

БИБЛИОТЕЧКА
ИНОСТРАННЫХ
КНИГ ДЛЯ
ЭКОНОМИСТОВ
И СТАТИСТИКОВ

М. КЕНДЭЛ

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

**БИБЛИОТЕЧКА
ИНОСТРАННЫХ КНИГ
ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ
И СТАТИСТИКОВ**

TIME-SERIES

Sir Maurice Kendall

M. A., Sc. D., F. B. A.

Second edition

Charles Griffin and Company Ltd
London and High Wycombe

М. КЕНДЭЛ

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Перевод с английского и предисловие
Ю. П. ЛУКАШИНА

МОСКВА
«ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА»
1981

БИБЛИОТЕЧКА ИНОСТРАННЫХ КНИГ
ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ И СТАТИСТИКОВ

Издательство «Финансы и статистика» выпускает на русском языке серию книг иностранных авторов, рассчитанных на специалистов, нуждающихся в пополнении своих математических и статистических знаний. Задача серии — познакомить советского читателя с методами, применяемыми за рубежом в экономическом анализе и различных хозяйственных расчетах. В серию включаются также работы по общим вопросам статистики.

Вышли из печати книги:

1. М. Броуди. О статистическом рассуждении. 1968.
2. А. Бернштейн. Справочник статистических решений. 1968.
3. У. Дж. Рейхман. Применение статистики. 1969.
4. Х. Крынский. Математика для экономистов. 1970.
5. С. Дайменд. Мир вероятностей. 1970.
6. А. Хьютсон. Дисперсионный анализ. 1971.
7. С. Лизер. Эконометрические методы и задачи. 1971.
8. Эм. Борель, Р. Дельтейль, Р. Юрон. Вероятности, ошибки. 1972.
9. Статистические методы исследования корреляций в экономике. 1972.
10. Л. Столерю. Равновесие и экономический рост. 1974.
11. Я. Окунь. Факторный анализ. 1974.
12. С. Сирл, У. Госман. Матричная алгебра в экономике. 1974.
13. Е. Грень. Статистические игры и их применение. 1975.
14. Д. Тёрнер. Вероятность, статистика и исследование операций. 1976.
15. Э. Кейн. Экономическая статистика и эконометрия. Вып. 1. 1977.
16. Э. Кейн. Экономическая статистика и эконометрия. Вып. 2. 1977.
17. Э. Колкот. Проверка значимости. 1978.
18. Г. Дэвид. Метод парных сравнений. 1978.
19. М. Г. Кенуй. Быстрые статистические вычисления. 1979.
20. Дж. Вайнберг, Дж. Шумекер. Статистика. 1979.
21. Н. Хастингс, Дж. Пикок. Справочник по статистическим распределениям. 1980.
22. А. Гильберт. Как работать с матрицами. 1981.
23. Кюн Ю. Описательная и индуктивная статистика.

Подготавливаются к изданию:

Эренберг А. Анализ и интерпретация статистических данных.
Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике.

РЕДКОЛЛЕГИЯ СЕРИИ

В. М. ИВАНОВА, В. А. КОЛЕМАЕВ, Г. Г. ПИРОГОВ, А. А. РЫВКИН,
Е. М. ЧЕТЫРКИН, Р. М. ЭНТОВ.

К 10805¹—128
41—81 (С) 0702000000 1702060000
010(01)—81

¹ Второй индекс 10803.

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Вниманию читателя предлагается перевод книги М. Кендэла «Временные ряды». С работами М. Кендэла, английского статистика с мировым именем, занимавшего с 1960 по 1962 г. пост президента Королевского статистического общества, советский читатель уже имел возможность познакомиться¹.

Отличительной чертой книги «Временные ряды» является то, что она в первую очередь предназначается для начинающего статистика-практика. Круг вопросов, рассматриваемых в ней, достаточно широк. С одной стороны, изучаются методы, представляющие арсенал исследователя одномерных и многомерных временных рядов. С другой стороны, сделан краткий обзор нерешенных проблем.

Автор прослеживает историю возникновения временных рядов как способа описания различных процессов, рассматривает общие вопросы, связанные с временными рядами, и, в частности, проблему соотношения объема выборки и количества информации, формулирует цели анализа временных рядов.

В книге изучаются несколько способов проверки случайности колебаний. В одном из них сопоставляется фактическое и ожидаемое число «поворотных точек» в ряду. В другом предполагается измерение расстояний между поворотными точками. Рассматриваются также ранговые критерии и критерии знаков разностей.

Большое внимание уделено трендам. Автор весьма подробно излагает технику построения скользящих средних. В приложении приведены многочисленные таблицы, позволяющие даже неискушенному исследователю быстро провести простейший анализ временного ряда, разложить его на компоненты и достичь цели с применением обычных

¹ См.: Юл Дж. Э. и Кендэл М. Дж. Теория статистики. М., Госстатиздат, 1960; Кендалл М. и Стьюарт А. Теория распределений. М., Наука, 1966; Кендалл М. и Моран П. Геометрические вероятности. М., Наука, 1972; Кендалл М. и Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973; Кендэл М. Ранговые корреляции. М., Статистика, 1975; Кендалл М. и Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М., Наука, 1976.

микрোকалькуляторов. Полиномиальные тренды предлагается исключать из ряда путем перехода к его разностям соответствующего порядка.

Одна из глав посвящена анализу сезонности. Здесь описаны три типа моделей: аддитивная, мультипликативная и смешанная. Особый интерес представляет метод выделения сезонности, разработанный Дж. Шискиным для Бюро переписей США. Этот метод широко применяется в практических статистических разработках в США, когда обрабатываются месячные и квартальные данные.

Автор подробно останавливается на анализе стационарных рядов. В качестве частных случаев авторегрессионных процессов исследуются марковский процесс и процесс Юла. В книге излагаются также основы корреляционного, регрессионного и спектрального анализа, исследуется величина смещения в оценке коэффициента автокорреляции, рассматриваются такие понятия, как спектр и спектральная функция, изучаются их свойства, описаны способы построения регрессионных уравнений с запаздывающими (лаговыми) переменными. Такие уравнения используются для получения прогнозов методом «автопроекции» (экстраполяции).

М. Кендэл, стремясь уложиться в небольшой объем, справедливо опускает математические выкладки, доказательства, останавливается на основных идеях и приводит лишь конечные результаты, необходимые для практического применения.

В целом задача, поставленная автором, решена успешно и книгу действительно можно считать кратким практическим руководством по анализу временных рядов. При небольшом объеме она знакомит читателя с важнейшими современными методами анализа временных рядов, причем для ее понимания не требуется высокой математической подготовки. Все это и послужило основанием для перевода книги М. Кендэла. Нам представляется, что предлагаемая работа поможет специалистам различного профиля, в частности экономисту и математику-статисту, часто совместно проводящим статистические исследования, быстрее прийти к взаимопониманию.

Отметим, однако, что некоторые из методов лишь упомянуты. К их числу относится метод Бокса—Дженкинса, о достоинствах которого свидетельствуют все новые и новые эмпирические исследования. Достаточно полное и простое изложение его можно найти в [11].

Для более глубокого изучения других проблем, затронутых в книге, существует ряд монографий, посвященных анализу временных рядов или отдельным его аспектам. Можно рекомендовать работы Т. Андерсона [2], Э. Хеннана [39], К. Гренджера и М. Хатанаки [35]. Полезно познакомиться и с рядом книг из серии «Математическая статистика для экономистов»¹, которая издается в нашей стране.

Ю. П. Лукашин

¹ См., например: Венецкий И. Г. Вариационные ряды и их характеристики. М., Статистика, 1970; Кильдишев Г. С. и Френкель А. А. Анализ временных рядов и прогнозирование. М., Статистика, 1973; Сиськов В. И. Корреляционный анализ в экономических исследованиях. М., Статистика, 1975; Вайну Я. Я.-Ф. Корреляция рядов динамики. М., Статистика, 1977.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

За последние тридцать лет теория временных рядов претерпела существенные изменения частично благодаря введению вероятностных идей там, где раньше подход был детерминистским, частично благодаря мощи электронных компьютеров, устранивших трудности, связанные с многочисленными и утомительными расчетами при исследовании временных рядов. Тем не менее имеется тенденция к появлению разрыва между утонченной теорией и ее практическим приложением. Несмотря на многочисленные публикации в научных и специальных журналах, лишь в немногих работах предпринимается попытка охватить предмет в целом в интересах статистика-практика.

Это обстоятельство и побудило меня написать предлагаемую читателю книгу. В ней преследуется цель представить основные идеи и методы анализа временных рядов, привести достаточное количество примеров, допускаемое ее объемом, и не прибегать к математике чаще, чем это необходимо. Я попытался написать такую книгу, которую мне бы хотелось иметь под рукой, когда много лет назад я впервые заинтересовался временными рядами.

За разрешение воспроизвести некоторые таблицы и рисунки выражаю глубокую признательность профессору Дадли Дж. Каудену и директору школы администраторов при университете Северной Каролины (таблицы приложения А), профессору Джеймсу Дарбину и редколлегии журнала «Biometrika» (таблицы приложения Б), профессору К. Гренджеру (рис. 8.4) и доктору Д. Дж. Райду (рис. 9.1).

Лондон,
Февраль, 1973 г.

М. Кендэл

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании исправлены опечатки, устранены неясности, расширен список рекомендуемой литературы. В остальном оно повторяет первое издание.

Лондон,
Декабрь, 1975 г.

М. Кендэл

I ОБЩИЕ ИДЕИ

1.1. Время, возможно, представляет собой наибольшую тайну в таинственной вселенной. Но его таинственная природа в этой книге нас, к счастью, не интересует. Мы смотрим на время так же, как Исаак Ньютон, как на плавно текущий поток, несущий этот необыкновенный мир с постоянной скоростью. Можно легко определять моменты времени и с большой точностью измерять интервалы между ними. В действительности, несмотря на то что ошибки и случайные возмущения большинства переменных, с которыми мы имеем дело, будут частыми и значительными, ошибки в измерении времени нам потребуется рассматривать лишь в исключительных случаях. Подобные трудности, возникающие при измерении интервалов времени, носят искусственный характер (так, например, абсурдно, что христианский мир строго зафиксировал рождество, а пасхальное воскресенье меняется в довольно широких пределах).

1.2. С давних пор человек измерял течение времени с помощью свечей, водяных часов, создавал календари, иногда со значительной точностью, и записывал последовательность своей жизни в виде летописей. Однако анализ временных рядов на научном уровне стал развиваться совсем недавно. Запись событий вдоль горизонтальной оси, на которой равные интервалы соответствуют равным промежуткам времени, должно быть, имела место тысячу лет назад; например, древние монашеские псалмы, записанные на одиннадцатилинейном нотном стане, являются разновидностью временных рядов. В этой связи рис. 1.1 может представлять интерес как древнейшая известная в западном мире диаграмма, в которой нашли явное отражение основные идеи временной диаграммы [32]. Она датируется десятым, возможно, одиннадцатым веком и имеется в рукописи, содержащей комментарий Макробиуса к «Сну Сципиона» Цицерона. Диаграмма должна была, по-видимому, представлять график наклона планетарных орбит как функцию времени. Зона зодиака задана на плоскости горизонтальной (временной) осью, разделенной на тридцать частей, ширина пояса зодиака представлена ординатой. Нет нужды останавливаться на точном астрономическом смысле диаграммы; главное в том, что даже в те далекие времена использовались время—абсцисса и переменная—ордината, хотя и примитивным ограниченным образом.

1.3. Несмотря на разработку Декартом координатной геометрии, изобразительное представление временного ряда было более поздним изобретением. Даже в 1879 г. Стэнли Джевокс, книга которого «Основы науки» [45] отнюдь не предназначалась для школьников, посчитал необходимым уделить внимание использованию диаграммной бумаги. По-видимому, первым (или, безусловно, одним из первых), кто представил временные диаграммы современного типа, был Уильям Плейфер, одна из диаграмм которого воспроизведена на рис. 1.2 (эта диаграмма была опубликована в 1821 г.). Плейфер, брат математика,

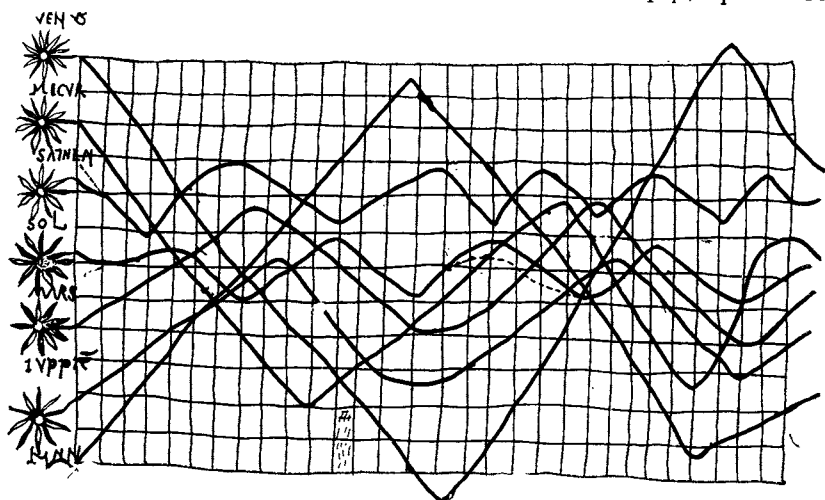


Рис. 1.1. График первых временных рядов

тика, известного геометрам как автор аксиомы Плейфера о параллельных прямых, неоднократно предъявлял претензии на приоритет в построении диаграмм, которые, справедливы они или нет, по крайней мере свидетельствуют о том, что эта процедура была неизвестна.

1.4. В девятнадцатом веке теория статистики не была цельной дисциплиной, какой она стала теперь. Исследования весьма широко велись в физических науках независимо от исследований в экономике и социологии, а в тот период идеи в физике были полностью детерминистскими (т. е. развитие явления во времени представлялось как подчиняющееся только детерминистским законам). Любые несовершенства теории и ее несоответствия фактам либо устранялись модификацией теории детерминистским образом (как это было, например, с открытием планеты Нептун), либо относились к ошибкам наблюдения. Когда во второй половине девятнадцатого века были предприняты попытки применить в бихейвиористских¹ и биологических науках методы, столь успешно использовавшиеся в физических науках, этот детерминистский подход был перенят вместе со всем разработанным математическим аппаратом. Современная теория статистики зароди-

¹ Имеются в виду экономика и социология. — Примеч. пер.

лась в момент осознания того, что, хотя индивидуумы могут вести себя недетерминистски, совокупности индивидуумов подчиняются законам, которые часто довольно легко могут быть выражены на языке математики.

1.5. Однако в анализе временных рядов сопротивление этой перемене точки зрения было более длительным, чем в какой-либо другой отрасли статистики. Почти вплоть до 1925 г. временные ряды рассматривались как генерированные детерминистски, а очевидные отклонения от трендов, цикличность или другие систематические типы

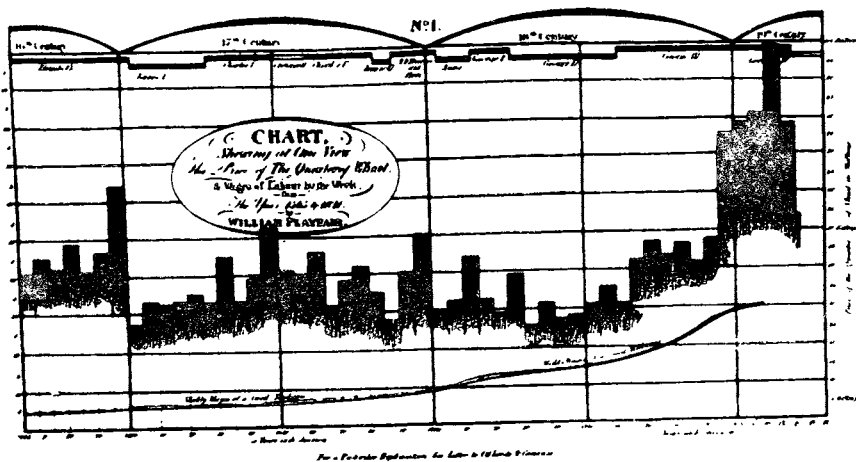


Рис. 1.2. Диаграмма из работы Шлейфера [66], объединяющая график и гистограмму

поведения, наблюдаемые в природе, интерпретировались как «ошибки», аналогичные ошибкам наблюдения. Несмотря на то что все они очень часто имели различные причины, к ним относились так же, как инженеры-электронщики относятся к «шуму» — как к случайному ряду возмущений, наложенному на систематическую часть. В частности, к таким колеблющимся явлениям, как «циклы» производства девятнадцатого века, применялся анализ Фурье, как если бы они были суммой некоторого числа гармонических членов, генерированных осциллятором классического типа. Неудача этих моделей в объяснении многих флуктуаций, наблюдаемых в таких явлениях, как производство, население и эпидемии, хотя и разочаровывала, но не остановила поисков в их основе циклических колебаний чисто гармонического типа. Фактически вера в их существование не умерла и поныне.

1.6. В 1927 г. плодотворной идеей, послужившей отправным моментом для многих научных работ в анализе временных рядов, выполненных с того времени, Эдни Юл [95] открыл новый этап. Исследуя число пятен на солнце, характер колебаний которого явно не может считаться полностью случайным, Юл был поражен тем фактом, что амплитуды ряда и расстояния между последовательными пиками и впадинами были нерегулярными. Пример, которым он воспользовал-

ся для объяснения нового подхода, стал классическим: если рассматривается свободное качание маятника, отклоняющегося на малый угол под действием силы тяжести, то хорошо известно, что его движение является гармоническим, т. е. оно может быть представлено синусоидальной или косинусоидальной волной с постоянными амплитудами и периодами колебаний. Но если маленький мальчик обстреливает маятник горохом нерегулярным образом, то его движение будет возмущено. Маятник будет качаться, но с нерегулярными амплитудами и периодами колебаний. Фактически вместо такого поведения, при котором расхождение между теорией и наблюдением можно отнести за счет незначительной ошибки, горох вызывает ряд толчков, *воздействующих на будущее движение системы*. Эта концепция приводит нас к теории стохастических процессов, важным разделом которой является теория стохастических временных рядов. Впоследствии ее полезность будет неоднократно продемонстрирована на примерах.

1.7. Характерная особенность временных рядов в отличие от других статистических объектов заключается в том, что наблюдения производятся последовательно во времени, а это не такое банальное замечание, как может показаться. Имеется в виду, что помимо всего прочего нас будет интересовать взаимосвязь значений, относящихся к различным моментам времени, сериальные корреляции членов ряда. Если рассматриваются несколько рядов как многомерный комплекс, то помимо возрастания объема вычислений при многомерном анализе, сам объект приобретает определенную степень сложности. В многомерном анализе, как это обычно принято, имеют дело со связями или взаимосвязями переменных независимо от каких-либо субъективных моментов. В многомерных временных рядах необходимо, кроме всего прочего, исследовать корреляции и кросс-корреляции рядов, когда одни из них опережают другие или отстают от них.

1.8. Мимоходом заметим, что могут встретиться еще более сложные случаи, требующие статистического исследования. Методы, которые мы применяем для анализа главным образом одномерных временных рядов, могут быть обобщены на случай исследования пространственных явлений, когда имеется более чем одно измерение, подобное, так сказать, времени. Например, нас может интересовать интенсивность заражения поля жуком-щелкуном (двумерный случай); или изменение скорости ветра в верхних слоях атмосферы (трехмерный случай). Общие теории в таких ситуациях становятся очень сложными и появляется опасность утраты связи с реальностью. Мы будем в значительной степени придерживаться правила рассматривать одномерное движение во времени.

АГРЕГИРОВАНИЕ

1.9. Одни переменные существуют в каждый момент времени и могут рассматриваться как существующие непрерывно. Например, температура в заданном месте, цена данного товара на открытом рынке или положение снаряда в полете. Другие образуются только путем агрегирования за определенный период. Например, количество осад-

ков, выпуск промышленной продукции, расстояние, пройденное авиалайнером. Третьи в свою очередь существуют (или начинают существовать) только в отдельные интервалы времени: урожай той или иной культуры в страдную пору, число голосов политической партии на всеобщих выборах, платежи, подлежащие уплате в конце кварталов. Иногда у нас нет возможности выбора моментов времени, когда делать наблюдения, например при определении урожаев в жатву. В других случаях определенный выбор возможен, но не без ограничений. Например, данные об импорте представляются обычно по месяцам и только в порядке исключения правительство дает цифры за более короткие интервалы или дробные периоды. В предельных случаях ряды можно наблюдать почти бесконечно или во всяком случае столь долго, насколько хватит нашего терпения и сил. Известными примерами могут служить записи на вращающемся барабане температуры и барометрического давления или альфа-ритмов головного мозга на энцефалографе.

1.10. Время от времени необходимо уделять определенное внимание выбору моментов времени для наблюдений в тех случаях, когда возможность выбора имеется. Часто при выборе наилучшего набора точек налицо конфликт интересов. В целях экономии обычно нежелательно увеличивать число наблюдений сверх необходимого. С другой стороны, нежелательны и очень редкие наблюдения, поскольку можно пропустить существенные особенности изучаемой ситуации. Если исследуются сезонные колебания, то следует делать наблюдения в нескольких точках в течение года. Если же эффект сезонных колебаний нужно устранить, то, видимо, лучше производить наблюдения в определенную дату года или (когда это допустимо) агрегировать их за весь год. В анализе временных рядов, как это будет продемонстрировано неоднократно, мало общих и универсальных правил, очень многое зависит от цели исследования.

Пример 1.1 [93]

В качестве примера эффектов, которые могут появляться у агрегированных рядов, рассмотрим случай, когда приращения временного ряда от одного периода времени к другому являются значениями случайной переменной ε с математическим ожиданием, равным нулю¹. Предполагается, что движение некоторых цен, например на фондовой бирже, имеет такой характер и, разумеется, ряды, их представляющие, очень сходны с так называемыми «блуждающими рядами». Таким образом, первые разности ряда случайны.

Затем предположим, что первые m членов ряда можно записать как

$$u_1, u_1 + \varepsilon_1, u_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \dots, u_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{m-1},$$

а второй набор m членов — как

$$u_1 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m, \dots, u_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{2m-1}. \quad (1.1)$$

¹ Из последующих рассуждений автора видно, что переменная ε характеризуется также постоянной во времени дисперсией и отсутствием автокорреляции. — *Примеч пер.*

Если вычислить среднее значение первого набора и вычесть его из среднего второго набора, то получим первую разность средних значений (которая эквивалентна увеличенной в m раз первой разности кумулятивного ряда)¹:

$$d = \frac{1}{m} \{ \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \dots + (m-1)\varepsilon_{m-1} + m\varepsilon_m + (m-1)\varepsilon_{m-1} + \dots + \varepsilon_{2m-1} \}. \quad (1.2)$$

Дисперсия будет²:

$$\text{var } d = \text{var } \varepsilon \cdot \frac{1}{m^2} \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} j^2 + \sum_{j=1}^m j^2 \right\} = \frac{\text{var } \varepsilon}{3m} (2m^2 + 1).$$

Умножая (1.1) на аналогичное выражение, продвинутое во времени t на m единиц вперед³, получаем ковариацию первых последовательных разностей:

$$\text{cov} = \text{var } \varepsilon \cdot \frac{1}{m^2} \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} j(j-1) + m(m-1) \right\} = \frac{m^2 - 1}{6m} \text{var } \varepsilon. \quad (1.3)$$

Поэтому корреляция между последовательными разностями кумулятивного ряда равна

$$\frac{m^2 - 1}{2(2m^2 + 1)}. \quad (1.4)$$

Таким образом, несмотря на то что первые разности исходного ряда независимы, первые разности кумулятивного ряда (или средние) не являются таковыми. Если $m = 12$, то корреляция составляет около 0,25, так что если даже разности от месяца к месяцу были независимы, разности кумулятивного ряда от года к году будут коррелированы.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИСКРЕТНОСТЬ

1.11. В дальнейшем, когда не делается оговорок о непрерывном или дискретном временном ряде, имеется в виду непрерывность переменной⁴, а не непрерывность во времени. Так, например, продукция авиационной промышленности является дискретной переменной, урожай сельскохозяйственной культуры — непрерывной переменной, несмотря на то что их сбор осуществляется в дискретные моменты времени. Строго говоря, численность населения в данной стране, при принятой договоренности, была бы дискретной, но числа обычно столь велики, что эту переменную можно рассматривать как непрерывную без серьезной потери в точности.

¹ Под кумулятивным рядом подразумевается ряд, полученный из исходного ряда путем последовательного его разбиения на группы по m членов и замены каждой группы ее суммой. — *Примеч. пер.*

² Символ var означает дисперсию. — *Примеч. пер.*

³ И беря математическое ожидание. — *Примеч. пер.*

⁴ Точнее, непрерывность величины переменной. — *Примеч. пер.*

1.12. У термина «непрерывность» имеется еще одно значение, используемое в контексте временных рядов, главным образом когда речь идет о рядах индексов, построенных на основе изменяющихся весов. Иллюстрацией может служить индекс цен на фондовой бирже. Чтобы построить такой индекс, скажем, для наиболее важных акций, необходимо каждой из рассматриваемых акций на том или ином основании приписать определенный вес, например, с учетом совокупного капитала соответствующих компаний в некоторый базовый момент времени. Эти веса меняются с течением времени, и как только они устаревают значительно, их следует обновлять. Таким образом, встает вопрос, является ли новый ряд «непрерывным» продолжением старого. На практике определенная степень «непрерывности» достигается путем сращивания индексов в точке изменения весов. Индексы курсов акций на самом деле следует обновлять в небольшой степени постоянно, так как некоторые акции выбывают (например, из-за слияния или объединения компаний), а другие начинают входить в некоторым образом определенный набор наиболее важных акций. Поэтому в литературе встречаются выражения типа «непрерывный ряд», которые означают не непрерывность во времени или измерении, а лишь непрерывность в том смысле, что ряд построен на приблизительно сопоставимой основе в пределах всего рассматриваемого периода.

КАЛЕНДАРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

1.13. В большинстве случаев мы будем рассматривать также ряды, члены которых получены либо путем наблюдения, либо путем агрегирования через равные интервалы времени. В физических, биологических или метеорологических исследованиях обычно можно обеспечить получение наблюдений такого рода. Однако в экономике и, разумеется, вообще при изучении различных видов поведения дело обстоит иначе. Проявляются эффекты разного рода нарушений, с которыми необходимо разобраться прежде, чем можно будет обрабатывать ряд уточненными методами. За некоторые эффекты нам остается лишь винить саму природу; так, ничего не поделаешь с тем, что астрономический год не содержит целого числа суток. Но большинство трудностей, особенно связанных с календарем, создано человеком. Прежде всего это неодинаковая продолжительность месяцев, а также тот факт, что месяц может включать четыре или пять уикэндов. Общественные праздники, а также церковные праздники, не имеющие определенной даты, в частности пасха, которая может приходиться то на первый, то на второй квартал года, вносят свой вклад в этот беспорядок. Даже ряды, полученные путем экспериментальных наблюдений в заводских условиях, могут быть несовершенными как в большом (например, из-за забастовок), так и в малом (например, из-за обеденных перерывов).

1.14. Методы, с помощью которых, говоря обыденным языком, можно «очистить» ряд, зависят от обстоятельств и возможностей. Укажем кратко некоторые из них.

(а) Определенную сопоставимость цифр, характеризующих выпуск продукции за календарный месяц, можно получить корректировкой путем приведения их к стандартному месяцу из 30 дней. Например, умножением выпуска продукции за февраль на 30/28, а за март на 30/31. (Было бы лучше вычесть из январского выпуска продукцию за 31 число и прибавить ее к февральскому выпуску и аналогично поступить с продукцией за 1 марта, но это, как правило, неприемлемо из-за административных трудностей.) Следует помнить, что совокупная продукция «скорректированных» таким образом месяцев не будет в точности равна продукции за год, даже если последняя «скорректирована» и приведена к году из 360 дней.

(б) Аналогичная сопоставимость промышленных показателей может быть получена путем корректирования числа рабочих дней в месяце.

(в) Краткосрочные эффекты иногда можно элиминировать агрегированием. Например, если работать с шестимесячными периодами вместо трехмесячных, когда это приемлемо, колебания, вызванные подвижностью пасхи, не представляются значительными. Если речь идет о средних ценах на рынке, который закрывается на уикэнды, то разрывов в информации можно избежать путем усреднения за месяц, и т. д.

(г) Относительно данных, связанных со стоимостями, вопрос остается открытым вследствие изменения покупательной способности денег. По-видимому, нет способа элиминирования таких изменений лучше, чем деление данных на некий индекс, измеряющий изменение покупательной способности денег.

ДЛИНА ВРЕМЕННОГО РЯДА

1.15. Когда говорят о «длине» ряда, обычно имеют в виду время, прошедшее от начального до конечного наблюдения. Но это же слово может также означать число наблюдений: ряд данных о месячном количестве осадков за десять лет может характеризоваться, например, длиной в 120. Пурист избегал бы употребления этого термина в таком смысле. Подобный ряд имел бы длину 10, 40, 120 или около 3652 в зависимости от того, делались ли наблюдения с интервалом в один год, ежеквартально, ежемесячно или ежедневно.

1.16. Более важный момент связан с количеством информации в ряде, измеряемом числом членов. В обычной статистической работе принято считать, что количество информации в случайной выборке пропорционально объему выборки. Спорным является вопрос относительно корректности использования здесь слова «информация», однако несомненная истина состоит в том, что дисперсия большинства оценок, полученных по случайной выборке, обратно пропорциональна объему выборки. В анализе временных рядов эта идея нуждается в модификации вследствие того, что последовательные величины не являются независимыми. На разговорном языке это означает, что ряд из $2n$ величин (даже если он охватывает в два раза больший промежуток времени) не говорит нам о чем-то в два раза больше, чем ряд из n величин. А если из ряда выборка заданной длины извлекается бо-

лее интенсивно путем сокращения интервала наблюдений вдвое (в результате чего плотность наблюдений удваивается), то необязательно многое будет добавлено к нашим знаниям при сильной положительной корреляции последовательных наблюдений. Вывод состоит в том, что n , число наблюдений, не является само по себе совершенной мерой информации. В дальнейшем увидим, что точность оценок, которые можно сделать на основе данных, в общем случае зависит не только от n , но и от внутренней структуры ряда.

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

1.17. Теперь представим несколько эмпирических рядов, которые потребуются нам позже для иллюстрации теоретического изложения. В табл. 1.1 приведены данные об урожае ячменя в Англии и Уэльсе за 56 лет с 1884 по 1939 г.; в табл. 1.2 содержатся сведения о поголовье овец в Англии и Уэльсе за 73 года с 1867 по 1939 г.; в табл. 1.3 —

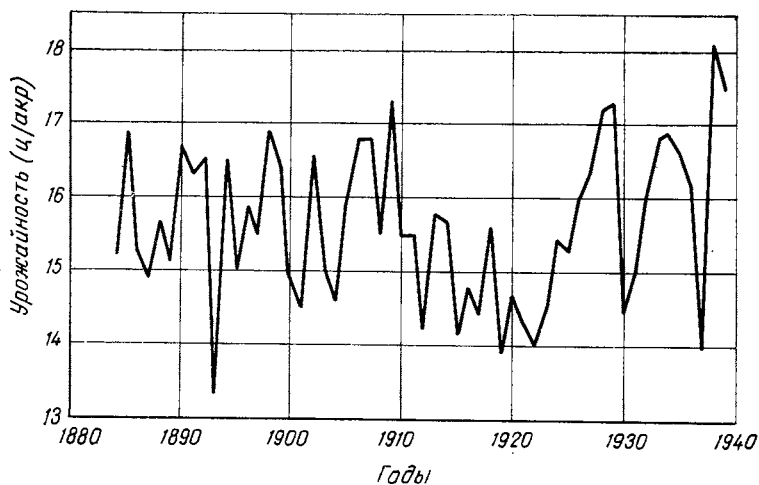


Рис. 1.3. График данных из табл. 1.1 (урожайность ячменя, ц/акр)

о расстояниях в милях, пройденных британскими авиалайнерами за 96 месяцев с января 1963 г. по декабрь 1970 г.; в табл. 1.4 — об иммиграции в США за 143 года с 1820 по 1962 г.; в табл. 1.5 — о числе рождений в зависимости от времени суток (данные по нескольким больницам США); в табл. 1.6 приведен квартальный средний индекс курса акций на лондонской бирже (по данным из Financial Times, FT).

1.18. На соответствующих диаграммах ряды изображены графически. Они являются довольно типичными представителями тех рядов, с которыми приходится иметь дело. Урожай ячменя, по закону природы, получают раз в год. Поголовье овец, хотя оно и существует непрерывно, фиксируется только раз в год в определенный день (4 июня),

Урожайность ячменя в Англии и Уэльсе с 1884 по 1939 г.
(в центнерах¹ на акр, данные из Agricultural Statistics)

Год	Урожай- ность	Год	Урожай- ность	Год	Урожай- ность
1884	15,2	1903	15,1	1922	14,0
1885	16,9	1904	14,6	1923	14,5
1886	15,3	1905	16,0	1924	15,4
1887	14,9	1906	16,8	1925	15,3
1888	15,7	1907	16,8	1926	16,0
1889	15,1	1908	15,5	1927	16,4
1890	16,7	1909	17,3	1928	17,2
1891	16,3	1910	15,5	1929	17,8
1892	16,5	1911	15,5	1930	14,4
1893	13,3	1912	14,2	1931	15,0
1894	16,5	1913	15,8	1932	16,0
1895	15,0	1914	15,7	1933	16,8
1896	15,9	1915	14,1	1934	16,9
1897	15,5	1916	14,8	1935	16,6
1898	16,9	1917	14,4	1936	16,2
1899	16,4	1918	15,6	1937	14,0
1900	14,9	1919	13,9	1938	18,1
1901	14,5	1920	14,7	1939	17,5
1902	16,6	1921	14,3		

¹ Центнер в Англии равен 50,8 кг. — *Примеч. пер.*

Таблица 1.2

Поголовье овец в Англии и Уэльсе с 1867 по 1939 г.
(данные из Agricultural Statistics)

Год	Поголовье (×10 000)	Год	Поголовье (×10 000)	Год	Поголовье (×10 000)
1867	2 203	1892	2 119	1917	1 717
1868	2 360	1893	1 991	1918	1 648
1869	2 254	1894	1 859	1919	1 512
1870	2 165	1895	1 856	1920	1 338
1871	2 024	1896	1 924	1921	1 383
1872	2 078	1897	1 892	1922	1 344
1873	2 214	1898	1 916	1923	1 384
1874	2 292	1899	1 968	1924	1 484
1875	2 207	1900	1 928	1925	1 597
1876	2 119	1901	1 898	1926	1 686
1877	2 119	1902	1 850	1927	1 707
1878	2 137	1903	1 841	1928	1 640
1879	2 132	1904	1 824	1929	1 611
1880	1 955	1905	1 823	1930	1 632
1881	1 785	1906	1 843	1931	1 775
1882	1 747	1907	1 880	1932	1 850
1883	1 818	1908	1 968	1933	1 809
1884	1 909	1909	2 029	1934	1 653
1885	1 958	1910	1 996	1935	1 648

Год	Поголовье (×10 000)	Год	Поголовье (×10 000)	Год	Поголовье (×10 000)
1886	1 892	1911	1 933	1936	1 665
1887	1 919	1912	1 805	1937	1 627
1888	1 853	1913	1 713	1938	1 791
1889	1 868	1914	1 726	1939	1 797
1890	1 991	1915	1 752		
1891	2 111	1916	1 795		

Таблица 1.3

**Расстояния, пройденные авиалайнерами
Соединенного Королевства за месяц, тыс. миль**

	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Январь	6 827	7 269	8 350	8 186	8 334	8 639	9 491	10 840
Февраль	6 178	6 775	7 829	7 444	7 899	8 772	8 919	10 436
Март	7 084	7 819	8 829	8 484	9 994	10 894	11 607	13 589
Апрель	8 162	8 371	9 948	9 864	10 078	10 455	8 852	13 402
Май	8 462	9 069	10 638	10 252	10 801	11 179	12 537	13 103
Июнь	9 644	10 248	11 253	12 282	12 950	10 588	14 759	14 933
Июль	10 466	11 030	11 424	11 637	12 222	10 794	13 667	14 147
Август	10 748	10 882	11 391	11 577	12 246	12 770	13 731	14 057
Сентябрь	9 963	10 333	10 665	12 417	13 281	13 812	15 110	16 234
Октябрь	8 194	9 109	9 396	9 637	10 366	10 857	12 185	12 389
Ноябрь	6 848	7 685	7 775	8 094	8 730	9 290	10 645	11 595
Декабрь	7 027	7 602	7 933	9 280	9 614	10 925	12 161	12 772

Таблица 1.4

Иммиграция в США, тыс. чел. [22]

Год	Число им- мигрантов	Год	Число им- мигрантов	Год	Число им- мигрантов
1820	8 385	1870	387 203	1920	430 001
1821	9 127	1871	321 350	1921	805 228
1822	6 911	1872	404 806	1922	309 556
1823	6 354	1873	459 803	1923	522 919
1824	7 912	1874	313 339	1924	706 896
1825	10 199	1875	227 498	1925	294 314
1826	10 837	1876	169 986	1926	304 488
1827	18 875	1877	141 857	1927	335 175
1828	27 382	1878	138 469	1928	307 255
1829	22 520	1879	177 826	1929	279 678
1830	23 322	1880	457 257	1930	241 700
1831	22 633	1881	669 431	1931	97 139
1832	48 386	1882	788 992	1932	35 576
1833	58 640	1883	603 322	1933	23 068
1834	65 365	1884	518 592	1934	29 470
1835	45 374	1885	395 346	1935	34 956

Год	Число иммигрантов	Год	Число иммигрантов	Год	Число иммигрантов
1836	76 242	1886	334 203	1936	36 329
1837	79 340	1887	490 109	1937	50 244
1838	38 914	1888	546 889	1938	67 895
1839	68 069	1889	444 427	1939	82 998
1840	84 066	1890	455 302	1940	70 756
1841	80 289	1891	560 319	1941	51 776
1842	104 565	1892	579 663	1942	28 781
1843	69 994	1893	439 730	1943	23 725
1844	78 615	1894	285 631	1944	28 551
1845	114 371	1895	258 536	1945	38 119
1846	154 416	1896	343 267	1946	108 721
1847	234 968	1897	230 832	1947	147 292
1848	226 527	1898	229 299	1948	170 570
1849	297 024	1899	311 715	1949	188 317
1850	295 984	1900	448 572	1950	249 187
1851	379 466	1901	487 918	1951	205 717
1852	371 603	1902	648 743	1952	265 520
1853	368 645	1903	857 046	1953	170 434
1854	427 833	1904	812 870	1954	208 177
1855	200 877	1905	1 026 499	1955	237 790
1856	200 436	1906	1 100 735	1956	321 625
1857	251 306	1907	1 285 349	1957	326 867
1858	123 126	1908	782 870	1958	253 265
1859	121 282	1909	751 786	1959	260 686
1860	153 640	1910	1 041 570	1960	265 398
1861	91 918	1911	878 587	1961	271 344
1862	91 985	1912	838 172	1962	283 763
1863	176 282	1913	1 197 892		
1864	193 418	1914	1 218 480		
1865	248 120	1915	326 700		
1866	318 568	1916	298 826		
1867	315 722	1917	295 403		
1868	277 680	1918	110 618		
1869	352 768	1919	141 132		

Примечание. Кроме нескольких более ранних лет, до 1868 г. включительно, считается, что год кончается 30 июня. Для сопоставимости данных были сделаны специальные корректировки.

Таблица 1.5

Число нормальных деторождений за каждый час в четырех больницах:
ряды преобразованы в y , равный корню квадратному
из числа рождений [10], [54]

Час начала отсчета	$\sqrt{\text{число рождений}} = y$ в больнице:				Всего	Наблю- денное y	Ожиде- мое y	
	A	B	C	D				
Полночь	12	13,56	19,24	20,52	21,14	74,46	18,6150	18,463
	1	14,39	18,68	20,37	21,14	74,58	18,6450	18,812
	2	14,63	18,89	20,83	21,79	76,14	19,0350	19,129
	3	14,97	20,27	21,14	22,54	78,92	19,7300	19,393
	4	15,13	20,54	20,98	21,66	78,31	19,5775	19,587
	5	14,25	21,38	21,77	22,32	79,72	19,9300	19,697
	6	14,14	20,37	20,66	22,47	77,64	19,4100	19,716
	7	13,71	19,95	21,17	20,88	75,71	18,9275	19,641
	8	14,93	20,62	21,21	22,14	78,90	19,7250	19,479
	9	14,21	20,86	21,68	21,86	78,61	19,6525	19,240
	10	13,89	20,15	20,37	22,38	76,79	19,1975	18,941
11	13,60	19,54	20,49	20,71	74,34	18,5850	18,602	
Полдень	12	12,81	19,52	19,70	20,54	72,57	18,1425	18,246
	1	13,27	18,89	18,36	20,66	71,18	17,7950	17,897
	2	13,15	18,41	18,87	20,32	70,75	17,6875	17,579
	3	12,29	17,55	17,32	19,36	66,52	16,6300	17,315
	4	12,92	18,84	18,79	20,02	70,57	17,6425	17,121
	5	13,64	17,18	18,55	18,84	68,21	17,0525	17,011
	6	13,04	17,20	18,19	20,40	68,83	17,2075	16,993
	7	13,00	17,09	17,38	18,44	65,91	16,4775	17,067
	8	12,77	18,19	18,41	20,83	70,20	17,5500	17,229
	9	12,37	18,41	19,10	21,00	70,88	17,7200	17,468
	10	13,45	17,58	19,49	19,57	70,09	17,5225	17,767
11	13,53	18,19	19,10	21,35	72,17	18,0425	18,106	
Всего		327,65	457,54	474,45	502,36	1762,00	18,3542	

Таблица 1.6

Индекс FT курса обыкновенных акций ведущих компаний:
квартальные средние, 1960—1971 гг.

Год и квартал	Индекс	Год и квартал	Индекс	Год и квартал	Индекс
1960	1	1964	1	1968	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4
1961	1	1965	1	1969	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4
1962	1	1966	1	1970	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4
1963	1	1967	1	1971	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4

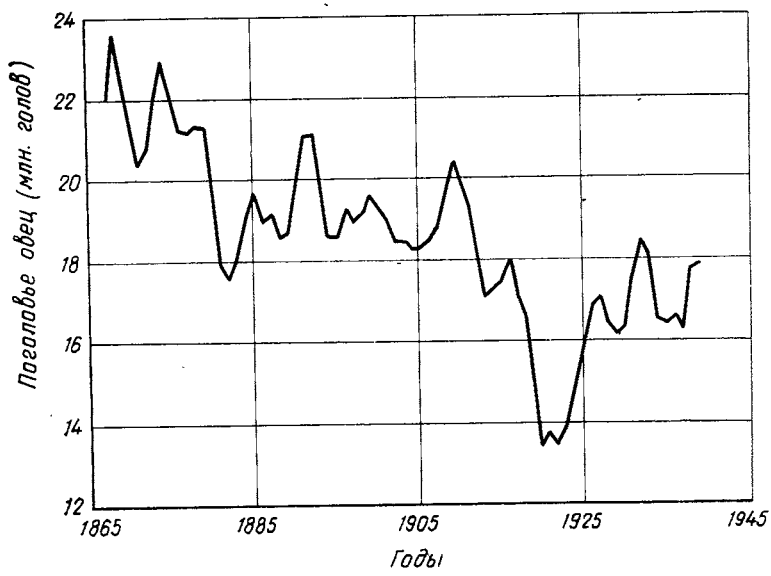


Рис. 1.4. График данных из табл. 1.2 (поголовье овец)

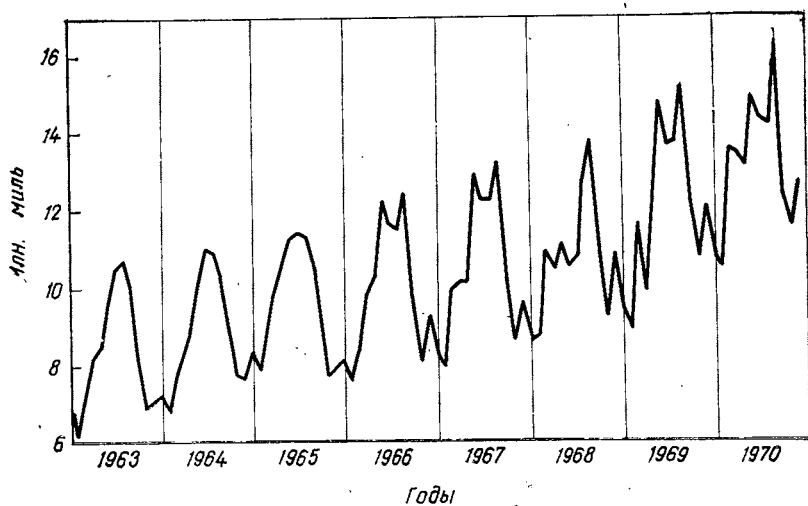


Рис. 1.5. График данных из табл. 1.3 (расстояния, пройденные авиалайнерами Соединенного Королевства за месяц)

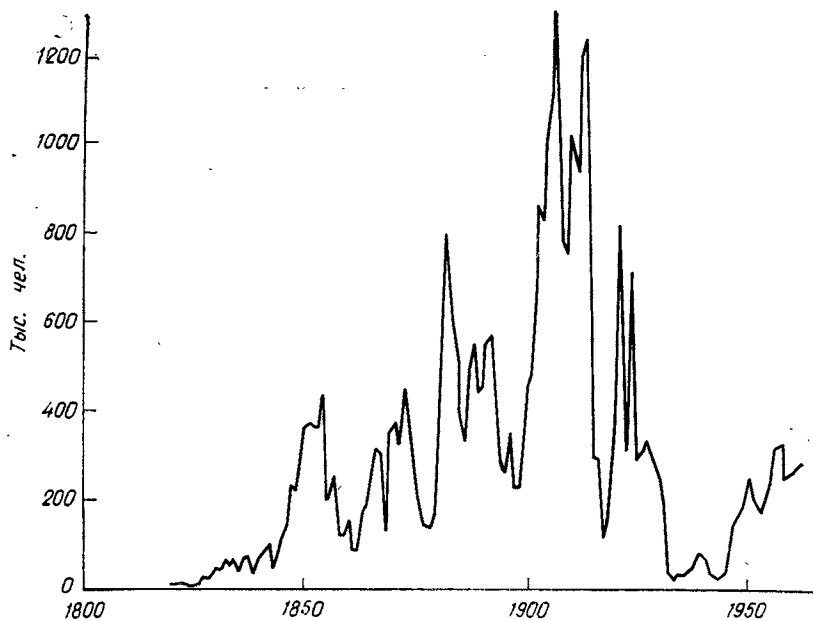


Рис. 1.6. График данных из табл. 1.4 (иммиграция в США за год, 1820—1962 гг.)

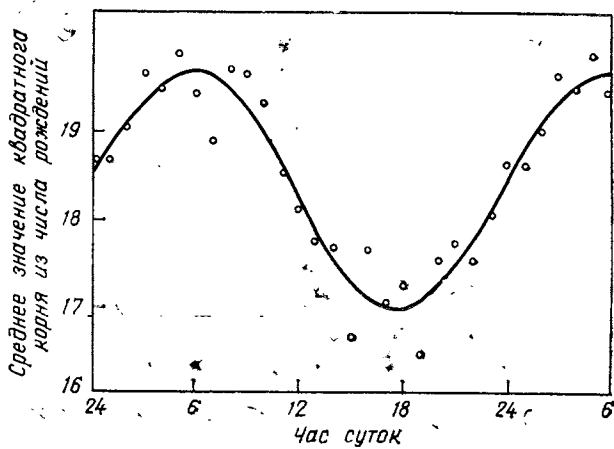


Рис. 1.7. График данных из табл. 1.5 (число рождений по часам суток)

так что сезонные колебания исключаются. Данные об авиалайнерах представляют собой типичный образец сезонных колебаний при растущем тренде¹. Иммиграция, регистрируемая ежегодно, также обнаруживает колебания, некоторые из которых могут быть объяснены такими событиями, как война. Данные о рождениях являются исключением в том смысле, что на графике отложено не само число рож-

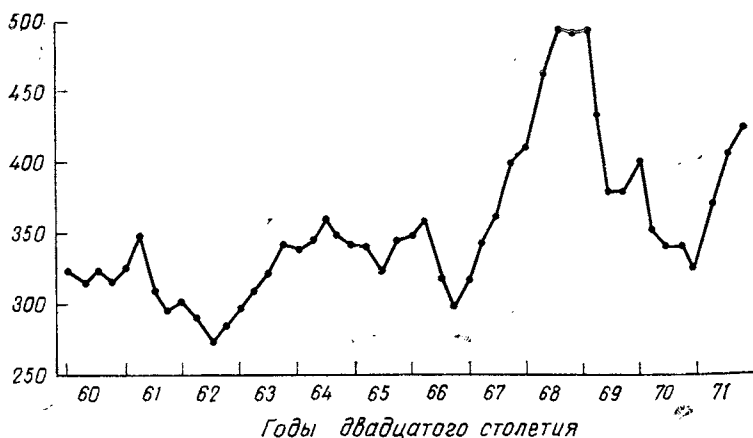


Рис. 1.8. График данных из табл. 1.6 (индекс FT, квартальные средние)

дений, а корень квадратный из него (на том основании, что рождения, по-видимому, подчиняются пуассоновскому закону распределения вероятностей, а преобразование извлечением квадратного корня приводит к приблизительно постоянной дисперсии), и в этом виде в них проявляется заметная цикличность. Индексам FT свойственны колебания во времени, типичные для фондовой биржи.

ЦЕЛЬ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

1.19. Было бы, конечно, излишним на этой стадии входить в подробный анализ различных причин, по которым желательно исследовать временные ряды, но сделать несколько общих замечаний необходимо, так как эти причины очень часто определяют выбор методов, которые мы решаем применить. Вообще говоря, можно различать пять типов исследований.

(а) На самом поверхностном уровне берут какой-либо один ряд и строят простую систему, обычно более или менее математического типа, которая *описывает* его поведение в сжатом виде.

(б) Проникая немного глубже, делают попытку *объяснить* его поведение с помощью других переменных и определить соотношение

¹ Под трендом здесь и далее понимается основная тенденция развития (см. гл. 3). — *Примеч. пер.*

между наблюдениями и некоторыми структурными законами поведения. Другими словами, для объяснения наблюдений в качестве гипотезы строится модель.

(в) Результаты анализа, полученные в (а) или (б), можно использовать для *прогнозирования* поведения ряда. В случае (а), даже когда ничего неизвестно об основном механизме, генерирующем ряд, исходят из предположения, что в системе существует достаточная инерция, чтобы гарантировать в будущем такое же поведение, как и в прошлом. Случай (б), как мы надеемся, характеризуется большим проникновением в область рассматриваемых причинно-следственных связей и можно делать проекции в будущее более уверенно.

(г) В случае (б) может потребоваться контроль системы или путем выработки сигналов, предупреждающих о грядущих неблагоприятных событиях, или путем исследования того, что может случиться, если изменить некоторые из параметров модели.

(д) В более общем случае может возникнуть необходимость рассмотреть совместное развитие во времени нескольких переменных или, иначе говоря, наша переменная может быть вектором наблюдений. В подобном случае, со статистической точки зрения, мы приближаемся к более общей теме построения математических моделей, и иногда трудно различить ту грань, где кончается теория многомерных рядов и начинается теория построения моделей. Несмотря на то что построение моделей в своем наиболее общем виде гораздо более широкая тема, чем временные ряды, такой грани, конечно, не существует, и в этой книге мы не будем на этом подробно останавливаться.

РАЗЛОЖЕНИЕ

1.20. Обзор уже приведенных примеров временных рядов и многих других рядов, несомненно известных читателю, наводит на мысль, что полезно в общем случае рассматривать ряд как смесь четырех компонент:

(а) тренда или долгосрочного движения;

(б) более или менее регулярных колебаний относительно тренда;

(в) сезонной компоненты;

(г) остатка или несистематического случайного эффекта.

Ряд удобно представлять в виде суммы этих четырех компонент, и одной из целей анализа является разложение ряда на его составляющие для отдельного изучения. Однако следует помнить, что, поступая так, мы фактически постулируем модель. Возможно, целесообразно предположить, что тренд объясняется наличием постоянных сил, однообразно действующих приблизительно в одном и том же направлении, а краткосрочные колебания относительно этого долгосрочного движения происходят по совокупности причин, и что в обоих движениях имеется некое возмущение, присущее случайным событиям и обуславливающее появление остатка. Но то, что это так и что эффекты от различных сил аддитивны, является предположением и имеет характер гипотезы, от которой мы всегда должны быть готовы отказаться, если наша модель плохо соответствует данным.

1.21. Конечно, легче всего представить те компоненты, которые заведомо генерируются циклически, например суточные колебания температуры, приливы и отливы, связанные с лунным месяцем, и сами сезонные колебания. Нужно быть внимательным, чтобы не спутать подобные эффекты с колебаниями псевдоциклического типа, такими, как экономические «циклы» или «циклы» появления пятен на солнце, относительно которых неизвестно, что в их основе лежит астрономическое явление периодического типа*. Однако определить сезонность отнюдь не так просто, как это может показаться. Рис. 1.5 иллюстрирует одну из проблем. В ряде, характеризующем расстояния, пройденные авиалайнерами, несомненно присутствует сезонный эффект: один пик на рождество, другой на пасху и один пик летом. Все пики объясняются перелетами в праздничный и отпусковой период. Но перелеты на пасху приходятся, как и сама пасха, то на одни, то на другие дни года, и картина колебаний меняется из года в год частично из-за возрастающего парка авиалайнеров, а частично из-за увеличения в настоящее время периода праздников. Короче, сезонный эффект сам имеет тренд.

1.22. Когда мы перейдем к подробному изучению, то увидим, что тренд и сезонность «перепутываются», по-видимому, в наибольшей степени и невозможно отделить одно, не выделяя в то же время другого. Однако понятия эти достаточно различны. На уровне общих идей тренд представляется как плавное основное движение неколебательного типа на протяжении значительного периода времени. То, что мелиоратору кажется трендом климата, геолог, который мыслит гораздо более масштабными временными категориями, может расценить всего лишь как временное наблюдение или краткосрочное колебание.

1.23. Вообще если можно определить тренд и сезонную компоненту и вычесть их из данных, то остается колеблющийся ряд, который может в одном предельном случае представлять чисто случайные скачки, а в другом — плавное колебательное движение. В большинстве же случаев будет что-то среднее: некая нерегулярность, особенно в несовершенных данных, и определенного типа систематический эффект в том смысле, что последовательные члены не будут независимыми. Назовем этот систематический эффект *осцилляцией* и будем избегать называть его *циклом*, если только не показано, что ему действительно свойственны циклические повторения и, в частности, что пики и впадины появляются через равные интервалы времени. Очень немногие экономические ряды являются циклическими в этом смысле.

1.24. За несколькими исключениями будем предполагать, что наблюдения в исследуемом ряду делаются через равные интервалы времени, и, как правило, без потери общности можно принять этот интервал за единицу, а для обозначения ряда использовать индексы, например u_1, u_2, u_3 и т. д., где u_t — наблюдение в момент t . Будем

* Несмотря на сделанное предположение, согласно которому явный четырехлетний ритм британской экономики объясняется тем искусственным обстоятельством, что общие выборы должны проводиться не реже чем раз в пять лет.

также считать, что наблюдения начинаются при $t = 1$, но имеется возможность, если это необходимо, представить предшествующие члены, полагая $t = 0$, $t = -1$, $t = -2$ и т. д.

Вследствие такого подхода в математических выкладках этой темы используются конечные разности, а не производные. Читателю, знакомому с элементами дифференциального исчисления, нетрудно освоить исчисление в конечных разностях, поскольку эти исчисления имеют большое формальное сходство. В дальнейшем, когда будет требоваться результат в конечных разностях, в сравнительно редких случаях будет приводиться также параллельный результат дифференциального исчисления, и читатель, признающий последнее, по-видимому, будет готов принять первое на веру.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Временным рядам, в которых наблюдения делаются через неравные интервалы, посвящено совсем немного теоретических работ. Читателя можно отослать к работе Кенуя по авторегрессионным рядам [72] и к работе Гренджера, в которой рассмотрено проявление эффекта переменной продолжительности месяца в экономических рядах [34].

2. Даниэльс [21] изучал корреляции между первыми разностями блуждающих рядов, когда вместо кумулятивной или средней за некоторый период величины в качестве типичного предствителя данного отрезка ряда было взято среднее значение диапазона изменения членов (т. е. среднее между наибольшим и наименьшим значениями). Если в примере 1.1 предельное значение корреляции при увеличении m равно 0,25, то соответствующий предел при переходе к средним значениям диапазона будет даже выше, а именно 0,315 (см. также [75]).

3. К теории статистики относятся также вопросы исследования распределения интервалов между аналогичными событиями, например временных интервалов между прибытием судов в порт или между катастрофами на какой-либо дороге. Исследование таких явлений обычно рассматривается как задача теории стохастических процессов (например, теории очередей или управления запасами) и не входит в анализ временных рядов.

2

КРИТЕРИИ СЛУЧАЙНОСТИ

2.1. Простейшей гипотезой, которую можно выдвинуть относительно колеблющегося ряда, является предположение, что колебания случайны. На практике бывает достаточно лишь посмотреть на данные, чтобы отбросить эту гипотезу, но в некоторых случаях необходимы более точные критерии, например при исследовании данных о ячмене из табл. 1.1 или при изучении остатков, полученных вычитанием из исходного ряда систематических элементов, когда требуется установить, не осталось ли в них какой-либо систематизации.

2.2. В случайных рядах, согласно гипотезе, наблюдения независимы и могут следовать в любом порядке. Возможно применение неограниченного числа критериев случайности, но одни критерии по определенным соображениям лучше, чем другие.

(а) Желательно, чтобы критерий не требовал каких-либо ограничений на вид распределения совокупности, из которой, по предположению, извлекаются наблюдаемые значения.

(б) Необходимые вычисления должны быть сведены к минимуму.

(в) Вычисления должны легко обновляться; другими словами, необходимо, чтобы не требовалось проводить все вычисления с *самого начала*, если после подсчета критерия с течением времени добавляются новые наблюдения.

(г) Выбор критерия до некоторой степени зависит от того, какие выдвигаются альтернативные гипотезы. Работа Неймана и Пирса по проверке гипотез подтверждает, что никто не проверяет гипотезу саму по себе, а лишь в сравнении с другими возможными гипотезами. Не всегда легко точно определить, какие альтернативные гипотезы, целесообразно выдвинуть, но обычно имеются некоторые соображения, которые могут в значительной степени помочь при выборе критерия. Например, в случае, когда данные по виду как будто имеют тренд, требуется критерий, отличный от того, который используется при подозрении на периодичность.

