высшее образование

В.В. Колесов
М.Н. Романов

Элементарное введение в высшую математику

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (третьего поколения)

Серия
«Высшее образовние»

В. В. Колесов, М. Н. Романов

Элементарное введение в высшую математику

Учебное пособие

Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по направлениям подготовки
020000 (Естественные науки) и 030000 (Гуманитарные науки)

Ростов–на–Дону
«Феникс»
2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73
КТК 11
К60

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук, профессор *М. В. Норкин*
(Южный федеральный университет)

Колесов В. В.

К60 Элементарное введение в высшую математику: учебное пособие / В. В. Колесов, М. Н. Романов. — Ростов н/Д: Феникс, 2013. — 476 с.: ил. — (Высшее образование).

ISBN 978–5–222–21003–1

Эта книга — учебное пособие по высшей математике, написанное ясно и просто. Она адресована тем, кто традиционно далек от математики, — биологам и химикам, почвоведам и социологам, геологам и юристам. Излагая материал, авторы нередко жертвовали строгостью и точностью изложения, пытаясь разъяснить новые понятия «на пальцах» и не стремясь к максимальной полноте освещения вопроса. В книге много примеров, значительная часть которых дается с подробными решениями. В основу книги положены лекции по высшей математике, которые авторы читают студентам различных факультетов Южного федерального университета.

Для студентов первого курса университетов и институтов, а также для старшеклассников.

ISBN 978–5–222–21003–1

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73

Оглавление

1. Введение

Математику уже затем знать надо,
что она ум в порядок приводит.

М. В. Ломоносов

Нам хотелось написать эту книгу ясно и просто, чтобы ее могли читать и понимать люди, традиционно далекие от математики, — биологи и химики, почвоведы и социологи, геологи и юристы. Излагая материал, мы нередко жертвовал строгостью и точностью изложения, пытаясь разъяснить новые понятия «на пальцах» и не стремясь к максимальной полноте освещения вопроса. В результате получился несерьезный учебник с картинками.

Главы этого учебника зависят друг от друга не очень сильно, поэтому читать его подряд не обязательно.

Наиболее важные определения, теоремы, утверждения, примеры и т. п. помечены на полях треугольниками.

1.1. Что такое математика?

Ответ на этот вопрос пытались дать многие крупные ученые, но добиться успеха им не удалось. Общепринятого определения математики не существует. Возможно, такое определение не появится никогда. В самой математике имеется немало терминов, которые невозможно определить. Попробуйте дать строгое определение геометрической точки. Вряд ли вам это удастся сделать. Можно, конечно, утверждать, что точка есть объект, возникающий там, где пересекаются две прямые. Но тогда возникает проблема определения прямой, которую мы обычно рассматриваем как совокупность точек, обладающих некоторыми свойствами. Последовательный человек далее должен будет утверждать, что прямая — это линия пересечения двух плоскостей. Совершенно очевидно, что этот путь ведет в тупик: каждое определение опирается на понятие, которое еще не определено.

Выход здесь один: нужно признать некоторое количество математических терминов неопределяемыми (чем их будет меньше, тем лучше) и использовать их, просто опираясь на здравый смысл.

Поскольку мы не можем сформулировать точное определение математики, попытаемся дать ее неформальную характеристику. Математика является фундаментальной наукой, которая дает возможность другим наукам моделировать те процессы и явления, которые они изучают. Очень важно, что математика не только предоставляет средства для этого, но и дает специалистам в различных областях науки универсальный язык общения друг с другом. Не зря ведь математику называют царицей и служанкой всех наук.

Великий ученый ***Галилео Галилей*** говорил, что книга природы написана на языке математики. Вряд ли современного человека, совсем не владеющего этим языком, можно считать вполне образованным.

1.2. Возникновение математики

По мнению авторитетного историка математики Д. Я. Стройка [13], первые представления человека о числе и форме зародились во времена палеолита. Этот период продолжался сотни тысячелетий. Примерно десять тысяч лет тому назад он сменился эпохой неолита, для которой характерны формирование и развитие языков. В языках разных народов появились простые числовые термины. Вероятно, именно с этого периода развития человечества нужно вести отсчет возникновения математики.

Разные народы и племена развивали множество самых разнообразных систем счета. Так, например, исследователи истории математики обнаружили существование у первобытных американских народов более 300 таких систем, примерно половина которых отдаленно напоминала общепринятую в наше время десятичную систему.

К этому же периоду относится и формирование у людей представлений о различных геометрических формах. Доказательством этого могут служить обнаруженные археологами древние египетские орнаменты, а также орнаменты американских индейцев, созданные за несколько тысячелетий до нашей эры. Орнаменты, на которых присутствуют правильные треугольники, были найдены и в Европе.

Математика того времени была очень конкретной. Древний человек, оценивая количество животных, которыми он владеет, использовал камешки. Включая геометрические фигуры в орнаменты, люди того времени создавали прикладное искусство, не задумываясь об абстрактной сущности таких фигур, как квадрат, круг или треугольник. Между весьма конкретной математикой того времени и современной абстрактной математикой лежала пропасть, на преодоление которой у человечества ушло несколько тысячелетий.

Важнейшим этапом на этом пути было появление письменности. Единого мнения о том, когда это произошло, не существует, но ряд археологических находок позволяет предположить, что письменность впервые появилась в Шумере примерно за 3000 лет до нашей эры. Имеется, впрочем, мнение и о существенно более раннем возникновении письменности — примерно за 30000 лет до нашей эры.

Возникнув в качестве чисто утилитарной науки, предназначенной для проведения тех или иных подсчетов, математика постепенно стала интересовать людей сама по себе, без ее обязательной прикладной направленности. Арифметика породила алгебру, а прикладные измерения длин, площадей и объемов — геометрию. Многие специалисты считают, что произошло это главным образом на Древнем Востоке.

Родиной современной математики считается Древняя Греция, в которой ученые впервые стали заниматься не только выявлением новых математических фактов, но и их обоснованием, разработкой доказательств различных математических утверждений.

«Согласно преданию, отцом греческой математики является милетский купец ***Фалес*** (около 624–548 годов до н. э.), в первой половине VI века до н. э. посетивший Вавилон и Египет» [13].

Заслуги великих ученых эллинского мира, прежде всего ***Евклида*** (около 365–300 годов до н. э.), ***Пифагора*** (VI век до н. э.) и ***Архимеда*** (287–212 годы до н. э.), невозможно переоценить. Знаменитый тринадцатитомный труд Евклида «Начала» (Stoicheia), написанный за 300 лет до наступления нашей эры, лежит в основе современной школьной геометрии. Этот труд стал венцом достижений древнегреческой математики и служил образцом математической строгости в течение двух тысячелетий. На Западе «Начала» по количеству изданий превзошла только Библия. После изобретения книгопечатания эта работа была издана более тысячи раз, а до того она в рукописном виде использовалась при изучении геометрии во многих странах мира.

В своем труде Евклид дает ряд определений базовых математических понятий, а затем строит свои рассуждения, опираясь на разработанную им систему определений, постулатов и аксиом, которые выглядят очевидными и принимаются на веру без доказательства. Из них далее строго логически выводятся различные утверждения, теоремы, формулы. Аксиоматический подход широко применяется и в современной математике.

Теорема Пифагора, согласно которой квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, известна каждому старшекласснику. У Пифагора было множество учеников и последователей, которые называли себя пифагорейцами. Они изучали геометрию, арифметику, астрономию и музыку. Вероятно, самым важным открытием школы Пифагора было открытие иррациональных чисел в ходе геометрических исследований.

Великий эллинский ученый Архимед прославился не только в математике своими открытиями в области нахождения площадей плоских фигур и объемов различных тел, но и достижениями в физике и технике. Он был убит, когда римляне взяли греческий город Сиракузы, при осаде которого защитники города использовали различные технические приспособления, придуманные Архимедом.

Конец золотого века эллинской культуры привел к постепенному закату греческой математики. Наступил период господства Рима. Рим завоевал Грецию в 146 году до нашей эры, и математические изыскания в Греции стали сходить на нет. Этот процесс протекал достаточно медленно и сопровождался обменом математическими знаниями Рима и Афин с Месопотамией (одной из колыбелей евроазиатской цивилизации), Китаем, Индией (наиболее известным достижением индийской математики является общепринятая ныне десятичная позиционная система счета) и другими странами.

Пифагор, Архимед, Евклид (слева направо).

Примерно в VII веке нашей эры пальма первенства в развитии математики перешла к исламским странам. Разносторонность многих ученых того времени вызывает восхищение. Так, например, всемирно известный персидский поэт ***Омар Хайям*** (его полное имя — Гиясаддин Абу-ль-Фатх Омар ибн Ибрахим аль-Хайям Нишапури) известен также своими серьезными достижениями в алгебре.

В XVI–XVIII веках центр математической вселенной постепенно перемещается в Европу. Она дала миру множество великих ученых в самых различных областях науки.

- Братья ***Иоганн Бернулли*** (1667–1748) и ***Якоб Бернулли*** (1654–1705),
- ***Франсуа Виет*** (1540–1603),
- ***Галилео Галилей*** (1564–1642),
- ***Рене Декарт*** (1596–1650),
- ***Бонавентура Кавальери*** (1598–1647),
- ***Иоганн Кеплер*** (1571–1630),
- ***Жозеф Луи Лагранж*** (1736–1813),
- ***Пьер-Симон Лаплас*** (1749–1827),
- ***Блез Паскаль*** (1623–1662),
- ***Пьер Ферма*** (1601–1665),
- ***Леонард Эйлер*** (1707–1783).

Даже на таком блестящем фоне яркой звездой сияет имя ***Исаака Ньютона*** (1642–1727). Этот гениальный физик, математик и астроном прокладывал новые пути во всех науках, которыми он занимался. В математике он практически одновременно с ***Готфридом Вильгельмом Лейбницем*** (1646–1716) разработал дифференциальное и интегральное исчисление — основу основ математического анализа.

В XIX и XX веках Европа продолжала оставаться местом, где работали почти все самые выдающиеся математики планеты.

- ***Нильс Хенрик Абель*** (1802–1829),
- ***Карл Вейерштрасс*** (1815–1897),
- ***Давид Гильберт*** (1862–1943),
- ***Рихард Дедекинд*** (1831–1916),
- ***Петер Густав Лежен Дирихле*** (1805–1859),
- ***Георг Кантор*** (1845–1918),
- ***Феликс Клейн*** (1849–1925),
- ***Огюстен Луи Коши*** (1789–1857),
- ***Леопольд Кронекер*** (1823–1891),
- ***Анри Леон Лебег*** (1875–1941),
- ***Адриен Мари Лежандр*** (1752–1833),
- ***Мариус Софус Ли*** (1842–1899),
- ***Анри Пуанкаре*** (1854–1912),

- ***Симеон Денни Пуассон*** (1781–1840),
- ***Георг Фридрих Бернгард Риман*** (1826–1866),
- ***Жан Батист Жозеф Фурье*** (1768–1830).

Среди великих ученых этого периода выделяется ***Карл Фридрих Гаусс*** (1777–1855) — один из величайших математиков всех времен, которого называли «королем математиков». Невозможно не сказать хоть несколько слов и о французском математике, одном из основателей современной высшей алгебры ***Эваристе Галуа*** (1811–1832). Он был застрелен на дуэли в возрасте двадцати лет. Прекрасную книгу об этом гениальном математике написал Леопольд Инфельд [7].

И. Ньютон, Э. Галуа, К. Ф. Гаусс (слева направо).

Отметим еще «коллективного» математика — ***Николя Бурбаки***. Под этим псевдонимом, начиная с 1935 года, работала группа замечательных французских математиков (позднее в нее вошли несколько иностранцев). Точный состав группы не разглашался. Целью деятельности группы являлось написание серии книг под общим названием «Начала математики», отражающих современное состояние математики. В каждой из этих книг изложение материала строилось на некоторой системе аксиом и носило весьма формальный характер. В 1968 году группа прекратила свою деятельность. Влияние этой группы на мировую математику было очень большим, но слишком формализованный стиль изложения делал их книги труднодоступными.

Заметим также, что немецкий логик и философ ***Курт Фридрих Гедель*** (1906–1978) построил строгое доказательство того, что в любой достаточно богатой формальной теории имеются утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть в рамках этой теории. Отсюда, в частности, следует, что, опираясь на некоторую систему аксиом, математики рано или поздно придут к таким утверждениям, которые они не смогут ни доказать, ни опровергнуть.

Среди выдающихся математиков этого периода, работавших не в Европе, необходимо выделить ***Норберта Винера*** (1894–1964) — американского ученого, основоположника кибернетики и теории искусственного интеллекта, а также ***Джона фон Неймана*** (1903–1957) — венгеро-американского математика, разработчика современной архитектуры компьютеров.

В XIX и XX веках российские математики занимают заметное место среди ученых мирового уровня. Перечислим имена некоторых из них.

- ***Владимир Игоревич Арнольд*** (1937–2010),
- ***Иван Матвеевич Виноградов*** (1891–1983),
- ***Софья Васильевна Ковалевская*** (1850–1891),
- ***Андрей Николаевич Колмогоров*** (1903–1987),
- ***Ольга Александровна Ладыженская*** (1922–2004),
- ***Николай Иванович Лобачевский*** (1793–1856),

- ***Николай Николаевич Лузин*** (1883–1950),
- ***Александр Михайлович Ляпунов*** (1857–1918),
- ***Юрий Иванович Манин*** (род. 1937),
- ***Андрей Андреевич Марков*** (1856–1922),
- ***Михаил Васильевич Остроградский*** (1801–1862),
- ***Григорий Яковлевич Перельман*** (род. 1966),
- ***Пафнутий Львович Чебышев*** (1821–1894).

Приведенные здесь оценки творчества выдающихся математиков, возможно, слишком субъективны. Тем, кого эти вопросы заинтересуют всерьез, лучше обратиться к книгам по истории математики, написанным профессионалами.

В. И. Арнольд, С. В. Ковалевская, Ю. И. Манин (слева направо).

1.3. Разделы математики

Указать разделы элементарной математики[1] легко: арифметика, элементарная алгебра, элементарная геометрия (планиметрия и стереометрия) и элементы математического анализа

[1] Мы будем понимать под этим ту математику, которая изучается в средней школе.

(функции и первоначальные сведения о производных и интегралах).

Гораздо сложнее перечислить все разделы высшей математики (их слишком много). Ограничимся только теми из них, которые затронуты в этом учебнике.

Фундамент всей совокупности математических знаний образуют математическая логика и теория множеств. Мы рассмотрим очень кратко лишь малую толику понятий, которые вводятся и изучаются в этих разделах математики.

Первый этаж здания математики образуют высшая алгебра, высшая геометрия и анализ. Эти разделы опираются на фундамент и тесно связаны между собой. Из алгебраических вопросов мы рассмотрим простейшие понятия теории комплексных чисел, элементы линейной алгебры (векторы и матрицы) и слегка затронем тему отыскания корней многочленов. Наши геометрические рассмотрения коснутся отыскания площадей плоских фигур и некоторых простых проблем аналитической геометрии, причем для решения этих задач мы будем применять не геометрические методы, а средства математического анализа и алгебры.

Анализу в нашем курсе уделяется много места, но изучать мы будем главным образом тот материал (функции, пределы, производные, интегралы), который рассматривается на уроках математики в средней школе, добавив к нему небольшое количество новых понятий (прежде всего это — ряды), которые часто используются при решении многих прикладных задач в различных областях естествознания. Вопросы, выходящие за рамки классического математического анализа, мы рассматривать не будем.

На более высоких этажах располагаются дифференциальные уравнения, теория вероятностей (вместе с математической статистикой) и численные методы. Первый из этих трех разделов особенно важен тем, кто занимается или собирается заниматься теоретическими аспектами различных прикладных наук, поскольку именно дифференциальные уравнения служат основным инструментом при разработке математических моделей процессов, развивающихся во времени. Примеры таких моделей будут нами рассмотрены. Теория вероятностей и математическая статистика нужны, прежде всего, для обработки экспериментальных данных и результатов наблюдений за различными явлениями природы и общества. Что же касается численных методов, то они часто позволяют получать приближенные решения тех математических задач, с которыми не в состоянии справиться теория. Это может оказаться весьма полезным и теоретикам, и экспериментаторам.

В этой книге не рассматриваются такие важные и имеющие широкую сферу применения разделы математики, как теория групп (без нее немыслимо развитие многих разделов физики, например кристаллографии), теория дифференциальных уравнений в частных производных (она широко применяется в гидродинамике, теории упругости и других областях механики), теория бифуркаций (она используется во многих разделах естествознания), вариационное исчисление, методы оптимизации и теория оптимального управления (применяются, например, в экономике и бизнесе), дискретная математика (она очень полезна в самых разнообразных разделах науки), не говоря уже о великом множестве различных разделов математики, основной областью применения которых пока является сама математика.

Надеемся, что читатели этой книги так поступать не будут.

В. В. Колесов, М. Н. Романов

http://kolesov.math.rsu.ru

2. Базовые понятия

В основе всей системы математических знаний лежат две дисциплины: математическая логика и теория множеств. Это — очень непростые и весьма абстрактные разделы математики, серьезное изучение которых необходимо лишь тем, кто занимается ею на профессиональном уровне. В нашем учебнике будут использоваться лишь некоторые базовые понятия математической логики и теории множеств, которые обычно уже знакомы (иногда под другими названиями) тем, кто изучал школьный курс элементарной математики.

2.1. Высказывания

Определение 2.1.1.

> ***Высказыванием*** называется имеющее смысл утверждение, о котором можно сказать, что оно является истинным или ложным.

Отметим, что термин «утверждение» принадлежит к категории понятий, которые определить невозможно.

Пример 2.1.1. Следующее утверждение является высказыванием.

> Студент Вольдемар Утятников блестяще сдал экзамен по высшей математике.

С высказываниями можно проводить различные математические операции, важнейшими из которых являются ***логическое отрицание***, ***логическое сложение (дизъюнкция)*** и ***логическое умножение (конъюнкция)***. Данный вопрос рассматривается в математической логике. Мы не будем заниматься формализацией этих понятий, пояснив их только «на пальцах».

Пример 2.1.2.

Пусть даны два высказывания: «Вася пошел в кино» и «Вася съел пирожок». Тогда высказывание «Вася не пошел в кино» является отрицанием первого из них, а высказывания «Вася пошел в кино или съел пирожок» и «Вася пошел в кино и съел пирожок» являются соответственно логической суммой и логическим произведением этих двух высказываний.

► Заметим, что в русском языке союз «или» трактуется неоднозначно. В математической логике его нужно понимать как «или то, или это, или оба сразу».

► В математике часто встречаются термины ***необходимость*** и ***достаточность***. Они нередко употребляются и в данном учебнике. Эти понятия являются очень важными. Ими нужно научиться владеть свободно.

Если A и B — высказывания, то слова «для A необходимо B», нужно трактовать как высказывание, которое заключается в том, что из A следует B.

