 2\pi (F_0 C_1 + F_1 C_0 + L_0 L_1). \tag{8.19}$$

3. **Частные случаи.** 1. Если K_0 и K_1 — *выпуклые области*, то их пересечение K_{01} — также выпуклая область, и, следовательно,

$$C_0 = C_1 = C_{01} = 2\pi.$$

Равенство (8.19) в этом случае принимает вид

$$\int\limits_{K_0 \cdot K_1 \neq 0} dK_1 = 2\pi (F_0 + F_1) + L_0 L_1. \tag{8.20}$$

Эта формула дает *меру множества всех возможных положений выпуклой области K_1, при которых она имеет общую точку с некоторой фиксированной выпуклой областью K_0.*

Вывод формулы (8.19) предполагает, что границы областей K_0 и K_1 состоят из конечного числа дуг с непрерывно меняющейся касательной, что, в частности, имеет место для ломаных линий; следовательно, эта формула справедлива для выпуклых многоугольников. Рассматривая границы произвольных выпуклых областей K_0 и K_1 как пределы вписанных в них выпуклых многоугольников, мы приходим к выводу, что (8.20) имеет место и для этих областей.

Если область K_1 вырождается в отрезок длины l, то $F_1 = 0$, $L_1 = 2l$ и (8.20) дает

$$\int\limits_{K_0 \cdot K_1 \neq 0} dK_1 = 2\pi F_0 + 2lL_0,$$

что полностью согласуется с равенством (6.1).

Если область K_1 есть круг радиуса R, то в качестве точки $P(x, y)$, фигурирующей в определении плотности dK_1 (см. § 5), можно взять центр этого круга; тогда будем иметь

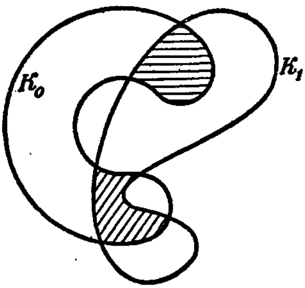
$$\int dK_1 = 2\pi \int dP,$$

и формула (8.20) дает

$$\int\limits_{K_0 \cdot K_1 \neq 0} dP = F_0 + L_0 R + \pi R^2. \qquad (8.21)$$

Это — хорошо известная формула, выражающая *площадь внешней параллельной оболочки ширины R области K_0* [1]).

2. Если каждая из областей K_0 и K_1 ограничена только одной простой кривой, то $C_0 = C_1 = 2\pi$. Их пересечение



Фиг. 5

K_{01} состоит в этом случае из ν отдельных областей, каждая из которых имеет полную кривизну 2π; таким образом, $C_{01} = 2\pi\nu$. Например, в случае, изображенном на фиг. 5,

[1]) См., например, Фейеш-Тот [3], § 1 гл. I, или Яглом и Болтянский [1], § 4. — *Прим. ред.*

$\nu = 2$. Основная формула (8.19) дает в этом случае

$$\int \nu \, dK_1 = 2\pi (F_0 + F_1) + L_0 L_1. \tag{8.22}$$

Если область K_0 представляет собой конечное множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то $F_0 = 0$, $L_0 = 0$, $C_0 = 2\pi m$ (мы рассматриваем каждую точку как круг нулевого радиуса[1])). Обозначая через n число точек A_i, лежащих внутри и на границе области K_1 (n зависит от положения этой области), мы заключаем, что $C_{01} = 2\pi n$. Формула (8.19) дает в этом случае

$$\int n \, dK_1 = 2\pi m F_1. \tag{8.23}$$

Библиография. Относительно распространения основной формулы Бляшке на области более сложного строения см. Бляшке [4], а также Нёбелинг [4]. Другие доказательства этой формулы дал Хадвигер [7]. Обобщение на n-мерное пространство принадлежит Чжень Шен-шеню [4].

§ 9. Приложения

1. Изопериметрическое неравенство. Пусть K_0 — выпуклая область площади F_0, ограниченная выпуклой кривой длины L_0; пусть K_1 — подвижная область, конгруэнтная области K_0. Положим $F_0 = F_1 = F$, $L_0 = L_1 = L$.

Применяя формулу Пуанкаре (7.7) к границам областей K_0 и K_1, получим

$$\int n \, dK_1 = 4L^2, \tag{9.1}$$

а формула (8.20) дает

$$\int_{K_1 \cdot K_0 \neq 0} dK_1 = 4\pi F + L^2. \tag{9.2}$$

Обозначив через M_i меру множества тех положений области K_1, при которых граница этой области имеет i общих точек с границей области K_0, мы получим, пользуясь равенствами (9.1) и (9.2):

$$\begin{aligned} 2M_2 + 4M_4 + 6M_6 + \ldots &= 4L^2, \\ M_2 + M_4 + M_6 + \ldots &= 4\pi F + L^2. \end{aligned} \tag{9.3}$$

[1]) Т. е. считаем сначала, что область K_0 состоит из конечного числа кругов малого радиуса ρ, и затем стремим ρ к нулю. — *Прим. ред.*

[При i нечетном мера M_i множества соответствующих положений равна нулю, так как это — положения *касания*, определяемые двумя параметрами (двумерное множество), а кинематическая мера относится к трехмерным (трехпараметрическим) множествам.]

Из равенств (9.3) следует, что

$$L^2 - 4\pi F = M_4 + 2M_6 + 3M_8 + \ldots \tag{9.4}$$

Так как все меры M_i неотрицательны, то мы приходим к *классическому изопериметрическому неравенству*

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0. \tag{9.5}$$

Формула (9.4) дает геометрическую интерпретацию *изопериметрического недостатка* $\Delta = L^2 - 4\pi F$ выпуклой кривой.

2. Неравенство Боннезена. Пусть задана выпуклая область K_0. Рассмотрим наибольший из кругов, которые можно поместить в области K_0 (обозначим его радиус через r_M), а также наименьший из кругов, которые могут вместить область K_0 (обозначим его радиус через R_m). Очевидно, что $r_M \leqslant R_m$, причем равенство имеет место только в том случае, когда область K_0 есть круг.

Пусть K_1 — круг радиуса r, промежуточного между r_M и R_m:

$$r_M \leqslant r \leqslant R_m, \tag{9.6}$$

и пусть, как и выше, M_i — мера множества тех положений области K_1, при которых $K_0 \cdot K_1 \neq 0$ и граница области K_1 имеет i общих точек с кривой, ограничивающей область K_0. Согласно неравенствам (9.6), мы имеем $M_0 = 0$. Аналогично (9.3), мы можем в этом случае написать

$$\begin{aligned} 2M_2 + 4M_4 + 6M_6 + \ldots &= 4 \cdot 2\pi r \cdot L_0, \\ M_2 + M_4 + M_6 + \ldots &= 2\pi F_0 + 2\pi \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot L_0. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Отсюда следует, что

$$M_4 + 2M_6 + 3M_8 + \ldots = 2\pi (rL_0 - F_0 - \pi r^2).$$

Так как все $M_i \geqslant 0$, то мы приходим к неравенству

$$rL_0 - F_0 - \pi r^2 \geqslant 0, \tag{9.8}$$

которое справедливо для всех r, заключенных в пределах (9.6).

Отсюда вытекает, что значения r_M и R_m должны быть заключены между двумя корнями уравнения $y(r)=rL_0-F_0-\pi r^2=0$. Таким образом, полагая

$$\Delta=L_0^2-4\pi F_0,$$

получаем

$$\frac{L_0-\sqrt{\Delta}}{2\pi}\leqslant r_M\leqslant R_m\leqslant\frac{L_0+\sqrt{\Delta}}{2\pi},$$

или

$$\sqrt{\Delta}\geqslant L_0-2\pi r_M,$$

$$\sqrt{\Delta}\geqslant 2\pi R_m-L_0.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\Delta=L_0^2-4\pi F_0\geqslant\pi^2(R_m-r_M)^2. \tag{9.9}$$

Это *изопериметрическое неравенство Боннезена.* Так как правая часть этого неравенства всегда неотрицательна, то неравенство (9.5) из него вытекает.

Из формулы (9.9) следует, что $\Delta=0$ *только в том случае, когда* $R_m=r_M$, *т. е. когда область* K_0 *есть круг.*

Из этого результата и равенства (9.4) можно сделать следующий вывод: *если выпуклая кривая* K_1 *не есть окружность, то кинематическая мера множества положений этой кривой, в которых она имеет по крайней мере* 4 *общие точки с кривой* K_0, *конгруэнтной* K_1, *заведомо положительна.*

3. Условия Хадвигера, достаточные для того, чтобы данная область могла содержать внутри себя другую область. Пусть K_0 и K_1 — две области, имеющие площади F_0 и F_1 и ограниченные простыми замкнутыми кривыми длины L_0 и L_1. Допустим, что эти кривые состоят из конечного числа дуг, имеющих непрерывно меняющиеся касательные, так что к ним применимы формула Пуанкаре и формула (8.22).

Формула Пуанкаре, примененная к граничным кривым областей K_0 и K_1, дает

$$\int n\,dK_1=4L_0L_1, \tag{9.10}$$

а формула (8.22) приводит к равенству

$$\int \nu\, dK_1 = 2\pi (F_0 + F_1) + L_0 L_1. \qquad (9.11)$$

Для тех положений области K_1, при которых она либо содержит область K_0, либо содержится в ней, имеем $\nu = 1$, $n = 0$. Для всех других положений, для которых $\nu \neq 0$, имеем $n \neq 0$. Пусть M_0 — мера множества всех тех положений области K_1, при которых $K_1 \subset K_0$ или $K_1 \supset K_0$. Тогда формула (9.11) может быть записана в виде

$$M_0 + \int\limits_{n \neq 0} \nu\, dK_1 = 2\pi (F_0 + F_1) + L_0 L_1. \qquad (9.12)$$

Каждая из тех ν частей, из которых состоит пересечение областей K_0 и K_1, ограничена по крайней мере одной дугой, принадлежащей границе области K_0, и одной дугой, принадлежащей границе области K_1. Поэтому каждой такой части соответствуют по крайней мере 2 точки пересечения граничных кривых, и, значит,

$$\nu \leqslant \frac{n}{2}. \qquad (9.13)$$

Следовательно, формулы (9.12) и (9.10) дают

$$M_0 \geqslant 2\pi (F_0 + F_1) - L_0 L_1. \qquad (9.14)$$

Если правая часть положительна, то и $M_0 > 0$. Мы приходим, таким образом, к теореме:

Для того, чтобы область K_1, ограниченная простой замкнутой спрямляемой жордановой кривой, могла содержать в себе область K_0 такого же рода или целиком в области K_0 содержаться, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$2\pi (F_0 + F_1) - L_0 L_1 > 0 \text{ [1]}. \qquad (9.15)$$

В приведенном выше доказательстве этой теоремы предполагалось, что кривые, ограничивающие области K_0 и K_1, состоят из конечного числа дуг с непрерывно меняющейся касательной; теорема, однако, имеет место при указанных более общих предположениях. Чтобы это доказать, доста-

[1]) Из этого предложения вытекает, в частности, что не может быть одновременно

$$2\pi (F_0 + F_1) - L_0 L_1 > 0, \quad F_0 > F_1, \quad L_0 < L_1,$$

— обстоятельство, являющееся следствием изопериметрического неравенства. — *Прим. ред.*

точно рассмотреть многоугольники $K_0^{(m)}$, $K_1^{(m)}$, вписанные в кривые, ограничивающие области K_0 и K_1. Если справедливо (9.15), т. е. если

$$2\pi(F_0+F_1)-L_0L_1=\alpha>0,$$

то можно так выбрать $K_0^{(m)}$ и $K_1^{(m)}$, чтобы

$$2\pi(F_0^{(m)}+F_1^{(m)})-L_0^{(m)}L_1^{(m)}>\varepsilon>0 \qquad (0<\varepsilon\leqslant\alpha)$$

для любого $m>m_0$. Это означает, что для любого $m>m_0$ одна из областей $K_0^{(m)}$, $K_1^{(m)}$ может быть заключена внутри другой. Переходя к пределу, получим, что то же свойство имеет место для K_0 и K_1. Заметим, что мы считаем область K_0 заключенной внутри области K_1, если ни одна точка области K_0 не лежит вне области K_1 (граничные кривые этих областей могут иметь общие точки).

В условии (9.15) не различаются случаи $K_0\subset K_1$ и $K_1\subset K_0$. Для того, чтобы добиться здесь полной ясности, рассмотрим неравенство

$$L_0L_1-4\pi F_1>\sqrt{L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1}, \tag{9.16}$$

которое имеет смысл, так как $L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1\geqslant 0$, в силу изопериметрического неравенства (9.5). Предположим, что неравенство выполняется для областей K_0 и K_1. Из (9.16) вытекает (9.15); следовательно, либо K_0 содержится в K_1, либо K_1 содержится в K_0. Если, однако, $K_0\subset K_1$, то $F_0\leqslant F_1$ и из (9.15) следует, что

$$0>L_0L_1-2\pi(F_0+F_1)\geqslant L_0L_1-4\pi F_1.$$

Это означает, что (9.16) не имеет места, так как левая часть должна быть положительной. Следовательно, в рассматриваемом случае $K_1\subset K_0$.

Для того, чтобы область K_1, ограниченная простой спрямляемой жордановой кривой, была заключена внутри другой области K_0 того же типа, достаточно, чтобы было

$$L_0L_1-4\pi F_1>\sqrt{L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1}\,. \tag{9.17}$$

Достаточные условия (9.15) и (9.17) не являются, конечно, *необходимыми.*

Упражнение. Доказать, что условие (9.17) может быть заменено условием

$$4\pi F_0-L_1L_0>\sqrt{L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1}\,. \tag{9.18}$$

Приведенные условия были получены Хадвигером [2].

4. Частный случай. Допустим, что область K_1 есть круг радиуса R. Из условия (9.17) следует: для того, чтобы область K_0 площади F_0, ограниченная простой замкнутой жордановой кривой длины L_0, содержала внутри себя круг радиуса R, *достаточно*, чтобы было

$$R < \frac{L_0 - \sqrt{L_0^2 - 4\pi F_0}}{2\pi} = R_0.$$

Это означает, что для любого ε найдется круг радиуса $R_0 - \varepsilon$, содержащийся в K_0. Беря $\varepsilon \to 0$, мы приходим к теореме:

Если площадь области K_0 равна F_0, а длина ограничивающей ее простой жордановой кривой — L_0, то существует круг радиуса

$$R \geqslant \frac{L_0 - \sqrt{L_0^2 - 4\pi F_0}}{2\pi}, \tag{9.19}$$

содержащийся внутри K_0.

Так как легко показать, что

$$\frac{L_0 - \sqrt{L_0^2 - 4\pi F_0}}{2\pi} \geqslant \frac{F_0}{L_0},$$

то правая часть неравенства (9.19) может быть заменена дробью F_0/L_0 [1]).

§ 10. Решетки

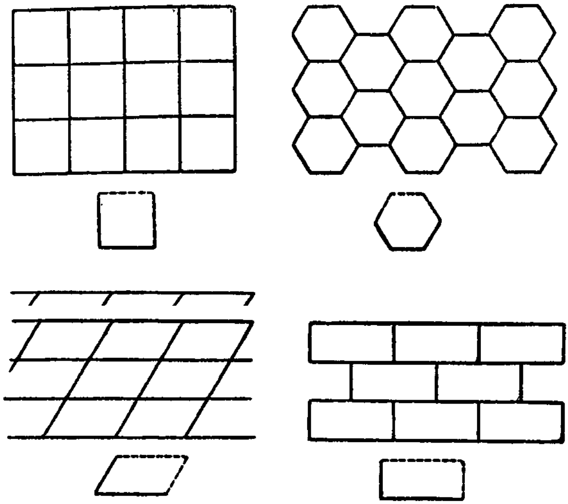
1. Определение. *Решеткой фундаментальных областей* на плоскости мы будем называть последовательность конгруэнтных областей $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, удовлетворяющую следующим требованиям:

1. Каждая точка P плоскости принадлежит одной и только одной области α_i.

2. Каждая область α_i может быть совмещена с областью α_0 с помощью движения T_i, совмещающего одновременно каждую область α_h с некоторой другой областью α_j, т. е. переводящего рассматриваемую решетку в себя.

[1]) См. Грюнвальд и Туран [1]. Обобщения на случай поверхности постоянной кривизны дал Сантало [16].

Примеры. На фиг. 6 даны примеры решеток, для которых фундаментальными областями служат соответственно квадраты, шестиугольники, параллелограмы и прямоугольники.



Фиг. 6

2. Основная формула. Пусть K_0 — область в смысле п. 1 § 8, которая может в частном случае сводиться к кривой, к множеству отдельных кривых и к дискретному множеству точек; во всех случаях мы будем предполагать, что эта область *заключена внутри фундаментальной области* α_m.

Пусть K_1 — другая область такого же рода, *которая может, однако, и не содержаться целиком в одной фундаментальной области*. Мы будем считать область K_1 подвижной и рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{K_0 \cdot K_1 \neq 0} f(K_0 \cdot K_1)\, dK_1, \qquad (10.1)$$

где $f(K_0 \cdot K_1)$ — некоторая функция от пересечения $K_0 \cdot K_1$. Если $K_0 \cdot K_1 = 0$, то будем считать, что $f(K_0 \cdot K_1) = f(0) = 0$.

Кинематическая плотность есть $dK_1 = [dP\,d\varphi]$, где P — точка области K_1. Мы можем написать

$$I = \sum_i \int_{\alpha_i} f(K_0 \cdot K_1)\,dK_1, \tag{10.2}$$

где сумма распространяется на все фундаментальные области, а для каждого i интеграл распространяется на все точки $P \in \alpha_i$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Пусть движением T_i область α_i совмещается с областью α_0, так что $T_i\alpha_i = \alpha_0$. Произведем замену переменных

$$K_1' = T_i K_1; \tag{10.3а}$$

принимая во внимание инвариантность кинематической плотности относительно группы движений, т. е. равенство $dK_1' = dK_1$, мы получаем

$$I = \sum_i \int_{\alpha_0} f(K_0 \cdot T_i^{-1} K_1)\,dK_1. \tag{10.3б}$$

Пересечение $K_0 \cdot T_i^{-1} K_1$ конгруэнтно $T_i K_0 \cdot K_1$, и, следовательно,

$$I = \int_{\alpha_0} \Big(\sum_i f(T_i K_0 \cdot K_1)\Big)\,dK_1. \tag{10.4}$$

Это означает, что если мы построим на плоскости множество всех фигур $T_i K_0$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) и выполним суммирование $\sum\limits_i f(T_i K_0 \cdot K_1)$ для всех положений области K_1, для которых $P \in \alpha_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, то значение интеграла (10.4) для такой суммы совпадет со значением интеграла (10.1).

3. Примеры. 1. Пусть область K_0 имеет площадь F_0, ограничивающая ее кривая имеет длину L_0 и полную кривизну C_0, и пусть F_1, L_1 и C_1 — соответствующие величины для области K_1. Если $f(K_0 \cdot K_1)$ — полная кривизна границы пересечения $K_0 \cdot K_1$, то формула Бляшке (8.19) и формула (10.4) дают

$$\int_{\alpha_0} C_{01}\,dK_1 = 2\pi\,[F_0 C_1 + C_0 F_1 + L_0 L_1], \tag{10.5}$$

где C_{01} означает теперь полную кривизну границы пересечения области K_1 с суммой всех фигур $T_i K_0$, т. е. с решеткой областей, являющихся воспроизведениями в каждой α_i области K_0.

В формуле (10.5) интегрирование распространяется на множество $P \in \alpha_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

2. Пусть K_0 и K_1 — кривые длины L_0 и L_1. Полагая, что $f(K_0 \cdot K_1)$ есть число точек пересечения $K_0 \cdot K_1$, и принимая во внимание формулу (10.4) и формулу Пуанкаре (7.7), будем иметь

$$\int_{\alpha_0} n \, dK_1 = 4L_0 L_1, \tag{10.6}$$

где n означает теперь число точек пересечения кривой K_1 с множеством, состоящим из всех кривых $T_i K_0 (i=0, 1, 2, \ldots)$, т. е. с решеткой кривых, образованной воспроизведениями в каждой α_i кривой K_0.

3. Если K_0 состоит из конечного числа m точек, то, обозначая через $f(K_0 \cdot K_1)$ число точек множества K_0, содержащихся в K_1, и принимая во внимание формулы (8.23) и (10.4), получим

$$\int_{\alpha_0} n \, dK_1 = 2\pi m F_1, \tag{10.7}$$

где n означает число заключенных в области K_1 точек решетки $\sum_i T_i K_0$, образованной воспроизведениями в каждой области α_i множества точек K_0.

4. Некоторые средние значения. В приведенных выше формулах мы знаем размеры области интегрирования; в самом деле, если площадь фундаментальной области α_0 обозначить той же буквой α_0, то

$$\int_{\alpha_0} dK_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{P \in \alpha_0} dP = 2\pi\alpha_0. \tag{10.8}$$

Поэтому, используя формулу (10.6), мы получаем возможность вычислить следующее *среднее*:

Пусть фундаментальные области решетки имеют площадь α_0 и в каждой из них одинаково расположены *конгруэнтные кривые длины L_0; в таком случае среднее значение числа точек пересечения этих кривых с переменной кривой K_1 длины L_1 равно*

$$\bar{n} = \frac{2L_0L_1}{\pi\alpha_0}. \tag{10.9}$$

Следовательно, всякую кривую K_1 можно переместить в такое положение, при котором она будет иметь не менее $\left[\frac{2L_0L_1}{\pi\alpha_0}\right]$ точек пересечения с кривыми K_0.

Рассмотрим, например, решетку, состоящую из прямоугольников со сторонами a и b, и кривую длины l. Тогда среднее число точек пересечения этой кривой с сеткой сторон прямоугольников равно[1])

$$\bar{n} = \frac{2(a+b)l}{\pi ab}.$$

Если $a \to \infty$, то решетка переходит в решетку, состоящую из параллельных прямых, отстоящих друг от друга на b, и мы получаем

$$\bar{n} = \frac{2l}{\pi b}.$$

В частности, если K_1 есть отрезок длины $l < b$, то число n может принимать только значения 0 или 1. Следовательно, $\bar{n}$ совпадает с «геометрической вероятностью» того, что отрезок длины l пересечет решетку параллельных прямых. Это классическая *задача Бюффона об игле.*

Аналогично, с помощью формул (10.7) и (10.8) получается следующий результат:

Если каждая фундаментальная область содержит m одинаково расположенных точек, то среднее значение числа точек, содержащихся внутри области K_1 площади F_1, равно

$$\bar{n} = \frac{mF_1}{\alpha_0}. \tag{10.10}$$

---

[1]) В этом случае $L_0 = 2a+2b$, $\alpha_0 = ab$ и число n, даваемое формулой (10.9), надо разделить пополам, поскольку, согласно (10.9), каждую точку пересечения надо засчитывать два раза, так как каждая сторона прямоугольника принадлежит одновременно двум фундаментальным областям.—*Прим. ред.*

Например, для совокупности точек с целыми координатами (целочисленной решетки) можно принять $\alpha_0=1$, $m=1$ и, следовательно, $\bar{n}=F_1$[1]. Полагая, что фигура K_1 есть круг радиуса 1, получим, что $\bar{n}=\pi$.

Для совокупности точек, являющихся вершинами равносторонних треугольников со стороной a, за фундаментальные области можно принять параллелограмы, составленные из двух треугольников, и тогда

$$\alpha_0=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2, \qquad m=1.$$

Следовательно, $\bar{n}=\dfrac{2F_1}{\sqrt{3}\,a^2}$, и мы приходим к следующей теореме:

Внутри каждой области площади F_1 можно найти n точек таких, что наименьшее из расстояний между ними удовлетворяет условию

$$a^2 \geqslant \frac{2F_1}{\sqrt{3}\,n} \tag{10.11}$$

(см. Фейеш-Тот [1]).

5. Число фундаментальных областей, необходимых для того, чтобы покрыть данную область K_1. Пусть K_1 — область площади F_1, ограниченная простой замкнутой кривой длины L_1, а K_0 конгруэнтна фундаментальным областям α_i (причем к K_0 причисляются и граничные точки, так что K_0 — замкнутое множество). Пусть $F_0=\alpha_0$ — площадь области K_0, а L_0 — длина ограничивающей ее линии.

В каждом положении области K_1 решетка фундаментальных областей делит ее на ν кусков. Например, в случае, изображенном на фиг. 7, число $\nu=7$. Из формул (8.22) и (10.4) следует, что

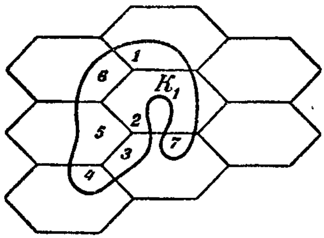
$$\int\limits_{\alpha_0} \nu\, dK_1 = 2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1. \tag{10.12}$$

Поэтому справедливо предложение:

[1]) В частности, отсюда вытекает, что каждую фигуру площади F_1 можно переместить в такое положение, чтобы она покрыла $[F_1]$ точек целочисленной решетки. Элементарная *теорема Блихфельда* утверждает, что такое перемещение можно осуществить даже параллельным переносом фигуры (см., например, Люстерник [1]).— *Прим. ред.*

Пусть фундаментальная область имеет площадь F_0 и периметр L_0. В таком случае среднее значение числа кусков, на которое разобьется подвижная область K_1 площади F_1, ограниченная простой кривой длины L_1, равно

$$\bar{\nu}=\frac{2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1}{2\pi F_0}. \tag{10.13}$$



Фиг. 7

Число N фундаментальных областей, имеющих общие точки с областью K_1, очевидно, удовлетворяет условию $N\leqslant\nu$, следовательно, и $\bar{N}\leqslant\bar{\nu}$. Таким образом:

Всякая область площади F_1, ограниченная простой кривой длины L_1, может быть покрыта $\mu\leqslant\bar{\nu}$ фундаментальными областями, где число $\bar{\nu}$ определяется формулой (10.13), *в которой F_0 и L_0 — площадь и периметр фундаментальной области.*

Применяя, например, эту теорему к случаю решетки квадратов со стороной a ($F_0=a^2$, $L_0=4a$), мы найдем, что каждая область K_1 может быть покрыта

$$\left[1+\frac{2L_1}{\pi a}+\frac{F_1}{a^2}\right] \tag{10.14}$$

или меньшим числом квадратов.

Если решетка состоит из правильных шестиугольников со стороной a, то минимальное число шестиугольников, которыми можно покрыть область K_1, не превышает

$$1+\frac{2L_1}{\sqrt{3}a\pi}+\frac{2F_1}{3\sqrt{3}a^2}. \tag{10.15}$$

Заменив правильные шестиугольники со стороной a описанными вокруг них кругами, мы найдем, что каждую область K_1 можно покрыть кругами радиуса a, число которых не превышает (10.15).

Эти результаты принадлежат Хадвигеру [2]. Обобщение этих результатов на n-мерное пространство дал Сантало [14].

Часть II

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ

§ 11. Плотность множества геодезических

1. Уравнения Гамильтона. Пусть задана достаточно гладкая функция $F(x_1, x_2, x_1', x_2')$, однородная первой степени относительно x_1', x_2':

$$F(x_1, x_2, \lambda x_1', \lambda x_2') = \lambda F(x_1, x_2, x_1', x_2'), \qquad \lambda > 0. \quad (11.1)$$

Рассмотрим задачу нахождения экстремальных кривых $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ для интеграла

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, x_2, x_1', x_2')\, dt. \quad (11.2)$$

Классическая система уравнений Эйлера для экстремалей имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_i'} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2. \quad (11.3)$$

В силу условий однородности (11.1), эти два уравнения не являются независимыми: они определяют не пару функций $x_1(t)$, $y_2(t)$, а кривую в пространстве (x_1, x_2), оставляя произвольным выбор параметра этой кривой (см. любой учебник вариационного исчисления).

Условимся теперь, как это принято, характеризовать *линейный элемент* пространства (x_1, x_2) (точку и заданное в ней направление) не координатами (x_1, x_2, x_1', x_2'), а координатами (x_1, x_2, p_1, p_2), где

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i'}, \qquad i = 1, 2 \quad (11.4)$$

(в механике этому отвечает переход от «скоростей» к «импульсам»). Величины (11.4) не являются независимыми.

Действительно, теорема Эйлера об однородных функциях в применении к $F(x_1, x_2, x_1', x_2')$ дает

$$\frac{\partial F}{\partial x_1'} \cdot x_1' + \frac{\partial F}{\partial x_2'} \cdot x_2' = F,$$

и дифференцирование этого равенства по x_i' приводит к соотношению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1' \partial x_i'} x_1' + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2' \partial x_i'} x_2' = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{11.5}$$

откуда следует, что $\det \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i' \partial x_j'} \right\| = \frac{\partial (p_1, p_2)}{\partial (x_1', x_2')} = 0$. Таким образом, уравнения (11.4) нельзя разрешить относительно x_i'; несмотря на это, использование координат p_1, p_2 является допустимым, так как линейный элемент характеризуется не самими величинами x_1', x_2', а только их отношением.

Функциональную зависимость между p_1 и p_2 можно записать в виде

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = 0, \tag{11.6}$$

где $H(x_1, x_2, p_1, p_2)$ — так называемая *функция Гамильтона* нашей вариационной задачи. Дифференцирование последнего уравнения по x_i' дает

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_i'} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_i'} = 0, \qquad i = 1, 2,$$

или [см. (11.4)]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1' \partial x_i'} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2' \partial x_i'} \frac{\partial H}{\partial p_2} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Из сравнения этих последних равенств с (11.5) вытекает [в естественном предположении, что не все величины $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i = 1, 2)$ равны нулю]

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{11.7}$$

где $\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_1', x_2')$ — некоторая функция от x_1, x_2, x_1', x_2'. Далее, из уравнений Эйлера (11.3) следует, что

$$\frac{dp_i}{dt} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i=1, 2. \tag{11.8}$$

Действительно, из (11.6) вытекает, что

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_i} = 0, \qquad i=1, 2,$$

или, в силу (11.4) и (11.7),

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\lambda\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_1'}\cdot x_1' + \frac{\partial_2 F}{\partial x_i \partial x_2'}\cdot x_2'\right), \qquad i=1, 2.$$

Но так как производная $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ — функция, также однородная первой степени относительно x_1', x_2', то, по теореме Эйлера,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_1'}\cdot x_1' + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_2'}\cdot x_2' = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad i=1, 2,$$

и, значит, в силу (11.3) и (11.4),

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_1'}\cdot x_1' + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_2'}\cdot x_2' = \frac{dp_i}{dt}, \qquad i=1, 2,$$

откуда и следует (11.8).

Четыре дифференциальных уравнения в частных производных первого порядка (11.7) и (11.8) относительно неизвестных функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, содержащие неизвестную функцию $\lambda(x_1, x_2, x_1', x_2')$, называются *уравнениями Гамильтона*[1]).

2. Плотность множества геодезических. Пусть

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2 \tag{11.9}$$

(g_{ij} — функции от x_1, x_2) есть первая квадратичная форма заданной поверхности. Если положить

$$F(x_1, x_2, x_1', x_2') = \sqrt{g_{11}x_1'^2 + 2g_{12}x_1'x_2' + g_{22}x_2'^2}, \tag{11.10}$$

то система дифференциальных уравнений (11.7), (11.8) определит геодезические линии поверхности.

---

[1]) См. Каратеодори [2], гл. XIII.— *Прим. ред.*

Пусть X — двумерное множество геодезических G данной поверхности, т. е. множество, зависящее от двух параметров α, β. Уравнения геодезических этого множества можно записать в виде

$$x_1 = x_1(\alpha, \beta; t), \quad x_2 = x_2(\alpha, \beta; t), \tag{11.11}$$

где значения α и β определяют принадлежащую множеству X геодезическую G, а t — параметр на этой геодезической.