ПОВОРОТНЫЕ ТОЧКИ

2.3. Наиболее простой для применения критерий, особенно если ряд изображен графически, состоит в подсчете пиков и впадин. «Пик» — это величина, которая больше двух соседних. «Впадина», наобо-

рот, — значение, которое меньше двух соседних. Оба эти значения называются «поворотными точками» и нам предстоит рассмотреть вопрос: каково распределение числа поворотных точек в случайном ряду?

2.4. Рассмотрим конечный ряд из n величин u_1, u_2, \dots, u_n . Начальное значение нельзя считать поворотной точкой, так как u_0 неизвестно; и аналогично, нельзя рассматривать в качестве поворотной точки последнее значение, так как неизвестно u_{n+1} . Для определения поворотной точки требуются три последовательных значения. Если ряд случаен, то эти три значения могут следовать в любом из шести возможных порядков с равной вероятностью. Только в четырех из них будет поворотная точка, а именно когда наибольшее или наименьшее из трех значений находится в середине. Следовательно, вероятность обнаружения поворотной точки в любой группе из трех значений равна $\frac{2}{3}$.

Для группы из n величин определим «счетную» переменную X как

$$X_i = \begin{cases} 1, & u_i < u_{i+1} > u_{i+2} \text{ или } u_i > u_{i+1} < u_{i+2}, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Тогда число поворотных точек p в ряде есть просто

$$p = \sum_{i=1}^{n-2} X_i, \quad (2.2)$$

и сразу же получаем¹

$$E(p) = \sum E(X_i) = \frac{2}{3}(n-2). \quad (2.3)$$

Это ожидаемое число поворотных точек (другими словами, поворотная точка приходится примерно на каждые $1\frac{1}{2}$ наблюдения). Если их больше (редкий случай), то ряд является быстро колеблющимся, и это не может быть объяснено только случайностью. Если же их меньше, то последовательные значения положительно коррелированы. Однако для того, чтобы сделать вывод, существенна ли разница между наблюдаемым и ожидаемым числом, требуется знать дисперсию p . Итак,

$$E(p^2) = E \left\{ \sum_{i=1}^{n-2} X_i \right\}^2 = E \left\{ \sum_{n-2} X_i^2 + 2 \sum_{n-3} X_i X_{i+1} + 2 \sum_{n-4} X_i X_{i+2} + \sum_{(n-4)(n-5)} X_i X_{i+j} \right\}, \quad j \neq 0, 1, 2. \quad (2.4)$$

В разложении квадрата $\sum X$ отдельно собраны квадраты и смешанные произведения значений, разделенных одним, двумя и более чем двумя интервалами времени. Индексы под знаком \sum указывают на число слагаемых в сумме. В качестве проверки заметим, что

¹ Символ E означает математическое ожидание. — *Примеч. пер.*

$$n - 2 + 2(n - 3) + 2(n - 4) + (n - 4)(n - 5) = (n - 2)^2. \quad (2.5)$$

Математическое ожидание каждого члена (2.4) должно быть рассмотрено отдельно.

Поскольку $X_i^2 = X_i$, сразу получаем

$$E(X_i^2) = \frac{2}{3}. \quad (2.6)$$

Кроме того, X_i и X_{i+j} в последнем члене (2.4) независимы, так как их разделяют по крайней мере три значения. Отсюда

$$E(X_i X_{i+j}) = E(X_i) E(X_{i+j}) = \frac{4}{9}. \quad (2.7)$$

Для того чтобы оценить $E(X_i X_{i+1})$, рассмотрим группу из четырех последовательных наблюдений, которые в порядке возрастания величин могут быть обозначены 1, 2, 3, 4. Возможны $4! = 24$ варианта порядка следования этих наблюдений.

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3	(2.8)
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2	
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3	
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1	
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2	
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1	

В первом варианте нет поворотных точек, во втором (читая по строкам) есть впадина 2 1 3 и нет пиков, аналогичная ситуация в третьем и т. д. $X_i X_{i+1}$ имеет ненулевое значение только тогда, когда в группе одновременно имеется и пик, и впадина, например 1 3 2 4 или 4 2 3 1. Из 24 таких случаев насчитывается 10 и, следовательно,

$$E(X_i X_{i+1}) = \frac{5}{12}. \quad (2.9)$$

Для оценки математического ожидания $X_i X_{i+2}$ нужно рассмотреть пять последовательных наблюдений. Если читатель выпишет $5! = 120$ перестановок номеров от 1 до 5, то обнаружит 54 отличных от нуля произведения $X_i X_{i+2}$. Таким образом,

$$E(X_i X_{i+2}) = \frac{9}{20}. \quad (2.10)$$

Далее из уравнения (2.4) получаем

$$E(p^2) = \frac{2}{3}(n-2) + \frac{5}{6}(n-3) + \frac{9}{10}(n-4) + \frac{4}{9}(n-4)(n-5) = \frac{40n^2 - 144n + 131}{90}. \quad (2.11)$$

Следовательно,

$$\text{var } p = E(p^2) - [E(p)]^2 = \frac{16n-29}{90}. \quad (2.12)$$

Тем же самым методом, но с гораздо большим объемом алгебраических

выкладок, можно получить моменты p более высоких порядков. Третий и четвертый моменты будут равны:

$$\kappa_3(p) = \frac{16(n+1)}{945}, \quad (2.13)$$

$$\kappa_4(p) = \frac{-1408n+3317}{18900}. \quad (2.14)$$

Таким образом, стандартная мера $\kappa_3/\kappa_2^{3/2}$ приблизительно равна:

$$\frac{-16n}{945} / \left(\frac{16n}{90} \right)^{3/2} = -0,2n^{-\frac{1}{2}},$$

и приближенно $\kappa_4/\kappa_2^2 = -2,4n^{-1}$. Это указывает на довольно быстрое стремление распределения к нормальности. Отсюда следует вывод, что наблюдаемое значение можно проверять в сравнении с математическим ожиданием нормального распределения со стандартным отклонением $\{(16n - 29)/90\}^{\frac{1}{2}}$.

Пример 2.1.

В данных табл. 1.1 об урожайности ячменя 56 значений, но дважды значения в соседних годах (в 1906 и 1907, а также в 1910 и 1911) оказываются равными. Чтобы не рисковать, в каждом из этих случаев оставим лишь по одной точке и уменьшим число n до 54.

В этом ряде 35 поворотных точек. Математическое ожидание равно: $\frac{2}{3} \cdot 54 = 36$. Согласие столь хорошее, что никакой проверки не требуется; если бы она была нужна, то мы подсчитали бы дисперсию $(16 \cdot 54 - 29)/90 = 9,278$, а стандартное отклонение было бы примерно равно 3,04.

ДЛИНА ФАЗЫ

2.5. Определенный интерес представляет не только число поворотных точек, но и распределение интервалов между ними. Интервал между двумя поворотными точками называется «фазой». Таким образом, если u_i — впадина, а u_{i+1} — пик, то между ними будет фаза длины 1.

Для того, чтобы установить наличие фазы длины d (скажем, восходящей), нужно обнаружить $d + 3$ членов, содержащих падение от первого члена ко второму, затем последовательный подъем до $(d + 2)$ -го члена и падение к $(d + 3)$ -му члену. Рассмотрим такую группу $d + 3$ значений в порядке их возрастания. Если, не трогая двух крайних членов, извлечь пару чисел из оставшихся $d + 1$ и одно из них поставить в начало, а другое в конец, получим фазу длины d . Существует $\frac{1}{2} d (d + 1)$ способов такого выбора пары чисел, и каждый член пары может быть поставлен в любой конец, следовательно, число восходящих фаз равно $d (d + 1)$. Кроме того, можно первый член поставить в конец, а любой другой, кроме второго, в начало и получить еще $(d + 1)$ случаев. Можно также последний член поставить в начало, а

любой другой, кроме предпоследнего, в конец, что дает еще $(d + 1)$ случаев. При этом надо исключить двойной счет случая, когда первый член становится на последнее место, а последний на первое. Всего существует

$$d(d + 1) + 2(d + 1) - 1 = d^2 + 3d + 1$$

фаз для случая роста. Следовательно, вероятность либо восходящей, либо нисходящей фазы в группе чисел равна

$$\frac{2(d^2 + 3d + 1)}{(d + 3)!} \quad (2.15)$$

В ряде длины n последовательно можно выделить $n - d - 2$ групп по $d + 3$ членов. Таким образом, математическое ожидание числа фаз длины d во всем ряде равно

$$\frac{2(n - d - 2)(d^2 + 3d + 1)}{(d + 3)!}, \quad (2.16)$$

а математическое ожидание общего числа фаз длины от 1 до $n - 3$, которое обозначим через N , будет

$$N = 2 \sum_{d=1}^{n-3} \frac{(n-d-2)(d^2+3d+1)}{(d+3)!} = 2 \sum \left\{ -\frac{1}{d!} + \frac{n+1}{(d+1)!} - \frac{2n+1}{(d+2)!} + \frac{n+1}{(d+3)!} \right\}, \quad (2.17)$$

или после преобразований

$$N = 2 \left(\frac{2n-7}{6} + \frac{1}{n!} \right). \quad (2.18)$$

На практике можно пренебречь членом $1/n!$, так что приближенно

$$N = \frac{1}{3}(2n-7). \quad (2.19)$$

Пример 2.2

В данных об урожайности ячменя имеется 34 фазы. Фактическое число фаз различной длины и их теоретическое число, определяемое выражением (2.16), будет следующим:

Длина фазы	Число наблюдаемых фаз	Теоретическое число фаз
1	23	21,25
2	7	9,17
3	4	2,59
Итого	34	33,01

Согласие хорошее, поэтому проверка существенности вряд ли необходима.

2.6. Сравнение наблюдаемого и теоретического числа фаз с помощью критерия χ^2 обычного вида неправомерно вследствие того факта, что длины фаз не являются независимыми. Уоллис и Мур [87] пришли к выводу, что при разбиении длин фазы на три группы, $d = 1, 2, \geq 3$, при значениях $\geq 6,3$ может быть использован критерий χ^2 с $2 \frac{1}{2}$ степенями свободы, а для более низких значений — критерий $\frac{6}{7} \chi^2$ с двумя степенями свободы.

Распределение длин фазы не стремится к нормальности с ростом n , однако число фаз к ней стремится [56]. Глайсберг [33] затабулировал фактическое распределение этого числа для $n \leq 25$ (см. также [526, русский перевод с. 490—492, 503]).

КРИТЕРИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ЗНАКАХ РАЗНОСТЕЙ

2.7. Несколько более сложный критерий состоит в подсчете числа положительных разностей первого порядка в ряде, иначе говоря, числа точек возрастания ряда. Для ряда из n членов получаем $n - 1$ разностей. Как и прежде, определим «счетную переменную»:

$$X_i = \begin{cases} 1, & u_{i+1} > u_i, \\ 0, & u_{i+1} < u_i. \end{cases} \quad (2.20)$$

Если теперь обозначить через c число точек возрастания случайного ряда, то

$$E(c) = E\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) = \frac{1}{2}(n-1). \quad (2.21)$$

Распределение довольно быстро стремится к нормальности. Точно так же находим, что

$$E(c^2) = E\left\{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 + 2 \sum_{i=2}^{n-2} X_i X_{i+1} + \sum_{(n-2)(n-3)} X_i X_j\right\}, \quad j \neq i, i+1,$$

и, рассматривая перестановки трех элементов (выкладки читателю предлагается сделать самому в качестве упражнения), получаем

$$\text{var } c = \frac{1}{12}(n+1). \quad (2.22)$$

Распределение было затабулировано Муром и Уоллисом [60].

2.8. Очевидно, что критерий, основанный на знаках разностей, совершенно бесполезен для выявления ряда, описывающего колебательное движение, в котором число точек возрастания всегда будет

приблизительно равно $\frac{1}{2}n$. В основном он рекомендуется для проверки наличия линейного тренда. С другой стороны, критерий, основанный на поворотных точках, плохо подходит для обнаружения тренда, так как наложение заметных случайных колебаний на умеренный тренд приводит примерно к тому же множеству поворотных точек, что и при отсутствии тренда. Более совершенным, но и более сложным критерием для обнаружения линейного тренда являются регрессия u на t и проверка значимости регрессионного коэффициента или использование коэффициента τ , описанного в следующем параграфе.

КРИТЕРИИ, ОСНОВАННЫЕ НА РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

2.9. Идею сравнения соседних значений ряда можно развить до сравнения всех значений. Для данного ряда u_1, \dots, u_n подсчитаем число случаев, в которых $u_j > u_i$ при $j > i$. Обозначим это число через P . Всего для сравнения имеется $\frac{1}{2}n(n-1)$ пар и математическое ожидание числа P для случайного ряда равно $\frac{1}{4}n(n-1)$. Если P превышает это число и превышение значимо, то это указывает на наличие возрастающего тренда; P , меньшее, чем это число, указывает на падающий тренд. В действительности, число P связано простым соотношением с коэффициентом ранговой корреляции, иногда называемым коэффициентом Кендэла τ . Определяется коэффициент как

$$\tau = \frac{4P}{n(n-1)} - 1. \quad (2.23)$$

Этот коэффициент может изменяться от -1 до $+1$. Его математическое ожидание для случайного ряда равно нулю, а дисперсия

$$\text{var } \tau = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}. \quad (2.24)$$

Эти результаты мы приводим без доказательства (см. [50]).

2.10. Имеются и другие критерии, представляющие значительный теоретический интерес, но на практике они требуются так редко, что мы ограничимся кратким резюме, а для читателя, желающего познакомиться с этой темой более основательно, укажем, соответствующую литературу.

(а) Критерий для обнаружения линейного тренда требуется не часто, но когда он необходим, наилучшим критерием будет либо линейная регрессия, либо коэффициент τ . Последний имеет преимущество, которое заключается в том, что он не требует машинных вычислений и легко обновляется. Можно показать, что критерий, основанный на знаках разностей, как критерий на тренд, имеет в асимптотике нулевую относительную эффективность в сравнении с критериями на основе коэффициента регрессии или τ [58], [82], [83], [526].

(б) Если предполагается, что тренда нет, то подсчет поворотных точек как критерий проверки гипотезы о случайности при альтернативной гипотезе о наличии систематических колебаний прост для

применения и эффективен на практике. Но если поворотные точки появляются гроздьями, то более подходит фазовый критерий.

(в) Фостером и Стьюартом [31] рассмотрено распределение рекордных значений в ряде. Рекордное значение — это значение, которое больше (или меньше), чем все предыдущие записанные значения. Как критерий гипотезы о тренде он менее эффективен, чем критерии на основе регрессионного коэффициента или t . Главный недостаток, безусловно, состоит в том, что если в действительности нет сильного тренда, то с течением времени рекордные значения имеют тенденцию становиться редкими.

2.11. В начале главы отмечалось, что критерий для проверки гипотезы о случайности может потребоваться для анализа остатков, полученных вычитанием из ряда систематических элементов. К сожалению, сам процесс вычитания обычно порождает корреляцию в получаемых остатках, даже если исходные значения случайны. Именно поэтому довольно опасно применять рассмотренные критерии для анализа остатков без исследования искажений, вносимых процессом вычитания. В гл. 3 и в 2.11 мы вернемся к этому вопросу.

2.12. Ряд случайных колебаний дискретен по своей сути, но некоторые ряды непрерывного типа (острие лезвия бритвы под микроскопом, звуковая дорожка движущейся пластинки) имеют весьма несистематический вид. Если изучать физические явления вплоть до уровня атомов, они, конечно, дискретные. Но остается вопрос, возможны ли математически непрерывные случайные ряды. По нашему мнению, ответ должен быть отрицательным. Тем не менее можно рассматривать ряд, в котором интервал наблюдения велик и охватывает большое число точек, в которых проявляется случайный эффект. Для некоторых целей такие ряды, подобные острию бритвы, можно рассматривать как непрерывные; но в математических доказательствах необходима осторожность. Осуществить предельный переход к континууму, как это делается в математике при построении арифметического континуума исходя из множества дискретных точек, не представляется возможным¹.

ЗАМЕЧАНИЕ

Все критерии, рассмотренные в этой главе, не зависят от вида распределения, за исключением стандартного критерия на основе регрессионного коэффициента, когда для определения линейного тренда строится регрессия переменной на время. Большинство рядов, встречающихся на практике, столь явно неслучайны, что тщательное обсуждение критериев случайности едва ли окупится. Однако в теории стационарных процессов (например, в гл. 7) мы часто будем сталкиваться с тем, что точные результаты, связанные с распределениями, могут быть получены только для случайных рядов, и эти результаты используются в качестве полезной проверки неслучайных рядов по приближенным формулам.

¹ Другими словами, автор считает, что не представляется возможным построить формально теорию непрерывного случайного ряда аналогично тому, как в математике строится теория вещественных чисел. — *Примеч. пер.*

3 ТРЕНД

3.1. Существенным в понятии тренда является гладкость, что на практике означает желательность его представления непрерывной и дифференцируемой функцией времени. Для этой цели могут использоваться различные функции в зависимости от обстоятельств. Например, ряд данных о поголовье овец из табл. 1.2 выглядит так, что полином низкой степени, по-видимому, может довольно хорошо отразить общую понижательную тенденцию. Для данных о рождениях из табл. 1.5 требуются гармонические функции. В качестве тренда на представленном в табл. 1.3 отрезке ряда данных о расстояниях, пройденных авиалайнерами, можно взять полином, но его проектирование на большой срок в будущее будет, очевидно, небезопасным, так как рано или поздно переменная должна стабилизироваться, а никакой полином не может иметь горизонтальной асимптоты. Бывает, хотя и достаточно редко, что желательно подобрать функциональную форму для всей последовательности наблюдений. Процедура в этом случае имеет по крайней мере четыре практических недостатка:

(а) трудно производить обновление;

(б) если функция имеет несколько параметров, то оценки этих параметров могут быть довольно ненадежными; например, для подбора полинома порядка p нужны моменты до порядка $2p$ включительно;

(в) подбор функции заново после добавления новых точек ряда может изменить полученную перед этим последовательность ее значений, и нежелательно, чтобы новые наблюдения в будущем требовали переоценки прошлого и даже далекого прошлого;

(г) позже мы увидим, что выделение тренда и сезонной составляющей следует осуществлять с помощью итеративного процесса, предусматривающего по крайней мере две оценки каждой компоненты. В результате объем вычислений будет, как правило, значительным даже для быстродействующих ЭВМ.

3.2. Поскольку любая гладкая функция при самых общих допущениях может быть локально представлена полиномом с довольно высокой степенью точности, предпочтительной является следующая процедура. Подбираем полином к первой группе, скажем, из $2m + 1$ членов ряда (далее будет ясно, почему берется нечетное число) и используем этот полином для определения значения тренда в $(m + 1)$, средней точке группы. Затем подбираем полином того же порядка к группе, состоящей из второго, третьего, ..., $(2m + 2)$ -го наблюдения, и находим значение тренда в $(m + 2)$ -й точке и так далее тем же способом вдоль всего ряда до последней группы из $(2m + 1)$ членов. В действительности нет необходимости подбирать полиномы каждый раз. Как сейчас будет показано, эта процедура эквивалентна линейной комбинации наблюдений с коэффициентами, которые могут быть определены раз и навсегда.

3.3. Предположим, например, что мы хотим подбирать полином третьего порядка к группам по семь точек. Без потери общности примем, что рассматриваются моменты времени $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Запишем искомый полином:

$$u_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \quad (3.1)$$

Константы a находим методом наименьших квадратов, т. е. путем минимизации:

$$\sum_{t=-3}^3 (u_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - a_3 t^3)^2. \quad (3.2)$$

Дифференцирование по a дает нам четыре уравнения такого типа:

$$\sum u_t t^j - a_0 \sum t^j - a_1 \sum t^{j+1} - a_2 \sum t^{j+2} - a_3 \sum t^{j+3} = 0, \quad j=0, 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Суммы нечетных порядков t от -3 до $+3$ равны 0, и уравнения сводятся к виду

$$\begin{aligned} \sum u_t &= 7a_0 && + 28a_2; \\ \sum tu_t &= &28a_1 && + 196a_3; \\ \sum t^2 u_t &= 28a_0 && + 196a_2; \\ \sum t^3 u_t &= &196a_1 && + 1588a_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пока нас интересует только a_0 , значение ряда в момент $t = 0$. Используя лишь первое и третье из уравнений, получаем

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{21} \left\{ 7 \sum_{t=-3}^3 u_t - \sum_{t=-3}^3 t^2 u_t \right\} &= \frac{1}{21} \{ 7(u_{-3} + u_{-2} + u_{-1} + u_0 + \\ &+ u_1 + u_2 + u_3) - (9u_{-3} + 4u_{-2} + u_{-1} + 0 + u_1 + 4u_2 + 9u_3) \} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{21} \{-2u_{-3} + 3u_{-2} + 6u_{-1} + 7u_0 + 6u_1 + 3u_2 - 2u_3\}. \quad (3.5)$$

Следовательно, значение тренда в какой-либо точке равно средневзвешенному значению семи точек с данной точкой в качестве центральной и весами

$$\frac{1}{21} [-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2], \quad (3.6)$$

которые в силу симметрии можно записать короче:

$$\frac{1}{21} [-2, 3, 6, 7, \dots]. \quad (3.7)$$

По вполне понятным причинам это значение называется *скользящим средним*. Рассмотрим, например, ряд:

$$t = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

$$\text{Ряд} = 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729$$

Значение тренда в точке $t=4$ согласно процедуре будет

$$\frac{1}{21} \{(-2 \times 0) + (3 \times 1) + (6 \times 8) + (7 \times 27) + (6 \times 64) + (3 \times 125) - (2 \times 216)\} = 27,$$

и оно, естественно, совпадает с соответствующим членом, так как для описания кубической зависимости в ряде мы строим полином третьего порядка.

3.4. Эта процедура имеет самый общий характер. Если к $2m + 1$ точкам подбирают полином порядка p , необходимо минимизировать

$$\sum_{-m}^m (u_t - a_0 - a_1 t - \dots - a_p t^p)^2.$$

Минимизация приводит к уравнениям, аналогичным (3.3), которые разбиваются на две подсистемы, как в (3.4). Решение относительно a_0 зависит от численных значений суммы $\sum t^j$ и линейных функций от u типа $\sum t^j u_t$. Далее, значением тренда в точке $t = k$ будет взвешенное среднее значений от u_{k-m} до u_{k+m} . Далее приводятся формулы для подсчета скользящего среднего подбором полиномов до пятого порядка к отрезкам ряда длиной до 21 точки:

$$\begin{array}{l} \text{Второй и третий порядки} \\ [5] \quad \frac{1}{35} [-3, 12, 17] \\ [7] \quad \frac{1}{21} [-2, 3, 6, 7] \\ [9] \quad \frac{1}{231} [-21, 14, 39, 54, 59] \\ [11] \quad \frac{1}{429} [-36, 9, 44, 69, 84, 89] \\ [13] \quad \frac{1}{143} [-11, 0, 9, 16, 21, 24, 25] \end{array} \quad (3.8)$$

$$\begin{array}{l}
 [15] \quad \frac{1}{1105} \quad [-78, -13, 42, 87, 122, 147, 162, 167] \\
 [17] \quad \frac{1}{323} \quad [-21, -6, 7, 18, 27, 34, 39, 42, 43] \\
 [19] \quad \frac{1}{2261} \quad [-136, -51, 24, 89, 144, 189, 224, 249, 264, 269] \\
 [21] \quad \frac{1}{3059} \quad [-171, -76, 9, 84, 149, 204, 249, 284, 309, 324, 329]
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} [15] \\ [17] \\ [19] \\ [21] \end{array}} \right\} (3.8)$$

Четвертый и пятый порядки

$$\begin{array}{l}
 [7] \quad \frac{1}{231} [5, -30, 75, 131] \\
 [9] \quad \frac{1}{429} [15, -55, 30, 135, 179] \\
 [11] \quad \frac{1}{429} [18, -45, -10, 60, 120, 143] \\
 [13] \quad \frac{1}{2431} [110, -198, -135, 110, 390, 600, 677] \\
 [15] \quad \frac{1}{46189} [2145, -2860, -2937, -165, 3755, 7500, 10125, 11063] \\
 [17] \quad \frac{1}{4199} [195, -195, -260, -117, 135, 415, 660, 825, 883] \\
 [19] \quad \frac{1}{7429} [340, -255, -420, -290, 18, 405, 790, 1110, 1320, 1393] \\
 [21] \quad \frac{1}{260015} [11628, -6460, -13005, -11220, -3940, 6378, 17655, \\
 \quad \quad \quad 28190, 36660, 42120, 44003]
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} [7] \\ [9] \\ [11] \\ [13] \\ [15] \\ [17] \\ [19] \\ [21] \end{array}} \right\} (3.9)$$

3.5. Легко вывести некоторые свойства таких скользящих средних:

(а) сумма весов равна единице. Это должно быть так, потому что если применить процедуру взвешивания к ряду, все члены которого равны одной и той же константе, то среднее должно равняться этой же константе;

(б) веса симметричны относительно серединного значения. Это следует из того факта, что они получены как функции сумм $\sum_{-m}^m t^j u_t$, которые сами симметричны;

(в) в силу (б) значения тренда не зависят от направления отсчета времени;

(г) поскольку определяющие уравнения, такие, как (3.4), разделяются на две подсистемы, значение a_0 будет тем же самым независимо от того, присутствует член $a_3 t^3$ или нет. Другими словами, для полиномов четного порядка $2k$ формулы будут те же самые, что и для полиномов порядка $2k + 1$.

Можно добавить, что:

(д) формулы не позволяют вычислить значения тренда для первых и последних m значений ряда. Мы исправим этот недостаток в 3.9;

(е) можно вывести формулы для построения трендов на четном числе точек, однако при этом были бы получены значения трендов в серединах временных интервалов между наблюдениями, что, очевидно, весьма неудобно (см. раздел 3.11).

3.6. Иногда более удобно записывать эти формулы на языке разностей рядов, особенно когда разности меньше, чем исходные значения ряда. Записывая разность вперед¹ как

$$\Delta u_t = u_{t+1} - u_t, \quad (3.10)$$

так что $\Delta^2 u_t = u_{t+2} - 2u_{t+1} + u_t$, и т. д., получаем, например,

$$\begin{aligned} \frac{1}{21}[-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2] &= \frac{1}{21}[-2u_{t+3} + 3u_{t+2} + 6u_{t+1} \text{ и т. д.}] = \\ &= \frac{1}{21}[-2\Delta^6 u_{t-3} - 9u_{t+2} + 36u_{t+1} - 33u_t + 36u_{t-1} - 9u_{t-2}] = \\ &= \frac{1}{21}[-2\Delta^6 u_{t-3} - 9\Delta^5 u_{t-3} - 9u_{t+1} - 57u_t - 54u_{t-1} + 36u_{t-2} - \\ &\quad - 9u_{t-3}] = \frac{1}{21}[-2\Delta^6 u_{t-3} - 9\Delta^5 u_{t-3} - 9\Delta^4 u_{t-3} + \\ &\quad + 21u_t] = u_t - \frac{1}{21}[9\Delta^4 + 9\Delta^5 + 2\Delta^6]u_{t-3}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Это является выражением того факта, что построенная линия тренда пройдет точно через значения ряда, если они отражают кубическую зависимость, так как разности четвертого и более высоких порядков тогда равны нулю. Уравнение (3.11) имеет также преимущество, которое заключается в том, что в нем в явном виде представлена разность между рядом и трендом.

Скользящее среднее можно также рассматривать как среднее разностей. Например, легко проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{21}[-2, 3, 6, 7, \dots] &= u_t + \frac{1}{21}[2\Delta^3 u_{t-3} + 3\Delta^3 u_{t-2} - 3\Delta^3 u_{t-1} - \\ - 2\Delta^3 u_t] &= u_t + \frac{1}{21}[2, 3, -3, -2]\Delta^3 u_{t-3} = u_t - \frac{1}{21}[2, 5, 2]\Delta^4 u_{t-3}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее приводятся формулы, аналогичные (3.12).

¹ Различают разность вперед $\Delta u_t = u_{t+1} - u_t$, разность назад $\nabla u_t = u_t - u_{t-1}$. Для разностей более высоких порядков могут быть введены «центральные» разности. Например, в (3.19) автор вводит вторую центральную разность $\delta^2 u_t = (u_{t+1} - u_t) - (u_t - u_{t-1}) = u_{t+1} - 2u_t + u_{t-1}$. — *Примеч. пер.*

Второй и третий порядки

$$\begin{aligned}
 [5] \quad u_3 - \frac{3}{35} [1] \Delta^4 u_1 \\
 [7] \quad u_4 - \frac{1}{21} [2, 5, 2] \Delta^4 u_2 \\
 [9] \quad u_5 - \frac{1}{231} [21, 70, 115, 70, 21] \Delta^4 u_3 \\
 [11] \quad u_6 - \frac{1}{429} [36, 135, 280, 385] \Delta^4 u_4 \\
 [13] \quad u_7 - \frac{1}{143} [11, 44, 101, 168, 210] \Delta^4 u_5 \\
 [15] \quad u_8 - \frac{1}{1105} [78, 325, 790, 1435, 2100, 2478] \Delta^4 u_6 \\
 [17] \quad u_9 - \frac{1}{323} [21, 90, 227, 434, 686, 924, 1050] \Delta^4 u_7 \\
 [19] \quad u_{10} - \frac{1}{2261} [136, 595, 1540, 3045, 5040, 7266, 9240, 10230] \Delta^4 u_8 \\
 [21] \quad u_{11} - \frac{1}{3059} [171, 760, 2005, 4060, 6930, 10416, 14070, 17160, \\
 \quad \quad \quad 18645] \Delta^4 u_9
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Четвертый и пятый порядки

$$\begin{aligned}
 [7] \quad u_4 + \frac{5}{231} [1] \Delta^6 u_1 \\
 [9] \quad u_5 + \frac{5}{429} [3, 7] \Delta^6 u_2 \\
 [11] \quad u_6 + \frac{1}{429} [18, 63, 98] \Delta^6 u_3 \\
 [13] \quad u_7 + \frac{1}{2431} [110, 462, 987, 1302] \Delta^6 u_4 \\
 [15] \quad u_8 + \frac{1}{46189} [2145, 10010, 24948, 42273, 51198] \Delta^6 u_5 \\
 [17] \quad u_9 + \frac{1}{4199} [195, 975, 2665, 5148, 7623, 8778] \Delta^6 u_6 \\
 [19] \quad u_{10} + \frac{1}{7429} [340, 1785, 5190, 10875, 18018, 24453, 27258] \Delta^6 u_7 \\
 [21] \quad u_{11} + \frac{1}{260015} [11628, 63308, 192423, 426258, 759003, 1135134, \\
 \quad \quad \quad 1450449, 1581294] \Delta^6 u_8
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.7. Довольно громоздкие числа, встречающиеся в этих формулах, хотя и не создают вычислительных трудностей при применении компьютера, как в прошлом, так и теперь вызывают желание получить

пусть приближенные или менее эффективные, но более простые формулы. Можно вывести почти бесконечное число формул для полинома любого порядка p , но за простоту надо платить.

Пример 3.1

Любое среднее вида

$$u_t + b\Delta^4 u_{t-2} + c\Delta^5 u_{t-2} + d\Delta^6 u_{t-3} \quad (3.15)$$

будет точно воспроизводить кубическую зависимость, какими бы ни были значения b , c , d . Это выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned} & u_t + b(u_{t+2} - 4u_{t+1} + 6u_t - 4u_{t-1} + u_{t-2}) + c\{u_{t+3} - 5u_{t+2} + \\ & + 10u_{t+1} - 10u_t + 5u_{t-1} - u_{t-2}\} + d\{u_{t+3} - 6u_{t+2} - 15u_{t+1} - \\ & - 20u_t + 15u_{t-1} - 6u_{t-2} + u_{t-3}\} = u_{t+3}(c+d) + u_{t+2}(b-5c-6d) + \\ & + u_{t+1}\{-4b+10c+15d\} + u_t(1+6b-10c-20d) + u_{t-1}(-4b+ \\ & + 5c+15d) + u_{t-2}(b-c-6d) + du_{t-3}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Положим три средних коэффициента равными нулю. Тогда получаем

$$\begin{aligned} -4b + 10c + 15d &= 0; \\ 1 + 6b - 10c - 20d &= 0; \\ -4b + 5c + 15d &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$b = -\frac{3}{2}, \quad c = 0, \quad d = -\frac{2}{5}.$$

В таком случае формула для среднего принимает вид:

$$\frac{1}{10} [-4, 9, 0, 0, 0, 9, -4]. \quad (3.17)$$

Она проще, чем формула

$$\frac{1}{21} [-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2]. \quad (3.18)$$

Кроме того, в ней сохраняется симметрия, а среднее также находится по 7 точкам. Но что же тогда теряется?

Ответ надо искать в исследовании остаточной ошибки. Если применить (3.18) к случайному ряду с дисперсией $\text{var } \varepsilon$, то результирующий ряд будет иметь дисперсию

$$\frac{1}{(21)^2} \{2^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 6^2 + 3^2 + 2^2\} \text{var } \varepsilon = 0,333 \text{ var } \varepsilon.$$

С другой стороны, (3.17) приводит к дисперсии

$$\frac{1}{100} \{4^2 + 9^2 + 9^2 + 4^2\} \text{var } \varepsilon = 1,94 \text{ var } \varepsilon.$$

Таким образом, применение формулы (3.18), которая, как это следует из способа ее получения, минимизирует сумму квадратов остатков, уменьшает дисперсию до одной трети, в то время как применение формулы (3.17) ее почти удваивает. От конкретных обстоятельств зависит, насколько мы готовы заплатить такой ценой за упрощение формулы.

Коэффициент при var ϵ , характеризующий дисперсию скользящего среднего, обычно называют *степенью уменьшения ошибки*. Некоторые средние, как мы только что видели, имеют степень увеличения ошибки. С другой стороны, принимая $0,333 \text{ var } \epsilon$ за стандарт, можно сказать, что эффективность процедуры (3.17) составляет $0,333/1,94 = 17\%$ от эффективности, получаемой при минимизации ошибки.

3.8. Другой способ упрощения заключается в сведении вычисления скользящего среднего к итеративной обработке простых средних, т. е. таких, для подсчета которых используются равные веса. Операции умножения здесь в основном сводятся к суммированию. Например, если взять простое скользящее среднее трех членов и затем построить другое скользящее среднее пяти скользящих средних первого типа, то с множителем $\frac{1}{15}$ получим веса:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 1, & 1, & & & & \\ & 1, & 1, & 1, & & & \\ & & 1, & 1, & 1, & & \\ & & & 1, & 1, & 1, & \\ & & & & 1, & 1, & 1, \\ & & & & & 1, & 1, & 1 \end{array}$$

$$[1, 2, 3, 3, 3, 2, 1].$$

Самый короткий, но несколько более сложный метод выведения формул основан на итеративной обработке простых средних следующим образом.

Если вторую «центральную» разность определить как

$$\delta^2 u_t = u_{t+1} - 2u_t + u_{t-1}, \quad (3.19)$$

то можно показать, что для простого скользящего среднего k членов, которое будем записывать как $\frac{1}{k} [k]$, справедливо равенство

$$\frac{1}{k} [k] u_t = u_t + \frac{k^2-1}{2^2 3!} \delta^2 u_t + \frac{(k^2-1)(k^2-3^2)}{2^4 5!} \delta^4 u_t + \text{и т. д.} \quad (3.20)$$

(см. [526, гл. 46]).

Если, например, требуется представить ряд кубическим полиномом, так что четвертые разности равны нулю, то получим точную формулу

$$\frac{1}{k} [k] u_t = u_t + \frac{k^2-1}{24} \delta^2 u_t. \quad (3.21)$$

Пример 3.2. Формула Спенсера для 15 точек

Рассмотрим три последовательных усреднения по 4, по 4 и по 5 членам с равными весами. С точностью до разностей третьего порядка согласно (3.21) имеем

$$\frac{1}{80} [4][4][5] u_t = u_t + \frac{1}{24} (4^2-1 + 4^2-1 + 5^2-1) \delta^2 u_t = u_t + \frac{9}{4} \delta^2 u_t.$$

Умножая затем на $1 - \frac{9}{4} \delta^2$, получаем с точностью до разностей третьего порядка, что

$$u_t = \frac{1}{80} [4]^2 [5] \left[1 - \frac{9}{4} \delta^2 \right] u_t,$$

а после подстановки в соответствии с (3.19)

$$u_t = \frac{1}{320} [4]^2 [5] [-9, 22, -9]. \quad (3.22)$$

Не ухудшая точности, можно произвольно добавить разности четвертого или более высокого порядка. Пусть к множителю $[-9, 22, -9]$ добавлен член $-3\delta^4 = [-3, 12, -18, 12, -3]$. В результате получим

$$u_t = \frac{1}{320} [4]^2 [5] [-3, 3, 4, 3, -3]. \quad (3.23)$$

Это среднее основывается на 15 членах. Оно предполагает четыре последовательных усреднения, три из которых заключаются в вычислении простых арифметических средних. Окончательно веса таковы:

$$\frac{1}{320} [-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, 74, \dots]. \quad (3.24)$$

Это формула скользящего среднего Спенсера для 15 точек. Она названа так по имени актуария¹, который вывел ее в 1904 г. Уменьшение var ϵ при применении этой формулы характеризуется множителем 0,193, а при применении формулы для 15 точек из (3.8) — множителем 0,165.

Пример 3.3. Формула Спенсера для 21 точки

Спенсер предложил также формулу для 21 точки, как и в предыдущем случае, с точностью до разностей третьего порядка. Сходным образом находим, что

$$\frac{1}{175} [5]^2 [7] = 1 + 4\delta^2,$$

откуда

$$u_t = \frac{1}{175} [5]^2 [7] [-4, 9, 4].$$

На этот раз к множителю $[-4, 9, 4]$ добавим выражение

$$\begin{aligned} -3\delta^4 - \frac{1}{2} \delta^6 = & [-3, 12, -18, 12, -3] + \left[-\frac{1}{2}, 3, \right. \\ & \left. -7\frac{1}{2}, 10, -7\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2} \right], \end{aligned}$$

что дает

$$u_t = \frac{1}{350} [5]^2 [7] [-1, 0, 1, 2, 1, 0, -1]. \quad (3.25)$$

¹ Актуарий — статистик страхового общества. — *Примеч. пер.*

Эта формула имеет степень уменьшения ошибки приблизительно 0,128 по сравнению с 0,108 у формулы для 21 точки из (3.8).

Окончательные веса таковы:

$$\frac{1}{350} [-1, -3, -5, -5, -2, 6, 18, 33, 47, 57, 60, \dots]. \quad (3.26)$$

КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ

3.9. Формулы (по способу их вывода) не дают значений тренда для первых или последних m членов ряда. Отсутствие этих значений в начале обычно не столь уж важно; иметь же их в конце, как правило, просто необходимо. Эти значения тренда можно получить без больших затруднений путем дальнейшего развития уже рассмотренного метода.

Действительно, в 3.3 мы подбирали кубический полином к семи точкам ряда, в качестве таковых точек можно взять последние семь членов ряда. Для того чтобы найти значения этого кубического полинома в моменты $t = 1, 2, 3$ (ведя отсчет от среднего члена семерки), определим значения коэффициентов a_1, a_2, a_3 в (3.1), которые до сих пор нам не были нужны. Непосредственное решение (3.4) дает

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1512} \left\{ 397 \sum_{-3}^3 tu_t - 49 \sum_{-3}^3 t^3 u_t \right\}; \\ a_2 &= \frac{1}{84} \left\{ -4 \sum_{-3}^3 tu_t + \sum_{-3}^3 t^3 u_t \right\}; \\ a_3 &= \frac{1}{216} \left\{ -7 \sum_{-3}^3 tu_t + \sum_{-3}^3 t^3 u_t \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Выражая эти коэффициенты в виде скользящих средних семи последних членов, получаем в очевидных обозначениях, что

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{21} [-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2] + \frac{1}{252} [-22, -67, -58, 0, 58, \\ &67, -22] t + \frac{1}{84} [5, 0, -3, -4, -3, 0, 5] t^2 + \frac{1}{36} [-1, 1, 1, 0, -1, \\ &-1, 1] t^3. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Например, при $t = 1, 2, 3$ (3.28) приводится к следующему:

$$u_1 = \frac{1}{42} [1, -4, 2, 12, 19, 16, -4]; \quad (3.29)$$

$$u_2 = \frac{1}{42} [4, -7, -4, 6, 16, 19, 8]; \quad (3.30)$$

$$u_3 = \frac{1}{42} [-2, 4, 1, -4, -4, 8, 39]. \quad (3.31)$$

Если бы последними семью членами были 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, то для третьего от конца члена мы получили бы значение тренда $u_1 = = \frac{1}{42} [(1 \times 0) + (-4 \times 1) + (2 \times 8) + \dots + (-4 \times 216)] = 64$.

Веса, как и положено, в сумме равны единице, но они здесь не симметричны. Более того, так как для различных точек формулы различные, полный перечень весовых коэффициентов, соответствующих (3.8) и (3.9), занимает довольно много места. Коэффициенты для $p \leq 5$ и $n \leq 25$ затабулированы Кауденом [17], с разрешения которого мы приводим их в приложении А. Следует отметить, что теперь нельзя больше применять одни и те же формулы для полиномов порядка $2m$ и для полиномов порядка $2m + 1$.

3.10. Следствием того, что с приближением к концу ряда коэффициенты отличны друг от друга все больше и больше, является тенденция возрастания суммы их квадратов. Например, суммы квадратов коэффициентов в формулах (3.29)—(3.31) будут 0,4524, 0,4524, 0,9286, а для центральной точки семерки 0,3333. Этого можно было ожидать: чем ближе конец ряда, тем меньше надежность значения тренда, измеряемая в данной точке степенью уменьшения ошибки. Иногда говорят, что подобранная кривая «виляет хвостом».

ЦЕНТРИРОВАННЫЕ СРЕДНИЕ

3.11. Мы уже отмечали, что наибольшее удобство представляет использование нечетного числа точек в качестве базы для расчета среднего. Но оказывается, что многие периоды времени, которые желательно брать в качестве базы для расчета среднего, содержат четное число точек — двадцать четыре часа в сутках, четыре недели в месяце, четыре квартала и двенадцать месяцев в году. В таких случаях крайне необходимо определить значения тренда в точках наблюдений. Обычно это делается простым арифметическим усреднением двух значений тренда.

Предположим, например, что имеются наблюдения на последний день каждого месяца, скажем с января по декабрь. Простое скользящее среднее 12 точек с весами $\frac{1}{12}$ [12] дает значение тренда в середине июля. Поэтому, чтобы получить значение тренда на конец июля для сравнения с наблюдаемым значением в этой точке, мы берем арифметическое среднее значений тренда в середине июля и в середине августа. Легко убедиться в том, что это эквивалентно вычислению 13-месячного среднего с весами

$$\frac{1}{24} [1, 2, 2, \dots, 2, 2, 1]. \quad (3.32)$$

При расчете этого среднего берутся два январских наблюдения (а в общем случае наблюдения за два одноименных месяца), но каждое входит с весом, в два раза меньшим, чем наблюдения за другие месяцы.

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ТRENDA МЕТОДОМ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ НА ДРУГИЕ КОМПОНЕНТЫ

3.12. До сих пор еще ничего не было сказано относительно наилучшего выбора чисел $2m + 1$ и p , величины базы скользящего среднего и порядка подбираемого полинома. Прежде чем можно будет определить эти значения, необходимо рассмотреть влияние скользящего среднего на остальные компоненты аддитивной модели.

Посмотрим прежде всего, что произойдет, если процедуру простого скользящего среднего для k точек применить к ряду, образованному гармоническими членами вида $\sin(\lambda t + \alpha)$. В силу суммирования получим

$$\sum_{t=1}^k \sin(\lambda t + \alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2} k \lambda}{\sin \frac{1}{2} \lambda} \sin \left\{ \frac{1}{2} (k+1) \lambda + \alpha \right\}; \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{k} [k] \sin(\lambda t + \alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2} k \lambda}{k \sin \frac{1}{2} \lambda} \sin \left\{ \frac{1}{2} (k+1) \lambda + \alpha \right\}. \quad (3.34)$$

Если принять эту величину за значение тренда в середине отрезка усреднения, т. е. в $\frac{1}{2} (k+1)$ точке, то получим, что тренд, определяемый скользящим средним, воспроизводит гармонику с той же самой фазой, но с амплитудой, умноженной на $\sin \frac{1}{2} k \lambda / (k \sin \frac{1}{2} \lambda)$. Этот множитель равен единице только в особых случаях. Он приблизительно равен единице при малых λ , так как $\sin \theta = \theta$ при малых θ . В других случаях он существенно меньше из-за члена k в знаменателе. Таким образом, если это значение тренда вычесть из исходного ряда, то при малых λ гармоника от этого почти не пострадает, но она будет практически сглажена, когда λ велико. А если $\sin \frac{1}{2} k \lambda$ отрицателен, то амплитуда колебаний после выделения тренда может даже возрасти. Это и понятно. Если λ мало, синусоидальная волна имеет период колебаний больше отрезка усреднения и воспринимается как тренд. Если же λ велико, то волна повторяется несколько раз в пределах отрезка усреднения, и среднее поэтому принимает значение, близкое к нулю.

3.13. Ясно, что если ряд состоит из суммы некоторого числа гармоник или его можно представить в таком виде, то в результате выделения тренда с помощью простого скользящего среднего возрастет роль коротких колебаний за счет колебаний с большим периодом. Чего-то в этом же роде можно ожидать от скользящих средних, которые не являются простыми арифметическими средними, особенно от тех, которые могут быть аппроксимированы итеративным усреднением

простых средних. Таким образом, существует опасность, что циклическое движение может быть искажено процедурой исключения тренда. Такого рода опасности подстерегают нас, конечно, и тогда, когда колебания не являются строго циклическими, Растянутое во времени колебание (пусть даже не регулярное) в скользящем среднем ошибочно принимается за долгосрочную тенденцию и относится к тренду, так что остаток после исключения тренда теряет часть движения, которую, конечно же, следовало бы рассматривать как колебание относительно тренда.

АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ

3.14. Рассмотрим теперь, как влияет исключение тренда с помощью скользящего среднего на случайные колебания, которые могут присутствовать в исходном ряде. Мы уже видели, что усреднение приводит к изменению (обычно к уменьшению) дисперсии колебаний. Кроме того, что не менее важно, члены ряда, полученного в результате усреднения, не являются теперь независимыми.

Настало время, чтобы ввести понятие автокорреляции — одно из основных понятий в анализе временных рядов. Мы уже касались его вкратце, но теперь должны рассмотреть гораздо более внимательно. Пусть задан ряд значений u_1, u_2, \dots, u_n , тогда $(n-1)$ пар $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{n-1}, u_n)$ образуют множество двумерных величин, которые имеют коэффициент корреляции стандартного типа. Это же относится к $(n-2)$ парам $(u_1, u_3), (u_2, u_4), (u_3, u_5)$ и т.д. Назовем этот коэффициент для членов ряда, разделенных $(k-1)$ наблюдениями, т. е. для членов u_t и u_{t+k} , «серийной корреляцией порядка k » и будем обозначать его как r_k . Если же ряд рассматривается как генеральная совокупность бесконечной длины, то будем говорить об автокорреляциях и обозначать их через ρ_k . Это согласуется с общепринятым в статистике обозначением характеристик генеральной совокупности греческими словами или буквами, а выборочных значений — латинскими.

В самом общем виде серийная корреляция определяется как

$$r_k = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \left(u_i - \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} u_i \right) \left(u_{i+k} - \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} u_{i+k} \right)}{\left[\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \left\{ u_i - \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} u_i \right\}^2 \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \left\{ u_{i+k} - \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} u_{i+k} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.35)$$

Громоздкость выражения объясняется тем, что коэффициент порядка k зависит от значений u_1, \dots, u_{n-k} , выступающих в качестве первого члена пары, и значений u_{1+k}, \dots, u_n , составляющих второй член. В большинстве случаев это выражение можно модифицировать, если измерять все переменные относительно среднего значения всего ряда u_1, u_2, \dots, u_n и, кроме того, заменить дисперсионные члены в знамена-

теле на дисперсию ряда в целом. Определение тогда значительно упрощается и принимает вид:

$$r_k = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} (u_i - \bar{u})(u_{i+k} - \bar{u})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad (3.36)$$

где \bar{u} — среднее, равное $\sum_{i=1}^n u_i/n$.

Обычно нет необходимости рассматривать отрицательные значения k , так как $r_k = r_{-k}$.

3.15. Массив коэффициентов ρ_1, ρ_2, \dots или соответствующих им выборочных коэффициентов многое говорит о внутренней структуре ряда, а вся их совокупность, нанесенная на график с k в качестве абсциссы и ρ_k , откладываемым по оси ординат, называется *коррелограммой*. Позже мы увидим, что коррелограмма представляет собой полезный инструмент анализа, позволяющий различать типы рядов.

ЭФФЕКТ СЛУЦКОГО—ЮЛА

3.16. Вернемся теперь к скользящему среднему случайного ряда. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2m+1}$ будут весами, используемыми при вычислении среднего по $2m+1$ членам, а ε — рядом с нулевым математическим ожиданием. Тогда значение «тренда», определяемое средним (обозначим его через u_t), равно:

$$u_{t+m+1} = \sum_{j=1}^{2m+1} a_j \varepsilon_{t+j}. \quad (3.37)$$

Как нам известно,

$$E(u_t) = 0; \quad (3.38)$$

$$\text{var } u_t = \text{var } \varepsilon \sum_{j=1}^{2m+1} a_j^2. \quad (3.39)$$

Далее

$\text{cov}(u_{t+m+1}, u_{t+m+1+k}) = E\{a_1 \varepsilon_{t+1} + a_2 \varepsilon_{t+2} + \dots\} \{a_1 \varepsilon_{t+1+k} + \dots\}$,
и, так как значения ε независимы, это сводится к выражению

$$\text{var } \varepsilon \sum (a_1 a_{1+k} + a_2 a_{2+k} + \dots + a_{2m-k+1} a_{2m+1}).$$

Следовательно, k -я автокорреляция ряда u_t равна:

$$\rho_k = \frac{\sum_{j=1}^{2m+1-k} a_j a_{j+k}}{\sum_{j=1}^{2m+1} a_j^2}. \quad (3.40)$$

Основное следствие этого заключается в том, что производный ряд имеет ненулевые автокорреляции вплоть до порядка $2m$. Более того, для скользящих средних, наиболее часто применяемых на практике, ρ_1 будет положительным и может принимать довольно высокие значения. Таким образом, производный ряд будет более гладким, чем исходный случайный ряд, и в нем могут проявляться систематические колебания. Этот эффект называется эффектом Слуцкого — Юла.

Пример 3.4

В табл. 3.1 представлены автокорреляции, полученные в результате усреднения случайного ряда по формуле Спенсера для 21 точки, в которой использовались веса, приведенные в (3.26). На рис. 3.1 изображена коррелограмма. После $k = 13$ автокорреляции малы, а начиная с $k = 21$ и далее равны нулю. Для более низких значений k

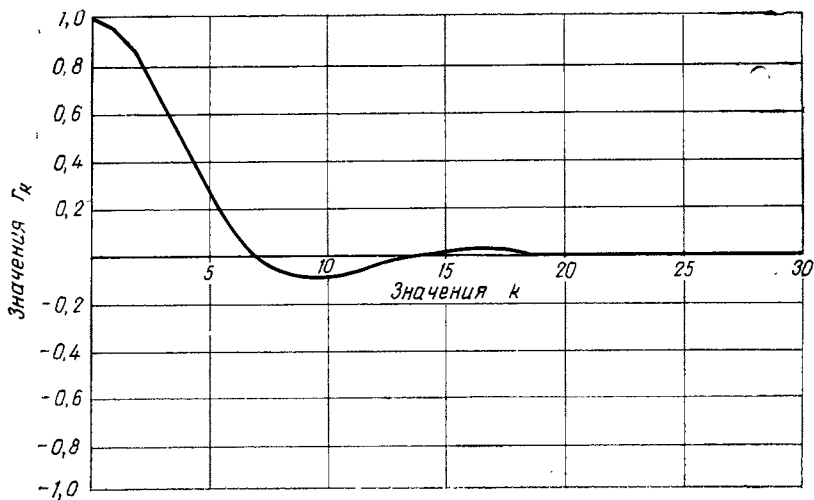


Рис. 3.1. Коррелограмма ряда, генерированного по формуле Спенсера для 21 точки

они будут значительны, и, следовательно, можно ожидать, что применение этой формулы к случайному ряду приведет к его сильному сглаживанию. Типичный ряд приведен в табл. 3.2. Он представляет случайную переменную с «прямоугольным» распределением, т. е. такую, в которой появление любого целого числа от 0 до 99 равновероятно. (Это означает, что математическое ожидание переменной y равно 49,5; у производного сглаженного ряда математическое ожидание будет тем же.)

3.17. Объяснение явных систематических колебаний всего лишь усреднением случайных событий было своего рода сенсацией, когда в 1927-г. Слуцкий [80] и Юл [94] впервые обратили внимание на этот факт, особенно когда Слуцкий смог дать очень хорошую имитацию действительного экономического «цикла» девятнадцатого столетия

Корреляции, порожденные 21-точечной средней Спенсера

k	$\Sigma a_j a_{j+k}$	r_k	k	$\Sigma a_j a_{j+k}$	r_k
0	17 542	1,000	11	-930	-0,053
1	16 786	0,957	12	-528	-0,030
2	14 667	0,836	13	-214	-0,012
3	11 584	0,660	14	-27	-0,002
4	8 085	0,461	15	50	0,003
5	4 726	0,269	16	59	0,003
6	1 951	0,111	17	40	0,002
7	6	0,000	18	19	0,001
8	-1 074	-0,061	19	6	0,000
9	-1 430	-0,082	20	1	0,000
10	-1 298	-0,074	21	0	0,000

Таблица 3.2

Применение формулы Спенсера для сглаживания случайного ряда с равномерным распределением

Номер члена	Ряд	«Тренд» по формуле Спенсера для 21 точки	Номер члена	Ряд	«Тренд» по формуле Спенсера для 21 точки	Номер члена	Ряд	«Тренд» по формуле Спенсера для 21 точки
1	23		18	3	43	35	10	39
2	15		19	67	40	36	96	38
3	75		20	44	39	37	22	37
4	48		21	5	39	38	13	36
5	59		22	54	39	39	43	35
6	1		23	55	40	40	14	34
7	83		24	50	41	41	87	34
8	72		25	43	42	42	16	
9	59		26	10	43	43	3	
10	93		27	74	44	44	50	
11	76	67	28	35	44	45	32	
12	24	66	29	8	45	46	40	
13	97	63	30	90	44	47	43	
14	8	60	31	61	44	48	62	
15	86	55	32	18	43	49	23	
16	95	51	33	37	42	50	50	
17	23	47	34	44	41	51	5	

с помощью процесса скользящего среднего. На самом деле, движения, получаемые таким способом, намного более похожи на типичные ряды, наблюдаемые в экономике и в некоторых физических науках (например, в метеорологии), чем суммы гармонических членов. Показательно, что в этих рядах интервалы между пиками и впадинами имеют

переменную длину, так что вместо точного «периода» они характеризуются распределением интервалов. Аналогично и амплитуды движения существенно меняются от одного пика до другого. Поэтому представляет интерес исследование распределения интервалов между последовательными поворотными точками.

3.18. Проблема определения действительного распределения интервалов, получающегося в результате сглаживания случайного ряда с помощью скользящего среднего, остается нерешенной, но в некоторых случаях можно установить математическое ожидание длины отрезка между пиками. Пусть a_1, a_2, \dots, a_s будут весами при подсчете среднего, применим их для сглаживания случайного *нормального* ряда с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Тогда совместное распределение переменных $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{s+1}$ будет сферически симметричной функцией

$$dF = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(s+2)} \sigma^{s+2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{s+1} \epsilon_j^2 / \sigma^2 \right\} d\epsilon_0, d\epsilon_1, \dots, d\epsilon_{s+1}. \quad (3.41)$$

Вероятность пика, другими словами, вероятность того, что

$$u_{s+1} - u_s < 0 \text{ и } u_s - u_{s-1} > 0,$$

равна интегралу плотности вероятности по области, ограниченной гиперплоскостями

$$\sum_{j=1}^s a_j \epsilon_{j+1} - \sum_{j=1}^s a_j \epsilon_j = 0; \quad (3.42)$$

$$\sum_{j=1}^s a_j \epsilon_j - \sum_{j=1}^s a_j \epsilon_{j-1} = 0. \quad (3.43)$$

Благодаря сферической симметрии этот интеграл равен $\theta/(2\pi)$, где θ — угол между плоскостями, определяемый соотношением

$$\cos \theta = \frac{(a_2 - a_1) a_1 + (a_3 - a_2) (a_2 - a_1) + \dots + a_s (a_s - a_{s-1})}{a_1^2 + (a_2 - a_1)^2 + \dots + a_s^2}. \quad (3.44)$$

Предположим, например, что мы получаем ряд в результате усреднения с помощью двух простых средних $\frac{1}{15}$ [5] [3]. Веса представляются как [1, 2, 3, 3, 3, 2, 1]/15, и по формуле (3.44) находим

$$\cos \theta = \frac{2}{3}, \quad \theta = 48,190.$$

Математическое ожидание длины отрезка между пиками равно $360/48,190 = 7,5$ единицы.

3.19. В [526, гл. 46] проведена экспериментальная проверка этого результата и приводятся формулы, позволяющие вычислить математическое ожидание длины отрезка между пиками, когда «пульсации» сглажены, и математическое ожидание промежутков между «пересечениями снизу вверх», т. е. расстояний между точками, в которых ряд, измеряемый относительно своего математического ожидания, ме-

няет отрицательный знак на положительный. Точные формулы получены только для нормальных колебаний, но из экспериментов, хотя их было проведено довольно ограниченное число, явствует, что (3.44)— вполне приемлемая оценка, если условие нормальности и не выполняется.

3.20. Если вернуться теперь к вопросу о влиянии вычитания тренда из исходного ряда на случайные остатки, то станет ясно, что скользящее среднее будет определять наличие «тренда» в случайных колебаниях и поэтому некоторая их часть будет отнесена к тренду и исключена вместе с ним. Это обстоятельство может иметь не очень серьезные последствия, так как если, скажем, у коэффициента уменьшения ошибки довольно низкое значение (у формулы Спенсера для 21 точки, например, около одной девятой), то около восьми девяток дисперсии случайных колебаний останется.

3.21. Вывод состоит в том, что любое скользящее среднее, по всей вероятности, искажает циклическую, краткосрочную и случайную компоненты ряда. Избежать этого не представляется возможным, во всяком случае до тех пор, пока элиминирование тренда производится с помощью скользящего среднего. К счастью, зная веса, используемые при подсчете среднего, можно оценить вероятный эффект этой процедуры и принять его во внимание при интерпретации. Вскоре, однако, мы увидим, что в любом случае выбор скользящего среднего в известной степени субъективен и что, по крайней мере в некоторых случаях, желательно испытывать несколько средних и посмотреть, какой из результатов больше соответствует цели анализа.