Если же говорится, что «для A достаточно B», то это означает, что из B следует A.

Отсюда вытекает, что высказывание «для A необходимо и достаточно B» нужно понимать как утверждение равносильности высказываний A и B, поскольку в этом случае любое из них является следствием другого.

Отметим также, что вместо слов «необходимо и достаточно» нередко говорят «тогда и только тогда, когда», «при тех и только тех» и т. п. ◀

Пример 2.1.3.

Умение решать примеры является необходимым условием успешной сдачи экзамена по математике. А вот достаточным это условие не является, поскольку на экзамене требуется еще и знание теории.

Замечание.

Математические термины «конъюнкция» и «дизъюнкция», которые были использованы выше, могут вызвать у некоторых читателей отторжение, а кое у кого и страх. Относитесь к новым терминам спокойно. Они ведь присутствуют в любой науке. Когда почвовед легко и непринужденно рассуждает об остаточно-карбонатных почвах или о почвах со вторым гумусовым горизонтом, математику тоже приходится несладко. Авторы, разумеется, постараются не перегружать этот учебник непривычными для читателя терминами, но иногда без их использования обойтись не удается. Можно рекомендовать читателям придерживаться в этом вопросе следующего принципа. Если какой-либо незнакомый и устрашающий термин встретился в учебнике всего один раз, просто примите этот факт к сведению. А вот когда такой термин используется многократно, нужно постараться его запомнить.

В математических текстах широко используются так называемые ***кванторы***, которые применяются для удобной и короткой записи различных математических утверждений. Нам понадобятся только два квантора: $\forall$ и $\exists$. Первый из них будет служить в качестве замены слова «любой», второй — слова «существует».

► **Пример 2.1.4.**

Утверждение, что «для $\forall x \quad \exists y$», следует понимать как утверждение, что для любого x существует y.

2.2. Множества

Термин ***множество*** принадлежит к категории неопределяемых математических понятий.

Любое множество состоит из некоторого количества элементов, ***упорядоченность которых не предполагается***. Это количество, вообще говоря, может быть любым, в том числе и нулевым.

Множество, содержащее конечное число элементов, часто записывают с помощью фигурных скобок, внутри которых перечисляются элементы множества, например, так: {Маша, Петя, Вася}.

Определение 2.2.1.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается $\varnothing$.

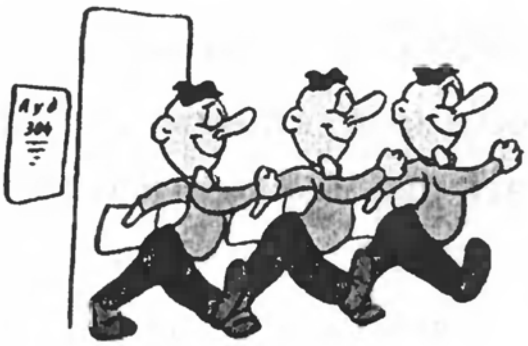
Примеры 2.2.1.

1) Множество вещественных чисел содержит бесконечное число элементов.

2) Множество преподавателей, которые ведут занятия по математике на химфаке Алабамского университета и имеют более двух ушей, является пустым.

3) Числовые промежутки (a, b) и $[a, b]$ являются множествами, содержащими бесконечное число элементов. Первый из них называют ***интервалом***, или открытым промежутком, второй — ***сегментом***, отрезком, или замкнутым промежутком. Сегмент содержит свои концы, а интервал не содержит.

Тот факт, что некоторый элемент x принадлежит множеству X (является элементом этого множества), можно записать так: $x \in X$.



Множество студентов, успешно сдавших экзамен по высшей математике, содержит конечное число элементов.

Работая с множествами как с отдельными объектами, можно выполнять следующие две основные операции: объединение и пересечение множеств. Существуют и другие операции с множествами (например, разность и дополнение), но они нам не понадобятся.

Определение 2.2.2.

> ***Объединением*** множеств A и B называется множество $C = A \cup B$, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих двух множеств.

Определение 2.2.3.

> ***Пересечением*** множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Определение 2.2.4.

> Множество A называется ***вложенным*** во множество B, если A содержит только те элементы, которые принадлежат B. Если A вложено в B, то говорят, что A является ***подмножеством*** B. Записывают это так: $A \subset B$. Если эти два множества могут еще и совпадать, то пишут так: $A \subseteq B$.

Еще одно полезное понятие в теории множеств — декартово произведение.

Определение 2.2.5.

Декартовым произведением множеств A и B называется такое множество $C = A \times B$, которое состоит из *упорядоченных пар* (a, b), где $a \in A$, $b \in B$.

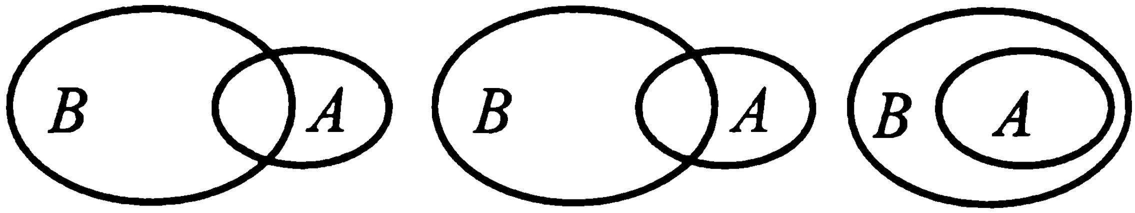


Рис. 2.2.1. Объединение $A \cup B$ (слева), пересечение $A \cap B$ (посередине) и вложенность $A \subset B$ (справа) множеств A и B.

Примеры 2.2.2.

1) Если $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 2, 1\}$, то $A = B$, поскольку элементы множества не являются упорядоченными.

2) Если $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 5, -7\}$, то $A \cap B = \{3\}$ и $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, -7\}$.

3) Если $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4\}$, то $A \subset B$.

4) Множество положительных целых чисел является подмножеством множества вещественных чисел.

5) Объединение множеств положительных и отрицательных целых чисел дает множество целых чисел, отличных от нуля.

6) Пересечение множеств рациональных и иррациональных чисел образует пустое множество.

7) Внимательный читатель, возможно, заметил аналогию операций объединения и пересечения множеств соответственно с операциями сложения и умножения вещественных чисел. Такая аналогия действительно есть, но, разумеется, она не является полной, поскольку, например, $A \cup A = A \cap A = A$.

8) Декартово произведение, в отличие от объединения и пересечения множеств, не допускает перестановку сомножителей (не коммутирует), поскольку, вообще говоря, $(a, b) \neq (b, a)$.

9) Примером декартова произведения множества вещественных чисел на себя может служить множество координат точек на плоскости.

► Общепринятые обозначения множеств

R — множество вещественных чисел.

Z — множество целых чисел.

N — множество натуральных чисел.

2.3. Вещественные числа

Начнем с напоминания понятий и терминов, которые изучаются в средней школе.

Определения 2.3.1.

- ***Натуральными*** называются числа вида $1, 2, \ldots$

- ***Целыми*** называются числа вида $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

- Целое число называется ***четным***, если оно без остатка делится на 2, и ***нечетным*** в противном случае.

- ***Рациональными*** называются числа, которые представимы в виде *несократимой* дроби p/q, где p и q — целые числа.

- ***Иррациональными*** называются числа, которые не являются рациональными.

- ***Вещественными*** (действительными) называются числа, которые являются рациональными или иррациональными.

Легко видеть, что любое четное число n представимо в виде $n = 2k$, а любое нечетное число n — в виде $n = 2k+1$ и в виде $n = 2m-1$, где k, m — некоторые целые числа. Так, скажем, четное число ноль можно представить в виде $0 = 2 \cdot 0$, а нечетное число -5 — в виде $-5 = 2 \cdot (-3) + 1 = 2 \cdot (-2) - 1$.

Натуральные числа люди начали применять в бытовых целях очень давно, не используя для них каких-либо обозначений, поскольку письменности тогда не было. Гораздо позже люди пришли к понятию рационального числа. Существование иррациональных чисел осознавали уже пифагорейцы в связи со своими попытками решить проблему квадратуры круга — одну из трех знаменитых математических проблем античности. Проблема квадратуры круга заключается в нахождении такого квадрата, площадь которого равна площади заданного круга. Проблема трисекции угла состоит в разделении любого заданного угла на три равные части. В проблеме удвоения куба требуется определить ребро такого куба, который имел бы объем, вдвое больший объема некоторого заданного куба. Греки хотели решить эти задачи путем проведения геометрических построений, в которых разрешалось использовать только циркуль и линейку. Такие попытки были заведомо обречены на провал, поскольку, как стало известно гораздо позже, точного решения всех трех задач с помощью таких геометрических построений получить нельзя. Эти исследования греков были тесно связаны с иррациональными числами и принесли очень большую пользу, поскольку спустя много лет они привели к возникновению новых областей математики, например теории алгебраических чисел.

Не слишком трудно доказать, что любое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Например, $3/4 = 0,75$, а $2/3 = 0,666... = 0,(6)$. Любое иррациональное число представимо лишь в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Например, $\sqrt{2} = 1,41421...$, отношение длины окружности к диаметру $\pi = 3,14159...$, основание натуральных логарифмов $e = 2,71828...$

Докажем иррациональность числа $\sqrt{2}$ от противного. Пусть это число не является иррациональным. Тогда оно является рациональным и представимо в виде *несократимой* дроби $\sqrt{2} = p/q$, где p и q — целые числа. Но тогда $p^2 = 2q^2$. Значит, число p^2 — четное, а значит, четным является и число p. Следовательно, $p = 2n$, где n — целое число. Отсюда вытекает, что $4n^2 = 2q^2$, а значит, $q^2 = 2n^2$. Последнее означает, что q также является четным числом. Но тогда дробь p/q представляет собой отношение двух четных чисел, следовательно, ее можно сократить. Мы пришли к противоречию, которое и доказывает иррациональность числа $\sqrt{2}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

- Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел.
- Множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел.
- Множества рациональных и иррациональных чисел являются подмножествами множества вещественных чисел.
- Множество вещественных чисел является объединением множеств рациональных и иррациональных чисел.

Весьма удобным средством наглядного представления вещественных чисел является числовая ось, которую иногда называют также координатной осью и числовой прямой.

Определение 2.3.2.

> ***Числовой осью*** называется прямая, на которой указано положительное направление, а также заданы начало отсчета и масштаб для измерения длины.

Любое вещественное число может быть интерпретировано как точка на числовой оси. Нулю при этом соответствует начало отсчета. Если ось располагается горизонтально, то положительные числа откладываются вправо от нуля, а отрицательные — влево.

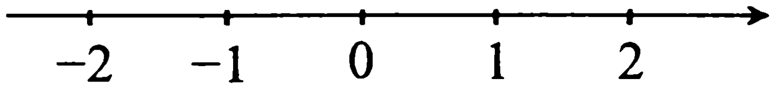


Рис. 2.3.1. Числовая ось.

В курсе математического анализа доказывается, что между множеством вещественных чисел и числовой осью существует *взаимно однозначное соответствие*: каждому вещественному числу соответствует некоторая точка на числовой оси и наоборот — каждой точке на числовой оси соответствует некоторое вещественное число. Это гарантирует, что никто и никогда не сумеет придумать какие-то другие числа, лежащие на числовой оси, поскольку для них на оси уже не осталось места. Как мы увидим дальше, другие числа существуют. Они называются комплексными числами (см. гл. 3), но лежат они не на числовой оси, а на плоскости.

2.4. Абсолютная величина

► **Определение 2.4.1.**

Абсолютной величиной (или ***модулем***) вещественного числа z называется число $|z|$, которое находится по правилам: $|z| = z$, если $z \geqslant 0$, и $|z| = -z$, если $z < 0$.

Пример 2.4.1.

Очевидно, что $|5| = 5$ и $|-5| = 5$.

Основные свойства модуля.

1) $|z| \geqslant 0$.

2) Если $|z| \leqslant 0$, то $z = 0$.

3) $z \leqslant |z|$.

4) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (неравенство треугольника).

5) Если число $a > 0$, то неравенство $|z| \leqslant a$ равносильно двойному неравенству $-a \leqslant z \leqslant a$, т. е. $z \in [-a, a]$.

6) Если число $a > 0$, то неравенство $|z| \geqslant a$ равносильно совокупности двух неравенств $z \leqslant -a$ или $z \geqslant a$, т. е. $z \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

Эти свойства обычно доказываются в школьном курсе элементарной математики. Их легко проверить на конкретных числах.

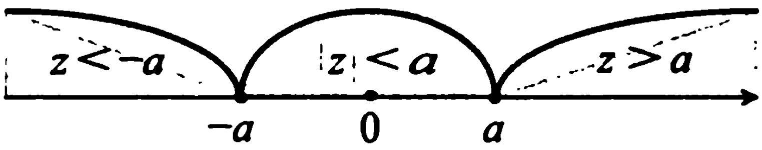


Рис. 2.4.1. Неравенства с модулями.

2.5. Системы координат

Системы координат используются обычно, чтобы однозначно определить положение некоторой точки на прямой, на плоскости либо в пространстве.

Систему координат на прямой мы уже рассмотрели. Это — числовая ось.

Система координат на плоскости задается двумя непараллельными координатными осями, точка пересечения которых O принимается за начало отсчета. Такая система координат называется декартовой.

Чаще всего оси выбираются так, чтобы угол между ними был прямым. Это — самая простая из всех существующих систем координат на плоскости. Она называется ***декартовой прямоугольной***. Одна из осей называется ***осью абсцисс***, а другая — ***осью ординат***. Прямоугольная декартова система координат считается заданной, если указаны направления координатных осей, масштабы на этих осях, а также начало отсчета абсциссы и ординаты — точка $O(0,\,0)$, которая находится на пересечении осей.

В этой системе координаты любой точки задаются парой чисел, определяющих (с учетом их знака) расстояния от этой точки до координатных осей.

При изображении графика функции $y = f(x)$ обычно ось абсцисс рисуется горизонтально, и на ней откладываются значения x, а ось ординат рисуется вертикально, и на ней откладываются значения y.

В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости вся плоскость делится на четыре части, которые называются ***координатными углами***, ***четвертями*** или ***квадрантами***. Они нумеруются так, как показано на рис. 2.5.1.

Существуют и другие системы координат. Некоторые из них рассматриваются ниже. Заметим, что удачный выбор системы координат нередко помогает решить задачу.

В ***полярной системе координат на плоскости***, показанной на рис. 2.5.1 справа, положение точки $P(r,\,\varphi)$ определяется радиус-вектором r и полярным углом φ, который отсчитывается от положительной части оси абсцисс против часовой стрелки. Эта система координат пригодится нам, когда мы будем рассматривать комплексные числа.

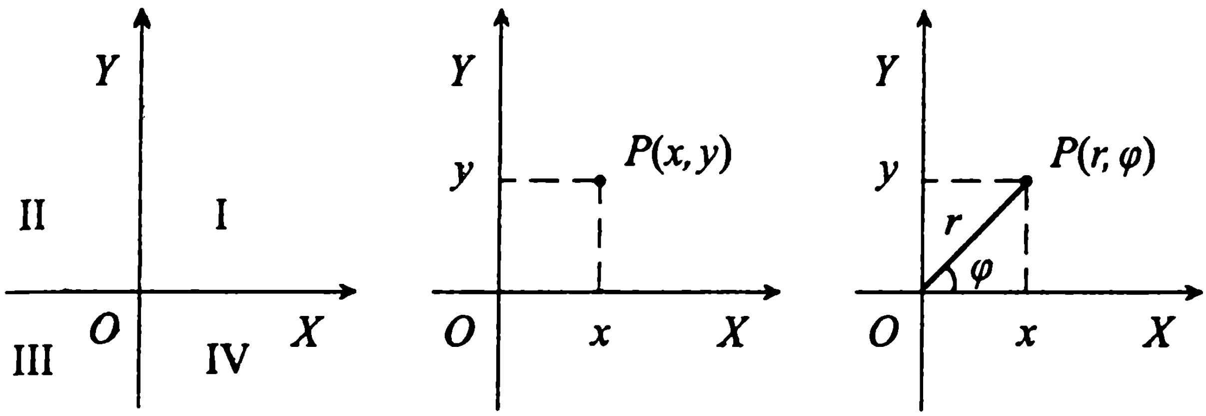


Рис. 2.5.1. Квадранты (слева), декартова прямоугольная (посередине) и полярная (справа) системы координат на плоскости.

Из прямоугольного треугольника ΔOPx нетрудно получить зависимости между декартовыми и полярными координатами точки P

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \qquad & y &= r\sin\varphi; \\ r &= \sqrt{x^2+y^2}, \qquad & \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Когда точка P находится в начале координат, значение угла φ не определено. Если же точка находится на оси ординат, но не в нуле, нужно брать $\varphi = \pi/2$, когда $y > 0$, и $\varphi = -\pi/2$, когда $y < 0$.

В ***декартовой косоугольной системе координат***, показанной на рис. 2.5.2 слева, ось ординат не перпендикулярна оси абсцисс. Иногда такие системы также находят применение.

В математике и других науках, да нередко и в обыденной жизни мы сталкиваемся с необходимостью выполнять различные преобразования систем координат. Простейший пример тому дает изображение графика функции $y = (x-2)^2 - 3$ в декартовой прямоугольной системе координат OXY. Легко сообразить, что он получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на 2 единицы *вправо* и на 3 единицы *вниз*. Можно, однако, не двигая график, ввести новую систему координат $O'X'Y'$, которая получается сдвигом системы OXY на 2 единицы *влево* и на 3 единицы *вверх*. Изображение самого графика при этом не изменится, переместятся лишь координатные оси.

При исследовании поверхности Земли с помощью космической съемки в настоящее время чаще всего используются растровые данные, полученные с помощью цифровых фотокамер. Они позволяют создавать цифровые картографические модели, содержание которых соответствует содержанию карт местности определенного вида и масштаба. Каждый снимок поверхности, помимо изображения, должен содержать данные о масштабе снимка, местоположении сфотографированного участка в какой-либо системе координат реального мира и ориентации снимка относительно осей координат этой системы. Когда с таким снимком работают картографы, им удобно использовать другую систему координат, в которой обычно границы снимка параллельны координатным осям и начало координат располагается в левом нижнем углу снимка. Новая система координат получается из исходной параллельным переносом и поворотом. Требуется, разумеется, еще и изменение масштабов, поскольку размеры снимка всегда гораздо меньше участка земной поверхности, который на нем изображен.

Понять преобразования, которым при этом подвергаются системы координат, несложно. Сначала задается декартова прямоугольная система координат на земной поверхности. Для этого фиксируется начало координат и направления осей и задаются определенные масштабы. При фотографировании со спутника изображение прямоугольного участка земной поверхности попадает в цифровую фотокамеру и хранится в виде графического файла определенного формата. При фотосъемке система координат преобразуется в новую систему путем применения преобразований сдвига начала отсчета и поворота на некоторый угол, чтобы нижняя и верхняя границы снимка были параллельны оси абсцисс. Далее происходит сжатие изображения (изменение его масштабов), что дает еще одну систему координат. В таком виде снимок передается на хранение в базу данных вместе с информацией, позволяющей однозначно рассчитать местоположение на поверхности Земли любой точки изображения, хранящегося в базе данных.