Подставив вычисленные из уравнений (11.11) производные $x'_i = dx_i/dt$ в формулу (11.10), мы сможем по формулам (11.4) определить для каждой геодезической $G(\alpha, \beta)$ значения

$$p_1 = p_1(\alpha, \beta; t), \quad p_2 = p_2(\alpha, \beta; t). \tag{11.12}$$

Составим выражение

$$dG = [dx_1\, dp_1] + [dx_2\, dp_2], \tag{11.13}$$

где dx_i и dp_i $(i = 1, 2)$ вычисляются из формул (11.11) и (11.12) следующим образом:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial \beta} d\beta, \quad dp_i = \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial p_i}{\partial \beta} d\beta$$

(t фиксировано). Скобки [ ] напоминают, что рассматривается *внешнее* произведение (§ 1, п. 2).

Мерой множества X геодезических мы будем называть интеграл от внешней дифференциальной формы (11.13), *распространенный на все множество X*[1]).

Дифференциальная форма dG, *взятая по абсолютной величине*, называется *плотностью* множества геодезических.

Чтобы оправдать это определение, докажем два основных свойства инвариантности этой формы:

а) инвариантность относительно выбора системы криволинейных координат (x_1, x_2) на поверхности;

б) инвариантность относительно выбора значений параметра t.

---

[1]) Т. е. на отвечающее X множество значений параметров α, β. — *Прим. ред.*

Доказательство свойства а). Рассмотрим преобразование координат, заданное формулами

$$x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \qquad x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_h} \bar{x}'_h \qquad (i=1, 2), \qquad (11.14\text{a})$$

где, как это обычно делается, опущен знак суммирования (по h). Мы имеем

$$\bar{p}_i = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}'_i} = \frac{\partial F}{\partial x'_l} \frac{\partial x'_l}{\partial \bar{x}'_i} = \frac{\partial F}{\partial x'_l} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_i} = p_l \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_i},$$

$$d\bar{p}_i = \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_i} dp_l + p_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k} d\bar{x}_k$$

и, следовательно,

$$[d\bar{x}_i\, d\bar{p}_i] = \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_i} [d\bar{x}_i\, dp_l] + p_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k} [d\bar{x}_i\, d\bar{x}_k].$$

Но

$$d\bar{x}_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_s} dx_s,$$

и поэтому

$$[d\bar{x}_i\, d\bar{p}_i] = \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_s} [dx_s\, dp_l] + p_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k} [d\bar{x}_i\, d\bar{x}_k].$$

Суммируя по индексам $i=1, 2$ и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_s} = \frac{\partial x_l}{\partial x_s} = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq s, \\ 1, & \text{если } l = s, \end{cases}$$

и что $[dx_i\, dx_k] = -[dx_k\, dx_i]$, получаем

$$[d\bar{x}_1\, d\bar{p}_1] + [d\bar{x}_2\, d\bar{p}_2] = [dx_1\, dp_1] + [dx_2\, dp_2],$$

чем и доказывается свойство а).

Доказательство свойства б). Это свойство сводится к тому, что мера *не зависит* от выбора параметра t, т. е. не изменяется при перемещении точки $x_i(\alpha, \beta; t)$ $(i=1, 2)$ вдоль геодезической G.

Для доказательства допустим, что C есть граничная кривая области X значений α, β. По теореме Грина,

$$m(X) = \int_X dG = \int_X (dx_1 dp_1 + dx_2 dp_2) = \\ = -\int (p_1 dx_1 + p_2 dx_2). \qquad (11.14\text{б})$$

Возьмем вариацию меры m при изменении t:

$$\delta m = -\int\limits_C (\delta p_1 dx_1 + p_1 \delta dx_1 + \delta p_2 dx_2 + p_2 \delta dx_2);$$

здесь $\delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial t}\delta t$, $\delta(dx_i) = \frac{\partial (dx_i)}{\partial t}\delta t$ и зависимость p_i и x_i от t определяется формулами (11.11) и (11.12).

Правило интегрирования по частям дает

$$\int\limits_C p_i d\delta x_i = [p_i \delta x_i]_C - \int\limits_C \delta x_i dp_i = -\int\limits_C \delta x_i dp_i,$$

поскольку C — замкнутая кривая. Так как $\delta dx_i = d\delta x_i$, то отсюда следует, что

$$\delta m = -\int\limits_C (\delta p_1 dx_1 - \delta x_1 dp_1 + \delta p_2 dx_2 - \delta x_2 dp_2).$$

Но вариация δ берется относительно t; поэтому из уравнений (11.7), (11.8) и (11.6) получаем

$$\delta m = \int\limits_C \lambda \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial H}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial H}{\partial p_2} dp_2 \right) \delta t =$$

$$= \left(\int\limits_C \lambda dH \right) \delta t = 0,$$

что и доказывает свойство б)[1].

Интеграл $\int dG$ совпадает с *интегральным инвариантом Пуанкаре* для динамических траекторий (см., например, Картан [3]).

Указанное выше определение меры множества геодезических принадлежит Бляшке [9] и Хаймовичу [3][2].

Чтобы придать понятию плотности (11.13) более геометрическое содержание, рассмотрим на заданной поверхности систему *геодезических полярных координат*. Хорошо

---

[1]) При доказательстве свойства б) можно также исходить не из уравнений Гамильтона, а из обычной формы дифференциальных уравнений геодезических линий поверхности (см. Хаймович [2]).— *Прим. ред.*

[2]) Имеется еще заметка Хаймовича [1] на ту же тему.— *Прим. ред.*

известно, что в таких координатах первая основная форма принимает вид[1])

$$ds^2=d\rho^2+g(\rho, \theta)\,d\theta^2, \tag{11.15}$$

поэтому в предыдущих обозначениях мы имеем

$$x_1=\rho, \qquad x_2=\theta, \qquad F=\sqrt{\rho'^2+g\theta'^2}\,. \tag{11.16}$$

Угол V между геодезической G $[\rho=\rho(t), \quad \theta=\theta(t)]$ и полярным радиусом определяется по формуле

$$\operatorname{tg} V=\frac{\sqrt{g}\,\theta'}{\rho'}. \tag{11.17}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p_1&=\frac{\partial F}{\partial \rho'}=\frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+g\theta'^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 V}}=\cos V,\\ p_2&=\frac{\partial F}{\partial \theta'}=\frac{g\theta'}{\sqrt{\rho'^2+g\theta'^2}}=\frac{\sqrt{g}\operatorname{tg} V}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 V}}=\sqrt{g}\sin V, \end{aligned} \tag{11.18}$$

откуда

$$\begin{aligned} dp_1&=-\sin V dV,\\ dp_2&=\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\rho}\sin V\,d\rho+\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\theta}\sin V\,d\theta+\sqrt{g}\cos V\,dV. \end{aligned} \tag{11.19}$$

Кроме того, согласно (11.16), $dx_1=d\rho$, $dx_2=d\theta$. Выполнив внешнее перемножение согласно формуле (11.13), получим

$$\begin{aligned} dG=-\sin V\,[d\rho\, dV]+\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\rho}\sin V\,[d\theta\, d\rho]+\\ +\sqrt{g}\cos V\,[d\theta\, dV]. \end{aligned} \tag{11.20}$$

Это — *общее выражение для dG в геодезических полярных координатах.*

Как было доказано выше, значение dG не изменяется от перемещения точки (ρ, θ) вдоль G, и мы можем, в частности, взять точку, для которой $V=\pi/2$.

---

[1]) См., например, В. Ф. Каган [1], § 48.— *Прим. ред.*

Полагая в формуле (11.20) $V=\pi/2$, $dV=0$, получим

$$\boxed{dG=\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\rho}[d\theta\, d\rho]} \tag{11.21}$$

Это — наиболее простое и удобное выражение для плотности геодезических линий.

Пример. Если заданная поверхность есть *поверхность постоянной кривизны* K, то[1])

$$\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\rho, \tag{11.22}$$

т. е.

$$\begin{aligned} &\text{если } K=0, && \text{то } \sqrt{g}=\rho,\\ &\text{если } K=1, && \text{то } \sqrt{g}=\sin\rho,\\ &\text{если } K=-1, && \text{то } \sqrt{g}=\operatorname{sh}\rho. \end{aligned} \tag{11.23}$$

Для плоскости $K=0$, и поэтому

$$dG=[d\theta\, d\rho], \tag{11.24}$$

что, естественно, совпадает с выражением, указанным в § 2.

Для сферы и других поверхностей кривизны $K=1$

$$dG=\cos\rho\,[d\theta\, d\rho], \tag{11.25}$$

а для псевдосферы и других поверхностей кривизны $K=-1$

$$dG=\operatorname{ch}\rho\,[d\theta\, d\rho]. \tag{11.26}$$

Замечание. Не следует забывать, что приведенные рассуждения пригодны только для достаточно малой области поверхности, в которой можно ввести геодезические полярные координаты (11.15). В дальнейшем мы будем предполагать, кроме того, что в рассматриваемой области *две точки определяют одну и только одну геодезическую.*

---

[1]) См., например, В. Ф. Каган [1], § 58.—*Прим. ред.*

§ 12. Геодезические, пересекающие заданную кривую

1. Новое выражение для dG. Пусть K — фиксированная кривая на заданной поверхности, и пусть эта кривая имеет непрерывно меняющуюся касательную или состоит из конечного числа дуг, обладающих этим свойством.

Рассмотрим множество геодезических G, имеющих общие точки с кривой K. Пусть P — одна из таких точек. Выберем систему геодезических полярных координат с полюсом в некоторой точке O и обозначим угол между геодезической G и полярным радиусом OP, как и в п. 2 § 11, через V, а угол между кривой K и геодезической OP — через τ.

В качестве координат (ρ, θ) точки на геодезической G, которые фигурируют в формуле (11.20), возьмем координаты точки P. Тогда

$$d\rho = ds\cos\tau, \qquad \sqrt{g}\,d\theta = \sin\tau\, ds,$$

где s — длина дуги кривой K. Подставив эти значения для $d\rho$ и $d\theta$ в формулу (11.20), получим

$$dG = -\sin V\cos\tau\,[ds\,dV] + \cos V\sin\tau\,[ds\,dV],$$

т. е.

$$dG = |\sin(\tau - V)|\,[ds\,dV], \tag{12.1}$$

где $\sin(\tau - V)$ взят по абсолютной величине, поскольку плотность всегда предполагается положительной.

Формула (12.1) является обобщением на случай геодезических произвольной поверхности формулы (2.12), относящейся к прямым на плоскости. Если угол между кривой K и геодезической G в точке их пересечения обозначить через φ, то $\varphi = \tau - V$, $dV = d\varphi + \tau' ds$ и, следовательно,

$$dG = |\sin\varphi|\,[d\varphi\,ds]. \tag{12.2}$$

2. Геодезические, пересекающие заданную кривую. Формула (12.2) имеет ту же структуру, что и формула (2.12); поэтому *все результаты, полученные в § 2 для прямых линий на плоскости, справедливы для геодезических на поверхности.*

Если, например, мы проинтегрируем правую часть формулы (12.2) по всем значениям s $(0 \leqslant s \leqslant L$, где L — длина кривой $K)$ и φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$, то получим

$$\int n\,dG = 2L, \tag{12.3}$$

где n — число точек пересечения геодезической G с кривой K.

Если K — замкнутая *выпуклая* кривая (т. е. такая, что $n=2$[1]), то мы приходим к результату: *мера множества геодезических, которые пересекают замкнутую выпуклую кривую, равна длине этой кривой.*

§ 13. Кинематическая плотность на поверхности

1. Множество дуг геодезических. Пусть G — геодезическая кривая на заданной поверхности, а K — дуга этой кривой, имеющая фиксированную длину l. Мы будем считать, что кривая G *ориентирована*, и указывать это обозначением $\vec{G}$; длину дуги на кривой $\vec{G}$ мы будем обозначать через s. Дуга K определится, если будет задана геодезическая $\vec{G}$ и указана криволинейная абсцисса s начала P этой дуги.

Для того, чтобы найти меру множества дуг K постоянной длины l, рассмотрим интеграл от формы

$$dK = d\vec{G}\,ds, \tag{13.1}$$

взятый по множеству таких дуг.

В силу инвариантности величин $d\vec{G}$ и ds, плотность dK будет инвариантна относительно выбора системы координат на поверхности, а также относительно замены начала P другой какой-нибудь фиксированной точкой дуги K. Форму dK мы будем называть *кинематической плотностью* на поверхности.

Заметим, что в тех же обозначениях, что и в п. 2 § 11, мы имеем

$$ds = \frac{d\rho}{\cos V}\,. \tag{13.2}$$

[1]) Это условие можно принять за *определение* выпуклости.— *Прим. ред.*

Подставив в формулу (13.1) значение (11.20) плотности $d\vec{G}$ и значение (13.2) величины ds, мы получим

$$dK = \sqrt{g}\,[d\rho\, d\theta\, dV]. \tag{13.3}$$

Если через dP обозначить *элемент площади* поверхности с метрической формой (11.15) в точке P

$$dP = \sqrt{g}\,[d\rho\, d\theta], \tag{13.4}$$

то кинематическую плотность можно будет записать в виде

$$dK = [dP\, dV]. \tag{13.5}$$

Формулы (13.1) и (13.5) аналогичны формулам (5.11) и (5.6).

Как было уже указано выше, P в формуле (13.5) — любая фиксированная точка дуги K, например, ее начало или конец.

2. Несколько интегральных формул.

а) Пусть K_0 — область поверхности, имеющая площадь F_0. Если воспользоваться формулой (13.1) для dK, то мы получим, что мера множества всех дуг K длины l, начало P которых находится внутри K_0, будет равна

$$\int\limits_{P\in K_0} d\vec{G}\, ds = \int \sigma d\vec{G} = 2\int \sigma\, dG, \tag{13.6}$$

где через σ обозначена длина «хорды», высекаемой областью K_0 на геодезической G.

Если же для величины dK мы возьмем выражение (13.5), то получим

$$\int\limits_{P\in K_0} dP\, dV = 2\pi \int\limits_{P\in K_0} dP = 2\pi F_0. \tag{13.7}$$

Отсюда следует, что

$$\int \sigma\, dG = \pi F_0. \tag{13.8}$$

Мы получили обобщение формулы (3.8) на случай произвольной поверхности.

б) Если в формуле (13.5) считать, что точка P совпадает с концом дуги K геодезической, то для каждого положения точки P интеграл от dV дает угол ω, покрываемый радиусами геодезического круга с центром в точке P

и радиусом l, концы которых находятся внутри области K_0. Так как окончательный результат интегрирования должен совпадать с тем, который дает формула (13.7), то

$$\int \omega\, dP = 2\pi F_0. \tag{13.9}$$

Эта формула обобщает на случай поверхности формулу (5.10) интегральной геометрии на плоскости. За область интегрирования следует принять множество всех точек P, для которых $\omega \neq 0$.

в) Пусть теперь K_0 — *выпуклая* область. Рассмотрим меру множества дуг K, имеющих общие точки с областью K_0. Применяя формулу (13.1), получаем

$$\int\limits_{K\cdot K_0\neq 0} dK = \int (\sigma + l)\, d\vec{G} = 2 \int\limits_{G\cdot K_0\neq 0} (\sigma + l)\, dG$$

и, в силу равенств (13.8) и (12.3),

$$\int\limits_{K\cdot K_0\neq 0} dK = 2\pi F_0 + 2lL_0, \tag{13.10}$$

где F_0 — площадь области K_0, а L_0 — ее периметр.

Эта формула, идентичная формуле (6.1), дает *меру множества дуг геодезических длины l, которые имеют общие точки с выпуклой областью площади F_0.*

Если ту же меру мы подсчитаем с помощью формулы (13.5), то получим

$$\begin{aligned} \int\limits_{K\cdot K_0\neq 0} dK &= \int\limits_{P\in K_0} dP \int\limits_0^{2\pi} dV + \int\limits_{P\overline{\in} K_0} dP \int\limits_0^{\varphi} dV = \\ &= 2\pi F_0 + \int\limits_{P\overline{\in} K_0} \varphi\, dP, \end{aligned} \tag{13.11}$$

где φ — угол, покрываемый всеми радиусами длины l, проведенными из центра P, которые имеют общую точку с областью K_0.

Из формул (13.11) и (13.10) мы получаем равенство

$$\int\limits_{P\overline{\in} K_0} \varphi\, dP = 2lL_0, \tag{13.12}$$

имеющее ту же форму, что и равенство (6.2).

3. Дуги геодезических, пересекающие кривую. Пусть теперь K_0 — кривая того класса, который указан в п. 1 § 12.

Обозначим через φ угол, который образуют кривая K_0 и геодезическая G в точке их пересечения, а через σ — длину дуги кривой K_0. В соответствии с (12.2) мы имеем $dG = |\sin\varphi|[d\sigma d\varphi]$, а из формулы (13.1) получаем

$$dK = |\sin\varphi|[d\sigma\, d\varphi\, ds]. \tag{13.13}$$

Интегрируя правую часть по области

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant L_0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

мы получим $4L_0 l$.

При интегрировании левой части придется считать каждое положение кривой K столько раз, сколько точек пересечения кривая K имеет с кривой K_0. Следовательно, если число этих точек пересечения равно n, то

$$\int n\, dK = 4lL_0. \tag{13.14}$$

4. Множества ломаных линий. Пусть K — замкнутая ломаная линия $P_1P_2P_3\ldots P_m$, состоящая из конечного числа m дуг K_i геодезических $(i = 1, 2, \ldots, m)$; длины l_i всех этих дуг и углы α_i между K_{i-1} и K_i мы будем считать заданными.

Каждой вершине P_i соответствует угол V_i, составленный стороной P_iP_{i+1} и полярным радиусом OP_i геодезической полярной системы координат. Имеем $dK_i = dP_i dV_i$. Если мы обозначим через V'_{i-1} угол между полярным радиусом OP_i и стороной $P_{i-1}P_i$, то, в силу инвариантности dK_i относительно положения точки P_i, получим

$$dK_i = [dP_i dV_i] = [dP_{i+1} dV'_i]. \tag{13.15}$$

Но $V'_i = \pi - (\alpha_{i+1} + V_{i+1})$. Поэтому по абсолютной величине $dK_i = [dP_{i+1}\, dV_{i+1}] = dK_{i+1}$.

Отсюда видно, что за плотность множества ломаных линий K, состоящих из дуг K_i известных длин l_i, составляющих известные углы α_i при вершинах, можно принять

$$dK = dK_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{13.16}$$

Если число точек пересечения стороны K_i с фиксированной кривой K_0 длины L_0 обозначить через n_i, то, согласно (13.14),

$$\int n_i dK_i = 4l_i L_0. \tag{13.17}$$

Складывая почленно равенства (13.17) для $i=1, 2, \ldots, m$ и принимая во внимание (13.16), получаем

$$\int n\,dK = 4LL_0, \tag{13.18}$$

где $L=\sum l_i$ — длина всей ломаной K, а n — число точек пересечения K_0 и K.

5. **Множества кривых.** Пусть K — некоторая кривая на поверхности. Допустим, что она имеет непрерывную геодезическую кривизну $\varkappa_g=\varkappa_g(s)$ (где s — длина дуги кривой K) или что она состоит из конечного числа дуг с этим свойством. Пусть, далее, $P_0=P(s_0)$ — точка на кривой K.

Пусть заданы произвольная точка P на поверхности и направление V в этой точке. По заданной функции $\varkappa_g=\varkappa_g(s)$ мы можем построить единственную кривую, которая проходит через точку P в направлении V. Мы будем говорить, что эта кривая *конгруэнтна* кривой K. Две конгруэнтные кривые на поверхности имеют равные длины s и одинаковые геодезические кривизны $\varkappa_g$ в соответствующих точках; при этом они могут быть совершенно различными по форме; так, например, одна из них может быть замкнутой или иметь двойные точки, а другая — незамкнутой и простой.

Меру множества кривых, конгруэнтных кривой K, мы определим как интеграл от кинематической плотности $dK=[dP\,dV]$. Для оправдания этого определения необходимо доказать, что эта мера не зависит от выбора точки $P(s_0)$ на кривой K. Но это можно вывести из формулы (13.16); надо лишь заменить кривую K близкой к ней ломаной линией, составленной из достаточно малых дуг геодезических.

Если кривая K пересекает другую кривую K_0, то в качестве точки P можно выбрать одну из точек пересечения. Обозначив через σ длину дуги кривой K_0 и через ω угол между кривыми K и K_0 в точке P, будем иметь

$$dP=|\sin\omega|\,ds\,d\sigma.$$

Если V — угол между касательной к кривой K в точке P и радиусом OP геодезической полярной системы координат, а α — угол между тем же радиусом и касательной к кривой K_0 в этой же точке, то $V=\omega-\alpha$. Так как α —

функция одной только длины дуги σ, то $d\alpha = \alpha' d\sigma$. Следовательно, плотность dK может быть записана в виде

$$dK = |\sin \omega| \, [ds \, d\sigma \, d\omega]. \tag{13.19}$$

Эта формула имеет такой же вид, как формула (7.6) для плоскости. Интегрирование выражения (13.19) по области

$$0 \leqslant s \leqslant L, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant L_0, \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$$

дает

$$\int n \, dK = 4LL_0. \tag{13.20}$$

Эта формула представляет собой обобщение *формулы Пуанкаре* интегральной геометрии на плоскости.

Если обе части равенства (13.19) мы умножим на ω и проинтегрируем по всем значениям ω, s, σ, считая, что всегда $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, то тем же методом, который был применен в случае плоскости (§ 7, п. 3), получим

$$\int \sum_{1}^{n} \omega_i \, dK = 2\pi LL_0, \tag{13.21}$$

где ω_i — углы между K и K_0 в точках их пересечения. Эта формула совпадает с формулой (7.9) интегральной геометрии на плоскости.

§ 14. Пары геодезических и пары точек

1. Пары геодезических. Пусть G_1 и G_2 — две геодезические, пересекающиеся в точке P. Если ρ, θ — геодезические полярные координаты точки P, а V_1, V_2 — углы между этими геодезическими и полярным радиусом OP, то из формулы (11.20) следует, что

$$dG_1 = -\sin V_1 \, [d\rho \, dV_1] + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \rho} \sin V_1 \, [d\theta \, d\rho] + \\ + \sqrt{g} \cos V_1 \, [d\theta \, dV_1],$$

$$dG_2 = -\sin V_2 \, [d\rho \, dV_2] + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \rho} \sin V_2 \, [d\theta \, d\rho] + \\ + \sqrt{g} \cos V_2 \, [d\theta \, dV_2].$$

Вычислив внешнее произведение, получаем

$$[dG_1\,dG_2] = \sqrt{g}\,|\sin(V_1 - V_2)|\,[d\rho\,d\theta\,dV_1\,dV_2],$$

или, согласно формуле (13.4),

$$[dG_1\,dG_2] = |\sin(V_1 - V_2)|\,[dP\,dV_1\,dV_2]. \qquad (14.1)$$

Этот результат показывает, что формула (4.2) полностью сохраняется и в интегральной геометрии на поверхности.

Приложения.

1. Пусть K_0 — область поверхности площади F_0. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{P \in K_0} dG_1 dG_2,$$

где P — точка пересечения геодезических G_1, G_2. Используя (14.1) и принимая во внимание, что

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(V_1 - V_2)|\,dV_1 dV_2 = 2\pi, \qquad (14.2)$$

получаем

$$I = 2\pi F_0. \qquad (14.3)$$

С другой стороны, если мы зафиксируем сначала положение геодезической G_1 и обозначим через σ хорду, которую высекает область K_0 на этой геодезической, то из формулы (12.3), где в этом случае надо считать $n=1$, получим

$$I = \int_{G_1 \cdot K_0 \neq 0} dG_1 \int_{P \in K_0} dG_2 = 2 \int_{G_1 \cdot K_0 \neq 0} \sigma\,dG_1. \qquad (14.4)$$

Из равенств (14.3) и (14.4) снова следует формула (13.8).

Как и во всех предыдущих рассуждениях, мы, конечно, рассматриваем лишь области, обладающие тем свойством, что *каждая пара внутренних точек определяет одну и только одну геодезическую.*

2. Поскольку формула (14.1) имеет тот же вид, что и соответствующая формула для плоскости, мы можем снова провести рассуждения п. 2 § 4, если только наша поверхность обладает тем свойством, что *каждая пара геодезических имеет одну и только одну точку пересечения.*

Следовательно, формула Крофтона (4.6)

$$\int_{P \in K} (\omega - \sin \omega)\, dP = \frac{1}{2} L^2 - \pi F$$

имеет место для поверхностей этого класса.

2. Пары точек. Пусть P_1, P_2 — две точки и G — геодезическая, которая ими определяется.

Мы знаем (§ 13, п. 1), что

$$[dP_1\, dV_1] = [d\vec{G}\, ds_1]. \qquad (14.5)$$

В геодезической полярной системе координат с началом в точке P_1 элемент площади dP_2 определится формулой (13.4); поэтому

$$dP_2 = \sqrt{g_{P_1}(P_2)}\, [d(s_2 - s_1)\, dV_1], \qquad (14.6)$$

где g_{P_1} обозначает функцию g, соответствующую системе геодезических полярных координат с началом в точке P_1, и $g_{P_1}(P_2)$ есть значение этой функции в точке P_2.

Умножая внешним образом обе части равенства (14.5) на $\sqrt{g_{P_1}(P_2)}\, d(s_2 - s_1)$ и используя формулу (14.6), мы получаем (по абсолютной величине)

$$[dP_1 dP_2] = \sqrt{g_{P_1}(P_2)}\, [d\vec{G}\, ds_1\, ds_2]. \qquad (14.7)$$

То обстоятельство, что линия G в формуле (14.5) считается «ориентированной», означает, что точка P_2 при указанной ориентации G следует за точкой P_1, т. е. что обязательно $s_2 > s_1$. Если мы хотим допустить возможность рассматривать и значения s_1 и s_2 такие, что $s_2 \leqslant s_1$, или, другими словами, считать, что угол V_1 изменяется от 0 до π, а точка P_2 предшествует P_1, совпадает с ней или следует за ней, то нужно рассматривать G в формуле (14.7) как *неориентированную* геодезическую. Это приводит к равенству

$$[dP_1\, dP_2] = \sqrt{g_{P_1}(P_2)}\, [dG\, ds_1\, ds_2]. \qquad (14.8)$$

Эта формула служит обобщением формулы (3.2). Действительно, в случае плоскости $g = (s_2 - s_1)^2$ и формула (14.8) совпадает с (3.2).

§ 15. Интегральная геометрия на поверхностях постоянной кривизны[1])

1. Интегральные формулы для сферы. Рассмотрим поверхность сферы единичного радиуса. В системе геодезических полярных координат (ρ, θ) имеем $ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\theta^2$ и, следовательно,

$$g = \sin^2\rho. \tag{15.1}$$

Из формулы (14.8) получаем (так как $\rho = s_2 - s_1$), что

$$[dP_1\, dP_2] = |\sin(s_2 - s_1)|\, [dG\, ds_1\, ds_2]. \tag{15.2}$$

Пусть σ — длина хорды, высекаемой на геодезической G *выпуклой* областью K площади F. Очевидно,

$$\int_0^\sigma \int_0^\sigma |\sin(s_2 - s_1)|\, ds_1 ds_2 = 2(\sigma - \sin\sigma). \tag{15.3}$$

Интегрируя обе части равенства (15.2) по всем парам точек P_1, P_2, содержащихся в области K, получаем

$$\int (\sigma - \sin\sigma)\, dG = \frac{1}{2} F^2. \tag{15.4}$$

В силу общей формулы (13.8), отсюда следует, что

$$\int \sin\sigma\, dG = \pi F - \frac{1}{2} F^2. \tag{15.5}$$

В формулах (15.4) и (15.5) интегралы берутся по всем окружностям больших кругов G, имеющим общие точки с областью K. Заметим, что если γ — полюс кривой G, т. е. конец диаметра, ортогонального к плоскости круга G, то формула (11.21) дает

$$dG = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - \rho\right)\right| [d\rho\, d\theta],$$

[1]) Все результаты настоящего параграфа можно получить и без привлечения развитой в §§ 11—14 теории, если учесть, что большинство рассмотрений гл. I сохраняют силу также и для эллиптической и гиперболической плоскостей; в этих результатах часто естественнее говорить не о поверхностях постоянной кривизны, а о плоских геометриях Лобачевского и Римана. См. по этому поводу ч. III, § 23.— *Прим. ред.*

т. е.

$$dG = d\gamma, \qquad (15.6)$$

где $d\gamma$ — элемент площади, соответствующий точке γ.

Относительно других интегральных формул для выпуклых областей на сфере см. Сантало [10].

2. Интегральные формулы для поверхностей постоянной отрицательной кривизны. В геодезических полярных координатах элемент длины дуги поверхности кривизны —1 имеет вид $ds^2 = d\rho^2 + \operatorname{sh}^2\rho\, d\theta$, и, следовательно,

$$g = \operatorname{sh}^2\rho. \qquad (15.7)$$

Формула (14.8) принимает вид

$$[dP_1\, dP_2] = |\operatorname{sh}(s_1 - s_2)|\, [dG\, ds_1\, ds_2].$$

Выполнив, как и раньше, интегрирование по всем парам точек P_1, P_2, содержащихся в выпуклой области K площади F, и приняв во внимание, что

$$\int_0^\sigma \int_0^\sigma |\operatorname{sh}(s_1 - s_2)|\, ds_1 ds_2 = 2\,(\operatorname{sh}\sigma - \sigma),$$

где σ — длина хорды, высекаемой на кривой G областью K, получим

$$\int (\operatorname{sh}\sigma - \sigma)\, dG = \frac{1}{2} F^2. \qquad (15.8)$$

В силу общей формулы (13.8),

$$\int \operatorname{sh}\sigma\, dG = \frac{1}{2} F^2 + \pi F. \qquad (15.9)$$

В равенствах (15.8) и (15.9) интеграл берется по всем геодезическим, пересекающим выпуклую область K.

О других интегральных формулах для поверхностей кривизны —1 см. Сантало [13].

3. Основная формула Бляшке для поверхностей постоянной кривизны. На поверхности общего вида вряд ли можно рассматривать множества областей, которые переходят друг в друга с помощью преобразований, сохраняющих их площади, а также длины и геодезические кривизны ограничивающих их кривых. Однако на поверхности постоянной кривизны, если, как обычно, ограничиться достаточно малой ее областью, можно свободно «двигать» фигуры и с помощью тех же рассуждений, какие выше были использованы в случае плоскости, можно определить кинематическую меру множества «конгруэнтных» областей.

Положение области K на поверхности можно определить, задав точку P и определенное направление PA, фиксированное в области K. Кинематическая плотность определится формулой

$$dK=[dP\,dV], \tag{15.10}$$

где V — угол между направлением PA и полярным радиусом OP системы геодезических полярных координат.

Эта кинематическая плотность не зависит от выбора в области K линейного элемента (P, PA). Для доказательства возьмем другой элемент $(P', P'A')$ и построим геодезическую PP'. Если через α мы обозначим угол между PA и PP' и через β — угол между $P'A'$ и PP', то, согласно свойству инвариантности кинематической плотности относительно перемещения точки вдоль геодезической (§ 13, п. 1), будем иметь $[dP\,d(V-\alpha)]=[dP'\,d(\beta-V')]$. Так как значения α и β постоянны, то отсюда следует, что $[dP\,dV]=[dP'\,dV']$, чем и доказывается нужная инвариантность.

Рассмотрим меру множества областей K, внутри которых содержится некоторая фиксированная точка. Эту фиксированную точку можно выбрать за начало O полярной системы координат, которой определится угол V. Тогда

$$dK=[dP\,dV]=\sqrt{g(\rho)}\,[d\rho\,d\theta\,dV].$$

При фиксированных значениях ρ и V угол θ может принимать значения от 0 до 2π; следовательно,

$$\int dK=2\pi\int\sqrt{g(\rho)}\,d\rho\,dV=2\pi F$$

(здесь F — площадь области K). Итак,

$$\int\limits_{O\in K} dK=2\pi F. \tag{15.11}$$

Используя эту формулу и формулу (13.21), можно повторить полностью все рассуждения, изложенные в § 8. Нужно будет только заменить обычную кривизну плоской кривой *геодезической кривизной*, т. е. в п. 2 § 8 положить

$d\tau = \varkappa_g\, ds$. *Полная геодезическая кривизна* области K определится тогда той же формулой (8.12).