3.22. Кроме подбора математических функций ко всему ряду, по-видимому, лишь еще одним методом, предложенным Родсом [74] и Кенуем [68], пытались определять тренд. Он предполагает разрезание ряда на отрезки и подбор полинома к каждому из них. Вычисления сложны вследствие необходимости обеспечить плавное сопряжение полиномов, построенных для соседних отрезков, и этот метод не получил широкого распространения. Расчеты можно найти в [52б, гл. 46].

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Влияние процедуры исключения тренда методом скользящих средних на остальные компоненты временного ряда можно исследовать также с помощью спектрального анализа (см. 6.34 и 8.27).

2. Иногда скользящее среднее называют «фильтром», встречается и такое выражение, как «фильтр низких частот». Когда речь идет о временных рядах, оно означает скользящее среднее, которое сглаживает периодические составляющие высокой частоты (с малой длиной волны) и оставляет относительно нетронутыми низкие частоты (см. 6.34).

3. Небольшой вопрос, но небезразличный для специалиста, который должен подробно объяснить проводимый им анализ непрофессионалу, касается знаков весов в скользящем среднем. Не всегда легко оправдать использование *отрицательных* весов, которые, по-види-

мому, означают, что некоторые члены вредны для сумм. Конечно, можно строить скользящие средние с неотрицательными весами, но они не будут оптимальными в общем случае, хотя различие трендов может быть достаточно малым.

4. Таблицы в приложении А ниже столбца 0 содержат результат экстраполяции полинома на одну единицу времени за пределы диапазона наблюдений и, следовательно, могут служить для «предсказания» на одну единицу времени вперед. Стандартные ошибки оценок, приведенные в последней строке таблиц, показывают, как возрастает ненадежность оценок при выходе за пределы интервала наблюдений.

5. В соответствии с (3.44) можно вывести также выражения для математического ожидания расстояний между точками пересечений ряда с линией его математического ожидания при движении снизу вверх. По некоторым соображениям эта величина может быть предпочтительной мерой средних колебаний, так как соседние пики могут иметь характер пульсаций при отсутствии у ряда изменений в знаке.

4 ВЫБОР СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ РАЗНОСТЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Если имеется ряд, содержащий полином (или локально представляемый рядом полиномов) с наложенным на него случайным элементом, то было бы естественно исследовать, нельзя ли исключить полиномиальную часть вычислением последовательных разностей ряда. Действительно, известно, что разности полинома порядка k представляют собой полином порядка $k - 1$. Далее, если ряд содержит полином порядка p , то переход к разностям, повторенный $(p + 1)$ раз, исключает его и оставляет элементы, связанные со случайной компонентой исходного ряда. Давайте теперь рассмотрим последствия перехода к разностям в случайном ряде.

Используя, как и в (3.10), Δ для обозначения разности вперед, получаем

$$\Delta \varepsilon_t = \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t; \quad (4.1)$$

$$\Delta^2 \varepsilon_t = \varepsilon_{t+2} - 2\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_t, \quad (4.2)$$

и вообще

$$\Delta^r \varepsilon_t = \varepsilon_{t+r} - \binom{r}{1} \varepsilon_{t+r-1} + \binom{r}{2} \varepsilon_{t+r-2} + \dots \pm (-1)^r \varepsilon_t. \quad (4.3)$$

Коэффициентами здесь являются члены разложения бинома $(1 - 1)^r$.

Без потери общности можно положить, что ε имеет нулевое математическое ожидание. Тогда

$$E(\Delta^r \varepsilon_t) = 0. \quad (4.4)$$

Если ε_t имеет одинаковую дисперсию для всех t , то

$$\text{var}(\Delta^r \varepsilon_t) = \text{var} \varepsilon \left\{ 1 + \binom{r}{1}^2 + \binom{r}{2}^2 + \dots + 1 \right\}.$$

Член в скобках представляет собой коэффициент при x^r в $(1 + x)^r \times (x + 1)^r$ и поэтому равен $\binom{2r}{r}$. Следовательно,

$$\text{var}(\Delta^r \varepsilon_t) = \binom{2r}{r} \text{var} \varepsilon. \quad (4.5)$$

Обозначим

$$\frac{\text{var}(\Delta^r \varepsilon_t)}{\binom{2r}{r}} \text{ как } V_r.$$

4.2. В таком случае, если взять r -е разности, просуммировать их квадраты относительно нуля и разделить на $\binom{2r}{r}$, то получим оценку $\text{var} \varepsilon$ при условии, что вычисление разностей выполнялось достаточное количество раз, чтобы элиминировать полином. Следовательно, метод последовательных разностей переменной состоит в вычислении первых, вторых, третьих, ... разностей, определении сумм квадратов, делении на $\binom{2}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{6}{3}$ и т. д. и обнаружении момента, когда это отношение становится постоянным. Здесь мы получаем оценку порядка полинома, содержащегося в исходном ряде, и дисперсию случайного элемента.

4.3. Коэффициент $\binom{2r}{r}$ принимает следующие значения при $r = 1, \dots, 10$:

r	$\binom{2r}{r}$	r	$\binom{2r}{r}$
1	2	6	924
2	6	7	3 432
3	20	8	12 870
4	70	9	48 260
5	252	10	184 756

4.4. Эта идея привлекательна своей простотой, но ее практическое применение требует определенной осторожности. Последовательные значения V_r не являются независимыми и часто обнаруживается тенденция их медленного убывания (а иногда возрастания) без видимой сходимости к постоянному значению. Кроме того, процесс перехода к разностям имеет тенденцию уменьшать относительное значение любого систематического движения, кроме сезонных эффектов с периодом, близким к временному интервалу, так что сходимость отношения V_r не *доказывает*, что ряд первоначально состоял из полинома плюс случайный остаток, а только то, что он может быть приближенно представлен таким образом. Однако для нас этот метод ценен лишь тем, что он дает верхний предел порядка полинома p , который целесообразно использовать для элиминирования тренда.

Пример 4.1

Ряд из 51 члена был построен в соответствии с формулой

$$u_t = (t-26) + \frac{1}{10} (t-26)^2 + \frac{1}{100} (t-26)^3 + \varepsilon_t, \quad (4.6)$$

где значения ε_t те же, что в примере 3.4, табл. 3.2. Применение метода последовательных разностей переменной к полученному ряду дает следующие результаты:

r	V_r	r	V_r
1	1075,41	4	1047,21
3	1082,02	5	1011,05
2	1076,58	6	975,20

Оказывается, как это следует из рассматриваемого метода, что полином имеет первый порядок, а дисперсия остатка равна 1075. Фактически же полином был третьего порядка, а дисперсия остатка (дисперсия первых 100 натуральных чисел) равна $(100^2 - 1)/12 = 833$. Однако ряд слишком короткий для того, чтобы проявили себя квадратичный и кубический члены. Дисперсия исходного ряда была равна 6273. Переход к первым разностям уменьшает ее до 1075,4 и указывает (совершенно правильно), что около пяти шестых дисперсии объясняется линейным членом. Остальное отнесено на долю случайного члена. Рассмотрим, например, кубический член $(t-26)^3/100$. В исходном ряду он может изменяться в пределах от $-156,25$ до $156,25$. Переход к первым разностям приводит его к члену 3 $(t-26)^2/100$ с границами изменения от 18,75 до 0, в то время как у случайного элемента диапазон изменения возрастает и имеет пределы от 0 до 198. Уже у первых разностей систематическая часть «забывается» случайным элементом.

Пример 4.2

Рассмотрим ряд с краткосрочной периодичностью, состоящей из повторений 1, -1 , 1, -1 . Переход к первым разностям приводит к ряду 2, -2 , 2, -2 и т. д., вторые разности дают ряд 4, -4 , 4, -4 и т. д. Таким образом, пренебрегая эффектами, связанными с небольшими длинами рядов, получаем

$$V_r = 2^{2r} / \binom{2r}{r} = \frac{2^{2r} (r!)^2}{(2r)!},$$

что с использованием приближенной формулы Стирлинга для факториала аппроксимируется величиной $(\pi r)^{\frac{1}{2}}$, которая возрастает неограниченно. Это, разумеется, крайний случай. Рассмотрим далее синусоидальный ряд $u_t = \sin \alpha t$:

$$\Delta u_t = \sin \alpha (t+1) - \sin \alpha t = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha \left(t + \frac{1}{2} \right);$$

$$\Delta^2 u_t = 2^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha (t+1); \quad (4.7)$$

$$\Delta^r u_t = 2^r \sin^r \frac{1}{2} \alpha \frac{\sin}{\cos} \left\{ \alpha \left(t + \frac{1}{2} r \right) \right\}. \quad (4.8)$$

Опуская член с $\alpha \left(t + \frac{1}{2} r \right)$, имеющий тот же самый период и амплитуду, что и исходный ряд, получаем

$$V_r = \frac{2^{2r} \sin^{2r} \frac{1}{2} \alpha (r!)^2}{(2r)!} \sim \sin^{2r} \frac{1}{2} \alpha \sqrt{(\pi r)}. \quad (4.9)$$

При $\alpha = \pi$, как мы уже видели, эта величина возрастает неограниченно. При других значениях, когда $\left| \sin \frac{1}{2} \alpha \right| < 1$, отношение (4.9) будет уменьшаться неограниченно, но, может быть, далеко не при всех порядках разностей, если длина волны ряда мала.

Пример 4.3

По данным табл. 1.2 (о поголовье овец) получаем:

r	V_r	r	V_r
1	3 468	6	448
2	1 442	7	401
3	854	8	371
4	629	9	357
5	518	10	347

Эти результаты означают, что третьего порядка, по-видимому, достаточно для элиминирования тренда. Дополнительное уменьшение V_r при переходе к разностям более высокого порядка невелико. В действительности, как мы вскоре увидим, даже третий порядок слишком высок для изучения краткосрочных колебательных движений.

Пример 4.4 [48]

Несмотря на то что мы забегаем вперед, обращаясь к некоторым типам стационарных рядов, которые рассмотрим полностью в гл. 6, целесообразно здесь отметить последствия перехода к разностям переменной в случае так называемых авторегрессионных рядов. Эти ряды генерируются фактически как линейные средние случайных членов, но эти средние получают на бесконечном отрезке усреднения. Их свойства весьма похожи на свойства скользящих средних случайных членов, о которых уже говорилось.

Многие из таких рядов строились по рекуррентной формуле:

$$u_{t+2} = -\alpha_1 u_{t+1} - \alpha_2 u_t + \varepsilon_t, \quad (4.10)$$

где ε , как обычно, — случайный член. Можно показать, что при $\alpha_1 = -1,7$; $\alpha_2 = 0,5$ дисперсия u будет

$$\text{var } u = 2,8846 \text{ var } \varepsilon. \quad (4.11)$$

В этом случае значения V_r могут быть получены теоретически. После нормирования делением на 2,8846 они будут следующими:

1	0,2657	11	0,0571
2	0,1245	12	0,0565
3	0,0869	13	0,0561
4	0,0734	14	0,0557
5	0,0671	15	0,0554
6	0,0635	16	0,0551
7	0,0613	17	0,0548
8	0,0598	18	0,0546
9	0,0586	19	0,0544
10	0,0578	20	0,0543

Характерно медленное убывание, подтверждаемое экспериментом. Вполне возможно, что здесь мы могли бы прийти к заключению о том, что ряд содержит полином третьего порядка плюс случайный остаток с дисперсией, равной приблизительно 0,0869 дисперсии исходного ряда. На практике скользкое среднее, основывающееся на подборе кубического полинома, возможно, дало бы остатки того же порядка, и их было бы трудно отличить от остатков, действительно генерируемых случайным рядом; но это, очевидно, далеко увело бы от истинного механизма, генерирующего данные.

4.5. Между дисперсиями разностей ряда и его автокорреляциями существует интересное соотношение. Для ряда из n членов имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n-1} (\Delta u_t)^2 &= \sum_{t=1}^{n-1} (u_{t+1} - u_t)^2 = \sum_{t=1}^{n-1} \{(u_{t+1} - \bar{u}) - (u_t - \bar{u})\}^2 = \\ &= \sum_{t=1}^{n-1} (u_{t+1} - \bar{u})^2 + \sum_{t=1}^{n-1} (u_t - \bar{u})^2 - 2 \sum_{t=1}^{n-1} (u_{t+1} - \bar{u})(u_t - \bar{u}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Далее, пренебрегая краевыми эффектами и разделив (4.12) на $(n-1)$, можем записать

$$\text{var } \Delta u_t = 2 \text{ var } u (1 - \rho_1). \quad (4.13)$$

Аналогично находим, что

$$\text{var } \Delta^2 u_t = \text{var } u \{6 - 8\rho_1 + 2\rho_2\}, \quad (4.14)$$

и вообще

$$\text{var } (\Delta^r u_t) = \text{var } u \left\{ \binom{2r}{r} - 2\rho_1 \binom{2r}{r-1} + 2\rho_2 \binom{2r}{r-2} \dots \right\}, \quad (4.15)$$

$$V_r = \text{var } u \left\{ 1 - \frac{2r}{r+1} \rho_1 + \frac{2r(2r-1)}{(r+1)(r+2)} \rho_2 - \dots \right\}. \quad (4.16)$$

И наоборот, можно показать, что

$$V_0 \rho_k = V_0 - k^2 V_1 + \frac{k^2(k^2-1)}{(2!)^2} V_2 - \frac{k^2(k^2-1)(k^2-2^2)}{(3!)^2} V_3 - \dots \quad (4.17)$$

Таким образом, величины V , характеризующие разности переменной, можно выразить в виде линейных функций автокорреляций и наоборот. Это соотношение редко требуется на практике, поэтому мы не приводим его доказательство, которое читатель найдет в [526, гл. 46].

4.6. Мы уже отмечали, что последовательные значения V коррелированы, поэтому были предприняты попытки вывести формулы для стандартной ошибки, чтобы видеть, является ли V_{h+1} «существенно» меньше, чем V_h . Результаты оказались чрезвычайно громоздкими и, с нашей точки зрения, вряд ли их целесообразно применять даже в приближенном виде. Они были получены Оскаром Андерсоном старшим и приведены в [526, гл. 46].

4.7. Следует признать, что метод последовательных разностей переменной до некоторой степени разочаровывает. Идеи, лежащие в его основе, столь ясны, что обычно надеются получить с его помощью

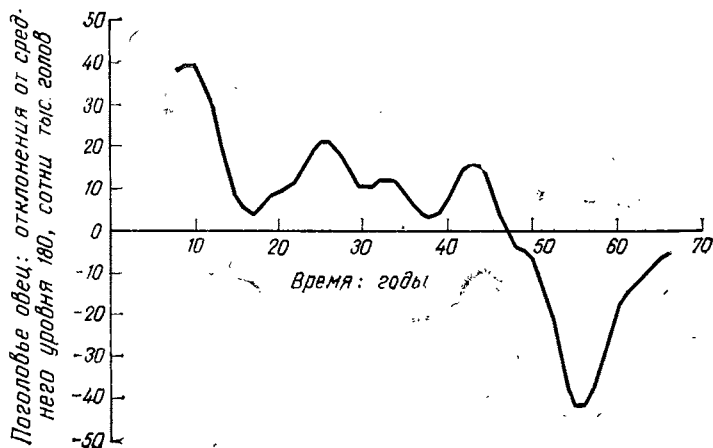


Рис. 4.1. 15-точечное скользящее среднее Спенсера, рассчитанное для ряда данных о поголовье овец, представленного на рис. 1.4

столь же ясные результаты, указывающие, как подбирать тренды и оценивать дисперсии остатков. Как мы уже показали на примерах, в общем случае эти надежды не оправдываются. Однако не следует отбрасывать этот метод как бесполезный. Он дает ряд ценных указаний относительно максимального порядка полинома, который стоит использовать. Эту главу мы заключаем рассмотрением практического случая на примере ряда данных о поголовье овец из табл. 1.2.

Пример 4.5

Ряд данных о поголовье овец, как можно видеть на рис. 1.4, имеет общий понижающийся тренд, некоторые осцилляции относительно этого тренда и случайные колебания. Этот ряд не содержит сезонного элемента, так как он представляет годовые колебания. Цель исследования здесь заключается в выделении тренда для изучения осцилляций. Создается такое впечатление, что поголовье разного рода домашнего скота (свиней, овец, крупного рогатого скота) подвержено некоторым циклическим колебаниям. По данным примера 4.3 можно сделать вывод о том, что скользящего среднего, воспроизводящего кубический полином, будет достаточно. Для начала воспользуемся формулой Спенсера для 15 точек.

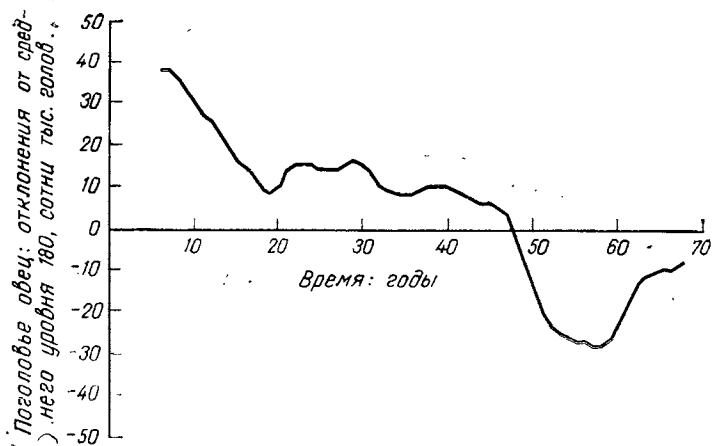


Рис. 4.2. 11-точечное скользящее среднее, рассчитанное для ряда данных о поголовье овец

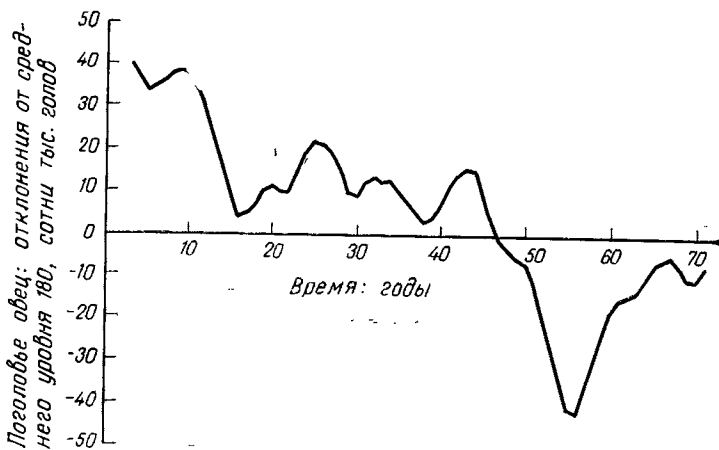


Рис. 4.3. 5-точечное скользящее среднее, рассчитанное для ряда данных о поголовье овец

На рис. 4.1 показано скользящее среднее, полученное по формуле Спенсера для 15 точек. Сразу же ясно, что если рассматриваются краткосрочные колебания, то это среднее чрезвычайно подвижно. Полученная кривая довольно хорошо следует за такими колебаниями, принимая их за «тренд». И если вычесть ее из первоначального ряда, то большинство интересующих нас колебаний будет удалено. Поэтому рассмотрим более простое среднее. На рис.4.2 показан результат простого усреднения по 11 точкам. Это среднее нам, очевидно, более подходит. Линия тренда не является идеально гладкой, но она, так сказать, оставляет после себя большинство краткосрочных колебаний.

Можно предположить, что более простые средние будут, как правило, даже лучше. На рис. 4.3 представлено простое скользящее среднее, рассчитанное по 5 членам. Оно опять слишком плотно следует за данными. В конце концов было выбрано скользящее среднее 9 членов. Остатки будут рассмотрены позже в гл. 12.

4.8. Предшествующий пример достаточно наглядно демонстрирует, что подбор тренда и его оценивание нельзя считать чисто механическим процессом, который можно не задумываясь поручить электронному компьютеру. При выборе отрезка усреднения, характера весов и порядка полинома, с которым эти веса связаны, существует большая свобода (даже необходимость) для личных суждений. Ученый это воспринимает как отход от корректности и вовлечение в работу субъективных элементов. В этом смысле исследователь временных рядов не может быть пуристом. Что он, безусловно, может сделать, — это привести первоначальные данные, над которыми он работал, и дать недвусмысленные объяснения относительно того, как он их обрабатывал, для того чтобы каждый, кто не согласен с этим, смог провести собственный анализ.

5

СЕЗОННОСТЬ

5.1. Сезонные эффекты, несмотря на то что время их наступления год от года может несколько отклоняться от среднего, имеют регулярный характер, которого другие элементы временного ряда, как правило, не имеют. Позже, когда будем изучать спектральный анализ, мы увидим, что имеется возможность выделить их вклад в спектр, не вычисляя других компонент ряда. Но при рассмотренных до настоящего момента способах разложения ряда определить сезонные эффекты без предварительной оценки тренда представляется невозможным. Возьмем, например, ряд месячных данных, состоящий из медленно растущего тренда с членами: 101 для января 1970 г., 102 для февраля 1970 г., ..., 112 для декабря 1970 г., 113 для января 1971 г. и т. д. В любом году данные за январь имеют наименьшее значение, а за декабрь — наибольшее. Но это не сезонные эффекты, которые в действительности полностью отсутствуют. Встает проблема, как отличать подобные ряды от таких, например, как месячные продажи рождественских открыток, характеризующиеся, по-видимому, наименьшим объемом в январе и наибольшим в декабре, причем такие колебания являются сезонными в общепринятом смысле слова.

5.2. Полезно также напомнить, что существуют различные причины для исследования сезонных эффектов, так же как различными были причины, по которым изучались остатки после исключения тренда.

(а) Может быть, желательно сравнить переменную в разных точках года, как чисто внутригодовое явление; например, когда принимается решение о том, сколько отелей закрыть после окончания сезона, или в какие моменты времени снизить уровень запасов.

(б) Может потребоваться исключение сезонных эффектов из ряда для изучения других его компонент, очищенных от сезонной составляющей.

(в) Иногда требуется текущее значение «скорректировать» на сезонный эффект, например, для того, чтобы выяснить, какой была бы безработица в зимний месяц, если бы обычное влияние сезонности не увеличивало ее.

Эти цели различны и, следовательно, одного-единственного метода определения сезонных колебаний вряд ли будет достаточно для достижения каждой из них. Возможно, именно по этой причине на

практике многие организации (особенно правительственные) предпочитают разные методы обработки сезонности.

ТИПЫ МОДЕЛЕЙ

5.3. Мы рассмотрим три типа моделей, в которых сезонный эффект представлен либо аддитивно, либо мультипликативно. Если m_t — гладкая компонента ряда (тренд и краткосрочные колебания), s_t — сезонная компонента, а ϵ_t — член ошибки, то можно записать либо

$$u_t = m_t + s_t + \epsilon_t, \quad (5.1)$$

либо

$$u_t = m_t s_t \epsilon_t, \quad (5.2)$$

либо, может быть, смешанную модель

$$u_t = m_t s_t + \epsilon_t. \quad (5.3)$$

Если перейти к логарифмам, то чистую мультипликативную модель (5.2) можно привести к линейному виду

$$\ln u_t = \ln m_t + \ln s_t + \ln \epsilon_t. \quad (5.4)$$

Здесь уместно остановиться на небольшом теоретическом рассуждении. Если ϵ_t в (5.2) была бы переменной с определяемой функцией плотности, то мы не могли бы допустить, чтобы она принимала отрицательные значения, за исключением тех неправдоподобных случаев, когда случайные события меняют знак u_t на противоположный. Остаточный элемент $\ln \epsilon_t$ в (5.4) не будет иметь ту же самую функцию плотности, что и ϵ_t . Если решено (как это обычно делается при выборе модели (5.4)) рассматривать сам остаток как случайную переменную η_t с нулевым математическим ожиданием

$$\ln u_t = \ln m_t + \ln s_t + \eta_t, \quad (5.5)$$

то исходный вид модели будет

$$u_t = m_t s_t e^{\eta_t}. \quad (5.6)$$

5.4. Для того чтобы оценить s_t в аддитивной модели, прежде всего нужно оценить m_t . Скользящее среднее с приблизительно равными весами, подсчитываемое на отрезке усреднения, равном одному году, не должно сильно повлиять на остатки s_t , так как, почти по определению, сумма сезонных эффектов за год равна нулю (или, если выразить это иначе, избыток суммы сезонных эффектов может быть отнесен к m_t). Закрепим эти идеи исходя из того, что имеются ряды месячных данных. Для этого (по причинам, объясненным в 3.11) будем брать центрированное среднее

$$\frac{1}{24} [1, 2, 2, \dots, 2, 2, 1] \quad (5.7)$$

и накладывать условие, что (для аддитивной модели)

$$\sum_{j=1}^{12} s_t = 0. \quad (5.8)$$

Эффект этого ограничения состоит в том, что простое скользящее среднее, от использования которого обычным образом следует ожидать отражения линейного тренда, в этом случае фактически элиминирует квадратический тренд; и вообще среднее, которое обычно элиминирует полином p -го порядка, будет при ограничении (5.8) элиминировать полином порядка $(p + 1)$. Это положение прояснится после числового примера, который с целью упрощения мы приводим для квартальных данных.

Пример 5.1.

Рассмотрим квадратически возрастающий ряд, взяв за единицу времени квартал:

Год	Квартал	Ряд	Центрированное среднее 4 членов $\frac{1}{8} [1, 2, 2, 2, 1]$	Столбец (3) — столбец (4)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	1	0		
	2	1		
	3	4	5,5	—1,5
2	4	9	10,5	—1,5
	1	16	17,5	—1,5
	2	25	26,5	—1,5
3	3	36	37,5	—1,5
	4	49	50,5	—1,5
	1	64	65,5	—1,5
4	2	81	82,5	—1,5
	3	100	101,5	—1,5
	4	121	122,5	—1,5
4	1	144	145,5	—1,5
	2	169	170,5	—1,5
	3	196		
	4	225		

Если бы на ряд в столбце (3) был наложен сезонный эффект, то усреднение сводило бы его приблизительно к нулю и сезонная составляющая воспроизводилась бы как добавка к значениям в столбце (5). Поэтому нельзя значения из столбца (5) считать сезонными эффектами, так как сумма четырех таких значений за годовой отрезок времени в среднем дает — 1,5 на квартал, а не нуль. Тогда для того чтобы получить оценку сезонного эффекта, из значений в столбце (5) следует вычесть — 1,5. Мы получили бы те же самые оценки сезонной составляющей, если бы прибавили — 1,5 к центрированному среднему в столбце (4), в котором тогда точно воспроизводился бы исходный квадратический полином.

Пример 5.2.

В табл. 5.1 представлены квартальные индексы оптовых цен на продукты питания растительного происхождения в Соединенном Королевстве за 1951—1958 гг. Для удобства вычислений данные преобразованы: значения исходного ряда уменьшены на 300, а затем умножены на 10 (см. табл. 5.2).

Квартальные индексы оптовых цен на продукты питания растительного происхождения в Соединенном Королевстве. 1951—1958 гг.
(данные из Journal of the Royal Statistical Society, 1867—1877 гг. = 100)

	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
Первый квартал	295,0	324,7	372,9	354,0	333,7	323,2	304,3	312,5
Второй квартал	317,5	323,7	380,9	345,7	323,9	342,9	285,9	336,1
Третий квартал	314,9	322,5	353,0	319,5	312,8	300,3	292,3	295,5
Четвертый квартал	321,4	332,9	348,9	317,6	310,2	309,8	298,7	318,4

Т а б л и ц а 5.2

Данные из табл. 5.1, уменьшенные на 300 и умноженные на 10

	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
Первый квартал	-50	247	729	540	337	232	43	125
Второй квартал	175	237	809	457	239	429	-141	361
Третий квартал	149	225	530	195	128	3	-77	-45
Четвертый квартал	214	329	489	176	102	98	-13	184

В табл. 5.3 показаны остатки после элиминирования тренда, определенного с помощью центрированного среднего четырех значений. Средние значения для каждого квартала (арифметическое среднее за семь лет) приведены в последнем столбце. В сумме эти средние дают 24,01, а их среднее равно 6,00. Сезонные эффекты получены вычитанием 6,00 из последнего столбца, например 68,46 — 6,00. После деления на 10 возвращаемся к первоначальному масштабу и получаем для четырех кварталов значения

$$6,25, 8,62, -8,84, -6,03, \quad (5.9)$$

которые в сумме дают нуль, как и требуется.

Для того чтобы скорректировать индексы на сезонность, нужно, например, из данных за первый квартал вычесть 6,25, а к данным за последний квартал прибавить 6,03.

В табл. 5.4 приведены аналогичные остатки, полученные в результате оценки тренда с помощью скользящего среднего $\frac{1}{21}$ [-2, 3, 6, 7, ...], основывающегося на подборе кубического полинома по 7 точкам. Сезонные корректировки получились следующими:

$$6,81, 6,87, -8,07, -5,61. \quad (5.10)$$

Разница между двумя результатами не очень велика. Сезонный эффект заметен, но незначителен.

5.5. В ходе изложения этой темы подразумевалось, что значение тренда следует определять в каждой точке ряда, за исключением группы краевых точек, до которых центрированное среднее не дохо-

Таблица 5.3

Остатки данных из табл. 5.2 после элиминирования тренда
с помощью центрированного скользящего среднего,
подсчитываемого по четырем членам

	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	Всего	Средние
Первый квартал		25,750	167,875	77,875	108,625	24,875	52,250	22,000	479,250	68,46
Второй квартал		-8,125	189,750	75,875	28,250	238,000	107,875	229,375	645,250	92,18
Третий квартал		-10,125	-94,750	-85,625	-121,625	-60,375	-163,875	-40,250	-576,625	-82,38
Четвертый квартал	10,000	-122,500	-59,000	-88,000	-97,000	26,000	-49,250		-379,750	-54,25

Таблица 5.4

Остатки данных из табл. 5.2 после элиминирования тренда,
определенного кубическим полиномом, строящимся по 7 точкам

	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	Всего	Средние
Первый квартал		+30,38	122,14	79,95	113,19	16,33	91,14	5,43	458,56	65,51
Второй квартал		+29,19	135,62	82,24	27,43	206,57	-84,24		396,81	66,13
Третий квартал		-53,71	-123,95	-106,81	-35,76	-191,57	12,38		-499,42	-83,24
Четвертый квартал	-12,67	-128,67	-72,57	-70,48	-97,90	25,81	-54,00		-410,48	-58,64

дит. Но, как впервые указал на это Дарбин [27], замечательно то, что определение значений тренда не является необходимым (хотя для других целей может быть желательным). Наши рассуждения, хотя они и касаются месячных данных, имеют достаточно общий характер.

Пусть x_t будет отклонением u_t от центрированного 12-месячного скользящего среднего:

$$x_t = u_t - \frac{1}{24} \{u_{t-6} + 2u_{t-5} + \dots + 2u_{t+5} + u_{t+6}\}. \quad (5.11)$$

Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{12}$ будут средними x -в, т. е.

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_{12j+i}, & i = 1, 2, \dots, 6, \\ \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} x_{12j+i}, & i = 7, 8, \dots, 12, \end{cases} \quad (5.12)$$

где число лет равно $(p + 1)$, а не p .

Различные пределы суммирования объясняются тем фактом, что это центрированное среднее дает первое значение для момента $t = 7$, а последнее — для момента $t = 12p + 6$. Сезонный эффект определим как

$$s_i = \bar{x}_i - \bar{x}, \quad (5.13)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \bar{x}_i. \quad (5.14)$$

Определим теперь месячные средние исходного ряда как

$$\bar{u}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p u_{12j+i}, \quad i = 1, 2, \dots, 12, \quad (5.15)$$

а общее среднее (не считая шести первых и шести последних значений ряда) как

$$\bar{u} = \frac{1}{12p} \sum_{t=7}^{12p+6} u_t = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \bar{u}_i. \quad (5.16)$$

Тогда по (5.12) находим, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_{12j+1} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p [u_{12j+1} - \frac{1}{24} \{u_{12j-5} + \\ &+ 2u_{12j-4} + \dots + 2u_{12j+6} + u_{12j+7}\}] = \bar{u}_1 - \frac{1}{24p} \left\{ u_7 + 2 \sum_{j=8}^{12p+6} u_j + \right. \\ &\left. + u_{12p+7} \right\} = \bar{u}_1 - \bar{u} + \frac{1}{24p} (u_7 - u_{12p+7}). \end{aligned} \quad (5.17)$$

И вообще ¹

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \bar{u}_i - \bar{u} + \frac{1}{24p} \left\{ u_{i+6} + 2 \sum_{j=7}^{i+5} (u_j - u_{12p+j}) - u_{12p+i+6} \right\}, & i = 1, 2, \dots, 6, \\ \bar{u}_i - \bar{u} + \frac{1}{24p} \left\{ -u_{i-6} + 2 \sum_{l=i-5}^6 (-u_j + u_{12p+j}) + u_{12p+i-6} \right\}, & \end{cases} \quad (5.18)$$

$$i = 7, \dots, 12. \quad (5.19)$$

Замечательным в этих формулах является то, что \bar{x}_i , отклонение от тренда, может быть получено по месячным средним (относительно общего среднего) без построения тренда; необходима только корректировка, использующая первые и последние двенадцать членов ряда. Остальные $12(p+1) - 24$ значений в явном виде не участвуют в определении сезонных эффектов, но, разумеется, их влияние учитывается через месячные средние.

5.6. На первый взгляд возникает подозрение, что рассмотренный метод определения сезонных колебаний может быть довольно неэффективным. Дарбин показал, что это не так. Если взять ряд, содержащий чисто сезонных колебания плюс остаток ε , то оценки месячных сезонных эффектов, полученные по $12p$ значениям без элиминирования тренда, будут иметь дисперсию $11 \text{ var } \varepsilon / 12 p$. Оценка несезонной постоянной составляющей в рассмотренном методе будет иметь дисперсию не меньше, чем $0,7 \text{ var } \varepsilon / p^2$.

Пример 5.3.

Рассмотрим ряд квартальных данных за p лет u_1, u_2, \dots, u_{4p} . Отклонения от тренда данных за первый квартал будут:

$$\begin{aligned} u_5 - \frac{1}{8} (u_3 + 2u_4 + 2u_6 + 2u_8 + u_7); \\ u_9 - \frac{1}{8} (u_7 + 2u_8 + 2u_9 + 2u_{10} + u_{11}); \\ \dots \\ u_{4p-3} - \frac{1}{8} (u_{4p-5} + 2u_{4p-4} + 2u_{4p-3} + 2u_{4p-2} + u_{4p-1}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Их сумма равна

$$S_1 - u_1 - \frac{1}{8} (2S - 2u_1 - 2u_2 - u_3 - u_{4p-1} - 2u_{4p}), \quad (5.21)$$

где S — сумма всех членов ряда от 1 до $4p$, а S_1 — сумма значений u в первых кварталах, от u_1 до u_{4p-3} . Аналогично суммы для остальных трех кварталов будут следующими:

¹ В этой записи автором подразумевается, что $\Sigma = 0$, если нижний предел суммирования больше верхнего. — *Примеч. пер.*

$$S_2 - u_2 - \frac{1}{8} \{2S - 2u_1 - 2u_2 - 2u_3 - u_4 - u_{4p}\}; \quad (5.22)$$

$$S_3 - u_{4p-1} - \frac{1}{8} \{2S - u_1 - u_{4p-3} - 2u_{4p-2} - 2u_{4p-1} - 2u_{4p}\}; \quad (5.23)$$

$$S_4 - u_{4p} - \frac{1}{8} \{2S - 2u_1 - u_2 - u_{4p-2} - 2u_{4p-1} - 2u_{4p}\}. \quad (5.24)$$

Среднее этих четырех величин (так как $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$) равно

$$-\frac{1}{32} \{u_1 + 3u_2 - 3u_3 - u_4 - u_{4p-3} - 3u_{4p-2} + 3u_{4p-1} + u_{4p}\}. \quad (5.25)$$

Коэффициенты сезонности, получаемые вычитанием этого среднего из сумм, подсчитанных для каждого квартала, равны $\frac{1}{p}$, умноженной на

$$S_1 - \frac{1}{4} S - \frac{1}{32} \{23u_1 - 11u_2 - u_3 + u_4 + u_{4p-3} + 3u_{4p-2} - 7u_{4p-1} - 9u_{4p}\}; \quad (5.26)$$

$$S_2 - \frac{1}{4} S - \frac{1}{32} \{-9u_1 + 21u_2 - 5u_3 - 3u_4 + u_{4p-3} + 3u_{4p-2} - 3u_{4p-1} - 5u_{4p}\}; \quad (5.27)$$

$$S_3 - \frac{1}{4} S - \frac{1}{32} \{-5u_1 - 3u_2 + 3u_3 + u_4 - 3u_{4p-3} - 5u_{4p-2} + 21u_{4p-1} - 9u_{4p}\}; \quad (5.28)$$

$$S_4 - \frac{1}{4} S - \frac{1}{32} \{-9u_1 - 7u_2 + 3u_3 + u_4 + u_{4p-3} - u_{4p-2} - 11u_{4p-1} + 23u_{4p}\}. \quad (5.29)$$

Таким образом, коэффициенты сезонности являются отклонениями квартальных средних от общего среднего, «скорректированных» членами, зависящими только от первых четырех и последних четырех значений ряда.

Такие корректировки очень важны и ими ни в коем случае нельзя пренебрегать. Рассмотрим, например, данные из примера 5.1. Запишем их по годам:

Год	Кварталы				Итого
	1	2	3	4	
1	0	1	4	9	1240, среднее 310
2	16	25	36	49	
3	64	81	100	121	
4	144	169	196	225	
Суммы	224	276	336	404	

Отклонения $S_i - \frac{1}{4} S$ равны — 86, —34, 26, 94, и деление на 3, если пренебречь корректировками, даст «сезонные» коэффициенты — 28,7; —11,3; 8,7; 31,3. Однако сезонных эффектов на самом деле нет. С помощью (5.27) получаем для первого квартала:

$$- 86 - \frac{1}{32} \{ (23 \times 0) - (11 \times 1) - (4) + (9 \times 144) + (3 \times 169) - (7 \times 196) - (9 \times 225) \} = - 86 + 2752/32 = 0.$$

Аналогично и для других кварталов будет найдено, что сезонные эффекты равны нулю.

5.7. Если сезонный элемент рассматривается как мультипликативный, то процедура требует некоторой модификации. Вместо элементов, которые прибавляются к ряду или вычитаются из него, ищут коэффициенты, на которые надо умножать и делить; их обычно выражают в процентной форме. Например, сезонный коэффициент 110 для января обычно означает, что для корректировки на сезонность действительные данные за январь нужно разделить на 1,1. Для получения оценки сезонного эффекта прежде всего, как и в аддитивном случае, определяют тренд, а затем фактическое значение делят на значение тренда.

Сделаем одно замечание. Если, скажем, для двенадцати месяцев в результате получено двенадцать коэффициентов, принимающих значения вокруг 100, то эти коэффициенты корректируют так, чтобы их среднее равнялось 100. Мы по-прежнему требуем, чтобы сумма коэффициентов сезонности (а не их произведение) равнялась 100. Конечно, не совсем логично корректировать набор относительных коэффициентов прибавлением или вычитанием, добиваясь, чтобы их среднее равнялось 100. Но маловероятно, что какой-либо метод поможет решить проблему полностью, и трудно представить себе метод лучше, чем этот.

5.8. До сих пор мы рассматривали неизменные во времени сезонные эффекты. Если же есть какие-то основания предполагать, что форма сезонных колебаний изменчива, то может потребоваться выделение эффекта тренда у каждого коэффициента сезонности в отдельности. Во всяком случае может быть желательным сгладить их с помощью скользящего среднего.

ПРОГРАММА БЮРО ПЕРЕПИСЕЙ

5.9. В большинстве практических случаев, когда речь идет о месячных или квартальных данных, может использоваться мощная программа, известная как Census Mark II, разработанная Шискиным для Бюро переписей США (см. [79] и более поздние публикации Бюро). Она нашла широкое применение, несмотря на уязвимость с теоретической точки зрения, и на практике, видимо, работает очень хорошо. Ее цель — разделить сезонные и остаточные колебания, но она не разбивает гладкую компоненту на тренд и краткосрочную осцилляцию. Существует несколько ее вариантов, имеющих некоторые различия, но в основном процедура для месячных данных выглядит следующим образом.

1. Предлагается по желанию скорректировать ряды по числу производственных или рабочих дней. Если предложение принято, то вся

последовательность операций применяется к скорректированным рядам.

2. Подсчитывается скользящее среднее. При этом имеется определенная возможность выбора длины отрезка усреднения и весов.

3. Значения ряда делятся на это скользящее среднее с тем, чтобы получить первую оценку компоненты, представляющую сезонную и нерегулярную составляющие. Краевые значения оцениваются обычно приравниванием их значениям для ближайших одноименных месяцев. Каждое экстремальное значение заменяется средним двух значений для этого месяца, расположенных по обе стороны от него.

4. Для того чтобы решить вопрос об относительной роли сезонной и нерегулярной компонент, проводится анализ дисперсий для различных лет, разных месяцев и дисперсии остатка. Если изменение дисперсии от месяца к месяцу существенно по F-критерию в сравнении с дисперсией остатка, то это свидетельствует о наличии сезонных эффектов.

5. Для любого месяца отношение дисперсии внутримесячных колебаний к дисперсии остатка для этого месяца используется при выборе скользящего среднего для сглаживания случайного остаточного члена. Для различных месяцев могут быть взяты разные скользящие средние.

6. В некоторых случаях, для того чтобы предварительно очистить ряд от сезонных колебаний, значения первоначального ряда делят на определенные таким образом коэффициенты сезонности, и для получения второй оценки тренда вычисляется еще одно скользящее среднее. Коэффициенты сезонности корректируются так, чтобы их сумма была равна 12.

7. Эти результаты дают оценки гладкой компоненты и скользящей сезонной компоненты. Остаток получают вычитанием (или иногда, когда ошибки рассматриваются как мультипликативные, делением членов первоначального ряда на значения компоненты, представляющей гладкую и сезонную составляющие).

8. Вычисляются дополнительные статистики, такие, как дисперсия ошибки.

Пример 5.4.

На рис. 5.1 показаны гладкая, сезонная и нерегулярная составляющие, полученные в результате обработки данных из табл. 1.3 о расстояниях, пройденных авиалайнерами. Эти графики были получены на основе анализа, выполненного на ЭВМ Univac 1108 по программе, являющейся адаптацией варианта X-11 программы Census Mark II. Никаких корректировок на число производственных дней или на продолжительность месяца не делалось. Прежде всего с помощью скользящего среднего с длиной отрезка усреднения 15 была выделена компонента, представляющая трендовую осцилляцию. Делением членов исходного ряда на полученные значения была оценена компонента, представляющая нерегулярную и сезонную составляющие. Помесячное среднее, полученное по оценке тренда, без учета знаков сравнивалось с месячным средним оцененной компоненты, представляющей сезонную и нерегулярную составляющие. Этим сравнением продиктована необходимость вторичного сглаживания исходного ряда, которое и на этот раз было выполнено с помощью скользящего среднего, подсчитывае-

мого по 15 членам. И вновь делением значений исходного ряда на компоненту, представляющую трендовую осцилляцию, была получена компонента, представляющая сезонную и нерегулярную составляющие. Для того чтобы получить предварительные оценки сезонной и нерегулярной составляющих, эта компонента была сглажена скользящим средним, подсчитывавшимся по 7 членам. Предварительные оценки обычно используются при выборе процедуры дальнейшего сглаживания для каждого месяца отдельно, в данном случае сглаживание производилось с помощью среднего по 5 членам. Это дало оценку

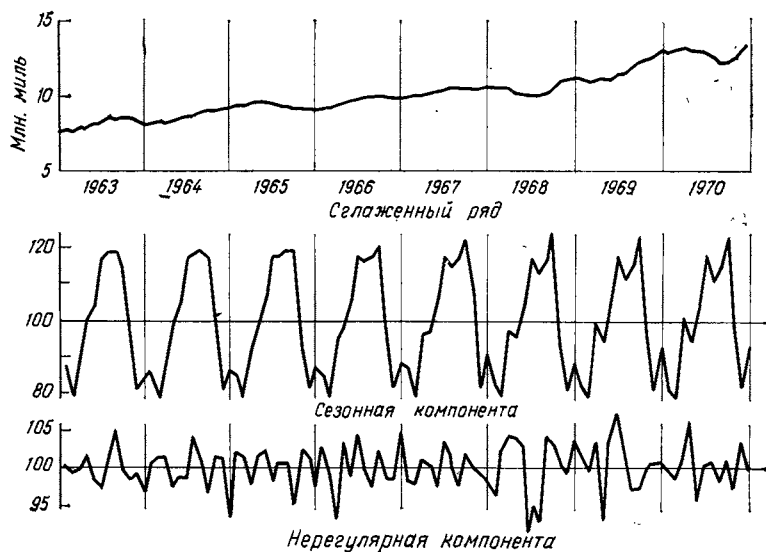


Рис. 5.1. Гладкая, сезонная и нерегулярная компоненты данных из табл. 1.3 о расстояниях, пройденных авиалайнерами

коэффициентов сезонности. Деление компоненты, представляющей сезонную и нерегулярную составляющие, на коэффициенты сезонности выделяет нерегулярную составляющую, имеющую, таким образом, мультипликативный характер.

5.10. Существуют еще два метода оценивания коэффициентов сезонности. Один из них основан на построении регрессий, другой — на гармоническом анализе. Для полноты освещения темы следует также отметить, что сезонная компонента рассматривается и при применении некоторых методов прогнозирования, однако задача прогнозирования довольно сильно отличается от измерения сезонного эффекта на всем протяжении ряда. Изложение гармонического анализа мы отложим до тех пор, пока в гл. 8 не будет рассмотрен спектральный анализ. В заключение этой главы мы обсудим регрессионный метод и сделаем несколько общих замечаний.

РЕГРЕССИОННЫЙ МЕТОД

5.11. Несколько изменим обозначения. Пусть u_{ij} будет значением исходного ряда для i -го года и j -го месяца, а x_{ij} — оценкой тренда, полученной с помощью центрированного скользящего среднего, подсчитываемого по 12 точкам. Затем для каждого из 12 месяцев построим регрессии

$$u_{ij} = a_j + b_j x_{ij}. \quad (5.30)$$

Если $a_j = 0$, то модель будет мультипликативной. Если $b_j = 1$, то мы имеем аддитивную модель.

Далее скорректируем константы a и b и получим

$$a'_j = a_j - \bar{a}, \quad \text{где } \bar{a} = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} a_j, \quad (5.31)$$

$$b'_j = b_j - \bar{b} + 1, \quad \text{где } \bar{b} = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} b_j. \quad (5.32)$$

Тогда скорректированные на сезонность значения будут определяться выражением

$$u_{ij} \text{ (скорректированное)} = \frac{u_{ij} - a'_j}{b'_j}. \quad (5.33)$$

Эта модель имеет преимущество, состоящее в том, что она охватывает как аддитивный, так и мультипликативный эффекты. Однако имеются серьезные недостатки, которые во многих случаях обычно перевешивают достоинства. При применении этого метода требуются оценки 24 констант и, кроме тех случаев, когда число лет достаточно велико, эти оценки весьма ненадежны. Константы a' и b' оцениваются для всего ряда и быстрые новые изменения формы сезонных колебаний не принимают в расчет. Следовательно, обновление оценок представляет трудности. Этот метод не получил широкого распространения.

5.12. В практике анализа временных рядов имеется несколько «золотых» правил, и, разумеется, несколько общих правил, которые можно применять без особых размышлений о природе ряда и цели его исследования. Однако опыт, как правило, свидетельствует о том, что лучше устранить известные эффекты прежде, чем приступать к дальнейшим исследованиям. Уже была дана рекомендация «очищать» ряд перед его анализом. По аналогичным причинам мы предпочитаем оценивать и элиминировать сезонные эффекты вначале, а не оставлять их в ряде с тем, чтобы убрать, так сказать, в процессе анализа. Эту точку зрения можно оправдать тем, что причины сезонных эффектов легко установить.

5.13. Не обязательно распространять эти соображения на нерегулярную компоненту. Если нужно получить гладкую составляющую, как на рис. 5.1, исключение нерегулярной компоненты может быть желательным. Но если мы проявляем интерес к краткосрочным колебаниям, то лучше, вероятно, исключить тренд, а нерегулярную компоненту с

краткосрочным движением оставить как можно меньше затронутой нашими методами элиминирования. Поскольку *априори* мало известно о механизме, генерирующем осцилляции, может оказаться, что нерегулярная компонента играет в этом существенную роль.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Метод Census Mark II нашел широкое применение за пределами США; он пригоден для месячных и квартальных данных, но не приспособлен для обработки недельных данных. В различных местах разрабатываются его новые варианты, и читатель, желающий использовать эту программу, поступит правильно, если изучит руководство того конкретного варианта, который он предпочел, и настаит на том, чтобы печать, выдаваемая ЭВМ, точно определяла, по какому из многих возможных вариантов велся счет.

2. Этот метод не требует предположения, что сезонная компонента может быть представлена гармониками, хотя для того, чтобы отделить тренд от сезонной составляющей, некоторые предположения должны быть сделаны. Это может быть достоинством в случаях, когда сезонный элемент сильно асимметричен, например когда спрос постепенно растет, а потом внезапно падает (рождественские открытки, пасхальные яйца, некоторые ситуации, связанные с взиманием налогов). В сомнительных случаях следует испытывать несколько методов.

6 СТАЦИОНАРНЫЕ РЯДЫ

6.1. Теперь рассмотрим ряд, из которого тренд либо исключен, либо его в нем и не было. Такой ряд называется *стационарным*. Но тот тип стационарности, который мы будем рассматривать, сопряжен с наложением ограничений. На уровне интуитивных идей мы требуем, чтобы ряд имел постоянное среднее и колебался вокруг этого среднего с постоянной дисперсией. Тогда можно сказать, что этот ряд «стационарен по среднему и дисперсии». В более общем случае, если имеется ряд u_t , можно потребовать, чтобы u_t имели одну и ту же функцию распределения при любом значении t , а в еще более общем случае — чтобы последовательные группы значений u_{t+1}, \dots, u_{t+k} имели одинаковое многомерное распределение при любых значениях t и k . Этим математически выражено предположение, что механизм, генерирующий ряд, хотя и имеет вероятностный характер, остается неизменным во времени.

6.2. При этих предположениях имеем

$$E(u_t) = \mu; \quad (6.1)$$

$$E(u_t - \mu)^2 = \sigma^2 = \text{var } u \quad (6.2)$$

и $E[(u_t - \mu)(u_{t+k} - \mu)] = \gamma_k$, k -я автоковариация, (6.3)

а $\rho_k = \rho_{-k} = \gamma_k / \sigma^2$, соответствующая автокорреляция. (6.4)

Использование здесь математического ожидания нуждается в пояснении. В обычной теории вероятностей, так же как и здесь, оно рассматривается как среднее случайной величины. Однако мы должны будем оценивать константы не по множеству значений, извлеченных случайным образом из вероятностного распределения u , а по множеству u_t , которые все имеют одно и то же одномерное распределение, но при этом коррелированы. Позже мы увидим, что при довольно общих допущениях среднее, которое характеризовало бы распределение u_t в определенный момент времени, если бы была возможность получить повторные значения для того же момента времени при неизменных условиях, может быть оценено по множеству значений, наблюдаемых в действительности за период времени.

6.3. К этому можно добавить, что если ряд считать выборкой из всех рядов такой же длины, которые могут быть генерированы тем же самым механизмом, то мы имеем выборку объемом только 1. Ее удобно рассматривать как *реализацию* изучаемого механизма, который может быть назван *стохастическим процессом*. То, о чем мы только что говорили, означает, что можно оценить параметры стохастического процесса по одной его реализации. Фактически мы будем оценивать среднее, дисперсию и ковариации процесса по соответствующим статистикам, подсчитанным по реализации. Условия, при которых это действие законно, содержатся в теореме Биркхоффа [8] и Хинчина [53]. Вспомним, что процесс имеет автокорреляции, определяемые выражением (6.4) для всех значений k . Тогда если m — предел среднего n членов при n , стремящемся к бесконечности (мы утверждаем это без доказательства), то этот предел m существует почти для всех реализаций (а именно он существует с вероятностью 1); и далее, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho_j = 0, \quad (6.5)$$

то $m = \mu$. Наиболее общими случаями являются такие, в которых либо ρ_k равно нулю после некоторого значения k , либо ρ_k уменьшается до нуля достаточно быстро для того, чтобы среднее автокорреляций ρ_k стремилось к нулю.

КОРРЕЛОГРАММА

6.4. Совокупность значений ρ_k , как и их представление на графике, называют *коррелограммой*. Все корреляции, разумеется, не выходят за пределы ± 1 , но не каждая последовательность констант в этих пределах может быть коррелограммой. Действительно, рассмотрим три значения u_t, u_{t+1}, u_{t+2} . Если мы ищем частную корреляцию u_t и u_{t+2} , когда их зависимость от u_{t+1} устранена, то благодаря хорошо известной формуле имеем

$$\rho_{13.2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}}{(1 - \rho_{12}^2)^{1/2}(1 - \rho_{23}^2)^{1/2}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}.$$

Из условия, что этот коэффициент должен лежать в пределах ± 1 , находим, что

$$-1 + 2\rho_1^2 \leq \rho_2 \leq 1. \quad (6.6)$$

Правое неравенство, в отличие от левого, тривиально.

Если, например, $\rho_1 = 0,8$, то ρ_2 не должно быть меньше 0,28. Здесь отражается тот факт, что если последовательные значения ряда сильно положительно коррелированы, то предыдущему и последующему членам, по отношению к данному, как бы не достаёт времени, для того чтобы стать некоррелированными или отрицательно коррелированными.

АВТОРЕГРЕССИЯ

6.5. Один из важных классов стационарных рядов, с которыми мы уже встречались в другом контексте, составляют ряды, получаемые сглаживанием случайного ряда с помощью скользящего среднего с конечной длиной отрезка усреднения. В табл. 3.2 дано выражение автокорреляций через веса скользящего среднего, а на рис. 3.1 представлена коррелограмма ряда, полученного с помощью формулы Спенсера для 21 точки. Теперь рассмотрим другой важный класс, известный, по очевидным причинам, как класс *авторегрессий*.

Авторегрессионный процесс порядка k с постоянными коэффициентами определяется уравнением

$$u_{t+k} + \alpha_1 u_{t+k-1} + \alpha_2 u_{t+k-2} + \dots + \alpha_k u_t = \varepsilon_{t+k} \quad (6.7)$$

или эквивалентно

$$u_t = -\alpha_1 u_{t-1} - \alpha_2 u_{t-2} - \dots - \alpha_k u_{t-k} + \varepsilon_t. \quad (6.8)$$

Выражение (6.8) можно рассматривать как регрессию u_t на u_{t-1} , u_{t-2} со случайным остатком. (Как мы увидим позже, из этого не следует, что к таким рядам применима стандартная теория регрессии). К этому ряду можно относиться как к генерируемому механизмом, в котором значение ряда в момент t выражается через прошлые значения — систематическая зависимость от прошлой истории — плюс значение члена «возмущения» ε в момент t . Рассмотрим два важных простых процесса, которым присвоены имена Маркова и Юла.

МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС

6.6. Марковский процесс, simplest линейный авторегрессионный процесс, отличный от чисто случайного ряда, определяется выражением

$$u_t = -\alpha_1 u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (6.9)$$

которое в более удобной форме можно записать как

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (6.10)$$

Используя ту же самую формулу с $t-1$ вместо t , получаем

$$u_t = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \rho^3 \varepsilon_{t-3} \quad (6.11)$$

и т. д. Очевидно, что u_t зависит от ε_t и предшествующих ε , но не от будущих ε . Если ε имеет нулевое среднее, то такое же среднее имеет и u_t . Тогда, умножая (6.10) на u_{t-1} и беря математические ожидания, получаем

$$\text{cov}(u_t, u_{t-1}) = \rho \text{var } u, \quad (6.12)$$

и, таким образом, первая автокорреляция системы равна ρ , что и оправдывает применение этого символа.

Аналогично, умножая (6.10) на u_{t-k} и беря математические ожидания, имеем

$$\text{cov}(u_t, u_{t-k}) = \rho \text{cov}(u_{t-1}, u_{t-k}),$$

а деля на $\text{var } u$, получаем

$$\rho_k = \rho \rho_{k-1} = \rho^2 \rho_{k-2} \text{ и т. д.} = \rho^k. \quad (6.13)$$

Следовательно, все автокорреляции марковского процесса можно выразить через первую автокорреляцию ρ . Графический вид коррелограммы для $\rho > 0$ будет дан позже (см. рис. 6.3).

6.7. На графике марковский процесс представляет осцилляции более или менее регулярного типа. Используя результат из раздела 3.18, можно найти среднее расстояние между его пиками. Косинус угла между

$$u_{t+1} - u_t = 0 \text{ и } u_t - u_{t-1} = 0$$

равен:

$$\frac{E(u_{t+1} - u_t)(u_t - u_{t-1})}{\{E(u_{t+1} - u_t)^2 E(u_t - u_{t-1})^2\}^{1/2}} = \frac{2\rho - 1 - \rho^2}{2(1 - \rho)} = -\frac{1}{2}(1 - \rho). \quad (6.14)$$

Тогда среднее расстояние между пиками равно

$$2 \pi / \left\{ \arccos \left[-\frac{1}{2}(1 - \rho) \right] \right\}. \quad (6.15)$$

Например, при $\rho = 0$ (случайный ряд) $\cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} \pi$ и среднее расстояние равно 1,5, что подтверждает результат, полученный в гл. 2. При $\rho = \frac{1}{2}$ среднее расстояние равно: $2 \pi / \cos^{-1} \left(-\frac{1}{4} \right) = 360/104,5 = 3,45$.

6.8. Уравнение (6.11) можно раскрывать и дальше в прошлое насколько это желательно. Так как $|\rho|$ по необходимости меньше единицы, значения коэффициентов уменьшаются, и если остановиться на члене u_{t-k} , то его коэффициент равен ρ^k . Во многих случаях удобнее рассматривать ряд, как имеющий бесконечное прошлое:

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}. \quad (6.16)$$

Если в действительности ряд начался в некоторой неизвестной точке прошлого, скажем k единиц времени тому назад, то ошибка, которую мы совершаем, выражая u_t таким способом, при умеренных значениях ρ и k незначительна. Формула (6.16) представляет u_t как скользящее среднее с бесконечной длиной отрезка усреднения, но с весами, дающими в сумме не единицу, а $(1 - \rho)^{-1}$.

6.9. Читатель, знакомый с центральной предельной теоремой теории статистики, которая утверждает, что при общих условиях среднее взвешенной суммы переменных, имеющих любые распределения, стремится к нормальности, может быть склонен сделать из (6.16) вывод, что u_t , являясь такой суммой, распределено нормально. Это не так. Действительно, одно из условий центральной предельной теоремы нарушено, веса в этом среднем — величины различного порядка.