Рассмотрим теперь, что означают эти преобразования с точки зрения математики. На рис. 2.5.2 показаны сдвиг и поворот декартовой прямоугольной системы координат на плоскости без изменения масштабов. Каждая точка изображения при этом остается на месте.

Сдвигом, или ***параллельным переносом***, декартовой прямоугольной системы координат на плоскости называется такое ее перемещение, при котором координатные оси не поворачиваются и не меняют своего направления. В результате этого преобразования из старой системы координат OXY получается новая система $O'X'Y'$. Если новое начало координат переносится в точку $O'(a,\, b)$, то формулы, связывающие между собой новые и старые координаты любой точки P, таковы:

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b,$$
$$x' = x - a, \qquad y' = y - b. \tag{2.5.2}$$

Поворотом декартовой прямоугольной системы координат на плоскости называется такое ее перемещение, при котором координатные оси поворачиваются вокруг начала координат на некоторый угол α. Начало координат при этом остается на месте. При повороте против часовой стрелки формулы, связывающие между собой новые и старые координаты любой точки P, таковы:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$
$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{2.5.3}$$

Масштабированием называется изменение масштаба хотя бы на одной координатной оси. Если, например, производится масштабирование оси абсцисс $x' = kx$, то при $k > 1$ это равносильно увеличению масштаба в k раз на оси абсцисс, а при $0 < k < 1$ — уменьшению этого масштаба в k раз.

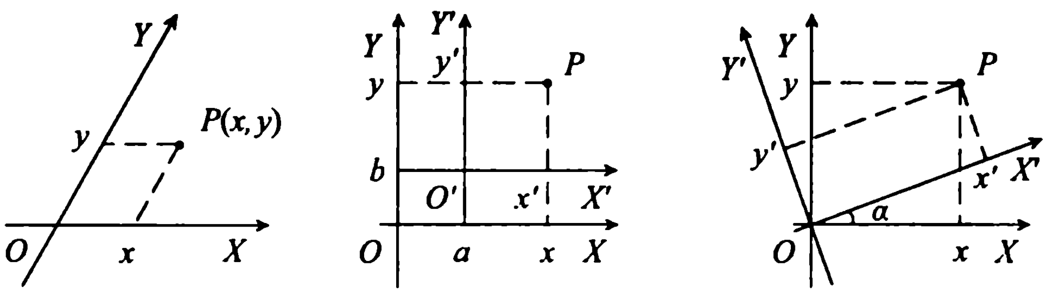


Рис. 2.5.2. Декартова косоугольная система координат на плоскости (слева), сдвиг (посередине) и поворот (справа) системы координат на плоскости.

Существуют и другие преобразования систем координат, но мы их рассматривать не будем.

Три наиболее популярные системы координат в пространстве показаны на рис. 2.5.3.

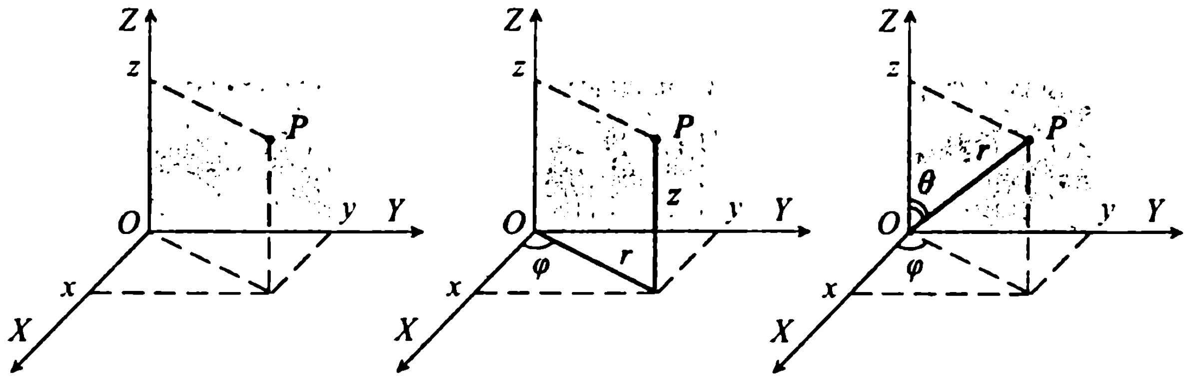


Рис. 2.5.3. Декартова прямоугольная (слева), цилиндрическая (посередине) и сферическая (справа) системы координат в пространстве.

2.6. Системы счисления

В настоящее время фактическим стандартом стала ***позиционная десятичная система счисления***. В ней используются десять арабских цифр: 0, 1, 2, ..., 9. Значение каждой цифры, входящей в состав числа, зависит от ее позиции (местоположения) в числе. Так, например, число 01 обозначает единицу, а число 10 — десять. Основанием этой системы является число 10.

Идею записи любого числа в этой системе проще всего уловить, рассмотрев пример.

$$123,456 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}.$$

Гораздо реже используются римские числа. Их иногда применяют для указания номера века или тысячелетия, номера тома в многотомном издании, для маркировки циферблатов часов.

В компьютерных науках нередко применяются двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления, в которых основаниями являются соответственно числа 2, 8 и 16. Поскольку десяти арабских цифр не хватает для записи шестнадцати цифр шестнадцатеричной системы, недостающие цифры заменяются в ней латинскими буквами

$$A = 10,\ B = 11,\ C = 12,\ D = 13,\ E = 14 \text{ и } F = 15.$$

Обычно эти системы рассматриваются в курсе информатики.

Гении рождаются во все времена.

3. Комплексные числа

Решая квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с вещественными коэффициентами a, b и c, мы нередко сталкиваемся с ситуацией, когда его дискриминант является отрицательным: $D = b^2 - 4ac < 0$. В этом случае квадратное уравнение вещественных корней не имеет. Означает ли это, что у него вообще нет никаких корней?

Оказывается, что это не так. Помимо вещественных корней, уравнения могут иметь другие корни, которые называются мнимыми и комплексными. Осознание этого факта заставило математиков расширить понятие числа, допустив существование системы чисел, в которой любое вещественное число является лишь частным случаем комплексного числа.

Мнимые и комплексные числа были открыты в XVI веке итальянскими математиками (Иеронимом Кардано, Людовико Феррари, Рафаэлем Бомбелли и др.), которые искали формулы для корней многочленов третьей и четвертой степени. Несколько столетий математики относились к этим новым числам с некоторым недоверием, о чем убедительно свидетельствует сам термин «мнимое число». И лишь доказательство ***Карлом Фридрихом Гауссом***[2] основной теоремы алгебры (см. раздел 3.8), из которой следует, что любой многочлен

[2] ***Карл Фридрих Гаусс*** (1777–1855) — немецкий математик, физик, астроном, один из величайших математиков всех времен.

степени n имеет ровно n корней, поставило точку в этом вопросе. С этого времени мнимые и комплексные числа утратили мистический налет и прочно заняли достойное место в арсенале средств решения самых различных задач не только чистой, но и прикладной математики.

Область применения комплексных чисел отнюдь не ограничивается отысканием корней многочленов. В настоящее время прекрасно развита теория функций комплексных переменных, дающая эффективный инструмент исследования многих задач физики, биологии, химии, экономики и других разделов современного естествознания.

3.1. Мнимые и комплексные числа

► **Определение 3.1.1.**

Мнимой единицей называется число $i = \sqrt{-1}$.

► **Определение 3.1.2.**

Мнимым (иногда чисто мнимым) называется число вида $z = iy$, где y — любое вещественное число, отличное от нуля.

► **Определение 3.1.3.**

Комплексным называется число вида $z = x + iy$, где x и y — любые вещественные числа. При этом вещественная величина $\mathrm{Re}(z) = z^{\mathrm{Re}} = x$ называется ***вещественной частью*** комплексного числа z, а мнимая величина $\mathrm{Im}(z) = z^{\mathrm{Im}} = iy$ — его ***мнимой частью***[3].

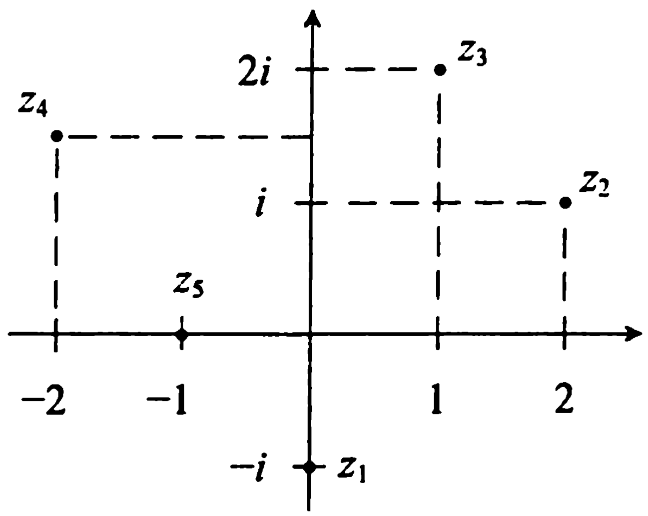


Рис. 3.1.1. Комплексные числа $z_1 = 0 - i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 1 + 2i$, $z_4 = -2 + 1,5i$, $z_5 = -1 + 0i$.

Нетрудно видеть, что ***множество вещественных и множество мнимых чисел являются подмножествами множества комплексных чисел.***

Весьма удобным является ***геометрическое представление комплексных чисел***, при котором каждому комплексному числу соответствует одна и только одна точка на плоскости. Такая плоскость часто называется ***комплексной***.

На ней вводится прямоугольная декартова система координат, в которой на оси абсцисс откладывается вещественная, а на оси ординат — мнимая часть комплексного числа. Началу координат соответствует $0 = 0 + 0i$ — вещественное число.

[3] От фр. *reel* — действительный, реальный и *imaginaire* — мнимый.

3.2. Арифметические операции

Комплексные числа ***равны*** тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части.

Понятий «больше» и «меньше» для комплексных чисел не существует.

Арифметические операции с комплексными числами выполняются в полном соответствии с теми правилами арифметики и алгебры, которые изучаются в средней школе.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда, учитывая, что $i^2 = -1$, получаем следующие формулы:

1) ***Сложение***: $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) =$
$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2) ***Вычитание***: $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) =$
$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

3) ***Умножение***: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$
$= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$
$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$.

4) ***Деление***: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$

$$= \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 - i^2y_2^2} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Заметим, что в результате этих четырех арифметических операций получается комплексное число (возможно, вещественное или мнимое). То же самое относится и к операциям возведения комплексных чисел в целую степень и извлечения из них корней n-й степени, которые рассматриваются ниже.

Примеры 3.2.1. Пусть $z_1 = -1 + 2i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Тогда

1) $z_1 + z_2 = -1 + 3 + i(2 - 4) = 2 - 2i.$

2) $z_1 - z_2 = -1 - 3 + i(2 + 4) = -4 + 6i.$

3) $z_1 z_2 = (-1 + 2i)(3 - 4i) = -3 + 4i + 6i - 8i^2 = 5 + 10i.$

4) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+2i}{3-4i} = \frac{(-1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-3-4i+6i+8i^2}{9-16i^2} =$$
$$= \frac{-11+2i}{25} = -\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i = -0,44 + 0,08i.$$

3.3. Комплексно сопряженные числа

Определение 3.3.1.

Числа $z = x + iy$ и $z^* = x - iy$, отличающиеся лишь знаками мнимых частей, называются ***комплексно сопряженными.***

Легко видеть, что сумма и произведение комплексно сопряженных чисел являются вещественными числами: $z + z^* = 2x$, $zz^* = x^2 + y^2$. Никакие другие пары комплексных чисел этим свойством не обладают.

Фактически мы уже использовали данное свойство, когда избавлялись от «мнимости» в знаменателе при делении комплексных чисел. Мы действовали подобно тому, как избавляются от иррациональности в знаменателе вещественной дроби. Умножая числитель и знаменатель комплексной дроби на число, комплексно сопряженное знаменателю, мы получаем новую дробь, у которой знаменатель является вещественным. Этот прием является стандартным и весьма часто используется в выкладках с комплексными числами.

Роль комплексно сопряженных чисел в комплексном анализе велика. В качестве подтверждения этого утверждения приведем лишь один пример.

Рассмотрим квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$ с вещественными коэффициентами a, b и c в случае, когда его дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$. В этом случае квадратное уравнение вещественных корней не имеет, но комплексные корни у него есть. Можно доказать, что полученная в школьном курсе алгебры формула для корней квадратного уравнения $z_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$ верна и в случае, когда $D < 0$. Обозначая $\alpha = -b/2a$ и $\beta = \sqrt{-D}/2a$ и замечая, что $-D > 0$, а значит, α и β — вещественные числа, получаем для корней этого уравнения формулы $z_1 = \alpha + i\beta$ и $z_2 = z_1^* = \alpha - i\beta$.

► Таким образом, в случае, ***когда дискриминант квадратного уравнения с вещественными коэффициентами является отрицательным, корни уравнения являются комплексными (возможно, мнимыми) и образуют комплексно сопряженную пару.***

Именно по этой причине теорема Виета для квадратного уравнения выполняется вне зависимости от того, какой знак имеет его дискриминант. Проверить это утверждение предлагается читателям в качестве легкого упражнения.

3.4. Тригонометрическая форма

Поскольку любое комплексное число можно трактовать как точку на комплексной плоскости, мы можем задавать ее координаты не только в декартовой, но и в полярной системе координат.

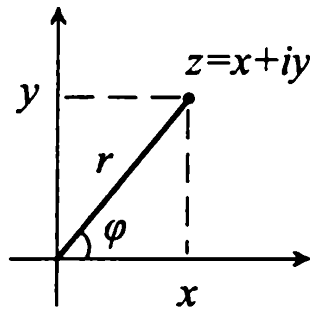


Рис. 3.4.1. Комплексное число.

В результате получается представление комплексного числа в тригонометрической форме

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Здесь $x = r\cos\varphi$, а $y = r\sin\varphi$.

Величина $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется ***модулем*** комплексного числа z, а φ, которое находится из уравнения $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, — его ***аргументом.***

Когда точка z находится в начале координат, значение аргумента φ не определено. Если же число z является мнимым, то точка z находится на оси ординат, но не в нуле. В этом случае нужно брать $\varphi = \pi/2$, если $y > 0$, и $\varphi = -\pi/2$, если $y < 0$.

Заметим, что определение модуля комплексного числа, которое мы дали, полностью соответствует определению модуля вещественного числа: когда z вещественное число, $z = z^*$, а значит,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} = \sqrt{z^2} = |z|.$$

Приведем несколько примеров представления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Примеры 3.4.1.

1) $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Здесь аргумент φ выбирается произвольно.

2) $3 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$.

3) $-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

4) $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

5) $-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

6) $3 + 4i = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

3.5. Возведение в целую степень

Можно доказать, что к комплексным числам применимы все свойства степени, которые используются в школьном курсе алгебры для работы с вещественными числами.

Рассмотрим сначала возведение в n-ю степень мнимой единицы. Легко видеть, что

$$i^2 = (\sqrt{-1}\,)^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Для возведения мнимой единицы в отрицательную степень нужно воспользоваться тем, что $z^{-1} = 1/z$. Это позволяет установить, что

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = -i, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1 \text{ и т. д.}$$

Представим эти результаты в виде таблицы

$i^{-4} = 1$	$i^{-3} = i$	$i^{-2} = -1$	$i^{-1} = -i$

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$	$i^4 = 1$

Теперь уже нетрудно заметить закономерность:

$$i^{4k+m} = \left(i^4\right)^k i^m = i^m$$

при любых целых значениях k и m. Это позволяет легко возводить мнимую единицу в любую целую степень. Так, скажем,

$$i^{2012} = i^{4\cdot 503} = 1, \quad \text{а} \quad i^{2013} = i^{4\cdot 503+1} = i.$$

Если требуется возвести в n-ю степень произвольное комплексное число z при $n = 2$, $n = 3$ или $n = 4$, то проще всего воспользоваться формулами сокращенного умножения (см. стр. 435).

Примеры 3.5.1.

1) $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = -5 - 12i.$

2) $(2-3i)^4 = (-5-12i)^2 = -119+120i.$

Если же степень n, в которую возводится комплексное число z, велика, то нужно представить его в тригонометрической форме и использовать ***формулу Муавра***[4]

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (3.5.1)$$

Докажем эту формулу ***методом математической индукции*** для натуральных значений показателя степени n.

Этот метод применяется, когда нужно доказать, что некоторое утверждение $A(n)$ выполняется при $\forall n \in N$. Доказательство проводится в три этапа. Сначала *проверяется* выполнение этого утверждения при $n = 1$. Затем *предполагается*, что оно выполняется для $n = k \in N$. После этого *доказывается*, что данное утверждение выполняется для $n = k+1$. Понять суть этого метода несложно: из того, что выполняется $A(1)$ (это подтверждается проверкой), следует, что выполняется $A(2)$, а значит, выполняется $A(3)$ и т. д. Очевидная модификация данного метода позволяет применять его и в случае, когда нужно доказать, что утверждение $A(n)$ выполняется при $n \geqslant n_0$.

Применим данный метод для доказательства формулы Муавра (3.5.1). Очевидно, что при $n = 1$ она выполняется. Предположим, что формула Муавра выполняется при $n = k$, т. е. $z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$. Тогда

$$z^{k+1} = z^k z = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

[4] ***Абрахам де Муавр*** (1667–1754) — английский математик французского происхождения.

$$= r^{k+1}(\cos k\varphi \cos\varphi + i\cos k\varphi \sin\varphi +$$
$$+ i\sin k\varphi\cos\varphi + i^2 \sin k\varphi \sin\varphi) =$$
$$= r^{k+1}[\cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi \sin\varphi +$$
$$+ i(\cos k\varphi \sin\varphi + \sin k\varphi\cos\varphi)] =$$
$$= r^{k+1}[\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi].$$

Мы доказали, что формула Муавра (3.5.1) выполняется при $n = k+1$. Согласно методу математической индукции это означает, что она выполняется при любом натуральном значении n.

При $n = 0$ формула Муавра также выполняется:

$$z^0 = r^0(\cos 0 + i\sin 0) = 1.$$

Если $n < 0$, то $k = -n > 0$, а значит,

$$z^n = z^{-k} = \frac{1}{z^k} = \frac{1}{r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)} =$$
$$= \frac{\cos k\varphi - i\sin k\varphi}{r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)} =$$
$$= \frac{\cos k\varphi - i\sin k\varphi}{r^k(\cos^2 k\varphi + \sin^2 k\varphi)} = r^{-n}[\cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\varphi].$$

Последнее означает, что для $n < 0$ данная формула справедлива. Следовательно, формула Муавра (3.5.1) выполняется для любых целых значений n.