Мы придем, повторяя прежнее доказательство, к *основной формуле Бляшке* для поверхностей постоянной кривизны:

$$\int C_{01} dK_1 = 2\pi (F_0 C_1 + F_1 C_0 + L_0 L_1). \qquad (15.12)$$

Чтобы получить аналог формулы (8.22), нужно будет ввести некоторые изменения. В самом деле, если граница каждой области K_i представляет собой одну кривую, то формула Гаусса — Бонне теории поверхностей дает

$$C_i = 2\pi - kF_i, \qquad i = 0, 1, \qquad (15.13)$$

где гауссова кривизна $k = \text{const}$.

Если пересечение $K_{01} = K_0 \cdot K_1$ состоит из ν отдельных частей с общей площадью F_{01}, то из той же формулы Гаусса — Бонне получим

$$C_{01} = 2\pi\nu - kF_{01}. \qquad (15.14)$$

Далее, для поверхностей постоянной кривизны k сохраняет силу формула (8.4), которую можно получить тем же путем, что и в случае плоскости; таким образом,

$$\int F_{01} dK_1 = 2\pi F_0 F_1. \qquad (15.15)$$

Подставив теперь значения из формул (15.15), (15.14), (15.13) в формулу (15.12) и разделив на 2π, мы найдем

$$\int \nu\, dK_1 = 2\pi (F_0 + F_1) + L_0 L_1 - kF_0 F_1. \qquad (15.16)$$

При $k = 0$ (случай плоскости) эта формула совпадает с формулой (8.22).

4. Изопериметрическое неравенство на поверхностях постоянной кривизны. Если каждая из двух областей K_0 и K_1 ограничена одной кривой и ни одна из них не содержится внутри другой, то каждая из ν частей, на которые разбивается пересечение K_0 и K_1, должна быть ограничена по крайней мере одной дугой, принадлежащей границе области K_0, и одной — границе области K_1. Следовательно, каждой такой части соответствуют по крайней мере две точки поресечения границ областей K_0 и K_1.

Если общее число точек пересечения границ областей K_0 и K_1 равно n, то

$$\nu \leqslant \frac{n}{2}. \tag{15.17}$$

Допустим, что области K_0 и K_1 *конгруэнтны*. Положив $F_0=F_1=F$, $L_0=L_1=L$, мы из *формулы Пуанкаре* (13.20) получим

$$\int n\,dK_1=4L^2, \tag{15.18}$$

а из формулы (15.16) —

$$\int \nu\,dK_1=4\pi F+L^2-kF^2. \tag{15.19}$$

Далее, из (15.18) и (15.19), в силу (15.17), следует, что

$$4\pi F+L^2-kF^2\leqslant 2L^2,$$

и, значит,

$$L^2-4\pi F+kF^2\geqslant 0. \tag{15.20}$$

Это — *изопериметрическое неравенство* на поверхности постоянной кривизны k.

Проведя такие же рассуждения, как и в случае плоскости, легко получить некоторые более точные неравенства типа неравенства Боннезена (9.9).

Все остальные результаты § 9 также можно без изменений перенести на случай поверхности постоянной кривизны (см. Сантало [11] и [13]). Результаты § 10 также могут быть обобщены на случай поверхности постоянной отрицательной кривизны, если рассмотреть *дискретную* подгруппу группы движений.

Библиография. Построение интегральной геометрии на поверхности проведено в работах Бляшке [9], Хаймович [3], Сантало [18] и Видаль-Абаскаль [1].

Часть III

ОБЩАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 16. Основные свойства групп Ли

1. Определения. Пусть E_n есть n-мерное пространство. Мы будем рассматривать совокупность *преобразований* T таких, что для каждой точки x пространства E_n однозначно определен ее образ $x'=Tx$, также являющийся точкой пространства E_n.

Если $x'=Tx$ и если среди рассматриваемых преобразований существует такое, которое переводит x' обратно в x (для всех $x \in E_n$), то это преобразование называется *обратным* к T и обозначается через T^{-1}; таким образом, $x=$ $=T^{-1}x'$.

Совокупность преобразований T называется *группой*, если выполняются следующие требования:

а) Произведение двух преобразований, принадлежащих рассматриваемой совокупности, также является преобразованием из этой совокупности.

Таким образом, наряду с каждыми двумя преобразованиями T_1 и T_2 в рассматриваемую совокупность входит преобразование $T_3=T_1T_2$ такое, что если $x'=T_2x$ и $x''=$ $=T_1x'$, то $x''=T_3x$.

б) Преобразование, обратное преобразованию, принадлежащему данной совокупности, также принадлежит ей.

Следствием этих двух требований является то, что вместе с T преобразование $T^{-1}T$ принадлежит совокупности, так что группа содержит *тождественное преобразование.*

Пусть G — группа преобразований T. Допустим, что каждое T определено *конечным числом параметров* a_1, $a_2, \ldots, a_r$. Пусть в E_n введена система координат, так что каждая точка x определяется своими координатами

$x_1, \ldots, x_n$. Координаты образа x' точки x могут быть выражены в виде функций

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_r), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{16.1}$$

которые мы предположим *аналитическими* относительно x_i и a_i. В этом случае G называется *группой Ли*[1]).

Параметры a_i можно рассматривать как координаты точки a в некотором r-мерном пространстве, называемом *пространством параметров*. Каждой точке a этого пространства будет соответствовать преобразование T_a группы G.

То обстоятельство, что точка x' получена из x при помощи преобразования T_a, мы будем записывать следующими двумя эквивалентными способами:

$$x' = \varphi(x; a) \quad \text{и} \quad x' = T_a x. \tag{16.2}$$

При использовании первого из них свойство а) из определения группы формулируется так: для любых двух точек a и b пространства параметров существует третья точка c, *не зависящая от* x, такая, что

$$\varphi(\varphi(x, a), b) = \varphi(x, c). \tag{16.3}$$

Во второй записи (16.2) это свойство выглядит так:

$$T_b T_a x = T_c x. \tag{16.4}$$

Второе свойство означает, что для каждой точки a пространства параметров найдется такая точка a', *не зависящая от* x, что

$$\varphi^{-1}(x, a) = \varphi(x, a'), \tag{16.3'}$$

где $\varphi^{-1}(x, a)$ — функция, обратная функции $\varphi(x, a)$, или

$$T_a^{-1} x = T_{a'} x. \tag{16.4'}$$

Группу G мы будем называть *транзитивной* по отношению к точкам пространства E_n, если для любой пары точек x, x' существует преобразование T_a такое, что $x' = T_a x$. Если T_a определяется при этом однозначно, то группа называется *просто-транзитивной*.

---

[1]) См., например, Понтрягин [1], Чеботарев [1], Эйзенхарт [1]. — *Прим. ред.*

2. Параметрическая группа. Пусть a — фиксированная точка пространства параметров и α — произвольная точка этого же пространства. Соотношение (16.4) показывает, что каждой точке α соответствует точка α' такая, что

$$T_{\alpha'}=T_aT_\alpha\,. \tag{16.5}$$

Таким образом, каждой точке a соответствует *преобразование* пространства параметров. Эти преобразования составляют группу: действительно, если $T_a^{-1}=T_b$, то $T_\alpha=T_bT_{\alpha'}$ (т. е. обратное преобразование принадлежит нашей совокупности), и если $T_bT_a=T_c$, то из соотношений $T_{\alpha'}=T_aT_\alpha$ и $T_{\alpha''}=T_bT_{\alpha'}$ следует $T_{\alpha''}=T_bT_aT_\alpha=T_cT_\alpha$ (т. е. произведение двух преобразований нашей совокупности принадлежит этой же совокупности).

Эта группа называется *параметрической группой.*

Заданием точек α и α' пространства параметров однозначно определяется точка a, так как из равенства (16.5) следует, что $T_a=T_{\alpha'}T_\alpha^{-1}$; таким образом, *параметрическая группа просто-транзитивна.*

Иногда группа, определяемая формулой (16.5), называется *первой параметрической группой. Вторая параметрическая группа* определяется с помощью соотношения

$$T_{\alpha'}=T_\alpha\,T_a. \tag{16.6}$$

Однако в дальнейшем мы будем пользоваться только первой параметрической группой и называть ее просто «параметрической группой».

Пример. Формула

$$x'=a_1x+a_2 \qquad (a_1>0) \tag{16.7}$$

определяет группу преобразований, зависящих от двух параметров a_1, a_2.

Преобразование T_α есть

$$x'=\alpha_1x+\alpha_2,$$

а произведение T_aT_α —

$$x''=a_1(\alpha_1x+\alpha_2)+a_2=a_1\alpha_1x+a_1\alpha_2+a_2.$$

Таким образом, преобразование $T'_\alpha=T_aT_\alpha$ имеет параметры

$$\alpha_1'=a_1\alpha_1;\qquad \alpha_2'=a_1\alpha_2+a_2. \tag{16.8}$$

Эти формулы определяют параметрическую группу группы (16.7), которая является группой преобразований двумерного пространства параметров (α_1, α_2).

В соответствии с определением (16.6) уравнения второй параметрической группы имеют следующий вид:

$$\alpha_1' = a_1\alpha_1; \qquad \alpha_2' = a_2\alpha_1 + \alpha_2. \tag{16.9}$$

3. Инфинитезимальные преобразования. Допустим, что значениям параметров $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$ отвечает тождественное преобразование. В силу (16.1), это означает, что

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; 0, 0, \ldots, 0). \tag{16.10}$$

Предположим теперь, что параметры a_i являются бесконечно малыми величинами; обозначим их через ε_i.

В первом приближении мы можем отбросить в разложении

$$x_i' = x_i + \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_j}\right)_0 \varepsilon_j + \ldots \tag{16.11}$$

члены, обозначенные точками. Полагая $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_j}\right)_0 = \xi_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$, мы сможем записать

$$x_i' = x_i + \delta x_i, \quad \text{где } \delta x_i = \sum_{j=1}^{r} \xi_{ij}(x)\,\varepsilon_j. \tag{16.12}$$

Наряду с преобразованиями (16.1) пространства E_n мы будем рассматривать преобразования заданных на E_n функций $F(x_1, \ldots, x_n)$:

$$F'(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1', \ldots, x_n').$$

В таком случае инфинитезимальному преобразованию (16.12) группы отвечает инфинитезимальное преобразование в множестве функций

$$F' = F + \delta F,$$

$$\text{где } \delta F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\xi_{ij}\right). \tag{16.13}$$

Принято употреблять обозначение

$$X_j F = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \tag{16.14}$$

и говорить, что $X_j F$ есть *инфинитезимальный оператор* группы. Таким образом,

$$\delta F = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j X_j F. \tag{16.15}$$

Формула (16.13) или (16.15) выражает инфинитезимальное преобразование T_ε множества заданных на E_n функций, определяемое бесконечно малыми значениями параметров. Это преобразование отвечает инфинитезимальному преобразованию (16.12) пространства E_n, которое мы тоже будем обозначать через T_ε.

4. «Подвижный репер» Картана. (См. Картан [5].) Определение положения точки x в пространстве E_n с помощью координат $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ предполагает существование некоторой системы координат. Эту абсолютную систему координат — назовем ее R_0 — можно задать некоторым конечным числом точек или, более обще, соответствующей фигурой; например, на евклидовой плоскости координатная система задается совокупностью двух взаимно ортогональных единичных векторов, имеющих общее начало. Следуя Картану, будем называть такую фигуру «репером».

Поскольку каждый «репер» эквивалентен некоторой системе координат, мы будем употреблять для обоих этих объектов одно и то же обозначение R. Это, естественно, предполагает, что каждому реперу соответствует одна и только одна система координат, и наоборот[1]).

---

[1] В настоящей главе книги рассматриваются так называемые *однородные пространства Клейна*, т. е. пространства, в которых задана транзитивная группа преобразований G; под *геометрическими свойствами* пространства подразумеваются те и только те свойства, которые сохраняются при преобразованиях группы G. Система координат в таком пространстве определяется со значительным произволом. Действительно, наряду с фиксированной системой координат R_0 всегда можно рассмотреть систему координат R_a, которая получится, если

Преобразование T_a переводит репер R_0 в новый репер R_a:

$$R_a = T_a R_0. \tag{16.16}$$

Пусть x — некоторая точка пространства и $x' = T_a x$ — ее образ при преобразовании T_a. Если координаты точек x, x' в системе R_0 обозначить соответственно через x_i^0 и $x_i'^0$, а в системе R_a — через x_i^a и $x_i'^a$, то

$$x_i'^a = x_i^0, \qquad x_i^a = \varphi_i^{-1}(x^0, a), \tag{16.17}$$

где, как и раньше, φ^{-1} — функция, обратная функции $\varphi(x, a)$, определяющей преобразование T_a (16.2).

Пусть G — группа, заданная формулами (16.1) или (16.2). Если R_b — произвольный репер и $x' = T_a x$, то в системе координат R_0 имеют место равенства

$$x_i'^0 = \varphi_i(x^0, a), \tag{16.18}$$

и в соответствии с формулами (16.17)

$$x_i^0 = \varphi_i(x^b, b), \qquad x_i'^0 = \varphi_i(x'^b, b).$$

Подставляя эти значения в равенство (16.18), получаем

$$\varphi_i(x'^b, b) = \varphi_i[\varphi(x^b, b), a],$$

принять за координаты каждой точки x' координаты (по отношению к системе R_0) такой точки x, что $x' = T_a x$; здесь T_a — какое-то фиксированное преобразование группы G (см. ниже). Очевидно, что все получаемые таким образом системы координат (и только они) будут совершенно равноправны.

Для того, чтобы фиксировать систему координат R_0, надо задать «репер», т. е. совокупность нескольких точек или фигуру. (Так, декартовы координаты n-мерного евклидова пространства задаются выбором репера из n ортонормированных векторов; проективные координаты n-мерного проективного пространства задаются выбором «координатного симплекса» и «единичной точки» и т. д.) Автор обозначает этот репер той же буквой R_0, что и систему координат. При этом указанной выше системе координат R_a отвечает репер, получаемый из репера R_0 преобразованием T_a. Совокупности всевозможных систем координат отвечает совокупность всевозможных реперов, получаемых из R_0 всеми преобразованиями группы. Для того, чтобы между реперами и системами координат существовало однозначное соответствие, необходимо (и достаточно), чтобы *никакие два репера, получаемые из репера R_0 разными преобразованиями группы, не совпадали*. Это обстоятельство может служить определением самого понятия «репер». — *Прим. ред.*

и, следовательно,

$$x_i'^b = \varphi_i^{-1} \{\varphi [\varphi (x^b, b), a], b\}. \quad (16.19)$$

Так как рассматриваемые преобразования образуют группу, то

$$x_i'^b = \varphi_i (x^b, c).$$

Итак, *уравнения (16.1) группы сохраняют одинаковый вид во всех системах координат R_b, получающихся из системы R_0 преобразованиями группы.*

Из формул (16.19) следует, что преобразование T_a, если его отнести к системе координат R_b, переходит в

$$T_b^{-1} T_a T_b, \quad (16.20)$$

т. е. в трансформацию T_a с помощью T_b.

5. Относительные компоненты «подвижного репера». Преобразование, переводящее систему координат R_a в R_{a+da}, есть $T_{a+da} T_a^{-1}$. Из (16.20) следует, что это преобразование, отнесенное к системе координат R_a, переходит в преобразование

$$T_a^{-1} (T_{a+da} T_a^{-1}) T_a = T_a^{-1} T_{a+da}. \quad (16.21)$$

Считая da_i бесконечно малыми и пренебрегая в выражении для координат точки $x' = T_a^{-1} T_{a+da} x$ членами, имеющими порядок малости выше da_i, будем иметь инфинитезимальное преобразование в смысле п. 5, которое также будем обозначать через $T_a^{-1} T_{a+da}$. Параметры этого преобразования в первом приближении можно записать в виде $\sum_{k=1}^{r} A_k^i da_k$, где A_k^i — функции от a_i, т. е. они являются пфаффовыми формами от параметров. Обозначив эти формы через $\omega_i (a, da)$, согласно (16.11) и (16.12), получим

$$x_i' = T_a^{-1} T_{a+da} x_i = T_\omega x_i = x_i + \sum_{j=1}^{r} \xi_{ij}(x)\, \omega_j(a, da). \quad (16.22)$$

Пфаффовы формы $\omega_j (a, da)$ от r параметров a_i называются *относительными компонентами подвижного репе-*

ра R_a[1]) или также *относительными компонентами данной группы* G.

Чтобы получить значения относительных компонент ω_i из формул (16.1), определяющих группу, заметим, что равенство (16.22) можно записать в виде

$$(x+\delta x)=T_a^{-1}T_{a+da}x,$$

так что $T_a(x+\delta x)=T_{a+da}x$, а это равносильно системе равенств.

$$\varphi_i(x+\delta x, a)=\varphi_i(x, a+da), \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{16.23}$$

Соответственно с этим мы получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\delta x_j=\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a_k}da_k, \qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{16.24}$$

Из этой системы линейных уравнений можно получить значения $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, которые, согласно п. 3, должны иметь вид (16.12). В получающихся при этом выражениях коэффициентами при функциях $\xi_{ij}(x)$ будут пфаффовы формы $\omega_j(a, da)$.

Пример. Для группы $x'=a_1x+a_2$ $(a_1>0)$ формулы (16.24) принимают вид

$$a_1\delta x=x da_1+da_2.$$

Следовательно,

$$\delta x=x\frac{da_1}{a_1}+\frac{da_2}{a_1}, \tag{16.25}$$

и относительными компонентами будут

$$\omega_1=\frac{da_1}{a_1}, \qquad \omega_2=\frac{da_2}{a_1}. \tag{16.26}$$

6. Три свойства относительных компонент.

1. *Относительные компоненты* $\omega_i(a, da)$ *являются независимыми формами.* Действительно, они принимают про-

---

[1]) Точнее было бы сказать — относительные компоненты инфинитезимального преобразования, переводящего R_a в R_{a+da}. — *Прим. ред.*

извольные значения $db_1, db_2, \ldots, db_r$, если выбрать da_i так, чтобы было $T_{a+da} = T_a T_{db}$.

2. *Относительные компоненты* $\omega_i(a, da)$ *подвижного репера* R_a *инвариантны относительно параметрической группы.* Пусть c — фиксированная точка параметрического пространства. Преобразование пространства параметров, отвечающее c, определяется формулой [см. (16.5)]

$$T_{a'} = T_c T_a.$$

Придав a приращение da, получим

$$T_{a' + da'} = T_c T_{a+da}.$$

Но так как

$$T_{a'}^{-1} = (T_c T_a)^{-1} = T_a^{-1} T_c^{-1},$$

то

$$T_{a'}^{-1} T_{a'+da'} = T_a^{-1} T_{a+da},$$

и, следовательно, согласно определению относительных компонент,

$$\omega_i(a, da) = \omega_i(a', da'), \qquad (16.27)$$

что и доказывает предложение 2.

Пример. Относительные компоненты (16.26) преобразуются параметрической группой (16.8) группы (16.7) следующим образом:

$$\omega_1(\alpha', d\alpha') = \frac{d\alpha_1'}{\alpha_1'} = \frac{a_1 d\alpha_1}{a_1\alpha_1} = \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = \omega_1(\alpha, d\alpha),$$

$$\omega_2(\alpha', d\alpha') = \frac{d\alpha_2'}{\alpha_1'} = \frac{a_1\, d\alpha_2}{a_1\, \alpha_1} = \frac{d\alpha_2}{\alpha_1} = \omega_2(\alpha, d\alpha).$$

3. *Только те пфаффовы формы* $\Omega(a, da)$, *которые являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) относительных компонент* $\omega_i(a, da)$, *будут инвариантны относительно параметрической группы.*

Доказательство. Так как r форм $\omega_i(a, da)$ независимы, то каждая пфаффова форма от параметров $\Omega(a, da)$ может быть записана в виде

$$\Omega(a, da) = \sum_1^r A_i(a)\, \omega_i(a, da). \qquad (16.28)$$

Если $\Omega(a, da) = \Omega(a', da')$, то, согласно (16.27),

$$\Omega(a, da) - \Omega(a', da') = \sum_{1}^{r} (A_i(a) - A_i(a'))\,\omega_i(a, da) = 0$$

и, в силу независимости форм $\omega_i(a, da)$, должно выполняться равенство

$$A_i(a) = A_i(a').$$

Так как параметрическая группа *транзитивна* (п. 2), то это равенство должно иметь место для любой пары значений a, a'; следовательно, $A_i = \text{const}$. Тем самым предложение 3 доказано.

Исходя из этих трех предложений, можно ввести следующее определение относительных компонент группы:

Системой относительных компонент заданной r-параметрической группы Ли называется любая совокупность r линейно независимых пфаффовых форм $\omega_i(a, da)$ $(i=1, 2, \ldots, r)$, инвариантных относительно параметрической группы. Таким образом, относительные компоненты определены с точностью до линейного преобразования с постоянными коэффициентами.

7. Относительные компоненты некоторых групп. Хотя мы указали в п. 5 общий метод нахождения относительных компонент $\omega_i(a, da)$ подвижного репера группы преобразований, во многих конкретных случаях удобнее использовать соображения, имеющие более геометрический характер.

Допустим, что каждый репер состоит из точки A пространства E_n и n исходящих из нее векторов I_1, $I_2, \ldots, I_n$, зависящих от параметров a_i группы преобразований. Пусть R_0 — фиксированная система координат (A_0, I_i^0), определяемая заданием точки A_0 и векторов I_i^0, так что каждая точка x может быть записана как функция своих абсолютных координат x_i следующим равенством: $x = A^0 + \sum x_i I_i^0$. Если преобразование T_a переводит систему координат R_0 в $T_a R_0 = R_a(A, I_i)$, то точка $x' = T_a x$ определится по формуле

$$x' = A + \sum_{1}^{n} x_i I_i. \tag{16.29}$$

Чтобы найти относительные компоненты, выпишем формулы (16.23) применительно к равенству (16.29). Мы получим

$$A+\sum_{1}^{n}(x_i+\delta x_i)I_i=A+dA+\sum_{1}^{n}x_i(I_i+dI_i). \qquad (16.29\text{a})$$

Если ω_k — координаты точки $A+dA$ в системе R_a, а ω_{ik} — компоненты векторов dI_i, то

$$dA=\sum_{1}^{n}\omega_k I_k; \qquad dI_i=\sum_{k=1}^{n}\omega_{ik}I_k. \qquad (16.30)$$

Так как точка A и векторы I_i зависят только от параметров a_i (и не зависят от x), то компоненты ω_i, ω_{ik} — пфаффовы формы от da_i. Из формул (16.29а) и (16.30) получим

$$\sum_{1}^{n}\delta x_i I_i=\sum_{1}^{n}\omega_k I_k+\sum_{i,k=1}^{n}x_i\,\omega_{ik}I_k.$$

Отсюда следует, что

$$\delta x_k=\omega_k+\sum_{i=1}^{n}x_i\,\omega_{ik}.$$

Таким образом, в соответствии с п. 5 относительными компонентами репера R_a являются формы ω_i, ω_{ik}.

Если векторы I_i не произвольны, то формы ω_k, ω_{ik} связаны какими-то соотношениями. В соответствии с предложением 3 п. 6 мы можем утверждать, что *относительные компоненты группы, определяемой равенствами* (16.29), *представляют собой r линейно независимых комбинаций с постоянными коэффициентами дифференциальных форм $\omega_k(a, da)$, $\omega_{ik}(a, da)$, определенных формулами* (16.30).

Примеры.

1. Группа движений. Пусть E_n — n-мерное евклидово пространство. Рассмотрим группу движений в E_n. Эта группа зависит от $r=n(n+1)/2$ параметров. В качестве репера R_a можно взять точку A и n единичных попарно ортогональных векторов I_i; каждый такой репер

определяет систему прямоугольных декартовых координат. Векторы I_i связаны между собой соотношениями

$$I_i I_j = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j; = 1 \text{ при } i = j); \tag{16.31}$$

следовательно,

$$I_i dI_i = 0, \qquad I_i dI_j = -I_j dI_i. \tag{16.32}$$

Принимая во внимание эти условия, мы получаем из равенств (16.30)

$$\omega_i = I_i dA, \qquad \omega_{ik} = I_k dI_i = -\omega_{ki}. \tag{16.33}$$

Соотношения

$$\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0 \tag{16.34}$$

показывают, что мы имеем всего $n(n+1)/2$ различных независимых коэффициентов. Они и будут *относительными компонентами подвижных реперов* для группы движений.

Если точка A задана координатами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а векторы I_i — своими координатами $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{in}$, то относительные компоненты (16.33) определятся равенствами

$$\omega_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}\, d\alpha_k, \qquad \omega_{ik} = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{kl}\, d\lambda_{il}. \tag{16.35}$$

Так, например, для плоскости ($n=2$) движение определяется параметрами α_1, α_2 (координаты точки A) и углом φ, который образует I_1 с некоторым определенным направлением на плоскости. Учитывая, что

$$\lambda_{11} = \cos\varphi, \qquad \lambda_{12} = \sin\varphi,$$
$$\lambda_{21} = -\sin\varphi, \qquad \lambda_{22} = \cos\varphi,$$

получим, согласно (16.35),

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \cos\varphi\, d\alpha_1 + \sin\varphi\, d\alpha_2, \\ \omega_2 &= -\sin\varphi\, d\alpha_1 + \cos\varphi\, d\alpha_2, \\ \omega_{12} &= d\varphi. \end{aligned} \tag{16.36}$$

Это и будут *относительные компоненты группы движений плоскости.*

2. Группа проективных преобразований. Пусть $E_n \equiv P_n$ — n-мерное проективное пространство. Точ-

ка x определяется $n+1$ *однородными координатами* x_0, $x_1, \ldots, x_n$. Группа проективных преобразований задается формулами

$$x'_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k, \tag{16.37}$$

где, в силу однородности проективных координат, можно положить

$$\det \| a_{ik} \| = 1. \tag{16.38}$$

Таким образом, группа проективных преобразований зависит от $(n+1)^2 - 1 = n(n+2)$ параметров a_{ik}.

Рассмотрим $n+1$ точек A_i с координатами $a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{in}$ ($i=0, 1, \ldots, n$). Определитель $\det \| a_{ik} \|$, составленный из координат этих точек, будем обозначать через $| A_0 A_1 \ldots A_n |$; равенство (16.38) примет тогда вид

$$| A_0 A_1 \ldots A_n | = 1. \tag{16.39}$$

Каждую точку x пространства можно представить в виде линейной комбинации

$$x = x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n, \tag{16.40}$$

и числа x_i можно рассматривать как координаты точки x в системе координат, определяемой репером $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$.

Таким образом, мы называем репером совокупность $n+1$ точек A_i пространства P_n, удовлетворяющих условию (16.39). Каждому реперу отвечает проективное преобразование (16.37), где коэффициенты a_{ik} совпадают с координатами точек A_i (заметим, что A_i — это не геометрические точки нашего проективного пространства, но лишь совокупности $n+1$ координат[1])).

[1]) У *геометрической точки* проективного пространства координаты определены лишь с точностью до постоянного множителя. Совокупность $n+1$ значений координат (хотя бы одно из которых отлично от нуля) иногда называют *аналитической точкой* проективного пространства; при этом одной геометрической точке P_n отвечает бесконечно много аналитических точек. Можно было бы сказать, что выбранные реперы представляют собой совокупности $n+1$ аналитических точек, удовлетворяющих условию (16.39). — *Прим. ред.*

Формула (16.40) аналогична формуле (16.29); вместо точки A и n векторов I_i мы теперь имеем $n+1$ точек; тем не менее они определяют такого же рода систему координат, как и раньше, и рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют установить, что относительными компонентами группы проективных преобразований являются независимые линейные комбинации ω_{ik} пфаффовых форм, определяемые равенствами

$$dA_i = \sum_{k=0}^{n} \omega_{ik} A_k \qquad (i=0, 1, \ldots, n). \tag{16.41}$$

Учитывая (16.39), мы получим из равенств (16.41)

$$\omega_{ik} = |A_0 A_1 \ldots A_{k-1} dA_i A_{k+1} \ldots A_n|; \tag{16.42}$$

дифференцируя теперь равенство (16.39), мы придем к соотношению

$$\sum_i \omega_{ii} = 0. \tag{16.43}$$

Итак, мы имеем $(n+1)^2-1 = n(n+2)$ независимых форм ω_{ij}; это число равно числу параметров, от которых зависят преобразования рассматриваемой группы. Они являются относительными компонентами группы проективных преобразований применительно к той специальной системе реперов, которую мы здесь рассмотрели.

3. Группа Кэли[1]). Так называется группа, образуемая всеми проективными преобразованиями n-мерного проективного пространства P_n, оставляющими инвариантной заданную квадратичную форму

$$\Phi \equiv \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} x_i x_k. \tag{16.44}$$

Мы предполагаем, что форма Φ — положительно определенная; это означает, что при подстановке в форму Φ (вещественных) координат любой точки x мы получим по-

---

[1]) Автор всюду ограничивается частным случаем пространства Кэли — Клейна (см., например, В. Ф. Каган [2]): он рассматривает лишь неевклидово пространство Римана, определяемое согласно общей схеме Кэли. — *Прим. ред.*

ложительное число. Так как x_i — однородные координаты, то мы можем домножить их на одно и то же число так, чтобы для каждой точки P_n выполнялось условие

$$(x, x) = \Phi(x) = 1. \tag{16.45}$$

Скалярное произведение двух точек определяется по формуле

$$(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}. \tag{16.46}$$

Условие $(x, y) = 0$ означает, что точки x и y сопряжены относительно мнимой поверхности второго порядка $\Phi = 0$.

За реперы пространства P_n примем симплексы, самосопряженные относительно поверхности $\Phi = 0$, т. е. совокупности $n+1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$, удовлетворяющих условиям

$$(A_i, A_i) = 1, \qquad (A_i, A_j) = 0. \tag{16.47}$$

Каждую точку x можно представить в виде

$$x = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i, \tag{16.48}$$

где числа x_i можно принять за координаты точки x относительно репера $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$.

Равенства (16.30) и здесь заменяются равенствами

$$dA_i = \sum_{k=0}^{n} \omega_{ik} A_k. \tag{16.49}$$

Из соотношений (16.47) следует, что

$$(dA_i, A_i) = 0, \qquad (dA_i, A_j) + (A_i, dA_j) = 0,$$

или [см. (16.49)]

$$\omega_{ii} = 0, \qquad \omega_{ik} = -\omega_{ki} = (A_k, dA_i). \tag{16.50}$$

$n(n+1)/2$ пфаффовых форм ω_{ik}, $i > k$, и представляют собой *относительные компоненты* группы Кэли применительно к выбранной системе реперов.

Если принять во внимание, что группа *конформных преобразований Мёбиуса* в множестве сфер n-мерного евклидова пространства E_n совпадает с группой Кэли в пространстве P_{n+1} (где, однако, инвариантная квадратичная форма не является положительно определенной)[1]), то мы придем к выводу, что *относительные компоненты группы Мёбиуса* определяются формулами, весьма близкими к формуле (16.50).

§ 17. Свойства групп Ли (продолжение)

1. Внешнее дифференцирование. В п. 2 § 1 мы определили *внешнее умножение* дифференциальных форм. Дифференциальная форма, в которой дифференциалы перемножаются по правилам внешнего умножения, называется *внешней дифференциальной формой.*

Пусть

$$\Omega_m = \sum A_{i_1 i_2 \ldots i_m} [dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_m}] \qquad (17.1)$$

есть внешняя дифференциальная форма m-го порядка.

Внешней производной формы Ω_m мы будем называть новую внешнюю дифференциальную форму $(m+1)$-го порядка[2])

$$\Omega'_m = \sum [dA_{i_1 i_2 \ldots i_m} dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_m}]. \qquad (17.2)$$

Примеры.

1. Внешняя производная пфаффовой формы

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$$

есть форма

$$\Omega'_1 = \sum_{k,i} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} [dx_k dx_i] = \sum_{i<k} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) [dx_k dx_i]. \qquad (17.3)$$

[1]) См., например, Розенфельд [1].— *Прим. ред.*

[2]) Если Ω есть скалярная функция (внешняя дифференциальная форма порядка 0), то ее внешняя производная совпадает с обычным дифференциалом Ω. Поэтому лучше было бы говорить не о внешней производной, а о *внешнем дифференциале* формы Ω. Неудачный термин «внешняя производная» и обозначение Ω' идут от Картана (который в конце жизни сам перешел к названию «внешний дифференциал» и обозначению $d\Omega$). — *Прим. ред.*

2. Если число переменных равно трем, то форма 2-го порядка

$$\Omega_2 = A[dy\,dz] + B[dz\,dx] + C[dx\,dy]$$

имеет внешнюю производную

$$\Omega_2' = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)[dx\,dy\,dz].$$

2. Свойства внешнего дифференцирования.