Из (6.10) видно, что u_t — сумма переменных ρu_{t-1} и ε_t , которые независимы. Поэтому логарифм характеристической функции u_t равен

сумме логарифмов характеристических функций ρu_{t-1} и ε_t . Эквивалентно, если κ_r представляет собой r -й семинвариант, то

$$\kappa_r(u_t) = \rho^r \kappa_r(u_{t-1}) + \kappa_r(\varepsilon),$$

и так как $\kappa(u_t) = \kappa(u_{t-1})$, это дает нам

$$\kappa_r(u_t) = \frac{\kappa_r(\varepsilon)}{1 - \rho^r}. \quad (6.17)$$

В частности,

$$\text{var } u = \frac{\text{var } \varepsilon}{1 - \rho^2}, \quad (6.18)$$

что легко проверяется непосредственным выводом формулы.

6.10. Одно важное следствие из (6.18) состоит в том, что если $|\rho|$ близок к единице, то $\text{var } u$ будет намного больше $\text{var } \varepsilon$. Если последовательные значения ряда сильно коррелированы, то ряд довольно малых возмущений будет порождать размашистые колебания.

Второе следствие заключается в том, что если нормировать семинварианты (6.18) делением κ_r^2 на $\kappa_2^{r/2}$, то получим

$$\frac{\kappa_r(u)}{\kappa_2^{r/2}(u)} = \frac{\kappa_r(\varepsilon)}{\kappa_2^{r/2}(\varepsilon)} \frac{(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}r}}{1 - \rho^r}. \quad (6.19)$$

В общем случае множитель $(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}r} / (1 - \rho^r)$ меньше единицы и стремится к нулю при r , стремящемся к бесконечности. Таким образом, нормированные семинварианты у u меньше, чем у ε , и ее распределение соответственно ближе к нормальности. Если ε распределена симметрично, то и u распределена симметрично, семинварианты нечетных порядков тогда равны нулю.

ПРОЦЕСС ЮЛА

6.11. Авторегрессионный процесс Юла определяется как

$$u_t = -\alpha_1 u_{t-1} - \alpha_2 u_{t-2} + \varepsilon_t. \quad (6.20)$$

Как и в марковском процессе, ε_t независима от u_{t-1} и u_{t-2} . Умножая (6.20) по очереди на u_{t-1} и u_{t-2} и беря математические ожидания, получаем

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 &= 0; \\ \rho_2 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Этих уравнений достаточно для определения α_1 и α_2 через первые две автокорреляции. Находим, что

$$\rho_1 = -\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2}; \quad (6.22)$$

$$\rho_2 = -\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 + \alpha_2}, \quad (6.23)$$

и наоборот,

$$\alpha_1 = -\frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}; \quad (6.24)$$

$$\alpha_2 = -1 + \frac{1-\rho_2}{1-\rho_1^2} = -\frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}. \quad (6.25)$$

И вообще, умножая (6.20) на u_{t-k} , $k \geq 1$, находим ряд уравнений

$$\rho_k + \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} = 0. \quad (6.26)$$

Если есть необходимость, они могут быть использованы для выражения ρ более высоких порядков через первые две автокорреляции, которые, следовательно, полностью определяют коррелограмму.

6.12. Выражение (6.26) можно также рассматривать как разностное уравнение второго порядка относительно ρ с постоянными коэффициентами. Можно показать, что общее решение, во многом аналогичное решению дифференциального уравнения второго рода, будет

$$\rho_j = A\mu^j + B\nu^j, \quad (6.27)$$

где μ , ν — корни уравнения

$$x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 = 0, \quad (6.28)$$

а начальные условия получают при $j=0, 1, -1$ (поскольку (6.26), как это видно из (6.21), остается в силе и при $j = -1$):

$$1 = A + B;$$

$$\rho_1 = A\mu + B\nu = \rho_{-1} = \frac{A}{\mu} + \frac{B}{\nu},$$

Тогда находим, что

$$\rho_j = \frac{1}{(\mu-\nu)(1+\mu\nu)} \{ \mu^{j+1}(1-\nu^2) - \nu^{j+1}(1-\mu^2) \}. \quad (6.29)$$

Если корни (6.28) комплексны, то этот результат можно переписать в более удобной форме. Положим, что

$$\mu = \rho e^{i\theta}; \quad \nu = \rho e^{-i\theta}.$$

Тогда найдем, что

$$\rho = |\sqrt{\alpha_2}|, \quad \cos \theta = -\frac{\alpha_1}{2|\alpha_2|}, \quad (6.30)$$

и (6.29) сводится к

$$\rho_j = \frac{\rho^j \sin(j\theta + \psi)}{\sin \psi}, \quad (6.31)$$

где

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \operatorname{tg} \theta. \quad (6.32)$$

Выражение (6.31) показывает, что коррелограмма является затухающей гармоникой. Ее характерный график будет дан позже (см. рис. 6.4).

6.13. Среднее расстояние между пиками в ряде Юла можно установить методом, уже применявшимся нами при рассмотрении случайного и марковского процессов. Если $v_t = u_{t+1} - u_t$, то

$$\begin{aligned} \text{var } v_t &= 2(1 - \rho_1) \text{var } u, \\ \text{cov}(v_{t+1}, v_t) &= (-1 + 2\rho_1 - \rho_2) \text{var } u. \end{aligned}$$

Таким образом, корреляция между v_{t+1} и v_t определяется выражением

$$\text{corr}(v_{t+1}, v_t) = \frac{-1 + 2\rho_1 - \rho_2}{2(1 - \rho_1)}. \quad (6.33)$$

Если это $\cos \theta$, то среднее расстояние между пиками равно $2\pi/\theta$. Деля подстановку из (6.22) в (6.23), получаем простую формулу

$$\text{corr}(v_{t+1}, v_t) = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1 - 1). \quad (6.34)$$

Если $\alpha_2 = 0$, то она сводится к результату, уже полученному для марковского процесса. Например, при $\alpha_1 = -1,1$, $\alpha_2 = 0,5$ находим, что $\theta = \cos^{-1}(0,3) = 72,5^\circ$. Среднее расстояние между пиками равно $360/72,5$, т. е. приблизительно 5.

6.14. На рис. 6.1 дан график ряда из 65 членов, представляющего процесс Юла с $\alpha_1 = -1,1$, $\alpha_2 = 0,5$ и случайным элементом ε , являющимся переменной с прямоугольным распределением и диапазоном изменения от $-9,5$ до $+9,5$. Первый пик отметим в точке 4, а последний — в точке 59. В двух местах смежные члены имеют одно и то же пиковое значение. Поэтому для определения пиков принимаем во внимание $65 - 3 - 5 - 2 = 55$ точек. Всего в ряде 12 пиков, что дает среднее расстояние между ними 4,6, которое хорошо согласуется с теорией, несмотря на то что случайный элемент распределен не нормально.

Для сравнения на рис. 6.2 представлены 60 членов гармонического ряда, генерированного как

$$u_t = 10 \sin \frac{\pi t}{5} + \varepsilon_t, \quad (6.35)$$

где ε — случайная переменная с прямоугольным распределением, изменяющаяся от -5 до $+5$. Период этого ряда равен 10. Сравнение с рис. 6.1 вскрывает различный вид двух типов рядов, гармоника имеет более или менее регулярные пики и приблизительно постоянную амплитуду, а в процессе Юла переменны и то, и другое.

6.15. Попутно отметим, что «пик», как мы его определили, есть всего лишь значение, большее, чем два соседних значения, и может не заслуживать того, чтобы придавать ему особую важность как свидетельству некоторых пиков, имеющих на рис. 6.1. Диагностика, основанная на подсчете пиков, не очень чувствительна, когда альтернативными гипотезами являются случайный процесс или процессы Маркова и Юла. В случайном ряде математическое ожидание интервала будет около 3, в марковском процессе с положительным ρ оно между 3 и 4, а в процессе Юла его значение где-то между 4 и 6.

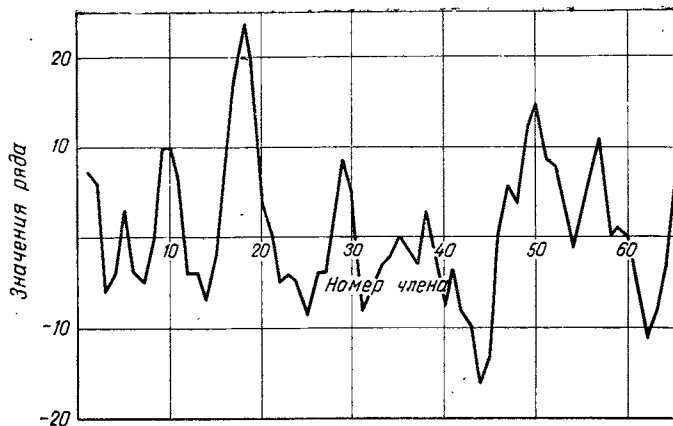


Рис. 6.1. График ряда из 65 членов, представляющего процесс Юла, авторегрессии второго порядка

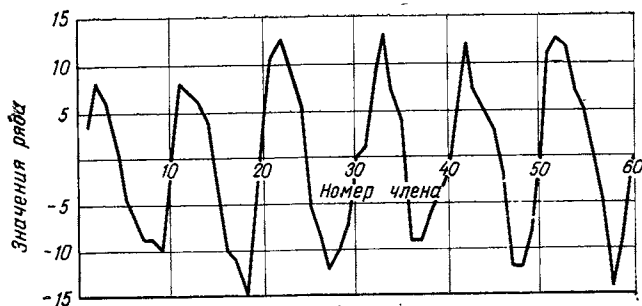


Рис. 6.2. График гармонического ряда из 60 членов

6.16. В марковском процессе было очевидным, что ρ не может превышать единицы, иначе дисперсия возрастала бы беспредельно и ряд мог бы «взорваться». Аналогично для стационарности процесса Юла накладываются ограничения на значения α_1 и α_2 . Они состоят в том, чтобы оба корня уравнения

$$x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 = 0$$

по модулю были меньше единицы. В противном случае автокорреляции, как это показано в (6.27), рано или поздно превысили бы единицу по абсолютной величине. В действительности необходимые и достаточные условия стационарности выглядят следующим образом:

$$|\alpha_1| < 2 \text{ и } -\alpha_2 < 1 - |\alpha_1|. \quad (6.36)$$

6.17. Общий линейный авторегрессионный процесс можно записать как

$$\sum_{j=1}^h \alpha_j u_{t-j} = \varepsilon_t. \quad (6.37)$$

Если B — оператор сдвига назад, определяемый как $Bu_t = u_{t-1}$, то предыдущее выражение можно записать в виде

$$(\sum \alpha_j B^j) u_t = \varepsilon_t. \quad (6.38)$$

Решение этого уравнения, рассматриваемого как разностное уравнение относительно u_t , состоит из двух частей — общего решения, содержащего h произвольных констант, и частного решения. Общее решение

$$u_t = \sum_{j=1}^h A_j z_j^t, \quad (6.39)$$

где z_j — h корней уравнения

$$\sum \alpha_j z^{h-j} = 0. \quad (6.40)$$

Для того чтобы ряд оставался стационарным, значения z (возможно, комплексные) должны иметь модуль меньше единицы, или, как иногда говорят, они должны лежать внутри единичного круга. Обычно мы будем предполагать, что ряд начался некоторое время тому назад, так что (6.39) более не оказывает влияния вследствие затухания. Оставшаяся часть решения такова:

$$u_t = \frac{1}{\sum \alpha_j B^j} \varepsilon_t = (\sum \beta_j B^j) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varepsilon_{t-j}, \quad (6.41)$$

где константы α связаны с β тождеством, содержащим B ,

$$1 = (\sum \alpha_j B^j) (\sum \beta_j B^j), \quad (6.42)$$

по которому, если требуется, можно подсчитать β , зная α .

6.18. Уравнение (6.41) представляет линейный авторегрессионный процесс как скользящее среднее с бесконечной длиной отрезка усреднения. Ряд u_t будет стационарным и мы утверждаем без доказательства, что он удовлетворяет условию (6.5), если $\sum \beta_j^2$ сходится. Последнее имеет место, когда корни (6.39) лежат внутри единичного круга, что можно показать, выразив $1/\sum \alpha_j B^j$ через отдельные дроби и их разложение.

6.19. Умножая уравнение (6.37) на u_{t-k} , $k > 0$, и беря математические ожидания, получаем ряд уравнений

$$\rho_k + \alpha_1 \rho_{k-1} + \dots + \alpha_h \rho_{k-h} = 0, \quad k > 0. \quad (6.43)$$

Они известны как уравнения Юла — Уокера; мы их уже использовали при исследовании процессов Юла и Маркова. Из этих уравнений следует, что все автокорреляции ряда определяются первыми h автокорреляциями. Они найдут важное применение при рассмотрении проблем, связанных с выборкой.

6.20. Особый случай получаем, когда один или более корней (6.39) лежат на границе единичного круга. Ряд тогда не является стационарным, а «блуждает» с возрастающей дисперсией. Например, ясно, что «марковский» процесс

$$u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t$$

выражается как

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j}$$

и его дисперсия не имеет верхней границы.

ЧАСТНАЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ

6.21. Идею автокорреляции, измеряющей корреляцию членов ряда, разделенных заданным числом членов, можно распространить на случай измерения корреляции, когда зависимость от средних членов устранена. Рассмотрим, например, марковский процесс. Корреляция u_{t+2} и u_t выражается величиной ρ^2 . Но u_{t+2} зависит от u_{t+1} , которое в свою очередь зависит от u_t . Можно ли утверждать, что u_{t+2} коррелировано только с u_t , если известно, что оба они коррелированы с u_{t+1} ?

Обозначая члены по порядку 1, 2, 3, получаем, используя очевидную символику, что частная корреляция равна:

$$\rho_{13.2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12} \rho_{32}}{(1 - \rho_{12}^2)^2 (1 - \rho_{32}^2)^2} \quad (6.44)$$

Далее $\rho_{13} = \rho^2$, а ρ_{12} , так же как и ρ_{23} , равна ρ , так что числитель равен нулю. Аналогично числитель такой частной корреляции, как $\rho_{14.23}$, будет зависеть от $\rho_{14.2}$ и $\rho_{14.3}$, каждая из которых равна нулю. Фактически все частные корреляции равны нулю. Таким образом, автокорреляции существуют только благодаря корреляции соседних членов. С другой стороны, это очевидно из того факта, что u_t определяется только через u_{t-1} .

6.22. Рассмотрим теперь процесс Юла. С помощью формулы (6.44) со значениями ρ , выраженными согласно (6.22) и (6.23) через α_1 и α_2 , находим, что

$$\rho_{13.2} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = -\alpha_2. \quad (6.45)$$

Частные корреляции более высоких порядков равны нулю. Например, числитель $\rho_{14.23}$ в выражении, аналогичном (6.44), равен $\rho_{14.3} - \rho_{12.3} \rho_{42.3}$, что в свою очередь приводится к выражению с числителем

$$(1 - \rho_1^2)(\rho_3 - \rho_2 \rho_1) - (\rho_1 - \rho_2 \rho_1)(\rho_2 - \rho_1^2). \quad (6.46)$$

Рассматривая детерминант системы из первых трех уравнений Юла — Уокера (6.43), имеем

$$\begin{vmatrix} \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 \end{vmatrix} = 0,$$

и разложение по элементам первого столбца показывает, что (6.46) равно нулю.

6.23. Общий результат можно получить аналогичным образом. У процесса порядка h частные корреляции членов, разделенных h или

большим числом членов, равны нулю. Действительно, корреляционная матрица группы из p членов u , $p \geq h$, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \dots & \rho_p \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_p & \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.47)$$

Например, частная корреляция переменных $1, h + 1$ с фиксированными промежуточными значениями определяется по общей формуле (см. [52 а, глава 27]), числитель которой представляет собой минор члена, находящегося на пересечении первой строки и $(h + 1)$ -го столбца. Если в общем случае выразить минор через $h \times h$ -детерминанты, сформированные из левых элементов, то он должен равняться нулю, так как каждый детерминант равен нулю в соответствии с уравнениями Юла—Уокера.

6.24. Частные автокорреляции можно, разумеется, нанести на график для того, чтобы получить частную коррелограмму. В то время как коррелограмма авторегрессионного ряда может тянуться до бесконечности, частная коррелограмма подходящего порядка, так же как коррелограмма процесса скользящего среднего с конечным отрезком усреднения, должна равняться нулю начиная с некоторого момента и далее. К сожалению, как мы увидим позже, это не дает нам очень надежной диагностики на практике из-за эффектов в сериальных корреляциях, связанных с выборкой. В действительности для авторегрессионных процессов можно избежать прямого вычисления частных автокорреляций по формулам типа (6.44), см. раздел 12.7.

6.25. Кроме процесса скользящего среднего (так мы будем называть только средние, получаемые на конечных отрезках усреднения) и авторегрессионного процесса следует также рассмотреть смешанный процесс, например

$$\sum_{j=0}^h \alpha_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^k \beta_j \varepsilon_{t-j}. \quad (6.48)$$

Этот процесс можно рассматривать как авторегрессионный, в котором остаточные ошибки сами коррелированы и эти корреляции генерированы скользящим средним независимых членов. Можно построить более сложные модели, но их трудно обрабатывать. При выборе формы представления стационарного процесса всегда, когда это возможно, нужно стремиться к простоте.

6.26. Для экспериментальных целей часто желательно построение авторегрессионных процессов из случайных элементов, например из таких, которые приводятся в таблицах случайных чисел или случайных отклонений. Тогда встает вопрос, как поступать в начальный момент, когда первое значение u_1 зависит от u_0 и, возможно, от предыдущих неизвестных значений. Имеются два пути:

1) можно принять, что u_0 и предшествующие члены равны нулю, и начать ряд с «холодно». Далее получать последующие члены до тех пор,

пока эффект этих начальных допущений не уменьшится до пренебрежимого значения. Ряд, полученный до этой точки, следует отбросить как переходный непредставительный отрезок;

2) можно подсчитать отношение $\text{var } u / \text{var } \varepsilon$ и начать со случайного значения ε , предварительно умножив его на $(\text{var } u / \text{var } \varepsilon)^{1/2}$ с тем, чтобы полученный член имел дисперсию, характерную для u . Этот ряд «теплет» быстрее, чем ряд, полученный первым методом, но и здесь также желательно отбрасывать несколько первых подсчитанных значений u .

Для марковского процесса мы уже нашли, что

$$\frac{\text{var } u}{\text{var } \varepsilon} = \frac{1}{1 - \rho^2}$$

Для процесса Юла имеем

$$\begin{aligned} \text{var } u &= E (u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2})^2 = \\ &= \text{var } u \{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\rho_1 + 2\alpha_2\rho_2 + 2\alpha_1\alpha_2\rho_1\} \end{aligned}$$

и, делая замену ρ_1, ρ_2 через α_1 и α_2 , получаем

$$\frac{\text{var } u}{\text{var } \varepsilon} = \frac{1 + \alpha_2}{(1 - \alpha_2) \{ (1 + \alpha_2)^2 - \alpha_1^2 \}} \quad (6.49)$$

6.27. Стоит, видимо, отметить, что, хотя автокорреляции однозначно определяют константы в авторегрессионном процессе с помощью уравнения Юла — Уокера, для процесса скользящего среднего это не так. Весьма простым примером может служить процесс $\frac{1}{4}[1, 3]$, который дает ту же самую автокорреляцию первого порядка, что и процесс $\frac{1}{4}[3, 1]$, а остальные корреляции равны нулю. Еще одним примером, рассмотренным Волдом [91], являются четыре процесса $\frac{1}{5}[8, -4, 2, -1]$, $\frac{1}{5}[-1, 2, -4, 8]$, $\frac{1}{5}[2, -1, 8, -4]$, $\frac{1}{5}[-4, 8, -1, 2]$, каждый из которых имеет первые три автокорреляции $-42/85, 4/17, -8/85$, а остальные равные нулю.

СПЕКТР

6.28. В теории статистики характеристическая функция, определяемая через функцию плотности $f(x)$ как

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx, \quad (6.50)$$

используется в качестве производящей функции моментов. Разлагая формально $\exp(itx)$ как функцию от t , получаем

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r' \frac{(it)^r}{r!},$$

где μ_r' есть r -й момент относительно начала отсчета. Теперь определим функцию, которую, не останавливаясь на ее прочих свойствах, можно рассматривать как производящую функцию автоковариаций. Определим *спектральную плотность* $w(\alpha)$ как функцию от α (не путайте с коэффициентами α в авторегрессионном ряде, представленном в разделе 6.17):

$$w(\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_j e^{ij\alpha}, \quad (6.51)$$

которую благодаря тому, что $\rho_j = \rho_{-j}$, можно записать как действительное выражение

$$w(\alpha) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \cos \alpha j. \quad (6.52)$$

Если умножить это выражение на $\cos \alpha k$ и проинтегрировать почленно по α от 0 до π , то, учитывая, что

$$\int_0^{\pi} \cos \alpha j \cos \alpha k \, d\alpha = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \frac{1}{2} \pi, & j = k, \end{cases}$$

получим

$$\int_0^{\pi} w(\alpha) \cos \alpha k \, d\alpha = \pi \rho_k, \quad (6.53)$$

так что

$$\rho_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos k\alpha w(\alpha) \, d\alpha. \quad (6.54)$$

Коррелограмма и спектральная плотность однозначно определяют друг друга.

Можно также определить *спектральную функцию* $W(\alpha)$ как интеграл от $w(\alpha)$:

$$W(\alpha) = \int_0^{\alpha} w(\alpha) \, d\alpha = \alpha + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \frac{\sin \alpha j}{j}, \quad (6.55)$$

где ряд сходящийся. Для того чтобы показать симметрию отношений между коррелограммой и спектром, можно также записать

$$\rho_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} w(\alpha) e^{-ik\alpha} \, d\alpha. \quad (6.56)$$

6.29. График $w(\alpha)$, на котором по оси ординат отложено w , а по оси абсцисс — α , называется *спектром*. Величина $w(\alpha)$ имеет период 2π , но, так как $\cos(2\pi - \alpha)j$ равен $\cos \alpha j$, спектр симметричен отно-

сительно $\alpha = \pi$; таким образом, необходим график только от 0 до π . Из (6.55) видно, что $W(0) = 0$, $W(\pi) = \pi$, $W(2\pi) = 2\pi$.

Иногда удобно строить график спектра, откладывая по оси ординат $\log \omega(\alpha)$ вместо $\omega(\alpha)$.

6.30. Спектр будет изучен с различных точек зрения в гл. 8, однако здесь можно отметить, что он (в отличие от автокорреляций) появляется естественным образом.

Действительно, рассмотрим взаимосвязь наблюдаемого ряда, измеряемого относительно его среднего, с гармоническим членом, имеющим период $2\pi/\alpha$. Пусть

$$a(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{t=1}^n u_t \cos \alpha t; \quad (6.57)$$

$$b(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{t=1}^n u_t \sin \alpha t. \quad (6.58)$$

Имеем

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= a^2(\alpha) + b^2(\alpha) = \frac{1}{n\pi} \{(\sum u_t \cos \alpha t)^2 + (\sum u_t \sin \alpha t)^2\} = \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\sum u_t^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-k} \{ \cos \alpha t \cos \alpha(t+k) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha t \sin \alpha(t+k) \} u_t u_{t+k} \right] = \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \sum u_t^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-k} u_t u_{t+k} \cos k\alpha \right\} = \\ &= \frac{S^2}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} r_k \cos k\alpha \right\}, \end{aligned}$$

где S^2 — наблюдаемая дисперсия $\sum u_t^2/n$, а r_k имеет характер сериальной корреляции $\sum u_t u_{t+k} / \sum u_t^2$. Мы говорим «характер» потому, что в числителе суммируется $n - k$ членов, а в знаменателе — n ; для того чтобы сделать эту величину выборочной сериальной корреляцией, ее нужно умножить на $n/(n - k)$, но в пределе, к которому мы теперь переходим, этот множитель равен единице. Значит, в пределе

$$E\{I(\alpha)\} = \frac{\sigma^2}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos k\alpha \right\}, \quad (6.59)$$

что, как видно из (6.52), эквивалентно

$$E\{I(\alpha)\} = \frac{\sigma^2}{\pi} \omega(\alpha). \quad (6.60)$$

Спектральная плотность $\omega(\alpha)$, не считая константы σ^2/π , является мерой силы взаимосвязи между u и гармоникой с периодом $2\pi/\alpha$. $I(\alpha)$ называется *интенсивностью*.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИЙ

6.31. В функции спектральной плотности

$$\omega(\alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_j e^{i\alpha j}$$

положим

$$z = e^{i\alpha}. \quad (6.61)$$

Тогда

$$\omega(\alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_j z^j. \quad (6.62)$$

Таким образом, разложение $\omega(\alpha)$ по степеням z дает автокорреляции. И наоборот, имея автокорреляции, можно получить спектр.

Пример 6.1. Спектр марковского ряда

Из уравнения (6.62) сразу получаем для марковского ряда

$$\sum \rho_j z^j = \sum_{-\infty}^{\infty} \rho^{|j|} z^j = \frac{1}{1-\rho z} + \frac{1}{1-\rho z^{-1}} - 1$$

и, заменяя z на $e^{i\alpha}$, имеем

$$\omega(\alpha) = \frac{1}{1-\rho e^{i\alpha}} + \frac{1}{1-\rho e^{-i\alpha}} - 1 = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho \cos \alpha + \rho^2}. \quad (6.63)$$

На рис. 6.3 представлены коррелограмма и спектр типичного марковского ряда с положительным ρ .

6.32. Рассмотрим два ряда, один из которых является скользящей суммой другого:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_{t-i}. \quad (6.64)$$

Мы записали его в виде суммы с бесконечным пределом суммирования, но сумма конечного числа членов рассматривается как частный случай, когда α начиная с некоторого момента далее равны нулю. Тогда

$$\begin{aligned} E(y_t y_{t+j}) &= E \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_{t-i} \right\} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_{t+j-i} \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_i \alpha_k E(x_{t-i} x_{t+j-k}) = \sum \sum \alpha_i \alpha_k \rho_{|i+j-k|} \text{var } x = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_i \alpha_{i+j-l} \rho_l \text{var } x, \end{aligned}$$

где ρ_l — автокорреляция x . В таком случае можно видеть, что коэффициент j -й автоковариации y равен коэффициенту при z^j в выражении $(1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots)(1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots)$ (производящая функция автоковариаций x). Таким образом, если $A(z)$ — производящая функция автоковариаций x , а $B(z)$ — производящая функция автоковариаций y , то

$$B(z) = \left(\sum_0^{\infty} \alpha_j z^j \right) \left(\sum_0^{\infty} \alpha_j z^{-j} \right) A(z). \quad (6.65)$$

Это важный результат, который мы будем часто использовать.

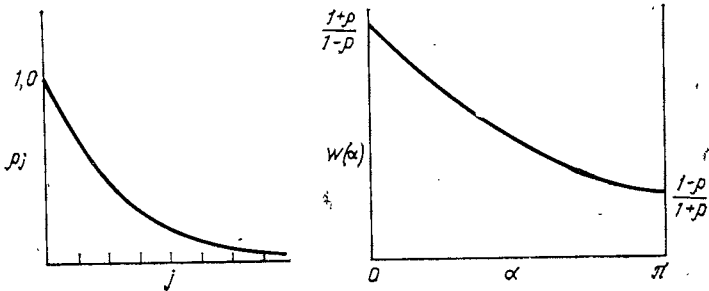


Рис. 6.3. Коррелограмма (слева) и спектр (справа) марковского бесконечного ряда

Пример 6.2. Спектр процесса Юла

Пусть y будет случайной переменной ε , а x_t — нашей обычной переменной u_t . Тогда, поскольку производящая функция автоковариаций случайного ряда дает лишь $\text{var } \varepsilon$, для процесса Юла получаем соотношение

$$\text{var } \varepsilon = (1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2)(1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}) A(z) \text{var } u, \quad (6.66)$$

так что спектральная плотность определяется выражением

$$\begin{aligned} \omega(\alpha) &= \frac{\text{var } \varepsilon}{\text{var } u} \left/ \left\{ 1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1(1 + \alpha_2)(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_2(e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}) \right\} = \right. \\ &= \frac{\text{var } \varepsilon}{\text{var } u} \left/ \left\{ 1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1(1 + \alpha_2) \cos \alpha + 2\alpha_2 \cos 2\alpha \right\}. \right. \quad (6.67) \end{aligned}$$

Отношение $\text{var } \varepsilon / \text{var } u$ находится по уравнению (6.49). На рис. 6.4 показаны теоретическая коррелограмма и спектр ряда Юла (т. е. авторегрессионного процесса второго порядка).

6.33. Аналогичным образом можно найти, что производящая функция автоковариаций смешанного процесса авторегрессия — скользящее среднее (6.48) определяется выражением

$$\frac{(\sum \beta_j z^j)(\sum \beta_j z^{-j})}{(\sum \alpha_j z^j)(\sum \alpha_j z^{-j})} \text{var } \varepsilon, \quad (6.68)$$

а его спектральную плотность как обычно получают заменой z на $e^{i\alpha}$.

6.34. Теория временных рядов, главным образом спектральный анализ, заимствует два понятия, используемых в технике. Типичная ситуация, с которой сталкивается инженер-связист, — это ситуация, когда он получает входной сигнал (стационарный ряд) и преобразует его определенным способом в выходной сигнал, обычно путем удаления шума или выделения некоторых элементов в сигнале с тем, чтобы передать дальше полезную информацию. Это преобразование называется *фильтрацией*. Пурист, конечно, может возразить, что это не фильтрация, так как это преобразование, как правило, не восстанавливает

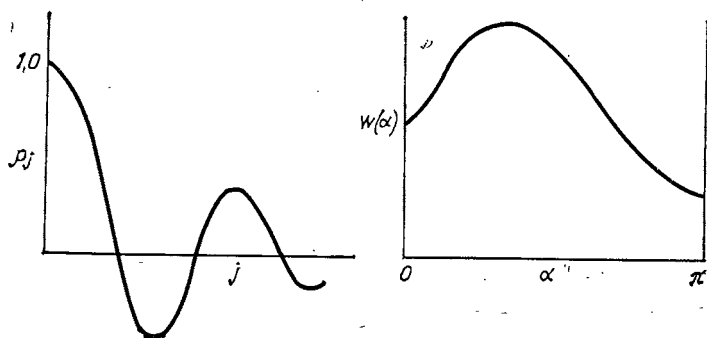


Рис. 6.4. Коррелограмма (слева) и спектр (справа) бесконечного ряда Юла

информацию, а лишь передает ее в модифицированном виде. Однако этот термин вполне пригоден и вошел в употребление. Если преобразование линейное, то оно фактически оказывается скользящим средним. Однако инженер может рассматривать также непрерывные процессы и выписывать интегральные выражения вместо рассматриваемых нами конечных сумм.

Таким образом, если, например, имеются весовая функция $a(t)$ и функция $u(t)$, то можно получить скользящее среднее

$$v(t) = \int_0^{\infty} a(\tau) u(t-\tau) d\tau, \quad (6.69)$$

где интеграл берется по непрерывной переменной τ вместо суммирования по дискретным (обычно целым) значениям t .

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

6.35. Для такой функции можно определить следующее преобразование (также в интегральной форме):

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{i t \alpha} dt = \int_0^{\infty} a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i t \alpha} u(t-\tau) dt d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} a(\tau) e^{i\tau\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{it\alpha} dt d\tau. \quad (6.70)$$

Функция

$$T(\alpha) = \int_0^{\infty} a(\tau) e^{i\tau\alpha} d\tau \quad (6.71)$$

(которую можно тоже определить как интеграл по области с обоими бесконечными пределами) называется *передаточной функцией*. С ее помощью из преобразования Фурье исходного ряда получают преобразование Фурье выходного ряда. Поскольку больший интерес представляют амплитуды, а не фаза, это выражение обычно записывается через модули, так что если $w_v(\alpha)$ относится к v , то

$$|w_v(\alpha)| = |T^2(\alpha)| |w_u(\alpha)|. \quad (6.72)$$

Цели, преследуемые инженером при построении хороших передаточных функций, обеспечивающих удовлетворительные свойства выходного сигнала, аналогичны целям исследователя временных рядов. Разница лишь в том, что последнего одинаково интересуют как те элементы, которые отфильтровываются, так и те, которые остаются.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. По определению, как можно видеть из (6.60), ордината спектра неотрицательна. Однако она может равняться нулю. Поэтому, если в качестве ординаты взят логарифм $w(\alpha)$, диапазон изменения может простираться до $-\infty$. Малые значения $w(\alpha)$ обычно не представляют интереса и на графике область низких значений ординаты иногда опускается.

2. Как отмечалось в тексте, коэффициенты авторегрессионного процесса порядка h можно определить по первым h уравнениям Юла — Уокера. Однако имеется бесконечное множество уравнений и при конечной реализации из n членов их гораздо больше h . Возникает вопрос: следует ли использовать их для оценки коэффициентов? Ответ отрицателен (см. раздел 12.4). Этот вопрос экспериментально рассмотрен Кендэллом [49].

3. Если считается, что параметры α выражают некие внутренние взаимосвязи исследуемой системы, естественно рассмотреть случай, когда они сами изменяются во времени. Немногие работы посвящены моделям с параметрами, зависящими от времени; если, например, α представляется полиномом от t , то ряд перестает быть стационарным. Наипростейший способ обработки таких случаев — это переход к разностям ряда и построение модели с постоянными коэффициентами (см. раздел 9.21), хотя это необязательно приближает нас к истинной структуре системы.

7 ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРОЧНЫХ СЕРИАЛЬНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ И КОРРЕЛОГРАММ

7.1. Выборочная теория отдельных сериальных корреляций, и тем более всей коррелограммы, является в общем случае довольно сложной с математической точки зрения и требует учета некоторых обстоятельств, которые не рассматриваются в наиболее широко распространенной теории. Довольно полно этот вопрос освещен в работе [526]. В этой главе нашей целью будет изложение основных идей и результатов, имеющих практическое значение, однако мы ограничимся представлением наиболее важных результатов без доказательства. Начнем с теории больших выборок, которой во многих случаях вполне достаточно.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

7.2. В гл. 3 отмечалось, что существуют различные способы определения сериальной корреляции, один точный, а другие дают довольно хорошую аппроксимацию. При больших n они имеют тенденцию становиться эквивалентными и мы вольны выбрать самый простой из них. Более того, при определении дисперсий с точностью до величин порядка $1/n$ без потери в точности можно предположить, что ряд измеряется не относительно выборочного среднего, а относительно теоретического среднего. Таким образом определяем

$$r_j = \frac{\sum u_i u_{i+j}}{\sum u_i^2} = \frac{c}{v}. \quad (7.1)$$

В соответствии с процедурой определения стандартной ошибки функции переменных получаем, обозначая малое отклонение через δ , что

$$\delta r_j = \frac{\delta c}{v} - \frac{c \delta v}{v^2}. \quad (7.2)$$

Возведение в квадрат и переход к математическим ожиданиям дает нам

$$\text{var } r_j = \frac{\text{var } c}{v^2} - \frac{2 \text{cov}(v, c)}{v^3} + \frac{c^2 \text{var } v}{v^4}. \quad (7.3)$$

Без потери общности можно далее положить, что $v = 1$. Таким образом, требуются дисперсии c и v и их ковариация. Фактически будет получено более общее выражение для ковариации двух членов ковариационного типа. С точностью до величин принятого нами порядка имеем

$$E \left\{ \frac{1}{n} \sum u_a u_{a+s} \right\} = \rho_s.$$

Исходя из этого

$$\begin{aligned} \text{cov} \left\{ \frac{1}{n} \sum u_a u_{a+s}, \frac{1}{n} \sum u_b u_{b+s+t} \right\} &= \frac{1}{n^2} E \left\{ \sum u_a u_{a+s} u_b u_{b+s+t} \right\} - \rho_s \rho_t = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{a,b} E (u_a u_{a+s} u_b u_{b+s+t}) - \rho_s \rho_t. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Это выражение требует математического ожидания произведения четырех значений u и поэтому зависит от одного из моментов четвертого порядка. Для того чтобы избежать этого, наложим ограничение, чтобы u были распределены нормально. Их характеристическая функция тогда имеет вид:

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} (\theta_a^2 + \theta_{a+s}^2 + \theta_b^2 + \theta_{b+s+t}^2 + 2\rho_s \theta_a \theta_{a+s} + \text{аналогичные произведения}) \right\}, \quad (7.5)$$

где θ — комплексный параметр, обычно записываемый как it .

Коэффициент при $\theta_a \theta_{a+s} \theta_b \theta_{b+s+t}$ является требуемым моментом четвертого порядка, и легко найти, что он равен

$$\rho_s \rho_{s+t} + \rho_{b-a} \rho_{b-a+t} + \rho_{b-a+s+t} \rho_{b-a-s}. \quad (7.6)$$

Использование его в (7.4) и суммирование дают нам ковариацию

$$\frac{1}{n} \{ \sum \rho_i \rho_{i+t} + \sum \rho_{i+s+t} \rho_{i-s} \}. \quad (7.7)$$

Накладывая ограничение $s = t = 0$, имеем

$$\text{var } v = \frac{2}{n} \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_i^2. \quad (7.8)$$

Полагая $t = 0$,

$$\text{var } c = \frac{1}{n} \sum_{-\infty}^{\infty} (\rho_i^2 + \rho_{i+s} \rho_{i-s}). \quad (7.9)$$

Полагая $s = 0$ и заменяя t на s , получаем

$$\text{cov}(v, c) = \frac{2}{n} \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_i \rho_{i+s}. \quad (7.10)$$

И окончательно из (7.3) следует, что

$$\text{var } r_j = \frac{1}{n} \sum_{-\infty}^{\infty} [\rho_i^2 + \rho_{i-j} \rho_{i+j} - 4\rho_i \rho_j \rho_{i+j} + 2\rho_i^2 \rho_j^2]. \quad (7.11)$$

7.3. В этой формуле (выведенной Бартлеттом [3]) проявляется одна из встречающихся на нашем пути трудностей. Дисперсия r зависит от *всех* автокорреляций ряда, каким бы длинным он ни был. Вследствие этого нужно накладывать ограничения в виде некоторых предположений относительно генерирующего механизма системы. (Мы уже сделали предположение, что отклонения имеют нормальный закон распределения.) Например, у процесса скользящего среднего все корреляции выше некоторого порядка равны нулю. У авторегрессионного процесса порядка h они могут быть выражены через первые h корреляций.

Пример 7.1.

Для случайного ряда, у которого все корреляции равны нулю, находим

$$\text{var } r_j = \frac{1}{n}. \quad (7.12)$$

Для процесса, у которого ρ_j и последующие ρ малы, приближением (7.11) будет

$$\text{var } r_j = \frac{1}{n} \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_i^2. \quad (7.13)$$

Для марковского процесса, при больших j ,

$$\text{var } r_j = \frac{1}{n} \sum_{-\infty}^{\infty} \rho^{2i} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right\}. \quad (7.14)$$

7.4. Заслуживает внимания тот факт, что последовательные значения r_j коррелированы и, может быть, сильно. Аналогично (7.13) для марковского процесса

$$\text{cov}(r_j, r_{j+h}) = \frac{1}{n} \sum_i \rho_i \rho_{i+h} = \frac{1}{n} \rho^k \left\{ k-1 + \frac{2}{1-\rho^2} \right\}. \quad (7.15)$$

Тогда корреляция между r_j и r_{j+h} приблизительно равна

$$\frac{\rho^k \{(k+1) - (k-1)\rho^2\}}{1+\rho^2}. \quad (7.16)$$

Например, при $\rho = \frac{1}{2}$ r_j и r_{j+1} коррелированы с коэффициентом корреляции 0,80.

7.5. Именно корреляции соседних значений коррелограммы, оцененной по наблюдениям, а также величина стандартной ошибки объясняют то прискорбное свойство эмпирических коррелограмм, в соответствии с которым они не затухают, как того требует теория. Рис. 7.1 иллюстрирует сказанное. Коррелограмма построена для ряда Юла из 65 членов, к которому мы уже обращались и график которого представлен на рис. 6.1. Для бесконечного ряда коррелограмма должна затухать, как это показано на рис. 6.4. Фактически же она сохраняет колебательный эффект, но не затухает; и это характерно для рядов из 100 или менее членов.

7.6. Более точные критерии существенности отдельных корреляций нормально распределенных u можно вывести из математических ожиданий или непосредственно из выборочной теории. Однако за это также надо платить, а именно: обычно требуется предположение, что в генеральной совокупности автокорреляции отсутствуют, т. е. что ряд является случайным и нормально распределенным. Такая ситуация, к сожалению, наименее интересна, вот почему в этой книге мы не будем углубляться в эту тему. Имеется также несколько хороших аппроксимаций для марковского процесса, но для процесса Юла и процессов более высокого порядка никаких результатов получено не было.

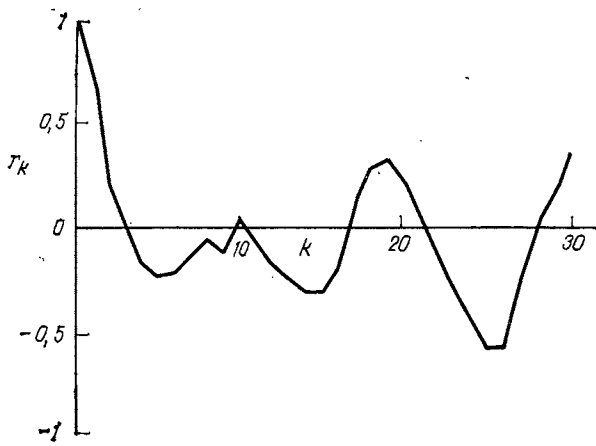


Рис. 7.1. Коррелограмма 65 членов искусственно построенного процесса Юла (см. рис. 6.1)

(а) При выборке из нормальной генеральной совокупности с нулевыми автокорреляциями для первой сериальной корреляции, определенной как

$$r_1 = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (u_i - \bar{u})(u_{i+1} - \bar{u})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2},$$

имеем (см. [61], [62])

$$E(r_1) = -\frac{1}{n-1}; \quad (7.17)$$

$$\text{var } r_1 = \frac{(n-2)^2}{(n-1)^3} = \frac{1}{n+1} + O(n^{-2}). \quad (7.18)$$

В действительности для любой генеральной совокупности с нулевыми автокорреляциями (см. [63])

$$\text{var } r_1 \leq \frac{1}{n-1} + O(n^{-2}). \quad (7.19)$$

(б) Определяя сериальный коэффициент циклически (т. е. беря вместо члена u_{n+1} член u_1) как

$$r_{1c} = \frac{u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_n u_1 - n\bar{u}^2}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad (7.20)$$

Р. Л. Андерсон [1] сумел получить распределение r_1 в явном виде для случая нормальных отклонений с нулевыми автокорреляциями. Распределение выражается громоздкой функцией, но довольно быстро стремится к нормальности:

$$E(r_{1c}) = -\frac{1}{n-1}; \quad (7.21)$$

$$\text{var } r_{1c} = \frac{n(n-3)}{(n+1)(n-1)^2}. \quad (7.22)$$

Приблизительно 30 годами позже было обнаружено, что некоторые положения из работы Андерсона были замечательнейшим образом предвосхищены Эрнстом Аббе в 1854 г. (см. [51]).

(в) Диксон [23] показал, что очень хорошую аппроксимацию распределения, полученного Андерсоном, дает бета-распределение

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-2)}, \quad (7.23)$$

для которого

$$E(r_{1c}) = -\frac{1}{n-1};$$

$$\text{var } r_{1c} = \frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)^2}. \quad (7.24)$$

(г) Мэдоу [57] и Лейпник [55] распространили результаты на случай марковского процесса, получив распределение типа (7.23) с

$$E(r_{1c} | \rho) = \frac{n\rho}{n+2}; \quad (7.25)$$

$$\text{var}(r_{1c} | \rho) = \frac{1-\rho^2}{n}. \quad (7.26)$$

(д) Дэниэльс [19] продвинул теорию еще дальше, применив метод наискорейшего спуска, но формулы получились слишком громоздкими.

СМЕЩЕНИЕ В ОЦЕНКЕ АВТОКОРРЕЛЯЦИЙ

7.7. Представляется достаточно естественным оценивать ρ генеральной совокупности по соответствующим выборочным r , и, так как дисперсии имеют порядок $1/n$, оценки состоятельны при условии, что сме-

шение стремится к нулю с ростом n . Однако имеются некие неожиданные смещения в оценках, к обсуждению которых мы и переходим.

Если r имеет вид A/\sqrt{BC} , то, обозначая отклонения от средних через a, b, c , имеем

$$r_j = \frac{E(A) + a}{\{E(B) + b\}^{1/2} \{E(C) + c\}^{1/2}} \quad (7.27)$$

и, разлагая знаменатель в биномиальный ряд с точностью до второго порядка, находим, что

$$E(r_j) = \frac{E(A)}{\{E(B)E(C)\}^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{E(ab)}{2E(A)E(B)} - \frac{E(ac)}{2E(A)E(C)} + \right. \\ \left. + \frac{E(bc)}{4E(B)E(C)} + \frac{3E(b^2)}{8E^2(B)} + \frac{3E(c^2)}{8E^2(C)} \right\}. \quad (7.28)$$

Далее накладываем ограничение:

$$B = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} u_i^2 - \frac{1}{(n-j)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-j} u_i \right)^2; \quad (7.29)$$

$$C = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} u_{i+1}^2 - \frac{1}{(n-j)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-j} u_{i+1} \right)^2. \quad (7.30)$$

B и C тогда асимптотически эквивалентны и $E(B) = E(C)$. Аналогично $\text{cov}(bc) = \text{var } b = \text{var } c$. Следовательно, (7.28) сводится к

$$E(r_j) \doteq \frac{E(A)}{E(B)} - \frac{\text{cov}(a, b)}{E^2(B)} + \frac{E(A) \text{var } b}{E^3(B)}. \quad (7.31)$$

Без потери общности положим дисперсию ряда равной единице и введем $v = n - j$. Тогда из (7.29) имеем

$$E(B) = E(C) = \frac{1}{v} \left\{ v - 1 - \frac{2}{v} \sum_{i=1}^{v-1} (v-i) \rho_i \right\}. \quad (7.32)$$

Аналогично, принимая что

$$A = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} u_i u_{i+j} - \frac{1}{(n-j)^2} \sum_{i=1}^{n-j} u_i \sum_{i=1}^{n-j} u_{i+j}, \quad (7.33)$$

находим

$$E(A) = \frac{1}{v} \left\{ v \rho_j - \frac{1}{v} \sum_{i=0}^{v-1} (v-j) \rho_{j+i} - \frac{1}{v} \sum_{i=0}^j (v-i) \rho_{j-i} - \right. \\ \left. - \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{v-j-1} (v-j-i) \rho_i \right\}, \quad j < 0. \quad (7.34)$$

Мы оценили $\text{var } b$ и $\text{cov}(a, b)$ в (7.8) и (7.10). Теперь по (7.31) можно оценить $E(r_j)$.

Пример 7.2

Если ряд случайный, то все автокорреляции равны нулю, и находим, что

$$E(r_j) = -\frac{1}{v} = -\frac{1}{n-1}. \quad (7.35)$$

Это согласуется с точным результатом, приведенным в пункте (а) раздела 7.6. Замечательно, что даже в выборках из случайного ряда имеется смещение вниз. Иногда я обнаруживал в подсчитанных коррелограммах для относительно коротких рядов, что коррелограмма уменьшается до малых значений, но колеблется несколько ниже горизонтальной оси. Это могло быть из-за смещения в оценке.

После несложных алгебраических преобразований находим для марковского процесса, что

$$E(r_1) = \rho - \frac{1+3\rho}{n-1}; \quad (7.36)$$

$$E(r_j) = \rho^j - \frac{1}{n-j} \left\{ \frac{1+\rho}{1-\rho} (1-\rho^j) + 2j\rho^j \right\}, \quad j > 1. \quad (7.37)$$

Смещение во всех этих случаях будет вниз и часто вовсе не пренебрежимо. Например, в ряде с $\rho = \frac{1}{2}$ математическое ожидание r_1 при 26 членах ряда будет 0,4, а не 0,5.

7.8. Поэтому в случае коротких рядов представляется предпочтительным исключение смещения порядка $1/n$ способом, предложенным Кенуем [70]. Если разделить ряд на две половины, так что r — значение сериальной корреляции для всего ряда, а $r_{(1)}$, $r_{(2)}$ — для соответствующих половин, то

$$R = 2r - \frac{1}{2} \{r_{(1)} + r_{(2)}\} \quad (7.38)$$

будет несмещенной оценкой с точностью до величин порядка n^{-1} . Ибо если

$$E(r) = \rho + \frac{k}{n} + O(n^{-2}),$$

где k — константа, не зависящая от n , то

$$E\{r_{(1)}\} = E\{r_{(2)}\} = \rho + \frac{2k}{n} + O(n^{-2}),$$

и, делая подстановку в (7.38), находим, что

$$E(R) = \rho + O(n^{-2}). \quad (7.39)$$

7.9. В реальной практике чаще всего имеют дело с построением авторегрессий, скользящих средних или смешанных процессов, т. е. работают скорее с коррелограммой в целом, чем с одной частной ординатой, главным образом вследствие коррелированности соседних ординат. Коррелограммы используют, так же как и другие диагностические средства, такие, как спектр, для выдвижения гипотезы относительно типа

модели; тогда остаются проблемы оценивания параметров в этой модели и анализа того, насколько удовлетворительно она соответствует данным. Мы отложим обсуждение подобных вопросов до тех пор, пока спектр не будет изучен более подробно (см. гл. 12).

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Сарган [78] дает теоретическое объяснение того, почему коррелограмма сравнительно коротких рядов не затухает, но сохраняет ожидаемый колебательный эффект.

2. Вследствие выборочной изменчивости сериальных коэффициентов иногда трудно определить, сколько сериальных коэффициентов нужно подсчитывать для сравнительно короткого ряда, состоящего, скажем, из 50 членов. В редких случаях их требуется больше, чем $\frac{1}{2}n$ или 30, независимо от того, какое из этих чисел наименьшее. Однако взаимные произведения такого рода требуются для некоторых методов вычисления спектра (см. раздел 8.23). В работе [48] я показал эффект возрастания длины ряда, увеличивая ее ступенчато от 60 до 480 членов.

8 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

8.1. Жан-Батист Жозеф Фурье известен математикам как автор методов представления функции через сумму гармонических членов. Обычный ряд Фурье можно записать как

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin jx + \frac{1}{2} b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cos jx \quad (8.1)$$

или эквивалентно как

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sin(jx + \varphi_j). \quad (8.2)$$

Длина периода гармонических членов, составляющих ряд, имеет специфическую закономерность: первый синусоидальный член имеет период 2π или, что более удобно, от $-\pi$ до π , второй имеет период от $-\frac{1}{2}\pi$ до $\frac{1}{2}\pi$, третий — от $-\frac{1}{3}\pi$ до $\frac{1}{3}\pi$ и т. д. Аналогичная картина у косинусоидальных членов. Вся сумма имеет период 2π .

Несмотря на эту периодичность, многие функции можно представить рядом Фурье на ограниченном интервале от $-\pi$ до π (или на любом конечном интервале, если изменить масштаб). Для того чтобы это было возможно, достаточно, чтобы функция была однозначной, непрерывной, кроме, может быть, конечного числа точек, и имела лишь конечное число максимумов или минимумов. Например,

$$\frac{1}{2} x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (8.3)$$

8.2. Константы a и b легко можно определить благодаря тому обстоятельству, что основной период является кратным периодам последовательных членов. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos rx \sin sxdx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos rx \cos sxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \sin sxdx = \begin{cases} 0, & r \neq s, \\ \pi, & r = s. \end{cases} \quad (8.4)$$

Умножая $f(x)$ из (8.1) на $\sin jx$ или $\cos jx$ и интегрируя, находим далее, что

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin jx dx; \quad (8.5)$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx. \quad (8.6)$$

ЧАСТОТА И ДЛИНА ВОЛНЫ

8.3. Углы, измеряемые в радианах, представляют собой безразмерные величины, и следовательно, в таком выражении, как $\sin \alpha t$, величина α измеряется в радианах на единицу времени. Иногда она называется *угловой частотой*. Так как значения $\sin \alpha t$ повторяются с периодом $2\pi/\alpha$, число циклов в единице времени равно $\alpha/2\pi$. Эту величину также иногда называют *частотой*. В случае необходимости, чтобы различать эти две величины, говорят об угловой или циклической частоте. Период $2\pi/\alpha$ имеет размерность t и называется *длиной волны*. Тогда оказывается, что при разложении функции в ряд Фурье последовательные члены имеют периоды $2\pi, 2\pi/2, 2\pi/3$ и т. д.; угловые частоты равны $1, 2, 3, \dots$, а циклические частоты равны $1/2\pi, 2/2\pi, 3/2\pi, \dots$. В более общем случае, когда функция определена на временном интервале $2L$, угловые частоты выражаются величинами типа $j\pi/L$.

8.4. Временные ряды, встречающиеся в реальной жизни, иногда можно, а иногда нельзя представлять в виде суммы гармонических членов. Конечно, всегда можно построить ряд Фурье, но, вообще говоря, нет оснований предполагать, что он годится на все случаи жизни — он, например, может быть совершенно непригодным для прогнозирования. Если же подозревается существование гармонических компонент, то, как правило, нельзя сделать предположение, что их частоты являются кратными одной основной частоте, как в ряде Фурье. В таком случае мы приходим к тому, чтобы рассматривать ряд более общего вида

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \{a_j \sin(\alpha_j x) + b_j \cos(\alpha_j x)\}, \quad (8.7)$$

где α не обязательно соизмеримы. Свойство, выражаемое уравнениями (8.5) и (8.6), здесь утрачивается и коэффициенты a и b нельзя определить каким-либо простым способом.

8.5. Раньше при работе с разложениями типа тех, что представлены в уравнении (8.7), на попытку оценить a и b и, следовательно, на построение гармонической модели тратилось много усилий. Далее кратко будет показано, как для этой цели может быть применен спектр. Однако в настоящее время признано, что эффекты в спектре, которые с давних пор используются для идентификации гармонических членов, допускают другие интерпретации, и, подобно коррелограмме, спектр сле-

дует рассматривать как вещь в себе. Мы уже видели, что теоретически спектр можно получать через коррелограмму, и наоборот. Тогда спрашивается, нужно ли подсчитывать и то, и другое? Ответ, бесспорно, утвердительный. Только накопив огромный опыт, можно судить по коррелограмме о том, как будет выглядеть спектр, и наоборот; и каждая форма по своему трудна при интерпретации.

8.6. Следует отметить два важных свойства у ряда, наблюдаемого через равные интервалы времени. Периодичность с периодом, меньшим одной единицы времени, может стать незаметной. Действительно, ранее отмечалось, что один способ исключения сезонных колебаний состоит в том, чтобы наблюдать ряд один раз в год. Нужно по крайней мере два наблюдения за интервал времени, для того чтобы выявить периодичность с периодом в одну единицу времени. Вообще при временном интервале t_0 между наблюдениями нельзя обнаружить колебания с периодами менее, чем $2 t_0$, или с угловыми частотами выше, чем π/t_0 . Это предельное значение известно как *частота Найквиста*. В спектральной плотности, в том виде, как она определена нами,

$$\omega(\alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_j e^{i\alpha j}, \quad (8.8)$$

временной интервал равен единице, а α изменяется от 0 до π . Ордината в точке π есть значение спектральной плотности при частоте Найквиста.

8.7. Второй эффект, заслуживающий внимания, также связан с интервалом наблюдения. Рассмотрим член $\sin(2\pi t/3)$ через единичные интервалы времени, т. е. при $t=1, 2, 3$ и т. д. Его значения равны $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 0 и т. д. Но это значения, которые принимают $\sin(8\pi t/3)$, $\sin(14\pi t/3)$ и т. д. Ширина интервала наблюдения не позволяет нам различать колебания из семейства колебаний с угловыми частотами $2\pi/3 + 2\pi j$, $j=1, 2, 3, \dots$ Эти более высокие частоты называются *неразличимыми*. В большинстве практических случаев они не влекут за собой каких-либо неприятностей.

ИНТЕНСИВНОСТЬ

8.8. В разделе 6.30 мы рассматривали интенсивность, математическое ожидание которой, за исключением постоянного множителя, равно ординате спектра, как сумму квадратов двух чисел a и b , определенных следующим образом:

$$a(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(n\pi)}} \sum_{t=1}^n u_t \cos \alpha t; \quad (8.9)$$

$$b(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(n\pi)}} \sum_{t=1}^n u_t \sin \alpha t. \quad (8.10)$$

На эти функции можно смотреть как на ковариацию ряда с $\cos \alpha t$ или $\sin \alpha t$ в зависимости от обстоятельств, и ожидается, что если u_t содержит член с угловой частотой α , то интенсивность будет относительно большой. Давайте это проверим. Предположим, что

$$u_t = c \sin \alpha t + g_t, \quad (8.11)$$

где g_t — некий стационарный процесс, не коррелированный с $\sin \alpha t$. Подсчитаем a и b одновременно, оценивая

$$\sum_{t=1}^n \sin \alpha t e^{i\beta t},$$

и найдем, что это выражение равно

$$\frac{1}{\sin \left\{ \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right\}} \left[\cos \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) (\alpha - \beta) \right\} - \cos \left\{ \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right\} \right] - i \sin \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) (\alpha - \beta) \right\} + i \sin \left\{ \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right\} \right] + \text{аналогичный член с } -\beta \text{ вместо } \beta. \quad (8.12)$$

В окрестности $\beta = \alpha$ доминирует первый член. Величина суммы $\sum g_t e^{i\beta t}$, по предположению, пренебрежимо мала. Следовательно, интенсивность равна сумме квадратов действительной и мнимой частей (8.12), умноженной на $c^2/(n\pi)$. Она приводится к виду

$$I(\beta) = \frac{c^2 \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} n (\alpha - \beta) \right\}}{4\pi n \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right\}}. \quad (8.13)$$

Рассмотрим эту величину в окрестности, когда, скажем,

$$\alpha - \beta = \frac{2\pi m}{n}, \quad n \text{ велико, } m \text{ конечно.}$$

Тогда, поскольку для малых углов $\sin \theta = \theta$, имеем

$$I(\beta) = \frac{nc^2 \sin^2 (\pi m)}{4\pi m^2}. \quad (8.14)$$

Таким образом, при $\alpha = \beta$ величина интенсивности имеет порядок n , а спектр будет иметь высокий пик.

8.9. Спектр как средство улавливания периодичностей в данных можно сравнить с устройством настройки в радиоприемнике. При движении вдоль спектра в заданном диапазоне частот интенсивность должна оставаться низкой до тех пор, пока не достигнута частота гармонической компоненты ряда, при которой она обнаруживает высокий пик. Совокупность пиков должна определять набор гармонических компонент. К сожалению, как вскоре будет показано, интерпретация далеко не столь проста.