Пример 3.5.2.

$$(1+i)^4 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4.$$

3.6. Извлечение корня

Операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в n-ю степень комплексных чисел всегда дают один ответ. А вот операция извлечения корня n-й степени из комплексного числа дает n различных ответов. Чтобы их найти, нужно представить комплексное число в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а затем использовать формулу

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1. \tag{3.6.1}$$

Следуя общепринятой традиции, мы используем здесь одно и то же обозначение для корня из комплексного числа $\sqrt[n]{z}$ и корня из вещественного числа $\sqrt[n]{r}$. При этом для первого подразумеваются все n корней, а для второго — единственное вещественное положительное значение корня, которое часто называют ***арифметическим корнем***.

Доказательство формулы (3.6.1) легко получить, возводя обе ее части в степень n с помощью формулы Муавра (3.5.1) и используя $2\pi-$периодичность тригонометрических функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Пример 3.6.1. Извлечем корень квадратный из мнимой единицы.

Поскольку $z = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, получаем из (3.6.1) при $k = 0$ и $k = 1$ два значения корня:

$$z_1 = \sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$z_2 = \sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Пример 3.6.2. Найдем все решения кубического уравнения $z^3 = 1$.

Поскольку $z = 1 = \cos 0 + i\sin 0$, получаем из (3.6.1) при $k = 0$, $k = 1$ и $k = 2$ три корня уравнения $z^3 = 1$:

$$z_1 = \sqrt[3]{1} = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$
$$z_2 = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_3 = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_2^*.$$

Заметим, что последний пример можно было решить иначе. Разлагая разность кубов на множители, получаем

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) =$$

$$= (z - 1)\left(z - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Приравнивая к нулю каждый из этих трех множителей, получаем искомые корни уравнения $z^3 = 1$.

Результат решения последнего примера легко обобщить на случай уравнения $z^n = 1$. Оно имеет ровно n корней, один из которых является единицей. Все его корни лежат на комплексной плоскости на единичной окружности и делят ее на n равных дуг. Корни, которые не являются вещественными, при этом существуют парами: если z_k — корень, то z_k^* — тоже корень. ◄

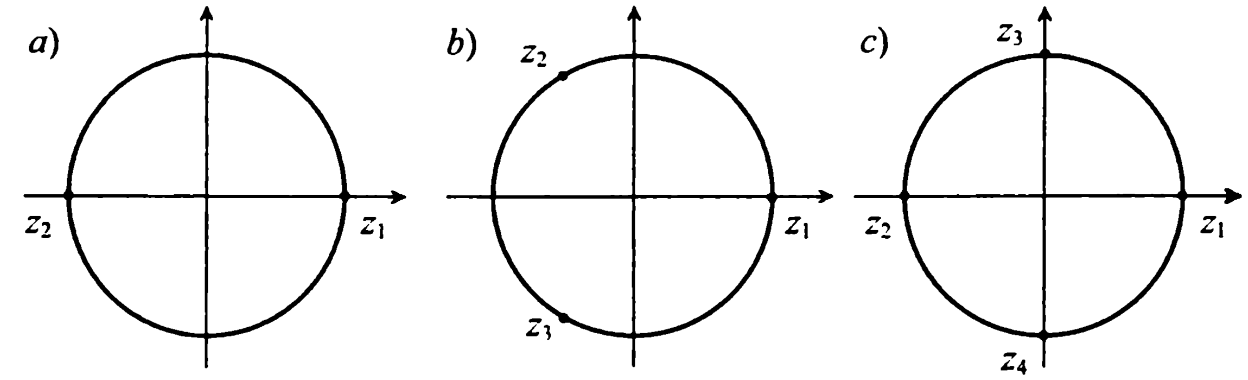


Рис. 3.6.1. Корни уравнений $z^n = 1$
лежат на единичной окружности.

a) Уравнение $z^2 = 1$. Корни $z_{1,2} = \pm 1$.

b) Уравнение $z^3 = 1$. Корни $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

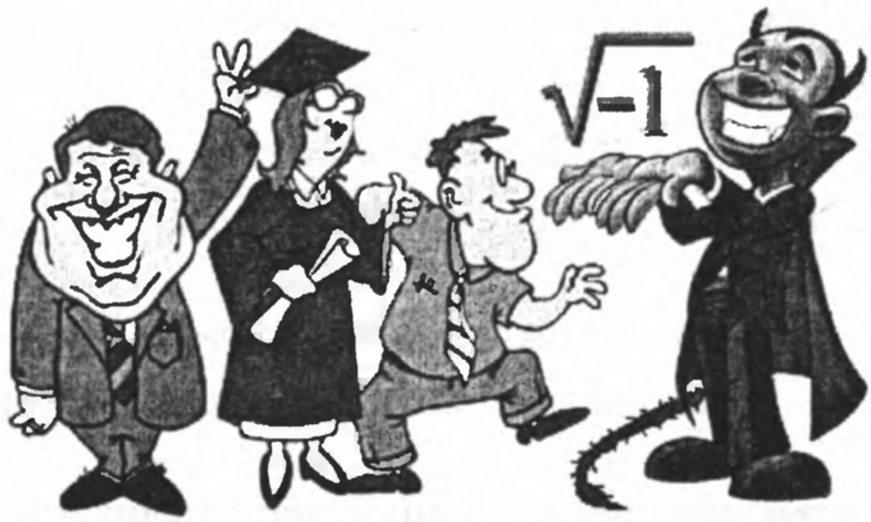
c) Уравнение $z^4 = 1$. Корни $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm i$.

3.7. Функции комплексной переменной

Теория функций комплексной переменной (ТФКП) занимается изучением функций, аргументы которых являются комплексными. На такие функции переносятся практически все понятия математического анализа, развитые для функций вещественной переменной. Исключение, разумеется, составляют некоторые свойства функций, связанные с неравенствами, поскольку для комплексных чисел понятий «больше» и «меньше» не существует. ТФКП широко применяется в физике и инженерных науках прежде всего потому, что она во многих случаях позволяет значительно упростить математические выкладки. В этом учебнике данную теорию мы рассматривать не будем, ограничившись формулой, показывающей связь между показательной и тригонометрическими функциями.

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{3.7.1}$$

Для чисто мнимого показателя $(x = 0)$ эта формула называется ***формулой Эйлера***.



Говорят, что мнимую единицу придумал дьявол,
а математики просто завершили начатое им дело.

3.8. Основная теорема алгебры

Определение 3.8.1. ◄

Многочленом n-й степени называется функция

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n.$$

Здесь $n \in N$, a_k — числовые коэффициенты, $a_0 \neq 0$.

Сформулируем без доказательства теорему, которая называется ***основной теоремой алгебры.***

Теорема 3.8.1. ◄

Любой многочлен n-й степени с вещественными или комплексными коэффициентами имеет ровно n вещественных или комплексных корней, среди которых могут быть одинаковые (их называют кратными) корни.

Замечания.

1) Если коэффициенты a_k многочлена являются вещественными, то его комплексные корни образуют комплексно сопряженные пары: если $z = x + iy$ — комплексный корень, то $z^* = x - iy$ — тоже корень.

2) У многочленов с вещественными коэффициентами может быть только четное число комплексных корней.

3) Многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.

3.9. Упражнения

Найдите сумму, произведение и отношение комплексных чисел z_1 и z_2.

3.9.1. $z_1 = 5 + 2i,\ z_2 = 3i - 1.$
3.9.2. $z_1 = 2,\ z_2 = 3i.$
3.9.3. $z_1 = 4i,\ z_2 = -i.$
3.9.4. $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = 1 - i.$

Решите квадратные уравнения.

3.9.5. $z^2 - 2z + 5 = 0.$ **3.9.6.** $\dfrac{z^2}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{z}{2}.$

Представьте в тригонометрической форме комплексные числа.

3.9.7. $z = \sqrt{3} + i.$ **3.9.8.** $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i.$

Ответы.

3.9.1. $z_1 + z_2 = 4 + 5i,\ z_1 z_2 = -11 + 13i,\ \dfrac{z_1}{z_2} = 0,1 - 1,7i.$

3.9.2. $z_1 + z_2 = 2 + 3i,\ z_1 z_2 = 6i,\ \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{2}{3}i.$

3.9.3. $z_1 + z_2 = 3i,\ z_1 z_2 = 4,\ \dfrac{z_1}{z_2} = -4.$

3.9.4. $z_1 + z_2 = -1 + 2i,\ z_1 z_2 = 1 + 5i,\ \dfrac{z_1}{z_2} = -2,5 + 0,5i.$

3.9.5. $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 1 - 2i.$

3.9.6. $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

3.9.7. $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right).$

3.9.8. $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right).$

4. Функции

Понятие функции является очень важным. Изучению свойств функций и различных операций, которые можно выполнять с функциями, посвящена значительная часть этого учебника.

4.1. Величины постоянные и переменные

Практически в любой математической модели какие-то величины не меняют своих значений. Они называются ***постоянными***, или ***константами***. Запись $c = const$ означает, что величина c является постоянной.

Если же какая-либо величина может принимать различные значения, то она считается ***переменной***.

Пример 4.1.1.

В почвоведении при изучении всхожести различных семян, посеянных в определенном месте, тип почвы обычно считается постоянной величиной, а количество взошедших семян — переменной. Если же изучается зависимость всхожести от типа почвы, то последнюю также нужно считать переменной величиной.

4.2. Определение функции

Определение 4.2.1. ◄

Если задано правило (закон), по которому $\forall x \in D$ ставится в соответствие единственное значение $y \in E$, то говорят, что задана ***функция*** $y = f(x)$. Множество D называется ***областью определения*** функции, а E — ***множеством значений*** функции.

Замечания.

1) В этом определении x и y — переменные величины. При этом x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом*** функции, а y — ***зависимой переменной.***

2) Здесь ничего не утверждается о природе множеств D и E. Они совершенно не обязательно должны быть числовыми. Тем не менее всюду в дальнейшем мы будем считать эти множества числовыми.

3) Если не оговорено противное, переменные x и y будем считать вещественными.

4) Вместо $y = f(x)$ нередко пишут $f : D \Rightarrow E$ и говорят, что функция f действует из множества D во множество E.

Пример 4.2.1.

Правило $y = x^2$ задает квадратичную функцию, для которой в общем случае D — множество вещественных чисел, а E — множество неотрицательных вещественных чисел. Если же данная функция используется в некоторой математической модели, для которой x — количество подопытных кроликов, нам следует считать, что D и E представляют собой множества целых неотрицательных чисел.

Этот пример показывает, что корректное применение понятия функции невозможно без четкого указания ее области определения. А вот множество значений функции фактически задается правилом, отражающим зависимость y от x.

Если область определения функции не указана, то считается, что подразумевается ее ***естественная область определения***, которая диктуется требованиями математической корректности.

Заметим, что допустимо лишь сужение естественной области определения функции, если в том есть нужда при построении какой-либо математической модели. Так, скажем, нельзя расширить естественную область определения функции $y = 1/x$ и считать, что она определена для любых x, поскольку делить на ноль нельзя.

Рассматривая понятия предела и производной, мы нередко будем говорить, что какая-либо функция определена в некоторой окрестности точки x_0. Следующее определение поясняет этот математический термин.

► **Определение 4.2.2.**

Окрестностью точки x_0 называется интервал

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),$$

содержащий данную точку. Здесь $\delta > 0$ — некоторое число.

4.3. Способы задания функции

Существуют три основных способа задания функции: аналитический (в виде одной или нескольких формул), графический и табличный.

Пример 4.3.1.

Формула $y = |\sin 5x|$ задает в аналитическом виде функцию, которая определена при $\forall x$.

Заметим, что нарисовать график или построить таблицу значений функции, заданной аналитически, всегда возможно. Но вот получить точную аналитическую формулу для функции, заданной графически или в виде таблицы, можно лишь в некоторых простейших случаях.

4.4. Четная и нечетная функции

Определение 4.4.1.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если выполняются следующие условия.

1) Ее область определения D симметрична относительно начала координат.
2) $f(-x) = f(x)$ при $\forall x \in D$.

Определение 4.4.2.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если выполняются следующие условия.

1) Ее область определения D симметрична относительно начала координат.
2) $f(-x) = -f(x)$ при $\forall x \in D$.

Примеры 4.4.1.

Легко убедиться, что функции $y = \cos x$ и $y = x^2$ являются четными, а функции $y = \sin x$ и $y = x^3$ — нечетными. Заметим еще, что функция $y \equiv 0$ является одновременно четной и нечетной.

Замечания.

1) График четной функции симметричен относительно оси ординат.
2) График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

4.5. Периодическая функция

Определение 4.5.1.

Функция $y = f(x)$ с областью определения D называется ***периодической*** с периодом T, если существует такое $T > 0$, что для $\forall x \in D$ выполняются следующие условия.

1) $x - T \in D$ и $x + T \in D$.

2) $f(x+T) = f(x)$.

Пример 4.5.1.

Из школьного курса элементарной математики известно, что функция $y = \sin x$ является периодической с периодом $T = 2\pi$ (см. стр. 462).

4.6. Ограниченная функция

Определение 4.6.1.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на множестве D_0, если существует такое число m, что $f(x) \geqslant m$ при $\forall x \in D_0$. Число m при этом называется ***нижней границей функции.***

Определение 4.6.2.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на множестве D_0, если существует такое число M, что $f(x) \leqslant M$ при $\forall x \in D_0$. Число M при этом называется ***верхней границей функции.***

Определение 4.6.3. ◄

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве D_0, если она ограничена на нем как снизу, так и сверху.

Замечания.

1) В этих определениях предполагается, что $D_0 \subseteq D$, где D — область определения функции.

2) Если существует такое число M, что $|f(x)| \leqslant M$ при $\forall x \in D_0$, то функция $f(x)$ является ограниченной на множестве D_0, поскольку тогда $-M \leqslant f(x) \leqslant M$, а значит, в качестве нижней границы можно взять число $-M$. Верно, как легко проверить, и обратное утверждение: если функция $f(x)$ является ограниченной, то $|f(x)| \leqslant \leqslant M$.

3) Если число m является нижней границей функции, то любое другое число m_1, удовлетворяющее неравенству $m_1 < m$, также является ее нижней границей. Аналогично обстоит дело и с верхней границей: если M — верхняя граница функции, то любое другое число $M_1 > M$ также является ее верхней границей.

4) Самую большую из всех нижних границ принято называть ***точной нижней границей*** функции, а самую маленькую из ее верхних границ — ***точной верхней границей***. Вопрос о том, достигает ли функция своих точных границ, является довольно тонким. Мы его рассматривать не будем.

Примеры 4.6.1.

1) Функция $y = \sin x$ является ограниченной при $\forall x$, т. к. $|\sin x| \leqslant 1$ при $\forall x$. В этом примере -1 — точная нижняя граница функции, а 1 — ее точная верхняя граница. Числа -2 и 2 также являются соответственно нижней

и верхней границами данной функции, но не являются ее точными границами.

2) Функция $y = 1/x$ является ограниченной на отрезке $[1,\ 2]$, но не является таковой на отрезке $[-1,\ 1]$, поскольку вблизи точки $x = 0$ этого отрезка она может принимать сколь угодно большие по модулю значения.

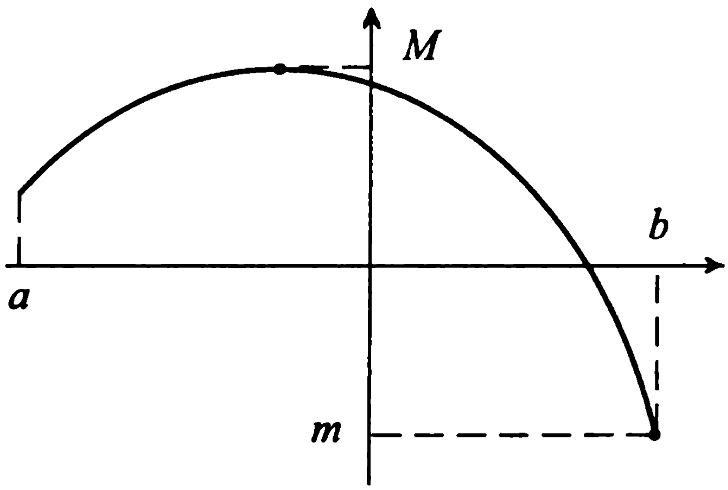


Рис. 4.6.1. Эта функция на отрезке $[a,\ b]$ ограничена. Ее точная нижняя граница на нем равна m, а точная верхняя граница — M.

4.7. Суперпозиция функций

Пусть заданы функции $y = f(z)$ и $z = g(x)$. Тогда можно рассматривать и функцию $y = f(g(x)) = F(x)$, которая называется ***сложной функцией***, или ***суперпозицией функций*** f и g.

При этом, разумеется, необходимо еще разобраться с областями определения и множествами значений исходных функций и их суперпозиции. Нетрудно убедиться, что в этом вопросе не возникнет никаких проблем, если $f : Z \Rightarrow Y$ и $g : X \Rightarrow Z$, т. е. область определения функции f совпадает с множеством значений функции g. В результате для суперпозиции оказывается, что $F : X \Rightarrow Y$.

► **Пример 4.7.1.**

Если заданы функции $y = \sin z$ и $z = x^3$, то существует и суперпозиция этих функций $y = \sin x^3$, которая определена на множестве вещественных чисел. Ее множеством значений является отрезок $[-1, 1]$.

4.8. Обратная функция

Пусть задана некоторая функция $y = f(x)$, определяющая зависимость y от x. Предположим, что нам удалось поменять ролями y и x. Тогда получится, что x зависит от y, и мы приходим к функции $x = f^{-1}(y)$, которую называют ***обратной*** для функции $y = f(x)$.

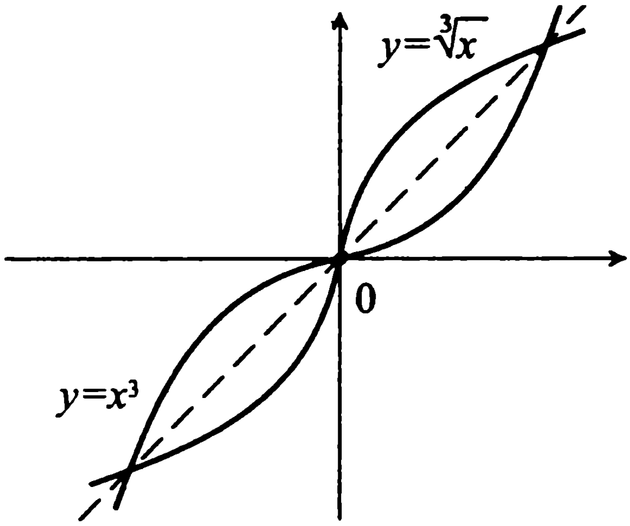


Рис. 4.8.1. Графики взаимно обратных функций $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$ симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Пример 4.8.1.