1. Внешняя производная произведения находится по правилу

$$[\Omega_m \Omega_p]' = [\Omega_m' \Omega_p] + (-1)^m [\Omega_m \Omega_p'], \qquad (17.4)$$

где m и p обозначают соответственно порядки дифференциальных форм Ω_m и Ω_p.

Доказательство. Если

$$\Omega_m = A_{i_1 i_2 \ldots i_m} [dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_m}],$$

$$\Omega_p = \sum B_{j_1 j_2 \ldots j_p} [dx_{j_1} dx_{j_2} \ldots dx_{j_p}],$$

то

$$[\Omega_m \Omega_p] = \sum A_{i_1 i_2 \ldots i_m} B_{j_1 j_2 \ldots j_p} [dx_{i_1} \ldots dx_{i_m} dx_{j_1}, \ldots dx_{j_p}].$$

Используя определение (17.2), получаем

$$[\Omega_m \Omega_p]' = \sum \left(\frac{\partial A_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x_h} B_{j_1 \ldots j_p} + A_{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial B_{j_1 \ldots j_p}}{\partial x_h} \right) \times$$
$$\times [dx_h dx_{i_1} \ldots dx_{i_m} dx_{j_1} \ldots dx_{j_p}] =$$

$$= \sum \frac{\partial A_{i_1 i_2 \ldots i_m}}{\partial x_h} B_{j_1 j_2 \ldots j_p} [dx_h dx_{i_1} \ldots dx_{i_m} dx_{j_1} \ldots dx_{j_p}] +$$

$$+ \sum A_{i_1 i_2 \ldots i_m} \frac{\partial B_{j_1 j_2 \ldots j_p}}{\partial x_h} (-1)^m [dx_{i_1} \ldots dx_{i_m} dx_h dx_{j_1} \ldots dx_{j_p}] =$$
$$= [\Omega_m' \Omega_p] + (-1)^m [\Omega_m \Omega_p'],$$

что и требовалось доказать.

Если, например, Ω_m есть функция $\Omega_0 = F$, то

$$[F\,\Omega_p]' = [dF\,\Omega_p] + F\Omega_p'. \qquad (17.5)$$

Правило внешнего дифференцирования произведения двух множителей легко распространяется на внешнее произведение нескольких множителей. В частности, если ω_i — пфаффовы формы (дифференциальные формы 1-го порядка), то нетрудно установить справедливость формулы

$$[\omega_1\omega_2 \ldots \omega_h]' = [\omega_1' \omega_2 \ldots \omega_h] - [\omega_1 \omega_2' \ldots \omega_h] + \\ + \ldots + (-1)^{h-1}[\omega_1\omega_2 \ldots \omega_h']. \qquad (17.6)$$

2. Другое свойство, которое понадобится нам в дальнейшем, состоит в следующем: *вторая внешняя производная любой формы равна нулю.*

Доказательство. Согласно (17.2), внешнюю производную формы (17.1) можно записать в виде

$$\Omega_m' = \sum \frac{\partial A_{i_1 i_2 \ldots i_m}}{\partial x_h} [dx_h dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}],$$

и, следовательно,

$$\Omega_m'' = \sum \frac{\partial^2 A_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x_h \partial x_k} [dx_k dx_h dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}] =$$

$$= \sum_{h<k} \left(\frac{\partial^2 A_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial^2 A_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x_k \partial x_h} \right) [dx_k dx_h dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}] = 0,$$

т. е.

$$\Omega_m'' = 0. \qquad (17.7)$$

3. **Внешняя производная пфаффовой формы.** В п. 2 § 1 мы определили внешнее произведение двух дифференциальных элементов dx и dy как «выражение $[dx\, dy]$, которое фигурирует под знаком двойного интеграла». Это означает, что $[dx\, dy]$ выражает элемент площади на плоскости. В любой системе координат внешнее произведение $[dx\, dy]$ равно значению элемента площади; например, в полярных координатах ρ, θ имеем $[dx\, dy] = \rho\, [d\rho\, d\theta]$.

Более общее выражение для элемента площади на плоскости мы получим, если будем исходить из двух перемещений точки (x, y) в направлениях, которые можно задать их проекциями на оси координат: (dx, dy) и $(\delta x, \delta y)$. Тогда элемент площади выразится определителем

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \\ x+\delta x & y+\delta y & 1 \end{vmatrix} = dx\, \delta y - \delta x\, dy. \qquad (17.8)$$

Если, например, в качестве таких перемещений взять перемещения в направлениях осей координат ($dx=dx$, $dy=0$) и ($\delta x=0$, $\delta y=dy$), то элемент площади (17.8) примет обычную форму $dx\,dy$. Взяв в качестве первого перемещения перемещение в направлении полярного радиуса ρ, а в качестве второго—перемещение в направлении, перпендикулярном радиусу, мы получим $dx=\cos\theta\,d\rho$, $dy=\sin\theta\,d\rho$, $\delta x=-\sin\theta\,\rho\,d\theta$, $\delta y=\cos\theta\,\rho\,d\theta$, и формула (17.8) даст $\rho\,d\rho\,d\theta$, т. е. значение элемента площади в полярных координатах.

Следовательно, как $[dx\,dy]$, так и формула (17.8) представляют собой общие выражения для элемента площади на плоскости. Мы можем, таким образом, считать, что

$$[dx\,dy]=dx\,\delta y-\delta x\,dy. \qquad (17.9)$$

Это выражение для $[dx\,dy]$ более удобно и *может быть принято в качестве определения внешнего произведения двух дифференциальных элементов*[1]).

Если ω_1 и ω_2 — две дифференциальные формы первого порядка,

$$\omega_1=\sum_1^n a_i\,dx_i, \qquad \omega_2=\sum_1^n b_j\,dx_j, \qquad (17.10)$$

то, согласно определению (§ 1, п. 2),

$$[\omega_1\,\omega_2]=\sum_{i,j} a_i b_j\,[dx_i\,dx_j], \qquad (17.11)$$

или, согласно (17.9),

$$[\omega_1\,\omega_2] \quad \sum_{i,j} a_i\,b_j\,[dx_i\,\delta x_j-\delta x_i\,dx_j)].$$

Таким образом, полагая $\omega_1(d)=\sum_1^n a_i\,dx_i$, $\omega_1(\delta)=\sum_1^n a_i\,\delta x_i$ и вводя аналогичные выражения для ω_2, получаем

$$[\omega_1\,\omega_2]=\omega_1(d)\,\omega_2(\delta)-\omega_1(\delta)\,\omega_2(d). \qquad (17.12)$$

Мы имеем, таким образом, для внешнего произведения двух линейных дифференциальных форм два эквивалентных выражения: (17.11) и (17.12).

---

1) См., например, Картан [3], Рашевский [1]. — *Прим. ред.*

Рассмотрим теперь внешнюю производную линейной формы

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} A_i\, dx_i. \tag{17.13}$$

По определению (17.2), имеем

$$\omega' = \sum_{i,h} \frac{\partial A_i}{\partial x_h} [dx_h\, dx_i] \tag{17.14}$$

или, учитывая (17.9),

$$\omega' = \sum_{i,h} \frac{\partial A_i}{\partial x_h} (dx_h \delta x_i - \delta x_h dx_i). \tag{17.15}$$

Примем теперь во внимание, что

$$d\omega(\delta) = \sum_i dA_i\, \delta x_i + \sum_i A_i\, d\delta x_i,$$

$$d\omega(d) = \sum_i \delta A_i\, dx_i + \sum_i A_i\, \delta dx_i;$$

учитывая, наконец, что $d\delta x_i = \delta dx_i$, получаем, согласно (17.15),

$$\omega' = d\omega(\delta) - \delta\omega(d). \tag{17.16}$$

Этим выражением для внешней производной пфаффовой формы ω мы будем в дальнейшем пользоваться.

4. Уравнения структуры Э. Картана. Пусть $\omega_i(a, da)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — относительные компоненты r-параметрической группы Ли (§ 16, п. 5). Мы знаем, что эти пфаффовы формы инвариантны относительно параметрической группы (§ 16, п. 6).

Внешняя производная формы $\omega_i(a, da)$ имеет вид

$$\omega_i'(a, da) = \sum_{h,k} A^i_{hk} [da_h\, da_k], \tag{17.17}$$

где коэффициенты A^i_{hk} — функции от a_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Так как формы ω_i независимы (§ 16, п.6), то da_h линейно выражаются через ω_i. Следовательно, формулу (17.17) можно записать в виде

$$\omega_i'(a,\ da)=\sum_{h,k}C^i_{hk}[\omega_h\,\omega_k]. \tag{17.18}$$

Так как $[\omega_h\,\omega_k]=-[\omega_k\,\omega_h]$, то, полагая $C^i_{hk}-C^i_{kh}=\bar{C}^i_{hk}$, мы можем переписать соотношения (17.18) в виде

$$\omega_i'=\sum_{h<k}\bar{C}^i_{hk}[\omega_h\,\omega_k], \tag{17.19}$$

где

$$\bar{C}^i_{hk}+\bar{C}^i_{kh}=0.$$

Докажем теперь, что *коэффициенты* $\bar{C}^i_{hk}$ *— постоянные числа.* Заметим прежде всего, что так как формы $\omega_i(a,\ da)$ инвариантны относительно параметрической группы, то, как это видно из формул (17.16), внешние производные $\omega_i'(a,\ da)$ также инвариантны относительно этой группы. Следовательно, если a и a' — две точки пространства параметров, то

$$\omega_i'(a, da)-\omega_i'(a', da')=\sum_{h,k}(\bar{C}^i_{hk}(a)-\bar{C}^i_{hk}(a'))[\omega_h\,\omega_k]=0.$$

Так как формы ω_j линейно независимы, то это равенство может иметь место в том и только в том случае, когда $\bar{C}^i_{hk}(a)=\bar{C}^i_{hk}(a')$. А поскольку параметрическая группа транзитивна, из этого равенства следует, что $\bar{C}^i_{hk}=\mathrm{const}$.

Уравнения (17.18) [или (17.19)] называются *уравнениями структуры Э. Картана*, или *уравнениями Морера—Картана.*

5. Примеры.

1. Линейная группа на прямой. Для группы, заданной формулой

$$x'=a_1x+a_2,\qquad (a_1>0), \tag{17.20}$$

мы нашли (§ 16, п. 5), что

$$\omega_1=\frac{da_1}{a_1},\quad \omega_2=\frac{da_2}{a_1}. \tag{17.21}$$

Внешние производные равны

$$\omega_1' = 0, \qquad \omega_2' = -\frac{1}{a_1^2}[da_1\, da_2].$$

Уравнения структуры имеют вид

$$\omega_1' = 0, \qquad \omega_2' = -[\omega_1 \omega_2]. \tag{17.22}$$

2. Группа движений. Используя обозначения § 16 (п. 7, пример 1), имеем

$$dA = \sum_{k=1}^{n} \omega_k I_k, \qquad dI_i = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} I_k. \tag{17.23}$$

В п. 2 мы доказали, что вторая внешняя производная всегда равна нулю. Первая внешняя производная от функции совпадает с обычным дифференциалом функции; следовательно, $(dA)' = 0$. Поэтому из равенств (17.23) следует, что

$$(dA)' = \sum_k (\omega_k' I_k - [\omega_k\, dI_k]) = 0,$$

так что

$$\sum_k \omega_k' I_k - \sum_{k,l} [\omega_k \omega_{kl}] I_l = 0.$$

Умножая все члены этого равенства на I_k и учитывая формулы (16.31) и (16.32), получаем

$$\omega_k' = \sum_{h=1}^{n} [\omega_h \omega_{hk}]. \tag{17.24}$$

Аналогичным образом из условия $(dI_i)' = 0$ вытекает, что

$$\sum_k (\omega_{ik}' I_k - [\omega_{ik}\, dI_k]) = 0$$

и, значит,

$$\sum_k \omega_{ik}' I_k - \sum_{h,l} [\omega_{ih} \omega_{hl}] I_l = 0.$$

Умножая снова на I_k и учитывая формулы (16.31) и (16.32), получаем

$$\omega_{ik}' = \sum_{h=1}^{n} [\omega_{ih} \omega_{hk}]. \tag{17.25}$$

Формулы (17.24) и (17.25) представляют собой *уравнения структуры группы движений n-мерного евклидова пространства.*

3. Группа проективных преобразований. В применении к равенствам (16.41) условие $(dA_i)' = 0$ дает

$$\sum_{k=0}^{n} (\omega'_{ik} A_k - [\omega_{ik} dA_k]) = 0 .$$

Учитывая (16.41), получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \omega'_{ik} A_k - \sum_{h,l} [\omega_{ih} \omega_{hl}] A_l = 0,$$

откуда, в силу (16.39),

$$\omega'_{ik} = \sum_{h=0}^{n} [\omega_{ih} \omega_{hk}]. \qquad (17.26)$$

Это — *уравнения структуры группы проективных преобразований.*

4. Группа Кэли. То же соотношение $(dA_i)' = 0$ в применении к равенствам (16.49) дает

$$\sum_{k=0}^{n} (\omega'_{ik} A_k - [\omega_{ik} dA_k]) = 0;$$

следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n} \omega'_{ik} A_k - \sum_{h,l} [\omega_{ih} \omega_{hl}] A_l = 0.$$

Умножив все члены этого равенства на A_k и приняв во внимание формулу (16.47), придем к *уравнениям структуры группы Кэли:*

$$\omega'_{ik} = \sum_{h=0}^{n} [\omega_{ih} \omega_{hk}]. \qquad (17.27)$$

6. Вполне интегрируемые системы Пфаффа. Пусть $\Omega_i(a, da)$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ — независимые пфаффовы формы от переменных $a_1, a_2, \ldots, a_r$, где $h < r$:

$$\Omega_i(a, da) = \sum_{1}^{r} A_{ik}(a) \, da_k.$$

Система дифференциальных уравнений

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ldots, \Omega_h = 0 \tag{17.28}$$

называется *вполне интегрируемой*, если через каждую точку $a(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ пространства проходит одно и только одно $(r-h)$-мерное многообразие такое, что для любого перемещения точки a в этом многообразии удовлетворяются уравнения (17.28). Эти многообразия называются *интегральными многообразиями системы* (17.28).

Пусть, наоборот, семейство $(r-h)$-мерных многообразий, заданное системой уравнений

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_r; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, h, \tag{17.29}$$

обладает тем свойством, что через каждую точку пространства проходит одно и только одно такое многообразие. Тогда это семейство можно рассматривать как семейство интегральных многообразий системы уравнений Пфаффа

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial F_i}{\partial a_l} da_l = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, h, \tag{17.30}$$

где вместо параметров ξ_i подставлены функции от a, которые получаются, если разрешить уравнения (17.29) относительно ξ_i.

Допустим, что пространство точек a есть пространство параметров заданной группы Ли (§ 16, п. 1). В п. 6 § 16 мы показали, что любая линейная дифференциальная форма $\Omega(a, da)$, инвариантная относительно параметрической группы, представляет собой линейную комбинацию относительных компонент $\omega_i(a, da)$. Докажем теперь следующую более общую теорему:

Если система

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ldots, \Omega_h = 0, \tag{17.31}$$

образованная h независимыми пфаффовыми формами $\Omega_i(a, da)$, вполне интегрируема и инвариантна относительно параметрической группы, то она эквивалентна другой системе, которая получается приравниванием нулю h некоторых линейных комбинаций (с постоянными коэффициентами) относительных компонент $\omega_i(a, da)$.

Другими словами, система (17.31) эквивалентна системе $\Omega_i^* = 0$ ($i=1, 2, \ldots, h$), где *каждая* форма Ω_i^* инвариантна относительно параметрической группы.

Доказательство. Пусть

$$F_i(a_1, a_2, \ldots, a_r; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h) = 0, \quad i=1, 2, \ldots, h, \tag{17.32}$$

— интегральные многообразия системы (17.31). Так как через каждую точку a пространства проходит одно и только одно интегральное многообразие, то система (17.32) может быть разрешена относительно параметров ξ_i. Уравнения интегральных многообразий примут тогда вид

$$\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \xi_i, \qquad i=1, 2, \ldots, h, \tag{17.33}$$

и система (17.31) будет эквивалентна системе

$$d\xi_1 = 0, \ d\xi_2 = 0, \ldots, \ d\xi_h = 0. \tag{17.34}$$

Из системы (17.33) можно выразить $a_1, \ a_2, \ldots, a_h$ как функции от ξ_i; полагая затем $a_{h+1} = \lambda_1, \ a_{h+2} = \lambda_2, \ldots, a_r = \lambda_{r-h}$, можно принять величины $\xi_1, \xi_2, \ \ldots, \xi_h, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-h}$ за новые параметры данной группы. Относительные компоненты примут тогда вид

$$\omega_i = \omega_i(\lambda, d\lambda; \ \xi, d\xi). \tag{17.35}$$

Пусть λ^0, ξ^0 — некоторая определенная точка пространства параметров. Мы можем составить h линейных комбинаций от $\omega_i(\lambda^0, d\lambda^0, \xi^0, \ d\xi^0)$ (с коэффициентами, зависящими от λ^0, ξ^0), которые не будут содержать дифференциалов $d\lambda_1^0$, $d\lambda_2^0, \ldots, d\lambda_{r-h}^0$; таким образом мы получим

$$\sum_i \alpha_i^k(\lambda^0, \xi^0)\, \omega_i(\lambda^0, d\lambda^0, \xi^0, d\xi^0) = \omega_k^*(\lambda^0, \xi^0, d\xi^0). \tag{17.36}$$

Рассмотрим теперь пфаффовы формы ($k=1, 2, \ldots, h$)

$$\bar{\omega}_k(\lambda, d\lambda; \xi, d\xi) = \sum_i \alpha_i^k(\lambda^0, \xi^0)\, \omega_i(\lambda, d\lambda; \xi, d\xi), \tag{17.37}$$

которые являются линейными комбинациями с *постоянными коэффициентами* исходных относительных компонент ω_i.

Система

$$\Omega_i(a^0, da^0) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, h), \tag{17.38}$$

или ей эквивалентная

$$d\xi_i^0=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, h), \tag{17.39}$$

в силу предположений инвариантности относительно параметрической группы, будет эквивалентна заданной системе

$$\Omega_i(a, da)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, h). \tag{17.40}$$

С другой стороны, система (17.39) эквивалентна, согласно (17.36) и (17.37), системе

$$\bar{\omega}_i(\lambda^0, d\lambda^0; \xi^0, d\xi^0)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, h), \tag{17.41}$$

которая, в силу инвариантности относительно параметрической группы, эквивалентна системе

$$\bar{\omega}_i(\lambda, d\lambda; \xi, d\xi)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, h). \tag{17.42}$$

Таким образом, система (17.40) эквивалентна системе (17.42), откуда, в силу (16.37), и вытекает справедливость нашей теоремы.

Замечание. Мы видели, что если система (17.31) вполне интегрируема, то она эквивалентна системе (17.34). Следовательно, каждая форма Ω_i может быть выражена как линейная комбинация от $d\xi_i$ (с коэффициентами, зависящими, вообще говоря, от ξ_i), так что $\Omega_i=\sum\limits_{k=1}^{k}\gamma_{ik}\, d\xi_k$. Поэтому выполнение равенств (17.34) влечет за собой обращение в нуль внешних производных

$$\Omega_i'=\sum_{k,s}\frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial\xi_s}[d\xi_s d\xi_k]. \tag{17.43}$$

Итак, мы приходим к следующему результату:

Для того, чтобы система уравнений

$$\Omega_i=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, h) \tag{17.44}$$

была вполне интегрируема, необходимо, чтобы выполнение равенств (17.44) *влекло за собой обращение в нуль всех внешних производных* Ω_i'.

Иными словами, *для того, чтобы система* (17.44) *была вполне интегрируема, необходимо, чтобы имели место следующие соотношения*:

$$[\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_h \Omega'_1]=0, \quad [\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_h \Omega'_2]=0, \ldots,$$
$$[\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_h \Omega'_h]=0. \qquad (17.45)$$

Эти условия являются и *достаточными* (теорема Фробениуса)[1], но нам они понадобятся только как необходимые.

Библиография. При изложении основ теории групп Ли в § 16 и § 17 мы следовали Э. Картану (см. его книгу [6]).

§ 18. Плотность и мера в однородных пространствах

1. Мера множества геометрических элементов. Пусть $E_n(x)$ есть n-мерное пространство точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Допустим, что в пространстве E_n задано поле «геометрических элементов» H. Например, если E_n — евклидово пространство, то геометрическими элементами H могут быть точки, прямые, плоскости, пары плоскостей, сферы, поверхности 2-го порядка и т. д.

Пусть G_r есть r-параметрическая группа Ли преобразований в пространстве E_n, которая преобразует элементы H *транзитивно*. Наша задача состоит в том, чтобы определить теперь меру множества элементов H, инвариантную относительно группы G_r.

Преобразования группы G_r, оставляющие инвариантным определенный элемент H, образуют подгруппу g_{r-h}, зависящую от некоторого числа параметров, которое мы обозначим через $r-h$. В *пространстве параметров* $E_r(a)$ данной группы G_r подгруппа g_{r-h} представится некоторым многообразием размерности $r-h$; через g_{r-h} мы будем обозначать как подгруппу, так и соответствующее $(r-h)$-мерное многообразие. Если T_s — преобразование из группы G_r, не принадлежащее подгруппе g_{r-h}, то множеству преобразований $T_s g_{r-h}$ в пространстве параметров отвечает многообразие sg_{r-h} — образ многообразия g_{r-h} при преобразовании s *параметрической группы* (§ 16, п. 2). Всевозможные многообразия sg_{r-h} (где s меняется) заполняют все

[1] См., например, П. К. Рашевский [1], § 26.—*Прим. ред.*

параметрическое пространство, причем два таких многообразия могут иметь общую точку только в том случае, если они совпадают. В самом деле, если многообразия sg_{r-h} и tg_{r-h} имеют общую точку a, то существуют две точки a_1 и a_2 многообразия g_{r-h} такие, что $a=sa_1=ta_2$; следовательно, $s=t(a_2a_1^{-1})$ и $sg_{r-h}=t(a_2a_1^{-1})g_{r-h}=tg_{r-h}$, т. е. многообразия sg_{r-h} и tg_{r-h} совпадают.

Из доказанного следует (§ 17, п. 6), что многообразия sg_{r-h} представляют собой интегральные многообразия некоторой вполне интегрируемой системы Пфаффа. Кроме того, если мы подвергнем многообразие sg_{r-h} преобразованию t параметрической группы, то получим многообразие $(ts)g_{r-h}$, т. е. другое многообразие того же семейства sg_{r-h}. Это означает, что совокупность всех многообразий sg_{r-h} инвариантна относительно параметрической группы.

Поэтому, согласно теореме п. 6 § 17, левые части уравнений системы Пфаффа, отвечающей многообразиям sg_{r-h}, являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами относительных компонент $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ группы G_r. Поскольку относительные компоненты определены с точностью до линейного преобразования с постоянными коэффициентами (§ 16, п. 6), можно предположить, что вполне интегрируемая система Пфаффа, интегральными многообразиями которой являются многообразия sg_{r-h}, определяется первыми h относительными компонентами, т. е. представляет собой систему

$$\omega_1=0,\ \omega_2=0, \ldots,\ \omega_h=0. \tag{18.1}$$

Пусть

$$\varphi_i(a_1, a_2, \ldots, a_r)=\xi_i \qquad (i=1, 2, \ldots, h) \tag{18.2}$$

— h независимых первых интегралов системы (18.1). Это означает, что каждой совокупности постоянных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$ соответствует интегральное многообразие sg_{r-h}. Будем рассматривать ξ_i как координаты точки ξ некоторого h-мерного пространства $E_h(\xi)$ (так называемого однородного пространства G_r/g_{r-h}). Каждой точке ξ этого пространства $E_h(\xi)$ будет тогда соответствовать интегральное многообразие (18.2) системы (18.1), т. е. многообразие sg_{r-h}, а следовательно, и геометрический элемент H (элемент T_sH, полученный из исходного элемента H преобразованием T_s).

Параметры $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$ могут, таким образом, служить *координатами* элементов H в пространстве $E_n(x)$.

Таким образом, задача определения меры множества элементов H, инвариантной относительно преобразований G_r, эквивалентна задаче определения меры множества точек ξ пространства $E_h(\xi)$, инвариантной относительно параметрической группы. Мы будем рассматривать только такие меры заданного множества X точек ξ, которые можно записать в виде интеграла

$$m(X) = \int\limits_X f(\xi)\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_h. \tag{18.3}$$

Так как система (18.1) эквивалентна системе

$$d\xi_1 = 0, \quad d\xi_2 = 0, \ldots, \quad d\xi_h = 0, \tag{18.4}$$

то каждый дифференциал $d\xi_i$ должен быть линейной комбинацией форм $\omega_i(a, da)$ с коэффициентами, зависящими, вообще говоря, от коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Таким образом,

$$d\xi_i = \sum_{l=1}^{h} \alpha_{il} \omega_l \tag{18.5}$$

и, следовательно,

$$[d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_h] = \Delta(a)[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h], \tag{18.6}$$

где $\Delta(a)$ есть определитель матрицы $\| \alpha_{il}(a) \|$. Интеграл (18.3) принимает вид

$$\int\limits_X f(\xi(a))\, \Delta(a)[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h], \tag{18.7}$$

где $\xi_i(a)$ — функции (18.2). Каждая форма $\omega_i(a, da)$ инвариантна относительно параметрической группы; следовательно, внешнее произведение $[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h]$ также инвариантно относительно этой группы. Если интеграл (18.7) остается инвариантным для всех множеств X, то и само произведение $f(\xi(a))\, \Delta(a)$ должно быть инвариантным. Таким образом, для любого преобразования $a \to a'$ параметрической группы должно выполняться равенство

$$f(\xi(a))\, \Delta(a) = f(\xi(a'))\, \Delta(a').$$

А так как параметрическая группа транзитивна, то это означает, что

$$f(\xi(a))\,\Delta(a) = \text{const}, \text{ или } \Delta(a) = \frac{\text{const}}{f(\xi)}. \qquad (18.8)$$

Таким образом, *для того, чтобы каждое множество элементов H обладало мерой, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Delta(a)$ зависела только от $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$. В этом случае мера однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяется интегралом*

$$\int\limits_X [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h]. \qquad (18.9)$$

Величину

$$dH = [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h] \qquad (18.10)$$

мы будем называть *плотностью* множества элементов H.

Этот результат принадлежит Чжень Шен-шеню [3][1]).

Замечание. Если $h=r$, т. е. если подгруппа g_{r-h} содержит лишь тождественное преобразование, то система (18.2) может быть разрешена относительно a_i, и условия (18.8) тогда удовлетворяются.

Итак, *если группа G_r просто транзитивна по отношению к элементам H, то всегда существует мера множества этих элементов, определяемая как интеграл от внешнего произведения $[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_r]$ относительных компонент группы G_r.*

Эта мера называется *кинематической мерой* в пространстве $E_n(x)$ с заданной в нем группой преобразований G_r.

2. Примеры.

1. Рассмотрим линейную группу

$$x' = a_1 x + a_2 \qquad (a > 0); \qquad (18.11)$$

за ее относительные компоненты можно принять любые две независимые линейные комбинации (с постоянными коэффициентами) форм (16.26)

$$\omega_1 = \frac{da_1}{a_1}, \qquad \omega_2 = \frac{da_2}{a_1}. \qquad (18.12)$$

[1]) Этот же круг вопросов был рассмотрен в диссертации 1938 г. И. Режека, опубликованной только в 1950 г., после трагической гибели автора (см. Режек [1]). — *Прим. ред.*

Если элементами H являются точки x, то подгруппа g_1, оставляющая некоторую определенную точку x_0 инвариантной, представима в пространстве параметров (a_1, a_2) прямой

$$a_2 + a_1 x_0 = x_0. \tag{18.13}$$

Многообразиями sg_1 будут прямые, параллельные прямой (18.13); система дифференциальных уравнений (18.1) принимает вид

$$da_2 + x_0\, da_1 = 0; \tag{18.14}$$

ее можно записать в форме

$$\overline{\omega}_1 = \omega_2 + x_0\, \omega_1 = 0. \tag{18.15}$$

Интегральными многообразиями (18.2) будут

$$\xi = a_2 + a_1 x_0, \tag{18.16}$$

откуда

$$d\xi = a_1 \omega_2 + a_1 x_0 \omega_1 = a_1 \overline{\omega}_1. \tag{18.17}$$

Определитель $\Delta(a)$ в этом случае сводится к числу a_1; но из равенства (18.16) следует, что a_1 нельзя записать в виде функции от одного только ξ.

Следовательно, *не существует меры множества точек прямой, инвариантной относительно линейной группы* (18.11).

Кинематическая мера определяется по формуле

$$dK = \frac{[da_1\, da_2]}{a_1^2}. \tag{18.18}$$

Если, например, рассмотреть множество «пар точек» ξ, ζ и принять ξ за образ начала координат при преобразовании линейной группы, а ζ — за образ единичной точки, то

$$\xi = a_2, \qquad \zeta = a_1 + a_2,$$

и, согласно формуле (18.18), мерой множества «пар точек» будет интеграл от формы

$$dK = \frac{[d\xi\, d\zeta]}{(\zeta - \xi)^2}. \tag{18.19}$$

2. Рассмотрим группу движений на плоскости:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + \alpha_1,\\
y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + \alpha_2.
\end{aligned}
\tag{18.20}
$$

Определим плотность множества прямых линий. Зафиксируем ось x-ов подвижной системы координат; движения, переводящие ось x-ов неподвижной системы координат именно в эту прямую, определятся формулами

$$
\varphi = \xi_1, \qquad \alpha_2 - \alpha_1 \operatorname{tg}\varphi = \xi_2, \tag{18.21}
$$

где ξ_i — параметры, определяющие многообразие семейства sg_{r-h}. В пространстве параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)$ эти многообразия представятся прямыми линиями, определяемыми формулами (18.21). Дифференциальные уравнения семейства (18.21) будут иметь вид

$$
d\varphi = 0, \qquad d\alpha_2 - \operatorname{tg}\varphi\, d\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = 0.
$$

В силу (16.36), эта система эквивалентна системе

$$
\omega_{12} = 0, \qquad \omega_2 = 0.
$$

Из равенств (18.21) и (16.36) вытекает, что

$$
d\xi_1 = \omega_{12}, \qquad d\xi_2 = \frac{\omega_2}{\cos\varphi} - \frac{\alpha_1\omega_{12}}{\cos^2\varphi},
$$

так что

$$
[d\xi_2\, d\xi_1] = [d\xi_2\, d\varphi] = \frac{[\omega_2\, \omega_{12}]}{\cos\varphi}.
$$

Определитель $\Delta(a)$ равен в этом случае $(\cos\varphi)^{-1}$. Так как $\varphi = \xi_1$, то мы приходим к следующему выводу: *плотность множества прямых на плоскости, инвариантная относительно группы движений, определяется по формуле*

$$
dG = \cos\varphi\, [d\xi_2\, d\varphi]. \tag{18.22}
$$

Если через p обозначить расстояние от начала O некоторой системы координат (x', y') до прямой G и принять во внимание геометрический смысл величины ξ_2, вытекающий из второй формулы (18.21), то можно написать

$$
p = \xi_2 \cos\varphi, \qquad \varphi = \theta - \frac{\pi}{2},
$$

где θ — угол, составленный осью x' и нормалью к G. Таким образом,

$$[d\xi_2\, d\varphi] = \frac{[dp\, d\varphi]}{\cos\varphi} = \frac{[dp\, d\theta]}{\cos\varphi}$$

и, следовательно, $dG = [dp\, d\theta]$ в соответствии с формулой (2.5).

3. **Условия существования меры.** Условие (18.8), вообще говоря, неудобно для приложений. Во многих случаях более удачной является другая форма, к выводу которой мы и перейдем.