8.10. В более ранней литературе использовалась интенсивность несколько другого вида, определяемая на основе

$$A = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n u_t \cos \frac{2\pi t}{\lambda}, \quad \lambda = 2\pi/\alpha; \quad (8.15)$$

$$B = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n u_t \sin \frac{2\pi t}{\lambda} \quad (8.16)$$

как

$$S^2(\lambda) = A^2 + B^2 = \frac{4\pi I(\alpha)}{n}. \quad (8.17)$$

Отличия от обычного спектра двойки:

1) в знаменателе выражений для A и B стоит n , а не $\sqrt{n\pi}$. Следовательно, интенсивность при частоте, близкой частоте гармоника, вместо (8.14) будет определяться величиной

$$S^2 = (c^2 \sin^2 m \pi) / m^2. \quad (8.18)$$

В этом случае ордината S^2 остается конечной и фактически равняется амплитуде c^2 предполагаемой гармоника, что и является причиной, по которой интенсивность была определена таким образом;

2) значения S^2 наносились на график относительно длины волны λ , а не частоты, в качестве абсциссы, так что диапазон изменения простирался до бесконечности или по крайней мере до половины длины ряда.

В этом виде график S^2 от λ назывался *периодограммой*. Иногда этот термин применяется в литературе для обозначения интенсивности.

На практике строят график либо спектральной плотности, либо интенсивности — разница только в масштабе.

Пример 8.1.

В гл. 6. был дан теоретический вид спектра для процессов Маркова и Юла (см. рис. 6.3 и 6.4). Теоретический спектр случайного ряда представляет собой просто горизонтальную прямую с ординатой, равной единице. Случайный ряд с малыми интервалами между наблюдениями иногда называют «белым шумом»; «шумом» его называют из-за несистематического характера, а «белым» — потому, что он имеет такой же спектр, как и белый свет.

Весьма интересно исследовать, каким будет спектр, когда в данных имеется линейный тренд. Довольно утомительные при вычислениях тригонометрические суммы мы можем заменить интегралами, по крайней мере для сравнительно малых временных интервалов наблюдения. Предположим, что $u_t = t$. Тогда

$$\int_0^T t \sin(\alpha t) dt = -\frac{T \cos(\alpha T)}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha T)}{\alpha^2}; \quad (8.19)$$

$$\int_0^T t \cos(\alpha t) dt = \frac{T \sin(\alpha T)}{\alpha} + \frac{\cos(\alpha T) - 1}{\alpha^2}. \quad (8.20)$$

Следовательно,

$$I(\alpha) = \frac{1}{\pi T} \left\{ \frac{T^2}{\alpha^2} + O(T) \right\} = \frac{T}{\pi \alpha^2} + O(1). \quad (8.21)$$

В таком случае при постоянном T спектр будет выражаться кривой типа $y = 1/x^2$ с высоким пиком в начале отсчета. Фактически в этом анализе тренд трактуется как длинная волна с нулевой частотой. Точное суммирование дало бы нам $T / \left(4\pi \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \right) + O(1)$, что при малых α эквивалентно (8.21).

ПРИМЕРЫ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

8.11. Настало время обратиться к практическим примерам. На рис. 8.1 вычерчена спектральная функция процесса Юла, представленного на рис. 6.1— коррелограмма дана на рис. 7.1. (Пунктирная линия на рис. 8.1 будет объяснена позже.) В табл. 8.1 приведен один из наиболее известных в данной области рядов — ряд Бевериджа индексов цен на пшеницу за исключительной большой период (с 1500 по 1869 г.). График спектра показан на рис. 8.2. В табл. 8.2 даны остатки, полученные после элиминирования тренда из логарифмов данных об иммиграции из табл. 1.4 с помощью простого скользящего среднего с длиной отрезка усреднения 17. Спектр приведен на рис. 8.3.

Наблюденные данные часто имеют такие сильно зазубренные спектры и скоро мы увидим, почему это так.

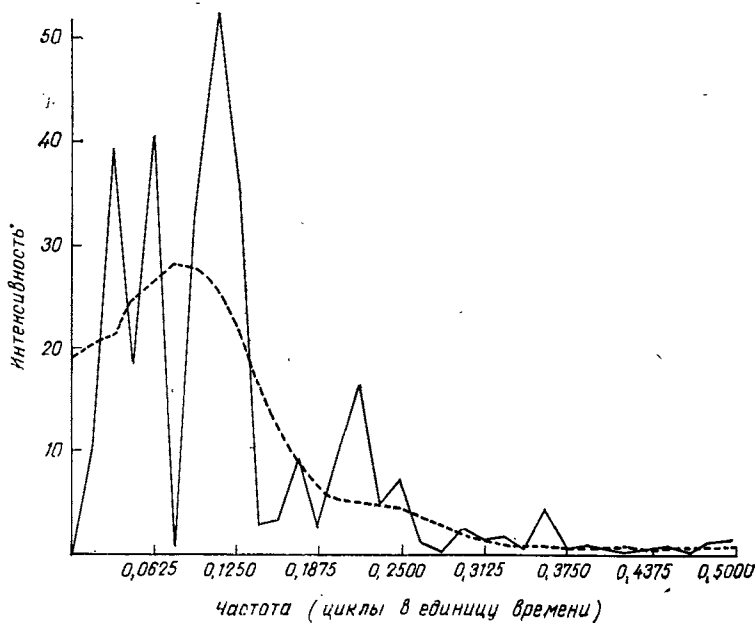


Рис. 8.1. Интенсивность процесса Юла, представленного на рис. 6.1

Очищенный от тренда индекс цен на пшеницу (европейские цены),
составленный лордом Бевериджем (впоследствии сэром Уильямом), для 1500—1869 гг.

Год	Индекс	Год	Индекс	Год	Индекс	Год	Индекс	Год	Индекс	Год	Индекс	Год	Индекс
1500	106	1553	90	1606	81	1659	104	1712	115	1765	101	1818	94
01	118	54	100	07	98	60	120	13	134	66	106	19	86
02	124	55	123	08	115	61	167	14	108	67	113	20	84
03	94	56	156	09	94	62	126	15	90	68	108	21	76
04	82	57	71	10	93	63	108	16	89	69	108	22	77
05	88	58	71	11	100	64	91	17	89	70	131	23	71
06	87	59	81	12	99	65	85	18	94	71	136	24	71
07	88	60	84	13	100	66	73	19	107	72	119	25	69
08	88	61	97	14	94	67	74	20	89	73	106	26	82
09	68	62	105	15	88	68	80	21	79	74	105	27	93
10	98	63	90	16	92	69	74	22	91	75	88	28	114
11	115	64	78	17	100	70	78	23	94	76	84	29	103
12	135	65	112	18	82	71	83	24	110	77	94	30	110
13	104	66	100	19	73	72	84	25	111	78	87	31	105
14	96	67	86	20	81	73	106	26	103	79	79	32	82
15	110	68	77	21	99	74	134	27	94	80	87	33	80
16	107	69	80	22	124	75	122	28	101	81	88	34	78
17	97	70	93	23	106	76	102	29	90	82	94	35	82
18	75	71	112	24	106	77	107	30	96	83	94	36	88
19	86	72	131	25	121	78	115	31	80	84	92	37	102
20	111	73	158	26	105	79	113	32	76	85	85	38	117
21	125	74	113	27	84	80	104	33	84	86	84	39	107
22	78	75	89	28	97	81	92	34	91	87	93	40	95
23	86	76	87	29	109	82	84	35	94	88	108	41	101
24	102	77	87	30	148	83	86	36	101	89	108	42	92
25	71	78	79	31	114	84	101	37	93	90	86	43	88
26	81	79	90	32	108	85	74	38	91	91	78	44	92
27	129	80	90	33	97	86	75	39	122	92	87	45	115
28	130	81	87	34	92	87	66	40	159	93	85	46	139
29	129	82	83	35	97	88	62	41	110	94	103	47	90
30	125	83	85	36	98	89	76	42	90	95	130	48	80
31	139	84	76	37	105	90	79	43	81	96	95	49	74
32	97	85	110	38	97	91	97	44	84	97	84	50	78
33	90	86	161	39	93	92	134	45	102	98	87	51	86
34	76	87	97	40	99	93	169	46	102	99	120	52	105
35	102	88	84	41	99	94	111	47	100	1800	139	53	138
36	100	89	106	42	107	95	109	48	109	01	117	54	141
37	73	90	111	43	106	96	111	49	104	02	105	55	138
38	86	91	97	44	96	97	128	50	90	03	94	56	107
39	74	92	108	45	82	98	163	51	99	04	125	57	82
40	74	93	100	46	88	99	137	52	95	05	114	58	81
41	76	94	119	47	116	1700	99	53	90	06	98	59	97
42	80	95	131	48	122	01	85	54	80	07	93	60	116
43	96	96	143	49	134	02	72	55	85	08	94	61	107
44	112	97	138	50	119	03	88	56	117	09	94	62	92
45	144	98	112	51	136	04	77	57	112	10	104	63	79
46	80	99	99	52	102	05	66	58	95	11	140	64	81
47	54	1600	97	53	72	06	64	59	91	12	121	65	94
48	69	01	80	54	63	07	69	60	88	13	96	66	119
49	100	02	90	55	76	08	125	61	100	14	96	67	118
50	103	03	90	56	75	09	175	62	97	15	130	68	93
51	129	04	80	57	77	10	108	63	88	16	178	69	102
52	100	05	77	58	103	11	103	64	95	17	126		

Остатки от логарифмов данных об иммиграции из табл. 1.4
после исключения тренда с помощью 17-точечного скользящего среднего.
Значения увеличены на 2

1828 г.	2,1395 1,9973	1870 г.	2,1981 2,1004 2,1762	1912 г.	2,1482 2,3036 2,3413
1830 г.	1,9754 1,9039 2,1679 2,1922 2,1800 1,9737 2,1627 2,1435 1,7849 1,9688	1880 г.	2,1118 2,2747 2,3465 2,2151 2,1254 1,9833 1,8925 2,0429 2,0736 2,0010	1920 г.	2,0273 2,3278 1,9536 2,2463 2,4339 2,1182 2,1919 2,2630 2,2600 2,2739
1840 г.	2,0015 1,9354 2,0087 1,7894 1,7860 1,9087 1,9958 2,1363 2,0929 2,1826	1890 г.	2,0389 2,1527 2,1751 2,0566 1,8565 1,7892 1,8995 1,7109 1,6850 1,7918	1930 г.	2,2737 1,9115 1,5264 1,4049 1,5707 1,7101 1,7898 1,9839 2,1388 2,2386
1850 г.	2,1702 2,2743 2,2451 2,2375 2,3080 1,9764 1,9792 2,0760 1,7643 1,7562	1900 г.	1,9414 1,9712 2,0728 2,1651 2,1122 2,1812 2,1694 2,2275 2,0134 2,0064	1940 г.	2,1550 1,9775 1,6609 1,5275 1,5560 1,6421 2,0608 2,1608 2,1900 2,1938
1860 г.	1,8668 1,6451 1,6444 1,9340 1,9564 2,0432 2,1462 2,1266 2,0623 2,1682	1910 г.	2,1862	1950 г.	2,2749 2,1353 2,1845 1,9344
1869 г.	2,1682	1911 г.	2,1510	1954 г.	1,9700

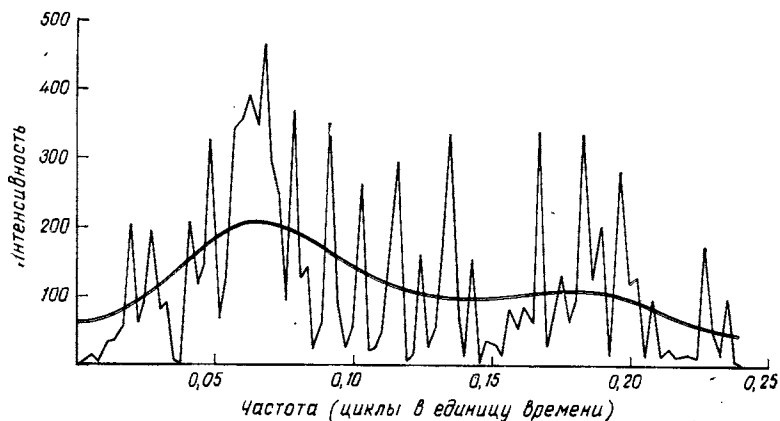


Рис. 8.2. Интенсивность ряда индексов цен на пшеницу, построенного Бевериджем (см. табл. 8.1)

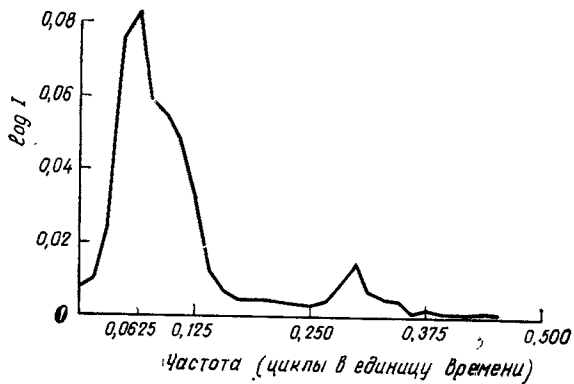


Рис. 8.3. Спектральная функция очищенных от тренда данных из табл. 1.4 об иммиграции в США

БОКОВЫЕ ПИКИ

8.12. Возвращаясь к уравнению (8.14) и исследуя окрестность значения угловой частоты β присутствующей гармонике, видим, что будет пик не только в самой точке β , появится ряд меньших пиков в точках, в которых $\sin \pi m$ достигает максимума, а именно при $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ и т. д. Очевидно, что это создает трудности при интерпретации. На всех трех только что представленных графиках основные пики сопровождаются меньшими по величине боковыми пиками, и почти невозможно сказать, являются они побочными эффектами или нет.

ЭХО-ЭФФЕКТЫ

8.13. Если в ряде содержится скрытая гармоника частоты α , дающая в спектре пик в точке α , то, конечно, в нем присутствуют также периодические члены с частотой $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha$ и т. д. В таком случае можно ожидать, что месячная периодичность порождает эффект появления пиков,

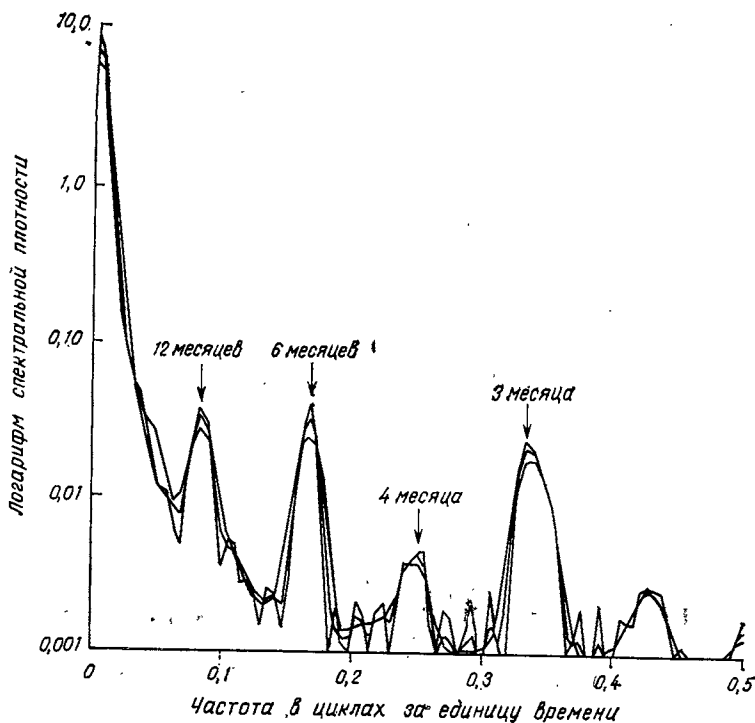


Рис. 8.4. Спектральная функция очищенных от тренда данных о банковском клиринге в США (ежемесячные безналичные расчеты между банками с 1875 по 1958 г.) обнаруживает эффект появления пиков в точках, соответствующих интервалам в 2 месяца, 3 месяца и т. д. (экспоненциальный тренд исключен)

соответствующих двухмесячным, трехмесячным и т. д. периодам. Это так называемое «эхо», повторяемое спектром на низких частотах. Этот эффект представлен на рис. 8.4. (заимствованном у Гренджера [34]).

ВЫБОРОЧНАЯ ДИСПЕРСИЯ ОЦЕНКИ ОРДИНАТЫ СПЕКТРА

8.14. Однако, возможно, самым замечательным свойством интенсивности является то, что стандартная ошибка ординаты не уменьшается с ростом n , а равна самой ординате. Мы видели, что в коррелограм-

ме соседние ординаты были коррелированы, но дисперсии отдельных сериальных коэффициентов были порядка n^{-1} . В спектре наоборот: соседние ординаты фактически независимы, но их дисперсия будет порядка единицы. Термин «соседний» имеет здесь довольно произвольный смысл. В коррелограмме соседние значения закрепляются интервалом наблюдения. У интенсивности область изменения переменной α теоретически непрерывна. На практике интенсивность подсчитывают, конечно, на множестве равноотстоящих значений α от 0 до π . (Некоторые машинные программы предоставляют возможность выбора интервала вычислений, а большинство из них позволяет делить весь диапазон по крайней мере на 60 интервалов.)

8.15. Рассмотрим суммы $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ из (8.9) и (8.10) и пусть, в качестве первого примера, u будет случайным рядом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Легко показать, что при больших n и α , не равном 0 или π ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2(\alpha k) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin^2(\alpha k) \rightarrow \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\alpha k) \sin(\alpha k) \rightarrow 0.$$

При $\alpha = 0$ или π будет разрыв, первое выражение стремится к единице, а второе — к нулю. Из этого следует, что если u_t , используемая в (8.9) и (8.10), распределена нормально, то $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2/2$; более того, они независимы. Поэтому

$$\frac{2\pi l}{\sigma^2} = \frac{2\pi(a^2 + b^2)}{\sigma^2} = 2\hat{w}(\alpha) \quad (8.22)$$

распределена как сумма квадратов двух независимых нормальных переменных с единичными дисперсиями, т. е. как χ^2 с двумя степенями свободы. Далее, χ^2 с ν степенями свободы имеет математическое ожидание ν и дисперсию 2ν . Из этого следует, что

$$E\{\hat{w}(\alpha)\} = 1; \quad (8.23)$$

$$\text{var } \hat{w}(\alpha) = 1 = E^2\{w(\alpha)\}. \quad (8.24)$$

8.16. Как отмечалось, это справедливо для случайного ряда. Теорема Бартлетта [5] утверждает, что для взвешенных средних независимых случайных переменных (и, в частности, для авторегрессионных процессов и скользящих средних) равенство

$$\text{var } w(\alpha) = E^2\{w(\alpha)\} \quad (8.25)$$

остается верным асимптотически.

Давайте просуммируем $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ в единой формуле:

$$J(\alpha) = a(\alpha) + ib(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(n\pi)}} \sum_{t=1}^n u_t e^{i\alpha t}. \quad (8.26)$$

Математическое ожидание J равно нулю. Если u представляют случайный ряд (необязательно нормальный), то

$$E \{J(\alpha) J(\beta)\} = \frac{\sigma^2}{n\pi} \sum_{t=1}^n \exp \{i\alpha t + i\beta t\} = \frac{\sigma^2}{n\pi} \frac{\exp(i\alpha + i\beta) [1 - \exp(in(\alpha + \beta))]}{1 - \exp(i\alpha + i\beta)}. \quad (8.27)$$

Если α и β имеют вид $2\pi p/n$, где p — целое, то последний член в числителе равен нулю. Следовательно, $J(\alpha)$ и $J(\beta)$ некоррелированы. Это же справедливо и для сопряженной величины $J^*(\alpha)$, определенной как

$$J^*(\alpha) = a(\alpha) - ib(\alpha). \quad (8.28)$$

Мы знаем, что $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ некоррелированы. Точно так же некоррелированы ординаты спектра в точках α и β при условии, что α и β имеют вид $2\pi p/n$.

Поскольку $I(\alpha) = J(\alpha) J^*(\alpha)$, положив в (8.27) $\beta = -\alpha$, мы вновь получаем, что

$$E\{I(\alpha)\} = \sigma^2/\pi. \quad (8.29)$$

8.17. Далее имеем

$$E\{I(\alpha) I(\beta)\} = \frac{1}{n^2 \pi^2} E \left\{ \sum_{t=1}^n u_t e^{i\alpha t} \sum_{s=1}^n u_s e^{-i\alpha s} \sum_{k=1}^n u_k e^{i\beta k} \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=1}^n u_l e^{-i\beta l} \right\} = \frac{1}{n^2 \pi^2} \Sigma \{E(u_t u_s u_k u_l) \exp(\alpha t - \alpha s + \beta k - \beta l)\}. \quad (8.30)$$

Для случайного ряда математические ожидания не равны нулю, если только $t=s=k=l$ (в этом случае появляется четвертый момент u) или если индексы равны попарно. Если $t=s$ и $k=l$, то соответствующий член равен $E\{I(\alpha)\} E\{I(\beta)\}$. Отсюда после небольших алгебраических преобразований находим

$$\text{cov}\{I(\alpha), I(\beta)\} = \frac{\kappa_4}{n\pi^2} + \frac{\sigma^4}{n^2 \pi^2} \left\{ \frac{1 - \cos(n(\alpha + \beta))}{1 - \cos(\alpha + \beta)} + \frac{1 - \cos(n(\alpha - \beta))}{1 - \cos(\alpha - \beta)} \right\}. \quad (8.31)$$

При $\alpha = \beta$, учитывая, что $1 - \cos \theta = \frac{1}{2} \theta^2$ при малых θ , получаем

$$\text{var} I(\alpha) = \frac{\sigma^4}{\pi^2} + O(n^{-1}), \quad (8.32)$$

что подтверждает (8.25). Далее, если распределение u отлично от нормального, ковариация имеет порядок $1/n$. Если u нормально, ковариация имеет порядок n^{-2} , и она равна нулю, если α и β имеют вид $2\pi p/n$, где p — целое. В последнем случае соседние ординаты независимы; но даже в первом случае корреляции малы.

8.18. Рассмотрим теперь случай, когда u_t является взвешенным средним случайных переменных, скажем

$$u_t = \sum_0^{\infty} g_s \cdot \varepsilon_{t-s}. \quad (8.33)$$

Обозначая индексом при J рассматриваемую переменную, имеем

$$\begin{aligned} J_u(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{(n\pi)}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^n g_s \varepsilon_{t-s} e^{i\alpha t} = \frac{1}{\sqrt{(n\pi)}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^n \varepsilon_{t-s} e^{i\alpha(t-s)} e^{i\alpha s} g_s = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(n\pi)}} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{t-k} e^{i\alpha k} \sum_{s=0}^{\infty} e^{i\alpha s} g_s \approx J_\varepsilon(\alpha) T(\alpha), \end{aligned} \quad (8.34)$$

где $T(\alpha)$ — передаточная функция g_s ,

$$T(\alpha) = \sum_{s=0}^{\infty} e^{i\alpha s} g_s. \quad (8.35)$$

Следовательно,

$$I_u(\alpha) = I_\varepsilon(\alpha) T(\alpha) T^*(\alpha), \quad (8.36)$$

что аналогично результату (6.72), полученному для передаточной функции в непрерывном случае. Далее,

$$E\{I_u(\alpha)\} = T(\alpha) T^*(\alpha) E\{I_\varepsilon(\alpha)\} \quad (8.37)$$

и, поскольку этот результат верен для I_ε , получаем асимптотически, что

$$\text{var } I_u(\alpha) = E^2\{I_u(\alpha)\}. \quad (8.38)$$

При $\alpha = 0$ или π эта величина удваивается.

8.19. Эти разнообразные свойства интенсивности, а именно появление боковых пиков, эхо-эффекты, влияние тренда и неконтролируемые колебания ординат, очевидно, создают серьезные проблемы при интерпретации. Беверидж, например, исследуя график, аналогичный тому, что представлен на рис. 8.2 (правда, он работал с периодограммой до того, как были осознаны возникающие при этом опасности), пришел к предположению о присутствии в его ряде 19 периодических членов, в то время как сомнительно, чтобы их было больше двух, их скорее меньше. Эта проблема решается сглаживанием спектра. Мы считаем, что благодаря этому можно уменьшить выборочную ошибку до порядка $1/n$, но как всегда за это надо платить: мы смещаем оценку.

8.20. Воспользуемся процедурой, эквивалентной вычислению скользящего среднего вдоль спектра с непрерывной весовой функцией h . В общем случае длина отрезка усреднения будет равна полной длине спектра 2π . Для того чтобы можно было получать сглаженные значения для всех точек, определим h как периодическую функцию, т. е.

$$h(u) = h(u + 2\pi). \quad (8.39)$$

Поскольку это весовая функция с суммарным весом, равным единице,

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(u) du = 1. \quad (8.40)$$

Такую функцию называют «ядром» или «спектральным окном» (а не скользящим средним или фильтром, чтобы не затемнять дело, хотя в сущности это одно и то же). Пусть $I(\alpha)$ — выборочная оценка интенсивности. Построим сглаженную функцию

$$I_A(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} h(u) I(\alpha-u) du = \int_{-\pi}^{\pi} h(\alpha-u) I(u) du. \quad (8.41)$$

Взяв математическое ожидание, мы видим, что если $I(\alpha)$ — несмещенная оценка, то оценка $I_A(\alpha)$, являясь взвешенным средним различных значений, среди которых лишь одно истинно, вообще говоря, будет смещенной.

8.21. При выборе подходящей $h(u)$ мы пытаемся сбалансировать противоположные требования. Для того чтобы избежать смещения, желательно, чтобы важнейшая часть h (т. е. интервал, на котором ее значения не малы) была узкой. Но она не должна быть слишком узкой, если требуется эффективное сглаживание. Если значения h сильно сконцентрированы, то можно считать, что эффективная область определения функции уже, чем вся область определения от $-\pi$ до π , и ее иногда называют «полосой пропускания» функции.

Интеграл (8.41) можно аппроксимировать суммой

$$I_A(\alpha) = \frac{2\pi}{n} \sum h(u_j) I(\alpha-u_j), \quad u_j = 2\pi j/n. \quad (8.42)$$

Конечно, на практике мы должны будем подсчитывать именно эту сумму. Вследствие выбора u_j и в силу замечаний, сделанных в разделе 8.17, значения I некоррелированы на конечном множестве значений α , и поэтому

$$\text{var } I_A(\alpha) = \frac{4\pi^2}{n^2} \sum h^2(u_j) \text{var } I(\alpha-u_j). \quad (8.43)$$

Используя (8.38), получаем, что приближенно

$$\text{var } I_A(\alpha) \doteq \frac{4\pi^2}{n^2} \sum h^2(u_j) E \{I(\alpha-u)\}^2 \doteq \quad (8.44)$$

$$\doteq \frac{2\pi}{n} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(u) E \{I(\alpha-u)\}^2 du. \quad (8.45)$$

Если $h(u)$ сконцентрировано в узкой полосе пропускания, получим

$$\text{var } I_A(\alpha) = \frac{2\pi}{n} E \{I(\alpha)\}^2 \int_{-\pi}^{\pi} h^2(u) du. \quad (8.46)$$

Как обычно при $\alpha = 0$ или π эта величина удваивается.

Из (8.46) следует, что если интеграл конечен, то дисперсия усредненной I имеет порядок $1/n$. Здесь n — число точек на отрезке от 0 до 2π , в которых измеряется интенсивность (уравнение (8.42)).

Аналогично можно показать, что корреляция

$$\text{corr} \{I_A(\alpha), I_A(\beta)\} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} h(u) h(u-\alpha-\beta) du}{\int_{-\pi}^{\pi} h^2(u) du}. \quad (8.47)$$

8.22. Из (8.46) следует, что при больших n

$$\text{var} \log I_A(\alpha) \doteq \frac{\text{var} I_A(\alpha)}{I_A^2(\alpha)} = \text{constant}. \quad (8.48)$$

В этом одна из причин того, что спектр иногда вычерчивают с логарифмом интенсивности в качестве ординаты. Доверительные интервалы тогда имеют постоянную ширину. Другая причина состоит в том, что ординаты спектра (в отличие от ординат периодограммы) могут быть очень большими, а переход к логарифмам удерживает диапазон их изменения в более узких пределах.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРДИНАТ

8.23. На практике вычисление ординат спектра может выполняться либо непосредственно, либо через сериальные корреляции. Первый способ быстрее, но второй способ дает также коррелограмму и содержит некое указание относительно выбора соответствующих h функций. Имеем

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \left[\sum_{t=1}^n u_t \cos(\alpha t) \right]^2 + \left[\sum_{t=1}^n u_t \sin(\alpha t) \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{n\pi} \sum_{s,t=1}^n u_s u_t [\cos(\alpha t) \cos(\alpha s) + \sin(\alpha t) \sin(\alpha s)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-n+1}^{n-1} c_k \cos(k\alpha), \end{aligned} \quad (8.49)$$

где c_k — выражение типа ковариации, определяемое как

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} u_t u_{t+k}, \quad k > 0. \quad (8.50)$$

При бесконечном n математическое ожидание (8.49) сводится к известному выражению

$$E \{I(\alpha)\} = \frac{\sigma^2}{\pi} w(\alpha) = \frac{\sigma^2}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \rho_k \cos(k\alpha). \quad (8.51)$$

При больших n сумма в (8.49) содержит значительное число членов. Давайте посмотрим, каков будет эффект, если ограничиться усеченной суммой, состоящей лишь из членов до $k = \pm q$, т. е.

$$E \{I_q(\alpha)\} = \frac{1}{n} \sum_{-q}^q \lambda_k c_k \cos(k\alpha), \quad \lambda_k = \lambda_{-k}. \quad (8.52)$$

Константы λ , которые сейчас оставлены неопределенными, выбирают в целях улучшения оценок. В первоначальной форме записи (8.52) эквивалентно равенству

$$I_q(\alpha) = \frac{\sigma^2}{\pi} \sum_{-q}^q \lambda_k \rho_k \cos(k\alpha) \quad (8.53)$$

или

$$\omega_q(\alpha) = \sum_{-q}^q \lambda_k \rho_k \cos(k\alpha). \quad (8.54)$$

Далее в силу уравнения (6.54)

$$\rho_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \omega(\alpha) \cos(k\alpha) d\alpha.$$

Подставляя выражение для ρ_k в (8.54), находим, что

$$\begin{aligned} \omega_q(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \sum_{-q}^q \lambda_k \int_0^\pi \omega(u) \cos(ku) \cos(k\alpha) du = \\ &= \int_{-\pi}^\pi \omega(u) \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{-q}^q \lambda_k \cos(ku) \cos(k\alpha) \right\} du. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Следовательно, использование формулы (8.52) с усеченной суммой оказывается (видимо, довольно неожиданно) эквивалентным сглаживанию спектра весовой функцией

$$h(\beta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-q}^q \lambda_k \cos(k\beta) \cos(k\alpha). \quad (8.56)$$

Легко проверить, что при $\lambda_0 = 1$ она удовлетворяет условиям (8.39) и (8.40). Кроме того,

$$\int_{-\pi}^\pi h^2(\beta) d\beta = \frac{1}{2\pi} \sum_{-q}^q \lambda_k^2 \cos^2(k\alpha). \quad (8.57)$$

8.24. Разные авторы предложили ряд различных h функций. В частности, можно отметить четыре функции, из которых последние три особенно часто встречаются в машинных программах.

(1) Дэниэлл [18] — первый тип функции.

Возьмем

$$\lambda_k = \frac{\sin(kl)}{kl}, \quad l > 0. \quad (8.58)$$

Используя известные интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(px) \cos(qx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi, & |p| > |q|; \\ \frac{1}{4} \pi, & |p| = |q|; \\ 0, & |p| < |q|, \end{cases} \quad (8.59)$$

найдем, что весовая функция аппроксимируется интегралом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin lx}{lx} \left[\cos \left\{ \frac{1}{2} (\alpha + \beta) x \right\} + \cos \left\{ \frac{1}{2} (\alpha - \beta) x \right\} \right] dx = \\ = \begin{cases} \frac{1}{2l}, & -l \leq \alpha - \beta \leq l, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.60)$$

(2) Бартлетт [4].

Возьмем

$$\lambda_k = 1 - \frac{k}{q}.$$

Найдем, что

$$h(\beta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin^2 \left\{ \frac{1}{2} q (\alpha + \beta) \right\}}{q \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right\}} + \frac{\sin^2 \left\{ \frac{1}{2} q (\alpha - \beta) \right\}}{q \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right\}} \right\}. \quad (8.61)$$

(3) Блэкмен — Тьюки [9].

Возьмем

$$\lambda_k = 1 - 2a + 2a \cos \left(\frac{\pi k}{q} \right).$$

Получим

$$\begin{aligned} h(\gamma) = \frac{1}{\pi} \left[(1 - 2a) \frac{\sin \left\{ \left(q + \frac{1}{2} \right) \gamma \right\}}{\sin \left(\frac{1}{2} \gamma \right)} + \right. \\ \left. + a \left\{ \frac{\sin \left\{ \left(q + \frac{1}{2} \right) \gamma + \pi/q \right\}}{\sin \left(\frac{1}{2} \gamma + \pi/q \right)} + \frac{\sin \left\{ \left(q + \frac{1}{2} \right) \gamma - \pi/q \right\}}{\sin \left\{ \frac{1}{2} \gamma - \pi/q \right\}} \right\} \dots \right], \quad (8.62) \end{aligned}$$

где $\gamma = \alpha - \beta$, плюс аналогичный член, получаемый подстановкой $\gamma = \alpha + \beta$.

(4) Парзен [65].

Возьмем

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{k}{q}\right)^2 + 6 \left(\frac{k}{q}\right)^3, & 0 \leq k \leq \frac{1}{2} q, \\ 2 \left(1 - \frac{k}{q}\right)^3, & \frac{1}{2} q \leq k \leq q. \end{cases}$$

Получим

$$h = \frac{3}{4\pi q^3} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{1}{4} \gamma q\right)}{\sin\left(\frac{1}{4} \gamma\right)} \right\}^4. \quad (8.63)$$

На рис. 8.1 и 8.2 (с. 106, 109) показано сглаживание, полученное с помощью функции Парзена (8.63).

8.25. С 1950 г. появилось много работ, посвященных спектральному анализу, для которых, по-видимому, в большей степени характерны изобретательность и математический анализ, чем практическая ценность. Для дальнейшего ознакомления с этой темой можно рекомендовать работы Парзена (например, [65]) и Дэниэlsa [20], а также работы Хэнна [40] и Дарбина [26], в которых рассмотрено влияние на спектр сезонных колебаний. Из книг следует отметить монографии Блэкмена и Тьюки [9], Гренэндера и Розенблата [37], Гренджера и Хатанаки [35] (в которой рассмотрены вопросы спектрального анализа экономических рядов), а также труды симпозиума под редакцией Розенблата [76].

8.26. Важнейшим моментом в спектральном анализе, так же как и в корреляционном, является интерпретация. По-видимому, и коррелограмма, и спектр весьма полезны при выдвижении гипотезы относительно типа модели, которая могла бы дать объяснение поведения данных, или, что не менее ценно, при отклонении некоторых моделей как неадекватных. В любом случае, как мне кажется, графики следует рассматривать в целом, это одна из причин того, почему на практике нет необходимости затрачивать много времени на проверку существенности отдельных сериальных корреляций или ординат спектра.

СЕЗОННОСТЬ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

8.27. Теперь можно заняться вопросом, который в гл. 5 пришлось оставить в стороне,— гармоническим анализом сезонных эффектов. Это поможет дать иллюстрацию использования передаточных функций в оценивании влияния процедуры вычисления скользящих средних на различные компоненты ряда.

Для скользящего среднего с длиной отрезка усреднения $2m + 1$, который можно для удобства взять с симметричными весами от a_{-m} до a_m , передаточная функция сводится к действительной величине

$$T(\alpha) = a_0 + 2 \sum_{j=1}^m a_j \cos(j\alpha). \quad (8.64)$$

Передаточные функции (ПФ) центрированного 12-точечного среднего
и 15-точечного среднего Спенсера [14]

Угловая частота, градусов	ПФ 12-точечного центрированного среднего	ПФ 15-точечного среднего Спенсера	Угловая частота, градусов	ПФ 12-точечного центрированного среднего	ПФ 15-точечного среднего Спенсера
0	1,000	1,000	95	-0,038	-0,002
5	0,955	1,000	100	-0,061	-0,007
10	0,824	1,003	105	-0,064	-0,012
15	0,633	0,984	110	-0,051	-0,015
20	0,409	0,952	115	-0,027	-0,016
25	0,188	0,895	120	0	-0,013
30	0	0,809	125	0,022	-0,008
35	-0,133	0,696	130	0,034	-0,003
40	-0,198	0,564	135	0,034	0
45	-0,201	0,425	140	0,026	0,001
50	-0,155	0,293	145	0,013	0
55	-0,080	0,180	150	0	-0,003
60	0	0,094	155	-0,009	-0,005
65	0,065	0,037	160	-0,013	-0,005
70	0,103	0,006	165	-0,011	-0,004
75	0,109	-0,005	170	-0,006	-0,003
80	0,086	-0,005	175	-0,002	-0,001
85	0,045	-0,002	180	0	0
90	0	0			

Эффект вычисления такого среднего определяется умножением ординат спектра на квадрат модуля $T(\alpha)$. При заданных весах можно подчитать T для ряда значений от 0 до π и отсюда определить эффект, проявляющийся в «отфильтрованном» ряде. Рассмотрим, в частности, передаточные функции центрированного 12-точечного скользящего среднего и 15-точечного среднего Спенсера. В табл. 8.3 (см. [14]) представлены эти передаточные функции. Например, для угловой частоты 45° значение функции для центрированного скользящего среднего вычисляется здесь так:

$$\frac{1}{24} [2 + 2 \{ \cos 45^\circ + 2 \cos 90^\circ + 2 \cos 135^\circ + 2 \cos 180^\circ + 2 \cos 225^\circ + \cos 270^\circ \}] = \frac{1}{24} \{ 2 + 2 (-2 - \sqrt{2}) \} = -0,201.$$

После угловой частоты 45° , соответствующей $1/8$ цикла в единицу времени (месяц) или длине волны в 8 месяцев, значения передаточной функции центрированного среднего падают до 10% или ниже. Исключение тренда не сильно влияет на спектр ряда в области циклов с более короткой длиной волны; для более длинных циклов эффект существует и, если тренд исключается, они обычно большей частью исключаются вместе с ним. 15-точечное среднее Спенсера оказывает влияние того же рода, но в целом спектр остатков искажается значительно меньше. Общий эффект от той или другой процедуры состоит в том, что вместе с трендом исключается некоторая часть или все длинные циклы, но более короткие циклы остаются в основном нетронутыми.

8.28. Поэтому после соответствующего исключения тренда мы, уверенны в том, что высокие частоты были затронуты лишь незначительно, можем приступить к определению сезонной компоненты. Более того, так как по определению сезонность имеет точную периодичность, ожидается, что ее можно представить суммой гармоник, как это делается в методе Фурье, а именно гармониками с регулярными частотами $\alpha_k = 2\pi k/12$ и длинами волн в 12; 6; 4; 3; 2,4 и 2 месяца. Таким образом, если x_t — отклонение от тренда в месяце t , а всего месяцев 12 p , то имеем

$$a_j = \frac{2}{12p} \sum_{t=1}^{12p} x_t \cos(\alpha_j t), \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad (8.65)$$

$$b_j = \frac{2}{12p} \sum_{t=1}^{12p} x_t \sin(\alpha_j t), \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad (8.66)$$

$$a_6 = \frac{1}{12p} \sum_{t=1}^{12p} x_t \cos(a_6 t). \quad (8.67)$$

Тогда сезонное движение будет представляться совокупностью 11 констант.

8.29. Определив таким образом сезонное движение, если это необходимо, можно найти его спектр, вычесть его из преобразованного спектра и умножением на $1 - T(\alpha)$ «восстановить» спектр ряда с исключенной сезонностью¹. Небольшая модификация даст нам возможность учесть скользящие сезонные эффекты. Действительно, ряд можно анализировать год за годом, принимая в (8.65) $p = 1$, и, следовательно, получить 11 годовых рядов 11 констант. Каждый из этих рядов можно сгладить и экстраполировать, а полученные в результате значения использовать для оценки сезонной компоненты для любого данного года. Так как постоянные коэффициенты разложения Фурье некоррелированы, сглаживание можно выполнять независимо для каждого ряда. Бурман [14] использовал метод, основанный на изложенных идеях, для корректировки на сезонность некоторых финансовых рядов. Он брал аддитивную модель и вместо 15-точечного среднего Спенсера использовал 13-точечное среднее. Проектировки на область последних значений ряда, куда симметричное скользящее среднее не доходит, были сделаны им на основе методов экспоненциального прогнозирования, которые мы рассмотрим в одной из последующих глав.

8.30. Спектральные методы использовались также (см. [86]) для исследования адекватности методов элиминирования сезонности. Уже в течение некоторого времени известно, что спектры экономических рядов очень часто имеют форму J , т. е. высокие значения оказываются при низких частотах (см. [35]). Если из такого ряда устранить сезонность, например, с помощью уже упоминавшегося метода Census X-11, а эта программа переусердствует, удаляя слишком много, то эти высо-

¹ Последняя часть фразы некорректна. — *Примеч. пер.*

кие значения обнаруживаются в отклонениях спектра в точках, соответствующих 6 месяцам, 4 месяцам и т. д.

8.31. Независимо от того, оценены сезонные эффекты методами из гл. 5 или с помощью спектрального анализа, по-видимому, лучше устранить их прежде, чем переходить к дальнейшему анализу ряда. В некоторых методах автопроекции (их мы опишем далее) сезонный элемент оставляют в ряде, который подлежит прогнозированию. Дальнейшие исследования могут в известной степени разъяснить этот вопрос; в настоящее время такой выбор во многом определяется личными предпочтениями исследователя.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Данные Бевериджа о ценах на пшеницу недавно были вновь исследованы Гренджером и Хугсом [36], которые пришли к выводу, что они имеют циклические колебания длительностью примерно в 13,3 года. Кендэл [47] и Сарган [78] рассматривали этот ряд как адекватно представляемый авторегрессионным процессом Юла.

2. Что касается типа «окна», используемого для сглаживания спектра, то предпочтение отдается различным вариантам, однако вариант Парзена имеет то преимущество, что он не приводит к отрицательным значениям ординат, в то время как некоторые другие могут к ним приводить.

3. Несмотря на то что спектр и коррелограмма однозначно определяют друг друга, ни то, ни другое не определяет исходного ряда.

9

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
МЕТОДАМИ
АВТОПРОЕКЦИИ

9.1. Английский язык богат словами, которые означают попытку заглянуть в будущее¹: «предсказание», «предвидение», «прогнозирование», «предзнаменование» (даже «предвкушение»); не говоря уже о таких выражениях, как «гадание с зеркалом или магическим кристаллом». Но только два из них обозначают численные методы прогнозирования, а именно² «прогнозирование» и «предсказание». Эти два термина часто употребляются как синонимы. Если же имеется какая-то разница, то термин «прогнозирование» применяется, видимо, к специфическим событиям количественного типа, а «предсказание» — больше для словесного описания сопутствующих обстоятельств: большинство из нас обычно говорит о *прогнозировании* результатов общих выборов и о *предсказании* их влияния на внешнюю политику. Мы не будем в этой главе пытаться проводить тонкие различия между этими двумя терминами.

9.2. Методы, применяемые для прогнозирования, не являются независимыми от рассматриваемого интервала времени или от назначения прогнозов. Вообще говоря, выделяют два случая: (1) можно потребовать прогноз, который должен стать основой нашей собственной деятельности, как, например, при прогнозировании продаж; (2) какое-либо учреждение может дать прогноз, который будет использоваться различными людьми для всевозможных целей, как, например, при прогнозировании населения или при прогнозировании правительственными учреждениями темпов роста в секторах экономики. Осторожный прогнозист (а при прогнозировании необходимо быть осторожным, так как об ошибках помнят значительно дольше, чем об успехах) взвешивает все имеющиеся в его распоряжении методы, так же как мастерской осматривает свой ящик с инструментами для того, чтобы воспользоваться тем из них, который наиболее отвечает данным обстоятельствам.

¹ В оригинале: forecasting, foretelling, foreseeing (even foretasting); prediction and prevision; prognostication; «crystalgazing». — Примеч. пер.

² В оригинале: forecasting and prediction. — Примеч. пер.

9.3. Обычно эту тему делят на три части: краткосрочное, среднесрочное и долгосрочное прогнозирование. Эти термины связаны с исследуемыми объектами. В метеорологии, например, «краткосрочный» может означать прогноз только на два-три дня вперед, а «среднесрочный» охватывает несколько последующих месяцев; в экономике же «краткосрочный» означает прогноз на несколько месяцев или, может быть, на год, «среднесрочный» — это обычно прогноз на последующие пять лет, а все, что лежит за этим пределом, называется «долгосрочным». Рассматриваемые периоды очень часто определяются сторонними факторами: месяцем — для продаж; годом — для бухгалтерского учета (по крайней мере иногда), пятилеткой — для университетов или британских избирательных кампаний и т. д.

9.4. Мы можем не обсуждать неопределенные, имеющие описательный характер, вопросы долгосрочного прогнозирования и прогнозирования технологии. Но несомненно, что эти вопросы полезно рассмотреть и обсудить, хотя нет большого смысла в попытке найти количественную определенность и речь можно вести лишь в самых общих выражениях. Существует несколько исключений из этого правила, например прогнозирование численности населения на следующие тридцать лет, хотя даже здесь было бы рискованным слишком полагаться на числовые оценки. Такое прогнозирование не может опираться на уточненные математические или статистические методы, а некоторые считают, что оно вообще не может осуществляться с помощью каких-либо методов, уточненные они или нет.

9.5. Мы остановимся на среднесрочном и краткосрочном прогнозировании. Прежде чем переходить к более совершенным методам, можно напомнить, что в некоторых случаях прогнозирование может быть успешно выполнено просто посредством наблюдения явления с интересующей нас стороны. Именно так прогнозируется погода в конкретном месте — учреждаются станции наблюдения за погодой. Спрос на образование через двадцать лет можно прогнозировать с определенной достоверностью, так как довольно большое число молодых мужчин и женщин, которые пройдут через систему образования, уже родились. Не следует относиться с презрением к использованию этих бесхитростных методов в бихевиористических науках¹ — объем экспорта в следующем месяце можно предсказать по книге заказов за текущий и предыдущие месяцы. Известно утверждение, согласно которому хорошие прогнозы объема потребления населением товаров длительного пользования в следующем году можно получить с помощью обследований, проводимых в текущем году методом опроса населения относительно намерений делать покупки.

АВТОПРОЕКЦИЯ

9.6. Первым делом следует рассматривать метод, в котором имеющийся в наличии ряд экстраполируется вперед, а другие ряды, которые, возможно, являются сопутствующими, оставляют без внимания.

¹ Здесь: в общественных науках, главным образом в экономике, социологии, демографии. — *Примеч. пер.*

Мало что можно сказать об особенностях разложения на компоненты при прогнозировании по сравнению с тем, что подразумевается в самом разложении: мы разлагаем на тренд, краткосрочную осцилляцию, сезонный эффект и случайный остаток; первые три элемента проектируем вперед, собирая их вместе сложением или умножением, в зависимости от обстоятельств, с тем чтобы сформировать прогноз. Остается лишь одно, а именно исследовать ошибки прогноза.

9.7. В обычных статистических исследованиях, как правило, подсчитывают стандартную ошибку оценки или окружают оценку доверительными интервалами, выражая на языке вероятностей степень уверенности в том, что она лежит в заданной области. Все эти действия основываются на допущении, что выборка, с которой мы работаем, извлечена случайным образом из генеральной совокупности. Прямое применение таких процедур при прогнозировании в общем случае не является законным, что бы там ни говорилось противоположного в литературе. При прогнозировании, осуществляя разложение, мы строим модель. Любые ошибки прогноза будут появляться не только благодаря эффекту выборки в обычном смысле, но и вследствие ошибок спецификации этой модели. Правоммерно, конечно, ставить вопрос таким образом: каковы возможные ошибки, если мы аппроксимируем данные кубическим полиномом, когда тренд действительно представляется кубической кривой? Но это не дает ответа на вопрос о том, какими были бы ошибки, если бы мы аппроксимировали данные квадратическим полиномом. Из рекурсивной природы процедуры в программе Census Mark II, например, очевидно следует, что эти ошибки могут быть ошибками спецификации на различных этапах исследования. Стандартные ошибки для результатов, полученных по такой программе, вычислить трудно — концепция стандартной ошибки, безусловно, нуждается в каком-то пересмотре.

9.8. Самый верный способ оценивания надежности метода прогнозирования — это исследование его работы за какой-либо период. По ряду наблюдаемых ошибок можно сформировать хорошую эмпирическую оценку ошибки, которая, вероятно, встретится в будущем. К сожалению, прямое применение этого принципа, как правило, требует больше труда, чем мы обычно готовы на это затратить, так как если мы идем назад в прошлое и исследуем, какие были ошибки, то нам нужно вычислять прогноз заново в каждой точке прошлого и делать это только на основе того, что действительно было известно в тот момент. Это обычно очень утомительная процедура и в известном отношении она не дает ответа на вопрос, касающийся будущего, так как к текущему моменту можно накопить достаточный опыт по улучшению прогнозов и уменьшению ошибок, допускаясь некоторое время тому назад. Разумным компромиссом оказывается вычисление ошибок для прошлых моментов времени на основе текущих значений. Это может привести к недооценке истинных ошибок, но по крайней мере мы получаем некоторое представление об ошибках в будущем.

9.9. При обсуждении весов, используемых при построении тренда в начале ряда, мы отмечали (см. раздел 3.10), что значения, получаемые в крайних точках полинома, намного менее надежны, чем в точках,

близких к его началу. Это справедливо в общем случае, и когда полином экстраполируется *за пределы* отрезка, на котором он строился, ошибки оценок возрастают, конечно, весьма быстро.

Пример 9.1.

Рассмотрим очень простой случай подбора прямой линии к трем значениям, заданным в моменты времени $-1, 0, 1$. Прямая будет выражаться уравнением

$$y = \bar{y} + \frac{1}{2} (-u_{-1} + u_1) t = \frac{1}{6} \{u_{-1}(2 - 3t) + 2u_0 + (2 + 3t)u_1\}. \quad (9.1)$$

Применительно к случайному ряду с дисперсией $\text{var } \varepsilon$ это дает дисперсию отклонений относительно значения истинной прямой, равную величине

$$\text{var } \varepsilon \frac{1}{36} \{(2 - 3t)^2 + 2^2 + (2 + 3t)^2\} = \frac{1}{6} (2 + 3t^2) \text{var } \varepsilon. \quad (9.2)$$

Таким образом, при $t = 1, 2, 3, 4$ и т. д. степень уменьшения ошибки изменяется как квадратичский полином от t .

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ

9.10. Любой метод построения систематических функций для описания наблюдений до сих пор основывался на критерии наименьших квадратов, в соответствии с которым все наблюдения имеют равный вес. Однако можно почувствовать, что недавним точкам следует придать в некотором смысле бóльший вес, а наблюдения, относящиеся к далекому прошлому, должны иметь по сравнению с ними меньшую ценность (их следует дисконтировать). До некоторой степени мы учитывали это в скользящих средних с конечной длиной отрезка усреднения, где значения весов, приписываемых последней группе $2m + 1$ значений, не зависят от предшествующих значений. Теперь обратимся к другому методу выделения более свежих наблюдений.

Рассмотрим ряд весов, пропорциональных порядку множителя β , а именно $1, \beta, \beta^2, \beta^3$ и т. д. Так как их сумма должна равняться единице и

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j = \frac{1}{1 - \beta}, \quad (9.3)$$

весами фактически будут $(1 - \beta), (1 - \beta)\beta, (1 - \beta)\beta^2$ и т. д. Мы предполагаем, что $|\beta| < 1$. Рассмотрим, кроме того, процесс, равный сумме постоянной α_0 и случайного остатка ε , имеющего нулевое математическое ожидание. В момент t строим предиктор:

$$a_0(t) = (1 - \beta) \{x_t + \beta x_{t-1} + \beta^2 x_{t-2} + \dots\} = (1 - \beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j x_{t-j}. \quad (9.4)$$

Здесь благодаря тому, что $|\beta| < 1$, веса уменьшаются экспоненциально. Заменив t на $t - 1$, получаем

$$a_0(t - 1) = (1 - \beta) \{x_{t-1} + \beta x_{t-2} + \dots\}. \quad (9.5)$$

Отсюда

$$a_0(t) = (1 - \beta)x_t + \beta a_0(t - 1). \quad (9.6)$$

Эта формула имеет некоторое сходство с формулой, выражающей марковский процесс, но при переходе от одного момента времени к другому значения x_t , выступающие в роли остатка, не являются независимыми. Следовательно, если константа β известна, оценку $a_0(t)$ в момент t можно построить исходя из оценки, сделанной в момент $t - 1$, путем прибавления к ней фактически наблюдаемого в момент t значения, умноженного на $(1 - \beta)$. Это значение может являться оценкой будущих членов ряда.

9.11. Пусть e_t будет ошибкой, сделанной при построении в момент $t - 1$ прогноза на одну единицу времени вперед, т. е. при прогнозировании величины x_t . Другими словами,

$$x_t - a_0(t - 1) = e_t. \quad (9.7)$$

Подставляя в (9.6) найденное отсюда $a_0(t - 1)$, получаем

$$a_0(t) = x_t - \beta e_t = a_0(t - 1) + (1 - \beta)e_t. \quad (9.8)$$

Таким образом, прогноз в момент t является прогнозом, сделанным в момент $t - 1$, к которому добавляется последняя ошибка, умноженная на $(1 - \beta)$.

Формула (9.4), с которой мы начали, сама по себе бесполезна, так как она в явном виде содержит все прошлые наблюдения. Однако благодаря структуре оценки прогноз можно сделать в любой момент времени, основываясь только на текущем наблюдении и информации, полученной в прошлый момент времени.

9.12. Таким образом, этот метод имеет два ценных свойства. Если β определено, то никаких знаний о прошлом, за исключением величины, полученной в предыдущий момент времени, не требуется. Это быстрый метод и обновление оценки при переходе к следующей точке осуществляется легко. Из (9.8) видно, что если значения ошибки достаточно низки, прогнозы сравнительно мало чувствительны к изменениям величины β . Существует, конечно, случай, когда требуются все прошлые данные, а именно при оценивании β ; но это оценивание обычно производят через очень большие интервалы времени, а не каждый раз, когда требуется прогноз.

На деле такое оценивание оказывается не очень легким и требует программ для проведения расчетов на ЭВМ. Фактически необходимо минимизировать по β сумму квадратов ошибок:

$$\sum_{-\infty}^{t_0} \left\{ x_t - (1 - \beta) \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j x_{t-j} \right\}^2. \quad (9.9)$$

Дифференцирование ее по β дает в высшей степени громоздкое уравнение для β . На практике количество членов в сумме $\sum \beta^j x_{t-j}$ ограничивается так, что ее последний член будет соответствовать некоторой точке $t = k$, при которой β^j можно считать малым, а минимизация осуществляется методом последовательных приближений. Повторное вычисление с ограничением числа членов суммы при $t = k + 1$, а если

необходимо, то при $k + 2$ и т. д., покажет, достигнуто ли приемлемое приближение β . Большая точность, как отмечалось, здесь не нужна.

9.13. Можно считать также, что a_0 определено минимизацией *взвешенной* суммы квадратов

$$\sum_{j=0}^{\infty} (x_{t-j} - a_0)^2 \beta^j. \quad (9.10)$$

Дифференцирование по β приводит к оценке (9.4), которую можно в определенном смысле считать оптимальной.

9.14. Изложенный метод является простейшим случаем того, что называется «адаптивным» прогнозированием¹. Точное значение термина «адаптивный» неясно. В известном смысле каждый метод прогнозирования адаптивный, если он учитывает любые наблюдения, сделанные с момента последнего прогноза. За исключением, может быть, некоторых случаев, β не «адаптируется». Общее значение термина заключается, по-видимому, в том, что «адаптивное» прогнозирование позволяет обновлять прогнозы с минимальной задержкой и несложными математическими вычислениями, например по уравнению (9.8).

Пример 9.2.

Предположим, что $\beta = 0,6$ и что оценка продаж некоторого товара, сделанная нами месяц назад, равна 120. Если оказывается, что в действительности объем продаж составляет 130, то следующую оценку мы получаем так:

$$120 + (1 - 0,6) \{130 - 120\} = 124.$$

Поскольку мы оцениваем единственный коэффициент, это число 124 можно использовать для прогнозирования не только на один, но и на несколько шагов вперед. Это возможно благодаря очень большой простоте принятой нами модели. В общем случае прогнозы для разных периодов будут различны.