Если задана функция $y = x^3$, то функция $x = \sqrt[3]{y}$ будет для нее обратной.

Замечания.

1) Обозначение f^{-1} для обратной функции является общепринятым, но такую запись нельзя трактовать как возведение функции f в минус первую степень. Это просто обозначение, и не более того.

2) Наше предположение о возможности смены ролей y и x обоснованным не является, причем отнюдь не только по формальным причинам, связанным с тем, что мы ни слова не сказали об области определения и о множестве значений исходной и обратной функций. Это хорошо иллюстрирует пример функции $y = x^2$, для которой наши рассуждения приводят к зависимости $x = \pm\sqrt{y}$, которую мы не можем считать функцией, иначе получилось бы, что для нее одному значению аргумента y соответствуют два значения функции x, а это противоречит определению 4.2.1.

3) Из сказанного выше следует, что обратная функция существует далеко не у каждой функции. Этот вопрос в целом является совсем не простым. Безупречно строгое определение обратной функции является достаточно абстрактным и сложным. Мы его рассматривать не будем, отсылая читателей к литературе, где данный вопрос излагается в полном объеме.

Очевидно, что в случае, когда у некоторой функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, графики этих функций совпадают, поскольку они фактически задают одну и ту же зависимость. Если же мы захотим для обратной функции ввести переобозначения, заменив x на y и наоборот, то график обратной функции, как легко догадаться, получится отражением графика исходной функции относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (см. рис. 4.8.1).

4.9. Неявная функция

Строгое определение неявной функции в самом начале изучения курса высшей математики мы дать не можем, поскольку оно требует знания некоторых вопросов, которые будут рассмотрены гораздо позже. Ограничимся поэтому лишь неформальными и не очень точными рассуждениями и объясним понятие неявной функции на примере.

Предположим, что у нас имеется некоторая зависимость между двумя переменными величинами x и y, заданная, скажем, формулой $y^3 - x^2 = 0$. Рассматривая эту формулу как уравнение для определения y, получим $y = \sqrt[3]{x^2}$. В такой ситуации говорят, что данная формула определяет ***неявную*** функцию $y = f(x)$, которую можно записать в явном виде.

В общем случае далеко не всякая зависимость между двумя переменными величинами определяет неявную функцию. Может оказаться, что такая функция не существует или существует, но ее нельзя представить в аналитическом виде. Даже в приведенном нами примере, который выглядит вполне элементарным, нас подстерегает проблема, если мы попытаемся найти функцию $x = g(y)$. В этом случае мы приходим к зависимости $x = \pm\sqrt{y^3}$, которую мы не можем считать функцией, иначе получилось бы, что для нее одному значению аргумента y соответствуют два значения функции x, что противоречит определению 4.2.1.

4.10. Однозначная и многозначная функции

Давая определение функции, мы потребовали, чтобы каждому значению независимой переменной x соответствовало единственное значение зависимой переменной y. Это позволяет нам в дальнейшем не делать массу оговорок в формулировках теорем о различных свойствах функций, их пределов, производных и т. д. Это значительно упрощает изложение материала, а значит, и его восприятие. Такие функции называются ***однозначными***.

На самом деле это требование можно убрать и рассматривать ***многозначные*** функции, у которых каждому значению x может соответствовать одно или несколько значений y. Мы, однако, свойства таких функций изучать не будем.

5. Пределы

Понятие предела функции является достаточно сложным, но обойтись без него практически невозможно, поскольку пределы широко используются во многих разделах высшей математики, например в определении производной.

С другой стороны, проблемы с изучением данного материала связаны в первую очередь с его математической формализацией. Если при первом чтении пренебречь некоторыми тонкостями, положившись на здравый смысл и интуицию, возможно, все окажется не столь трудным и запутанным, как это представляется на первый взгляд.

5.1. Определение предела функции

Мы будем изучать в этой главе поведение функции $y = f(x)$, когда ее аргумент x приближается к некоторому значению a. Такая постановка вопроса корректна только в случае, когда точка a является ***предельной точкой (точкой сгущения)*** области определения D функции $y = f(x)$. Это означает, что в любой[5] окрестности точки a найдутся значения $x \in D$, отличные от a. При этом сама точка a может принадлежать, а может и не принадлежать множеству D.

Точки множества, которые не являются предельными, называются ***изолированными***. У таких точек существует окрест-

[5] А значит, и в сколь угодно маленькой.

ность, в которой нет ни одной другой точки данного множества. Пример изолированной точки дает функция $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$. Ее область определения состоит из единственной точки $x = 0$. Говорить о поведении этой функции, когда ее аргумент x приближается к точке $x = 0$, не имеет смысла.

Дадим вначале нестрогое определение предела функции.

Определение 5.1.1. ◀

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to a$ (при x, стремящемся к a), если значения $f(x)$ сколь угодно близки к A для всех x, достаточно близких к a. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

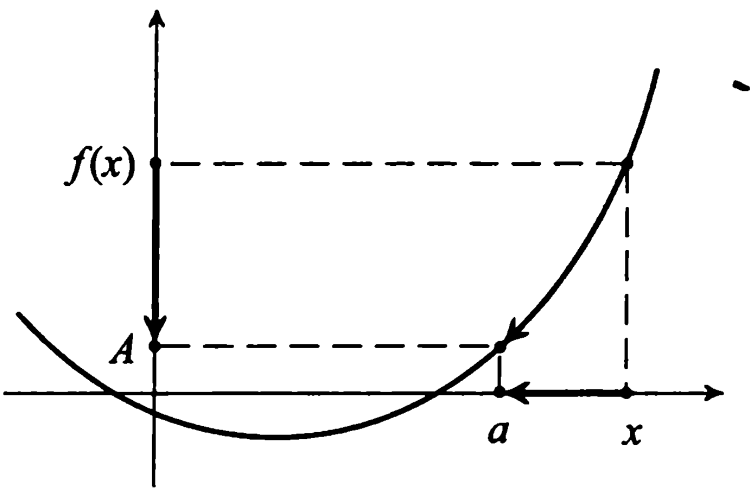


Рис. 5.1.1. Когда $x \to a$, точка графика $(x, f(x)) \to (a, A)$. При этом ордината $f(x) \to A$. Значит, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Приведенное выше определение предела функции является не вполне точным, т. к. в нем не определен термин «близость». Дадим теперь формальное математическое определение предела функции, свободное от этого недостатка.

► **Определение 5.1.2.**

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to a$ (или пределом в точке $x = a$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

► **Замечания.**

1) Неравенство $0 < |x-a|$ означает, всего лишь, что $x \neq a$. Это позволяет применять данное определение и в случае, когда функция $f(x)$ не определена при $x = a$.

2) В этом определении δ зависит от ε.

3) Неравенство $|x - a| < \delta$ определяет меру близости значения аргумента x к числу a. В самом деле, из этого неравенства следует, что $-\delta < x - a < \delta$. Последнее, в свою очередь, равносильно неравенству

$$a - \delta < x < a + \delta.$$

Если число $\delta > 0$ мало, то отсюда вытекает, что значение аргумента x будет близким к a.

4) Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ определяет меру близости значения функции $f(x)$ к числу A. Отсюда следует, что $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, но тогда

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Согласно нашему определению число $\varepsilon > 0$ может быть любым, а значит, оно может быть сколь угодно маленьким. Следовательно, значение функции $f(x)$ будет сколь угодно близким к числу A, если только значение аргумента x окажется достаточно близким к числу a.

Пример 5.1.1.

Здравый смысл подсказывает, что $\lim\limits_{x\to 2}(x+3) = 5$, поскольку значение $f(x) = x+3$ приближается к числу $f(2) = 5$, когда $x \to 2$.

Строгое доказательство этого факта с использованием определения 5.1.2 представляет, однако, уже существенно более трудную задачу. От студентов, не специализирующихся в области математики, преподаватели обычно не требуют умения проводить такие доказательства.

Опираясь лишь на формулы элементарной математики, легко найти и следующие пределы.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+1}{4x+1} = -\frac{1}{9}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1+2\sin\frac{x}{2}}{1+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}} = \frac{4}{5}.$$

В этих примерах, отыскивая $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, мы видели, что $A = f(a)$.

Заметим, что столь простой способ вычисления предела функции $f(x)$ при $x \to a$ применим лишь в случае, когда функция определена и непрерывна в точке $x = a$. Если функция этим свойством не обладает, то задача вычисления предела существенно усложняется. Этот вопрос рассматривается в разделах 5.6–5.10.

Найти предел функции можно отнюдь не всегда, поскольку он может и не существовать.

Примеры 5.1.2.

1) $\lim\limits_{x \to -5} \sqrt{x}$ не существует, т. к. при x, близких к -5, подкоренное значение функции $\sqrt{x}$ будет отрицательным.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x^2)$ не существует, т. к. периодическая функция не может стремиться к определенному значению, когда ее аргумент неограниченно растет, а именно это и происходит, когда $x \to 0$.

5.2. Обобщения понятия предела

В определении предела функции, которое мы дали в предыдущем разделе, a и A являются числами. Понятие предела обобщается и на случай, когда $a = \pm\infty$ или $A = \pm\infty$. Такую запись следует понимать как некоторую условность: достичь бесконечности нельзя, к ней какая-либо величина может лишь стремиться.

Замечание.

Употребление перед символом ∞ двух знаков подразумевает, что величина может стремиться по отдельности либо к $+\infty$, либо к $-\infty$. Если же знак перед символом ∞ отсутствует, подразумевается $+\infty$.

Определение 5.2.1.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при

$$x \to +\infty,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что при всех $x > M$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Определение 5.2.2.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при

$$x \to -\infty,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что при всех $x < -M$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Определение 5.2.3.

Говорят, что предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен $+\infty$, если для любого числа $\Delta > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > \Delta$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Определение 5.2.4.

Говорят, что предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен $-\infty$, если для любого числа $\Delta > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) < -\Delta$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Рассмотреть случай, когда $a = \pm\infty$ и $A = \pm\infty$, предоставляется читателям.

Замечания.

1) В определении 5.2.1 условие $x > M$ означает, что значения аргумента x должны быть достаточно велики.

2) В определении 5.2.2 условие $x < -M$ означает, что значения аргумента x должны быть отрицательны и достаточно велики по абсолютной величине.

3) В определении 5.2.3 условие $f(x) > \Delta$ означает, что при значениях аргумента x, достаточно близких к a, значения функции положительны и неограниченно растут, когда $x \to a$.

4) В определении 5.2.4 условие $f(x) < -\Delta$ означает, что при значениях аргумента x, достаточно близких к a, значения функции отрицательны и неограниченно растут по абсолютной величине, когда $x \to a$.

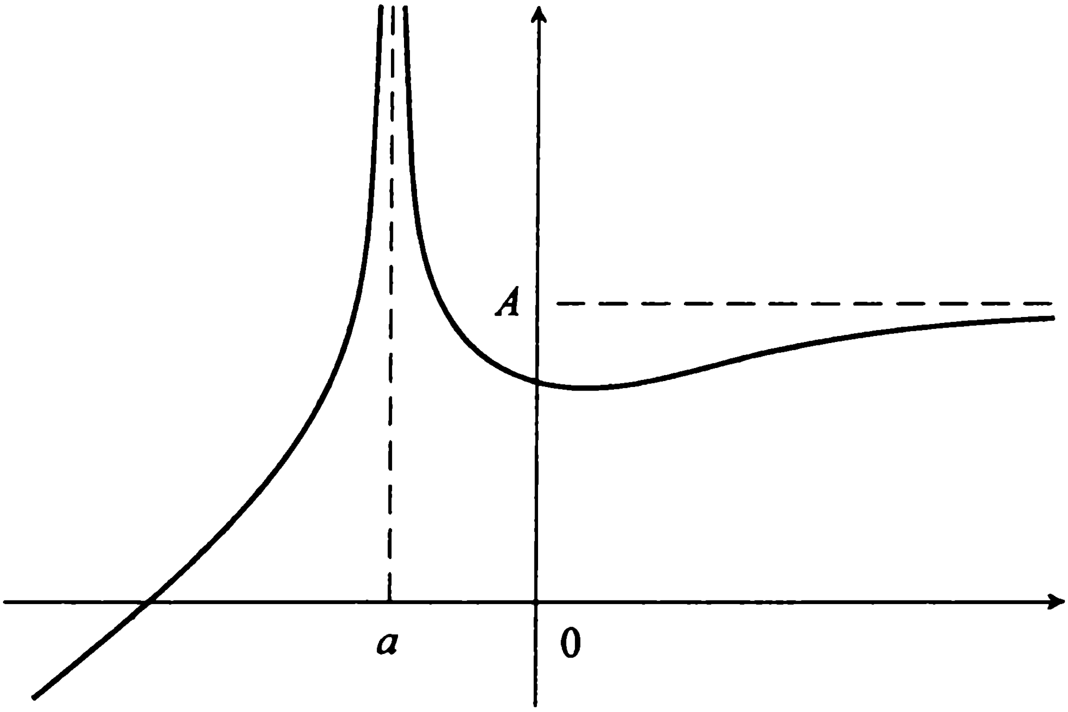


Рис. 5.2.1. Здесь $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Иллюстрацией к рассматриваемому нами случаю, когда $a = \pm\infty$ или $A = \pm\infty$, могут служить следующие примеры, для решения которых требуется лишь знать, что дробь с положительными числителем и знаменателем убывает, когда ее знаменатель растет, и наоборот — она растет, когда знаменатель убывает.

Примеры 5.2.1.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0$. 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = 0$. 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{x^2} = +\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-5}{x^2} = -\infty$. 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{x^3}$ не существует.

В пояснениях нуждается лишь последний пример. Мы не знаем, с какой стороны x стремится к 0. Если справа $(x > 0)$, то дробь окажется положительной, а если слева $(x < 0)$, то отрицательной. Это означает, что предел данной дроби при $x \to 0$ не существует, но можно говорить о существовании *односторонних пределов*. В рассматриваемом примере существуют оба таких предела:

$$\lim_{x\to+0}\frac{5}{x^3}=+\infty \quad \text{(предел справа)},$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{5}{x^3}=-\infty \quad \text{(предел слева)}.$$

Мы не будем рассматривать строгое определение интуитивно ясного понятия одностороннего предела, заметив только, что обозначения

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x) \quad \text{или} \quad A=f(a+0)$$

используются для предела справа, а обозначения

$$A=\lim_{x\to a-0}f(x) \quad \text{или} \quad A=f(a-0)$$

используются для предела слева.

Можно доказать, что «обычный» (не односторонний) конечный или бесконечный предел функции

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

существует тогда и только тогда, когда существуют и совпадают оба односторонних предела этой функции:

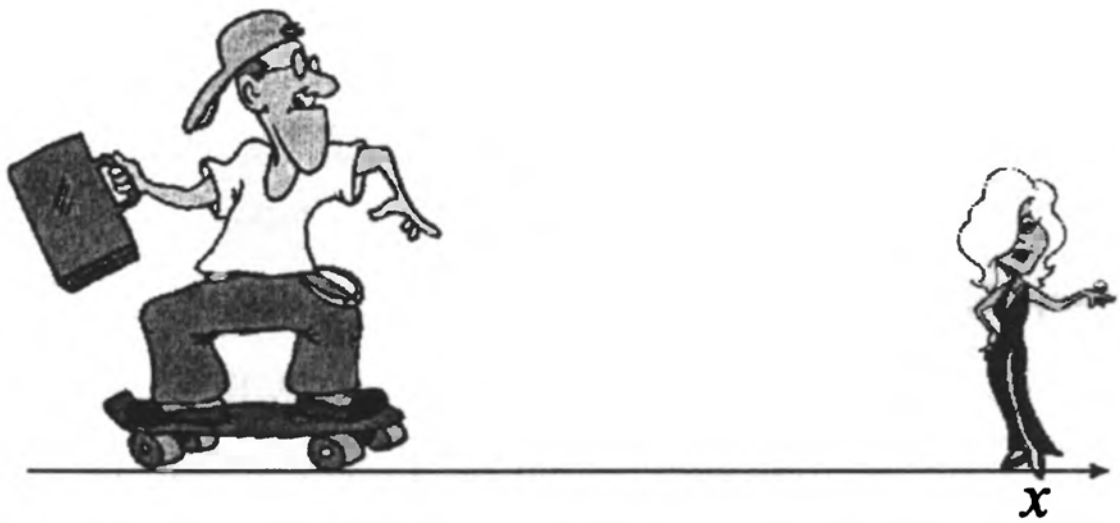
$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=A.$$

Замечания.

1) Слова «предел не существует» иногда содержат некоторую двусмысленность. В математической литературе их обычно употребляют не только, когда найти предел нельзя, но и в случае, когда в результате вычисления предела

получается $+\infty$ или $-\infty$. Мы тоже будем далее придерживаться этого соглашения, а в случае необходимости говорить о существовании конечного или бесконечного предела.

2) Помимо предела функции в теории пределов рассматривается ***предел числовой последовательности.*** Это понятие дается в школе. Числовую последовательность можно рассматривать как имеющую вещественные значения функцию, определенную на множестве натуральных чисел. Это позволяет распространить, иногда с небольшой коррекцией, на последовательности те утверждения о пределах (и не только о них), которые в нашем курсе формулируются для функций. Мы не будем далее отдельно изучать этот вопрос, ограничившись рассмотрением лишь небольшого количества примеров.



Достичь бесконечности нельзя,
к ней величина может лишь стремиться.

Примеры 5.2.2.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} = 0.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(5 + \sin\frac{1}{n^3}\right) = 5.$

5.3. Бесконечно малая величина

Роль бесконечно малых функций в теоретических направлениях естествознания переоценить трудно, но мы в нашем курсе будем использовать их скорее как вспомогательный инструмент, существенно упрощающий доказательства многих теорем о пределах.

► **Определение 5.3.1.**

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Замечание.

Это определение пригодно и в случае, когда $a = \pm\infty$.

Пример 5.3.1.

Функция $\alpha(x) = x^2 - 4$ есть бесконечно малая при $x \to -2$ и при $x \to 2$, но не является таковой, когда ее аргумент x стремится к любому другому значению.

Сформулируем сначала важнейшие из свойств бесконечно малых функций в максимально простом виде (без особых формальностей). В разделе 5.11 они даются в виде теорем с доказательствами.

Свойства бесконечно малых ◄

1) Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2) Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

3) Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция. В частности, произведение бесконечно малой функции на постоянную функцию есть бесконечно малая функция.

4) Бесконечно малая при $x \to a$ функция ограничена, по крайней мере, при x, близких к a.

Замечание.

Здесь предполагается, что все функции, о которых идет речь, являются бесконечно малыми, когда их аргументы стремятся к одному и тому же значению a, конечному или бесконечному.

Перечисленные выше свойства позволяют складывать, вычитать и умножать бесконечно малые величины, зная заранее, что в результате получится бесконечно малая величина. Что же касается операции деления (ее часто называют сравнением), то с ней все обстоит гораздо сложнее: результат такой операции предсказать заранее нельзя. Он может оказаться любым. Мы еще вернемся к этой проблеме, рассматривая вопрос о раскрытии неопределенностей (см. разделы 5.6–5.10).