Дифференциальная форма (18.10)

$$[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h] \tag{18.23}$$

инвариантна относительно параметрической группы. Тем не менее, ее не всегда можно принять за плотность, так как она зависит от r параметров a_i, и хотя каждая точка $a(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ определяет некоторый элемент H, одному и тому же элементу H отвечают все точки a соответствующего многообразия sg_{r-h} (см. п. 1). Для того, чтобы (18.23) можно было принять за плотность элементов H, значение этой формы должно оставаться одним и тем же для всех точек a определенного многообразия sg_{r-h}. Таким образом, необходимое и достаточное условие для того, чтобы (18.23) являлось плотностью множества элементов H, состоит в том, что интеграл

$$\int_{V_h} [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h], \tag{18.24}$$

взятый по h-мерному многообразию V_h пространства параметров, не меняется, если каждая точка V_h перемещается по тому многообразию sg_{r-h}, которое проходит через эту точку. Это равносильно требованию, чтобы интеграл (18.24) был равен нулю, если V_h — произвольное *замкнутое* h-мерное многообразие (заметим, что размерность многообразий sg_{r-h} равна $r-h$ и, следовательно, пересечение каждого такого многообразия с V_h представляет собой *точку*)[1]).

[1]) Предположим, что интеграл (18.24), взятый по любому замкнутому многообразию, равен нулю. Пусть V_h — произвольное незамкнутое многообразие с границей V_{h-1}, V_h' — многообразие, получен-

Обобщенная формула Стокса (см. Картан [7], стр. 40[1])) устанавливает, что интеграл от внешней производной дифференциальной формы h-го порядка, распространенный на $(h+1)$-мерную область V_{h+1}, равен интегралу от самой дифференциальной формы, взятому по границе $V_h = BV_{h+1}$ области V_{h+1}. Поэтому в рассматриваемом случае

$$\int\limits_{V_h} [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h] = \int\limits_{V_{h+1}} [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h]'. \qquad (18.25)$$

Многообразие $V_h = BV_{h+1}$ *замкнуто*. Правая часть равенства (18.25) будет поэтому равна нулю для любой области интегрирования V_{h+1}. Отсюда следует, что $[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h]' = 0$. Таким образом, мы приходим к следующему предложению:

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы интеграл (18.23) *можно было принять за меру множества элементов* H, *является справедливость равенства*

$$[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h]' = 0. \qquad (18.26)$$

Это условие можно выразить еще и с помощью структурных констант C_{ij}^k. Уравнения структуры (17.19) можно записать так:

$$\omega_i' = \sum_{l<k} C_{lk}^i [\omega_l \omega_k], \qquad C_{lk}^i + C_{kl}^i = 0, \qquad (18.27)$$

где C_{lk}^i $(i, l, k = 1, 2, \ldots, r)$ — структурные константы соответствующей группы Ли.

ное каким-то сдвигом каждой точки V_h по проходящему через эту точку многообразию sg_{r-h} (разумеется, речь идет о сдвигах, непрерывно изменяющихся от точки к точке V_h), U_h — многообразие, образованное одномерными «траекториями», описываемыми при сдвигах точками V_{h-1}. Многообразия V_h, U_h и V_h' образуют вместе замкнутое многообразие, и, следовательно, интеграл (18.24), взятый по этому многообразию, равен нулю. Отсюда и из того, что интеграл, распространенный на U_h, равен нулю [ибо U_h состоит из линий, принадлежащих интегральным многообразиям системы (18.1)], вытекает, что интеграл (18.24) не меняется при замене области интегрирования V_h на V_h'. — *Прим. ред.*

[1]) См. также Рашевский [1], стр. 60. — *Прим. ред.*

Так как система

$$\omega_1=0, \quad \omega_2=0, \ldots, \omega_h=0 \tag{18.28}$$

вполне интегрируема, то, согласно п. 6 § 17, имеют место равенства

$$C^i_{lk}=0 \quad \text{для} \quad \begin{cases} i=1, 2, \ldots, h, \\ l, k=h+1, \ldots, r. \end{cases} \tag{18.29}$$

Используя (17.6) и учитывая (18.27) и (18.29), получаем

$$[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h]' = \sum_{i=1}^{h} (-1)^{i-1} [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_{i-1} \omega'_i \omega_{i+1} \ldots \omega_h] =$$

$$= \sum_{i=1}^{h} (-1)^{i-1} [\omega_1 \ldots \omega_{i-1} \sum_{l=1}^{h} \sum_{k=h+1}^{r} C^i_{lk} [\omega_l \omega_k] \omega_{i+1} \ldots \omega_h] =$$

$$= (-1)^{h-1} \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=h+1}^{r} C^i_{ik} [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h \omega_k] =$$

$$= (-1)^{h-1} [\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h] \left[\sum_{k=h+1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{h} C^i_{ik} \right) \omega_k \right].$$

Так как формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ *независимы*, то это произведение может обращаться в нуль только в том случае, если

$$\sum_{i=1}^{h} C^i_{ik} = 0 \quad \text{для} \quad k=h+1, \ldots, r. \tag{18.30}$$

Мы получили, таким образом, *условия Чжень Шеньшеня* (см. Чжень Шен-шень [3], стр. 180): *для того, чтобы дифференциальную форму* (18.23) *можно было принять за плотность множества элементов H, необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства* (18.30).

Замечание. При $h=r$ система $r-h$ равенств (18.30) не содержит никаких соотношений. Таким образом, мы снова приходим к результату, полученному в § 1: *кинематическая мера группы всегда существует.*

§ 19. Группа унимодулярных центро-аффинных преобразований плоскости

1. Центро-аффинные преобразования. Рассмотрим трехпараметрическую группу

$$G_3 \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y, \\ y' = a_2 x + b_2 y, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1. \qquad (19.1)$$

Если в качестве фиксированного репера R_0 взять пару векторов $I_x^0(1, 0)$, $I_y^0(0, 1)$, то репер R_a будут составлять преобразованные векторы

$$I_x(a_1, a_2), \qquad I_y(b_1, b_2), \qquad (19.2)$$

удовлетворяющие условию[1])

$$I_x \times I_y = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 1. \qquad (19.3)$$

Чтобы найти относительные компоненты группы G_3, положим (см. § 16, п. 7)

$$dI_x = \omega_1 I_x + \omega_2 I_y, \qquad dI_y = \omega_3 I_x + \omega_4 I_y. \qquad (19.4)$$

Принимая во внимание условие (19.3) и соотношения

$$I_x \times I_x = I_y \times I_y = 0, \qquad dI_x \times I_y + I_x \times dI_y = 0, \quad (19.5)$$

найдем, что

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\omega_4 = dI_x \times I_y = b_2 da_1 - b_1 da_2, \\ \omega_2 &= I_x \times dI_x = a_1 da_2 - a_2 da_1, \\ \omega_3 &= dI_y \times I_y = b_2 db_1 - b_1 db_2. \end{aligned} \qquad (19.6)$$

Чтобы получить уравнения структуры, воспользуемся тем, что $(dI_x)' = 0$, $(dI_y)' = 0$ (см. § 17, п. 2); отсюда

$$(dI_x)' = (\omega_1 I_x + \omega_2 I_y)' = \omega_1' I_x - [\omega_1 \, dI_x] + \omega_2' I_y - [\omega_2 \, dI_y] =$$
$$= (\omega_1' - [\omega_2 \, \omega_3]) I_x + (\omega_2' - 2[\omega_1 \, \omega_2]) I_y = 0,$$
$$(dI_y)' = (\omega_3 I_x - \omega_1 I_y)' = \omega_3' I_x - [\omega_3 \, dI_x] - \omega_1' I_y + [\omega_1 \, dI_y] =$$
$$= (\omega_3' - 2[\omega_3 \, \omega_1]) I_x - (\omega_1' - [\omega_2 \, \omega_3]) I_y = 0.$$

---

[1]) Косой крест — знак так называемого *косого*, или *псевдоскалярного*, *произведения* векторов плоскости, равного ориентированной площади параллелограма, построенного на этих векторах. — *Прим. ред.*

Мы приходим, таким образом, к *уравнениям структуры*:

$$\omega_1' = [\omega_2 \omega_3], \quad \omega_2' = 2[\omega_1 \omega_2], \quad \omega_3' = 2[\omega_3 \omega_1]. \qquad (19.7)$$

С их помощью мы найдем плотности некоторых множеств геометрических элементов, инвариантные относительно группы G_3.

2. Плотность множества точек. Зафиксируем конец $A(a_1, a_2)$ вектора I_x и рассмотрим подгруппу g_1 группы G_3, оставляющую на месте точку A. Из условия инвариантности точки A получаем $dA = dI_x = 0$; используя равенства (19.4), выводим отсюда, что система (18.1) для многообразий, соответствующих подгруппе g_1 и ее образам sg_1, имеет вид

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0. \qquad (19.8)$$

В соответствии с п. 3 § 18, плотность множества точек равна $[\omega_1 \omega_2]$; при этом должно выполняться условие (18.26):

$$[\omega_1 \omega_2]' = 0.$$

Принимая во внимание уравнения (19.7), получим

$$[\omega_1 \omega_2]' = [\omega_1' \omega_2] - [\omega_1 \omega_2'] = 0. \qquad (19.9)$$

Используя (19.6), мы приходим к выводу:

Плотность множества точек, инвариантная относительно преобразований группы (19.1), *определяется формулой*

$$dA = [\omega_1 \omega_2] = [da_1 da_2]. \qquad (19.10)$$

Этот результат можно было предвидеть a priori, поскольку преобразование (19.1) сохраняет площади.

3. Плотность множества прямых. Зафиксируем прямую G, параллельную вектору I_x и проходящую через конец вектора I_y. Очевидно, что подгруппа g_1, которая оставляет эту прямую инвариантной, характеризуется такими условиями: дифференциал dI_x должен иметь вид $\omega_1 I_x$, а дифференциал dI_y — вид $\omega_3 I_x$. Принимая во внимание условия (19.4) и (19.6), мы приходим к выводу, что система (18.1) имеет вид

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0. \qquad (19.11)$$

Так как выполняются условия (19.9), то отсюда следует, что плотность множества прямых линий равна $[\omega_1 \omega_2]$. Дадим выражению $[\omega_1 \omega_2]$ геометрическую интерпретацию. Заметим для этого, что если расстояние от O до G есть p, то для того, чтобы площадь параллелограма OI_xI_y была равна 1 (19.3), необходимо, чтобы было $\overline{OA}=1/p$. Следовательно,

$$a_1 = \frac{1}{p}\sin\varphi, \qquad a_2 = -\frac{1}{p}\cos\varphi, \tag{19.12}$$

где φ — угол между нормалью к прямой G и фиксированной осью x-ов.

Из равенств (19.12) и (19.10) получаем

$$dG = [\omega_1 \omega_2] = \frac{[d\varphi\, dp]}{p^3}; \tag{19.13}$$

такова *плотность множества прямых, инвариантная относительно группы* (19.1).

Если, например, $p=p(\varphi)$ есть опорная функция выпуклой кривой K, содержащей точку O внутри, то *мера множества прямых, не пересекающих кривую K, равна*

$$\int\limits_{G\cdot K=0} dG = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_p^{\infty} \frac{dp}{p^3} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{p^2}. \tag{19.14}$$

Таким образом, последний интеграл есть инвариант кривой K относительно аффинных преобразований (19.1). Его можно назвать *центро-аффинной длиной* кривой K по отношению к внутренней точке O.

Задача. Для окружностей с центром в точке O центро-аффинная длина L_a равна π/R^2, и, следовательно, имеет место соотношение $L_aF=\pi^2$, связывающее длину L_a и площадь F ограниченного окружностью круга. То же соотношение имеет место, очевидно, и для всех эллипсов с центром в точке O. Доказать, что вообще, если точка O является центром симметрии кривой K, то

$$L_aF \leqslant \pi^2, \tag{19.15}$$

причем равенство имеет место только для эллипсов с центром в точке O (см. Сантало [17]).

4. Кинематическая плотность. Кинематическая плотность для группы (19.1) определяется формулой

$$dK_a = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]. \tag{19.16}$$

Геометрическое содержание этого равенства станет ясным, если положить

$$b_1 = \lambda \cos\theta, \qquad b_2 = \lambda \sin\theta, \tag{19.17}$$

где $\lambda = \overline{OB}$ (точка B — конец вектора I_y).

Из равенств (19.6) следует, что

$$\omega_3 = -\lambda^2 d\theta;$$

учитывая формулу (19.10), мы получаем, игнорируя, как всегда, знак плотности:

$$dK_a = \lambda^2 [dA\, d\theta]. \tag{19.18}$$

Заметим, что λ есть функция $A(a_1, a_2)$ и θ. В самом деле, из равенств (19.3) и (19.17) следует, что

$$\lambda (a_1 \sin\theta - a_2 \cos\theta) = 1. \tag{19.19}$$

5. Кинематическая плотность решеток. Группу (19.1) мы обозначаем через G_3. Для нахождения меры множества преобразований, оставляющих точку A внутри данной области K, воспользуемся равенством (19.18). Получим

$$\int\limits_{A \in K} dK_a = \infty,$$

так как из (19.19) следует, что $\int\limits_0^\pi \lambda^2 d\theta = \infty$ при фиксированной точке A.

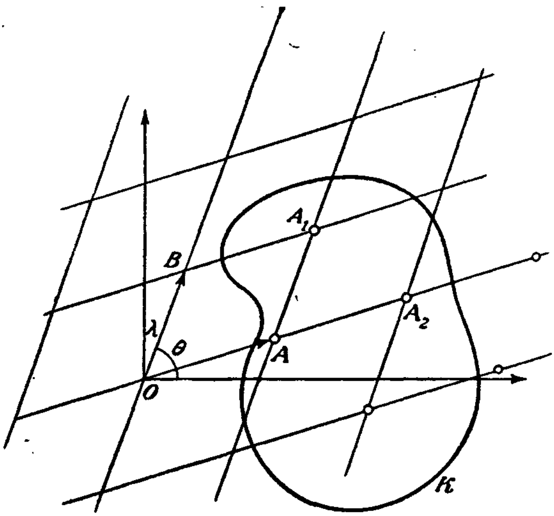
Для того, чтобы получить конечное значение для меры этого множества, поступим следующим образом.

Рассмотрим решетку $\mathfrak{L}$, состоящую из точек с целыми координатами. Каждое преобразование T_a группы G_3 преобразует решетку $\mathfrak{L}$ в другую решетку $T_a\mathfrak{L}$, определяемую векторами $I_x = OA$ и $I_y = OB$[1]. Пусть g — (дискретная)

---

[1]) Напомним, что I_x и I_y — векторы, в которые преобразование группы переводит векторы I_x^0 (1,0) и I_y^0 (0,1).

подгруппа группы G_3, состоящая из преобразований, переводящих решетку $\mathfrak{L}$ в себя.



Фиг. 8.

Если точка A фиксирована, то все различные решетки, удовлетворяющие условию (19.3), мы получим, заставив точку B пробегать отрезок $BA_1 = OA$[1]). Но[2])

$$\int\limits_{B \in \overline{BA_1}} \lambda^2 d\theta = 1. \tag{19.20}$$

---

[1]) Если $OB_2 = OB_1 + OA$, то парам векторов $I_x = \overrightarrow{OA}$, $I_y = \overrightarrow{OB_1}$ и $I_x = \overrightarrow{OA}$, $I_y = \overrightarrow{OB_2}$ отвечает *одна и та же* решетка; поэтому при фиксированном векторе $\overrightarrow{OA}$ разные решетки отвечают лишь векторам $\overrightarrow{OB}$, концы которых принадлежат отрезку длины OA. — *Прим. ред.*

[2]) Так как $\frac{1}{2}\lambda^2 d\theta$ есть площадь сектора радиуса λ с центральным углом $d\theta$, то $\int \lambda^2 d\theta$ равен двойной площади изображенного на фиг. 8 треугольника OBA_1. — *Прим. ред.*

Пусть задана область K площади F. Если вычислить интеграл $\int dK_a$, распространенный на однородное пространство G_3/g при условии, что $A \in K$, то, согласно (19.20), мы получим площадь F. При этом каждая решетка $T_a\mathfrak{L}$ будет учтена столько раз, сколько содержится внутри области K таких узлов решетки A_i, что отрезок OA_i не содержит никаких других точек решетки (*примитивная точка решетки*; на фиг. 8 точка A — примитивная, а точка A_2 — непримитивная). Если отрезок OA_i содержит еще какую-нибудь точку решетки, то решетка, порождаемая отрезком OA_i, не содержит всю решетку $T_a\mathfrak{L}$.

Таким образом, если $n \neq 0$ — число примитивных точек решетки $T_a\mathfrak{L}$, отличных от O и содержащихся внутри области K, то

$$\int\limits_{G_3/g} n\, dK_a = F. \tag{19.21}$$

Если вместо n рассматривать общее число N точек решетки, содержащихся в области K, то нужно поступить следующим образом. Непримитивные точки решетки $T_a\mathfrak{L}$ получаются в результате преобразования T_a из тех точек решетки $\mathfrak{L}$, координаты которых не являются взаимно простыми числами. Рассмотрим область $\frac{1}{\nu}K$, гомотетичную области K, с центром подобия O и коэффициентом подобия $1/\nu$. Каждой содержащейся в области K точке решетки $T_a\mathfrak{L}$, являющейся образом той точки решетки $\mathfrak{L}$, координаты которой имеют общий наибольший делитель ν, соответствует примитивная точка решетки $T_a\mathfrak{L}$, содержащаяся в $\frac{1}{\nu}K$. Следовательно, если n_ν есть число таких содержащихся в K точек решетки $T_a\mathfrak{L}$, которые являются образами точек решетки $\mathfrak{L}$, имеющих общий наибольший делитель ν, то из формулы (19.21) следует, что

$$\int\limits_{G_3/g} n_\nu\, dK_a = \frac{1}{\nu^2} F, \tag{19.22}$$

так как площадь области $\frac{1}{\nu}K$ равна $\frac{1}{\nu^2}F$.

Полагая в (19.22) $\nu=1, 2, 3, \ldots$, суммируя почленно эти равенства и учитывая, что

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

получаем

$$\int\limits_{G_3/g} N dK_a = \frac{\pi^2}{6} F, \tag{19.23}$$

где N — общее число точек решетки $T_a\mathfrak{L}$, содержащихся в области K.

Рассмотрим решетку $\frac{1}{\mu}\mathfrak{L}$, состоящую из точек, координаты которых кратны $1/\mu$, и обозначим через $N(\mu)$ число точек решетки $T_a\left(\frac{1}{\mu}\mathfrak{L}\right)$, содержащихся в K. Используя формулу (19.23), мы получаем

$$\int\limits_{G_3/g} N(\mu)\, dK_a = \frac{\pi^2}{6} F \mu^2. \tag{19.24}$$

Если $\mu \to \infty$, то, по определению площади, $\lim \frac{N(\mu)}{\mu^2} = F$ для любого фиксированного T_a и решеток $T_a\left(\frac{1}{\mu}\mathfrak{L}\right)$. Таким образом, мы имеем

$$\int\limits_{G_3/g} dK_a = \frac{\pi^2}{6}; \tag{19.25}$$

эта формула определяет общую меру всех различных решеток $T_a(\mathfrak{L})$, т. е. полный объем однородного пространства G_3/g.

Из формул (19.21), (19.24) и (19.25) можно сделать следующие выводы. *Для множества всех решеток $T_a\mathfrak{L}$, $T_a \in G_3$, среднее значение числа примитивных точек решетки, содержащихся в фиксированной области K площади F, равно*

$$\bar{n} = \frac{6}{\pi^2} F, \tag{19.26}$$

а среднее значение общего числа точек решетки, содержащихся в K, равно

$$\overline{N} = F. \tag{19.27}$$

6. Теорема Минковского — Главки. Пусть K — «звездная область» относительно начала O, т. е. область, содержащая точку O и такая, что каждый луч, выходящий из этой точки, пересекает границу этой области только в одной точке. Тогда, если она содержит точку решетки $T_a\mathfrak{L}$, то она содержит и примитивную точку этой же решетки.

Допустим, что $F < \pi^2/6$. Тогда, в силу формулы (19.26), $\overline{n} < 1$ и, следовательно, существуют такие решетки $T_a\mathfrak{L}$, ни один узел которых не содержится в K.

Таким образом, доказана следующая теорема. *Если область K — звездная относительно точки O, а ее площадь $< \pi^2/6$, то существует решетка $T_a\mathfrak{L}$ (получаемая из решетки $\mathfrak{L}$ унимодулярным однородным аффинным преобразованием) такая, что K не содержит ни одного узла решетки, отличного от начала координат.*

Эта теорема была сформулирована Минковским и впервые доказана Главкой [1]. Приведенное выше доказательство, которое можно также перенести на общий случай n-мерного пространства, основано на идеях Зигеля [1] и А. Вейля [2].

§ 20. Унимодулярная аффинная группа на плоскости

1. Унимодулярная аффинная группа. Унимодулярная аффинная группа на плоскости определяется формулами

$$G_5 \begin{cases} x' = a_1 + b_1 x + c_1 y, \\ y' = a_2 + b_2 x + c_2 y, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1. \tag{20.1}$$

Если репер, составленный векторами AI_x, AI_y, удовлетворяющими условию

$$I_x \times I_y = 1, \tag{20.2}$$

получен преобразованием группы G_5 из репера OI_x^0, OI_y^0, то относительные компоненты группы G_5 определятся условиями (см. § 16, п. 7):

$$\begin{aligned} dA &= \omega_1 I_x + \omega_2 I_y, \\ dI_x &= \omega_{11} I_x + \omega_{12} I_y, \\ dI_y &= \omega_{21} I_x + \omega_{22} I_y. \end{aligned} \tag{20.3}$$

Принимая во внимание, что компоненты векторов I_x и I_y равны

$$I_x(b_1, b_2), \qquad I_y(c_1, c_2),$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dA \times I_y = c_2 da_1 - c_1 da_2, \\ \omega_2 &= I_x \times dA = b_1 da_2 - b_2 da_1, \\ \omega_{11} &= -\omega_{22} = dI_x \times I_y = c_2 db_1 - c_1 db_2, \\ \omega_{12} &= I_x \times dI_x = b_1 db_2 - b_2 db_1, \\ \omega_{21} &= dI_y \times I_y = c_2 dc_1 - c_1 dc_2. \end{aligned} \tag{20.4}$$

С помощью общего метода, указанного в п. 5 § 17, мы получим уравнения структуры

$$\begin{aligned} \omega_1' &= [\omega_1 \omega_{11}] + [\omega_2 \omega_{21}], \\ \omega_2' &= [\omega_1 \omega_{12}] + [\omega_2 \omega_{22}], \\ \omega_{11}' &= [\omega_{12} \omega_{21}] = -\omega_{22}', \\ \omega_{12}' &= [\omega_{11} \omega_{12}] + [\omega_{12} \omega_{22}], \\ \omega_{21}' &= [\omega_{21} \omega_{11}] + [\omega_{22} \omega_{21}]. \end{aligned} \tag{20.5}$$

2. Плотность множества точек. Считая точку A фиксированной, мы находим из формул (20.3)

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0. \tag{20.6}$$

Заметим, что $[\omega_1 \omega_2]' = 0$. Следовательно, плотность множества точек определится формулой

$$dA = [\omega_1 \omega_2] = [da_1 da_2]. \tag{20.7}$$

Этот результат очевиден, так как преобразования группы G_5 сохраняют площади.

3. Плотность множества прямых. Считая прямую AI_x фиксированной, мы получаем из формул (20.3)

$$\omega_2=0, \qquad \omega_{12}=0. \tag{20.8}$$

Выясним, справедливо ли равенство $[\omega_2\omega_{12}]'=0$. Имеем

$$[\omega_2\,\omega_{12}]' = [\omega_2'\,\omega_{12}] - [\omega_2\,\omega_{12}'] = [\omega_2\,\omega_{22}\,\omega_{12}],$$

$$-[\omega_2\,\omega_{11}\,\omega_{12}] - [\omega_2\,\omega_{12}\,\omega_{22}] = 3[\omega_2\,\omega_{22}\,\omega_{12}] \neq 0.$$

Таким образом, *не существует меры множества прямых плоскости, инвариантной относительно преобразований аффинной унимодулярной группы.*

4. Множества пар «точка+прямая». Рассмотрим в качестве геометрического элемента пару, состоящую из точки и прямой. Считая, что наша пара состоит из точки A и прямой, проходящей через конец вектора I_y параллельно вектору I_x, находим, что система дифференциальных уравнений, соответствующая этому элементу, имеет вид

$$\omega_1=0, \quad \omega_2=0, \quad \omega_{12}=0, \quad \omega_{22}=0.$$

Для того, чтобы произведение $[\omega_1\,\omega_2\,\omega_{12}\,\omega_{22}]$ выражало плотность множества наших элементов, должно удовлетворяться условие (18.26). Используя формулы (20.5), легко убедиться, что соотношение $[\omega_1\,\omega_2\,\omega_{12}\,\omega_{22}]'=0$ действительно имеет место. Следовательно, *мера множества пар «точка+ +прямая», инвариантная относительно унимодулярной аффинной группы, существует и выражается интегралом от формы* $[\omega_1\,\omega_2\,\omega_{12}\,\omega_{22}]$, *если фиксированная точка есть* $A(a_1, a_2)$, *а прямая параллельна вектору* $I_x(b_1, b_2)$ *и проходит через точку* $C(a_1+c_1,\ a_2+c_2)$.

Условимся обозначать точки через $P(x,y)$, а прямые (см. §2) — через $G(p, \varphi)$. Геометрическое толкование указанной выше плотности дает следующая формула:

$$d(P+G) = \frac{1}{\delta^3}[dP\,dp\,d\varphi], \tag{20.9}$$

где $dP=[dx\,dy]$ — плотность множества точек P, а δ — расстояние от P до прямой G. Этот результат нетрудно вывести из формул (20.4).

5. **Плотность множества парабол.** Группа (20.1) преобразует параболы транзитивно. Выясним, существует ли для множества парабол мера, инвариантная относительно этой группы[1]).

Фиксируем параболу

$$A + xI_x + x^2 I_y, \tag{20.10}$$

т. е. параболу, уравнение которой в системе координат (A, I_x, I_y) имеет вид $y = x^2$.

При переходе от репера R_a к новому реперу $R_{a+da}(A + dA, I_x + dI_x, I_y + dI_y)$ парабола (20.10) перейдет в параболу

$$\begin{aligned} A + dA + x(I_x + dI_x) + x^2(I_y + dI_y) = \\ = A + (\omega_1 + (1 + \omega_{11})x + x^2\omega_{21}) I_x + \\ + (\omega_2 + x\omega_{12} + (1 + \omega_{22})x^2) I_y, \end{aligned} \tag{20.11}$$

которая совпадает с параболой (20.10) в том и только в том случае, когда

$$\omega_2 + x\omega_{12} + (1 + \omega_{22})x^2 = (\omega_1 + (1 + \omega_{11})x + x^2\omega_{21})^2.$$

Рассматривая только члены первого порядка, мы из этого условия получаем

$$\omega_2 = 0, \qquad \omega_{12} - 2\omega_1 = 0, \qquad \omega_{11} = 0, \qquad \omega_{21} = 0. \tag{20.12}$$

Такой вид принимает система (18.1) в нашем частном случае. Используя уравнения структуры (20.5), легко показать, что

$$[\omega_2(\omega_{12} - 2\omega_1)\omega_{11}\omega_{21}]' = 0$$

и, следовательно, плотность множества парабол существует. Параметрические уравнения параболы (20.10) относительно неподвижной системы координат (A, I_x^0, I_y^0) имеют вид

$$\begin{aligned} X &= a_1 + b_1 x + c_1 x^2, \\ Y &= a_2 + b_2 x + c_2 x^2, \end{aligned} \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1. \tag{20.13}$$

Таким образом, *плотность множества парабол* (20.13) *задается формулой*

$$d\mathfrak{P} = [\omega_2(\omega_{12} - 2\omega_1)\omega_{11}\omega_{21}], \tag{20.14}$$

в которой формы ω *определяются равенствами* (20.4).

[1]) См. Чжень Шен-шень [2].

Для того, чтобы получить метрическое толкование плотности (20.14), поступим следующим образом.

Пусть $A(a_1, a_2)$ — вершина параболы, F — ее фокус, φ — угол между осью параболы и осью X. Положим $FA=\xi$. Приняв ось AF за ось y, а нормаль Ax к ней за ось x, получим уравнение параболы в виде $y=x^2/4\xi$. Равенства (20.13) примут вид

$$X = a_1 + x\sin\varphi + \frac{x^2}{4\xi}\cos\varphi,$$

$$Y = a_2 - x\cos\varphi + \frac{x^2}{4\xi}\sin\varphi.$$

Чтобы удовлетворить условию $\begin{vmatrix} b_1 & c_2 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1$, произведем замену параметра $x \to \sqrt[3]{4\xi}\,x$. Мы получим

$$X = a_1 + \sqrt[3]{4\xi}\,\sin\varphi\, x + \frac{\cos\varphi\, x^2}{\sqrt[3]{4\xi}},$$

$$Y = a_2 - \sqrt[3]{4\xi}\,\cos\varphi\, x + \frac{\sin\varphi}{\sqrt[3]{4\xi}}\,x^2. \tag{20.15}$$

Отсюда следует, что

$$a_1 = a_1, \qquad b_1 = \sqrt[3]{4\xi}\,\sin\varphi, \qquad c_1 = \frac{\cos\varphi}{\sqrt[3]{4\xi}},$$

$$a_2 = a_2, \qquad b_2 = -\sqrt[3]{4\xi}\,\cos\varphi, \qquad c_2 = \frac{\sin\varphi}{\sqrt[3]{4\xi}}.$$

Подставив эти значения в (20.4), получим

$$\omega_2 = \sqrt[3]{4\xi}\,\sin\varphi\, da_2 + \sqrt[3]{4\xi}\,\cos\varphi\, da_1,$$

$$\omega_{12} - 2\omega_1 = (4\xi)^{2/3} d\varphi - 2\frac{\sin\varphi}{\sqrt[3]{4\xi}}\,da_1 + 2\frac{\cos\varphi}{\sqrt[3]{4\xi}}\,da_2,$$

$$\omega_{11} = \frac{d\xi}{3\xi},$$

$$\omega_{21} = -\frac{d\varphi}{(4\xi)^{2/3}}$$

и, значит,

$$d\mathfrak{P} = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}\,\xi^{5/3}}\,[da_1\,da_2\,d\varphi\,d\xi]. \qquad (20.16)$$

Если вместо параметров φ, ξ мы введем координаты фокуса α, β, то после несложных преобразований получим

$$d\mathfrak{P} = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}\,\xi^{8/3}}\,[da_1\,da_2\,d\alpha\,d\beta]. \qquad (20.17)$$

Для параболы, заданной общим уравнением

$$X^2 + 2BXY + B^2Y^2 + PX + QY' + R = 0, \qquad (20.18)$$

несложные вычисления приводят к формуле

$$d\mathfrak{P} = \frac{[dB\,dP\,dQ\,dR]}{3(Q-BP)^{8/3}}. \qquad (20.19)$$

6. Кинематическая плотность. Согласно замечанию, сделанному в п. 1 § 18, кинематическая плотность группы (20.1) определяется формулой

$$dK = [\omega_1\,\omega_2\,\omega_{11}\,\omega_{12}\,\omega_{21}] = [(c_1dc_2 - c_2dc_1)\,da_1\,da_2\,db_1\,db_2]. \qquad (20.20)$$

Если положить $AC = |I_y| = \lambda$ и обозначить через θ угол между векторами $AB = I_x$ и $AC = I_y$, то (20.20) можно записать в виде

$$dK = \lambda^2\,[dA\,dB\,d\theta], \qquad (20.21)$$

где $dA = [da_1\,da_2]$, $dB = [db_1\,db_2]$ — элементы площади, т. е. плотности точек A и B.