9.15. Теперь обобщим этот метод на случай, когда истинное значение определяется линейной функцией $a_0 + a_1 t$. Как и прежде, при заданном β минимизируем

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{x_{t-j} - a_0 - a_1 j\}^2 \beta^j. \quad (9.11)$$

Это приводит к оценивающим уравнениям:

$$(1 - \beta) \sum x_{t-j} \beta^j - a_0 + (1 - \beta) \sum j \beta^j a_1 = 0; \quad (9.12)$$

$$\sum x_{t-j} j \beta^j - a_0 \sum j \beta^j + a_1 \sum j^2 \beta^j = 0. \quad (9.13)$$

Далее

$$\sum j \beta^j = \beta / (1 - \beta)^2; \quad \sum j^2 \beta^j = \beta (1 + \beta) / (1 - \beta)^3. \quad (9.14)$$

¹ См.: Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. М., Статистика, 1979. — *Примеч. пер.*

Оценивающие уравнения приводятся к виду

$$(1 - \beta) \sum x_{t-j} \beta^j - a_0 + a_1 \frac{\beta}{1 - \beta} = 0; \quad (9.15)$$

$$(1 - \beta)^2 \sum x_{t-j} j \beta^j - \beta a_0 + a_1 \frac{\beta(1 + \beta)}{1 - \beta} = 0. \quad (9.16)$$

Запишем

$$S_1(t) = (1 - \beta) \sum_{j=0}^{\infty} x_{t-j} \beta^j.$$

Эту операцию можно рассматривать как первое сглаживание x_t . Давайте получим второе сглаживание:

$$\begin{aligned} S_2(t) &= (1 - \beta) \{S_1(t) + \beta S_1(t-1) + \beta^2 S_1(t-2) + \dots\} = \\ &= (1 - \beta)^2 \{x_t + \beta x_{t-1} + \beta^2 x_{t-2} + \dots + \\ &\quad + \beta x_{t-1} + \beta^2 x_{t-2} + \dots + \\ &\quad + \beta^2 x_{t-2} + \dots\} = \\ &= (1 - \beta)^2 \sum x_{t-j} \beta^j (j+1) = (1 - \beta)^2 \sum x_{t-j} j \beta^j + (1 - \beta) S_1. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Тогда (9.15) и (9.16) можно записать как

$$S_1 - a_0 + \frac{\beta}{1 - \beta} a_1 = 0; \quad (9.18)$$

$$S_2 - (1 - \beta) S_1 - \beta a_0 + \frac{\beta(1 + \beta)}{1 - \beta} a_1 = 0, \quad (9.19)$$

что дает

$$S_1 = a_0 - \frac{\beta}{1 - \beta} a_1, \quad (9.20)$$

$$S_2 = a_0 - \frac{2\beta}{1 - \beta} a_1, \quad (9.21)$$

или в альтернативной записи

$$a_0 = 2S_1 - S_2; \quad (9.22)$$

$$a_1 = -\frac{1 - \beta}{\beta} (S_2 - S_1). \quad (9.23)$$

9.16. Теперь мы хотим выразить a_0 и a_1 в момент t через их значения в момент $t - 1$. Известно, что, так же как и в (9.6),

$$S_1(t) = (1 - \beta)x_t + \beta S_1(t - 1) \quad (9.24)$$

и на том же основании

$$S_2(t) = (1 - \beta)S_1(t) + \beta S_2(t - 1) = \quad (9.25)$$

$$= (1 - \beta)^2 x_t + \beta(1 - \beta)S_1(t - 1) + \beta S_2(t - 1). \quad (9.26)$$

Тогда из выражений от (9.20) до (9.23) находим, что

$$a_0(t) = (1 - \beta^2)x_t + \beta^2 a_0(t - 1) + \beta^2 a_1(t - 1); \quad (9.27)$$

$$\begin{aligned} a_1(t) &= (1 - \beta)^2 x_t - (1 - \beta)^2 a_1(t - 1) - (1 - \beta)^2 a_0(t - 1) + \\ &\quad + a_1(t - 1). \end{aligned} \quad (9.28)$$

Записывая ошибку прогнозирования на один шаг вперед как

$$e_t = x_t - a_0(t-1) - a_1(t-1), \quad (9.29)$$

имеем

$$a_0(t) = a_0(t-1) + a_1(t-1) + (1 - \beta^2)e_t; \quad (9.30)$$

$$a_1(t) = a_1(t-1) + (1 - \beta)^2 e_t. \quad (9.31)$$

Эти формулы дают нам возможность обновлять оценки на основе оценок прошлого года и ошибки. Прогноз на один шаг вперед будет равен:

$$a_0(t) + a_1(t) = a_0(t-1) + 2a_1(t-1) - 2\beta(1 - \beta)e_t. \quad (9.32)$$

9.17. Рассмотренную выше процедуру, разработанную в основном Брауном [13], можно обобщить на случай полиномиальных трендов более высокого порядка n , при этом лишь алгебраические выражения будут сложнее. Например, при квадратическом тренде $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ формулы обновления выглядят следующим образом:

$$a_0(t) = a_0(t-1) + a_1(t-1) + a_2(t-1) + (1 - \beta^3)e_t; \quad (9.34)$$

$$a_1(t) = a_1(t-1) + 2a_2(t-1) + \frac{3}{2}(1 - \beta)(1 - \beta^2)e_t; \quad (9.35)$$

$$a_2(t) = a_2(t-1) + \frac{1}{2}(1 - \beta)^3 e_t. \quad (9.36)$$

МОДЕЛЬ ХОЛЬТА—УИНТЕРСА

9.18. Справедливо, конечно, задать вопрос, не слишком ли сильным является ограничение, состоящее в том, что такая модель содержит единственный параметр β . Хольт [44] первым рассмотрел простые модели обновления этого типа и на самом деле использовал два параметра. Метод был развит Уинтерсом [90] так, чтобы он охватывал сезонные эффекты. Поэтому модель Хольта—Уинтерса содержит три параметра. Прогноз (сделанный в момент t) на k единиц времени вперед при линейном тренде равен

$$\{a_0(t) + a_1(t)k\}s(t+k-L), \quad (9.37)$$

где s — коэффициент сезонности, а L — число точек ряда, наблюдаемых в пределах одного года (например, при месячных данных $L = 12$). Следовательно, сезонность в этой формуле представлена мультипликативно. Формулы обновления, которые приводятся нами без вывода, имеют вид:

$$a_0(t) = \beta_1 \frac{x_t}{s(t-L)} + [(1 - \beta_1)\{a_0(t-1) + a_1(t-1)\}]; \quad (9.38)$$

$$s(t) = \beta_2 \frac{x_t}{a_0(t)} + (1 - \beta_2)s(t-L); \quad (9.39)$$

$$a_1(t) = \beta_3 \{a_0(t) - a_0(t-1)\} + (1 - \beta_3)a_1(t-1), \quad (9.40)$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — параметры.

9.19. Оценивание констант — одна из трудностей при построении такой модели на практике. Обычно берут ряд возможных значений, для каждого набора значений вычисляют сумму квадратов остатков и на основе сравнения сумм выбирают константы.

СЕЗОННАЯ МОДЕЛЬ ХАРРИСОНА

9.20. Харрисон [41] модифицировал модель Хольта—Уинтерса, выразив сезонный элемент через гармоники, аналогично тому, как сезонный эффект обрабатывается у Бурмана, упоминавшегося в разделе 8.27. Определим

$$a_h = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^L s(t-L+j) \cos k\lambda_j; \quad (9.41)$$

$$b_h = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^L s(t-L+j) \sin k\lambda_j, \quad (9.42)$$

где

$$\lambda_j = \frac{2(j-1)\pi}{L} - \pi, \quad (9.43)$$

и сглаженные коэффициенты сезонности будут выражаться величинами

$$s(t-L+j) = 1 + \sum_k \{a_h \cos(k\lambda_j) + b_h \sin(k\lambda_j)\}, \quad (9.44)$$

где суммирование в правой части охватывает те гармоники, которые считаются существенными. Далее Харрисон получает формулы обновления, которые можно найти в [41].

МОДЕЛЬ БОКСА—ДЖЕНКИНСА

9.21. Бокс и Дженкинс [11] вновь обратились к методу, предназначенному для обработки авторегрессионных рядов, в котором не делается никаких априорных допущений относительно дисконтирующих коэффициентов. Они решают проблему исключения тренда путем перехода к разностям ряда и допускают коррелированность остатков, представляя их скользким средним случайных ε . Таким образом, обозначая символом ∇ разность назад,

$$\nabla u_t = u_t - u_{t-1}, \quad (9.45)$$

Бокс и Дженкинс рассматривают (без учета сезонных эффектов) модель

$$\begin{aligned} \nabla^d u_t - \alpha_1 \nabla^d u_{t-1} - \alpha_2 \nabla^d u_{t-2} - \dots - \alpha_p \nabla^d u_{t-p} = \\ = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Если ввести оператор сдвига назад B , определяемый соотношением $Bu_t = u_{t-1}$, так что $\nabla = 1 - B$, то предыдущее выражение можно записать в виде

$$\alpha(B)(1-B)^d u_t = \beta(B)\varepsilon_t, \quad (9.47)$$

где $\alpha(B)$ и $\beta(B)$ — полиномы от B порядка p и q .

9.22. Как обычно одной из основных проблем при применении такой модели является определение эффективных оценок ее параметров.

Здесь имеются три типа параметров¹, а именно порядок разности d , авторегрессионные параметры α , число которых равно p , параметры скользящего среднего β , число которых равно q . Оказывается, что на практике не требуется значение любого из параметров p , d , q , превышающее 2, но даже и в этом случае проблема оценивания остается довольно сложной. Полное изложение метода можно найти в книге Бокса и Дженкинса [11], а в общих чертах процедура выглядит следующим образом: вначале вычисляют разности ряда до тех пор, пока они не окажутся стационарными относительно математического ожидания и дисперсии, и отсюда получают оценку d . (Если имеются какие-либо сомнения, то может потребоваться рассмотрение нескольких соседних значений d .) Задача тогда сводится к оцениванию констант в модели авторегрессия — скользящее среднее:

$$\alpha(B)v_t = \beta(B)\varepsilon_t, \quad (9.48)$$

где $v(t)$ — разность порядка d исходного ряда. Величины ε , стоящие в правой части (9.48), будут отсутствовать в выражении для v_{t-q-1} . Если умножить обе части на v_{t-q-j} ($j \geq 1$) и взять математическое ожидание, то правая часть будет равна нулю.

Обозначая сериальную ковариацию порядка k через c_k , имеем

$$c_{q+1} - \alpha_1 c_q - \alpha_2 c_{q-1} - \dots - \alpha_p c_{q-p+1} = 0 \quad (9.49)$$

и $(p-1)$ последующих уравнений, получаемых путем умножения v_t на v_{t-q-2} , и т. д. Решение этих уравнений дает нам первые оценки параметров α (к сожалению, из-за выборочных колебаний сериальных ковариаций более высокого порядка эти оценки не очень надежны). В таком случае с помощью этих оценок можно определить левую часть уравнения (9.48), а сериальные корреляции результатов дают нам уравнения относительно β , которые, к сожалению, оказываются квадратическими. Решение этих уравнений приводит к первым оценкам параметров β . Далее эти предварительные оценки коэффициентов α и β используются как отправные в машинной программе, переоценивающей их путем минимизации суммы квадратов остатков, т. е. разностей между левой и правой частями в (9.48).

Дальнейшие исследования могут привести к более совершенным методам выполнения этой процедуры (сравните разделы 12.8 и 12.9).

9.23. Теперь определим ряд коэффициентов ψ_j с помощью выражения

$$\alpha(B)(1-B)^d \{1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \dots\} = \beta(B). \quad (9.50)$$

Мы видим, что

$$u_{t+k} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon(t+k-j). \quad (9.51)$$

Аналогично, определяя коэффициенты π_j с помощью выражения

$$\alpha(B)(1-B)^d = \{1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots\} \beta(B), \quad (9.52)$$

¹ Кроме перечисленных автором параметров неизвестной является также дисперсия $\text{var } \varepsilon$. — *Примеч. пер.*

имеем

$$u_{t+k} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j u_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k}. \quad (9.53)$$

При заданных p, d, q, α, β можно без труда определить значения коэффициентов ψ и π . Вообще значения π довольно быстро уменьшаются до нуля, и в действительности обоснование применения метода Бокса—Дженкинса состоит в выполнении условия, чтобы π образовывали сходящийся ряд. Поэтому уравнение (9.53) более всего подходит для прогнозирования. Пусть прогноз (сделанный в момент t) на k единиц времени вперед будет, так же как в (9.51), линейной функцией остатков:

$$F_k(t) = p_k \varepsilon_t + p_{k+1} \varepsilon_{t-1} + p_{k+2} \varepsilon_{t-2} + \dots, \quad (9.54)$$

где теперь мы не делаем никаких предположений относительно коэффициентов p . Тогда средний квадрат ошибки прогноза равен:

$$\begin{aligned} E \{v_{t+k} - F_k(t)\}^2 &= E \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+k-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j} p_{k+j} \right\}^2 = \\ &= \text{var } \varepsilon \left\{ 1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{k-1}^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{j+k} - p_{j+k})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Он принимает минимальное значение при $\psi_{j+k} = p_{j+k}$. В таком случае

$$F_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{k+j} \varepsilon_{t-j}, \quad (9.56)$$

и так как

$$v_{t+k} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

имеем

$$v_{t+k} = F_k(t) + e_k(t), \quad (9.57)$$

где $e_k(t)$ — ошибка, сделанная в момент t при прогнозировании на k единиц времени. Можно, конечно, дать определение ошибки и таким образом; дело в том, что оно соответствует оптимуму для прогнозов, основывающихся на линейных функциях от ε или v , при использовании критерия наименьших квадратов.

9.24. Из этого при том, что мы говорили ранее об ошибках, появляющихся вследствие выбора неверной модели, следует, что дисперсия ошибки прогнозирования на k единиц времени, с учетом (9.57) и (9.55), равна

$$\text{var } \varepsilon \{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{k-1}^2\}. \quad (9.58)$$

9.25. Эквивалентно можно записать:

$$F_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j F_{k-j}(t) + \varepsilon_{t+k}. \quad (9.59)$$

Вычисление прогноза тогда предполагает: (1) замену будущих ϵ их нулевым математическим ожиданием, (2) определение прошлых значений ϵ как ошибок прогнозирования на один шаг $u_{t-j} - F_1(t-j-1)$, (3) замену будущих u их прогнозами, сделанными в момент t .

9.26. Модель Бокса—Дженкина можно приспособить для учета сезонных колебаний. Действительно, предлагается брать разности членов с лагами 12 (для месячных данных), т. е. получать разности данных за одноименные месяцы, а также и последовательные разности, так что модель принимает вид:

$$\alpha(B)(1-B)^d(1-B^{12})u_t = \beta(B)(1-B^{12})\epsilon_t. \quad (9.60)$$

Могут быть добавлены и другие порядки $(1-B^{12})$, и в этом случае нужно будет определять дополнительные параметры.

9.27. Обширные сопоставления различных методов адаптивного прогнозирования были предприняты Райдом [73]. Он взял 113 временных рядов, состоящих из годовых, квартальных и месячных данных, описывающих в основном макроэкономические переменные Соединенного Королевства, а также США. В некоторых случаях ряды были короткими, например ряды квартальных данных с количеством членов менее 60. Возможно множество различных сопоставлений, и не все методы применялись для обработки каждого ряда (так как некоторые из них не содержали сезонных составляющих). Тем не менее результаты, представленные в табл. 9.1, дают общую картину. При получении этой таблицы в качестве критерия «оптимальности» использовался минимум ошибок прогнозирования на один шаг вперед. Райд проводил сопоставления и при более длительных интервалах упреждения. Результаты были аналогичными, но методы Брауна и Харрисона дали сравнительно лучшие результаты, хотя и не настолько, чтобы превзойти метод Бокса—Дженкина. С другой стороны, были и такие типы рядов, для которых отдельные методы «работали» особенно хорошо; например, метод Харрисона проявил себя таким образом при прогнозировании численности безработных, которая имеет заметные сезонную и нерегулярную компоненты.

Таблица 9.1
Сравнение методов прогнозирования на 113 рядах [73]

Метод	Число рядов		Процент
	для которых метод применялся	для которых метод оказался наилучшим	
Бокса — Дженкина	113	76	67
Брауна	113	2	2
Брауна, модифицированный*	87	18	21
Уинтерса	69	10	15
Харрисона	47	7	15

* Модифицированный метод Брауна — это метод, в котором Райд, вычисляя сериальную корреляцию ошибок, строил для этих ошибок авторегрессию первого порядка.

9.28. Очевидно, что эффективность адаптивного метода прогнозирования зависит от многих факторов, а на практике исследователь имеет довольно большую свободу выбора не только типа модели, но и количества вводимых в нее параметров. Минимизация является лишь одним из критериев, которые можно использовать. Вот другие:

(1) количество усилий, затрачиваемых на построение модели, и наличие готовых машинных программ;

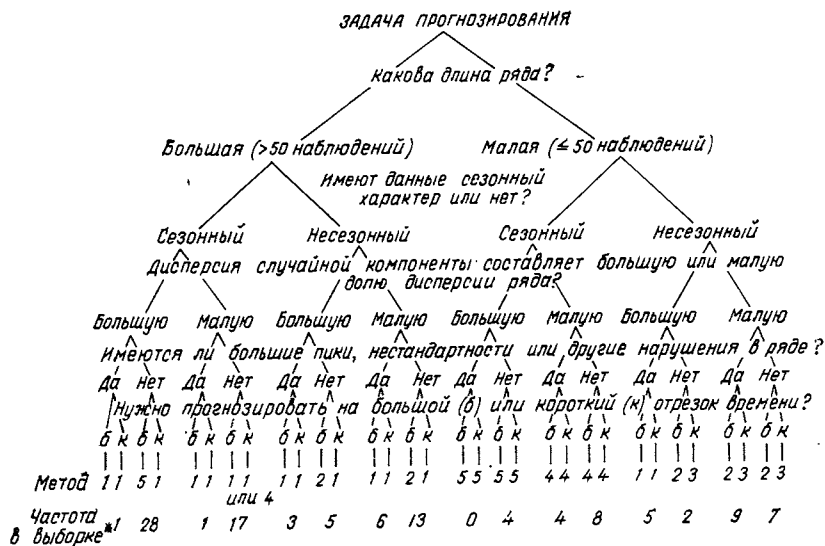
(2) быстрота, с которой метод улавливает существенное изменение в поведении ряда, например внезапный сдвиг математического ожидания или увеличение угла наклона линии тренда;

(3) существование сериальных корреляций в ошибках (которое в большинстве случаев указывает на то, что модель сильно упрощена);

(4) неизменяемость первичных данных (многие ряды официальных учреждений характеризуются тем раздражающим свойством, что прошлые данные время от времени изменяются);

(5) полный объем работы — в некоторых сферах деятельности тысячи рядов ежемесячно нуждаются в обновлении, небольшие затраты и быстрота имеют первостепенное значение;

(6) срочность — в таких задачах, как управление уличным транспортом, регулирование энергетических нагрузок, слежение за ракетой, прогноз нужен практически «on line»; другими словами, для того чтобы прогноз был полезным, необходимо иметь возможность получать его в течение часов, минут или даже секунд.



ВЫБОР МЕТОДА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

9.29. Райд в упомянутой работе дает дерево решений для выбора метода прогнозирования, и несмотря на то что последующий опыт может привести к модификации его конкретных рекомендаций, особенно для неэкономических областей, используемый им принцип полезен. Конечно, каждому практику нужно свое собственное дерево; дерево Райда показано на рис. 9.1.

ФИЛЬТРЫ КАЛЬМАНА

9.30. Рассмотренные к настоящему моменту методы были разработаны для анализа экономической деятельности, торговых сделок (Хольт, Уинтерс, Харрисон) или в рамках теории управления, применяющейся в технике (Бокс и Дженкинс). В течение нескольких лет инженеры исходя из основополагающей работы Кальмана (см., например, работу Кальмана и Бьюси [46]) следовали независимым путем, развивая рекурсивные методы для мультисенсорных систем¹, используя их в следящих механизмах или системах автоматического регулирования. В действительности возникающие при этом проблемы во многих отношениях аналогичны тем, что встают при прогнозировании более знакомыми методами, но существуют важные различия:

(а) в технике часто имеется большая априорная информация, которая дает возможность получать хорошие оценки параметров системы, или, альтернативно, имеется обширная информация относительно других систем того же типа, которая служит той же цели;

(б) входная информация обычно многомерна;

(в) иногда текущий «прогноз» нельзя проверить наблюдением.

Например, при слежении за движущимся объектом из некоторой неподвижной точки наблюдения поступающими сигналами могут быть значения углов, отражения радара и т. д., цель при этом состоит в том, чтобы получить прогноз положения и скорости объекта, который непосредственно наблюдать нельзя.

9.31. Полезность применения этих методов вне сферы задач управления, решаемых в технике, все еще нуждается в доказательстве. Начало было положено в работе Харрисона и Стевенса [43]. В их модели в общем случае рассматривается зависимость вектора y_t размерности $m \times 1$ от p параметров, выражаемая известной матрицей V размерности $m \times p$:

$$y_t = V\theta_t + \varepsilon_t, \quad (9.61)$$

где предполагается, что θ имеют марковский характер связи, выражаемой с использованием известной матрицы L размерности $m \times m$, известной матрицы M размерности $m \times p$ и остатков γ :

$$\theta_t = L\theta_{t-1} + M\gamma_t. \quad (9.62)$$

¹ Т. е. систем с многими датчиками, чувствительными воспринимающими элементами. — *Примеч. пер.*

Предполагается, что в момент t известны V , L , M и распределение вероятностей ε_t и γ_t . Предполагается также, что ε , γ и θ являются многомерными нормальными переменными. Последующие действия состоят в нахождении апостериорного распределения θ_t на основе априорного распределения θ_{t-1} и дополнительной информации, полученной при переходе от момента $t-1$ к моменту t , или, точнее, в определении математического ожидания и дисперсии θ_t по заданным оценкам в момент $t-1$ и ошибкам. Для сложных и, возможно, даже для сравнительно простых систем количество априорной информации, которую необходимо получить или задать на основе предположений, очевидно, существенно.

ЗАМЕЧАНИЕ

Хорошее изложение методов Кальмана дано в [84]. См. также работу Харрисона и Стевенса [43].

10 МНОГОМЕРНЫЕ РЯДЫ

10.1. Предположим, что мы имеем сразу несколько временных рядов и хотим рассмотреть связь между ними. Их можно представить матрицей размерности $p \times n$, т.е. p рядов с n наблюдениями в каждом. Попытка разложить их на тренд, сезонную составляющую и т. п. в едином процессе анализа приводит к почти непреодолимым трудностям при вычислении. Мы будем предполагать, что тренд и сезонная составляющая выделены в каждой из p компонент отдельно и что они уже удалены, или, альтернативно, что тренд элиминирован переходом к разностям, а сезонная составляющая исключена. Тогда нам остается рассмотреть взаимосвязи между стационарными рядами и, в частности, взаимосвязь между парой рядов. (При большем числе рядов мы, как правило, должны будем рассматривать их попарно.)

КРОСС-КОРРЕЛЯЦИЯ

10.2. Теперь можно обобщить понятие автокорреляции на случай пары рядов, будем называть ее *кросс-корреляцией*. Мимоходом можно отметить, что некоторые авторы называют такие зависимости «серийными корреляциями», мы же используем этот термин для обозначения корреляции наблюдений в частной реализации конечной длины. Ковариацию u_{it} ($i = 1, 2, \dots, p$) и $u_{j, t-s}$ будем обозначать символом $\gamma_{(ij) s}$. Если рассматривается только пара рядов 1, 2, индексы (i, j) можно опустить. Соответственная кросс-корреляция генеральных совокупностей будет обозначаться как $\rho_{(ij) s}$. Значения, полученные по наблюдениям, как обычно будут записываться латинскими буквами $c_{(ij) s}$ и $r_{(ij) s}$. При любом заданном s имеется $\frac{1}{2} p(p+1)$ такого рода величин, для обозначения которых мы вводим квадратные матрицы γ_s, ρ_s, c_s или r_s в зависимости от обстоятельств.

10.3. В одномерном случае, как мы видели, $\rho_k = \rho_{-k}$, так что нужно было рассматривать только положительные значения k . Для двух и более рядов это уже не выполняется. Ясно, что корреляция между переменными u_1 и u_2 , когда первая опережает вторую на s единиц времени, не будет той же самой, когда первая отстает от второй на s единиц. Таким образом, матрица γ_s не является симметричной относительно

но своей диагонали. С другой стороны, так как $E(u_1, t, u_2, t+s)$ равно $E(u_1, t-s, u_2, t)$, имеем

$$\gamma_s = \gamma'_{-s}. \quad (10.1)$$

КРОСС-СПЕКТР

10.4. Кросс-спектр для двух рядов можно определить как

$$w_{12}(\alpha) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \rho_{(12)s} e^{i\alpha s}, \quad (10.2)$$

ему будет соответствовать интегральная спектральная функция $W(\alpha)$, определенная на интервале от 0 до π . И наоборот, для кросс-корреляций имеем

$$\rho_{(12)s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_{12}(\alpha) e^{-i\alpha s} d\alpha. \quad (10.3)$$

Как мы видели, в формулах для одномерного случая синусоидальные члены в этих выражениях сокращаются благодаря тому, что $\rho_k = \rho_{-k}$ и спектральная плотность представляется действительным числом. В данном случае это больше не имеет места. Из (10.2) следует:

$$w_{12}(\alpha) = \rho_{12}(0) + \sum_1^{\infty} \{ \rho_{(12)s} \cos(s\alpha) + \rho_{(12)-s} \cos(s\alpha) \} + \\ + i \left\{ \sum_1^{\infty} \rho_{(12)s} \sin(s\alpha) - \rho_{(12)-s} \sin(s\alpha) \right\} = \quad (10.4)$$

$$= c(\alpha) + iq(\alpha), \quad (10.5)$$

где
$$c(\alpha) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \cos(s\alpha) \{ \rho_{(12)s} + \rho_{(12)-s} \}; \quad (10.6)$$

$$q(\alpha) = \sum_{s=1}^{\infty} \sin(s\alpha) \{ \rho_{(12)s} - \rho_{(12)-s} \}. \quad (10.7)$$

КОГЕРЕНТНОСТЬ

10.5. Спектральная плотность наряду с действительной частью имеет теперь и мнимую часть. Величину $c(\alpha)$ обычно называют *коспектром* или *ко-спектральной плотностью*, а $q(\alpha)$ — *квадратурным спектром* или *квадратурной спектральной плотностью*. Сумма квадратов $c^2(\alpha) + q^2(\alpha)$ называется *амплитудой* спектра. Нормированная делением на спектральные плотности каждого из двух рядов в отдельности, она называется *когерентностью*, т. е.

$$C(\alpha) = \frac{c^2(\alpha) + q^2(\alpha)}{w_1(\alpha) w_2(\alpha)}. \quad (10.8)$$

Фазовые соотношения этих величин также заслуживают внимания. Так называемая фазовая диаграмма является графиком $\psi(\alpha)$, в котором по оси ординат откладывается ψ , а по оси абсцисс — α , где

$$\psi(\alpha) = \arctg \frac{q(\alpha)}{c(\alpha)}. \quad (10.9)$$

В диаграмме Арганда по оси абсцисс откладываются значения $c(\alpha)/w_1(\alpha)$, а по оси ординат — значения $q(\alpha)/w_1(\alpha)$. Диаграмма усиления дает зависимость $R_{12}^2(\alpha)$ от α , где

$$R_{12}^2(\alpha) = \frac{w_1(\alpha)}{w_2(\alpha)} C(\alpha). \quad (10.10)$$

Когерентность $C(\alpha)$ можно рассматривать как аналог коэффициента корреляции, а усиление $R^2(\alpha)$ — как аналог коэффициента регрессии.

10.6. Интерпретация этих величин в анализе временных рядов, как мне кажется, дело более трудное, чем интерпретация кросс-коррелограммы, которая по крайней мере показывает силу связи между двумя рядами при различных опережениях или запаздываниях. Вообще говоря, назначение когерентности состоит в том, чтобы измерять степень совместного изменения двух рядов и фазу, при которой изменения в одном ряде соответствуют изменениям в другом. Желающих получить более полное освещение этой темы можно отослать к книге Гренджера и Хатанаки [35]. В последнее время Гудмандсон [38] сделал попытку применить этот метод для обработки статистических данных об импорте и экспорте.

Пример 10.1

В табл. 10.1, для сопоставления с данными табл. 1.6, приведены объемы производства легковых автомобилей в Соединенном Королевстве за каждый квартал с 1960 по 1971 г. В этих двух рядах нет сезонных колебаний. На рис. 10.1 оба ряда (которые, как оказалось, имеют примерно одинаковый диапазон изменения по оси ординат) показаны после исключения нерегулярной компоненты с помощью программы Census X-11. Следовательно, вычерченные графики содержат только тренд и краткосрочные колебательные движения. Беглый взгляд на чертеж говорит о том, что, хотя два ряда следуют далеко не одним и тем же курсом, есть некоторое совпадение во времени моментов появления пиков и впадин.

Тренд, который не очень заметен в том и другом случае, можно элиминировать различными способами. Для простоты в этом примере из обоих рядов был исключен линейный тренд. На рис. 10.2 показаны коррелограммы двух полученных в результате этой операции рядов. В обоих случаях имеются заметные колебания. Кросс-коррелограмма дана на рис. 10.3. При нулевом лаге корреляция здесь относительно мала, но положительна и равна примерно 0,33. Если индекс FT опережает производство легковых автомобилей на 7 кварталов, то корреляция отрицательна и равна примерно $-0,45$. С другой стороны, если производство легковых автомобилей опережает индекс FT на 7 кварталов, то корреляция имеет минимум, равный примерно $-0,22$.

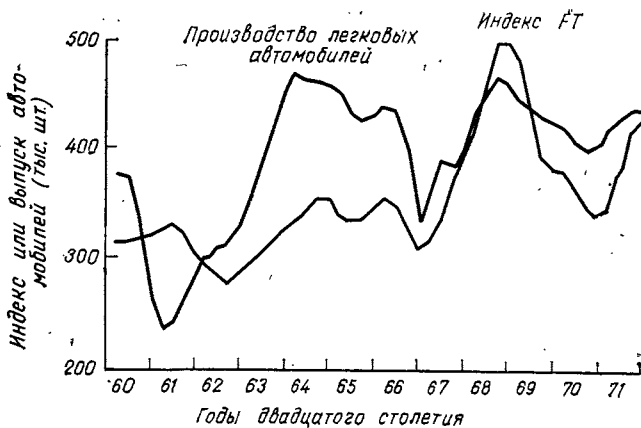


Рис. 10.1. Индекс FT и производство легковых автомобилей в Соединенном Королевстве (оба ряда сглажены путем исключения нерегулярной компоненты)

Эти факты можно предварительно интерпретировать двумя способами. Либо один ряд опережает другой приблизительно на 16 кварталов (4 года), либо оба ряда независимы, но имеют ритм приблизительно с таким периодом.

Таблица 10.1

Производство легковых автомобилей в Соединенном Королевстве (тыс. шт.), данные скорректированы на сезонность

Год и квартал	Выпуск автомобилей	Год и квартал	Выпуск автомобилей	Год и квартал	Выпуск автомобилей
1960	1	1964	1	1968	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4
1961	1	1965	1	1969	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4
1962	1	1966	1	1970	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4
1963	1	1967	1	1971	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4

* Квартальная величина оценена по первым двум месяцам.

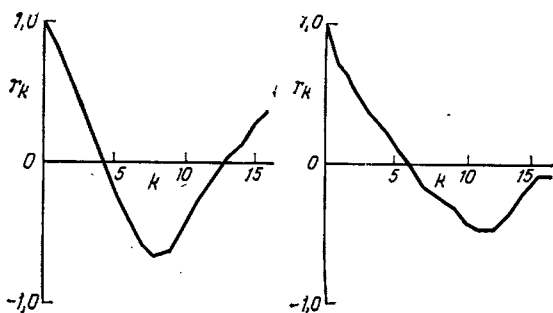


Рис. 10.2. Коррелограммы индекса FT (слева) и данных о производстве легковых автомобилей (справа); из исходных рядов исключены нерегулярная компонента и линейный тренд

На рис. 10.4 мы заново построили графики исходных рядов, но изменили при этом знак одного из них (индексов FT) на противоположный и сдвинули его на 7 кварталов вперед относительно ряда данных о производстве легковых автомобилей. Совпадение пиков и впадин выявляется теперь более отчетливо. Есть признаки того, что через 7 (или около того) кварталов после пика в индексе FT последует спад в производстве легковых автомобилей.

Интересно, конечно, что означает этот результат. Было бы поспешным сделать вывод, что пик в ряде индексов FT является *причиной* резкого падения производства легковых автомобилей почти двумя годами позже. Может оказаться, что хозяйственная система описывается рядами, в каждом из которых имеются колебания со средней длительностью около четырех лет, и они в известной степени могут быть одновременными (если мерить коэффициентом корреляции при нулевом лаге). Возникает мысль о применении этого анализа для поиска причинностных связей и устойчивых отношений такого рода, но, как будет показано в следующей главе, его можно применять для прогнозирования, даже когда причинностная связь не установлена. Во всяком случае мы имеем сейчас ряд всего лишь из 48 членов, охватывающий период в 12 лет. Не очень-то помогают и обычные проверки существенности отдельных коэффициентов корреляции, так как мы сознательно основное внимание уделяем наибольшему из них.

Давайте рассмотрим взаимосвязь рядов с точки зрения спектрального ана-

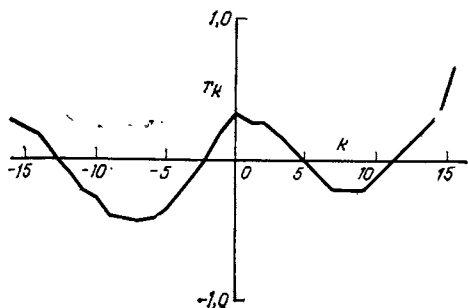


Рис. 10.3. Кросс-коррелограмма индекса FT и данных о производстве легковых автомобилей; из исходных рядов исключены нерегулярная компонента и линейный тренд

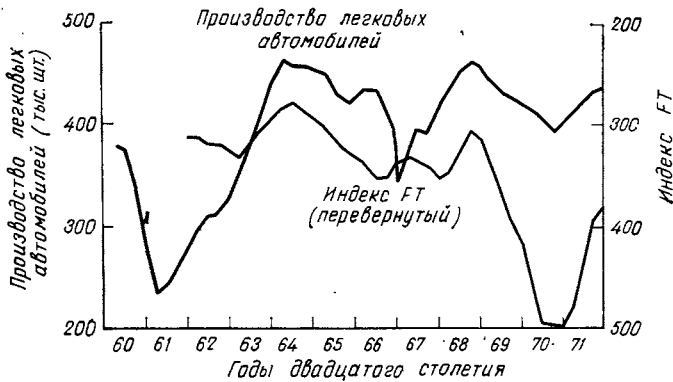


Рис. 10.4. Производство легковых автомобилей и перевернутый и сдвинутый вперед на 7 кварталов индекс FT

лиза. На рис. 10.5 даны спектры двух рядов, а на рис. 10.6 — их когерентность. Спектры каждого ряда в отдельности, представленные на рис. 10.5, не очень информативны. В строгом смысле нет никаких доказательств наличия «циклов». Более высокие значения в левой части служат признаком колебаний со средним периодом около 16 кварталов у индексов FT (циклическая частота приблизительно 0,06) и значительно бóльшим периодом у производства легковых автомобилей,

что подтверждает график коррелограмм. На графике когерентности обнаруживаются два пика, один — при циклической частоте около 0,09, а другой — при циклической частоте около 0,27, что соответ-

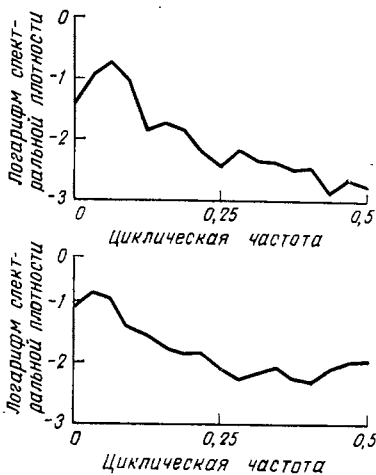


Рис. 10.5. Спектр индекса FT (сверху) и данных о производстве легковых автомобилей (снизу); из исходных данных исключены нерегулярная компонента и линейный тренд; сглаживание Бартлетта

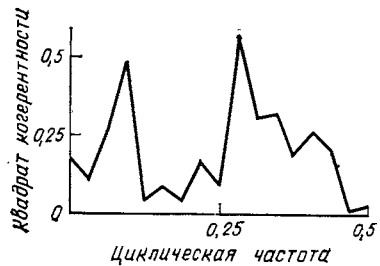


Рис. 10.6. Когерентность индекса FT и данных о производстве легковых автомобилей; из исходных рядов исключены нерегулярная компонента и линейный тренд

ствует средним периодам приблизительно в 11 и 4 квартала. Дать интерпретацию этих результатов труднее. Всегда нужно помнить, что мы имеем дело с выборочными значениями, которые подвержены значительным колебаниям. Компонента с периодом в один год, по-видимому, означает какое-то совместное движение в течение года, несмотря на то что один ряд (производство легковых автомобилей) предполагается скорректированным на сезонность. Другая компонента, по-видимому, отражает тот факт, что оба ряда имеют колебания с периодом в несколько лет, и эти колебания в пределах двенадцатилетнего отрезка времени в известной степени соответствуют друг другу.

В рядах, генерированных физическими процессами, в особенности когда их основу составляют генераторы гармонического типа, интерпретация спектров обычно более проста. В интерпретации экономических рядов имеются значительные трудности, особенно когда ряды короткие. Практику, применяющему метод, основанный на анализе кросс-коррелограмм или кросс-спектров, нужно приобрести достаточный опыт, прежде чем он сможет с уверенностью делать определенные выводы.

ТИПЫ МОДЕЛЕЙ

10.7. Как и в одномерном случае, мы будем рассматривать три типа моделей: авторегрессии, скользящие средние и смешанные. Формулировки не требуют большого напряжения. Например, рассматривая авторегрессию, мы теперь имеем p рядов и у каждого из них значение в момент t связано не только с его собственными значениями в предыдущие моменты времени, но и с предшествующими значениями других рядов; и в каждом из p соотношений имеется остаточный элемент ϵ , который может быть разным для различных рядов. В таком случае для описания авторегрессионных рядов порядка k нужно $p + kp^2$ констант α , даже если ϵ независимы и неавтокоррелированы, это очевидно приводит к чрезмерному количеству констант, когда p и k большие.

Рассмотрим, например, три ряда марковского типа u_{1t} , u_{2t} , u_{3t} . Далее мы будем сохранять коэффициенты при первых членах u_{it} , не приравнивая их единице. Тогда полностью уравнения можно записать в виде:

$$\alpha_{01} u_{1t} + \alpha_{11} u_{1,t-1} + \alpha_{21} u_{2,t-1} + \alpha_{31} u_{3,t-1} = \epsilon_{1t}; \quad (10.11)$$

$$\alpha_{02} u_{2t} + \alpha_{12} u_{1,t-1} + \alpha_{22} u_{2,t-1} + \alpha_{32} u_{3,t-1} = \epsilon_{2t}; \quad (10.12)$$

$$\alpha_{03} u_{3t} + \alpha_{13} u_{1,t-1} + \alpha_{23} u_{2,t-1} + \alpha_{33} u_{3,t-1} = \epsilon_{3t}; \quad (10.13)$$

или, используя оператор сдвига назад,

$$(\alpha_{01} + \alpha_{11}B) u_{1t} + \alpha_{21}Bu_{2t} + \alpha_{31}Bu_{3t} = \epsilon_{1t}; \quad (10.14)$$

$$\alpha_{12}Bu_{1t} + (\alpha_{02} + \alpha_{22}B)u_{2t} + \alpha_{32}Bu_{3t} = \epsilon_{2t}; \quad (10.15)$$

$$\alpha_{13}Bu_{1t} + \alpha_{23}Bu_{2t} + (\alpha_{03} + \alpha_{33}B)u_{3t} = \epsilon_{3t}, \quad (10.16)$$

или то же самое в матричной форме:

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{B}) \mathbf{u}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (10.17)$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{01} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{02} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{03} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

\mathbf{u}_t — вектор-столбец членов u_{1t}, u_{2t}, u_{3t} , $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ — вектор-столбец значений $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t}$.

10.8. Поэтому общую линейную авторегрессионную модель мы будем записывать как

$$\mathbf{A}(B) \mathbf{u}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (10.19)$$

где

$$\mathbf{A}(B) = \sum_{s=0}^k \mathbf{A}_s B^s \quad (10.20)$$

и \mathbf{A} являются матрицами коэффициентов размерности $p \times p$.

Формально решение этого разностного уравнения, как и решение (6.41) в одномерном случае, можно записать в виде (систематические члены предполагаются затухшими)

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{A}^{-1}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (10.21)$$

Обратная матрица \mathbf{A}^{-1} в общем случае будет равна отношению двух полиномов от B . Разложение единицы, деленной на знаменатель, и умножение на числитель дает нам бесконечный ряд постоянных коэффициентов, имеющих характер весов при усреднении $\boldsymbol{\varepsilon}$ на бесконечном интервале.

10.9. Аналогично через матрицы коэффициентов, обозначаемые как \mathbf{M} , можно записать процесс скользящего среднего. Так, например,

$$\mathbf{u}_t = \sum_{s=0}^l \mathbf{M}_s B^s \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{M}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (10.22)$$

Смешанный процесс очевидно выражается как

$$\mathbf{A}(B) \mathbf{u}_t = \mathbf{M}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (10.23)$$

Предположим теперь, что все $\boldsymbol{\varepsilon}$ нормализованы и имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2 . Это изменение масштаба не приводит к потере общности, так как мы оставили коэффициенты α_{0i}, β_{0i} еще не определенными. Кроме того, предполагаем, что $\boldsymbol{\varepsilon}$ независимы. Тогда дисперсионной матрицей будет

$$\boldsymbol{\gamma}_s = \mathbf{E}(\mathbf{u}_t \mathbf{u}'_{t-s}),$$

а после подстановки выражения (10.22) для процесса скользящего среднего

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_s &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=0}^l \mathbf{M}_j B^j \boldsymbol{\varepsilon}_t \right\} \left\{ \sum_{m=0}^l \mathbf{M}_m B^m \boldsymbol{\varepsilon}_t \right\} = \sum_{j=0}^l \sum_{m=0}^l \mathbf{M}_j \mathbf{M}'_m \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-s-m}) = \\ &= \sigma^2 \sum_{s,m} \mathbf{M}_{s+m} \mathbf{M}'_m = \text{коэфф. при } B^s \text{ в } \sigma^2 (\sum \mathbf{M}_j B^j) (\sum \mathbf{M}'_j B^{-j}). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Это является обобщением результата, представленного в уравнении (6.66). Аналогично для авторегрессионного процесса

$$\gamma_s = \text{коэфф. при } B^s \text{ в } A^{-1}(B)\{A^{-1}(B^{-1})\}', \quad (10.25)$$

а для смешанного процесса (10.23)

$$\gamma_s = \text{коэфф. при } B^s \text{ в } A^{-1}(B)M(B)M'(B^{-1})\{A^{-1}(B^{-1})\}'. \quad (10.26)$$

Относительная элегантность, с которой эти соотношения можно выписать, не означает, что полученные уравнения легко решить. В действительности, как мы увидим позже, они могут иметь не единственное решение.

10.10. Естественно задать вопрос, поддается ли авторегрессионный процесс обработке с помощью уравнений типа системы Юла—Уокера, которая в одномерном случае дала нам возможность определять константы, выражая их через автокорреляции. Конечно, можно вывести такие уравнения. Умножая в обычном порядке (10.19) на u'_{t+q} и переходя к математическим ожиданиям, имеем

$$E \sum_{s=0}^k A_s B^s u_t u'_{t+q} = \sum_{s=0}^k A_s E(u_{t-s} u'_{t+q}) = \sum_{s=0}^k A_s \gamma_{q+s} = 0, \quad q > 0. \quad (10.27)$$

Решить эти уравнения можно, но сделать это нелегко.

ПРОБЛЕМА НЕИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

10.11. Однако в случае смешанного процесса (10.23) возникает другой момент. В 6.27 кратко отмечалось, что автокорреляции процесса скользящего среднего неоднозначно определяют его коэффициенты. Можно также напомнить замечание, сделанное в 9.23, о том, что для достижения определенности в модели Бокса—Дженкина на ее коэффициенты также нужно накладывать условие. Точно такая же ситуация возникает и здесь.

Пример 10.2 [71]

Если матрицу $A^{-1}M$ обозначить через F , то тогда (10.26) можно записать в виде $\gamma_s = \text{коэфф. при } B^s \text{ в } F(B)F'(B^{-1})$.

Рассмотрим теперь матрицы

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{pmatrix} 2+B & B \\ 1 & 6+B \end{pmatrix}; & F_2 &= \begin{pmatrix} 1+2B & -B \\ 5 & 3+2B \end{pmatrix}; \\ F_3 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2+7B & 4+9B \\ -11-6B & 28+3B \end{pmatrix}; & F_4 &= \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 14+37B & -5-12B \\ 55+30B & 1+84B \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Легко можно проверить, что

$$\begin{aligned} |F_1| &= (4+B)(3+B); & |F_2| &= (3+B)(1+4B); \\ |F_3| &= (4+B)(1+3B); & |F_4| &= \frac{1}{17}(1+4B)(1+3B) \end{aligned} \quad (10.29)$$

и что для каждой матрицы $F FF'$ равно

$$\begin{pmatrix} 6 + 2B + 2B^{-1} & 3 + 7B \\ 3 + 7B^{-1} & 38 + 6B + 6B^{-1} \end{pmatrix}. \quad (10.30)$$

Таким образом, несколько процессов дают одну и ту же дисперсионную матрицу и это, выражаясь языком эконометрии (где возникает подобная проблема), ситуация «неидентифицируемости». Отсюда не следует, что все решения приемлемы; некоторые из них могут приводить к нестационарным рядам. Но для того чтобы гарантировать единственность решения, по-видимому, требуется накладывать довольно сильные ограничения. Общее обсуждение можно найти в работе Филлипса¹ и [526], но оно сложное и не очень полезное для практики.

10.12. Проблема неидентифицируемости все еще ждет полного и удобного для практики решения. Как ни странно, но корень проблемы лежит в скользящем среднем, а не в авторегрессионной части модели. При этих обстоятельствах целесообразно посмотреть, нельзя ли перейти к аппроксимации и отказаться от компоненты, представляемой в модели скользящим средним.

Рассмотрим, например, авторегрессионный процесс, в котором остатки связаны авторегрессией. Остановимся на одномерном случае:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{t-j} = \eta_t, \quad (10.31)$$

где

$$\sum_{m=0}^l \beta_m \eta_{t-m} = \varepsilon_t, \quad (10.32)$$

а ε_t — случайная переменная. Можно сделать подстановку η_t из (10.31) в (10.32) и получить

$$\sum_{m=0}^l \beta_m \sum_{j=0}^k \alpha_j u_{t-m-j} = \varepsilon_t, \quad (10.33)$$

ряд теперь чисто авторегрессионный. Его константы можно оценить обычным путем. Однако они будут смешанными функциями от α и β и может потребоваться определенная осторожность, чтобы отделить одно от другого. В действительности может быть предпочтительнее рассматривать остатки η как авторегрессионные, чем считать, что их корреляции порождены скользящим средним. Или другими словами, чисто авторегрессионный процесс более высокого порядка $k + l$ (без хлопот, связанных с отделением α от β) может быть предпочтительнее смешанного процесса со скользящим средним остатков. Эти соображения *тем более* применимы к многомерным рядам (см. гл. 12).

ЗАМЕЧАНИЕ

В сообщении Института математических исследований в общественных науках Стэнфордского университета, подготовленном Ф. Нольдом [64], дана библиография работ, посвященных применению спектрального анализа для обработки экономических временных рядов.

¹ Этой работы нет в списке литературы. Возможно, автор имел в виду статью: Phillips A. W. (1959) The estimation of parameters in systems of stochastic differential equations. *Biometrika*, v. 46, p. 67. — *Примеч. пер.*

II ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПО ЛАГОВЫМ СООТНОШЕНИЯМ

11.1. Во многих ситуациях, когда имеется несколько сопутствующих переменных, связанных неким причинным механизмом, есть основания считать, что причинные переменные опережают (т. е. предшествуют) следствия. Не нужно чрезмерно беспокоиться о непривычных философских проблемах причины и следствия. На практике одни события через некоторое время порождают другие, хотя через переходные фазы образуется круговая цепь причинности. Если интересующая нас переменная может быть систематическим образом связана с другими опережающими ее переменными, то на этой основе можно построить метод прогнозирования. Иногда простой анализ ситуации подсказывает нам, какие переменные являются опережающими. Но гораздо чаще мы должны отыскивать эти переменные и время их опережения. Иногда связь рассматривается в обоих направлениях: например, повышение цен ведет к повышению заработной платы, но повышение заработной платы также приведет к повышению некоторых цен.

11.2. Когда мы имеем дело с системой с сильными внутренними взаимодействиями, часто встречающейся в экономике, видимо, следует строить модель, состоящую из ряда уравнений, в некоторых из которых переменная x будет опережать переменную y , а в других x будет отставать от y . Теория построения и анализа таких моделей выходит за рамки этой книги. Мы сосредоточим внимание на моделях, представляемых одним уравнением. Считая, что нас интересует значение переменной y в момент t , будем пытаться построить уравнение с использованием других переменных x_1, x_2 и т. д., наблюдаемых в предшествующие моменты времени. (Некоторые из x -в могут быть лаговыми значениями y .) Применение такого уравнения для прогнозирования тогда очевидно.

11.3. Предположим, что имеется система, в которой взаимодействуют переменные u (называемые эндогенными) и переменные v (экзогенные). Экзогенные переменные воздействуют на систему, но сами не

зависят от нее. Предположим далее, что переменные связаны системой линейных уравнений, которые могут включать также некоторые лаговые значения u . Эту систему можно выразить в матричной форме как

$$Au + Bv = \varepsilon, \quad (11.1)$$

где коэффициенты в A могут быть полиномами от оператора сдвига B ; то же справедливо и для B . Детерминант матрицы A в общем случае будет полиномом от B , а обратная матрица A^{-1} будет равна отношению двух полиномов, скажем P/Q . Тогда

$$u = -A^{-1}Bv + A^{-1}\varepsilon,$$

и, умножив на Q , видим, что Qu , авторегрессионное выражение относительно u , равно сумме некоторой линейной функции от v , возможно, содержащей лаговые члены, и некоторой линейной функции от ε . Поэтому можно ожидать, что любую компоненту u можно выразить через лаговые значения u и (возможно) текущие и лаговые значения v плюс стохастический остаток. Мы ищем уравнение именно такого типа, за исключением того, что для целей прогнозирования нужно, чтобы все переменные, кроме u_t , входили с лагом, равным одной единице времени.

11.4. Нужно решить четыре проблемы: (1) определить, какие переменные включать в правую часть; (2) определить, с какими лагами их следует вводить в уравнение; (3) построить уравнение оптимальным в некотором смысле образом; (4) придать результату законную силу, т. е. обосновать его использование для будущего. Можно, конечно, добавить (5) — объяснить, почему уравнение «работает» (почему оно дает хорошие прогнозы), если это так. До тех пор пока его можно считать надежным, такое объяснение, конечно, не является строго обязательным, но оно всегда желательно. Но если уравнение чисто эмпирическое, наша уверенность в его надежности вряд ли может быть большой, особенно во времена экономических перемен.

ОТБРАСЫВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

11.5. Вообще можно записать много переменных x , которые на основе *априорных* данных можно предположительно считать влияющими на y , и можно записать их с различными временными лагами. Если ввести их все в регрессионное уравнение, предусмотрев ряд лагов для каждой переменной, то, вероятно, многие из них мы найдем излишними в том смысле, что они мало что добавляют или вовсе ничего не добавляют при построении регрессии, если в качестве меры использовать величину коэффициента множественной корреляции, или, что эквивалентно, не снижают дисперсию остатков. Отбрасывание переменных следует выполнять с определенной осторожностью, но общий опыт, по крайней мере в области экономики, свидетельствует о том, что очень многие переменные можно отбросить без серьезного ущерба для адекватности регрессионного уравнения. Эта процедура не обязательно означает, что отброшенные переменные не важны, а лишь выражает тот факт, что они столь высоко коррелированы с оставленными, что последние, так сказать, действуют и «от их имени».

ПОШАГОВЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ВВЕДЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

11.6. Для отбрасывания лишних переменных в регрессионном анализе обычно применяют два метода, известных как «пошаговая процедура введения переменных» и «пошаговая процедура исключения переменных». При первом методе строится регрессия y на каждую из переменных x_1, x_2 и т. д. отдельно. Одна из этих p регрессий будет лучше остальных (в том смысле, что она дает наименьшую сумму квадратов остатков) и тогда соответствующая переменная, скажем x_1 , сохраняется. На следующем этапе строится регрессия y на x_1 и поочередно на каждую из остальных $p - 1$ переменных. Одна из регрессий, скажем, та, что содержит x_2 , снова будет лучше других. Переменная x_2 также сохраняется для проведения дальнейшего анализа. На третьем этапе рассматривается регрессия y на x_1, x_2 и поочередно на каждую из оставшихся $p - 2$ переменных и т. д. шаг за шагом, пока не будет введено достаточно переменных, чтобы получить удовлетворительное уравнение при использовании R^2 как меры качества. Остальные переменные отбрасываются.

В пошаговом методе исключения переменных действуют аналогично. Разница лишь в том, что в нем начинают с регрессии y на все p переменные, а затем осуществляют поиск той переменной, отбрасывание которой в наименьшей степени влияет на регрессию, т. е. дает самое маленькое снижение R^2 . После этого исследуются оставшиеся $p - 1$ переменные с целью выявить ту, которую можно отбросить, и т. д. вновь до тех пор, пока R^2 не примет удовлетворительное значение и пока удаление какой-либо переменной не станет невозможным без серьезных потерь.

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ

11.7. К сожалению, эти методы не всегда «работают» удовлетворительно. Они могут не дать одинакового результата, но даже если он дает его, он может быть далек от оптимального. Другими словами, если даже оба метода указывают, что некий набор k переменных приводит к приемлемому значению R^2 , все же может существовать другой набор или наборы k переменных, которые дают более высокое значение R^2 . Наиболее предпочтительным является метод, отбирающий оптимальный набор переменных, т. е. такой метод, который для каждого значения k от 1 до p определяет набор переменных, используемых в уравнении регрессии для y , приводящий к наивысшему значению R^2 среди всех наборов по k переменных в каждом. Такой метод можно найти у Биля, Кендэла и Манна [6]. Мы применим его в одном из рассматриваемых далее примеров.

НЕСКОЛЬКО ПРАКТИЧЕСКИХ ПРИМЕРОВ

Пример 11.1

В табл. 11.1 приведены скорректированные на сезонность данные об объемах импорта (I) Соединенного Королевства в каждом квартале с 1960 по 1970 г., а также другие переменные, которые, как ожидается, влияют на импорт, а именно: запасы (S), вложения в основной капитал (F), потребительские расходы на товары длительного пользования (D). Вопрос ставится так: нельзя ли сделать прогноз объема импорта на следующий квартал, используя данные за текущий и прошлые кварталы? По-видимому, вряд ли выбранные переменные будут влиять на объемы импорта дольше одного года. Поэтому мы рассмотрим регрессию I_t на I_{t-1} , I_{t-2} , I_{t-3} , I_{t-4} и такие же лаговые значения S , F и D .

Когда так много переменных берется при сравнительно коротком ряде, следует уделять определенное внимание числу степеней свободы, фигурирующему в формулах оценок, особенно в оценке R^2 . Например, если строится регрессия на p переменных с n членами, то остаток обычно оценивается так:

$$\text{оценка } \text{var } \varepsilon = \frac{S_R}{n-p}, \quad (11.2)$$

где S_R — сумма квадратов остатков. Если S_T — общая сумма квадратов, то дисперсия зависимой переменной y оценивается как S_T/n и

$$\text{оценка } R^2 = 1 - \frac{S_R}{n-p} \frac{n}{S_T}. \quad (11.3)$$

Если нужно оценивать математическое ожидание, n уменьшают на единицу. Оценки $S_R/(n-p)$ и S_T/n и фактически оценка R^2 в (11.3) будут тогда несмещенными. Однако добавление в уравнение еще одной переменной (которая должна уменьшать сумму квадратов остатков, так как число оцениваемых констант возрастает на единицу) может фактически увеличить оценочное значение R^2 . Если же построенная регрессия очень плоха, уравнение (11.3) может дать даже отрицательное значение.

Поэтому полезно также вычислять оценку максимального правдоподобия (МП):

$$\text{МП } (R^2) = 1 - \frac{S_R}{S_T}, \quad (11.4)$$

которая не может быть отрицательной, но может быть смещенной. В дальнейшем мы будем приводить в таблицах обе оценки.

Рассмотрим сначала регрессию I_t на четыре ее собственных лаговых члена I , т. е. авторегрессию без включения других переменных. Так как мы должны рассматривать лаг в четыре квартала, первое значение I_t будет соответствовать первому кварталу 1961 г. В таком случае данные будут представлять 40 точек, т. е. 10 лет — с 1961 по 1970 г.

Квартальные данные об объемах импорта Соединенного Королевства
с 1960 по 1970 г.

Год	Квар- тал	I	S	D	F	
1960	1	1 382	149	370	1 088	I — импорт товаров и услуг
	2	1 417	168	342	1 081	
	3	1 432	161	332	1 103	
	4	1 438	150	307	1 146	
1961	1	1 457	153	327	1 184	S — величина прироста физических объемов запасов и незавершен- ного производства
	2	1 403	102	331	1 205	
	3	1 389	35	329	1 241	
	4	1 379	37	313	1 217	
1962	1	1 408	7	316	1 197	D — потребительские расходы на то- вары длительного пользования
	2	1 426	12	361	1 221	
	3	1 460	53	336	1 222	
	4	1 442	—6	350	1 189	
1963	1	1 414	—3	353	1 070	F — валовые внутренние капиталовло- жения в основной капитал
	2	1 472	36	398	1 247	
	3	1 520	—1	414	1 278	
	4	1 540	159	416	1 317	
1964	1	1 611	132	417	1 373	
	2	1 612	170	429	1 417	
	3	1 632	141	439	1 459	
	4	1 659	185	440	1 476	
1965	1	1 581	92	453	1 486	
	2	1 643	83	426	1 474	
	3	1 672	112	428	1 471	
	4	1 686	89	417	1 529	
1966	1	1 722	86	447	1 500	
	2	1 681	76	468	1 509	
	3	1 726	86	409	1 551	
	4	1 642	6	375	1 552	
1967	1	1 777	60	392	1 587	
	2	1 787	64	428	1 671	
	3	1 779	—1	467	1 645	
	4	1 850	61	492	1 621	
1968	1	1 948	—104	550	1 721	
	2	1 903	76	408	1 693	
	3	1 945	85	434	1 714	
	4	1 937	101	460	1 722	
1969	1	1 992	122	400	1 710	
	2	1 980	76	425	1 672	
	3	1 966	57	444	1 705	
	4	2 024	91	432	1 690	
1970	1	2 026	—16	433	1 646	
	2	2 130	116	457	1 759	
	3	2 078	117	476	1 726	
	4	2 197	112	480	1 755	

Примечание. Все данные скорректированы на сезонность. Источник: Monthly Digest of Statistics. Величины в млн. фунтов стерлингов.

Уравнение регрессии имеет вид:

$$I_t = -51,7799 + 0,50374I_{t-1} + 0,46983I_{t-2} + 0,02048I_{t-3} + 0,05423I_{t-4}. \quad (11.5)$$

Оценка R^2 равна 0,9607 и МП (R^2) = 0,9647.

Вклад I_{t-3} и I_{t-4} мал, и неплохой предиктор можно построить на основе одних лишь I_{t-1} и I_{t-2} . На рис. 11.1 показан фактический ряд и значения, «предсказанные» по уравнению (11.5).