Определение 5.3.2.

Предположим, что функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, причем существует конечный предел отношения

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A.$$

1) Если $A = 0$, то говорят, что порядок бесконечно малой $\alpha(x)$ выше порядка бесконечно малой $\beta(x)$. Этот факт записывается следующим образом: $\alpha = o(\beta)$.

2) Если $A \neq 0$, то говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок. Этот факт записывается следующим образом: $\alpha = O(\beta)$ или $\beta = O(\alpha)$.

3) Если $A = 1$, то говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны. Этот факт записывается так: $\alpha \sim \beta$.

Замечания.

1) Это определение пригодно и в случае, когда $a = \pm\infty$.

2) Если $A = \infty$ или $A = -\infty$, то нужно просто «перевернуть» эту дробь и рассмотреть предел отношения $\beta(x)$ к $\alpha(x)$. Окажется, что он равен нулю и можно будет говорить, что порядок бесконечно малой $\beta(x)$ выше порядка бесконечно малой $\alpha(x)$.

Примеры 5.3.2.

1) При $x \to 0$ порядок бесконечно малой $\alpha(x) = x^2$ выше порядка бесконечно малой $\beta(x) = x$, поскольку

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

2) Функции $\alpha(x) = x - 3$ и $\beta(x) = 3 - x$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to 3$, поскольку

$$\lim_{x\to 3} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{3-x} = -1.$$

3) Функции $\alpha(x) = 6(x-3)$ и $\beta(x) = x^2-9$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to 3$, поскольку

$$\lim_{x\to 3} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{6(x-3)}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{6}{x+3} = 1.$$

5.4. Бесконечно большая величина

Определение 5.4.1.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Замечания.

1) Это определение пригодно и в случае, когда $a = \pm\infty$.

2) Если бесконечно большая функция $f(x)$ при всех значениях x, достаточно близких к a, принимает только положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$.

3) Если бесконечно большая функция $f(x)$ при всех значениях x, достаточно близких к a, принимает только отрицательные значения, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ или $f(x) \to -\infty$ при $x \to a$.

Нетрудно видеть, что между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями имеется следующая связь.

► Функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$, т. е.

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0, \text{ если } \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty.$$

► Функция $1/\alpha(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$, если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, т. е.

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \pm\infty,$$

если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и $\alpha(x) \neq 0$ при x, близких к a.

5.5. Свойства пределов

Сформулируем важнейшие из свойств, которые используются при вычислении пределов, в максимально простом виде (без особых формальностей). В разделе 5.11 некоторые из них даются в виде теорем с доказательствами.

► Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to a} c = c, \text{ если } c = const.$$

2) Предел суммы и разности функций равен соответственно сумме и разности их пределов:

$$\lim_{x\to a}(u \pm v) = \lim_{x\to a} u \pm \lim_{x\to a} v.$$

3) Предел произведения функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to a} u \cdot v = \lim_{x\to a} u \cdot \lim_{x\to a} v.$$

4) Предел отношения функций равен отношению их пределов:

$$\lim_{x\to a} \frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{x\to a} u}{\lim\limits_{x\to a} v}, \text{ если } \lim_{x\to a} v \neq 0.$$

5) Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} c \cdot u = c \cdot \lim_{x\to a} u, \text{ где } c = const.$$

6) Если предел функции при $x \to a$ существует, то он единственный: функция не может стремиться к нескольким различным значениям, когда $x \to a$.

7) Если предел функции при $x \to a$ существует, то в некоторой окрестности точки a данная функция является ограниченной.

8) Конечную степень можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} u^b = \left(\lim_{x\to a} u\right)^b, \quad b \in R.$$

9) Предел логарифма функции равен логарифму ее предела:

$$\lim_{x\to a}\log_b u = \log_b \lim_{x\to a} u, \text{ если } \lim_{x\to a} u > 0.$$

10) Предел экспоненты функции равен экспоненте ее предела:

$$\lim_{x\to a} e^u = e^{\lim\limits_{x\to a} u}.$$

11) В общем случае при переходе к пределу строгое неравенство заменяется нестрогим: если $u > v$ при всех x, достаточно близких к a, то

$$\lim_{x\to a} u \geqslant \lim_{x\to a} v.$$

12) Если $\lim\limits_{x\to a} u > \lim\limits_{x\to a} v$, то при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $u(x) > v(x)$.

Замечания.

1) Эти свойства справедливы и в случае, когда $a = \pm\infty$.

2) Свойство 11 объясняет, откуда появилось ограничение $\lim\limits_{x\to a} u > 0$ в свойстве 9. Сама функция u положительна (поскольку она находится под знаком логарифма), но мы должны застраховаться от случая, когда в результате перехода к пределу она обратится в ноль.

5.6. Неопределенность вида 0 / 0

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$, т. е.

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = \lim_{x\to a}\beta(x) = 0.$$

В этом случае нельзя высказать никакого общего утверждения о пределе отношения этих функций при $x \to a$. В зависимости от вида функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ этот предел может быть конечным, бесконечным или вовсе не существовать. Именно поэтому в такой ситуации говорят о неопределенности вида 0/0.

Рассмотрим серию типичных примеров на раскрытие неопределенности данного вида.

Пример 5.6.1.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+1)=4.$$

Пример 5.6.2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{(x-1)^2}=\infty.$$

В этих примерах квадратный трехчлен, стоящий в числителе, разлагается на множители. После сокращения под знаком предела получается функция, предел которой легко вычисляется. Этот прием является стандартным для многих примеров на неопределенность данного вида, поскольку он позволяет сократить именно те множители, которые и порождают неопределенность.

При решении следующих примеров также проводится устранение неопределенности путем сокращения множителей.

Пример 5.6.3.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^3+27}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}=$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x-3}{x^2-3x+9} = -\frac{2}{9}.$$

Пример 5.6.4.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x - 1} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin x) = -2.$$

Примеры, которые рассматриваются ниже, содержат иррациональность в числителе или знаменателе. В этом случае для раскрытия неопределенности часто достаточно просто умножить числитель и знаменатель на так называемое сопряженное выражение.

Например, чтобы избавиться в дроби от иррациональности вида $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, достаточно умножить ее числитель и знаменатель на $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$, а затем использовать формулу

$$\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a-b.$$

Если же иррациональность имеет вид $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$, то следует умножить числитель и знаменатель на $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$, а затем использовать формулу

$$\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right) = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 \pm \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = a\pm b.$$

Пример 5.6.5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2-\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{\left(2-\sqrt{x+4}\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{4-(x+4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{-x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(2+\sqrt{x+4}\right) = -4.$$

Пример 5.6.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}\right)\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4+x^2-(4-x^2)}{x^2\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5.6.7.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \frac{1}{3}.$$

Этот пример можно было решить и по-другому, взяв $t = \sqrt[3]{x}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{1}{t^2+t+1} = \frac{1}{3}.$$

Пример 5.6.8.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\sin\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{2\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{2\cos\frac{1}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Заметим еще, что произведение бесконечно малой $\alpha(x)$ на ◄ бесконечно большую функцию $A(x)$ порождает неопределенность вида $0\cdot\infty$, но она легко сводится к неопределенности вида $0/0$, если взять $\beta(x) = 1/A(x)$.

5.7. Неопределенность вида ∞/∞

Пусть каждая из функций $A(x)$ и $B(x)$ является бесконечно большой (стремится к $\pm\infty$) при $x \to a$. Здесь, как и в предыдущем разделе, вопрос о существовании предела отношения функций $A(x)$ и $B(x)$ при $x \to a$ зависит от вида этих функций. В этом случае говорят о неопределенности вида ∞/∞.

Рассмотрим примеры на раскрытие неопределенности этого вида. Когда $a = \pm\infty$, в них для устранения неопределенности часто достаточно разделить числитель и знаменатель выражения, стоящего под знаком предела, на переменную в некоторой степени, чтобы далее иметь возможность отбросить бесконечно малые слагаемые. Этот прием показан в следующих примерах.

Пример 5.7.1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-2x^3+7x+1}{9x^5-3x^4+2x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{9-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^4}-\frac{6}{x^5}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

В данном примере мы разделили каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^5.

Далее мы воспользовались свойствами пределов и учли, что $1/x^k$ — бесконечно малая функция при $x \to \infty$ для любого $k > 0$. Последнее означает, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1/x^k\right)=0.$$

Пример 5.7.2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+5}{x^4+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{5}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{2x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}}{1+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=\frac{0}{1}=0.$$

Пример 5.7.3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^3+2x}{x^2+2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{4x^3}{x^4}+\frac{2x}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}+\frac{2x}{x^4}-\frac{5}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^4}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Пример 5.7.4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x-20)^2(x+300)^3}{x^6}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{20}{x}\right)^2\left(1+\frac{300}{x}\right)^3=1.$$

Пример 5.7.5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)(3x+2)(4x-3)}{(5x+4)^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(3+\frac{2}{x}\right)\left(4-\frac{3}{x}\right)}{\left(5+\frac{4}{x}\right)^3}=\frac{24}{125}.$$

Пример 5.7.6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-5)^{50}\cdot(1-2x)^4}{(x+6)^{54}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{5}{x}\right)^{50}\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)^4}{\left(1+\frac{6}{x}\right)^{54}}=$$

$$= \frac{1^{50} \cdot (-2)^4}{1^{54}} = 16.$$

Пример 5.7.7.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+3)(4n-5)}{(2n-1)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(4-\frac{5}{n}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^3} = 1.$$

5.8. Неопределенность вида $\infty - \infty$

Такие неопределенности обычно раскрываются путем сведения их к неопределенностям вида $0/0$ или ∞/∞. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5.8.1.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x-3} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4x-3} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4x-3} + x\right)}{\sqrt{x^2+4x-3} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}+1} = 2.$$

Пример 5.8.2.

$$\lim_{x\to2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right) = \lim_{x\to2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{12}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to2} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5.8.3.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\,(1-\cos x)}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Пример 5.8.4.

$$\lim_{n\to\infty}(2^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}3^n\left(\frac{2^n}{3^n}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right]=\infty\cdot(0-1)=-\infty.$$

5.9. Первый замечательный предел

Некоторые пределы в математическом анализе бывают столь полезны, что их называют замечательными.

Один из них называется ***первым замечательным пределом***[6]. ◀

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

С его помощью нередко раскрываются неопределенности вида $0/0$ и $0\cdot\infty$, содержащие различные тригонометрические функции.

Рассмотрим примеры, в которых применяется первый замечательный предел.

[6] Его доказательство дается в примере 8.6.1.

Пример 5.9.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\quad (k\neq 0).$$

Для вычисления такого предела сделаем замену переменной $t = kx$. В результате получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{k\sin t}{t} = k.$$

Пример 5.9.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2.$$

Пример 5.9.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}{x\cos 7x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}{\cos 7x} = 14\sqrt{5}.$$

Здесь мы сначала избавились от иррациональности в знаменателе путем умножения на сопряженное выражение. Этот прием мы ранее уже применяли.

Пример 5.9.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

(сделали замену $\alpha = \arcsin x$, при этом $x = \sin\alpha$).

Пример 5.9.5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}.$$

5.10. Второй замечательный предел

Следующий предел называется ***вторым замечательным пределом***[7]. ◀

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Значением этого предела является число $e\approx 2,71828$, которое является основанием натурального логарифма.

Делая замену $x=1/n$, получаем другую форму записи второго замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

С помощью этих формул раскрываются неопределенности вида 1^∞. Рассмотрим примеры, в которых применяется второй замечательный предел.

Пример 5.10.1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^2=e^2.$$

Сделали здесь замену $x=2/n$. Тогда $x\to 0$ при $n\to\infty$.

[7] Доказывать его мы не будем.

Пример 5.10.2.

$$\lim_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{3+x}{x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1-\frac{15}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0}(1+t)\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-15} = e^{-15}.$$

Сделали здесь замену $t = -5x$.

Пример 5.10.3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x+3}\right)^{\frac{10x+15}{4}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3+4}{2x+3}\right)^{\frac{5(2x+3)}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{4}}\right]^5 = e^5.$$

Пример 5.10.4.

$$\lim_{x\to 0}\left(5\,\mathrm{tg}^2\,3x+1\right)^{\mathrm{ctg}^2\,3x} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+5\,\mathrm{tg}^2\,3x\right)^{\frac{1}{5\,\mathrm{tg}^2\,3x}}\right]^5 = e^5.$$

Пример 5.10.5.

$$\lim_{n\to\infty} n[\ln(n+5)-\ln n] = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+5}{n}\right)^n =$$

$$= \ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \ln\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^5 = \ln e^5 = 5.$$

5.11. Основные теоремы о пределах

Сформулируем и докажем сначала основные теоремы о бесконечно малых функциях. Мы сделаем это для случая, когда их аргументы $x \to a$, где a — некоторое число, но эти теоремы справедливы и в случае, когда $a = \pm\infty$. Первую теорему мы докажем очень подробно, «разжевывая» буквально все.

Теорема 5.11.1 (о сумме бесконечно малых функций).

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, то их сумма $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ также является бесконечно малой при $x \to a$.

Доказательство.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$.

По условию теоремы функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$. Применяя определение 5.3.1, заключаем, что $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Согласно определению 5.1.2 отсюда следует, что найдется такое число $\delta_1 > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta_1, \tag{1}$$

выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

По условию теоремы функция $\beta(x)$ также является бесконечно малой при $x \to a$. По определению 5.3.1 получаем тогда $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$.

Согласно определению 5.1.2 отсюда следует, что найдется такое число $\delta_2 > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta_2, \tag{3}$$

выполняется неравенство

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Возьмем число $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (так обозначается наименьшее из двух чисел) и потребуем, чтобы переменная x удовлетворяла неравенству

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Тогда неравенства (1) и (3) выполняются одновременно, а это дает нам право использовать неравенства (2) и (4).

Рассмотрим

$$|\gamma(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{5}$$

Используя определение 5.1.2, мы теперь приходим к выводу, что $\lim\limits_{x \to a} \gamma(x) = 0$. Тогда по определению 5.3.1 получается, что $\gamma(x)$ также является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

Теорема доказана.

Замечания.

1) Небольшое изменение доказательства позволяет получить аналогичный результат и для разности бесконечно малых функций.

2) В доказательстве мы применили неравенство треугольника, согласно которому модуль суммы двух величин не превосходит сумму их модулей.

3) В неравенствах (2) и (4) мы, используя произвол в выборе числа ε, разделили его пополам. Это сделано лишь для того, чтобы в самом конце доказательства в неравенстве (5) получить справа именно ε, что дает нам далее возможность применить определение 5.1.2.

Теорема 5.11.2 (о произведении бесконечно малой и ограниченной функций).

Если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, а функция $f(x)$ ограничена, по крайней мере, при x, близких к a, то произведение этих функций $\beta(x) = \alpha(x)f(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

Доказательство.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$.

Согласно определению 4.6.3 (см. также замечания к нему) из ограниченности функции $f(x)$ следует, что существует такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \tag{1}$$

при x, близких к a.

По условию теоремы функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$. Применяя определение 5.3.1, заключаем, что

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Отсюда, согласно определению 5.1.2, следует, что найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{2}$$

выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{3}$$

Считая, что неравенство (2) определяет необходимую для ограниченности функции $f(x)$ меру близости x к a, мы можем заключить, что неравенства (1) и (3) выполняются одновременно. Отсюда следует, что

$$|\beta(x)| = |\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)||f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon. \tag{4}$$

Значит, $\beta(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

Теорема доказана.

Теорема 5.11.3 (о произведении бесконечно малых функций).

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, то их произведение $\gamma(x) = \alpha(x)\beta(x)$ также является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

Доказательство.

Мы уже отмечали (см. свойства бесконечно малых), что бесконечно малая при $x \to a$ функция ограничена, по крайней мере, при x, близких к a. Поэтому утверждение данной теоремы следует из теоремы 5.11.2.

Теорема доказана.

Сформулируем и докажем теперь две леммы[8], которые понадобятся нам для доказательства основных теорем о пределах.

Лемма 5.11.1.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Доказательство.

Очевидно, что любую функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = A+\alpha(x)$. Для этого достаточно взять $\alpha(x) = f(x) - A$. В доказательстве нуждается лишь тот факт, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. По условию $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Отсюда следует по определению 5.1.2, что найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Последнее означает, что функция $\alpha(x) = f(x) - A$ удовлетворяет неравенству $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Применяя определение 5.1.2 еще раз, делаем вывод, что $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. По определению 5.3.1 отсюда следует, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Лемма доказана.

---

[8] Леммой называется математическое утверждение, которое носит вспомогательный характер. Чаще всего леммы служат для доказательства теорем.

Лемма 5.11.2.

Если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Доказательство.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$.

По условию леммы функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$. Применяя определение 5.3.1, заключаем, что $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Согласно определению 5.1.2 отсюда следует, что найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Применяя определение 5.1.2 еще раз, заключаем, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Лемма доказана.

Теперь займемся основными теоремами о пределах. Мы будем доказывать их для случая, когда аргументы функций $x \to a$, где a — некоторое число, но они справедливы и в случае, когда $a = \pm\infty$.

Теорема 5.11.4 (о пределе постоянной).

Если функция $f(x) = c$ (где $c = const$) при $\forall x$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ при $\forall a$.

Доказательство.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$.

По условию теоремы $f(x) = c$ при $\forall x$. Значит,

$$|f(x) - c| = 0 < \varepsilon$$

при $\forall x$. Применяя определение 5.1.2, заключаем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

Теорема доказана.

Теорема 5.11.5 (о пределе суммы).

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = A_2,$$

то

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) = A_1 + A_2,$$

т. е. предел суммы функций равен сумме пределов этих функций.

Доказательство.

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, используя лемму 5.11.1, представим в виде

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Тогда сумму функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ можно записать в виде

$$f_1(x) + f_2(x) = A_1 + \alpha_1(x) + A_2 + \alpha_2(x) = A_1 + A_2 + \alpha(x),$$

где функция $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ по теореме о сумме бесконечно малых 5.11.1.

Из леммы 5.11.2 тогда следует, что

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x)] = A_1 + A_2 = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Теорема доказана.

Теорема 5.11.6 (о пределе произведения).

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = A_2,$$

то

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \lim_{x\to a} f_2(x) = A_1A_2,$$

т. е. предел произведения функций равен произведению пределов этих функций.

Доказательство.

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, используя лемму 5.11.1, представим в виде

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Тогда произведение функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ можно записать в виде

$$f_1(x)f_2(x) = [A_1 + \alpha_1(x)][A_2 + \alpha_2(x)] =$$

$$= A_1A_2 + A_1\alpha_2(x) + A_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x) = A_1A_2 + \alpha(x),$$

где функция $\alpha(x) = A_1\alpha_2(x) + A_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ по теоремам 5.11.1–5.11.3.