§ 21. Проективная группа

1. Проективная группа. В § 16 (п. 7, пример 2) мы определили n-мерное проективное пространство P_n и группу проективных пребразований этого пространства. Мы показали, что относительными компонентами группы проективных преобразований

$$x_i' = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}x_k, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad \det\|a_{ik}\| = 1 \qquad (21.1)$$

служат выражения (16.42):

$$\omega_{ik} = |A_0 A_1 \ldots A_{k-1} dA_i A_{k+1} \ldots A_n|; \tag{21.2}$$

эти компоненты связаны единственным условием

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_{ii} = 0. \tag{21.3}$$

Уравнения структуры (17.26) имеют вид

$$\omega'_{ik} = \sum_{l=0}^{n} [\omega_{il} \omega_{lk}]. \tag{21.4}$$

2. Условие, при котором произведение относительных компонент представляет плотность. Мы знаем, что необходимым и достаточным условием того, чтобы внешнее произведение

$$\Omega = [\omega_{i_1 j_1} \omega_{i_2 j_2} \ldots \omega_{i_h j_h}] \tag{21.5}$$

представляло плотность геометрических элементов, определяемых вполне интегрируемой системой Пфаффа

$$\omega_{i_1 j_1} = 0; \quad \omega_{i_2 j_2} = 0, \ldots, \quad \omega_{i_h j_h} = 0, \tag{21.6}$$

является равенство (18.26):

$$\Omega' = [\omega_{i_1 j_1} \omega_{i_2 j_2} \ldots \omega_{i_h j_h}]' = 0. \tag{21.7}$$

Покажем, какой вид можно придать этому условию в случае проективной группы. Так как система (21.6) вполне интегрируема и $\omega'_{i_s j_s} = \sum\limits_{l} [\omega_{i_s l} \omega_{l j_s}]$, то из последней теоремы § 17 вытекает, что для каждой пары значений i_s, j_s из фигурирующих в (21.6) и каждого l, $0 \leqslant l \leqslant n$, хотя бы одна из форм $\omega_{i_s l} \omega_{l j_s}$ должна принадлежать системе форм (21.6).

Следовательно,

$$\Omega' = \sum_{s=1}^{h} (-1)^{s-1} [\omega_{i_1 j_1} \ldots \omega_{i_{s-1} j_{s-1}} \sum_{l=0}^{n} [\omega_{i_s l} \omega_{l j_s}] \omega_{i_{s+1} j_{s+1}} \ldots \omega_{i_h j_h}] =$$

$$= (-1)^h \left[\Omega \sum_{=1}^{h} (\omega_{j_s j_s} - \omega_{i_s i_s})\right] = 0.$$

Таким образом, *для того, чтобы геометрические элементы, определяемые системой* (21.6), *имели плотность, инвариантную относительно проективной группы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\left[\Omega \sum_{s=1}^{h} (\omega_{j_s j_s} - \omega_{i_s i_s})\right] = 0. \qquad (21.8)$$

В этом случае плотность задается внешним произведением вида (21.5).

Пример. Рассмотрим линейное подпространство $S_k (k < n)$, определяемое точками $A_0, A_1, \ldots, A_k$, т. е. подпространство, заданное параметрическими уравнениями

$$x_i = \lambda_0 a_{0i} + \lambda_1 a_{1i} + \ldots + \lambda_k a_{ki}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (21.9)$$

Если это подпространство S_k фиксировано, то из уравнения (16.41) следует, что

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant k, \\ k+1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases} \qquad (21.10)$$

и, следовательно, условие (21.8) принимает вид

$$\left[\prod_{\substack{l=0,\ldots,k \\ j=k+1,\ldots,n}} \omega_{ij} \left(\sum_{l=k+1}^{n} \omega_{ll} - \sum_{l=0}^{k} \omega_{ll} \right)\right] = 0.$$

В силу соотношения (21.3), это условие эквивалентно соотношению

$$-2\left[\prod_{\substack{i=0,\ldots,k \\ j=k+1,\ldots,n}} \omega_{ij} \sum_{l=0}^{k} \omega_{ll}\right] = 0. \qquad (21.11)$$

Так как относительные компоненты подчинены единственному условию (21.3), то мы приходим к выводу:

Линейные подпространства не имеют меры, инвариантной относительно проективной группы.

3. Системы линейных подпространств. Пусть элементами H будут системы $S_{k_1} + S_{k_2} + \ldots + S_{k_s}$ непересекающихся линейных подпространств, удовлетворяющие условию

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_s + s - 1 \leqslant n. \qquad (21.12)$$

В качестве подпространства S_{k_1} выберем линейное подпространство, определяемое точками

$$A_0, A_1, \ldots, A_{k_1},$$

а в качестве подпространства S_{k_2} — подпространство, определяемое точками

$$A_{k_1+1}, A_{k_1+2}, \ldots, A_{k_1+k_2+1},$$

и т. д. Тогда система Пфаффа, определяющая элементы H, будет состоять из системы, аналогичной системе (21.10) для различных подпространств S_{k_i}. Таким образом,

$$\omega_{ij}=0$$

для всех значений i, j, для которых

$$\begin{gathered}0 \leqslant i \leqslant k_1, \qquad k_1+1 \leqslant j \leqslant n \\ k_1+1 \leqslant i \leqslant k_1+k_2+1,\ 0 \leqslant j \leqslant k_1,\ k_1+k_2+2 \leqslant j \leqslant n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (21.13) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1+\ldots+k_{s-1}+s-1 \leqslant i \leqslant k_1+\ldots+k_s+s-1, \\ 0 \leqslant j \leqslant k_1+\ldots+k_{s-1}+s-2,\ k_1+\ldots+k_s+s \leqslant j \leqslant n.\end{gathered}$$

Для того, чтобы внешнее произведение $\left[\prod \omega_{ij}\right]$ всех этих форм ω_{ij} было плотностью множества элементов $H(S_{k_1} + S_{k_2} + \ldots + S_{k_s})$, должно иметь место, согласно условиям (21.8) и (21.11), равенство

$$\left[\prod \omega_{ij} \sum_{i=0}^{k_1+k_2+\ldots+k_s+s-1} \omega_{ii}\right]=0. \qquad (21.14)$$

Это условие может быть выполнено только в том случае, если $k_1+k_2+\ldots+k_s+s-1=n$. Итак:

Для того, чтобы множество элементов H $(S_{k_1} + S_{k_2} + \ldots + S_{k_s})$, состоящих из линейных подпространств S_{k_i} (непересекающихся и, следовательно, удов-

летворяющих условию (21.12)), *имело меру, инвариантную относительно преобразований проективной группы, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$k_1+k_2+\ldots+k_s+s-1=n. \qquad (21.15)$$

В этом случае инвариантная плотность определяется внешним произведением $\left[\prod \omega_{ij}\right]$, *где* ω_{ij} — *те из форм* (21.2), *которые удовлетворяют условиям* (21.13).

4. Частные случаи. На проективной плоскости ($n=2$) элементами с инвариантной мерой являются:

а) Тройки точек $H=P_1+P_2+P_3$. Если точки заданы своими однородными координатами P_i (a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}), нормированными условием $\det \| a_{ik} \| = 1$, то плотность определится по формуле

$$dH=[\omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{10}\,\omega_{12}\,\omega_{20}\,\omega_{21}],$$

где значения форм ω_{ij} даются равенствами (21.2) при $n=$ $=2$.

б) Элементы $H=$ прямая $+$ точка $=G+P$. Если прямая линия задана уравнением $x_i=\lambda_0 a_{0i}+\lambda_1 a_{1i}$ ($i=0,1,2$), а точка P — однородными координатами a_{20}, a_{21}, a_{22}, нормированными условием $\det \| a_{ik} \| = 1$, то плотность определится формулой

$$dH=[\omega_{02}\,\omega_{12}\,\omega_{20}\,\omega_{21}].$$

5. Кинематическая плотность. Как известно (§ 18, п. 1), кинематической плотностью для проективной группы является внешнее произведение всех ω_{ik}, определяемых формулами (21.2), кроме ω_{nn} (в силу условия (21.3)).

Библиография. Вопросы интегральной геометрии проектив ной группы рассмотрены в работах Варга [2] и Сантало [20].

§ 22. Обобщенная формула Пуанкаре на плоскости

Пусть G_r есть r-параметрическая группа преобразований T_a плоскости. Положим, что $r \geqslant 2$ и что группа G_r преобразует транзитивно касательные элементы плоскости $(r-2)$-го порядка (т. е. x, y, $y'=dy/dx, \ldots, y^{r-2}=$ $=d^{r-2}y/dx^{r-2}$). А тогда, как известно, каждая плоская кривая обладает натуральным параметром, инвариантным относительно группы G_r[1]). Если, например, G_r — группа движений, то натуральным параметром служит обычная длина дуги; если G_r — аффинная группа, таким параметром будет аффинная длина. В общем случае мы будем называть этот натуральный параметр «G_r-длиной дуги».

Пусть K_0 — какая-то фиксированная кривая, заданная уравнениями в параметрической форме

$$x_1 = \varphi_1(s), \qquad x_2 = \varphi_2(s), \tag{22.1}$$

где параметр s есть G_r-длина дуги K_0.

Пусть K_1 — другая кривая. Рассмотрим множество кривых T_aK_1, полученных из кривой K_1 преобразованиями группы G_r. Если $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — параметры группы G_r, то параметрические уравнения кривой T_aK_1 будут иметь вид

$$x_1 = \psi_1(\sigma;\ a_1,\ a_2, \ldots, a_r), \qquad x_2 = \psi_2(\sigma;\ a_1,\ a_2, \ldots, a_r), \tag{22.2}$$

где через σ обозначена G_r-длина дуги K_1.

Точки пересечения кривых K_0 и T_aK_1 определятся из системы уравнений

$$\varphi_1(s) = \psi_1(\sigma;\ a_1,\ a_2, \ldots, a_r),\ \varphi_2(s) = \psi_2(\sigma;\ a_1, a_2, \ldots, a_r) \tag{22.3}$$

с неизвестными s, σ.

С другой стороны, пусть

$$dK_1 = f_1(a_1,\ a_2, \ldots, a_r)\,[da_1\, da_2 \ldots da_r] \tag{22.4}$$

— *кинематическая плотность* для группы G_r.

С помощью уравнений (22.3) можно два из параметров a_j заменить параметрами s и σ. Можно, например, считать, что

$$a_1 = a_1(s, \sigma, a_3, a_4, \ldots, a_r), \qquad a_2 = a_2(s, \sigma, a_3, \ldots, a_r), \tag{22.5}$$

и тогда плотность dK_1 примет вид

$$dK_1 = f_1(s, \sigma, a_3,\ a_4, \ldots, a_r)\,[ds\, d\sigma\, da_3\, da_4 \ldots da_r], \tag{22.6}$$

---

[1]) См., например, Ковалевский [1].

Преобразования группы G_r оставляют плотность dK_1, а также длины дуг ds и $d\sigma$ инвариантными; поэтому

$$\begin{aligned} f_1(s, \sigma, a_3, \ldots, a_r)\,[ds\, d\sigma\, da_3 \ldots da_r] = \\ = f_1(s', \sigma', a_3', \ldots, a_r')\,[ds\, d\sigma\, da_3' \ldots da_r']. \end{aligned} \tag{22.7}$$

Проинтегрировав это равенство по всем значениям a_3, $a_4, \ldots, a_r$ (или $a_3', a_4', \ldots, a_r'$), мы получим слева и справа бесконечность или соотношение

$$M(s, \sigma)\,[ds\, d\sigma] = M(s', \sigma')\,[ds\, d\sigma], \tag{22.8}$$

где

$$M(s,\sigma) = \int f_1(s,\sigma,a_3,\ a_4, \ldots, a_r)\,[da_3\, da_4 \ldots da_r]. \tag{22.9}$$

Равенство (22.8) должно иметь место для любого преобразования группы G_r. Более того, заметим, что каждая пара значений (s, σ) может быть переведена соответствующим преобразованием в любую пару (s', σ'). В самом деле, если s' и σ' удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_1(s') = \psi_1(\sigma';\, a_1', a_2', \ldots, a_r'),\ \varphi_2(s') = \psi_2(\sigma';\, a_1', a_2', \ldots, a_r'), \tag{22.10}$$

а s и σ — уравнениям (22.3), то можно воспользоваться преобразованием $T_{a'} T_a^{-1}$. Отсюда следует, что в равенстве (22.8) $M = \text{const}$.

Остается только заметить, что при интегрировании выражения (22.6) по всем значениям s, σ, $a_3, \ldots, a_r$ каждая кривая $T_a K_1$ учитывается n раз, где n есть число точек пересечения кривых K_0 и $T_a K_1$. Следовательно, если обозначить G_r-длины кривых K_0 и K_1 через L_0 и L_1 ($L_0 = \int\limits_{K_0} ds$ и $L_1 = \int\limits_{K_1} d\sigma$), то можно утверждать:

Пусть n — число точек пересечения некоторой определенной кривой K_0 и кривой $T_a K_1$, полученной из другой кривой K_1 преобразованием, принадлежащим группе G_r. Тогда

$$\int\limits_{G_r} n\, dK_1 = C L_0 L_1, \tag{22.11}$$

где dK_1 — кинематическая плотность группы G_r, C — постоянная (которая может быть равной бесконечности), а областью интегрирования служит вся группа G_r.

Если G_r — группа движений, то равенство (22.11) совпадает с формулой Пуанкаре (см. § 7).

Библиография. Относительно обобщения формулы Пуанкаре на n-мерное пространство см. Чжень Шен-шень [3] и Курита [1]. См. также Де Рам [1].

§ 23. Интегральная геометрия на плоскости Кэли

1. Группа Кэли. Так называется группа всех проективных преобразований, переводящих в себя некоторое заданное коническое сечение (см. § 16, п. 7, пример 3)

$$\Phi = \sum \alpha_{ik} x_i x_k = 0. \tag{23.1}$$

Мы примем, что квадратичная форма Φ — положительно определенная, т. е. что рассматриваемое коническое сечение мнимое; тогда можно нормировать однородные координаты x_0, x_1, x_2 вещественной точки так, чтобы имело место равенство

$$(x, x) = \sum \alpha_{ik} x_i x_k = 1. \tag{23.2}$$

Скалярное произведение двух точек x, y определим с помощью равенства

$$(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2} y_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2} x_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}. \tag{23.3}$$

Условие

$$(x, y) = 0 \tag{23.4}$$

означает, что x и y — сопряженные точки относительно выбранного «абсолютного» сечения Φ.

Инвариантное *расстояние* d между двумя точками x и y определим формулой

$$\cos d = (x, y), \tag{23.5}$$

а *угол* между двумя прямыми $\sum_0^2 u_i x_i = 0$ и $\sum_0^2 v_i x_i = 0$ — формулой

$$\cos \varphi = (u, v), \tag{23.6}$$

где коэффициенты u_i и v_i нормированы условиями $(u, u) = 1$, $(v, v) = 1$. Заметим, что *точки u, v — полюсы прямых u, v.*

Из формул (23.5) непосредственно следует, что элемент ds длины, т. е. расстояние между бесконечно близкими точками x и $x + dx$, определяется равенством

$$ds^2 = (dx,\ dx), \tag{23.7}$$

а угол между бесконечно близкими прямыми u и $u + du$ — равенством[1])

$$d\varphi^2 = (du, du). \tag{23.8}$$

2. Относительные компоненты и уравнения структуры. В п. 7 § 16 мы показали, что относительные компоненты группы Кэли (16.50) имеют вид

$$\omega_{ii} = 0,\ \omega_{ik} = -\omega_{ki} = (A_k, dA_i)\quad (i, k = 0,\ 1,\ 2), \tag{23.9}$$

где A_0, A_1, A_2 — вершины самосопряженного треугольника, для которых имеют место соотношения:

$$(A_i, A_i) = 1,\quad (A_i, A_k) = 0\qquad (i, k = 0,\ 1,\ 2). \tag{23.10}$$

Компоненты ω_{ik} определяются равенствами

$$dA_i = \sum_{k=0}^{2} \omega_{ik} A_k \qquad (i = 0, 1, 2), \tag{23.11}$$

а уравнения структуры (17.27) имеют вид

$$\omega'_{ik} = \sum_{l=0}^{2} [\omega_{il}\, \omega_{lk}]. \tag{23.12}$$

3. Плотность на плоскости Кэли. Будем следовать общему методу (§ 18).

а) Плотность множества точек. Считая точку A_0 фиксированной, получаем, в силу формулы (23.11),

$$\omega_{01} = 0, \qquad \omega_{02} = 0.$$

---

[1]) Относительно дальнейших деталей см., например, Кулидж [1].

Формулы (23.12) дают $[\omega_{01}\,\omega_{02}]' = 0$. Следовательно, инвариантная плотность множества точек будет иметь вид

$$dA_0 = [\omega_{01}\,\omega_{02}] = [(A_0, dA_1)(A_0, dA_2)], \qquad (23.13)$$

где точки A_1, A_2 — вершины треугольника $A_0A_1A_2$, самосопряженного относительно абсолюта $\Phi = 0$.

б) Плотность множества прямых. Фиксируя прямую, определяемую точками A_1, A_2, находим из формулы (23.11):

$$\omega_{10} = 0, \qquad \omega_{20} = 0.$$

Используя равенства (23.12), получим $[\omega_{10}\,\omega_{20}]' = 0$. Следовательно, плотность множества прямых определится формулой

$$dG = [\omega_{10}\,\omega_{20}] = [(A_1, dA_0)(A_2, dA_0)], \qquad (23.14)$$

где A_1 и A_2 — две сопряженные точки, лежащие на прямой G, а A_0 — полюс прямой G относительно абсолютного конического сечения.

Заметим, что правые части формул (23.13) и (23.14) совпадают; это означает, что плотность множества прямых равна плотности множества соответствующих полюсов. Это можно было предвидеть a priori в силу принципа двойственности проективной геометрии.

в) Кинематическая плотность. Кинематическая плотность (§ 18, п. 1) определится по формуле

$$dK = [\omega_{01}\,\omega_{02}\,\omega_{12}] = [(A_0, dA_1)(A_0, dA_2)(A_1, dA_2)], \qquad (23.15)$$

где A_0, A_1, A_2 — вершины самосопряженного треугольника.

4. Множество прямых, пересекающих данную кривую. Пусть K — заданная кривая, имеющая в каждой точке касательную. Если x — точка на кривой K, а y — сопряженная с ней точка на касательной, проведенной в точке x, то имеет место соотношение

$$dx = \lambda x + \mu y, \qquad (23.16)$$

поскольку точки x, $x + dx$ и y лежат на одной прямой.

Так как $(x, x) = 1$, то $(x, dx) = 0$ и, следовательно,

$$\lambda = (x, dx) = 0, \qquad \mu = (y, dx). \qquad (23.17)$$

Из равенства (23.7) следует, что $ds^2 = (dx, dx) = \mu^2 = (y, dx)^2$. Поэтому элемент длины кривой K определится по формуле

$$ds = (y, dx). \tag{23.18}$$

Пусть G — прямая, пересекающая кривую K в точке x. Если t — полюс касательной, проведенной в точке x, а g — полюс прямой G, то из формулы (23.14) следует, что

$$dG = [(x, dg)(\xi, dg)], \tag{23.19}$$

где ξ — точка пересечения прямых G и yg.

Так как

$$(x, g) = 0, \qquad (\xi, g) = 0,$$

то

$$(x, dg) + (dx, g) = 0, \qquad (\xi, dg) + (d\xi, g) = 0;$$

поэтому плотность dG можно представить в виде

$$dG = [(g, dx)(g, d\xi)]. \tag{23.20}$$

Угол φ между прямой G и касательной в точке x определяется равенством

$$\cos\varphi = (t, g). \tag{23.21}$$

Так как точки t, g и y коллинеарны, то

$$t = \alpha g + \beta y.$$

Умножая последнее равенство на t, получаем

$$1 = \alpha(g, t), \qquad \alpha = \frac{1}{(g, t)},$$

а умножая на y, получаем

$$0 = \alpha(g, y) + \beta, \qquad \beta = -\frac{(g, y)}{(g, t)}.$$

Следовательно,

$$t = \frac{1}{(g, t)} g - \frac{(g, y)}{(g, t)} y$$

и

$$(g, t) = \frac{1}{(g, t)} - \frac{(g, y)^2}{(g, t)}.$$

Таким образом,

$$(g, t)^2 = 1 - (g, y)^2,$$

и, принимая во внимание формулу (23.21), получаем

$$(g, y) = |\sin\varphi|.$$

С другой стороны, из формул (23.16) и (23.17) вытекает, что $dx = (y, dx)\,y$. Поэтому

$$(dx, g) = (y, dx)(y, g) = |\sin\varphi|\,ds. \tag{23.22}$$

Из формулы (23.18) следует, что $(g, d\xi)$ — длина дуги на прямой gy. В силу двойственности, $(g, d\xi)$ равно также и $d\varphi$, так как x есть полюс прямой gy; поэтому $d\varphi = (g, d\xi)$.

Таким образом, используя (23.20), получаем

$$dG = |\sin\varphi|\,[ds\,d\varphi]. \tag{23.23}$$

Эта формула имеет тот же вид, что и формула (2.12) для евклидовой плоскости. Как и в том случае, мы заключаем:

Если n — число точек пересечения прямой G и кривой K, то имеет место формула

$$\int n\,dG = 2L, \tag{23.24}$$

где L — длина Кэли кривой K.

Если, в частности, K — прямая линия, то для каждой прямой G $n = 1$; так как длина всей кривой K равна, как известно, π, то мы приходим к выводу, что *мера множества всех прямых плоскости Кэли равна* 2π.

В силу двойственности, площадь всей плоскости Кэли равна 2π.

5. Двойственные формулы. На плоскости Кэли для формулы (23.23) можно составить двойственную.

Пусть $u(\tau)$ — семейство прямых, зависящее от параметра τ, и пусть огибающей этого семейства будет линия K. Если P — точка прямой $u(\tau)$, а $d\varphi$ — угол между прямыми $u(\tau)$ и $u(\tau + d\tau)$, то формула, двойственная формуле (23.23), имеет вид

$$dP = |\sin\sigma|\,[d\sigma\,d\varphi], \tag{23.25}$$

где σ — *расстояние* от точки P до точки касания прямой $u(\tau)$ и огибающей K.

Следовательно, если n — число прямых семейства, проходящих через точку P, то

$$\int n\, dP = 2\Gamma, \tag{23.26}$$

где интеграл берется по всей плоскости, а $\Gamma = \int |d\varphi|$ — «двойственная» длина кривой K.

Пусть кривая K — *выпуклая*; тогда $n = 2$, если $P \bar{\in} K$, $n = 0$, если $P \in K$. Следовательно,

$$\int\limits_{P \bar{\in} K} dP = \Gamma. \tag{23.27}$$

С другой стороны, если F — площадь (в метрике Кэли) фигуры, ограниченной кривой K, то $\int\limits_{P \in K} dP = F$, а так как площадь всей плоскости равна 2π, то

$$\Gamma = 2\pi - F. \tag{23.28}$$

Замечание. Если положить $\Gamma = \int d\varphi$ вместо $\int |d\varphi|$, то в формуле (23.26) каждую прямую, проходящую через точку P, нужно взять со знаком $+$ или $-$, в зависимости от того, лежит ли точка касания в окрестности K справа или слева от прямой. В этом случае число n касательных, проходящих через точку P, у которых учитываются знаки, может быть и отрицательным.

6. Формулы Крофтона на плоскости Кэли. Пусть G_1 и G_2 — две прямые и $P \equiv x$ — точка их пересечения.

Если g_1, g_2 — полюсы прямых G_1 и G_2, а y, z — точки пересечения этих прямых с полярой точки x, то из формулы (23.20) следует, что

$$\begin{aligned} dG_1 &= [(g_1, dx)(g_1, dy)], \\ dG_2 &= [(g_2, dx)(g_2, dz)]. \end{aligned} \tag{23.29}$$

Так как точки g_1, g_2 и y коллинеарны, то

$$g_2 = \lambda g_1 + \mu y.$$

Учитывая, что $(g_2, y) = |\sin\varphi|$ (φ — угол между G_1 и G_2, см. п. 4), находим: $g_2 = \lambda g_1 + |\sin\varphi|\, y$ и, следовательно,

$$(dx, g_2) = \lambda (g_1, dx) + |\sin\varphi|\, (y, dx).$$

Используя это соотношение, получаем

$$[dG_1\,dG_2] = |\sin\varphi|\,[(g_1, dx)(g_1, dy)(y, dx)(g_2, dz)]. \qquad (23.30)$$

Если, далее, φ_1, φ_2 — углы в точке P, отвечающие прямым G_1 и G_2, то

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi, \qquad (g_1, dy) = d\varphi_1, \qquad (g_2, dz) = d\varphi_2.$$

Пользуясь (23.13), получим

$$dP = [(y, dx)(g_1, dx)].$$

Таким образом, равенство (23.30) принимает вид

$$[dG_1\,dG_2] = |\sin(\varphi_2 - \varphi_1)|\,[dP\,d\varphi_2\,d\varphi_1]. \qquad (23.31)$$

В силу двойственности, можно сделать вывод, что если P_1, P_2 — две точки прямой G, σ — расстояние P_1P_2 и σ_1, σ_2 — абсциссы точек P_1, P_2 на прямой G, то формула (23.31) заменится ей двойственной:

$$[dP_1\,dP_2] = |\sin(\sigma_2 - \sigma_1)|\,[dG\,d\sigma_2\,d\sigma_1]. \qquad (23.32)$$

Формулы (23.31) и (23.32) являются обобщениями для плоскости Кэли формул (4.2) и (3.2) евклидовой плоскости.

7. Некоторые интегральные формулы для выпуклых кривых на плоскости Кэли. Рассмотрим пару прямых G_1, G_2, которые пересекаются внутри выпуклой кривой K. Если σ — длина хорды, определяемой прямой G_1 и кривой K, то из формулы (23.24) следует, что

$$\int\limits_{G_1G_2\in K} dG_1dG_2 = 2\int \sigma dG_1,$$

а из формулы (23.31)—что

$$\int\limits_{G_1G_2\in K} dG_1dG_2 = \int\limits_{P\in K} dP\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi |\sin(\varphi_1 - \varphi_2)|\,d\varphi_1 d\varphi_2 = 2\pi F.$$

Таким образом, мы приходим к интегральной формуле

$$\int \sigma\,dG_1 = \pi F. \qquad (23.33)$$

Если σ — длина хорды, высекаемой на прямой G, то, интегрируя формулу (23.32) по всем парам точек P_1, P_2, лежащих внутри K, мы получаем

$$F^2 = 2\int (\sigma - \sin\sigma)\, dG. \tag{23.34}$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (23.33), приходим к равенствам

$$\int \sigma\, dG = \pi F, \qquad \int \sin\sigma\, dG = \pi F - \frac{1}{2}F^2. \tag{23.35}$$

Рассмотрим теперь такие пары точек P, P_1, для которых прямая $G \equiv PP_1$ не пересекает кривую K. Если фиксировать положение точки P, то вторая точка P_1 должна будет лежать вне угла ω, образованного опорными прямыми K, проходящими через P; так как площадь всей плоскости равна 2π, то площадь, покрытая точками P_1, будет равна $2(\pi - \omega)$. Следовательно,

$$I = \int\limits_{G\cdot K=0} dP\, dP_1 = 2\int\limits_{P\in K} (\pi - \omega)\, dP = 2\pi(2\pi - F) - 2\int\limits_{P\in K} \omega\, dP.$$

С другой стороны, используя (23.32), получаем

$$I = \int\limits_{G\cdot K=0} dP\, dP_1 = \int\limits_{G\cdot K=0} dG \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} |\sin(\sigma_1 - \sigma_2)|\, d\sigma_1 d\sigma_2 = 2\pi \int\limits_{G\cdot K=0} dG = 2\pi(2\pi - L).$$

Последние два значения для I приводят к интегральной формуле

$$\int\limits_{P\in K} \omega\, dP = \pi(L - F). \tag{23.36}$$

Применяя тот же метод, что и в случае евклидовой плоскости (§ 4, п. 2), мы получаем из равенства (23.31), что

$$\int\limits_{P\in K} (\omega - \sin\omega)\, dP = \frac{1}{2}L^2 - \pi F.$$

Следовательно, в силу (23.36),

$$\int\limits_{P\in K} \sin\omega\, dP = \pi L - \frac{1}{2}L^2. \tag{23.37}$$

8. Формула Пуанкаре. Если K_0 — фиксированная кривая, а K_1 — переменная кривая, то, обозначая через dK_1 кинематическую плотность и используя общий результат § 22, получаем

$$\int n\, dK_1 = CL_0L_1,$$

где n — число точек пересечения кривых K_0 и K_1. Нетрудно получить этот результат и непосредственно.

Пусть x — точка пересечения кривых K_0 и K_1. Если G — касательная к кривой K_1 в точке x, g — полюс прямой G, а ξ — точка, сопряженная с точкой x на G, то треугольник $xg\xi$ — самосопряженный; следовательно, из формулы (23.15) вытекает, что

$$dK_1 = [(g, dx)(g, d\xi)(\xi, dx)]. \tag{23.38}$$

Учитывая формулы (23.12) и (23.18), получаем

$$dK_1 = |\sin\varphi|\,[d\varphi ds_0 ds_1], \tag{23.39}$$

где φ—угол между кривыми K_0 и K_1 в точке x, а ds_0, ds_1— элементы длины дуги на кривых K_0 и K_1 в точке x.

Интегрируя формулу (23.39) по области $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant s_0 \leqslant L_0$, $0 \leqslant s_1 \leqslant L_1$, находим

$$\int n\, dK_1 = 4L_0L_1. \tag{23.40}$$

Это — *формула Пуанкаре* для плоскости Кэли.

Аналогично (7.9), получаем из равенства (23.39)

$$\int \Big(\sum \varphi_i\Big)\, dK_1 = 2\pi L_1 L_2. \tag{23.41}$$

9. Формула Бляшке. Основная формула Бляшке (§ 8) также может быть обобщена на случай плоскости Кэли. Если полную кривизну замкнутой кривой мы определим формулой $\Gamma = \int d\varphi + \sum \omega_i$, где $d\varphi$ — угол между двумя соседними касательными, а ω_i — значение угла, образованного касательными в угловой точке M_i, измеренного, конечно, в метрике Кэли, то с помощью метода, изложенного в § 8, получим, что

$$\int \Gamma_{01} dK_1 = 2\pi (F_1\Gamma_0 + F_0\Gamma_1 + L_0L_1).$$

Библиография. Интегральная геометрия в n-мерных пространствах ($n > 2$) с метрикой Кэли рассмотрена в работах: У Да-Янь [1,2] (для $n=3$), Петканчин [1] (для любого n). См. также Бляшке [17].

§ 24. Группа движений n-мерного евклидова пространства

1. Относительные компоненты и уравнения структуры. Группа движений пространства E_n, зависящая от $n(n+1)/2$ параметров, определяется формулами

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} x_k + \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{24.1}$$

в которых параметры λ_{ik} удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik}\lambda_{il} = \delta_{kl} \quad (= 0, \text{ если } k \neq l; \; = 1, \text{ если } k = l). \tag{24.2}$$

В векторной форме соотношения (24.1) можно записать в виде

$$x' = A + \sum_{k=1}^{n} I_k x_k, \tag{24.3}$$

где A есть точка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, а $I_1, \ldots, I_n$ — n единичных ортогональных векторов с началом в точке A и координатами

$$(\lambda_{1k}, \; \lambda_{2k}, \ldots, \lambda_{nk}) \qquad (k = 1, \; 2, \ldots, n).$$

В п. 7 § 16 мы показали, что относительные компоненты определяются равенствами

$$\begin{aligned} dA &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i I_i , \\ dI_i &= \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} I_k , \end{aligned} \tag{24.4}$$

в которых

$$\omega_i = I_i dA = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ki} d\alpha_k, \quad \omega_{ik} = -\omega_{ki} = I_k dI_i = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{lk} d\lambda_{li}. \tag{24.5}$$

Уравнения структуры имеют вид

$$\omega'_k = \sum_{l=1}^{n} [\omega_l \, \omega_{lk}], \qquad \omega'_{ik} = \sum_{l=1}^{n} [\omega_{il} \, \omega_{lk}]. \tag{24.6}$$

2. Плотность множества линейных подпространств. Выясним, существует ли для множества h-мерных линейных подпространств S_h плотность, инвариантная относительно группы движений.