Достаточно интересно посмотреть, что получится, если построить регрессии I_t на различные подмножества лаговых переменных от I_{t-1} до I_{t-4} по программе оптимальной регрессии. Результаты выглядят следующим образом:

Свободный член	I_{t-1}	I_{t-2}	I_{t-3}	I_{t-4}	Оценка R^2	МП (R^2)
-13,1650	1,01898	—	—	—	0,9529	0,9762 (11.6)
-44,4579	0,52751	0,51485	—	—	0,9627	0,9646 (11.7)
-48,5274	0,50927	0,47549	—	0,06299	0,9618	0,9647 (11.8)
-51,7799	0,50374	0,46983	0,02048	0,05423	0,9607	0,9647 (11.9)

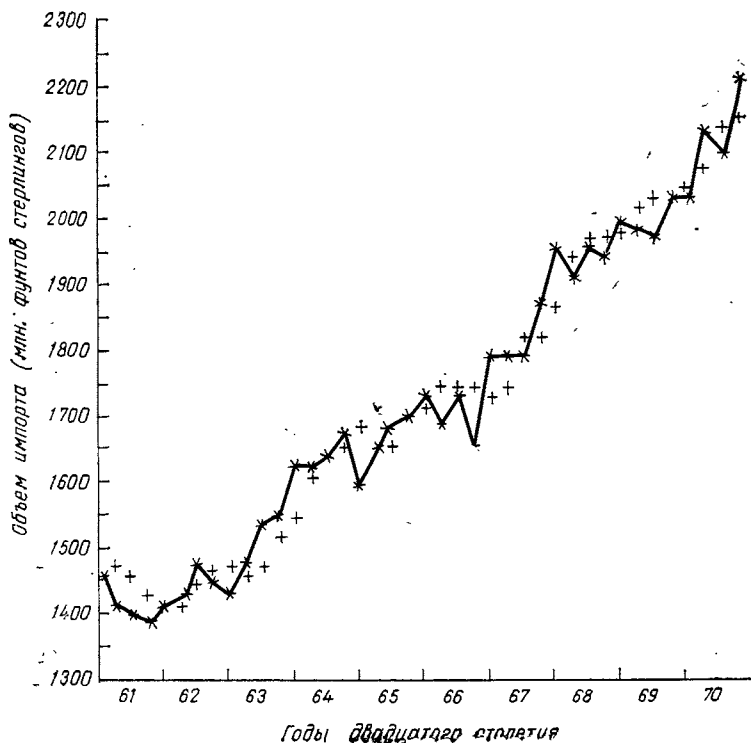


Рис. 11.1. График объемов импорта Соединенного Королевства (см. табл. 11.1) и прогнозные значения, полученные из уравнения (11.5); * фактические, + прогнозные

Прирост в R^2 от добавления I_{t-4} и I_{t-3} столь незначителен (а у оценки R^2 наблюдается и уменьшение), что мы вправе сделать вывод об адекватности авторегрессионного уравнения, представленного в (11.7), и даже уравнение (11.6) является очень хорошим.

Следует отметить, что ни (11.6), ни (11.7) не дают нам стационарного ряда. Уравнение (11.6), рассматриваемое как процесс марковского типа, имеет параметр ρ больше единицы. Аналогично можно показать, что один из корней уравнения¹

$$x^2 - 0,52751x - 0,51485 = 0, \quad (11.10)$$

полученного из (11.7), также больше единицы; и в этом случае процесс не является стационарным. Рис. 11.1 подтверждает эти выводы.

Если в качестве меры воспользоваться R^2 , то дисперсия остатков в уравнении (11.7) составляет менее 4% дисперсии исходного ряда. Однако этот критерий качества регрессии несколько вводит в заблуждение, так как в целом ряд эволюционный и имеет большую дисперсию. Все это заставляет нас рассмотреть вопрос, не лучше ли будет работать с первыми разностями ряда I и таким образом использовать уравнение регрессии для прогнозирования прироста I за один квартал. Результаты представлены далее. Теперь у нас 39 наблюдений. Зависимой переменной во всех случаях является ΔI_t .

Свободный член	ΔI_{t-1}	ΔI_{t-2}	ΔI_{t-3}	ΔI_{t-4}	Оценка R^2	МП (R^2)	
26,7333	-0,47281	—	—	—	0,1788	0,2004	(11.11)
27,5775	-0,47452	—	—	-0,04958	0,1580	0,2023	(11.12)
26,8944	-0,46280	0,02997	—	-0,05234	0,1346	0,2030	(11.13)
27,2320	-0,46321	0,02596	-0,01233	-0,05639	0,1093	0,2030	(11.14)

Как и для исходного ряда, программа оптимальной регрессии вводит переменную ΔI_{t-4} прежде, чем ΔI_{t-3} , но эффект от обеих незначительный. В действительности значения оценки R^2 уменьшаются. Мы отмечали, что этот эффект может иметь место при коротких рядах. Нам остается сделать вывод, что первые разности представляются (поскольку речь идет о линейной авторегрессии) процессом марковского типа с параметром $-0,4728$ и что это объясняет только около 20% дисперсии. Поэтому предикторы, построенные по первым разностям, дают слабое улучшение по сравнению с предикторами, построенными на основе исходного ряда. Это подтверждается исследованием фактических остатков (которое опущено для экономии места). Уравнение с четырьмя переменными, определяемое (11.5) или (11.9) на выборке из 40 значений с 1961 по 1970 г., имеет среднеквадратическое отклонение остатка, равное примерно 43. А среднеквадратическое отклонение

¹ Такие уравнения называются характеристическими. — *Примеч. пер.*

остатка в уравнении (11.14), построенном по 39 значениям первых разностей, составляет приблизительно 45*.

Давайте теперь посмотрим, нельзя ли улучшить регрессию, если ввести в нее другие переменные. Сначала будем работать с исходными рядами, элиминируя переменные пошаговой процедурой исключения переменных. Перенумеруем переменные следующим образом:

$$\begin{array}{llll} I_{t-1} & 1 & S_{t-1} & 5 & D_{t-1} & 9 & F_{t-1} & 13 \\ I_{t-2} & 2 & S_{t-2} & 6 & D_{t-2} & 10 & F_{t-2} & 14 \\ I_{t-3} & 3 & S_{t-3} & 7 & D_{t-3} & 11 & F_{t-3} & 15 \\ I_{t-4} & 4 & S_{t-4} & 8 & D_{t-4} & 12 & F_{t-4} & 16 \end{array}$$

Исключенные переменные (из 16)	Оценка R^2	МП (R^2)
Ни одной	0,9589	0,9757
8	0,9605	0,9757
8, 14	0,9618	0,9755
8, 13, 14	0,9631	0,9754
3, 8, 13, 14	0,9641	0,9751
3, 8, 9, 13, 14	0,9651	0,9750
3, 6, 8, 9, 13, 14	0,9659	0,9746
3, 4, 6, 8, 9, 13, 14	0,9647	0,9728
3, 4, 6, 7, 8, 9, 13, 14	0,9643	0,9716
3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14	0,9639	0,9703
3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14	0,9638	0,9694
3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14	0,9637	0,9683
3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	0,9630	0,9668
3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	0,9628	0,9665
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	0,9627	0,9646

Эта процедура исключила фактически все переменные, как не дающие существенного вклада в регрессию, кроме I_{t-1} и I_{t-2} . Ряд значений R^2 подтверждает, что введение других переменных не приводит к какому-либо улучшению. На первый взгляд это, возможно, несколько удивительно, но в действительности некоторые переменные связаны очень сильной корреляцией.

Интересно сравнить на тех же данных результаты пошагового метода исключения переменных и метода оптимальной регрессии. Последний фактически состоит в нахождении сначала наилучшей единственной независимой переменной, затем наилучшей пары независимых переменных и т. д. Но мы выпишем результаты в обратном порядке, чтобы сравнить их с результатами пошаговой процедуры.

Исключенные переменные	Оценка R^2	МП (R^2)
Ни одной	0,9589	0,9757
8	0,9605	0,9757
8, 14	0,9618	0,9755
8, 13, 14	0,9631	0,9754
3, 8, 13, 14	0,9641	0,9751

* Статистика d Дарбина—Уотсона (см. раздел 12.13) для уравнения (11.9) равна 2,0114. Но это не означает, что остатки при работе с исходным рядом были действительно случайными, так как эта статистика без модификации не применима к авторегрессионным процессам.

3, 8, 9, 13, 14	0,9651	0,9750
3, 6, 8, 9, 13, 14	0,9659	0,9746
3, 7, 8, 10, 11, 13, 14	0,9649	0,9730
3, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15	0,9650	0,9722
3, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15	0,9649	0,9712
3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15	0,9652	0,9706
3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	0,9653	0,9697
3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	0,9654	0,9690
3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	0,9647	0,9674
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	0,9627	0,9646

Первые шесть шагов исключения переменных в пошаговом методе и методе оптимальной регрессии совпадают. Дальше эти два метода расходятся, но совпадают на последнем шаге, приводя к выводу, что оставить нужно две переменные — I_{t-1} и I_{t-2} .

Теперь применим программу метода оптимальной регрессии для обработки первых разностей всех рядов. Для простоты мы оставим номера 1, 2, ..., 16 за разностями ΔI_{t-1} , ΔI_{t-2} , ..., ΔF_{t-4} . Получаем следующие результаты:

Исключенные переменные	Оценка R^2	МП (R^2)
Ни одной	-0,0279	0,4049
14	0,0168	0,4049
3, 14	0,0577	0,4049
3, 5, 14	0,0953	0,4048
3, 5, 6, 14	0,1298	0,4046
3, 5, 6, 13, 14	0,1600	0,4031
2, 3, 5, 6, 13, 14	0,1800	0,3958
2, 3, 5, 6, 11, 13, 14	0,1913	0,3828
2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 14	0,2029	0,3707
2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 14, 15	0,2075	0,3535
2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 13, 14, 15	0,2175	0,3410
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 15	0,2328	0,3338
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15	0,2223	0,3042
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15	0,2034	0,2663
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	0,1947	0,2371
Все кроме 1	0,1788	0,2004

Результаты означают, что все регрессии не очень хорошие. (Попутно отметим, что при всех 16 переменных уравнение (11.3) дает отрицательное значение R^2 и что смещение в МП (R^2) очень большое.) Не преувеличивая значения регрессии ΔI_t на ΔI_{t-1} , запишем ее в явном виде:

$$\Delta I_t = 26,7333 - 0,47281 \Delta I_{t-1}, \quad (11.15)$$

что совпадает с (11.11). Ни одна из других переменных не дает заметного улучшения предиктора, построенного на первых разностях.

11.8. Очевидно, для рассмотренного примера можно проделать еще больше вычислений. Хотя представляется маловероятным, что при прогнозировании I_t нужна какая-либо помощь от внешних переменных и что авторегрессия второго порядка уводит нас так уж далеко. В таком случае можно, видимо, искать другие объясняющие переменные или, если считается достаточным ограничиться автопроекцией, исследовать возможность повышения точности прогнозирования с помощью адаптивных методов.

Пример 11.2

В исследовании [16] дано описание попыток связать индекс FT курса обычных акций промышленных предприятий с лаговыми переменными других экономических факторов, таких, как банковские ссуды, индекс курсов правительственных ценных бумаг в Соединенном Королевстве, индекс Standard and Poor¹ по нью-йоркской фондовой бирже, учетная ставка банка Англии, обязательства в фунтах стерлингов и производство легковых автомобилей в Соединенном Королевстве. Была также рассмотрена мера, выражающая то, что было названо индексом эйфории. Назначение этого индекса состоит в измерении инерции фондовой биржи — если курсы росли в течение длительного времени, рынок может считать, что они будут продолжать расти. (Мы могли бы, наоборот, рассмотреть индекс дисфории, обратный индексу эйфории, указывающий, когда курсы падают, что владельцы ценных бумаг в целом могут ожидать их дальнейшее падение.) Соответствующие лаги в этом случае отыскивались путем исследования кросс-коррелограмм между индексом FT и различными лаговыми значениями других переменных. Величина лага определялась по точкам наибольшей корреляции (или наименьшей отрицательной корреляции). Ряды были квартальными, сезонные колебания устранялись с помощью одного из вариантов программы Census Mark XI. Большинство рядов имело тренд, и была предпринята попытка элиминировать его. В основном это делалось путем построения линейной регрессии от времени, а не скользящего среднего.

При рассмотрении взаимосвязей в экономике имеются доводы в пользу использования не самих переменных, а их логарифмов. Например, выражение цены в виде суммы физического объема продукции, ставки процента и расстояния в милях, пройденного по железной дороге, выглядит слабым отражением действительности. Экономические уравнения такой степени сложности будут более реалистичными, если их выразить через произведения, как, например, это делается в функции Кобба—Дугласа. Разумеется, их можно эквивалентно выразить в виде уравнений линейных относительно логарифмов рассматриваемых величин, при условии (которое почти всегда выполняется), что переменные не являются отрицательными или малыми положительными величинами. В упомянутом исследовании оценивалось одно уравнение с исходными переменными и одно в логарифмах от них.

Авторы считали, что, прежде чем представлять результаты для общего обсуждения, они должны дать достаточно хорошие прогнозы за тот или иной период. Некоторые из уравнений регрессии были удивительно простыми. Например, индекс FT в момент t связывался с индексом FT для товаров широкого потребления (Commodity Index) в момент $t - 8$ и с индексом эйфории в момент t . При этом значение R^2 равнялось 0,95.

11.9. Обоснование уравнений этого типа представляет трудность. Программа исключения переменных типа тех, что рассматривались в разделах 11.6 и 11.7, может удалить переменные, присутствие кото-

¹ Корпорация США, рассчитывающая этот индекс. — *Примеч. пер.*

рых экономист считает необходимым. И хотя, как упоминалось ранее, это может произойти при исследовании системы с сильными внутренними корреляциями, в которой переменные могут замещать друг друга, отсутствие в уравнении очевидных причинных переменных и присутствие переменных, причинный характер которых сомнителен, придают ему нереальный вид. По этому вопросу можно развернуть хорошую дискуссию. Бокс и Ньюболд [12] критиковали этот метод в целом как необоснованный. С другой стороны, история науки учит, что не следует отвергать эмпирически наблюдаемые взаимосвязи только потому, что их не удается объяснить при современном уровне знаний. Я считаю, что в действительности нужно проверять, являются ли взаимосвязи достаточно стабильными, чтобы их использовать при прогнозировании, «работают» ли они на деле.

11.10. Когда мы строим уравнение для всего ряда в целом и судим о качестве по R^2 , фактически мы получаем преувеличенное представление о его точности при прогнозировании. Если бы мы, двигаясь вдоль ряда, рассчитывали уравнение в различных точках, нам следовало бы делать каждый прогноз, основываясь на информации, которая имела в тот момент, и не использовать информацию, поступившую в более позднее время. Для того чтобы получить представление о ряде в ретроспективе, нужно, строго говоря, вернуться назад и в каждой точке рассчитать уравнение на основе имевшейся тогда информации (может быть, даже заново обращаясь к программе испытания и исключения переменных). Это требует больше вычислений, чем обычно считается приемлемым даже при применении ЭВМ. Подтверждение в будущем всегда выглядит более убедительно, чем подтверждение ретроспективой. Но не всегда имеется возможность ждать длительный период с тем, чтобы посмотреть, как «работает» метод. При большинстве процедур в качестве компромисса возвращаются на несколько точек назад, для каждой из этих точек подсчитывают значение по уравнению и смотрят, какие при этом получаются ошибки прогнозирования.

11.11. Эта тема далеко не исчерпана, и, по-видимому, потребуется намного больше исследований и опыта, прежде чем можно будет сделать какие-либо решительные выводы относительно того или иного метода прогнозирования в частных случаях. Поэтому мы заключаем эту главу перечислением некоторых моментов, которые специалист в области анализа временных рядов обычно учитывает в своей работе.

1) Если сравнивать метод автопроекции с методом лаговых соотношений, то сначала можно прийти к выводу, что от последнего следует ожидать лучшей работы в качестве предиктора, так как он в известном отношении использует больше информации, отвечающей поставленной задаче. Однако если переменные имеют ошибку (а у некоторых экономических переменных ошибка может быть существенной), то само введение в расчет дополнительных переменных может внести добавочную ошибку, заглушающую систематическую часть процесса. Говоря техническим языком, добавление дополнительных переменных может ввести шум, достаточный для уничтожения истинного сообщения. Выбор одного из этих двух методов будет, очевидно, зависеть от

конкретных условий и от величины ошибки наблюдения во вводимых переменных.

2) Эконометрический подход, о котором мы говорили в разделе 11.3, приводит к так называемой «приведенной форме», и до сравнительно недавнего времени каждое из уравнений на практике оценивалось методом наименьших квадратов отдельно. В случае применения какого-либо конкретного метода прогнозирования по единственному уравнению из тех, что были рассмотрены в этой главе, остается только построить выписанное уравнение. Однако имеются основания полагать, что оценки могут быть смещенными, и остается открытым вопрос, будут ли результаты более точными при использовании нескольких уравнений (ср. [85]).

3) Во всяком случае коэффициент множественной детерминации¹, как было показано в примере 11.1, может быть обманчивой мерой точности прогнозирования в том смысле, что на него сильно влияют трендовые составляющие ряда. Здесь до некоторой степени предоставляется свобода выбора: работать ли с исходными рядами или попытаться исключить тренд и прогнозировать его отдельно. И в том, и другом случае подстерегают опасности. И в частности, в примере 4.4 на с. 57—58 отмечалось, что метод последовательных разностей переменной может дать обманчивые результаты в том смысле, что с его помощью может быть принята модель, которая фактически не совпадает с действительной моделью процесса.

4) Несмотря на то что большая часть классической теории регрессии основывается на методе наименьших квадратов, имеются сомнения относительно оптимальности этого метода в эконометрических исследованиях. Остаточные члены в таких уравнениях, как приведенная форма в разделе 11.3, могут содержать случайно опущенные переменные, но даже если это не так, все равно нельзя с полной уверенностью предполагать, что члены ошибки распределены нормально. Например, лучше, может быть, строить уравнение путем минимизации суммы абсолютных разностей между прогнозом и наблюдением или возводить отклонения не во вторую, а в какую-либо другую степень. Это, видимо, приводит к новым вычислительным трудностям, но благодаря электронным компьютерам такие проблемы более не следует рассматривать как неразрешимые.

5) Использование программы исключения переменных типа той, что описана нами, очевидно, ничего не добавляет в показатель качества уравнения и может вызвать возражение у экономиста, который чувствует, что некоторые переменные следует оставлять в уравнении, какими бы ни были результаты работы этой программы. Эту проблему можно снять, составив программу для ЭВМ таким образом, чтобы она не исключала некоторых переменных — они, так сказать, «вне конкуренции».

6) В обычной регрессии одной переменной на p других под числом степеней свободы остатка, как правило, понимается величина $n-p$, где n — объем выборки. Как отмечалось в разделе 1.16, наблю-

¹ Т. е. R^2 . — Примеч. пер.

дения в общем случае не являются независимыми и трудно увидеть, как можно построить точный критерий существенности значения R^2 , даже если остатки нормальны.

7) Еще одно обвинение, которое может быть брошено в адрес регрессионного метода, касается появляющихся время от времени больших лагов. Иногда находят, что наблюдение зависимой переменной в момент t связано с ее лаговыми значениями или лаговыми значениями других переменных, имевшими место несколько лет назад. А предположение о том, что столь большие лаги действительно отражают реальность, может противоречить здравому смыслу. В таких случаях не нужно быть догматиком, так как иногда удается объяснить, почему этого следовало ожидать. Однако при прогнозировании на сравнительно короткие периоды времени возможно еще одно объяснение, а именно, как отмечалось в предшествующих главах, авторегрессионная система осциллирует и осцилляциям может как бы не хватить времени, чтобы выпасть из синхронности, так что явление предстает в виде ложной цикличности, которая может означать, что соотношение с большими лагами объясняется просто повторяющейся историей.

8) Как мы уже говорили, почти всегда при построении таких соотношений предполагается, что переменные наблюдаются без ошибки. Если, однако, мы пытаемся построить модель, предполагая существование ошибок в переменных (в отличие от рассмотренных ранее методов, в которых обычно предполагаются ошибки в уравнениях), то при ее построении и оценивании возникает несколько новых труднопреодолимых проблем, даже когда речь идет лишь о нескольких переменных. Желающих ознакомиться с теорией этого вопроса можно отослать к гл. 29 третьего издания второго тома книги [52a].

9) Наконец необходимо остерегаться ложных связей, появляющихся при агрегировании. В примере 1.1 была дана иллюстрация эффектов, которые могут при этом возникнуть. Даже если изменения ряда при переходе от одного момента времени к другому более или менее случайны, его агрегирование за большие периоды может породить корреляции, заставляющие думать о явлениях, которых на самом деле и нет. К сожалению, как уже говорилось ранее, многие ряды, с которыми приходится иметь дело (особенно в экономике), агрегированные и маловероятно, чтобы кому-либо из специалистов удалось избежать этого эффекта.

11.12. И последнее замечание. На практике методы прогнозирования обычно испытывают на рядах, истинный механизм генерирования которых неизвестен. Как уже отмечалось, обосновать применение того или иного метода на основе имеющихся «истинных» значений без испытания на ретроспективном материале или последующих данных нелегко. По-видимому, здесь обычно имеется много возможностей для проверки различных методов на искусственно построенных рядах. Это позволяет увидеть, насколько точно эти методы могут определить истинный генерирующий механизм, который в таких случаях, конечно, известен.

12

ЗАМЕЧАНИЯ К НЕКОТОРЫМ ПРОБЛЕМАМ ОЦЕНИВАНИЯ И СУЩЕСТВЕННОСТИ

12.1. До сих пор наш подход к проблемам построения и оценивания был до некоторой степени интуитивным, большей частью предполагающим, что значения, подсчитанные по выборкам, являются приемлемыми оценками констант генеральной совокупности, или что метод наименьших квадратов обеспечивает хорошее построение кривых и регрессионных уравнений. Эти допущения обычно могут быть оправданы, хотя мы отмечали несколько случаев, когда их принятие таило опасность — смещение при оценивании автокорреляций или выборочную изменчивость ординат спектра. Теоретику желательно исследовать эти вопросы более глубоко. К сожалению, проблемы, которые возникают даже в простейших случаях, весьма трудны и требуют сложных математических выкладок, выходящих за рамки этой книги. Фактически многие проблемы многомерного анализа рядов все еще не решены. Поэтому в этой последней главе предпринята попытка дать специалисту некоторые необходимые ему результаты, но он должен принять эту теорию на веру.

12.2. Давайте прежде всего посмотрим, почему эти проблемы трудны.

(а) В гл. 4 уже отмечались трудности определения доверительных границ оценок вследствие того, что «ошибки» могут возникать из-за неправильной спецификации модели. Та же самая ситуация и в обычном статистическом исследовании, в основу которого может быть положена совокупность, не являющаяся источником выборки. Но это не так страшно частично из-за того, что можно исследовать устойчивые результаты при отклонении генеральной совокупности от принятой гипотезы, частично благодаря тому, что центральная предельная теорема обычно обеспечивает эту устойчивость в выборочных распределениях, частично из-за того, что случайность выборки часто можно гарантировать. В анализе временных рядов ошибки неправильной

спецификации более важны. И даже когда их нет, точные формулы стандартных ошибок или дисперсий, как мы видели, в значительной степени зависят от гипотезы о нормальности или от оценивания большого числа параметров генеральной совокупности. Возможно, что многие возникающие проблемы выборки надо будет решать методами Монте-Карло, а не формальными методами.

(б) Часто нужно строить уравнения, являющиеся авторегрессией или смесью авторегрессии и обычной регрессии. Отсюда не следует, что обычная теория регрессии, основывающаяся на методе наименьших квадратов, применима для построения авторегрессий. Другими словами, оценки метода наименьших квадратов могут оказаться смещенными или иметь не минимальную дисперсию в классе линейных оценок. Мало что известно о точных свойствах оценок наименьших квадратов для малых выборок. К счастью, имеется полезная теорема Манна и Вальда [59] (для удобства она включена в Сборник статей Вальда), имеющая такое же общее значение, какое классическая теория регрессии имеет для больших выборок. Конкретнее, если в авторегрессии

$$u_t = - \sum_{j=1}^k \alpha_j u_{t-j} + \varepsilon_t \quad (12.1)$$

ε_t независимы (нормальность не обязательна), то оценки, полученные методом наименьших квадратов (которые в действительности являются решениями уравнений Юла—Уокера), будут состоятельными, т. е. математическое ожидание a_i параметра α_i генеральной совокупности сходится к α_i при n , стремящемся к бесконечности, где n — объем выборки; кроме того, $(a_i - \alpha_i)/n$ имеют асимптотически нормальное многомерное распределение с матрицей конечных дисперсий. Средний квадрат остатков в авторегрессии S^2 представляет собой оценку $\text{var } \varepsilon$, а ковариация оценок¹ a_j и a_l оценивается умножением S^2 на соответствующий элемент матрицы, обратной к матрице с элементами $(\sum u_{t-j} u_{t-l})$.

(в) Следовательно, из-за отсутствия точных знаний мы предполагаем, что теория наименьших квадратов обычно применима к авторегрессии. В действительности мы идем еще дальше, предполагая, что она применима к смешанным системам регрессионных уравнений, так фактически мы и поступали в гл. 11. Однако когда система таких уравнений образует модель, обработка каждого уравнения в отдельности методами наименьших квадратов без модификации может вести к значительным смещениям. До сих пор еще не совсем понятно, как надо обрабатывать такие системы. Более полное раскрытие темы построения моделей можно найти у Фиска [30] и Тейла [85].

(г) В ряде моделей, применяемых нами в анализе временных рядов, даже состоящих из одного уравнения, предполагается, что остаток ε не зависит от выборки и, в частности, не зависит от номера члена упорядоченного во времени множества. Адекватность или справедливость этой гипотезы проверить нелегко, особенно для авторегрессии.

¹ См.: Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М., Статистика, 1973, формула (2.6.14) на с. 74. — *Примеч. пер.*

12.3. Можно построить иерархию типов процессов, параметры которых нужно оценить или адекватность которых необходимо опровергнуть, в порядке возрастания сложности:

(а) прежде всего авторегрессионный процесс типа (12.1) со случайными остатками;

(б) авторегрессии с неслучайными остатками и, в частности, авторегрессии с остатками, являющимися скользящими средними случайных членов:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^l \beta_j \varepsilon_{t-j}; \quad (12.2)$$

(в) регрессии с авторегрессионными остатками:

$$y_t = \sum_{j=1}^q \beta_j x_{jt} + u_t; \quad (12.3)$$

(г) смешанные системы, в которых некоторые x в (12.3) являются лаговыми значениями y -в, но остатки случайны:

$$y_t = - \sum_{j=1}^k \alpha_j y_{t-j} + \sum_{l=1}^q \beta_l x_{lt} + \varepsilon_t; \quad (12.4)$$

(д) аналогичный процесс, в котором остатки представляются скользящим средним случайных членов или авторегрессией;

(е) системы, состоящие из нескольких уравнений рассмотренных выше типов.

ПОСТРОЕНИЕ АВТОРЕГРЕССИЙ

12.4. Когда рассматриваются процессы (12.1), следует использовать уравнения Юла—Уокера. При построении модели нужно лишь решить вопрос о порядке процесса. Вполне естественно продолжать увеличивать число членов k до тех пор, пока модель существенным образом не улучшится.

Пример 12.1

В табл. 12.1 показаны остатки, полученные после того, как из ряда данных о поголовье овец, приведенных в табл. 1.2, был исключен тренд, оценивающийся с помощью простого скользящего среднего с длиной отрезка усреднения 9. Первые 10 сериальных корреляций этого ряда выглядят следующим образом:

Порядок корреляции		Порядок корреляции	
1	0,595	6	0,144
2	-0,151	7	0,203
3	-0,601	8	0,118
4	-0,537	9	0,006
5	-0,138	10	-0,078

Значения остатков от данных о поголовье овец из табл. 1.2
после исключения тренда с помощью простого 9-точечного скользящего среднего

Год	Остаток (10 000)	Год	Остаток (10 000)	Год	Остаток (10 000)
1871	-176	1893	+34	1915	+19
72	-112	94	-103	16	+128
73	+50	95	-104	17	+97
74	+141	96	-15	18	+69
75	+60	97	-23	19	-29
76	-20	98	+17	20	-174
77	+12	99	+71	21	-107
78	+82	1900	+35	22	-142
79	+130	01	+16	23	-109
80	-14	02	-27	24	-23
81	-166	03	-32	25	+60
82	-179	04	-49	26	+121
83	-84	05	-61	27	+94
84	+38	06	-52	28	-25
85	+97	07	-24	29	-90
86	+8	08	+68	30	-75
87	-5	09	+141	31	+72
88	-105	10	+119	32	+152
89	-99	11	+66	33	+112
90	+35	12	-52	34	-64
91	+159	13	-117	35	-87
92	+167	14	-61		

В разделе 6.23 отмечалось, что у процесса порядка k частная корреляция членов, разделенных более чем k единицами времени, должна равняться нулю. Частные корреляции оказываются следующими:

Лаг k	Частная r лага k	$\Pi (1-r^2) = 1-R^2$
1	0,595	0,6460
2	-0,782	0,2509
3	0,097	0,2485
4	-0,183	0,2402
5	0,031	0,2400
6	0,014	0,2400

(12.6)

Здесь значение частной r для $k = 3$, например, есть частная корреляция u_t и u_{t+3} , когда их зависимость от промежуточных членов u_{t+1} , u_{t+2} устранена. Столбец справа дает дисперсию остатка (деленную на $\text{var } u$), которая равна дополнению множественного коэффициента детерминации R^2 до 1. Таким образом, при $k = 3$, т. е. при построении уравнения с тремя членами, не объясненными остаются 24,85% дисперсии. Очевидно, что дальше процесса второго порядка (процесса Юла), имеющего значение $1 - R^2$, равное 0,2509, идти не стоит. Последующие члены дают незначительное улучшение качества отображения, а то и вовсе никакого.

Оценки констант α_1 и α_2 для этого ряда получены по (6.24) и (6.25) таким образом:

$$-a_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2} = 1,060; \quad -a_2 = \frac{r_2-1}{1-r_1^2} + 1 = -0,782,$$

и авторегрессионное уравнение имеет вид:

$$u_t = 1,060u_{t-1} - 0,782u_{t-2} + \varepsilon_t. \quad (12.7)$$

12.5. Кенуй [67] использовал свойство частных корреляций и получил критерий качества авторегрессионных моделей, который не требует явного подсчета частных корреляций. Рассмотрим переменную η_t , определенную выражением

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{t+j} = \eta_t, \quad (12.8)$$

где, в отличие от (12.7), индексы при u растут с ростом j . Тогда

$$\begin{aligned} \text{cov}(\eta_t, \eta_{t+l}) &= E \{ \sum \alpha_i u_{t+i} \sum \alpha_j u_{t+j+l} \} = \\ &= \sum_{i,j=0}^k \alpha_i \alpha_j \gamma_{|l+j-i|} = \end{aligned} \quad (12.9)$$

$$= \sum_{i=0}^k \alpha_i \sum_{j=0}^k \alpha_j \gamma_{|l+k-i|}, \quad (12.10)$$

где γ_p — автоковариация u_t лага p . При $l > 0$ вторая часть суммирования равна нулю вследствие уравнений Юла—Уокера, и тот же самый результат будет при $l < 0$. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \text{cov}(\eta_t, \eta_{t+l}) &= 0; \\ \text{var} \eta_t &= \text{var} \varepsilon_t. \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

Нужно отметить, что значение η_t зависит от ε_{t+k} и предыдущих ε и поэтому оно не зависит от ε_{t+k+l} при $l > 0$. Из (12.8) следует, что η_t является остатком от u_t после устранения влияния u_{t+1}, \dots, u_{t+k} , в то время как ε_{t+j} — остаток от u_{t+j} после устранения влияния $u_{t+j-1}, \dots, u_{t+j-k}$. Следовательно, при $j > k$ корреляция между η_t и ε_{t+j} будет частной корреляцией членов ряда, разделенных j единицами времени. Определим теперь

$$q_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_{t+j} \eta_t. \quad (12.12)$$

Имеем

$$E(q_j) = 0, \quad j > k; \quad (12.13)$$

$$\text{var} q_j = E(\varepsilon_{t+j}^2) E(\eta_t^2) = (\text{var} \varepsilon)^2, \quad j > k; \quad (12.14)$$

$$\text{cov}(q_i, q_{i+l}) = 0, \quad l \neq 0. \quad (12.15)$$

Нормируя величины q , определим

$$\omega_j = \frac{q_j}{\text{var } u} = \frac{1}{n \text{ var } u} \sum_{t=1}^n \varepsilon_{t+j} (\alpha_0 u_t + \dots + \alpha_k u_{t+k}), \quad j > k. \quad (12.16)$$

Каждая ω имеет нулевое математическое ожидание, дисперсию, равную $(\text{var } \varepsilon / \text{var } u)^2$, и коррелированности с другими ω нет. Из (12.16) для больших выборок

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{1}{n \text{ var } u} E \{ (\alpha_0 u_{t+j} + \dots + \alpha_k u_{t+j-k}) (\alpha_0 u_t + \dots + \alpha_k u_{t+k}) \} = \\ &= A_0 r_j + A_1 r_{j-1} + A_2 r_{j-2} + \dots + A_{2k} r_{j-2k}, \end{aligned} \quad (12.17)$$

где A имеют вид:

$$A_i = \sum_{j=0}^i \alpha_j \alpha_{i-j}. \quad (12.18)$$

Пример 12.2

Для процесса Юла находим, что

$$A_0 = 1; A_1 = 2\alpha_1; A_2 = \alpha_1^2 + 2\alpha_2; A_3 = 2\alpha_1\alpha_2; A_4 = \alpha_2^2,$$

и отсюда асимптотически

$$\omega_j = r_j + 2\alpha_1 r_{j-1} + (\alpha_1^2 + 2\alpha_2) r_{j-2} + 2\alpha_1\alpha_2 r_{j-3} + \alpha_2^2 r_{j-4}, \quad j > 2, \quad (12.19)$$

с дисперсией (см. уравнение (6.49))

$$\frac{1}{n} \left[\frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_2} \{ (1+\alpha_2)^2 - \alpha_1^2 \} \right]. \quad (12.20)$$

Например, для ряда данных о поголовье овец из примера 12.1, делая в (12.19) подстановку $\alpha_1 = -1,060$, $\alpha_2 = +0,782$, получаем, что $\omega_j = r_j - 2,120r_{j-1} + 2,683r_{j-2} - 1,658r_{j-3} + 0,612r_{j-4}$. Находим также, что $\omega_3 = 0,025$, $\omega_4 = 0,043$, $\omega_5 = 0,001$ со стандартной ошибкой 0,031, что подтверждает наш вывод о том, что это процесс второго порядка (Юла).

Розенхид [77] обобщил критерий Кенуя на случай многомерных рядов.

12.6. Авторегрессии можно строить более прямым способом с помощью ЭВМ и программы для включения и исключения переменных при условии, что переменные можно вводить в надлежащем порядке. Если для обработки данных применяется пошаговый метод или метод оптимальной регрессии, то переменные могут вводиться в различном порядке. Именно это и произошло в примере 11.2, в котором программа включила I_{t-1} , но затем отвергла последующие члены вплоть до I_{t-6} и далее вплоть до I_{t-13} . Возражений против этого, по-видимому, нет, поскольку речь идет о построении уравнения по критерию наименьших квадратов, который лежит в основе использования R^2 . Физическая интерпретация таких систем представляет трудность, так как систематическая часть ряда в этом случае зависит от значений в

изолированных точках прошлого и не зависит от промежуточных точек. В частных случаях это явление может получить вполне удовлетворительное объяснение.

ПРОЦЕССЫ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

12.7. В связи с тем, что скользящее среднее в правой части (12.2) имеет конечный отрезок усреднения, в то время как авторегрессионный процесс выражается через среднее с бесконечным отрезком усреднения, может показаться, что процессы скользящего среднего обрабатывать легче, чем авторегрессии. Однако дело обстоит иначе. Рассмотрим даже такой простой процесс, как

$$u_t = \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}. \quad (12.21)$$

Поскольку $\text{var } u_t = (1 + \beta^2) \text{var } \varepsilon$; $\text{cov}(u_t, u_{t+1}) = \beta$, представляется естественным оценить β как корень уравнения

$$\rho_1 = \frac{\beta}{1 + \beta^2}, \quad (12.22)$$

где ρ_1 — автокорреляция лага 1. Это, конечно, возможно, но, как показал Уигл [88], получаемая при этом оценка совершенно неэффективна. Другими словами, существуют оценки с гораздо меньшей дисперсией. Например, при $\beta = \frac{1}{2}$ дисперсия оценки, полученной по (12.22), более чем в три раза превышает оптимальную дисперсию.

12.8. Мы затрагивали эту тему в разделе 9.22 при обсуждении модели Бокса—Дженкинса для краткосрочного прогнозирования. В будущем все сложные проблемы оценивания этого рода будут, видимо, решены с помощью итеративных программ для ЭВМ. Однако целесообразно отметить, что, как указывал Дарбин [24], эта проблема для чистого процесса скользящего среднего

$$u_t = \sum_{j=0}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} \quad (12.23)$$

может быть решена путем обращения этого процесса в авторегрессию бесконечного порядка. Действительно, рассмотрим (12.21), выразив его в эквивалентном виде

$$u_t - \beta u_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} - \beta^3 u_{t-3} + \dots = \varepsilon_t. \quad (12.24)$$

Давайте оборвем ряд в левой части в некоторой точке $t - k$. Тогда мы имеем частный тип авторегрессии с $\alpha_j = (-\beta)^j$.

Допущенная ошибка равна оставшейся части ряда

$$(-\beta)^{k+1} u_{t-k-1} + (-\beta)^{k+2} u_{t-k-2} + \dots = (-\beta)^{k+1} \varepsilon_{t+k-1}.$$

При $|\beta| < 1$ это малая величина, имеющая дисперсию $\beta^{2k+2} \text{var } \varepsilon$.

Используя для решения проблемы авторегрессию конечного порядка, мы получаем оценки степеней $(-\beta)$, $(-\beta)^2$ и т. д. в виде ряда значений a_1, a_2, \dots, a_k . Они должны быть согласованы. Обращаясь к

теореме Манна—Вальда, Дарбин показал, что оценка максимального правдоподобия b величины β дается выражением

$$b = - \sum_{j=0}^{k-1} a_j a_{j+1} / \sum_{j=0}^k a_j^2 \quad (12.25)$$

и что она имеет оптимальную (минимальную) дисперсию $(1 - \beta^2)/n$.

Такие же результаты можно получить и для процесса скользящего среднего более общего вида (12.23), но это сопряжено со значительными алгебраическими преобразованиями. Для смешанных процессов авторегрессия — скользящее среднее типа (12.2) наилучшей процедурой получения численных решений оказывается некая итеративная процедура, подобная той, что кратко описана в разделе 9.22.

РЕГРЕССИЯ С АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫМИ ОСТАТКАМИ

12.9. Рассмотрим теперь регрессию

$$y_t = \sum_{j=1}^q \beta_j x_{jt} + u_t, \quad (12.26)$$

где u_t автокоррелированы таким образом:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j u_{t-j} = \varepsilon_t. \quad (12.27)$$

Если бы α были известны, мы могли бы сделать подстановку из (12.26) в (12.27) и получить

$$y'_t = \sum_{l=1}^q \beta_l x'_{lt} + \varepsilon_t, \quad (12.28)$$

где

$$y'_t = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{t-j}; \quad (12.29)$$

$$x'_{jt} = \sum_{i=0}^k \alpha_j x_{i, t-j}. \quad (12.30)$$

Теперь (12.28) обычная регрессия. Вся трудность в том, что α и порядок авторегрессии неизвестны. Как и в предыдущих случаях подобно-го рода, по-видимому, необходимо прибегнуть к некоторому итеративному процессу. Кочрен и Оркатт [15] предложили давать грубые оценки значений α , оценивать β из (12.28), с помощью этих оценок β пересматривать u , полученные из (12.26) и т. д., в надежде на сходимость к процессу со случайными ε . Дарбин [25] предложил альтернативный метод, основывающийся на максимальном правдоподобии, но полученные им выражения использовать нелегко.

12.10. Если некоторые из x -в являются лаговыми значениями y , то получается смесь авторегрессии и регрессии,

$$y_t = - \sum_{j=1}^k \alpha_j y_{t-j} + \sum_{l=1}^q \beta_l x_{lt} + \varepsilon_t, \quad (12.31)$$

и рассмотренная теория не применима почти так же, как обычная теория наименьших квадратов не применима к авторегрессиям, о чем уже говорилось. В развитие теоремы Манна—Вальда Дарбин показал [25], что асимптотические свойства оценок наименьших квадратов в такой системе будут теми же, что и у оценок при отсутствии в уравнении лаговых переменных, независимо от того, распределены остатки нормально или нет. Следовательно, при современном уровне знаний в качестве процедуры для практических исследований наилучшей представляется обработка таких уравнений методом наименьших квадратов, как если бы они были обычными регрессиями.

АНАЛИЗ ОСТАТКОВ

12.11. Очевидно, что при построении моделей временных рядов важно тщательно исследовать остатки, т. е. разности между наблюдаемыми значениями и значениями, полученными по оцененному уравнению. Рассматривая скользящие средние, мы отмечали в гл. 3, что процесс усреднения в известной мере искажает остатки. Тот же самый эффект будет при подборе полинома для всего ряда в целом и фактически при любом построении уравнения регрессионного типа.

Тем не менее весьма полезно (при использовании ЭВМ никаких вычислительных трудностей больше нет) получить все наблюдаемые остатки, а не полагаться в основном на подсчет их сумм квадратов, как это было во времена до ЭВМ. Несмотря на то что наблюдаемые остатки отличаются в известной степени от действительных остатков, в наблюдаемом множестве, особенно во временном ряде, могут обнаружиться важные эффекты, ухудшающие качество уравнения. Например, если имеются какие-либо необычные посторонние наблюдения, то их существование, как правило, будет обнаруживаться при больших значениях остаточного члена. Или еще один пример. Серия положительных или отрицательных знаков в ряде остатков является своеобразным индикатором того, что модель, построенная для их отражения, неадекватна.

12.12. Предположим, что между зависимой переменной y и независимыми переменными x_1, x_2, \dots, x_p существует регрессионная связь

$$y = \sum_{j=0}^p \beta_j x_j + \varepsilon, \quad (12.32)$$

или в матричной форме с n наблюдениями и y в виде матрицы размерности $n \times 1$:

$$y = X\beta + \varepsilon. \quad (12.33)$$

Интерес здесь представляют значения ε . Однако мы их не наблюдаем. Оценивание β методом наименьших квадратов дает

$$b = (X'X)^{-1} X'y, \quad (12.34)$$

и, следовательно, наблюдаемые остатки, скажем e , определяются как

$$e = y - XB = y - X(X'X)^{-1}X'y = \{I_n - X(X'X)^{-1}X'\}y = \quad (12.35)$$

$$= \{I_n - X(X'X)^{-1}X'\}\{XB + \varepsilon\} = \{I_n - X(X'X)^{-1}X'\}\varepsilon. \quad (12.36)$$

Таким образом, наблюдаемые остатки e являются линейными функциями действительных остатков ε . Если записать

$$M = I - X(X'X)^{-1}X', \quad (12.37)$$

то $e = M\varepsilon$. К сожалению, это соотношение не обратимо, так как матрица M вырожденная, что можно увидеть, умножив (12.37) на X .

КРИТЕРИЙ ДАРБИНА—УОТСОНА

12.13. Более важным, по-видимому, является факт существования сериальных корреляций в наблюдаемых остатках, что делает невозможным проверку независимости остатков в исходной модели только проверкой независимости наблюдаемых остатков. Требуется более тонкий критерий и он предложен Дарбином и Уотсоном [29].

Статистика Дарбина—Уотсона d определяется через наблюдаемые остатки как

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}. \quad (12.38)$$

Если пренебречь краевым эффектом, она равна $2(1 - r_1)$, где r_1 — первая сериальная корреляция наблюдаемых остатков. Альтернативно ее можно рассматривать как сумму квадратов первых разностей остатков, деленную на их сумму квадратов, как в методе последовательных разностей переменной. Если у остатков сильная положительная корреляция, величина d будет близка к нулю; если же остатки не коррелированы, она приблизительно равна 2.

12.14. Действительное распределение d , которое необходимо для точной проверки гипотезы о некоррелированности фактических остатков, очень сложное. Однако было показано, что d лежит между двумя статистиками d_L и d_U , распределения которых связаны с распределением первого коэффициента корреляции Р. Л. Андерсона (см. раздел 7.6). В таблицах приложения Б приведены значения d_L и d_U для 1%-ного и 5%-ного уровней существенности при n от 15 до 100 и k' (число независимых переменных в уравнении регрессии, не считая постоянного члена) от 1 до 5. Если наблюдаемое d ложится ниже затабулированного значения d_L , гипотеза о некоррелированности истинных остатков отвергается, а если оно ложится выше затабулированного значения d_U , эта гипотеза принимается. Для случаев неопределенности, когда d ложится между d_L и d_U , предлагаются различные процедуры. Последняя из них, сторонниками которой являются Дарбин и Уотсон, состоит в том, чтобы подойти ближе к распределению d с помощью статистики, связанной с d_U , а именно

$$d^* = a + bd_U, \quad (12.39)$$

где a и b — константы, выбранные так, что d^* и d^\dagger имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии. Формулы довольно сложны. Подробности можно найти у Дарбина и Уотсона [29]. Для практического использования, несомненно, будут написаны машинные программы. Для подсчета d они уже имеются.

12.15. Точность этого критерия зависит от гипотезы о нормальности распределения остатков e . Имеется некоторое основание считать распределение довольно устойчивым при умеренных отклонениях от нормальности, так что предположительно критерий Дарбина—Уотсона достаточно устойчив. Он применяется в тех случаях, когда регрессия строится для всего ряда. Строго говоря, он не применим к скользящим средним, несмотря на то, что он обычно применим к каждой части скользящего среднего, если она получена методами наименьших квадратов.

12.16. Более серьезный недостаток состоит в том, что критерий Дарбина—Уотсона не применим без модификации к авторегрессионным рядам. Анализ случая с большими выборками был проведен самим Дарбином [28]. В частности, им рассмотрены процессы, в которых остаток представляется авторегрессией марковского типа. Например, в случае процесса типа (12.4), в котором остатки связаны соотношением

$$e_t = \rho e_{t-1} + \eta_t \quad (12.40)$$

(где η_t — независимая нормальная последовательность), с помощью статистики g , равной $1 - \frac{1}{2}d$ и потому являющейся оценкой первой сериальной корреляции остатка, можно получить критерий для ρ , характеризующего генеральную совокупность. Построим

$$h = g \left(\frac{n}{1 - n \operatorname{var} a_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12.41)$$

где $\operatorname{var} a_1$ — оцененная дисперсия a_1 , получаемая применением обычной теории наименьших квадратов к уравнению (12.4), при $k=1$. При больших выборках эту величину можно проверять как обычную стандартную нормальную переменную. Более подробные результаты, по-видимому, не были получены и (во всяком случае, при малых выборках) положение остается относительно неисследованным. Общая посылка, однако, ясна. Критерий Дарбина—Уотсона, применяемый к обычным регрессиям (когда никакого члена с $\operatorname{var} a_1$, как правило, не будет), чувствителен к выборочным колебаниям оценок авторегрессионных параметров.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Анализ остатков при построении регрессионных уравнений для временных рядов рассмотрен в важной статье: Brown R. L., Durbin J., Evans J. M. (1975) Techniques for testing the constancy of regression relationships over time. *J. R. Statist. Soc.*, B, 37.

2. Простой критерий проверки остатков можно найти в статье: Geary R. C. (1970) Relative efficiency of count of sign changes for assessing residual autoregression in least-squares regression. *Biometrika*, 57, 123.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВЕСА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ТРЕНДОВ

Приведенные в приложении таблицы с разрешения взяты из работы: Dudley J. C o w d e n. Weights for fitting polynomial secular trends. Technical Paper № 4, School of Business Administration, University of North Carolina, 1962. Профессор Кауден дает значения вплоть до N (длина отрезка усреднения при вычислении скользящего среднего) $= 25$, а также приводит значения для четных N .

В таблицах, за исключением одной или двух первых, приведены веса, необходимые для построения на одном конце ряда, а веса для другого конца определяются симметрией. Например, при подборе прямой (простое скользящее среднее) к девяти точкам веса для первой точки равны $\frac{1}{45}$ [17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4, -7]. Весами для второй точки будут $\frac{1}{180}$ [56, 47, 38, 29, 20, 11, 2, -7, -16] и т. д. Для последних четырех точек веса будут в обратном порядке (читай таблицу снизу вверх); для точки, стоящей на четвертом месте от конца, — [8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32] и т. д.

В столбце 0 содержатся веса, требующиеся для экстраполяции построенного полинома на одну единицу за пределы наблюдаемого ряда.

Суммы в предпоследней строке являются суммами всех весов, приведенных в таблице.

В последней строке таблицы — квадратный корень из коэффициента уменьшения ошибки, т. е. квадратный корень из суммы квадратов весов.

Первый порядок

$N=3$

0	1	2	1	0
4	5	1	-1	-2
1	2	1	2	1
-2	-1	1	5	4
3	6	3	6	3
1,528	0,913	0,577	0,913	1,528

$N=5$

0	1	2	3	2	1	0
8	3	4	1	0	-1	-4
5	2	3	1	1	0	-1
2	1	2	1	2	1	2
-1	0	1	1	3	2	5
-4	-1	0	1	4	3	8
10	5	10	5	10	5	10
1,049	0,775	0,548	0,447	0,548	0,775	1,049

$N=7$

0	1	2	3	4
4	13	5	7	1
3	10	4	6	1
2	7	3	5	1
1	4	2	4	1
0	1	1	3	1
-1	-2	0	2	1
-2	-5	-1	1	1
7	28	14	28	7
0,845	0,681	0,535	0,423	0,378

$N=9$

0	1	2	3	4	5
16	17	56	22	32	1
13	14	47	19	29	1
10	11	38	16	26	1
7	8	29	13	23	1
4	5	20	10	20	1
1	2	11	7	17	1
-2	-1	2	4	14	1
-5	-4	-7	1	11	1
-8	-7	-16	-2	8	1
36	45	180	90	180	9
0,726	0,615	0,511	0,422	0,357	0,333

$N=11$

0	1	2	3	4	5	6
20	7	15	25	10	15	1
17	6	13	22	9	14	1
14	5	11	19	8	13	1
11	4	9	16	7	12	1
8	3	7	13	6	11	1
5	2	5	10	5	10	1
2	1	3	7	4	9	1
-1	0	1	4	3	8	1
-4	-1	-1	1	2	7	1
-7	-2	-3	-2	1	6	1
-10	-3	-5	-5	0	5	1
55	22	55	110	55	110	11
0,647	0,564	0,486	0,416	0,357	0,316	0,302

$N = 13$

0	1	2	3	4	5	6	7
8	25	44	19	32	13	20	1
7	22	39	17	29	12	19	1
6	19	34	15	26	11	18	1
5	16	29	13	23	10	17	1
4	13	24	11	20	9	16	1
3	10	19	9	17	8	15	1
2	7	14	7	14	7	14	1
1	4	9	5	11	6	13	1
0	1	4	3	8	5	12	1
-1	-2	-1	1	5	4	11	1
-2	-5	-6	-1	2	3	10	1
-3	-8	-11	-3	-1	2	9	1
-4	-11	-16	-5	-4	1	8	1
26	91	182	91	182	91	182	13
0,588	0,524	0,463	0,406	0,355	0,314	0,287	0,277

$N = 15$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
28	29	91	161	35	119	49	77	1
25	26	82	146	32	110	46	74	1
22	23	73	131	29	101	43	71	1
19	20	64	116	26	92	40	68	1
16	17	55	101	23	83	37	65	1
13	14	46	86	20	74	34	62	1
10	11	37	71	17	65	31	59	1
7	8	28	56	14	56	28	56	1
4	5	19	41	11	47	25	53	1
1	2	10	26	8	38	22	50	1
-2	-1	1	11	5	29	19	47	1
-5	-4	-8	-4	2	20	16	44	1
-8	-7	-17	-19	-1	11	13	41	1
-11	-10	-26	-34	-4	2	10	38	1
-14	-13	-35	-49	-7	-7	7	35	1
105	120	420	840	210	840	420	840	15
0,543	0,492	0,442	0,395	0,352	0,314	0,285	0,265	0,258

N=17

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
32	11	80	12	64	14	16	20	32	1
29	10	73	11	59	13	15	19	31	1
26	9	66	10	54	12	14	18	30	1
23	8	59	9	49	11	13	17	29	1
20	7	52	8	44	10	12	16	28	1
17	6	45	7	39	9	11	15	27	1
14	5	38	6	34	8	10	14	26	1
11	4	31	5	29	7	9	13	25	1
8	3	24	4	24	6	8	12	24	1
5	2	17	3	19	5	7	11	23	1
2	1	10	2	14	4	6	10	22	1
-1	0	3	1	9	3	5	9	21	1
-4	-1	-4	0	4	2	4	8	20	1
-7	-2	-11	-1	-1	1	3	7	19	1
-10	-3	-18	-2	-6	0	2	6	18	1
-13	-4	-25	-3	-11	-1	1	5	17	1
-16	-5	-32	-4	-16	-2	0	4	16	1
136	51	408	68	408	102	136	204	408	17
0,507	0,464	0,423	0,383	0,347	0,313	0,284	0,262	0,248	0,243

N=19

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	37	51	93	14	15	33	19	24	39	1
11	34	47	86	13	14	31	18	23	38	1
10	31	43	79	12	13	29	17	22	37	1
9	28	39	72	11	12	27	16	21	36	1
8	25	35	65	10	11	25	15	20	35	1
7	22	31	58	9	10	23	14	19	34	1
6	19	27	51	8	9	21	13	18	33	1
5	16	23	44	7	8	19	12	17	32	1
4	13	19	37	6	7	17	11	16	31	1
3	10	15	30	5	6	15	10	15	30	1
2	7	11	23	4	5	13	9	14	29	1
1	4	7	16	3	4	11	8	13	28	1
0	1	3	9	2	3	9	7	12	27	1
-1	-2	-1	2	1	2	7	6	11	26	1
-2	-5	-5	-5	0	1	5	5	10	25	1
-3	-8	-9	-12	-1	0	3	4	9	24	1
-4	-11	-13	-19	-2	-1	1	3	8	23	1
-5	-14	-17	-26	-3	-2	-1	2	7	22	1
-6	-17	-21	-33	-4	-3	-3	1	6	21	1
57	190	285	570	95	114	285	190	285	570	19
0,478	0,441	0,406	0,372	0,340	0,311	0,284	0,262	0,244	0,233	0,229

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
40	41	380	175	320	145	52	115	200	85	140	1
37	38	353	163	299	136	49	109	191	82	137	1
34	35	326	151	278	127	46	103	182	79	134	1
31	32	299	139	257	118	43	97	173	76	131	1
28	29	272	127	236	109	40	91	164	73	128	1
25	26	245	115	215	100	37	85	155	70	125	1
22	23	218	103	194	91	34	79	146	67	122	1
19	20	191	91	173	82	31	73	137	64	119	1
16	17	164	79	152	73	28	67	128	61	116	1
13	14	137	67	131	64	25	61	119	58	113	1
10	11	110	55	110	55	22	55	110	55	110	1
7	8	83	43	89	46	19	49	101	52	107	1
4	5	56	31	68	37	16	43	92	49	104	1
1	2	29	19	47	28	13	37	83	46	101	1
-2	-1	2	7	26	19	10	31	74	43	98	1
-5	-4	-25	-5	5	10	7	25	65	40	95	1
-8	-7	-52	-17	-16	1	4	19	56	37	92	1
-11	-10	-79	-29	-37	-8	1	13	47	34	89	1
-14	-13	-106	-41	-58	-17	-2	7	38	31	86	1
-17	-16	-133	-53	-79	-26	-5	1	29	28	83	1
-20	-19	-160	-65	-100	-35	-8	-5	20	25	80	1
210	231	2 310	1 155	2 310	1 155	462	1 155	2 310	1 155	2 310	21
0,453	0,421	0,391	0,362	0,334	0,307	0,283	0,262	0,244	0,230	0,221	0,218

Второй порядок

$N=5$

0	1	2	3	2	1	0
9	31	9	-3	-5	3	3
0	9	13	12	6	-5	-3
-4	-3	12	17	12	-3	-4
-3	-5	6	12	13	9	0
3	3	-5	-3	9	31	9
5	35	35	35	35	35	5
2,145	0,941	0,609	0,697	0,609	0,941	2,145

$N=7$

0	1	2	3	4
9	32	5	1	-2
3	15	4	3	3
-1	3	3	4	6
-3	-4	2	4	7
-3	-6	1	3	6
-1	-3	0	1	3
3	5	-1	-2	-2
7	42	14	14	21
1,558	0,873	0,535	0,535	0,577

$N=9$

0	1	2	3	4	5
42	109	126	378	14	-21
21	63	92	441	273	14
5	27	63	464	447	39
-6	1	39	447	536	54
-12	-15	20	390	540	59
-13	-21	6	293	459	54
-9	-17	-3	156	293	39
0	-3	-7	-21	42	14
14	21	-6	-238	-294	-21
42	165	330	2 310	2 310	231
1,273	0,813	0,528	0,448	0,482	0,505

$N=11$

0	1	2	3	4	5	6
135	83	270	450	55	-15	-36
81	54	199	414	87	46	9
37	30	138	373	109	92	44
3	11	87	327	121	123	69
-21	-3	46	276	123	139	84
-35	-12	15	220	115	140	89
-39	-16	-6	159	97	126	84
-33	-15	-17	93	69	97	69
-17	-9	-18	22	31	53	44
9	2	-9	-54	-17	-6	9
45	18	10	-135	-75	-80	-36
165	143	715	2 145	715	715	429
1,098	0,762	0,528	0,417	0,411	0,441	0,455

N = 13

0	1	2	3	4	5	6	7
99	47	33	231	121	33	-33	-11
66	33	25	198	132	77	33	0
38	21	18	167	138	111	86	9
15	11	12	138	139	135	126	16
-3	3	7	111	135	149	153	21
-16	-3	3	86	126	153	167	24
-24	-7	0	63	112	147	168	25
-27	-9	-2	42	93	131	156	24
-25	-9	-3	23	69	105	131	21
-18	-7	-3	6	40	69	93	16
-6	-3	-2	-9	6	23	42	9
11	3	0	-22	-33	-33	-22	0
33	11	3	-33	-77	-99	-99	-11
143	91	91	1 001	1 001	1 001	1 001	143
0,979	0,719	0,524	0,408	0,373	0,386	0,408	0,418

N = 15

0	1	2	3	4	5	6	7	8
273	158	819	7 371	2 275	2 184	273	-1 183	-78
195	117	638	6 201	2 184	2 795	1 482	429	-13
127	81	477	5 126	2 073	3 261	2 471	1 776	42
69	50	336	4 146	1 942	3 582	3 240	2 858	87
21	24	215	3 261	1 791	3 758	3 789	3 675	122
-17	3	114	2 471	1 620	3 789	4 118	4 227	147
-45	-13	33	1 776	1 429	3 675	4 227	4 514	162
-63	-24	-28	1 176	1 218	3 416	4 116	4 536	167
-71	-30	-69	671	987	3 012	3 785	4 293	162
-69	-31	-90	261	736	2 463	3 234	3 785	147
-57	-27	-91	-54	465	1 769	2 463	3 012	122
-35	-18	-72	-274	174	930	1 472	1 974	87
-3	-4	-33	-399	-137	-54	261	671	42
39	15	26	-429	-468	-1 183	-1 170	-897	-13
91	39	105	-364	-819	-2 457	-2 821	-2 730	-78
455	340	2 380	30 940	15 470	30 940	30 940	30 940	1 105
0,891	0,682	0,518	0,407	0,354	0,349	0,365	0,382	0,389