Из леммы 5.11.2 тогда следует, что

$$\lim_{x \to a}[f_1(x)f_2(x)] = A_1A_2 = \lim_{x \to a} f_1(x) \lim_{x \to a} f_2(x).$$

Теорема доказана.

Теорема 5.11.7 (о пределе отношения).

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} f_2(x) = A_2,$$

причем $A_2 \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2},$$

т. е. предел отношения функций равен отношению пределов этих функций при условии, что предел знаменателя отличен от нуля.

Доказательство.

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, используя лемму 5.11.1, представим в виде

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Рассмотрим разность

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1 + \alpha_1(x)}{A_2 + \alpha_2(x)} - \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2\alpha_1(x) - A_1\alpha_2(x)}{A_2[A_2 + \alpha_2(x)]}.$$

При значениях x, близких к a, знаменатель этой дроби является ограниченной функцией, которая не обращается в ноль (докажите этот факт самостоятельно). Ее числитель является бесконечно малой функцией при $x \to a$ по теореме 5.11.2.

Значит, рассматриваемая разность является бесконечно малой функцией при $x \to a$. Следовательно,

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{A_1}{A_2}\right] = 0,$$

а поэтому

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.11.8 (о единственности предела).

Если существуют конечные пределы функции

$$\lim_{x\to a} f(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} f(x) = A_2,$$

то $A_1 = A_2$, т. е. функция не может стремиться к нескольким различным пределам.

Доказательство.

Используя лемму 5.11.1, представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Рассмотрим разность

$$A_1 - A_2 = f(x) - \alpha_1(x) - f(x) + \alpha_2(x) = \alpha(x),$$

где $\alpha(x) = \alpha_2(x) - \alpha_1(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Из леммы 5.11.2 тогда следует, что $\lim\limits_{x\to a}(A_1 - A_2) = 0$.

Но разность $A_1 - A_2$ является постоянной, следовательно, $A_1 - A_2 = 0$.

Теорема доказана.

Теорема 5.11.9 (об ограниченности функции, имеющей конечный предел).

Если существует конечный предел функции

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

то функция $f(x)$ ограничена, по крайней мере, при x, близких к a.

Доказательство.

По условию теоремы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Применяя определение предела 5.1.2, заключаем, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — любое положительное число.

Используя свойства модуля, получаем тогда, что для рассматриваемой функции выполняется двойное неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, которое и доказывает ее ограниченность для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$.

Теорема доказана.

Замечание.

В самой точке a функция $f(x)$ может быть и не определена. Тогда она ограничена при $x \neq a$ и близких к a.

5.12. Упражнения

Найдите следующие пределы.

5.12.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{\sin 4x}$.

5.12.2. $\lim\limits_{x\to 0,5} \dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$.

5.12.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 7x}$.

5.12.4. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x - 1)\operatorname{ctg}^2 x$.

5.12.5. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x-1}{1-2x} + 2^{-x}\right)$.

5.12.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 2x}$.

5.12.7. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right)^{2n}$.

5.12.8. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2-3x} - \sqrt{x^2+3x}\right)$.

5.12.9. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^3+64}{x+4}$.

5.12.10. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{7}{x}\right)^{x}$.

5.12.11. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^2-5x}{1+2x-3x^2}$.

5.12.12. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

5.12.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{2x}$.

5.12.14. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^{n+4}$.

5.12.15. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$.

5.12.16. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

Ответы.

5.12.1. 0. **5.12.2.** $0{,}8$. **5.12.3.** $\frac{2}{7}$. **5.12.4.** $-\frac{1}{2}$.

5.12.5. 2. **5.12.6.** 4. **5.12.7.** $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$. **5.12.8.** -3.

5.12.9. 48. **5.12.10.** e^7. **5.12.11.** -2. **5.12.12.** 4.

5.12.13. 2. **5.12.14.** e^5. **5.12.15.** -12. **5.12.16.** $\frac{1}{2}$.

6. Непрерывность

На уровне интуиции понятие непрерывности обычно связано у нас с представлением о непрерывности кривых и о непрерывности процессов, происходящих в природе. Так, скажем, непрерывное движение материального тела описывается функцией, показывающей непрерывную зависимость пути от времени. Математическое понятие непрерывности функции отражает свойство непрерывности природных, производственных, социальных и других процессов. Это понятие является одним из основных понятий математического анализа. Мы формализуем его и рассмотрим строгие математические определения непрерывности функции, выясним, что такое точки разрыва и проведем их классификацию, а также сформулируем основные свойства непрерывных функций.

6.1. Приращения аргумента и функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Возьмем такое число $\Delta x \neq 0$, чтобы значение аргумента $x = x_0 + \Delta x$ не выходило из этой окрестности.

Определение 6.1.1. ◄

Величина $\Delta x = x - x_0$ называется ***приращением аргумента*** в точке x_0, а величина $\Delta f = f(x) - f(x_0) =$

$= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — ***приращением функции*** в этой точке, соответствующим приращению аргумента Δx.

Замечание.

Приращение аргумента Δx — это просто некоторая переменная величина, имеющая числовые значения. Значению аргумента x_0 соответствует значение функции $f(x_0)$, а значению аргумента $x_0+\Delta x$ соответствует значение функции $f(x_0+\Delta x)$. Разность этих двух значений функции $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ и называется приращением функции, соответствующим приращению аргумента Δx в точке x_0.

Геометрический смысл этого определения показан на рис 6.1.1.

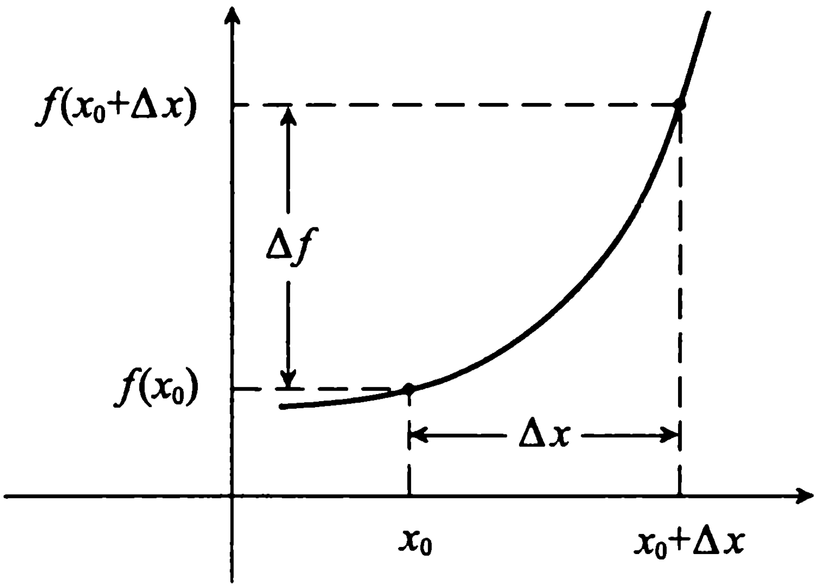


Рис. 6.1.1. Приращение аргумента и приращение функции.

6.2. Два определения непрерывности

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Определение 6.2.1. ◀

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

Пример 6.2.1.

Покажем, что функция $f(x) = x$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in R$. Применяя определение 6.2.1, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Утверждение доказано.

Пример 6.2.2.

Покажем, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in R$. Легко видеть, что

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$

$$= (x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2,$$

а значит,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = 2x_0\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2 = 0.$$

Это дает нам возможность применить определение 6.2.1.

Утверждение доказано.

► Определение 6.2.2.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если ее предел при $x \to x_0$ существует и равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Покажем эквивалентность этих двух определений непрерывности функции в точке.

1) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 в смысле определения 6.2.1, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0.$$

Поскольку $\Delta x = x - x_0$, а $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, получаем, что

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) - \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) = f(x_0).$$

Последнее означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 в смысле определения 6.2.2, т. к. условие $\Delta x \to 0$ равносильно условию $x - x_0 \to 0$, а значит, и условию $x \to x_0$.

2) Пусть теперь функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 в смысле определения 6.2.2, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Но тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0,$$

а значит, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 в смысле определения 6.2.1.

6.3. Точки разрыва

Определение 6.3.1. ◄

Когда функция не является непрерывной в некоторой точке x_0, говорят, что в этой точке она ***претерпевает разрыв***. Сама точка x_0 называется при этом ***точкой разрыва***.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Мы будем предполагать, что $f(x) \to A$ при $x \to x_0$ слева $(x < x_0)$ и $f(x) \to B$ при $x \to x_0$ справа $(x > x_0)$. Тогда мы можем столкнуться со следующими случаями.

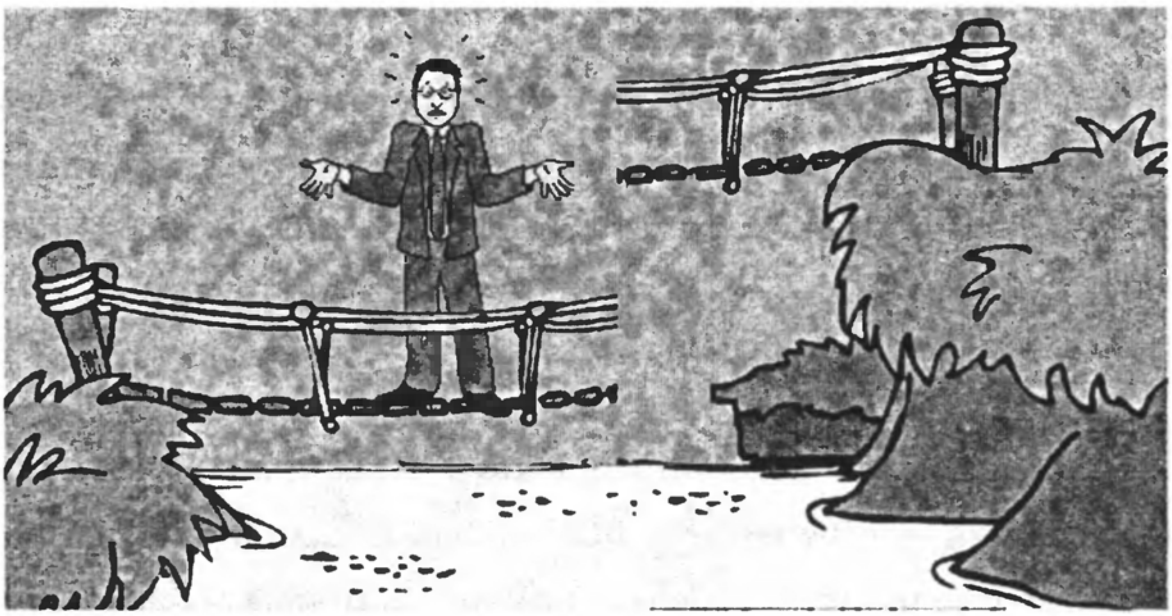
1) Величины A и B конечны, причем $A \neq B$. Тогда говорят, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ претерпевает ***скачок***.

2) Величины A и B конечны, причем $A = B$, но в самой точке x_0 функция либо не определена, либо ее значение не совпадает с A и B. Тогда говорят, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет ***устранимый разрыв***. Это название объясняется тем, что в рассматриваемом случае мы можем устранить разрыв, рассматривая новую функцию $y = f_0(x)$, которая задается следующим образом

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq x_0, \\ A, & \text{если } x = x_0. \end{cases}$$

Тогда функция $y = f_0(x)$ будет непрерывной в точке x_0.

3) $|A| = \infty$ или $|B| = \infty$. Тогда говорят, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ претерпевает ***бесконечный разрыв***.



Неустранимый разрыв первого рода иногда чреват неприятностями.

Замечание.

Скачки и устранимые разрывы называются обычно ***разрывами первого рода***, а бесконечные разрывы — ***разрывами второго рода***.

Пример 6.3.1.

Функция, которая задается правилом

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 1, \\ x+1, & \text{если } x < 1, \end{cases}$$

в точке $x_0 = 1$ претерпевает скачок. Ее график показан на рис. 6.3.1.

Пример 6.3.2.

Функция $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ в точке $x_0 = 2$ не определена, но $f(x) \to 4$, независимо от того, как x стремится к $x_0 = 2$ (слева или справа). Значит, в точке $x_0 = 2$ данная функция имеет устранимый разрыв.

Пример 6.3.3.

Функция $f(x) = 1/(3-x)$ в точке $x_0 = 3$ имеет разрыв второго рода, поскольку $f(x) \to \infty$, когда $x \to 3$ слева, и $f(x) \to -\infty$, когда $x \to 3$ справа. График этой функции показан на рис. 6.3.2. Хорошо видно, что слева от точки разрыва $x_0 = 3$ значения функции уходят на $+\infty$, а справа — на $-\infty$.

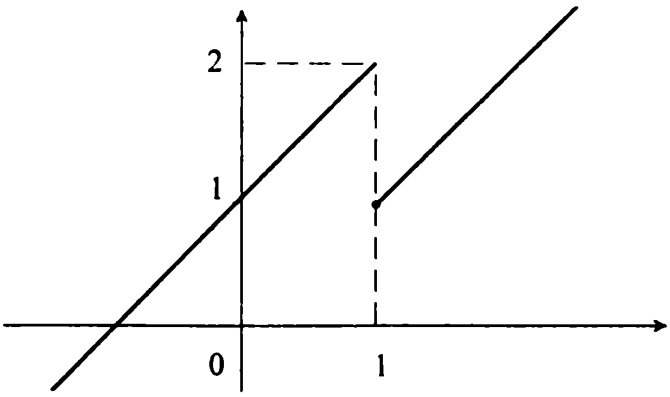


Рис. 6.3.1. Разрыв первого рода (скачок) при $x = 1$.

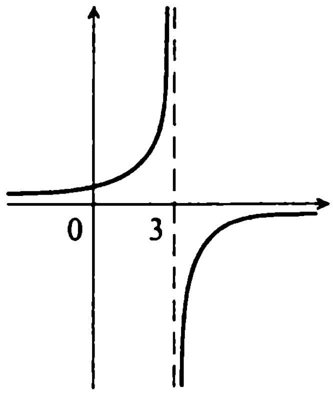


Рис. 6.3.2. Разрыв второго рода при $x = 3$.

6.4. Свойства непрерывных функций

Теорема 6.4.1 (об арифметических операциях с непрерывными функциями).

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке непрерывны также сумма $f_1(x)+$ $+f_2(x)$, разность $f_1(x)-f_2(x)$, произведение $f_1(x)f_2(x)$ и отношение $f_1(x)/f_2(x)$ (если $f_2(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0) этих функций.

Доказательство.

Доказательство данной теоремы следует непосредственно из соответствующих свойств пределов (см. раздел 5.5).

Так, например, обозначив через $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ произведение двух непрерывных функций, получаем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) f_2(x) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f_1(x) \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) f_2(x_0) = f(x_0).$$

По определению 6.2.2 последнее означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

Теорема доказана.

К категории основных ***элементарных функций*** обычно относят следующие функции, которые изучаются в школе.

- Степенная функция $y = x^a$.
- Показательная функция $y = a^x$.
- Логарифмическая функция $y = \log_a x$.
- Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
- Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Не составляет труда доказать, что все эти функции непрерывны всюду, где они определены.

Ограничимся доказательством непрерывности тригонометрической функции $y = \sin x$, предоставив читателям возможность провести аналогичные доказательства для остальных элементарных функций.

Обозначим через $f(x) = \sin x$. Приращение этой функции $\triangle f$ в точке x_0 находится по формуле

$$\triangle f = \sin(x_0 + \triangle x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right)\sin\frac{\triangle x}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle f = \lim_{\triangle x \to 0} 2\cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right)\sin\frac{\triangle x}{2} = 2\cos x_0 \cdot 0 = 0.$$

По определению 6.2.1 отсюда следует непрерывность функции $f(x) = \sin x$ в произвольной точке $x_0 \in R$.

7. Производные

Мы приступаем к изучению основ дифференциального исчисления. Эту тему без преувеличения можно назвать самой важной темой всего курса высшей математики. В рамках этой темы мы рассмотрим такие основополагающие понятия, как производная и дифференциал функции, а также изучим технику дифференцирования. Сводка формул, связанных с производными, находится на стр. 456

Идеи дифференциального исчисления зародились в XVII веке в работах двух великих ученых — Ньютона и Лейбница. Эти идеи получили очень мощное развитие в исследованиях их многочисленных последователей, прежде всего математиков и физиков, и привели к значительным открытиям в самых различных разделах естествознания.

7.1. Определение производной

Определение 7.1.1.

Производной функции $y = f(x)$ в некоторой фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (7.1.1)$$

Замечания.

1) Напомним, что приращение аргумента Δx — это просто некоторая переменная величина, имеющая числовые значения. Значению аргумента x соответствует значение функции $f(x)$, а значению аргумента $x + \Delta x$ соответствует значение функции $f(x + \Delta x)$. Разность $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ между этими двумя значениями функции и называется ее приращением, соответствующим приращению аргумента Δx.

2) Предел, который используется в данном определении, может и не существовать (см. замечания на стр. 80). В этом случае говорят, что в данной точке x производная функции $y = f(x)$ не существует (см. пример 7.1.3).

3) Для простоты мы опустили в этом определении требование, чтобы функция $f(x)$ была определена на некотором интервале (a, b), содержащем точку x. Оно необходимо, чтобы мы имели право рассматривать значение функции в точке $x + \Delta x$.

4) Когда значение аргумента x меняется, значение производной $f'(x)$ также меняется. Поэтому саму производную функции $y = f(x)$ также можно рассматривать как некоторую функцию. При этом, однако, область определения $f'(x)$ может оказаться уже области определения

$f(x)$, поскольку для каких-то значений аргумента производная может и не существовать.

5) Для производной нередко используются и другие обозначения:

$$f'(x) = f'_x(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \dot{f}(x).$$

Такая форма записи предполагает, что мы рассматриваем производную как функцию аргумента x. Если же нам потребуется указать, что производная ищется для какого-то конкретного значения x_0 аргумента x, то мы будем использовать следующие обозначения:

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = f'(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = \dot{f}(x_0).$$

Определение 7.1.2. ◄

Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в некоторой фиксированной точке x, если в этой точке она имеет конечную производную. Операция нахождения производной при этом называется ***дифференцированием функции***.

Рассмотрим три примера, которые демонстрируют технику вычисления производной с помощью определения 7.1.1.

Пример 7.1.1.

Пусть $f(x) = x$. Тогда $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$, а следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Пример 7.1.2.

Пусть $f(x) = x^2$. Тогда

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

а следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Пример 7.1.3.

Пусть $f(x) = |x|$. Покажем, что при $x = 0$ производная этой функции не существует. Рассмотрим приращение данной функции в точке $x = 0$. Легко видеть, что

$$\Delta f\Big|_{x=0} = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}\bigg|_{x=0} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1, & \text{когда} \quad \Delta x > 0, \\ -1, & \text{когда} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

Последнее означает, что предел этой дроби при $\Delta x \to 0$ не существует, а следовательно, не существует и $f'(0)$.