Пусть подпространство S_h определяется точкой A и h взаимно ортогональными векторами $I_k (k = 1, 2, \ldots, h)$. Тогда из формул (24.4) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_i &= 0 \quad \text{для } i = h+1, \ldots, n, \\ \omega_{ik} &= 0 \quad \text{для } i \leqslant h, \ k > h. \end{aligned} \tag{24.7}$$

Учитывая формулы (24.6) и соотношение $\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0$, находим

$$\left[\prod_{i=h+1}^{n} \omega_i \prod_{\substack{i=1 \\ k=h+1}}^{\substack{k=n \\ i=h}} \omega_{ik} \right]' = 0.$$

Итак, множество линейных подпространств S_h имеет плотность, определяемую формулой

$$dS_h = \left[\prod_{i=h+1}^{n} \omega_i \prod_{\substack{i=1 \\ k=h+1}}^{\substack{k=n \\ i=h}} \omega_{ik} \right], \tag{24.8}$$

где ω_i, ω_{ik} заданы равенствами (24.5).

Эти плотности были введены Бляшке [2].

3. Кинематическая плотность. Согласно общей теории, кинематическая плотность для группы движений выражается формулой

$$dK = \left[\prod_{i=1}^{n} \omega_i \prod_{i<k} \omega_{ik} \right], \tag{24.9}$$

т. е. равна внешнему произведению всех отличных от нуля независимых относительных компонент.

4. Случай трехмерного пространства. Чтобы дать геометрическую интерпретацию плотностей (24.8) в случае $n = 3$, удобно ввести *эйлеровы углы* θ, φ, ψ. Направляющие косинусы векторов I_k $(k=1, 2, 3)$ выражаются через эти углы посредством формул:

$$
\begin{aligned}
&I_1 \begin{cases} \lambda_{11} = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ \lambda_{21} = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ \lambda_{31} = \sin\psi\sin\theta, \end{cases} \\
&I_2 \begin{cases} \lambda_{12} = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ \lambda_{22} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ \lambda_{32} = \cos\psi\sin\theta, \end{cases} \\
&I_3 \begin{cases} \lambda_{13} = \sin\varphi\sin\theta, \\ \lambda_{23} = -\cos\varphi\cos\theta, \\ \lambda_{33} = \cos\theta. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{24.10}
$$

Пользуясь этими выражениями, мы приходим к следующим результатам.

1. Плотность множества точек. Полагая в формуле (24.8) $h=0$, получаем

$$dP = [\omega_1\,\omega_2\,\omega_3]$$

и, принимая во внимание (24.5),

$$dP = \det\|\lambda_{ik}\| \cdot [d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3].$$

Учитывая, что $\det\|\lambda_{ik}\| = 1$, получаем

$$dP = [d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3], \tag{24.11}$$

где α_1, α_2, α_3 — координаты точки P. Таким образом, плотность множества точек равна элементу объема.

2. Плотность множества плоскостей. При $h=2$ введем обозначение $S_2=E$. Тогда для плотности множества плоскостей, определяемых векторами I_1 и I_2, получаем, согласно формуле (24.8),

$$dE = [\omega_3\,\omega_{13}\,\omega_{23}]. \tag{24.12}$$

Используя формулы (24.5) и (24.10), получаем

$$[\omega_{13}\,\omega_{23}] = \sin\theta\,[d\theta\,d\varphi]. \tag{24.13}$$

Если p — расстояние от начала O фиксированной системы координат до плоскости E, то

$$p = \lambda_{13}\alpha_1 + \lambda_{23}\alpha_2 + \lambda_{33}\alpha_3,$$

так как λ_{13}, λ_{23}, λ_{33} — направляющие косинусы нормали I_3 к плоскости E, а $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — точка, принадлежащая плоскости E. Отсюда следует, что

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{i3} d\alpha_i = dp - R\,d\varphi - S\,d\theta, \tag{24.14}$$

где R и S — некоторые функции от θ, φ, явное выражение которых для нас сейчас несущественно.

Из формул (24.13) и (23.14) следует, что

$$dE = \sin\theta\,[dp\,d\theta\,d\varphi]. \tag{24.15}$$

Произведение $\sin\theta\,[d\theta\,d\varphi]$ равно элементу площади на сфере единичного радиуса, соответствующего направлению нормали к плоскости.

Полагая

$$d\Omega = \sin\theta\,[d\theta\,d\varphi], \tag{24.16}$$

получаем

$$dE = [dp\,d\Omega]. \tag{24.17}$$

Таким образом, плотность множества плоскостей определяется формулами (24.15) или (24.17). Итак, *если плоскости E задаются направлением Ω нормали и расстоянием p от фиксированной точки O, то плотность множества плоскостей определяется формулой* (24.17).

3. Плотность множества прямых. При $h = 1$ введем обозначение $S_1 = G$; для плотности dG множества прямых, содержащих вектор I_1, получаем из формулы (24.8):

$$dG = [\omega_2\,\omega_3\,\omega_{12}\,\omega_{13}].$$

Чтобы использовать предыдущие формулы, удобнее рассматривать прямую, содержащую вектор I_3. Заменяя индекс 1 на 3, получаем

$$dG = [\omega_2\,\omega_1\,\omega_{32}\,\omega_{31}]. \tag{24.18}$$

Формулы (24.13) и (24.16) дают

$$[\omega_{32}\,\omega_{31}] = [\omega_{23}\,\omega_{13}] = -\sin\theta\,[d\theta\,d\varphi] = -d\Omega, \qquad (24.19)$$

а из формул (24.15) и (24.10) мы получаем

$$[\omega_2\,\omega_1] = -\cos\theta\,[d\alpha_1\,d\alpha_2] - \cos\varphi\sin\theta\,[d\alpha_1\,d\alpha_3] - \\ - \sin\varphi\sin\theta\,[d\alpha_2\,d\alpha_3]. \qquad (24.20)$$

Рассматриваемая прямая G имеет направляющие косинусы λ_{i3} и проходит через точку $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Следовательно, точка пересечения этой прямой с фиксированной плоскостью x,y определяется формулами

$$x = -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}}\alpha_3 + \alpha_1, \qquad y = -\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}}\alpha_3 + \alpha_2.$$

Поэтому

$$dx = -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33}}d\alpha_3 + d\alpha_1 + R_1 d\theta + S_1 d\varphi,$$

$$dy = -\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}}d\alpha_3 + d\alpha_2 + R_2 d\theta + S_2 d\varphi,$$

где R_i, S_i — некоторые функции от $\theta, \varphi, \alpha_3$, явное выражение которых нам сейчас не важно.

Так как $\lambda_{33} = \cos\theta$, то

$$\cos\theta\,[dx\,dy] = \lambda_{13}\,[d\alpha_2\,d\alpha_3] - \lambda_{23}\,[d\alpha_1\,d\alpha_3] + \lambda_{33}\,[d\alpha_1\,d\alpha_2] + \\ + [M\,d\theta] + [N\,d\varphi],$$

или, согласно формулам (24.10) и (24.20),

$$\cos\theta\,[dx\,dy] = \sin\varphi\sin\theta\,[d\alpha_2\,d\alpha_3] + \cos\varphi\sin\theta\,[d\alpha_1\,d\alpha_3] + \\ + \cos\theta\,[d\alpha_1\,d\alpha_2] = -[\omega_2\,\omega_1] + [M\,d\theta] + [N\,d\varphi].$$

Таким образом,

$$dG = |\cos\theta|\,[dx\,dy\,d\Omega], \qquad (24.21)$$

где θ — угол между прямой G и нормалью к некоторой фиксированной плоскости, x, y — прямоугольные координаты точки пересечения прямой G с этой плоскостью, а $d\Omega$ — элемент площади единичной сферы, соответствующей направлению прямой G.

4. Кинематическая плотность. Согласно формуле (24.9), имеем

$$dK = [\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_{12} \omega_{13} \omega_{23}]. \tag{24.22}$$

Принимая во внимание (24.11) и (24.13) и значение, определяемое формулами (24.5) и (24.10), получаем

$$dK = [dP\, d\Omega\, d\varphi]. \tag{24.23}$$

Эта формула дает ясную геометрическую интерпретацию плотности dK.

Замечание. С помощью приведенных выше формул для плотностей можно построить интегральную геометрию трехмерного евклидова пространства таким же образом, как мы это сделали выше в случае плоскости (часть I)[1]. По этому поводу см. книги Дельтей [1] и Бляшке [15]. Обзор различных аспектов интегральной геометрии читатель найдет в докладе Сантало [21].

---

[1]) См. также Мак [6], Видаль-Абаскаль [3], Хадвигер [10]. — *Прим. ред.*

Приложение

И. М. Яглом

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В МНОЖЕСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Следуя в основном идеям П. К. Рашевского (см. П. К. Рашевский [2]), можно значительно обобщить многие результаты настоящей книги. При этом новая точка зрения снова показывает целесообразность приведенного во второй части книги определения плотности множества геодезических линий произвольной поверхности, которое ранее не было достаточно мотивировано.

1. Биметрические системы П. К. Рашевского. Основные идеи интегральной геометрии возникли при сопоставлении мер и плотностей геометрических элементов *разного рода*, в первую очередь — точек и прямых на плоскости (см. § 2 настоящей книги). Это обстоятельство вынуждает нас при попытках распространения этих идей исходить не из многообразия точек и не из многообразия прямых линий плоскости, а из элементов, занимающих нейтральное положение по отношению к этим двум классам объектов. Соответственно этому основную роль в дальнейших построениях будет играть множество *линейных элементов* плоскости (или произвольной поверхности), т. е. множество точек (x, y) с заданными в них направлениями, которые можно характеризовать отношением $z = dy/dx$ (в случае плоскости линейный элемент можно представлять себе как точку и инцидентную с ней прямую). Разумеется, вместо координат (x, y, z) линейного элемента можно рассматривать и любые другие координаты

$$x^1 = x^1(x, y, z), \quad x^2 = x^2(x, y, z), \quad x^0 = x^0(x, y, z). \quad (1)$$

Кривой в множестве линейных элементов естественно называть такую однопараметрическую совокупность линейных элементов, что для каждых двух бесконечно близких из них, (x, y, z) и $(x+dx, y+dy, z+dz)$, выполняется *условие примыкания*

$$z=\frac{dy}{dx}, \text{ или } dy-zdx=0. \tag{2}$$

Переходя к произвольным координатам (1), мы будем называть кривой однопараметрическую совокупность линейных элементов, являющуюся интегральным многообразием уравнения Пфаффа

$$\overset{0}{\omega}=0; \tag{3}$$

здесь форма $\overset{0}{\omega}=\overset{0}{\omega}_\alpha(x^1, x^2, x^0)\,dx^\alpha$ $(\alpha=1, 2, 0)$ — та же форма $dy-z\,dx$, которая фигурировала в равенстве (2), только записанная в общих координатах (1). При этом из определения кривой вытекает, что форму $\overset{0}{\omega}$ нет необходимости задавать точно: так как используется лишь *уравнение* (3), то форма $\overset{0}{\omega}$ должна быть определена лишь с точностью до преобразования

$$\overset{0}{\omega}\to\overset{0}{\lambda}(x^i)\,\overset{0}{\omega} \tag{4}$$

(условие примыкания можно с равным основанием записать в форме $dy-zdx=0$ или в форме $dx-\frac{1}{z}dy=0$).

Введем теперь понятия «расстояния» ds и «угла» $d\theta$ между бесконечно близкими линейными элементами, удовлетворяющими условию примыкания. Если за координаты линейного элемента приняты (x, y, z), то естественны следующие определения:

$$ds=\sqrt{1+z^2}\,dx, \quad d\theta=\frac{dz}{1+z^2}. \tag{5}$$

В общем случае мы примем, что

$$ds=\overset{1}{\omega}, \qquad d\theta=\overset{2}{\omega}, \tag{6}$$

где $\overset{1}{\omega}=\overset{1}{\omega}_\alpha(x^i)\,dx^\alpha$ и $\overset{2}{\omega}=\overset{2}{\omega}_\alpha(x^i)\,dx^\alpha$ — те же формы Пфаффа $(1+z^2)^{1/2}dx$ и $(1+z^2)^{-1}dz$, записанные в координатах (1). При этом, так как расстояние ds и угол $d\theta$ изменяются лишь «вдоль кривых» (определяемых уравнением (3)), то формы $\overset{1}{\omega}$ и $\overset{2}{\omega}$ задаются лишь с точностью до преобразования

$$\overset{1}{\omega} \to \overset{1}{\omega} + \overset{1}{\lambda}(x^i)\overset{0}{\omega}, \qquad \overset{2}{\omega} \to \overset{2}{\omega} + \overset{2}{\lambda}(x^i)\overset{0}{\omega} \tag{7}$$

(расстояние с равным основанием можно определить формулой $ds = \sqrt{1+z^2}\,dx$ и формулой $ds = \frac{\sqrt{1+z^2}}{z}dy$). Теперь «точки» естественно определить как интегральные многообразия системы Пфаффа

$$\overset{1}{\omega} = 0, \qquad \overset{0}{\omega} = 0, \tag{8}$$

а «прямые» — как интегральные многообразия системы

$$\overset{2}{\omega} = 0, \qquad \overset{0}{\omega} = 0. \tag{9}$$

Общее понятие биметрической системы возникает в порядке обобщения изложенных простых соображений. *Биметрической системой П. К. Рашевского называется трехпараметрическое многообразие элементов* (x^1, x^2, x^0) («линейных элементов»), *в котором заданы три произвольные независимые формы Пфаффа* $\overset{i}{\omega} = \overset{i}{\omega}_\alpha(x^j)\,dx^\alpha$ $(i, j, \alpha = 1, 2, 0)$, *определенные с точностью до преобразований* (4), (7)[1]. Интегральные кривые уравнения (3) называются *кривыми*, интеграл от форм $\overset{1}{\omega}$ и $\overset{2}{\omega}$, взятый вдоль дуги кривой, — *длиной этой кривой, измеренной в первой* («линейной») *и во второй* («угловой») *метриках*, интегральные многообразия систем (8) и (9) — *нулевыми линиями первой метрики* («точками») *и нулевыми линиями второй метрики* («прямыми»). При этом естественно потребовать дополнительно, чтобы уравнение (3) не являлось вполне интегрируемым, так как противное означало бы, что все пространство линейных элементов расслаивается на двумерные

[1]) П. К. Рашевский требовал еще определенной «невырожденности» метрик $ds_1 = \overset{1}{\omega}$ и $ds_2 = \overset{2}{\omega}$, которая позволяла ему найти условия, при которых эти метрики являются «двойственными» в смысле, обобщающем двойственность, имеющую место на эллиптической плоскости. Однако для нас эта «невырожденность» является слишком ограничительной, поскольку уже метрика углов между прямыми евклидовой плоскости является «вырожденной» в смысле Рашевского.

подмногообразия, на которых тождественно выполняется условие примыкания (3).

Из независимости форм $\overset{i}{\omega}$ вытекает, что каждую линейную дифференциальную форму можно представить в виде линейной комбинации форм $\overset{i}{\omega}$, а каждую (внешнюю) дифференциальную форму второго порядка — как сумму внешних произведений этих форм. В частности, имеют место разложения

$$\overset{i}{\omega}{}' = C^i_{jk}[\overset{j}{\omega}\overset{k}{\omega}] \qquad (i, j, k = 1, 2, 0), \tag{10}$$

которые естественно назвать *структурными уравнениями* биметрической системы; коэффициенты C^i_{jk} этих уравнений называются *структурными коэффициентами* системы. При этом, так как формы $\overset{i}{\omega}$ определены лишь с точностью до преобразований (4), (7), то и структурные коэффициенты C^i_{jk} не являются полностью определенными: они зависят от произвольных функций $\overset{1}{\lambda}, \overset{2}{\lambda}, \overset{0}{\lambda}$.

Нетрудно выяснить, как преобразуются коэффициенты C^i_{jk} при преобразовании (4), (7) основных форм. В частности, получаем

$$C^0_{12} \to \overset{0}{\lambda} C^0_{12}, \quad C^1_{12} \to C^1_{12} + \overset{1}{\lambda} C^0_{12}, \quad C^2_{12} \to C^2_{12} + \overset{2}{\lambda} C^0_{12}. \tag{11}$$

Но $C^0_{12} \neq 0$, так как противное означало бы, что уравнение (3) вполне интегрируемо (в силу теоремы Фробениуса, упоминаемой на стр. 110)[1]. Поэтому функции $\overset{1}{\lambda}, \overset{2}{\lambda}, \overset{0}{\lambda}$ можно подобрать так, чтобы было

$$C^0_{12} = 1, \qquad C^1_{12} = C^2_{12} = 0; \tag{12}$$

при этом условиями (12) формы $\overset{i}{\omega}$ уже определяются *однозначно*. Структурные уравнения биметрической системы при-

[1]) Все построения этого приложения носят существенно локальный характер. Соответственно этому неравенство $C^0_{12} \neq 0$ означает, что мы ограничиваемся областью пространства линейных элементов (x^1, x^2, x^0), в которой функция $C^0_{12}(x^1, x^2, x^0)$ не обращается в нуль.

мут теперь вид

$$\overset{1}{\omega}{}' = C^1_{10}[\overset{1}{\omega}\ \overset{0}{\omega}] + C^1_{20}[\overset{2}{\omega}\ \overset{0}{\omega}],$$
$$\overset{2}{\omega}{}' = C^2_{10}[\overset{1}{\omega}\ \overset{0}{\omega}] + C^2_{20}[\overset{2}{\omega}\ \overset{0}{\omega}], \qquad (13)$$
$$\overset{0}{\omega}{}' = C^0_{10}[\overset{1}{\omega}\ \overset{0}{\omega}] + C^0_{20}[\overset{2}{\omega}\ \overset{0}{\omega}] + [\overset{1}{\omega}\ \overset{2}{\omega}];$$

коэффициенты C^i_{j0} ($i = 1, 2, 0$; $j = 1, 2$) этих уравнений уже однозначно определяются биметрической системой и являются важнейшими ее характеристиками.

Пример. В случае евклидовой плоскости мы имеем

$$\overset{0}{\omega} = dy - z\,dx, \quad \overset{1}{\omega} = (1 + z^2)^{1/2}dx, \quad \overset{2}{\omega} = (1 + z^2)^{-1}dz \qquad (14)$$

[см. выше формулы (2) и (6)]. Нетрудно видеть, что уравнения структуры запишутся в этом случае в виде

$$\overset{1}{\omega}{}' = -z[\overset{1}{\omega}\ \overset{2}{\omega}], \quad \overset{2}{\omega}{}' = 0, \quad \overset{0}{\omega}{}' = (1 + z)^{1/2}[\overset{1}{\omega}\ \overset{2}{\omega}]. \qquad (15)$$

Условия $\overset{0}{\lambda}C^0_{12} = 1$, $C^1_{12} + \overset{1}{\lambda}C^0_{12} = 0$, $C^2_{12} + \overset{2}{\lambda}C^0_{12} = 0$ [см. (11) и (12)] показывают, что формы (14) в этом случае нужно заменить следующими:

$$\overset{1}{\omega} = z(1 + z^2)^{-1/2}dy + (1 + z^2)^{-1/2}dx,$$
$$\overset{2}{\omega} = (1 + z^2)^{-1}dz, \qquad (16)$$
$$\overset{0}{\omega} = (1 + z^2)^{-1/2}dy - z(1 + z^2)^{-1/2}dx,$$

или, если вместо z ввести координату α: $z = \operatorname{tg}\alpha$,

$$\overset{1}{\omega} = \sin\alpha\,dy + \cos\alpha\,dx, \quad \overset{2}{\omega} = d\alpha, \quad \overset{0}{\omega} = \cos\alpha\,dy - \sin\alpha\,dx. \qquad (16a)$$

Для преобразованных таким образом форм уравнения структуры примут следующий более простой вид:

$$\overset{1}{\omega}{}' = [\overset{2}{\omega}\ \overset{0}{\omega}], \quad \overset{2}{\omega}{}' = 0, \quad \overset{0}{\omega}{}' = [\overset{1}{\omega}\ \overset{2}{\omega}]. \qquad (17)$$

Перейдем теперь к вопросу об «измерении площадей» в биметрической системе. В полной аналогии с содержанием п. 1 § 18, за *меру двупараметрического множества X* *нулевых линий первой метрики* («точек»), определенных системой (8) уравнений Пфаффа, примем интеграл

$$\int\limits_V [\overset{1}{\omega}\overset{0}{\omega}], \tag{18}$$

распространенный на двумерное множество V линейных элементов, полученное выбором на каждой из нулевых линий множества X какого-то одного линейного элемента. При этом для того, чтобы интеграл (18) зависел лишь от множества X нулевых линий, но не от выбора на этих линиях линейных элементов, необходимо и достаточно, чтобы имели место условия

$$[\overset{1}{\omega}\overset{0}{\omega}]' = 0, \quad \text{или} \quad C^0_{20} = 0 \tag{19}$$

— условия существования меры в множестве нулевых линий первой метрики (ср. с п. 3 § 18). Аналогично этому, условие существования меры в множестве нулевых линий второй метрики имеет вид

$$[\overset{2}{\omega}\overset{0}{\omega}]' = 0, \quad \text{или} \quad C^0_{10} = 0; \tag{20}$$

при этом мера двумерного множества X нулевых линий второй метрики определяется интегралом

$$\int\limits_V [\overset{2}{\omega}\overset{0}{\omega}], \tag{21}$$

распространенным по множеству V линейных элементов, полученному выбором на каждой из нулевых линий множества X одного линейного элемента. Квадратичные дифференциальные формы $[\overset{1}{\omega}\overset{0}{\omega}]$ и $[\overset{2}{\omega}\overset{0}{\omega}]$ определяют *плотности* нулевых линий первой и второй метрик[1]).

---

[1]) Область интегрирования V в равенстве (18) [(21)] должна быть такова, чтобы никакие два линейных элемента области V не принадлежали одной нулевой линии первой метрики [второй метрики]. Если же область V произвольна, то имеем

$$\int\limits_V [\overset{1}{\omega}\overset{0}{\omega}] = \int\limits_X n(S)\,dS \qquad \left[\int\limits_V [\overset{2}{\omega}\overset{0}{\omega}] = \int\limits_X n(S)\,dS\right],$$

Очевидная аналогия между изложенным выше и содержанием §§ 16—18 не является случайной. Для того, чтобы пояснить это, рассмотрим снова евклидову плоскость. Будем считать, что линейный элемент — это точка и инцидентная с ней *направленная* прямая; при этом линейные элементы можно будет принять за «реперы» евклидовой плоскости в смысле определения п. 4 § 16, поскольку существует единственное движение, переводящее данный линейный элемент в другой заданный линейный элемент (если условиться еще, что «правая» по отношению к направленной прямой полуплоскость первого линейного элемента должна переходить в «правую» полуплоскость второго линейного элемента). Инфинитезимальное движение, переводящее данный элемент (x^1, x^2, x^0) [1]) в бесконечно близкий линейный элемент $(x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^0+dx^0)$, можно представить себе как сдвиг вдоль прямой на величину $\overset{1}{\omega}$, сдвиг в перпендикулярном направлении на величину $\overset{0}{\omega}$ и поворот на угол $\overset{2}{\omega}$; здесь $\overset{1}{\omega}, \overset{0}{\omega}, \overset{2}{\omega}$ — фигурирующие выше основные пфаффовы формы биметрической системы, которые в такой трактовке возникают как компоненты инфинитезимального перемещения репера. При этом структурные уравнения биметрической системы полностью совпадают с уравнениями структуры группы движений. Однако в более сложных случаях, когда пространство линейных элементов не допускает транзитивной группы преобразований, сохраняющей основные метрики (6) (с аналогичным положением вещей мы столкнулись во второй части книги), коэффициенты биметрической системы уже не будут постоянными.

2. Два способа задания меры в двупараметрическом множестве кривых плоскости (см. Б. В. Лесовой [1], И. М. Яглом [1]). Пусть на плоскости задано двупараметрическое множество кривых S. Для того чтобы определить в этом множестве кривых меру, можно поступить следующим образом. Рассмотрим какую-либо биметрическую систему в множестве линейных элементов плоскости, для которой линии S являются нулевыми линиями, скажем, второй метрики. Если структурный коэффициент C^0_{10} этой биметрической системы окажется равным нулю, то меру в множестве кривых можно будет определить формулой (18). Разумеется, этот рецепт определения меры обладает значительной степенью неопределенности, но ниже будет показано,

---

где X — множество нулевых линий S первой метрики [второй метрики], содержащих линейные элементы множества V; $n(S)$ — число линейных элементов этого множества, которые принадлежат линии S; dS — плотность множества нулевых линий первой метрики [второй метрики].

[1]) Здесь x^1, x^2, x^3 — какие угодно координаты в трехпараметрическом множестве линейных элементов.

что возникающий при этом произвол в определении меры меньше, чем этого можно было бы заранее опасаться (см. п. 3, стр. 168—169).

Наиболее естественный способ задания биметрической системы состоит в следующем. Примем за нулевые линии первой и второй метрик точки и линии S, т. е. потребуем, чтобы «вдоль точек» было $\overset{1}{\omega}=0$, а вдоль линий S — $\overset{2}{\omega}=0$; затем условимся, что вдоль линий S первая метрика $\int ds_1 = \int \overset{1}{\omega}$ совпадает с длиной дуги линии, а «вдоль точек» вторая метрика $\int ds_2 = \int \overset{2}{\omega}$ совпадает с обычным углом. Если, как в формулах (16а), за координаты в множестве линейных элементов принять x, y и $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$ и двупараметрическое семейство линий S задать дифференциальным уравнением

$$\frac{d\alpha}{ds} = k(x, y, \alpha) \tag{22}$$

(k — кривизна линии S), то основные формы биметрической системы, как нетрудно показать, примут вид

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\omega} &= \cos\alpha\, dx + \sin\alpha\, dy,\\
\overset{2}{\omega} &= \left(\frac{\partial k}{\partial\alpha}\sin\alpha - k\cos\alpha\right)dx - \left(\frac{\partial k}{\partial\alpha}\cos\alpha + k\sin\alpha\right)dy + d\alpha,\\
\overset{0}{\omega} &= -\sin\alpha\, dx + \cos\alpha\, dy
\end{aligned} \tag{23}$$

[ср. с (16а)]. Здесь формы уже подобраны так, чтобы выполнялись условия (12).

Структурные коэффициенты этой биметрической системы равны

$$\begin{aligned}
C^1_{10} &= -k, \quad C^1_{20} = -1;\\
C^2_{10} &= \left(\frac{\partial^2 k}{\partial x\partial\alpha}\cos\alpha + \frac{\partial^2 k}{\partial y\partial\alpha}\sin\alpha\right) + k\frac{\partial^2 k}{\partial\alpha^2} +\\
&\qquad + \left(\frac{\partial k}{\partial x}\sin\alpha - \frac{\partial k}{\partial y}\cos\alpha\right) + k^2,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$C^2_{20} = \frac{\partial^2 k}{\partial\alpha^2} + k; \quad C^0_{10} = \frac{\partial k}{\partial\alpha}, \quad C^0_{20} = 0.$$

Так как $C_{20}^{0} \equiv 0$, то нулевые линии первой метрики — точки — допускают меру $\int [\overset{1}{\omega}\ \overset{0}{\omega}] = \int [dx\, dy]$. Что же касается множества линий S, то здесь мера существует лишь в том случае, когда

$$C_{10}^{0} = \frac{\partial k}{\partial \alpha} \equiv 0, \tag{25}$$

т. е. когда функция $k = k(x, y, \alpha)$ не зависит от α; геометрически это означает, что *все линии S, проходящие через фиксированную точку плоскости, имеют в этой точке одинаковые кривизны.* Плотность множества линий S в этом случае равна

$$dS = [\overset{2}{\omega}\ \overset{0}{\omega}] = \sin\alpha\,[dx\, d\alpha] - \cos\alpha\,[dy\, d\alpha] - k\,[dx\, dy]. \tag{26}$$

В частном случае, когда $k \equiv 0$ и линии S являются прямыми, мы снова приходим к плотности множества прямых, определенной в § 2 [ср. формулу (4.1) на стр. 28].

Формула (26) позволяет перенести на линии S многие результаты первой части книги, относящиеся к прямым. Мы ограничимся здесь лишь несколькими простейшими теоремами, касающимися меры линий S.

1) Рассмотрим множество всех линий S, пересекающих фиксированную кривую C. Линейные элементы на линиях S мы будем выбирать так, чтобы все точки, отвечающие этим линейным элементам, принадлежали C. В таком случае при интегрировании третий член плотности (26) дает $\int\limits_C k\,[dx\, dy] = 0$; следовательно, результат интегрирования не будет зависеть от функции $k(x, y)$. Поэтому на кривые S переносится без всякого изменения формула (2.13) из § 2:

$$\int n\, dS = 2L, \tag{27}$$

а также и все результаты пп. 4, 5 из § 2 (только под выпуклыми кривыми в теоремах п. 2 теперь надо понимать замкнутые кривые, которые каждая линия S пересекает в двух точках).

2) Без всякого изменения переносятся на случай линий S все результаты § 4 (во всяком случае, если в рассматри-

ваемой области пространства линейных элементов каждые две линии S пересекаются в единственной точке).

3) Выделим на каждой кривой S из некоторого двупараметрического множества по линейному элементу так, чтобы никакие два из этих линейных элементов не исходили из одной точки; в таком случае (при естественных предположениях непрерывности) множество точек заполнит некоторую область K плоскости. Найдем меру рассматриваемого множества линий S.

Пусть Σ — интегральные кривые нашего двупараметрического множества линейных элементов, причем через каждую точку (x, y) проходит единственная линия Σ, имеющая в этой точке кривизну $\varkappa(x, y)$. Вдоль линии Σ имеем $d\alpha/ds = \varkappa(x, y)$, $ds = dx\cos\alpha = dy\sin\alpha$; заменяя в первом члене выражения плотности (26) $d\alpha$ на $\varkappa\sin\alpha\, dy$, а во втором члене — на $\varkappa\cos\alpha\, dx$, получаем, что искомая мера равна

$$\int |\varkappa(x, y) - k(x, y)|\, dxdy \tag{28}$$

(знак абсолютной величины поставлен потому, что плотность линий S, как всегда, считается положительной).

Перейдем теперь к биметрической системе, которая в определенном смысле является «двойственной» к построенной выше. Линейные элементы мы будем теперь задавать нормальными координатами p, φ прямой и расстоянием t заданной на прямой точки от основания перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат (см. § 3). За нулевые линии первой и второй метрик мы примем семейство линий S, определенное дифференциальным уравнением

$$\frac{ds}{d\varphi} = \rho(p, \varphi, t) \tag{29}$$

(ρ есть радиус кривизны линии S), и прямые; условимся еще, что $\int ds_1 = \int \overset{1}{\omega}$ вдоль прямых совпадает с обыкновенным расстоянием и $\int ds_2 = \int \overset{2}{\omega}$ вдоль линий S совпадает с углом поворота касательной к кривой. При этом основные формы биметрической системы принимают вид

$$\overset{1}{\omega} = \left(t\frac{\partial\rho}{\partial t} + p - \rho\right)d\varphi - \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dp + dt, \quad \overset{2}{\omega} = d\varphi,$$
$$\overset{0}{\omega} = -t\,d\varphi + dp. \tag{30}$$

Структурные коэффициенты этой системы равны

$$C^1_{10} = \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}, \quad C^1_{20} = \frac{\partial^2\rho}{\partial t\,\partial\varphi} + t\frac{\partial^2\rho}{\partial t\,\partial p} + (\rho - p)\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \frac{\partial\rho}{\partial p} + 1;$$
$$C^2_{10} = 0; \quad C^2_{20} = 0; \quad C^0_{10} = 0, \quad C^0_{20} = \frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{31}$$

Итак, мы видим, что нулевые линии второй метрики — прямые — во всех случаях допускают меру $\int[\overset{2}{\omega}\,\overset{0}{\omega}] = \int[d\varphi\,dp]$, совпадающую с рассмотренной в § 2. Что же касается семейства линий S, то здесь мера существует лишь в том случае, если

$$C^0_{20} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \tag{32}$$

т. е. если *все линии S, касающиеся фиксированной прямой, имеют в точках касания одинаковую кривизну*; при этом плотность множества линий S равна

$$[\overset{1}{\omega}\,\overset{0}{\omega}] = (p - \rho)[d\varphi\,dp] - t\,[dt\,d\varphi] + [dt\,dp]. \tag{33}$$

Из формулы (33), в полной аналогии с формулой (28), выводим, что если множество линий S определено двупараметрическим множеством линейных элементов, из которых никакие два не принадлежат одной прямой, то мера множества линий S равна

$$\int |r(p, \varphi) - \rho(p, \varphi)|\,dp\,d\varphi, \tag{34}$$

где $r(p, \varphi)$ — радиус кривизны интегральной линии Σ семейства линейных элементов, касающейся прямой (p, φ).