N = 17

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
36	409	1 260	308	628	372	52	-20	-156	-21
27	315	1 006	259	573	394	80	111	7	-6
19	231	777	214	519	408	103	222	147	7
12	157	573	173	466	414	121	313	264	18
6	93	394	136	414	412	134	384	358	27
1	39	240	103	363	402	142	435	429	34
-3	-5	111	74	313	384	145	466	477	39
-6	-39	7	49	264	358	143	477	502	42
-8	-63	-72	28	216	324	136	468	504	43
-9	-77	-126	11	169	282	124	439	483	42
-9	-81	-155	-2	123	232	107	390	439	39
-8	-75	-159	-11	78	174	85	321	372	34
-6	-59	-138	-16	34	108	58	232	282	27
-3	-33	-92	-17	-9	34	26	123	169	18
1	3	-21	-14	-51	-48	-11	-6	33	7
6	49	75	-7	-92	-138	-53	-155	-126	-6
12	105	196	4	-132	-236	-100	-324	-308	-21
68	969	3 876	1 292	3 876	3 876	1 292	3 876	3 876	323
0,822	0,650	0,509	0,407	0,347	0,326	0,332	0,347	0,360	0,365

N = 19

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
459	257	612	7 956	1 921	765	306	34	-459	-1377	-136
357	204	499	6 732	1 717	748	357	68	527	-204	-51
265	156	396	5 603	1 523	726	398	97	1 383	824	24
183	113	303	4 569	1 339	699	429	121	2 109	1 707	89
111	75	220	3 630	1 165	667	450	140	2 705	2 445	144
49	42	147	2 786	1 001	630	461	154	3 171	3 038	189
-3	14	84	2 037	847	588	462	163	3 507	3 486	224
-45	-9	31	1 383	703	541	453	167	3 713	3 789	249
-77	-27	-12	824	569	489	434	166	3 789	3 947	264
-99	-40	-45	360	445	432	405	160	3 735	3 960	269
-111	-48	-68	-9	331	370	366	149	3 551	3 828	264
-113	-51	-81	-283	227	303	317	133	3 237	3 551	249
-105	-49	-84	-462	133	231	258	112	2 793	3 127	224
-87	-42	-77	-546	49	154	189	86	2 219	2 562	189
-59	-30	-60	-535	-25	72	110	55	1 515	1 852	144
-21	-13	-33	-429	-89	-15	21	19	681	993	89
27	9	4	-228	-143	-107	-78	-22	-283	-9	24
85	36	51	68	-187	-204	-187	-68	-1377	-1156	-51
153	68	108	459	-221	-306	-306	-119	-2601	-2448	-136
969	665	1 995	33 915	11 305	6 783	4 845	1 615	33 915	33 915	2 261
0,768	0,622	0,500	0,406	0,344	0,314	0,308	0,318	0,331	0,341	0,345

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
285	631	2565	38475	29165	20805	2679	6935	1425	-3135	-6745	-171
228	513	2129	32832	25878	19589	2793	9006	4712	1083	1881	-76
176	405	1728	27599	22776	18363	2872	10767	7584	4811	2448	9
129	307	1362	22776	19859	17127	2916	12218	10041	8049	6242	84
87	219	1031	18363	17127	15881	2925	13359	12083	10797	9501	149
50	141	735	14360	14580	14625	2899	14190	13710	13055	12225	204
18	73	474	10767	12218	13359	2838	14711	14922	14823	14414	249
-9	15	248	7584	10041	12083	2742	14922	15719	16101	16068	284
-31	-33	57	4811	8049	10797	2611	14823	16101	16889	17187	309
-48	-71	-99	2448	6242	9501	2445	14414	16068	17187	17771	324
-60	-99	-220	495	4620	8195	2244	13695	15620	16995	17820	329
-67	-117	-306	-1048	3183	6879	2008	12666	14757	16313	17334	324
-69	-125	-357	-2181	1931	5553	1737	11327	13479	15141	16313	309
-66	-123	-373	-2904	864	4217	1431	9678	11786	13479	14757	284
-58	-111	-354	-3217	-18	2871	1090	7719	9678	11327	12666	249
-45	-89	-300	-3120	-715	1515	714	5450	7155	8685	10040	204
-27	-57	-211	-2613	-1227	149	303	2871	4217	5553	6879	149
-4	-15	-87	-1696	-1554	-1227	-143	-18	864	1931	3183	84
24	37	72	-369	-1696	-2613	-624	-3217	-2904	-2181	-1048	9
57	99	266	1368	-1653	-4009	-1140	-6726	-7087	-6783	-5814	-76
95	171	495	3515	-1425	-5415	-1691	-10545	-11685	-11875	-11115	-171
665	1771	8855	168245	168245	168245	33649	168245	168245	168245	168245	3059
0,722	0,597	0,490	0,405	0,344	0,307	0,294	0,296	0,306	0,317	0,325	0,328

Третий порядок

N=5

0	1	2	3	2	1	0
16	69	2	-3	2	-1	-4
-14	4	27	12	-8	4	11
-4	-6	12	17	12	-6	-4
11	4	-8	12	27	4	-14
-4	-1	2	-3	2	69	16
5	70	35	35	35	70	5
4,919	0,993	0,878	0,697	0,878	0,993	4,919

N=7

0	1	2	3	4
16	39	8	-4	-2
-4	8	19	16	3
-8	-4	16	19	6
-3	-4	6	12	7
4	1	-4	2	6
6	4	-7	-4	3
-4	-2	4	1	-2
7	42	42	42	21
2,903	0,964	0,673	0,673	0,577

N=9

0	1	2	3	4	5
224	85	56	-28	-56	-21
14	28	65	392	84	14
-76	-2	56	515	144	39
-81	-12	36	432	145	54
-36	-9	12	234	108	59
24	0	-9	12	54	54
64	8	-20	-143	4	39
49	8	-14	-140	-21	14
-56	-7	16	112	0	-21
126	99	198	1386	462	231
2,162	0,927	0,573	0,610	0,560	0,505

N=11

0	1	2	3	4	5	6
96	113	48	24	-72	-51	-36
24	48	41	96	132	36	9
-16	8	32	123	232	86	44
-31	-12	22	116	251	106	69
-28	-17	12	86	212	103	84
-14	-12	3	44	138	84	89
4	-2	-4	1	52	56	84
19	8	-8	-32	-23	26	69
24	13	-8	-44	-64	1	44
12	8	-3	-24	-48	-12	9
-24	-12	8	39	48	-6	-36
66	143	143	429	858	429	429
1,771	0,889	0,535	0,535	0,541	0,490	0,455

N = 31

0	1	2	3	4	5	6	7
176	265	33	231	-33	-407	-110	-11
66	132	25	396	132	308	33	0
-4	42	18	460	222	738	128	9
-41	-12	12	444	251	932	182	16
-52	-37	7	369	233	939	202	21
-44	-40	3	256	182	808	195	24
-24	-28	0	126	112	588	168	25
1	-8	-2	0	37	328	128	24
24	13	-3	-101	-29	77	82	21
38	28	-3	-156	-72	-116	37	16
36	30	-2	-144	-78	-202	0	9
11	12	0	-44	-33	-132	-22	0
-44	-33	3	165	77	143	-22	-11
143	364	91	2 002	1 001	4 004	1 001	143
1,526	0,853	0,524	0,479	0,501	0,484	0,441	0,418

N = 15

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1 456	2 059	8 008	44 044	2 002	-19 201	-28 756	-27 846	-78
676	1 144	5 833	52 624	17 017	19 604	8 879	1 404	-13
136	484	4 048	54 709	25 762	44 294	34 244	22 599	42
-199	44	2 618	51 524	29 252	57 004	49 054	36 684	87
-364	-211	1 508	44 294	28 502	59 869	55 024	44 604	122
-394	-316	683	34 244	24 527	55 024	53 869	47 304	147
-324	-308	108	22 599	18 342	44 604	47 304	45 729	162
-189	-216	-252	10 584	10 962	30 744	37 044	40 824	167
-24	-81	-432	-576	3 402	15 579	24 804	33 534	162
136	64	-467	-9 656	-3 323	1 244	12 299	24 804	147
256	184	-392	-15 431	-8 198	-10 126	1 244	15 579	122
301	244	-242	-16 676	-10 208	-16 396	-6 646	6 804	87
236	209	-52	-12 166	-8 338	-15 431	-9 656	-576	42
26	44	143	-676	-1 573	-5 096	-6 071	-5 616	-13
-364	-286	308	19 019	11 102	16 744	5 824	-7 371	-78
1 365	3 060	21 420	278 460	139 230	278 460	278 460	278 460	1 105
1,356	0,821	0,522	0,443	0,458	0,464	0,440	0,405	0,389

N=17

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
64	605	1 456	728	208	-132	-320	-384	-352	-21
34	364	1 055	728	468	268	121	20	-42	-6
12	182	728	691	624	534	428	313	196	7
-3	52	468	624	691	684	618	508	369	18
-12	-33	268	534	684	736	708	618	484	27
-16	-80	121	428	618	708	715	656	548	34
-16	-96	20	313	508	618	656	635	568	39
-13	-88	-42	196	369	484	548	568	551	42
-8	-63	-72	84	216	324	408	468	504	43
-2	-28	-77	-16	64	156	253	348	434	42
4	10	-64	-97	-72	-2	100	221	348	39
9	44	-40	-152	-177	-132	-34	100	253	34
12	67	-12	-174	-236	-216	-132	-2	156	27
12	72	13	-156	-234	-236	-177	-72	64	18
8	52	28	-91	-156	-174	-152	-97	-16	7
-1	0	26	28	13	-12	-40	-64	-77	-6
-16	-91	0	208	288	268	176	40	-112	-21
68	969	3 876	3 876	3 876	3 876	3 876	3 876	3 876	323
1,231	0,790	0,522	0,422	0,422	0,436	0,429	0,405	0,377	0,365

N=19

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3 264	14 467	1 632	15 504	25 296	-153	-1 224	-918	-27 744	-561	-136
1 904	9 248	1 193	14 144	36 856	5 372	714	68	-3 264	-136	-51
864	5 168	832	12 601	43 696	9 162	2 104	797	15 424	204	24
109	2 108	542	10 924	46 439	11 427	3 009	1 297	28 901	466	89
-396	-51	316	9 162	45 708	12 377	3 492	1 596	37 748	657	144
-686	-1 428	147	7 364	42 126	12 222	3 616	1 722	42 546	784	189
-796	-2 142	28	5 579	36 316	11 172	3 444	1 703	43 876	854	224
-761	-2 312	-48	3 856	28 901	9 437	3 039	1 567	42 319	874	249
-616	-2 057	-88	2 244	20 504	7 227	2 464	1 342	38 456	851	264
-396	-1 496	-99	792	11 748	4 752	1 782	1 056	32 868	792	269
-136	-748	-88	-451	3 256	2 222	1 056	737	26 136	704	264
129	68	-62	-1 436	-4 349	-153	349	413	18 841	594	249
364	833	-28	-2 114	-10 444	-2 163	-276	112	11 564	469	224
534	1 428	7	-2 436	-14 406	-3 598	-756	-138	4 886	336	189
604	1 734	36	-2 353	-15 612	-4 248	-1 028	-309	-612	202	144
539	1 632	52	-1 816	-13 439	-3 903	-1 029	-373	-4 349	74	89
304	1 003	48	-776	-7 264	-2 353	-696	-302	-5 744	-41	24
-136	-272	17	816	3 536	612	34	-68	-4 216	-136	-51
-816	-2 312	-48	3 009	19 584	5 202	1 224	357	816	-204	-136
3 876	24 871	4 389	74 613	298 452	74 613	21 318	10 659	298 452	6 783	2 261
1,133	0,763	0,521	0,411	0,394	0,407	0,412	0,400	0,377	0,354	0,345

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
912	5 781	1 938	22 287	32 946	15 447	-9 804	-20 634	-25 764	-52 383	-2 546	-171
570	3 876	1 437	19 380	38 760	46 740	11 571	2 964	-2 850	-12 540	-855	-76
300	2 346	1 020	16 593	41 820	68 610	27 276	20 775	14 844	19 050	540	9
95	1 156	680	13 940	42 469	82 100	37 906	33 380	27 815	43 108	1 660	84
-52	271	410	11 435	41 050	88 253	44 056	41 360	36 560	60 355	2 526	149
-148	-344	203	9 092	37 906	88 112	46 321	45 296	41 576	71 512	3 159	204
-200	-724	52	6 925	33 380	82 720	45 296	45 769	43 360	77 300	3 580	249
-215	-904	-50	4 948	27 815	73 120	41 576	43 360	42 409	78 440	3 810	284
-200	-919	-110	3 175	21 554	60 355	35 756	38 650	39 220	75 653	3 870	309
-162	-804	-135	1 620	14 940	45 468	28 431	32 221	34 290	69 660	3 781	324
-108	-594	-132	297	8 316	29 502	20 196	24 651	28 116	61 182	3 564	329
-45	-324	-108	-780	2 025	13 500	11 646	16 524	21 195	50 940	3 240	324
20	-29	-70	-1 597	-3 590	-1 495	3 376	8 420	14 024	39 655	2 830	309
80	256	-25	-2 140	-8 186	-14 440	-4 019	920	7 100	28 048	2 355	284
128	496	20	-2 395	-11 420	-24 292	-9 944	-5 395	920	16 840	1 836	249
157	656	58	-2 348	-12 949	-30 008	-13 804	-9 944	-4 019	6 752	1 294	204
160	701	82	-1 985	-12 430	-30 545	-15 004	-12 146	-7 220	-1 495	750	149
130	596	85	-1 292	-9 520	-24 860	-12 949	-11 420	-8 186	-7 180	225	84
60	306	60	-255	-3 876	-11 910	-7 044	-7 185	-6 420	-9 582	-260	9
-57	-204	0	1 140	4 845	9 348	3 306	1 140	-1 425	-7 980	-684	-76
-228	-969	-102	2 907	16 986	39 957	18 696	14 136	7 296	-1 653	-1 026	-171
1 197	10 626	5 313	100 947	302 841	605 682	302 841	302 841	302 841	605 682	33 649	3 059
1,055	0,738	0,520	0,405	0,374	0,382	0,391	0,389	0,374	0,353	0,335	0,328

Четвертый порядок

$N=7$

$N=9$

0	1	2	3	4
25	456	25	-35	5
-25	25	356	155	-30
-5	-35	155	212	75
15	10	-60	150	131
7	20	-65	25	75
-15	-19	70	-65	-30
5	5	-19	20	5
7	462	462	462	231
6,059	0,993	0,878	0,677	0,753

0	1	2	3	4	5
50	1 231	350	-250	-50	15
-25	175	1 412	1 025	75	-55
-25	-125	1 025	1 112	225	30
0	-75	225	675	304	135
18	45	-330	180	270	179
15	81	-360	-105	135	135
-5	5	37	-110	-35	30
-20	-85	385	37	-120	-55
10	35	-170	10	54	15
18	1 287	2 574	2 574	858	429
3,859	0,978	0,741	0,657	0,595	0,646

$N=11$

0	1	2	3	4	5	6
75	131	30	-30	-45	-15	18
-15	30	59	150	75	0	-45
-35	-10	50	177	125	50	-10
-20	-15	25	125	127	100	60
4	-5	0	50	100	127	120
20	6	-15	-10	60	120	148
20	10	-16	-35	20	80	120
5	5	-5	-23	-10	20	60
-15	-5	10	10	-23	-35	-10
-21	-10	15	30	-15	-48	-45
15	6	-10	-15	15	30	18
33	143	143	429	429	429	429
2,908	0,957	0,642	0,642	0,544	0,544	0,577

$N=13$

0	1	2	3	4	5	6	7
275	2 698	825	-825	-3 795	-2 915	-286	110
0	825	1 048	9 900	6 270	2 255	-495	-198
-100	-75	900	12 428	10 140	5 745	640	-135
-95	-345	570	10 140	9 992	7 625	2 230	110
-41	-265	205	5 745	7 625	8 042	3 610	390
20	-52	-90	1 280	4 460	7 220	4 339	600
60	140	-252	-1 890	1 540	5 460	4 200	677
65	220	-260	-3 072	-470	3 140	3 200	600
35	160	-135	-2 245	-1 283	715	1 570	390
-16	-5	60	-60	-990	-1 283	-235	110
-60	-177	220	2 160	-60	-2 245	-1 536	-135
-55	-195	198	2 420	660	-1 485	-1 430	-198
55	165	-195	-1 947	-55	1 760	1 210	110
143	3 094	3 094	34 034	34 034	34 034	17 017	2 431
2,379	0,934	0,582	0,604	0,542	0,486	0,505	0,528

N = 15

0	1	2	3	4	5	6	7	8
5 005	9 626	25 025	25 025	-50 050	-1 251 250	-749 749	-45 045	270 270
715	3 575	24 482	260 975	89 375	1 011 725	177 320	-420 849	-360 360
-1 265	275	20 075	331 466	147 950	2 240 975	1 038 785	-26 730	-370 062
-1 705	-1 100	13 750	295 900	151 708	2 698 300	1 732 390	746 460	-20 790
-1 249	-1 250	7 075	203 725	122 650	2 614 126	2 187 505	1 586 115	473 130
-415	-749	1 240	94 435	78 745	2 187 505	2 365 126	2 257 875	945 000
405	-45	-2 943	-2 430	33 930	1 586 115	2 257 875	2 605 626	1 275 750
945	540	-5 040	-67 284	-1 890	946 260	1 890 000	2 551 500	1 393 938
1 065	810	-4 995	-90 495	-22 842	372 870	1 317 375	2 095 875	1 275 750
751	695	-3 130	-72 385	-27 085	-60 499	627 500	1 317 375	945 000
115	251	-145	-23 230	-16 810	-311 665	-60 499	372 870	473 130
-605	-340	2 882	36 740	1 760	-369 820	-595 870	-502 524	-20 790
-1 045	-770	4 495	77 341	18 370	-255 530	-796 235	-995 445	-370 062
-715	-605	2 860	58 435	18 733	-20 735	-447 590	-714 285	-360 360
1,001	715	-4 235	-70 070	-15 470	251 251	695 695	810 810	270 270
3 003	11 628	81 396	1 058 148	529 074	11 639 628	11 639 628	11 639 628	5 819 814
2,040	0,910	0,548	0,560	0,535	0,474	0,451	0,473	0,489

N = 17

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 300	761	1 300	260	-260	-2 730	-4 628	-2 340	260	390
325	325	1 094	845	585	2 210	1 690	-403	-1 755	-390
-195	65	845	1 042	975	4 875	5 915	2 080	-1 079	-520
-390	-65	585	975	1 042	5 850	8 385	4 615	1 170	-234
-372	-105	340	750	900	5 648	9 420	6 810	4 060	270
-235	-89	130	455	645	4 710	9 322	8 375	6 845	830
-55	-45	-31	160	355	3 405	8 375	9 122	8 965	1 320
110	5	-135	-83	90	2 030	6 845	8 965	10 046	1 650
220	45	-180	-240	-108	810	4 980	7 920	9 900	1 766
253	65	-170	-295	-215	-102	3 010	6 105	8 525	1 650
205	61	-115	-250	-225	-625	1 147	3 740	6 105	1 320
90	35	-31	-125	-150	-750	-415	1 147	3 010	830
-60	-5	60	42	-20	-540	-1 500	-1 250	-204	270
-195	-45	130	195	117	-130	-1 950	-2 925	-2 795	-234
-247	-65	145	260	195	273	-1 625	-3 250	-3 835	-520
-130	-39	65	145	130	390	-403	-1 495	-2 210	-390
260	65	-156	-260	-180	-130	1 820	3 172	3 380	390
884	969	3 876	3 876	3 876	25 194	50 388	50 388	50 388	8 398
1,804	0,886	0,531	0,518	0,518	0,473	0,430	0,425	0,447	0,459

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2550	3583	5100	25500	-17850	-47430	-50184	-36720	-15810	255	340
850	1700	3949	49300	67150	40460	18870	2516	-8670	-680	-255
-150	500	2900	57533	109450	89640	62360	33170	6466	-660	-420
-625	-175	1975	54725	120266	109455	85515	55585	25445	-22	-290
-729	-465	1190	44820	109455	108188	93060	70230	44795	945	18
-595	-492	555	31180	85515	93060	89216	77700	61725	2000	405
-335	-360	74	16585	55585	70230	77700	78716	74125	2950	790
-40	-155	-255	3233	25445	44795	61725	74125	80566	3650	1110
220	55	-440	-7260	-484	20790	44000	64900	80300	4003	1320
396	220	-495	-13860	-19140	1188	26730	52140	73260	3960	1393
460	308	-440	-16115	-28820	-12100	11616	37070	60060	3520	1320
405	305	-301	-14155	-29180	-18225	-145	21041	41995	2730	1110
245	215	-110	-8692	-21235	-17400	-7860	5530	21041	1685	790
15	60	95	-1020	-7359	-10900	-11340	-7860	-145	528	405
-229	-120	270	6985	8715	-1062	-10900	-17400	-18225	-550	18
-410	-267	365	12865	21895	8715	-7359	-21235	-29180	-1310	-290
-430	-304	324	13580	25730	13970	-2040	-17384	-28310	-1465	-420
-170	-140	85	5508	12410	9180	3230	-3740	-10234	-680	-255
510	340	-420	-15555	-27234	-12240	6120	21930	31110	1428	340
1938	4807	14421	245157	490314	490314	490314	490314	490314	22287	7429
1,630	0,863	0,523	0,484	0,495	0,470	0,427	0,401	0,405	0,424	0,433

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
24 225	18 813	1 938	13 566	-1 938	-405 042	-2 603 703	-464 151	-307 173	-109 497	9 044	127 908
9 690	9 690	1 437	19 380	38 760	397 290	983 535	50 388	-48 450	-106 590	-14 535	-71 060
510	3 570	1 020	21 183	60 180	865 470	3 250 230	412 845	183 498	-14 790	-18 360	-143 055
-4 505	-170	680	20 060	66 949	1 074 230	4 464 370	647 020	381 055	130 798	-8 500	-123 420
-6 419	-2 090	410	16 970	63 190	1 090 553	4 868 365	775 075	538 495	299 920	9 732	-43 340
-6 170	-2 687	203	12 746	52 522	973 673	4 679 047	817 534	651 982	467 173	31 779	70 158
-4 570	-2 395	52	8 095	38 060	775 075	4 087 670	793 283	719 570	612 005	53 840	194 205
-2 305	-1 585	-50	3 598	22 415	538 495	3 259 910	719 570	741 203	718 715	72 870	310 090
65	-565	-110	-290	7 694	299 920	2 335 865	612 005	718 715	776 453	86 580	403 260
2 106	420	-135	-3 240	-4 500	87 588	1 430 055	484 560	655 830	779 220	93 437	463 320
3 510	1 188	-132	-5 049	-13 068	-78 012	631 422	217 728	558 162	725 868	92 664	484 033
4 095	1 620	-108	-5 640	-17 415	184 140	3 330	217 728	433 215	620 100	84 240	463 320
3 805	1 660	-70	-5 062	-17 450	-225 805	-416 435	98 095	290 383	470 470	68 900	403 260
2 710	1 315	-25	-3 490	-13 586	-205 765	-615 665	-1 910	140 950	290 383	48 135	310 090
1 006	655	20	-1 225	-6 740	-134 527	-607 730	-76 505	-1 910	98 095	24 192	194 205
-985	-187	58	1 306	1 667	-30 347	431 578	-121 546	-123 133	-83 287	74	70 158
-2 815	-1 015	82	3 550	9 710	80 770	-151 735	-134 527	-205 765	-225 805	-20 460	-43 340
-3 910	-1 570	85	4 828	14 960	165 070	141 695	-114 580	-230 962	-296 650	-32 895	-123 420
-3 570	-1 530	60	4 335	14 484	181 050	333 030	-62 475	-177 990	-258 162	-31 960	-143 055
-969	-510	0	1 140	4 845	79 458	281 010	19 380	-24 225	-67 830	-11 628	-71 060
4 845	1 938	-102	-5 814	-17 898	-196 707	-181 203	126 939	254 847	321 708	34 884	127 908
20 349	26 565	5 313	100 947	302 841	5 148 297	25 741 485	5 148 297	5 148 297	5 148 297	572 033	2 860 165
1,494	0,842	0,520	0,458	0,470	0,460	0,426	0,393	0,379	0,388	0,404	0,411

Пятый порядок

$N=7$

$N=9$

0	1	2	3	4
36	923	1	-5	5
-69	6	148	30	-30
50	-15	15	233	75
15	20	-20	100	131
-48	-15	15	-75	75
29	6	-6	30	-30
-6	-1	1	-5	5
7	924	154	308	231
15,625	0,999	0,980	0,980	0,753

0	1	2	3	4	5
48	425	72	-54	32	15
-57	18	1 385	261	-213	-55
-2	-27	522	400	582	30
33	8	-213	291	905	135
12	15	-220	60	540	179
-23	-6	123	-101	-27	135
-18	-13	186	-66	-202	30
27	12	-187	93	123	-55
-8	-3	48	-26	-24	15
12	429	1 716	858	1 716	429
7,654	0,995	0,898	0,683	0,726	0,646

$N=11$

0	1	2	3	4	5	6
108	557	27	-153	-4	6	18
-81	54	184	666	3	-22	-45
-46	-51	111	719	38	13	-10
24	-16	6	456	57	48	60
48	24	-44	156	48	57	120
20	24	-30	-40	20	40	143
-24	-4	12	-96	-8	12	120
-39	-24	34	-48	-18	-8	60
-4	-9	9	29	-4	-8	-10
45	26	-36	54	17	6	-45
-18	-9	13	-27	-6	-1	18
33	572	286	1716	143	143	429
5,078	0,987	0,802	0,647	0,631	0,631	0,577

$N=13$

0	1	2	3	4	5	6	7
792	420	132	-429	-704	33	132	110
-363	66	455	1 881	1 221	-352	-330	-198
-398	-39	342	2 030	2 586	453	-50	-135
-69	-32	111	1 293	3 045	1 314	405	110
204	3	-64	453	2 628	1 680	720	390
260	24	-120	-100	1 620	1 440	777	600
120	20	-72	-270	440	780	600	677
-90	0	20	-156	-480	40	300	600
-216	-18	84	47	-816	-429	20	390
-153	-18	69	147	-473	-408	-120	110
78	3	-22	54	294	47	-78	-135
253	24	-99	-121	759	462	55	-198
-132	-11	48	33	-396	-198	0	110
286	442	884	4 862	9 724	4 862	2 431	2 431
3,849	0,975	0,717	0,646	0,560	0,588	0,565	0,528

N = 15

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1 716	11 919	1 287	-11 583	-4 147	-67 353	5 577	22 165	2 145
-429	2 574	2 742	59 202	7 293	10 582	-17 160	-40 326	-2 860
-814	-891	2 277	67 827	11 913	227 337	-605	-23 925	-2 937
-429	-1 276	1 122	47 652	12 048	422 532	26 730	22 660	-165
96	-471	37	20 667	9 603	513 417	47 835	68 055	3 755
425	390	-600	-550	6 075	478 350	55 002	95 250	7 500
450	775	-705	-10 875	2 575	340 275	47 625	98 629	10 125
225	600	-400	-10 680	-150	150 200	30 000	81 000	11 063
-100	75	75	-3 875	-1 695	-29 325	9 125	50 625	10 125
-345	-450	450	4 050	-1 975	-140 730	-7 500	18 250	7 500
-366	-639	513	7 983	-1 203	-147 947	-14 073	-5 865	3 755
-121	-324	198	5 148	132	-52 932	-8 690	-14 916	-165
264	341	-327	-2 937	1 287	87 813	4 455	-8 525	-2 937
429	726	-572	-8 502	1 287	146 718	12 870	4 290	-2 860
-286	-429	363	4 433	-1 053	-91 377	-6 435	2 145	2 145
715	12 920	6 460	167 960	41 990	1 847 560	184 756	369 512	46 189
3,137	0,960	0,652	0,635	0,536	0,527	0,546	0,517	0,489

N = 17

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 744	6 920	1 872	-52	-832	-1 794	-208	2 236	6 240	195
-351	1 872	2 825	403	1 443	1 391	-1 391	-4 407	-8 515	-195
-1 534	-312	2 418	486	2 262	3 939	1 066	-2 496	-7 878	-260
-1 209	-832	1 443	377	2 201	5 499	4 511	2 899	195	-117
-348	-552	428	202	1 692	5 972	7 276	8 394	10 100	135
443	-48	-321	41	1 041	5 457	8 511	12 027	18 255	415
858	344	-678	-64	446	4 197	8 018	12 994	22 770	660
825	480	-655	-101	15	2 525	6 085	11 385	23 117	825
440	360	-360	-80	-216	810	3 320	7 920	19 800	883
-99	80	45	-25	-265	-597	485	3 685	14 025	825
-558	-216	386	34	-186	-1 417	-1 670	-132	7 370	660
-733	-384	519	69	-51	-1 497	-2 573	-2 505	1 455	415
-516	-328	372	62	68	-864	-1 996	-2 834	-2 388	135
39	-48	-13	13	117	221	-221	-1 209	-3 445	-117
650	312	-438	-52	78	1 209	1 794	1 326	-1 950	-260
741	416	-507	-73	-13	1 209	2 249	2 509	585	-195
-624	-312	416	52	-48	-1 066	-1 664	-1 404	1 040	195
1 768	7 752	7 752	1 292	7 752	25 194	33 592	50 388	100 776	4 199
2,675	0,945	0,604	0,613	0,533	0,487	0,503	0,508	0,479	0,459

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3 672	8 288	3 978	-3 978	-16 796	-91 494	-19 890	5 066	25 704	1 377	340
1 02	2 652	4 697	135 252	29 614	78 676	-1 326	-18 020	-36 346	-1 428	-255
-1 228	-78	3 978	167 888	46 904	176 046	33 254	-6 274	-33 420	-1 738	-420
-1 263	-988	2 613	140 712	46 256	216 996	68 289	20 256	1 839	-660	-290
-696	-897	1 157	88 023	36 166	216 475	93 951	47 689	46 016	978	18
-1	-390	-39	33 254	22 763	187 902	105 254	67 442	83 703	2 594	405
534	149	-795	-9 411	10 128	143 067	101 163	75 361	106 278	3 819	790
774	504	-1 069	-33 420	613	92 032	83 703	70 852	110 684	4 464	1 110
704	594	-924	-38 236	-4 840	43 032	57 068	56 012	98 208	4 487	1 320
396	440	-495	-27 720	-6 380	2 376	26 730	34 760	73 260	3 960	1 393
-24	132	44	-8 514	-4 928	-25 652	-1 452	11 968	42 152	3 036	1 320
-409	-204	513	11 576	-1 858	-38 892	-22 123	-7 408	11 877	1 916	1 110
-624	-439	759	25 197	1 322	-37 407	-31 323	-19 197	-11 112	816	790
-579	-474	689	27 066	3 289	-23 582	-27 378	-20 882	-22 123	-66	405
-262	-273	303	15 587	3 224	-2 223	-11 791	-12 469	-19 446	-583	18
228	104	-273	-5 532	1 131	19 344	9 867	2 644	-5 574	-672	-290
648	468	-754	-25 662	-1 844	31 174	27 066	16 798	11 576	-387	-420
578	468	-663	-25 636	-3 094	20 604	23 426	17 204	17 442	68	-255
-612	-442	702	23 868	1 768	-27 846	-24 174	-14 926	-10 404	306	340
1 938	9 614	14 421	490 314	163 438	980 628	490 314	326 876	490 314	22 287	7 429
2,351	0,928	0,571	0,585	0,532	0,470	0,463	0,480	0,475	0,449	0,433

N = 21

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
15 504	95 735	69 768	52 326	-392 768	-3 858 558	-10 007 832	-1 128 562	4 480 656	161 823	173 128	11 628
1 938	34 884	69 376	540 702	742 254	3 335 944	3 164 754	-2 060 094	-8 076 938	-170 544	-136 629	-6 460
-4 012	2 754	56 916	675 137	1 195 644	7 085 634	14 273 404	974 406	-6 647 748	-207 434	-206 244	-13 005
-5 202	-10 336	39 066	597 822	1 213 424	8 388 684	22 392 774	5 579 706	1 988 082	-77 724	-128 894	-11 220
-3 816	-11 946	20 656	416 802	986 904	8 065 949	27 104 544	10 061 946	12 841 512	121 356	22 656	-3 940
-1 443	-7 746	4 899	209 903	658 611	6 776 136	28 415 567	13 338 009	22 497 543	320 604	193 974	6 378
846	-1 747	-6 378	28 659	328 218	5 030 973	26 676 018	14 844 892	28 898 194	475 227	346 882	17 655
2 421	3 468	-12 503	-97 761	58 473	3 210 378	22 479 543	14 449 077	31 125 239	561 222	457 377	28 190
3 016	6 113	-13 728	-158 626	-118 872	1 577 628	16 671 408	12 355 902	29 183 544	571 757	513 552	36 660
2 652	6 968	-10 998	-157 716	-197 132	294 528	10 086 648	9 018 932	23 783 604	513 552	513 517	42 120
1 560	5 148	-5 720	-109 395	-188 760	-563 420	3 648 216	5 049 330	16 124 680	403 260	463 320	44 003
104	1 872	468	-34 684	-119 418	-991 848	-1 804 868	1 125 228	7 677 696	263 848	374 868	42 120
-1 296	-1 768	5 928	42 666	-22 048	-1 042 353	-5 581 368	-2 098 902	-31 824	120 978	263 848	36 660
-2 241	4 638	9 253	100 101	69 057	-807 328	-7 219 683	4 082 877	-5 640 819	-612	147 648	28 190
-2 430	-5 793	9 498	120 191	124 182	-404 793	-6 569 698	4 491 432	-8 165 754	-80 727	43 278	17 655
-1 737	4 708	6 411	94 557	124 119	36 774	-3 874 635	-3 284 849	-7 219 683	-107 334	-34 709	6 378
-288	-1 509	664	27 798	66 096	393 606	147 096	-809 586	-3 229 312	-80 181	-76 296	-3 940
1 462	2 796	-5 916	-58 582	-30 294	561 816	4 220 046	2 111 094	2 347 938	-14 416	-78 081	-11 220
2 652	6 086	-10 116	-122 247	-117 164	472 566	6 429 876	4 086 494	6 806 868	55 794	-45 356	-13 005
1 938	4 896	-7 106	-96 102	-112 404	107 236	4 141 506	3 067 854	5 977 438	73 644	5 814	-6 460
-2 584	-5 814	9 792	115 634	106 248	-487 407	-6 082 736	-3 742 278	-5 992 296	-43 928	46 512	-11 628
9 044	115 115	230 230	2 187 185	4 374 370	37 182 145	148 728 580	74 364 290	148 728 580	2 860 165	2 860 165	260 015
2, 111	0, 912	0, 549	0, 556	0, 527	0, 466	0, 437	0, 447	0, 457	0, 447	0, 424	0, 411

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица Б.1

Значения статистик Дарбина—Уотсона d_L и d_U при 1%-ном уровне
существенности

n	k'=1		k'=2		k'=3		k'=4		k'=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0,81	1,07	0,70	1,25	0,59	1,46	0,49	1,70	0,39	1,96
16	0,84	1,09	0,74	1,25	0,63	1,44	0,53	1,66	0,44	1,90
17	0,87	1,10	0,77	1,25	0,67	1,43	0,57	1,63	0,48	1,85
18	0,90	1,12	0,80	1,26	0,71	1,42	0,61	1,60	0,52	1,80
19	0,93	1,13	0,83	1,26	0,74	1,41	0,65	1,58	0,56	1,77
20	0,95	1,15	0,86	1,27	0,77	1,41	0,68	1,57	0,60	1,74
21	0,97	1,16	0,89	1,27	0,80	1,41	0,72	1,55	0,63	1,71
22	1,00	1,17	0,91	1,28	0,83	1,40	0,75	1,54	0,66	1,69
23	1,02	1,19	0,94	1,29	0,86	1,40	0,77	1,53	0,70	1,67
24	1,04	1,20	0,96	1,30	0,88	1,41	0,80	1,53	0,72	1,66
25	1,05	1,21	0,98	1,30	0,90	1,41	0,83	1,52	0,75	1,65
26	1,07	1,22	1,00	1,31	0,93	1,41	0,85	1,52	0,78	1,64
27	1,09	1,23	1,02	1,32	0,95	1,41	0,88	1,51	0,81	1,63
28	1,10	1,24	1,04	1,32	0,97	1,41	0,90	1,51	0,83	1,62
29	1,12	1,25	1,05	1,33	0,99	1,42	0,92	1,51	0,85	1,61
30	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
31	1,15	1,27	1,08	1,34	1,02	1,42	0,96	1,51	0,90	1,60
32	1,16	1,28	1,10	1,35	1,04	1,43	0,98	1,51	0,92	1,60
33	1,17	1,29	1,11	1,36	1,05	1,43	1,00	1,51	0,94	1,59
34	1,18	1,30	1,13	1,36	1,07	1,43	1,01	1,51	0,95	1,59
35	1,19	1,31	1,14	1,37	1,08	1,44	1,03	1,51	0,97	1,59
36	1,21	1,32	1,15	1,38	1,10	1,44	1,04	1,51	0,99	1,59
37	1,22	1,32	1,16	1,38	1,11	1,45	1,06	1,51	1,00	1,59
38	1,23	1,33	1,18	1,39	1,12	1,45	1,07	1,52	1,02	1,58
39	1,24	1,34	1,19	1,39	1,14	1,45	1,09	1,52	1,03	1,58
40	1,25	1,34	1,20	1,40	1,15	1,46	1,10	1,52	1,05	1,58
45	1,29	1,38	1,24	1,42	1,20	1,48	1,16	1,53	1,11	1,58
50	1,32	1,40	1,28	1,45	1,24	1,49	1,20	1,54	1,16	1,59
55	1,36	1,43	1,32	1,47	1,28	1,51	1,25	1,55	1,21	1,59
60	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,60
65	1,41	1,47	1,38	1,50	1,35	1,53	1,31	1,57	1,28	1,61
70	1,43	1,49	1,40	1,52	1,37	1,55	1,34	1,58	1,31	1,61
75	1,45	1,50	1,42	1,53	1,39	1,56	1,37	1,59	1,34	1,62
80	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,60	1,36	1,62
85	1,48	1,53	1,46	1,55	1,43	1,58	1,41	1,60	1,39	1,63
90	1,50	1,54	1,47	1,56	1,45	1,59	1,43	1,61	1,41	1,64
95	1,51	1,55	1,49	1,57	1,47	1,60	1,45	1,62	1,42	1,64
100	1,52	1,56	1,50	1,58	1,48	1,60	1,46	1,63	1,44	1,65

Значения статистик Дарбина—Уотсона d_L и d_U при 5%-ном уровне существенности

n	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

ЛИТЕРАТУРА¹

1. Anderson R. L. (1942) Distribution of the serial correlation coefficient. Ann. Math. Statist., 13, 1.
2. Anderson T. W. (1958) The Statistical Analysis of Time Series. John Wiley & Sons. Русский перевод с издания 1971 г.: Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., Мир, 1976.

¹ В периодических изданиях первое число обозначает номер тома. — Примеч. пер.

3. Bartlett M. S. (1946) On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time-series. *Suppl. J. R. Statist. Soc.*, 8, 27, 85 and (1948) 10, 85.
4. Bartlett M. S. (1950) Periodogram analysis and continuous spectra. *Biometrika*, 37, 1.
5. Bartlett M. S. (1955) *An Introduction to Stochastic Processes, with special reference to Methods and Applications*. Cambridge University Press. Русский перевод с издания 1955 г.: Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов, М., ИЛ, 1958.
6. Beale E. M. H., Kendall M. G. and Mann D. W. (1967) The discarding of variables in multivariate analysis. *Biometrika*, 54, 357.
7. Beveridge W. H. (1921) Weather and harvest cycles. *Econ. J.*, 31, 429.
8. Birkhoff G. D. (1931) Proof of the ergodic theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 17, 656.
9. Blackman R. B. and Tukey J. (1958) *The Measurement of Power Spectra from the point of view of Communication Engineering*. Dover Publications, New York.
10. Bliss C. I. (1958) *Periodic Regression in Biology and Climatology*. Bulletin. No. 615, Connecticut Agricultural Experiment Station, New Haven.
11. Box G. E. P. and Jenkins G. M. (1970) *Time-Series Analysis, Forecasting and Control*. Holden-Day. (McGraw-Hill Book Co., New York and Maidenhead, Eng.) Русский перевод: Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М., Мир, 1974, вып. 1 и 2.
12. Box G. E. P. and Newbold P. (1971) Some comments on a paper of Coen, Gomme and Kendall. *J. R. Statist. Soc., A*, 134, 299.
13. Brown R. G. (1963) *Smoothing, Forecasting and Prediction*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
14. Burman J. P. (1965) Moving seasonal adjustment of economic time series. *J. R. Statist. Soc., A*, 128, 534 and (1966) 129, 274.
15. Cochrane D. and Orcutt G. H. (1949) Application of least-squares regression to relationships containing autocorrelated error terms. *J. Amer. Statist. Ass.*, 44, 32.
16. Coen P. G., Gomme E. D. and Kendall M. G. (1969) Lagged relationships in economic forecasting. *J. R. Statist. Soc., A*, 132, 133.
17. Cowden D. J. (1962) *Weights for fitting polynomial secular trends*. Technical Paper No. 4, School of Business Administration, University of North Carolina.
18. Daniell P. J. (1946) Discussion on «Symposium on Autocorrelation in Time-series». *Suppl. J. R. Statist. Soc.*, 8, 88.
19. Daniels H. E. (1956) The approximate distribution of serial correlation coefficients. *Biometrika*, 43, 169.
20. Daniels H. E. (1962) The estimation of spectral densities. *J. R. Statist., Soc., B*, 24, 185.
21. Daniels H. E. (1970) Autocorrelation between first-differences of mid-ranges. *Econometrika*, 34, 215.
22. Dewey E. R. (1963) *The 18-2-year cycle in immigration, U.S.A., 1820—1962*. Foundation for the Study of Cycles, Inc., Pittsburgh, Pa.
23. Dixon W. J. (1944) Further contributions to the problem of serial correlation. *Ann. Math. Statist.*, 15, 119.
24. Durbin J. (1959) Efficient estimation of parameters in moving—average models. *Biometrika*, 46, 306.
25. Durbin J. (1960) Estimation of parameters in time—series regression models. *J. R. Statist. Soc., B*, 22, 139.
26. Durbin J. (1961) Efficient fitting of linear models for continuous stationary time series from discrete data. *Bull. Int. Statist. Inst.*, 38 (4), 273.
27. Durbin J. (1963) Trend elimination for the purpose of estimating seasonal and periodic components of time-series. In the book edited by Rosenblatt, q. v.
28. Durbin J. (1970) Testing for serial correlation in least-squares regression when some of the regressors are lagged dependent variables. *Econometrica*, 38, 410.

29. Durbin J. and Watson G. S. (1950, 1951, 1971) Testing for serial correlation in least-squares regression. *Biometrika*, 37, 409; 38, 159; 58, 1.
30. Fisk P. R. (1967) *Stochastically Dependent Equations*, Charles Griffin & Co., London.
31. Foster F. G. and Stuart A. (1954) Distribution-free tests in time-series based on the breaking of records, *J. R. Statist. Soc. B*, 16, 1.
32. Funkhauser H. G. (1936) A note on a 10th century graph. *Osiris*, 1, Bruges
33. Gleissberg W. (1945) Eine Aufgabe der Kombinatorik in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Univ. Istanbul Rev., Fac. Sci., A*, 10, 25.
34. Granger C. W. J. (1963) The effect of varying month-length on the analysis of economic time-series. *L'Industria*, 1, 3, Milano.
35. Granger C. W. J. and Hatanaka M. (1964) *Spectral Analysis of Economic Time-Series*. Princeton Univ. Press, Princeton. N. J. Русский перевод: Гренджер К., Хатанак М. Спектральный анализ временных рядов в экономике. М., Статистика, 1972.
36. Granger C. W. J. and Hughes A. O. (1971) A new look at some old data: the Beveridge wheat price series. *J. R. Statist. Soc., A*, 134, 413.
37. Grenander U. and Rosenblatt H. M. (1957) *Statistical Analysis of Stationary Time Series*. John Wiley & Sons, New York, & Chichester, Eng.
38. Gudmundsson G. (1971) Time-series analysis of imports, exports and other economic variables. *J. R. Statist. Soc., A*, 134, 383.
39. Hannan E. J. (1960) *Time Series Analysis*. Methuen: London. Русский перевод с издания 1962 г.: Хеннан Э. Дж. Анализ временных рядов. М., Наука, 1964.
40. Hannan E. J. (1960) The estimation of seasonal variation. *Australian J. Statist.*, 2, 1.
41. Harrison P. J. (1965) Short-term sales forecasting. *Applied Statistics*, 14, 102.
42. Harrison P. J. (1967) Exponential smoothing and short-term sales forecasting. *Mgmt. Sci.*, 13, 821.
43. Harrison P. J. and Stevens C. F. (1971) A Bayesian approach to short-term forecasting. *Oper. Res. Q.*, 22, 341.
44. Holt C. C. (1957) Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. *Carnegie Inst. Tech. Res. Mem. No. 52*.
45. Jevons W. S. (1879) *The Principles of Science*. London. Русский перевод второго издания: Джевонс С. Основы науки. Трактат о логике и научном методе. Спб., 1881.
46. Kalman R. E. and Bucy R. S. (1961) New Results in linear filtering and prediction theory. *Trans. A.S.M.E., Journal of Basic Engineering*, p. 95.
47. Kendall M. G. (1945) On the analysis of oscillatory time-series, *J. R. Statist. Soc., A*, 108, 93.
48. Kendall M. G. (1946) *Contributions to the Study of Oscillatory Time-series*. Cambridge University Press.
49. Kendall M. G. (1949) The estimation of parameters in lower autoregressive time-series. *Econometrica*, Supp., 17, 44.
50. Kendall M. G. (1969) *Rank Correlation Methods*, 4th edn, Charles Griffin & Co., London. Русский перевод с издания 1970 г.: Кендал М. Г. Ранговые корреляции. М., Статистика, 1975.
51. Kendall M. G. (1971) *Studies in the history of probability and statistics*, XXVI: The work of Ernst Abbe. *Biometrika*, 58, 369.
52. а) Kendall M. G. and Stuart A. (1968) *Advanced Theory of Statistics*. Vol. 2, 2nd edn. Charles Griffin & Co. London. Русский перевод второго издания: Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973.
б) Kendall M. G. and Stuart A. (1968) *Advanced Theory of Statistics*, Vol. 3, 2nd edn. Charles Griffin & Co., London, Русский перевод второго издания: Кендалл М., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М., Наука, 1976.

53. Khintchine A. Ya. (1932) Zu Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems. *Math. Ann.* 107, 485
54. King P. D. (1956) Increased frequency of births in the morning hours. *Science*, 123, 985.
55. Leipnik R. P. (1947) Distribution of the serial correlation coefficient in a circularly correlated universe. *Ann. Math. Statist.*, 18, 80.
56. Levene H. (1952) On the power function of tests of randomness based on runs up and down. *Ann. Math. Statist.*, 23, 34.
57. Madow W. G. (1945) Note on the distribution of the serial correlation coefficient. *Ann. Math. Statist.*, 16, 308.
58. Mann H. B. (1945) Nonparametric tests against trend. *Econometrica*, 13, 245.
59. Mann H. B. and Wald A. (1943) On the statistical treatment of linear stochastic difference equations. *Econometrica*, 11, 173.
60. Moore G. H. and Wallis W. A. (1943) Time series significance tests based on signs of differences. *J. Amer. Statist. Ass.*, 38, 153.
61. Moran P. A. P. (1947) Some theorems on time-series, I. *Biometrika*, 34, 281.
62. Moran P. A. P. (1948) Some theorems on time-series, II. *Biometrika*, 35, 255
63. Moran P. A. P. (1967) Testing for serial correlation with exponentially distributed variates. *Biometrika*, 54, 395.
64. Nold F. C. (1972) A bibliography of applications of techniques of spectral analysis to economic time-series. Technical Report No. 66, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, California.
65. Parzen E. (1961) Mathematical considerations in the estimation of spectra: Comments on the discussions of Messrs Tukey and Goodman. *Technometrics*, 3, 167, 232.
66. Playfair W. (1821) A Letter on our Agricultural Distress. London.
67. Quenouille M. H. (1947) A large-sample test for the goodness of fit of autoregressive schemes. *J. R. Statist. Soc.*, 110, 123.
68. Quenouille M. H. (1949) A method of trend elimination. *Biometrika*, 36, 75.
69. Quenouille M. H. (1953) Modifications to the variate-difference methods. *Biometrika*, 40, 383.
70. Quenouille M. H. (1956) Notes on bias in estimation. *Biometrika*, 43, 353.
71. Quenouille M. H. (1957, 1968) *The Analysis of Multiple Time-Series*. Charles Griffin & Co., London.
72. Quenouille M. H. (1958) Discrete autoregressive schemes with varying time-intervals. *Metrika*, 1, 21.
73. Reid D. J. (1971) Forecasting in action: A comparison of forecasting techniques in economic time-series. Joint Conference of O. R. Society's Group on Long Range Planning and Forecasting.
74. Rhodes E. C. (1921) Smoothing. *Tracts for Computers*, No. 6. Cambridge University Press.
75. Rosenberg B. (1970) The distribution of mid-range — a comment. *Econometrica*, 38, 176
76. Rosenblatt M. (ed.) (1963) *Proceedings of the Symposium of Time-Series Analysis held at Brown University, 1962*. John Wiley & Sons, New York, & Chichester, Eng.
77. Rosenhead J. (1968) An extension of Quenouille's test for the compatibility of correlation structures in time. *J. R. Statist. Soc.*, B, 30, 180.
78. Sargan J. D. (1953) An approximate treatment of the properties of the correlogram and periodogram. *J. R. Statist. Soc.*, B, 15, 140.
79. Shiskin J. (1967) The X—11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program. Technical Paper No. 15, U. S. Bureau of the Census.
80. Слущкий Е. Е. Сложение случайных величин как источник циклических процессов. — *Вопросы конъюнктуры*, 1927, т. III, вып. I.
81. Spenser J. (1904) On the graduation of the rates of sickness and mortality. *J. Inst. Act.*, 38, 334.

82. Stuart A. (1954) Asymptotic relative efficiencies of distribution-free tests of randomness against normal alternatives. J. Amer. Statist. Ass., 49, 147.
83. Stuart A. (1956) The efficiencies of tests of randomness against normal regression. J. Amer. Statist. Ass. 51, 285.
84. T.A.S.C. (The Analytic Sciences Corporation) (1971) A short course on Kalman Filter Theory and Application. T.A.S.C. Reading, Mass.
85. Theil H. (1971) The Principles of Econometrics. John Wiley & Sons, New York, & Chichester, Eng.
86. U.S. Bureau of the Census (1965) A Spectral Study of «Overadjustment» for Seasonality. Working Paper No. 21. Washington, D. C.
87. Wallis W. A. and Moore G. H. (1941) A significance test for time-series analysis. J. Amer. Statist. Ass., 36, 401.
88. Whittle P. (1953) The analysis of multiple time-series. J. R. Statist. Soc., B, 15, 125.
89. Wilson L. L. (1964) Catalogue of Cycles. Part I — Economics. Foundation for the Study of Cycles, Inc., Pittsburgh, Pa.
90. Winters P. R. (1960) Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. Mgmt. Sci., 6, 324.
91. Wold H. O. (1954) A Study in the Analysis of Stationary Time-Series, 2nd edn. Almqvist & Wicksell, Uppsala.
92. Wold H. O. (1965) (ed.) Bibliography on Time-Series and Stochastic Processes. Oliver and Boyd, Edinburgh.
93. Working H. (1960) Note on the correlation of first differences of averages in a random chain. Econometrica, 28, 916.
94. Yule G. Udny (1927) On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. Phil. Trans. A, 226, 267.
95. Yule G. Udny (1971) Statistical Papers: Selected by Alan Stuart and M. G. Kendall. Charles Griffin & Co., London.

ПЕРЕВОД НЕКОТОРЫХ ТЕРМИНОВ

Alias — неразличимая частота	Error-bands — доверительные границы оценки
Approximation — оценка, приближение, аппроксимация	Error-reducing power (factor) — степень уменьшения ошибки
Argand diagram — диаграмма Арганда	Estimator — оценка
Autoregressive scheme — авторегрессионный процесс	Excellence of the fit — качество регрессии
Bandwidth — полоса пропускания	Expanding — разложение
Best — оптимальный	Explanatory variables — объясняющие переменные
Circular serial coefficient — циклический сериальный коэффициент	Extent of an autoregression — порядок авторегрессии
Coherence — когерентность	Extent of an average — длина отрезка усреднения
Co-spectral density — ко-спектральная плотность	Factor — фактор, коэффициент, множитель, компонента
Co-spectrum — ко-спектр	Finite moving-average process — процесс скользящего среднего с конечной длиной отрезка усреднения
Cross-correlation — кросс-корреляция	Fit — подбор, построение; построенная регрессия, функция, кривая
Cross-spectrum — кросс-спектр	Fitted value — значение, полученное по построенному уравнению
Cumulant — семинвариант	Forecasting power — точность прогнозирования
Degenerate matrix — вырожденная матрица	Frequency distribution — плот-
Differential equation of the second kind — дифференциальное уравнение второго рода	
Discarding variables — отбрасывание переменных	
Dispersion matrix — дисперсионная матрица	

- ность распределения, распределе-
ние частот
- Frequency function — плотность рас-
пределения, функция плотности
- Gain diagram — диаграмма усиле-
ния
- Generator of the autocovariances —
производящая функция автокова-
риаций.
- Get out of step — выпасть из син-
хронности
- Guess the value of α — дать грубую
оценку значения α
- Index of leading equity prices —
индекс курса обыкновенных ак-
ций ведущих компаний
- Infinite autoregression — авторе-
грессия бесконечного порядка
- Kernel — ядро
- Lag — лаг, запаздывание
- Leading variable — опережающая
переменная
- Lead-time — интервал упрежде-
ния, период прогноза
- Markoff scheme — марковский про-
цесс
- Middle of the range — центральная
точка отрезка усреднения
- Moment-generating function — про-
изводящая функция моментов
- More extended autoregressive sche-
me — авторегрессионный процесс
более высокого порядка
- Multipinormal — многомерная нор-
мальная переменная
- Multiple regression coefficient —
множественный коэффициент де-
терминации
- Observed variance — наблюдаемая
дисперсия
- Outgoing series — выходной ряд;
ряд, получаемый на выходе (филь-
тра)
- Parent — генеральная совокупность
- ~entity — генеральная совокуп-
ность
- ~mean — теоретическое среднее,
математическое ожидание гене-
ральной совокупности
- ~value — параметр генеральной
совокупности
- Partial — частная автокорреляция
- Partial correlogram — частная кор-
релограмма; коррелограмма ча-
стной автокорреляционной функ-
ции
- Power spectra — спектральная функ-
ция
- Predictor — предиктор
- Print out — выходная печать; пе-
чать, выдаваемая ЭВМ
- Quadrature spectral density — квад-
ратурная спектральная плотность
- Quadrature spectrum — квадратур-
ный спектр
- Quotient — частное, коэффициент,
относительный коэффициент
- Range — отрезок усреднения; диа-
пазон изменения
- Rectangular random variable — слу-
чайная переменная с прямоуголь-
ным (равномерным) распределе-
нием
- Regressand — зависимая переменная
(в уравнении регрессии)
- Regressor — независимая переменная
(в уравнении регрессии)
- Residual sum of squares — сумма
квадратов остатков
- Robustness — устойчивость
- Sample number — объем выборки
- Sample of 1 — выборка объемом 1
- Seasonal component — сезонная ком-
понента; коэффициент сезонности
- ~effect — сезонный эффект; коэф-
фициент сезонности
- ~pattern — характер (форма, модель)
сезонных колебаний
- Seasonal-plus-irregular component —
компонента, представляющая се-
зонную и нерегулярную состав-
ляющие
- Side bands — боковые пики
- Single-valued function — одно-
значная функция
- Smooth component — гладкая ком-
понента
- Smooth-plus-seasonal component —
компонента, представляющая глад-
кую составляющую и сезонный
эффект
- Specification of the model — спе-
цификация модели
- Spectral density function — функция
спектральной плотности
- Spectral window — спектральное окно
- Standartization — нормирование
- Stepwise backward — пошаговая про-
цедура исключения переменных
- Stepwise forward — пошаговая про-
цедура введения переменных
- Suite — совокупность
- Turning points — поворотные точки
- Two-term autoregression — авторе-
грессия второго порядка
- Variate-difference method — метод
последовательных разностей пе-
ременной
- Yule scheme — процесс Юла
- Wandering series — блуждающий ряд
- Zero-dimension — безразмерная (ве-
личина)

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие переводчика	5
Предисловие к первому изданию	7
Предисловие ко второму изданию	7
1. Общие идеи	8
2. Критерии случайности	27
3. Тренд	35
4. Выбор скользящего среднего	54
5. Сезонность	62
6. Стационарные ряды	75
7. Проблемы выборочных сериальных корреляций и коррелограмм	93
8. Спектральный анализ	101
9. Прогнозирование методами автопроекции	122
10. Многомерные ряды	137
11. Прогнозирование по лаговым соотношениям	147
12. Замечания к некоторым проблемам оценивания и существенности	160
Приложение А. Веса для построения полиномиальных трендов	171
Приложение Б	192
Литература	194
Перевод некоторых терминов	198

М. КЕНДЭЛ

Временные ряды

Книга одобрена на заседании редколлегии серии «Библиотечка иностранных книг для экономистов и статистиков» 27.02.79.

Зав. редакцией *А. В. Павлюков*

Редактор *Е. В. Крестьянинова*

Мл. редактор *О. Б. Степанченко*

Техн. редактор *Л. Г. Чельшева*

Корректоры *Т. М. Васильева, Н. П. Сперанская*

Худож. редактор *Э. А. Смирнов*

ИБ № 902

Сдано в набор 11.05.81. Подписано в печать 05.10.81.

Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Гарнитура «Литературная».

Печать высокая. П. л. 12,5. Усл. п. л. 12,5. Усл. кр.-отт. 12,81. Уч.-изд. л. 12,98.

Тираж 12 000 экз. Заказ 271. Цена 80 коп.

Издательство «Финансы и статистика», Москва, ул. Чернышевского, 7

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома

при Государственном комитете СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46.

Кендэл М.

К35 Временные ряды / Пер. с англ. и предисл. Ю. П. Лукашина. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 199 с., ил. — (Б-чка иностр. книг для экономистов и статистиков).

80 к.

Книга посвящена аналитическим методам обработки экономических временных рядов. Сформулированы цели анализа рядов, рассмотрены ранговые критерии, тренды, сглаживание, сезонность колебаний, стационарные ряды. Представлены методы прогнозирования с указанием областей их применения.

Для экономистов и статистиков, как научных работников, так и практиков, а также аспирантов и студентов.

К $\frac{10805^1-128}{010(01)-81}$ 41—81 (С) 0702000000 1702060000

ББК 22.172
517.8

¹ Второй индекс 10803.

80 коп.