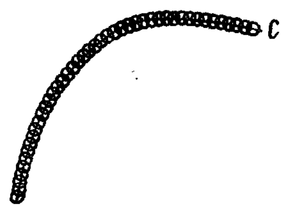
Рассмотрим несколько частных случаев формулы (34).

1) Если кривые S суть точки, то $\rho = 0$ и плотность (33) совпадает с обычным элементом площади. Формула (34)

имеет в этом случае следующий смысл. Рассмотрим некоторое двупараметрическое семейство прямых (p, φ) и выберем на каждой прямой по одной точке; пусть $r(p, \varphi)$ — радиусы кривизны интегральных кривых полученного множества линейных элементов. В таком случае площадь области, покрытой точками, равна

$$\int r\,dp\,d\varphi. \tag{35}$$

Эта формула дает точное выражение тому интуитивно ясному факту, что радиусы кривизны r будут тем меньше, чем «теснее» расположены точки на прямых.



Фиг. I

2) Пусть кривые семейства снова суть точки; за множество интегральных кривых Σ примем множество всех окружностей (фиксированного) малого радиуса r, центры которых расположены на некоторой кривой C (фиг. I); двупараметрическое множество прямых будет образовано касательными к этим окружностям. При этом в качестве меры множества всех точек окружностей мы получим величину $r\int dp\,d\varphi$. Так как, с другой стороны, площадь покрытой окружностями области с точностью до величины порядка r равна $2Lr$, где L — длина C, то, устремляя r к нулю, мы снова приходим к формуле (2.13).

3) Рассмотрим множество всех линий S, пересекающих фиксированную кривую C. Если характеризовать каждую линию S линейным элементом, исходящим из точки кривой C, то мы будем иметь $r = 0$; при этом мы придем к формуле

$$\int n\,dS = \int \rho\,dp\,d\varphi, \tag{36}$$

в которой $\rho = \rho(p, \varphi)$ означает радиус кривизны линии S в точке пересечения ее с кривой C, а $n = n(S)$ есть число точек пересечения линии S с кривой C.

3. Перенесение на интегральную геометрию на поверхности; дальнейшие обобщения (см. Б. В. Лесовой [1]). Не представляет труда перенесение большинства результатов предыдущего пункта на тот случай, когда линии расположены на произвольной поверхности. Для того, чтобы сохранить аналогию с формулами п. 2, мы отнесем поверхность к *изотермической* системе координат u, v, в которой метрическая форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = e^{2\mu(u, v)}(du^2 + dv^2); \tag{37}$$

семейство линий S зададим функцией $k = k(u, v, \alpha)$, где k — *геодезическая* кривизна линии S, проходящей через точку (u, v) в направлении, образующем угол α с линией $u = \text{const}$. Рассмотрим теперь биметрическую систему, для которой нулевыми линиями первой и второй метрик служат точки и линии S, причем вдоль линии S $ds_1 = \overset{1}{\omega}$ совпадает с элементом длины дуги кривой, а «вдоль точки» $ds_2 = \overset{2}{\omega}$ совпадает с элементом $d\alpha$ угла поворота линейного элемента. Основные формы такой биметрической системы (нормированные условиями $C^0_{12} = 1$, $C^1_{12} = C^2_{12} = 0$) имеют вид

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\omega} &= e^{\mu}(\cos\alpha\, du + \sin\alpha\, dv),\\
\overset{2}{\omega} &= e^{\mu}\left(\frac{\partial k}{\partial\alpha}\sin\alpha - k\cos\alpha - e^{-\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)du -\\
&\qquad - e^{\mu}\left(\frac{\partial k}{\partial\alpha}\cos\alpha + k\sin\alpha - e^{-\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)dv + d\alpha,\\
\overset{0}{\omega} &= e^{\mu}(-\sin\alpha\, du + \cos\alpha\, dv),
\end{aligned} \tag{38}$$

а структурные коэффициенты C^0_{10} и C^0_{20} равны

$$C^0_{10} = \frac{\partial k}{\partial\alpha}, \qquad C^0_{20} = 0. \tag{39}$$

Таким образом, нулевые линии первой метрики — точки — всегда имеют меру $\int [\overset{1}{\omega}\ \overset{0}{\omega}]$, совпадающую с площадью поверхности. Что же касается линий S, то здесь условие существования меры имеет вид

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha}=0; \tag{40}$$

оно означает, что все линии S, проходящие через фиксированную точку поверхности, должны иметь в этой точке одинаковую геодезическую кривизну. При этом плотность множества линий S равна

$$\begin{aligned} dS &= [\overset{2}{\omega}\ \overset{0}{\omega}] = e^{\mu}\sin\alpha\,[du\,d\alpha] - e^{\mu}\cos\alpha\,[dv\,d\alpha] - \\ &\quad - e^{\mu}\left(e^{\mu}k - \frac{\partial\mu}{\partial u}\sin\alpha + \frac{\partial\mu}{\partial v}\cos\alpha\right)[du\,dv]. \end{aligned} \tag{41}$$

Для случая геодезических линий $k=0$ и выражение (41) принимает вид

$$\begin{aligned} &e^{\mu}\sin\alpha\,[du\,d\alpha] - e^{\mu}\cos\alpha\,[dv\,d\alpha] + e^{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}\sin\alpha - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial\mu}{\partial v}\cos\alpha\right)[du\,dv]. \end{aligned} \tag{42}$$

Это последнее выражение совпадает с (11.13). Действительно, в изотермических координатах (u, v) функция (11.10) принимает вид $F(u, v, u', v') = e^{\mu(u,v)}\sqrt{u'^2+v'^2}$; следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial u'} = e^{\mu}\frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}} = e^{\mu}\cos\alpha,$$

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = -e^{\mu}\sin\alpha\,d\alpha + e^{\mu}\cos\alpha\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}du + \frac{\partial\mu}{\partial v}dv\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial v'} = e^{\mu}\frac{v'}{\sqrt{u'^2+v'^2}} = e^{\mu}\sin\alpha,$$

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right) = e^{\mu}\cos\alpha\,d\alpha + e^{\mu}\sin\alpha\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}du + \frac{\partial\mu}{\partial v}dv\right)$$

и $\left[du\,d\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right] + \left[dv\,d\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right)\right]$ по абсолютной величине совпадает с (42).

Все выводы п. 2, вытекающие из формулы (26), *почти без изменений переносятся и на более общий случай линий геодезической кривизны $k = k(u, v)$, расположенных на произвольной поверхности.* Таким образом, мы получаем возможность обобщить многие результаты второй части книги, относящиеся к плотности геодезических линий поверхности.

В заключение укажем несколько других возможных путей определения меры в двупараметрическом семействе линий S, расположенных на произвольной поверхности. Присоединим к нашему семейству линий еще одно двупараметрическое семейство; линии второго семейства будем называть линиями T. Построим теперь в множестве линейных элементов поверхности биметрическую систему следующим образом. Условимся, что нулевыми линиями первой метрики являются линии S, а второй метрики — линии T; кроме того, пусть вдоль линий T $ds_1 = \overset{1}{\omega}$ совпадает с элементом длины дуги, а вдоль линий S $ds_2 = \overset{2}{\omega}$ совпадает с элементом длины дуги. Если структурный коэффициент C^0_{20} этой биметрической системы равен нулю, то она определяет меру в множестве линий S; в силу определения биметрической системы, эта мера *будет инвариантна относительно изометрических преобразований поверхности* [подобно рассмотренной во второй части книги плотности множества геодезических линий, выражение (11.13) которой, очевидно, целиком относится к внутренней геометрии поверхности].

Определив основные пфаффовы формы и структурные коэффициенты рассматриваемой биметрической системы, мы придем к следующим результатам. Если потребовать существования меры лишь у множества линий S, то само семейство этих линий можно выбирать *произвольно*; при этом семейство линий T можно присоединять к данному семейству линий S весьма многими способами и мера множеств линий S будет существенно *зависеть от выбора линий T* (что, разумеется, является весьма значительным дефектом такого определения меры). Но если потребовать *существования меры в обоих семействах линий S* и T (т. е. обращения в нуль структурных коэффициентов C^0_{10} и C^0_{20}), то выбор семейства линий S уже не будет произвольным.

А именно, при этом оказывается необходимым (и достаточным), чтобы характеризующая семейство линий S функция $k(u, v, \alpha)$ (см. стр. 165) имела вид

$$k = a(u, v) - e^{-\mu(u, v)}\left(\frac{\partial b(u, v)}{\partial u}\sin\alpha - \frac{\partial b(u, v)}{\partial v}\cos\alpha\right), \quad (43)$$

где $a(u, v)$ и $b(u, v)$ — произвольные функции точки поверхности. При этом выбор семейства линий T все еще остается неоднозначным; однако *мера множеств линий S оказывается не зависящей от выбора семейства линий T.* В частном случае, когда $b = 0$, $k = a(u, v)$ и, следовательно, семейство линий S допускает также плотность (41), новое определение плотности оказывается *совпадающим* с (41).

Наконец, представляет определенный интерес следующее определение меры множества линий, расположенных на произвольной поверхности. Как и прежде, примем за нулевые линии первой и второй метрик биметрической системы линии двух двупараметрических семейств, которые мы снова назовем линиями S и линиями T; кроме того, условимся, что «вдоль точек» и $ds_1 = \overset{1}{\omega}$, и $ds_2 = \overset{2}{\omega}$ совпадают с элементом $d\alpha$ угла поворота линейного элемента. Если структурный коэффициент C_{20}^0 построенной биметрической системы равен нулю, то она определит меру в множестве линий S; при этом, в силу определения биметрической системы, *мера будет инвариантна относительно конформных преобразований поверхности.*

Детальное исследование новой биметрической системы приводит к результатам, весьма близким к предыдущим. Требование существования меры лишь у множеств линий S не позволяет выделить какие-либо семейства этих линий; при этом мера множества линий S оказывается существенно зависящей от выбора семейства линий T. Однако, если потребовать, чтобы меру допускали и множества линий S, и множества линий T, то выбор семейства линий S уже не будет произволен; здесь также оказывается необходимым, чтобы функция $k = k(u, v, \alpha)$, определяющая это семейство, имела вид (43), т. е. чтобы семейство линий S принадлежало к тому же классу, что и раньше. При этом и здесь *мера множества линий S оказывается не зави-*

сящей от выбора семейства линий T (выбор этого второго семейства линий здесь также неоднозначен); особенно интересно то, что *полученная мера оказывается совпадающей с мерой, определенной при помощи биметрической системы прежнего типа*, которая, таким образом, инвариантна не только относительно изометрических преобразований, но и относительно произвольных конформных преобразований поверхности.

ЛИТЕРАТУРА[1])

Баланза [Balanzat M.]

[1*] Sur quelques formules de la géométrie intégrale dans un espace á n dimensions, Portugaliae Math., 3 (1942), 87—94.

Банах [Banach S.]

[1*] Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, Fundamenta Math., 7 (1925), 225—236.

Бервальд, Варга [Berwald L., Varga O.]

[1*] Integralgeometrie 24. Über Schiebungen im Raum, Math. Z., 42 (1936), 710—736.

[2*] Integralgeometrie 25. Über die Körper constanter Helligkeit, Math. Z., 42 (1936), 737—738.

Блох, Гийомен [Bloch A., Guillaumin G.]

[1*] La géométrie intégrale du contour gauche, Paris, 1949.

Бляшке [Blaschke W.]

[1] Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises, Math. Z., 1 (1948), 52—57.

[2] Integralgeometrie 1. Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n, Paris, 1935.

[3] Integralgeometrie 2. Zu Ergebnissen von M. W. Crofton, Bulletin Math. de la Soc. Roumaine des Sciences, 37 (1935), 3—11.

[4] Vorlesungen über Integralgeometrie, 1. Heft, 2. Aufl., Berlin, 1936.
Русский перевод: Бляшке В., Лекции по интегральной геометрии, Усп. Матем. Наук, вып. V (1938), 97—149.

[5*] Cinematica Integrale, Rendiconti della R. Ac. dei Lincei, 1. 4. 1936.

[6*] Un contributo alla Cinematica Integrale, Rendiconti della R. Ac. dei Lincei, 3. 5. 1936.

[7*] Über Integralgeometrie, Jahresber. der Deutsch. Math. Verein, 46 (1936).

[8*] Integralgeometrie 10. Eine isoperimetrische Eigenschaft der Kugel, Bulletin Math. de la Soc. Roumaine des Sciences, 37(2), (1936), 3—7.

---

[1]) Названия, отмеченные звездочкой, добавлены редакторами перевода. —*Прим. ред.*

[9] Integralgeometrie 11. Zur Variationsrechnung, Hamburger Abhandlungen, **11** (1936), 359—366.
[10*] Integralgeometrie 12. Vollkommene optische Instrumente, Hamburger Abhandlungen, **11** (1936), 409—412.
[11*] Integralgeometrie 13. Zur Kinematik, Math. *Z.*, **41** (1936), 465—478.
[12*] Integralgeometrie 14. Ein Gegenseitigkeitsgesetz der Optik, Math. Ann., **113** (1936), 110—112.
[13*] Integralgeometrie 17. Über Kinematik, Deltion, Athen, 1936, 3—14.
[14*] Integralgeometrie 20. Zur elliptischen Geometrie, Math. *Z.*, **41** (1936), 785—786.
[15] Vorlesungen über Integralgeometrie, 2. Heft, Leipzig—Berlin, 1937.
[16*] Integralgeometrie 21. Über Schiebungen, Math. Z., **42** (1937), 1—12.
[17] Integralgeometrie 22. Über geschlossene Kurven und Flächen in der elliptischen Geometrie, Hamburger Abhandlungen, **12** (1937), 111—113.
[18*] Invarianti di complessi, Rendiconti della R. Ac. dei Lincei, 1937.
[19*] Densita negli spazi de Hermite, Rendiconti della R. Ac. dei Lincei, VI, **29** (1939), 105—108.
[20*] Zur Integralgeometrie, Rend. Circ. mat. Palermo II, **1** (1952), 108—110.
[21*] Vorlesungen über Integralgeometrie, 3te Aufl., Berlin, 1955.

Бляшке, Варга [Blaschke W., Varga O.]
[1*] Integralgeometrie 9. Über Mittelwerte an Eikörpern, Mathematica 12, Bukarest, 1936, 65—80.

Буцано [Buzano P.]
[1*] La geometria integrale, Archimede Firenze, 2 (1950), 45—52.

Варга [Varga O.]
[1*] Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum, Math. Z., **40** (1935), 387—405.
[2] Integralgeometrie 8. Über Maße von linearer Mannigfaltigkeit im projectiven Raum P_n, Revista Mat. Hispano-Americana (2), **10** (1935), 241—264; (2), **11** (1936), 1—14.
[3*] Integralgeometrie 21. Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen, Math. Z., **41** (1936), 768—784.
[4*] Über die Integralvarianten, die zu einer Kurve in der Hermitschen Geometrie gehören, Acta Litt. Sc. Szeged, 9 (1939), 88—102.

Вейль А. [Weyl A.]
[1*] L'intégration dans les groupes topologiques, Paris, 1940. Русский перевод: Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., 1950.

[2] Sur quelques resultats de Siegel, Summa Braziliensis Math., 1 (1946).

Видаль-Абаскаль [Vidal Abaskal E.]

[1] Geometria Integral sobre las superficies curvas, Santjago de Compostela, 1950 (Publicationes del Observatorio de Santjago, No 7).
[2*] Revista Mat. Hispano Americana (4) (1942), 132—142.
[3*] On the foundations of the integral geometry, Mem. Real Ac. Ci. Madr. Ser. Ci. Exact., 4, No 4 (1953).

Главка [Hlawka E.]

[1] Zur Geometrie der Zahlen, Math. Z., 49 (1943), 285—312.

Грюнвальд, Туран [Grünwald G., Turan P.]

[1] Über den Blochschen Satz, Acta Litt. Sc. R. Univ. Hungaricae, 8 (1936—1937), 238.

Дельтей [Deltheil]

[1] Probabilités géométriques, Paris, 1926.
[2*] Probabilités geometriques, Scientia, 52 (1932), 1—10.

Де Рам [De Rham]

[1] Sur un procédé de formation d'invariants integraux, Jahresber. der Deutsch. Math. Verein, 49 (1939), 156—161.
[2*] Über mehrfache Integrale, Hamburger Abhandlungen, 1, 313—339.

Донто [Dontot, R]

[1*] Sur les invariants intégraux et quelques points d'Optique geómétrique, Bull. de la Soc. math. de France, 42 (1914), 53—91.

Дринфельд Г. И.

[1*] О некоторых основных формулах интегральной геометрии, I, Зап. Харьк. Мат. Общ. 22, 1950; II. Зап. Мат. Отд. Физ.-мат. ф-та и Харьк. Мат. Общ., Сер. 4, 23, 1952, стр. 61—71.

Зигель [Siegel C. L.]

[1] A mean value theorem in geometry of numbers, Ann. of Math., 46 (1945), 340—347.

Каган В. Ф.

[1*] Основы теории поверхностей, тт. I, II, М.—Л., 1947—48.
[2*] Основания геометрии, т. II, М., 1956.

Каратеодори [Carathéodory C.]

[1*] Über das lineare Maß von Punktmengen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1914), 404—426.
[2*] Wariazionsrechnung und partielle Differentialgleichungen ersten Ordnung, 1935.

Карлеман [Carleman T.]

[1] Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen, Math. Z., 3 (1919), 1—8.

Картан [Cartan E.]

[1*] La théorie des groupes finis et contenus et l'analisis situs, Paris, 1930.
Русский перевод: Картан Э., Теория конечных непрерывных групп и топология. В сборнике «Геометрия групп Ли и симметрические пространства», М., 1949.
[2] Le principe de la dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangetiel et de l'espace reglé, Bull. de la Soc. Math. de France, 24 (1896), 140—177.
[3] Léçons sur les invariants intégraux, Paris, 1922.
Русский перевод: Картан Э., Интегральные инварианты, М.—Л., 1940.
[4*] Sur les invariants untégraux de certaines espaces et les proprietés topologiques de ces espaces, Ann. Soc. Pol. M., 8 (1929), 181—225.
[5] La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés, Paris, 1935.
Русский перевод: Картан Э., Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства, М.—Л., 1933.
[6] La théorie des groupes finis et continus et la Géométrie differentielle traitées par la méthode du repère mobile, Paris, 1937.
[7] Les systèmes différentiells extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, 1945.

Ковалевский [Kovalewski G.]

[1] Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen, Berlin, 1931.

Колмогоров А. Н.

[1*] Beiträge zur Maßtheorie, Math. Ann., 107 (1932), 351—366.

Крофтон [Crofton M. W.]

[1] On the theory of local probability, Trans. of the Roy. Soc. of London, 158 (1868), 181—199.
[2] Geometrical theorems related to mean values, Proc. of the London Math. Soc., 8 (1877), 304—309.
[3] Статья Probability в Encyclopedia Britanica, 9th ed., vol. 19 (1885), 784—788.

Кулидж [Coolidge J. L.]

[1] The elements of non-euclidean geometry, Oxford, 1909.

Курита [Kurita M.]

[1*] An extension of Poincaré formula in integral geometry. Nagoya Math. J., **2** (1951), 55—61.
[2*] On some formulas about volume and surface area, Nagoya Math. J., **6** (1953), 109—117.

Лебег [Lebesgue H.]

[1] Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton, Nouvelles Annales de Math. (4), **12** (1912), 481—502.

Лесовой Б. В.

[1*] Мера площади в двупараметрическом семействе кривых на поверхности, Труды сем. по вект. и тенз. анал., VI (1948), 447—493.

Люстерник Л. А.

[1*] Выпуклые тела, М.—Л., 1941. [В Гостехиздате готовится к печати новое издание.]

Мак [Maak W.]

[1*] Integralgeometrie 18. Grundlagen der ebenen Integralgeometrie, Hamburger Abhandlungen, **12** (1937), 83—110.
[2*] Berichtigung zur Integralgeometrie 18, там же, **12** (1938), 179.
[3] Integralgeometrie 27. Über stetige Kurven, Hamburger Abhandlungen, **12** (1938), 163—178.
[4*] Integralgeometrie 29. Oberflächeintegral und Stokes Formel im gewöhnlichen Raume, Math. Ann., **116** (1939), 574—597.
[5] Schnittpunktanzahl rektifizierbarer und nichtrektifizierbarer Kurven, Math. Ann., **118** (1942), 299—304.
[6*] Integralgeometrie, Naturforsch. und Medizin in Deutschland, 1939—1946, Bd. 2, Wiesbaden, 1948, 231—237.

Мюллер [Muller A.]

[1*] Integralgeometrie 16. Dichten linearer Mannigfaltigkeiten in euklidischen und nichteuklidischen R_n. Math. Z., **42** (1936), 101—124.

Мюллер [Müller H. R.]

[1*] Berechnung Integralgeometrischen Dichten, Jahresber. der Deutsch. Math. Verein, **47** (1937), 14.
[2*] Über Momente ersten und zweiten Grades in der Integralgeometrie, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **2** (1953), 119—140.

Нёбелинг [Nöbeling G.]

[1*] Über die Länge der Euklidischen Kontinuen, Jahresber. der Deutsch. Math. Verein, **52** (1942), 132—160, 189—197.
[2*] Über die Länge der Euklidischen Kontinuen, Monatshefte Math. Phys., **50** (1942), 282—287.

[3] Die Formel von Poincaré für beliebigen Kontinuen, Hamburger Abhandlungen, **15** (1943), 120—126.

[4] Über die Hauptformel der ebenen Kinematik von L. A. Santaló und W. Blaschke, I, Math. Ann., **120** (1949), 585—614, II, Math. Ann., **120** (1949), 615—633.

[5*] Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn W. Maak, Hamburger Abhandlungen, **17** (1951), 95—97.

Обрешков [Obrechkoff N.]

[1*] Интегральная геометрия гиперболического пространства, Труды Болгарской Акад. Наук, Мат. С., **2**, №2/3 (1949), 1—4.

Оуэнс [Owens O. G.]

[1*] The integral geometry definition of arc length for two dimensional Finsler spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **73** (1952), 198—210.

Петканчин [Petkantschin B.]

[1] Integralgeometrie 6. Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im n-dimensionalen Raum, Hamburger Abhandlungen, **11** (1936), 249—310.

Полиа [Polya G.]

[1*] Über geometrische Wahrscheinlichkeiten, Wiener Berichte, **126** (1917), 319—328.

[2*] Über geometrische Wahrscheinlichkeiten an konvexen Körpern, Leipziger Berichte, **69** (1917), 457—458.

Понтрягин Л. С.

[1*] Непрерывные группы, М.—Л., 1955.

Рашевский П. К.

[1*] Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.—Л., 1947.

[2*] Полиметрическая геометрия, Труды сем. по вект. и тенз. анал., V (1941), 21—147.

Режек [Režek J.)

[1*] A contribution to embracing the basic conceptions of the integral geometry within the scope of ideas of Lies group theory, Časopis pěst. Mat. Fys., **75** (1950), 17—26.

Розенфельд Б. А.

[1*] Неевклидовы геометрии, М., 1955.

Рооде [Rohde H.]

[1] Integralgeometrie 33. Unitäre Integralgeometrie, Hamburger Abhandlungen, **13** (1940), 295—318.

Рыжик И. М. и Градштейн И. С.

[1*] Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.—Л., 1951.

Сантало [Santaló L. A.]

[1*] Una fórmula integral para las figuras convexas en el plano y en el espacio, Revista Mat. Hispano-Americana (2), **10** (1935), 209—216.

[2*] Geometría Integral 4. Sobre la medida cinemática en el plano, Hamburger Abhandlungen, **11** (1936), 222—236.

[3*] Integralgeometrie 5. Über die kinematische Dichte im Raum, Paris, 1936.

[4*] Geometría Integral 7. Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio, Rev. Ac. Ci. exact, Madrid, **33** (1936), 3—50.

[5*] Geometría Integral 15. Formula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos parallelos movilos, Hamburger Abhandlungen, **12** (1937), 38—41.

[6] Géométrie Intégrale 32. Quelques formules intégrales dans le plan et dans l'espace, Hamburger Abhandlungen, **13** (1940), 344—356.

[7] Sur quelques problèmes de probabilités géométriques, Tohoku Math. J., **47** (1940), 159—171.

[8] A theorem and an inequality referring to rectifiable curves, Amer. J. of Math., **63** (1941), 635—644.

[9*] Generalisation of a problem of geometrical probabilities, Revista Union Mat. Argentina, **7** (1941), 129—132.

[10] Integral formulas in Groftons Style on the spheres and some inequalities reffering to spherical curves, Duke Math. J., **9** (1942), 707—722.

[11] Revista Union Mat. Argentina, **8** (1942), 113—125.

[12*] An integral formula concerning convex figures, Revista Union Mat. Argentina, **8** (1942).

[13] Integral geometry on surfaces of constant negative curvature, Duke Math. J., **10** (1943), 687—704.

[14] Acad. Brasileira da Ciências, **16** (1944).

[15*] Origin and development of integral geometry, Revista Univ. Cabol Peru, **12** (1944), 205—230.

[16] Revista Union Mat. Argentina, **10** (1945), 155—162.

[17] Portugaliae Mathematica, **8** (1949), 155—161.

[18] Integral geometry on surfaces, Duke Math. J., **16** (1949), 361—375.

[19*] On some integral formulas and mean values, concerning movable figures in the plane, Univ. Buenos Aires, Conts. Ci. Ser. A (1950), 23—45.

[20] Integral geometry in projective and affine spaces, Ann. of Math., **51** (1950), 739—755.

[21] Integral Geometry in General Spaces, Proc. International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1950.

[22*] Probleme der Integralgeometrie, Symp. probl. mat. Lat. Amer. (1951—1952), 23—40.

Сантало, Рей-Пастòр [Santaló L. A., Rey Pastor J.]

[1*] Integralgeometrie, Buenos Aires, 1947.
[2*] Zwei Kennzeichnende Eigenschaften der Kreise auf der Kugelfläche, Math. Notae, **11** (1951), 73—78.
[3*] Integralgeometrie in Räumen konstanter Krümmung, Publ. Comm. Nac. Energ. atom. Ser. mat., **1**, No 1 (1952).
[4*] Integral Geometry in Hermitian spaces, Amer. Math. J., **74** (1952), 423—434.
[5*] Measure of sets of geodesics in a Riemannian space and application to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces, Summa Braziliensis Math., **3** (1952), 1—11.
[6*] Algebraic curves and analytic curves, Revista Univ. Nac. Efa Perron Publ. Fac. Ci., Fisico mat. Ser. Segunda, **4** (1953), 493—506.

Сегре [Segre B.]

[1*] Invarianti differenziali relativi alle transformazioni puntuali e dualistiche fra due spazi euclidei, Rend. Circolo mat. Palermo, **60** (1936), 224—232.

Трикоми [Tricomi F.]

[1*] «Densità» di un continuo di punti o di rotte e «densità» di una corrispondenza, Rendiconti della R. Ac. dei Lincei, VI, **23** (1936), 313—316.

У Да-Янь [Wu Ta-Yen]

[1] Integralgeometrie 26. Über die kinematische Hauptformel, Math. Z., **43** (1938), 212—227.
[2] Integralgeometrie 28. Über elliptische Geometrie, Math. Z., **43** (1938), 495—521.

Уэно, Хомбу, Наито [Ueno S., Hambu H., Naito J.]
[1*] Some integralgeometric inequalitees, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. A6 (1951), 97—106.

Фавар [Favard H.]
[1] Une définition de la longueur et de l'aire, C. R. Acad. Sci., Paris, **194** (1932), 344—346.

Фари [Fáry I.]

[1*] Sur certaines inégalités géométriques, Acta Sci. Math. Szeged, **12 A** (1950), 117—124.

Федерер [Federer]

[1*] Some integralgeometric theorems, Trans. of the Amer. Math. Soc., **77** (1954), 238—261.

Феллер [Feller W.]

[1*] Some geometric inequalities, Duke Math. J., **9** (1942), 885—892.

Фейеш-Тот [Fejes-Tóth L.]

[1] Über einen geometrischen Satz, Math. Z., **46** (1940), 83—85.
[2*] Elementarer Beweis eines isoperimetrischen Problems, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **1** (1950), 273—276.
[3*] Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953.
[Русский перевод готовится к печати в Гостехиздате.]

Хадвигер [Hadwiger H.]

[1*] Über Mittelwerte im Figurengitter, Comm. Math. Helv., **11** (1939), 221—233.
[2] Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate, Comm. Math. Helv., **13** (1941), 195—200.
[3*] Flächeninhalte und Kurvenlänge als geometrische Mittelwerte, Jahresber. der Deutsch. Math. Verein, **51** (1941), 212—218.
[4*] Über Parallelinvarianten bei Eikörpern, Comm. Math. Helv., **15** (1943), 33—35.
[5*] Über beschränkte additive funktionale konvexer Polygone, Publ. Math. Debrecen, **1** (1949), 104—108.
[6*] Zur Inhaltstheorie der Polyeder, Collectanea Math., **3** (1950), 137—158.
[7] Einige Anwendungen eines Funktionalsatzes über konwexe Körper in der räumlichen Integralgeometrie, Monatshefte für Math., **54** (1950), 345—353.
[8*] Additive Funktionale k-dimensionaler Eikörper, Arch. Math., **4** (1953), 374—379.
[9*] Über additive Fuktionale k-dimensionalen Eipolyeder, Publ. Math. Debrecen, **3** (1954), 87—94.
[10*] Altes und neues über konvexe Körper, Basel, 1955.

Хаймович [Haimovici M.]

[1*] Géométrie intégrale sur les surfaces courbes, C. R. Acad. Sci., Paris, **203** (1936), 230—232.
[2] Géométrie intégrale sur les surfaces courbes, Ann. Scient. de l'Univ. de Jassy, **24** (1936), 57—74.

Чеботарев Н. Г.

[1*] Über die Bestimmung des Volumens in Lieschen Gruppen, Зап. Харьковского Н. И. Инст. Мат. (сер. 4), **14** (1937), 3—20.
[2*] Группы Ли, М.—Л., 1940.

Чжень Шен-шень [Chern Shiing-Shen]

[1*] Sulla formula principale cinematica dello spazio ad *n* dimensioni, Boll. Un. M. It., **2** (1940), 434—437.

[2] The Sc. Rep. of Nat. Tsiung Hua Univ., **4** (1940).

[3] On integral geometry in Klein spaces, Annals of Math., **43** (1942), 178—189.

[4] On the kinematik formula in the Euclidian space of *n* dimensions, Amer. J. Math., **74** (1952), 227—236.

Шерман [Sherman S.]

[1] A comparison of linear measure in the plane, Duke Math. J., **9** (1942), 1—9.

Эйзенхарт [Eisenhart L. P.]

[1*] Непрерывные группы преобразований, М., 1947.

Яглом И. М.

[1*] Тангенциальная метрика в двупараметрическом семействе кривых на плоскости, Труды сем. по вект. и тенз. анал., VII (1949), 341—361.

Яглом И. М., Болтянский В. Г.

[1*] Выпуклые фигуры, М.—Л., 1951.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Л. А. Сантало

ВВЕДЕНИЕ
В ИНТЕГРАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Редактор *М. С. АГРАНОВИЧ*
Технический редактор *М. П. Грибова*

Сдано в производство 29/II 1956 г.
Подписано к печати 21/IX 1956 г.
Т09803. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$ = 2,9 бум. л.
9,4 печ. л. Уч.-изд. л. 8,7
Изд. № 1/2742. Цена 8 р. 10 к. Заказ 177.

Издательство
иностранной литературы
Москва, Ново-Алексеевская, 52

20-я типография Главполиграфпрома
Министерства культуры СССР
Москва, Ново-Алексеевская, 52