7.2. Геометрический смысл производной

В школьном курсе планиметрии вводятся понятия секущей и касательной к окружности. Они допускают обобщение, позволяющее говорить о секущей и касательной к графику той или иной функции.

Касательную a к некоторой кривой, проведенную в точке M, обычно можно рассматривать как предельное положение секущей ML, когда точка L, двигаясь вдоль кривой, стремится к точке M (см. рис. 7.2.1).

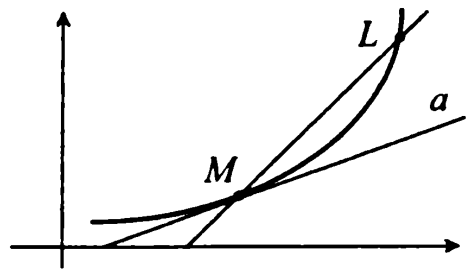


Рис. 7.2.1. Секущая ML и касательная a к кривой, проведенная в точке M.

На рис. 7.2.2. показана касательная a к кривой $y = f(x)$, проведенная в точке M, и секущая, проходящая через точки M и L. Из треугольника LMN следует, что тангенс угла наклона этой секущей к оси абсцисс находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{LN}{NM} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Когда $\Delta x \to 0$, точка L, двигаясь вдоль кривой, стремится к точке M. При этом секущая ML, меняя свой наклон к оси абсцисс, приближается к касательной a, проведенной в точке M. Это означает, что тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс находится по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Применяя определение производной 7.1.1, приходим к выводу, ◀ что ***тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции*** $y = f(x)$, проведенной в точке с координатами $(x, f(x))$, ***совпадает со значением производной данной функции в этой точке***, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x). \qquad (7.2.1)$$

Эта формула и определяет геометрический смысл производной. Она позволяет сделать весьма важный вывод: чем быстрее растут или убывают значения функции при изменении значений ее аргумента, тем больше будет абсолютная величина тангенса угла наклона касательной. Значит, ***производная характеризует скорость изменения функции при изменении ее аргумента.***

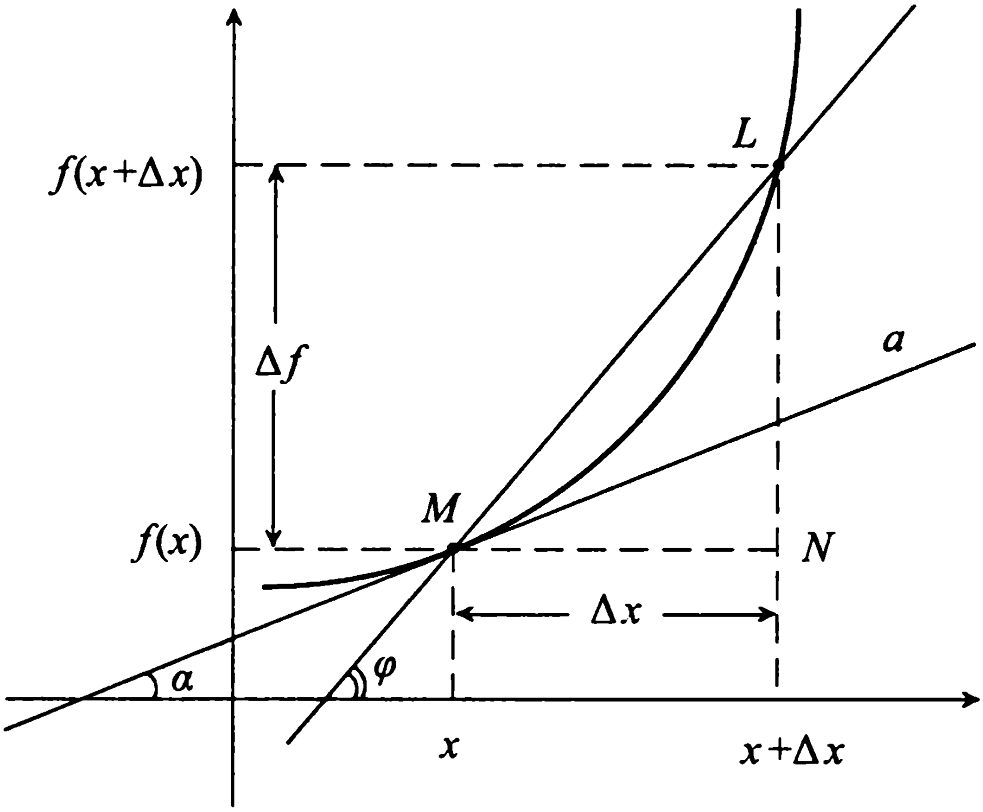


Рис. 7.2.2. Геометрический смысл производной.

Замечание.

Угол наклона касательной отсчитывается от положительной части оси абсцисс против часовой стрелки.

7.3. Механический смысл производной

В механике (это — один из разделов физики) широко используется понятие мгновенной скорости движущегося объекта.

Это понятие вводится следующим образом. Рассмотрим материальную точку, которая двигается с переменной скоростью $V(t)$ вдоль некоторой прямой и проходит за время t путь $S(t)$.

Дадим текущему значению времени t приращение Δt. Тогда путь $S(t)$ также получит приращение, которое определяется по формуле

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t).$$

Значение дроби

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

представляет собой среднюю скорость движения точки от момента времени t до момента $t+\Delta t$. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ и называется мгновенной скоростью точки в момент времени t.

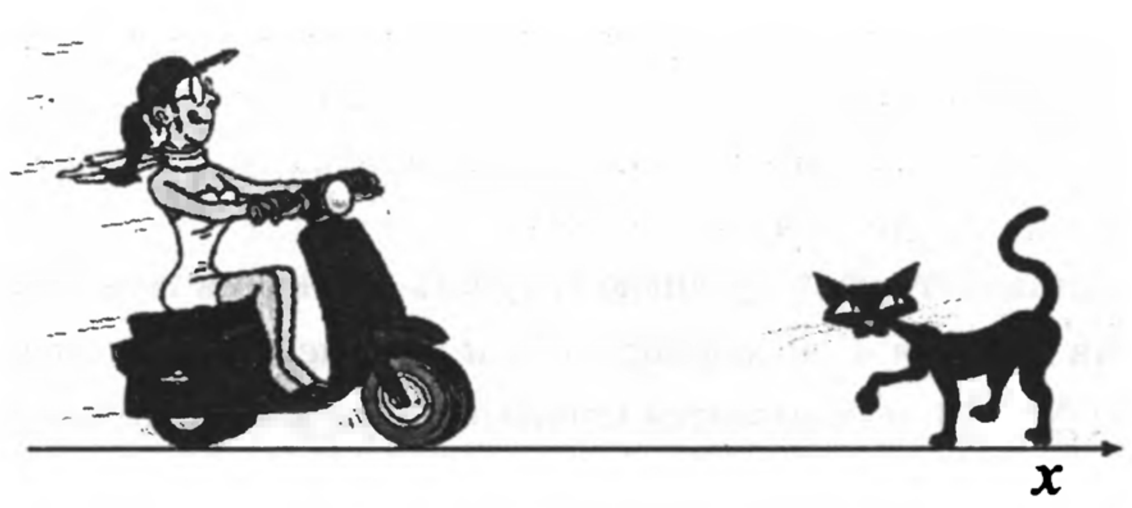
Применяя далее определение производной 7.1.1, приходим к выводу, что ***мгновенная скорость точки в момент времени t равна производной пути по времени***, т. е. ◄

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что ***ускорение является производной скорости по времени.*** ◄

Замечание.

Подобные соображения можно использовать и в других науках. Так, например, считая, что в биологии численность некоторой популяции с течением времени меняется по закону $N(t)$, причем значения этой функции являются вещественными числами, мы можем заключить, что мгновенная скорость изменения численности данной популяции с течением времени меняется по закону $V(t) = N'(t)$. В этой модели мы не можем считать целочисленными значения функции $N(t)$, поскольку это лишило бы нас возможности искать производную данной функции. Именно поэтому мы предполагаем, что значения функции $N(t)$ являются вещественными числами.



Слишком большие значения производной пути по времени на дорогах опасны.

7.4. Основные теоремы о производных

Покажем сначала, что из дифференцируемости функции в некоторой точке следует ее непрерывность в этой точке.

Теорема 7.4.1 (о связи между непрерывностью и дифференцируемостью функции).

Если функция $y = f(x)$ в точке x имеет конечную производную, то в этой точке данная функция непрерывна.

Доказательство.

Рассмотрим тождество:

$$\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta x$$

и перейдем в нем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Мы видим, что приращение функции Δf в точке x является бесконечно малой величиной при $\Delta x \to 0$, а это, согласно определению 6.2.1, доказывает непрерывность функции $f(x)$ в точке x.

Теорема доказана.

Замечание. ◄

Из этой теоремы следует, что непрерывность функции является необходимым условием существования конечной производной этой функции. А вот достаточным это условие не является: непрерывность функции в некоторой точке не гарантирует ее дифференцируемости в этой точке. Примером здесь может служить функция $f(x) = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$, но ее производная в этой точке не существует (см. пример 7.1.3).

Сформулируем и докажем теперь серию теорем, которые широко используются при решении примеров на отыскание производных.

Теорема 7.4.2 (о производной постоянной).

Если $f(x) \equiv c$, где $c = const$, то $f'(x) \equiv 0$, т. е. производная постоянной равна нулю.

Доказательство.

В самом деле, пусть $f(x) = c$ для всех x из области определения данной функции. Тогда и $f(x + \Delta x) = c$, а значит,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

при любых $\Delta x \neq 0$, а поэтому

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 7.4.3 (о производной суммы функций).

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой точке дифференцируема и их сумма, причем ее производная находится по формуле

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x).$$

Доказательство.

Обозначим $f(x) = u(x) + v(x)$. Тогда

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) =$$

$$= [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] =$$

$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$$

Теперь уже нетрудно убедиться, что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Теорема доказана.

Замечания.

1) Этот результат без труда распространяется на любое конечное число слагаемых.

2) Нетрудно доказать и аналогичную теорему для разности двух функций.

Теорема 7.4.4 (о производной произведения функций).

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой точке дифференцируемо и их произведение, причем его производная находится по формуле

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Доказательство.

Обозначим $f(x) = u(x)v(x)$. Тогда

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$$

$$= [u(x) + \Delta u]\,[v(x) + \Delta v] - u(x)v(x) =$$

$$= v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Теперь уже легко убедиться, что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v =$$

$$= v(x)u'(x) + u(x)v'(x) + u'(x) \cdot 0 = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Теорема доказана.

► **Следствие.**

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cf(x))' = c'f(x) + cf'(x) = cf'(x), \text{ если } c = const.$$

Теорема 7.4.5 (о производной отношения функций).

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x и $v(x) \neq 0$, то в этой точке дифференцируемо и их отношение, причем его производная находится по формуле

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство.

Обозначим $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Тогда

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$$= \frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x)\,[v(x) + \Delta v]}.$$

Теперь уже нетрудно убедиться, что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{v(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x)} =$$

$$= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 7.4.6 (о производной сложной функции).

Пусть заданы функции $y = f(z)$ и $z = g(x)$, причем функция $y = f(z)$ дифференцируема в точке z, а функция $z = g(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда сложная функция $y = f(g(x)) = F(x)$ дифференцируема в точке x, причем ее производная находится по формуле

$$F'(x) = f'(z)g'(x).$$

Эту формулу можно записать и в следующем виде:

$$y'_x = y'_z\, z'_x.$$

Здесь нижний индекс указывает, по какой переменной производится дифференцирование.

Доказательство.

По определению производной

$$f'(z) = y'_z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z}, \qquad g'(x) = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Но тогда

$$f'(z)g'(x) = y'_z z'_x = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\triangle z \to 0} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle z} \frac{\triangle z}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = y'_x = F'(x).$$

Теорема доказана.

Замечание.

В формулировке и доказательстве этой теоремы мы опустили ряд довольно тонких моментов, связанных с областями определения и множествами значений функций, о которых идет речь.

Теорема 7.4.7 (о производной обратной функции).

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ являются взаимно обратными: $(g = f^{-1})$. Предположим, что $y = f(x)$ дифференцируема в точке x и $f'(x) \neq 0$, а $x = g(y)$ дифференцируема в точке y и $g'(y) \neq 0$. Тогда производные этих функций связаны соотношением

$$f'(x)\, g'(y) = 1.$$

Эту формулу можно записать и в следующем виде:

$$y'_x\, x'_y = 1.$$

Здесь нижний индекс указывает, по какой переменной производится дифференцирование.

Доказательство.

По определению производной

$$f'(x) = y'_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}, \qquad g'(y) = x'_y = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle y}.$$

Но тогда

$$f'(x)\, g'(y) = y'_x\, x'_y = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle y} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \frac{\triangle x}{\triangle y} = \lim_{\triangle x \to 0} \lim_{\triangle y \to 0} 1 = 1.$$

Теорема доказана.

Замечание.

Как и в предыдущей теореме, несколько тонких моментов мы здесь опустили.

7.5. Производные элементарных функций

В примерах 7.1.1–7.1.3, рассмотренных выше, мы для отыскания производной использовали ее определение. Такой путь решения примеров крайне неэффективен. Гораздо проще сначала вывести формулы для производных элементарных функций, а затем решать примеры, используя эти формулы и основные теоремы о производных, доказанные нами в разделе 7.4.

Теорема 7.5.1.

Производная функции $y = e^x$ находится по формуле $y' = e^x$.

Доказательство.

Применяя определение производной, получаем

$$y'(x) = (e^x)' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{e^{x+\triangle x} - e^x}{\triangle x} =$$

$$= e^x \lim_{\triangle x \to 0} \frac{e^{\triangle x} - 1}{\triangle x}.$$

Нам осталось доказать, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

Сделаем это, воспользовавшись вторым замечательным пределом

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Возьмем $\alpha = \Delta x$. Тогда предыдущую формулу можно записать в виде

$$e = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Теперь уже нетрудно получить

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x} = 1.$$

Теорема доказана.

Замечание.

Теорема 7.5.1 указывает причину, по которой функция $y = e^x$ играет важную роль в математическом анализе: единственной функцией, производная которой совпадает с ней самой $(y' = y)$, является функция $y = ce^x$, где c — произвольная постоянная.

Пример 7.5.1.

Пусть $f(x) = e^{5x}$. Тогда по теореме о производной сложной функции 7.4.6 получаем

$$f'(x) = e^{5x}(5x)' = 5e^{5x}.$$

Теорема 7.5.2.

Производная функции $y = a^x\,(a > 0,\, a \neq 1)$ находится по формуле $y' = a^x \ln a$.

Доказательство.

Согласно основному логарифмическому тождеству $a = e^{\ln a}$. Тогда

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

представляет собой сложную функцию. Ее производную находим, применяя теоремы 7.4.6 и 7.5.1.

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a}\,(x \ln a)' = a^x \ln a.$$

Мы использовали здесь тот факт, что $x' = 1$ (см. пример 7.1.1).

Теорема доказана.

Пример 7.5.2.

Пусть $f(x) = 2^{5x}$. Тогда

$$f'(x) = \left(2^{5x} \ln 2\right)(5x)' = 5 \cdot 2^{5x} \ln 2.$$

Теорема 7.5.3.

Производная функции $y = \log_a x$ находится по формуле $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Доказательство.

Функции $y = \log_a x$ и $x = a^y$ являются взаимно обратными. Это дает нам возможность применить теорему 7.4.7. В результате получаем

$$y'_x = (\log_a x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Теорема доказана.

Следствие.

Производная функции $y = \ln x$ находится по формуле $y' = \dfrac{1}{x}$, поскольку натуральный логарифм $\ln x = \log_e x$, а $\ln e = 1$.

Пример 7.5.3.

Пусть $f(x) = \log_2 5x$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{5x \ln 2}(5x)' = \frac{5}{5x \ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}.$$

На первый взгляд этот результат может показаться удивительным: куда же делась пятерка? Ситуация проясняется, если решить этот пример по-другому.

$$f'(x) = (\log_2 5x)' = (\log_2 5 + \log_2 x)' = 0 + \frac{1}{x \ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}.$$

Здесь учтено, что $(\log_2 5)' = 0$, т. к. $\log_2 5 = const$.

Теорема 7.5.4.

Производная функции $y = x^a$ находится по формуле $y' = ax^{a-1}$.

Доказательство.

Пусть $x > 0$. Применяя рассуждения, подобные тем, которые использовались в теореме 7.5.2, получаем

$$(x^a)' = \left(e^{\ln x^a}\right)' = \left(e^{a\ln x}\right)' =$$

$$= e^{a\ln x}(a\ln x)' = x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

При $x \leqslant 0$ это доказательство не проходит, поскольку в этом случае при некоторых значениях a выражение $\ln x^a$ может содержать под знаком логарифма отрицательное или нулевое значение. Примером здесь может служить простейший случай, когда $a = 1$. Мы не будем проводить доказательство формулы $(x^a)' = ax^{a-1}$ для случая, когда $x \leqslant 0$, ограничившись замечанием, что данная формула верна для всех значений x и a, при которых обе ее части определены.

Теорема доказана.

Пример 7.5.4.

Пусть $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Тогда

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Теорема 7.5.5.

Производная функции $y = \sin x$ находится по формуле $y' = \cos x$.

Доказательство.

Замечая, что

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2},$$

получаем, используя первый замечательный предел,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Теорема доказана.

Пример 7.5.5.

Пусть $f(x) = \sin x^2$. Тогда

$$f'(x) = \cos x^2\cdot(x^2)' = 2x\cos x^2.$$

Теорема 7.5.6.

Производная функции $y = \cos x$ находится по формуле $y' = -\sin x$.

Доказательство.

Используя формулы приведения и предыдущую теорему, получаем

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]' =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\sin x.$$

Теорема доказана.

Пример 7.5.6.

Пусть $f(x) = \cos 2^x$. Тогда

$$f'(x) = -\sin 2^x\cdot(2^x)' = -\sin 2^x\cdot(2^x\ln 2).$$

Теорема 7.5.7.

Производная функции $y = \operatorname{tg} x$ находится по формуле $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Доказательство.

Используя формулу дифференцирования дроби, получаем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема доказана.

Пример 7.5.7.

Пусть $f(x) = \operatorname{tg}\sin x$. Тогда

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\cos^2 \sin x} = \frac{\cos x}{\cos^2 \sin x}.$$

Теорема 7.5.8.

Производная функции $y = \operatorname{ctg}\ x$ находится по формуле $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Доказательство.

Как и в предыдущей теореме, получаем

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Теорема доказана.

Пример 7.5.8.

Пусть $f(x) = \operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$. Тогда

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2\dfrac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2\sin^2\dfrac{1}{x}}.$$

Теорема 7.5.9.

Производная функции $y = \arcsin x$ находится по формуле

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство.

Функции $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$ являются взаимно обратными. Применяя теорему 7.4.7, получаем

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед корнем мы выбрали знак плюс, поскольку значения функции $y = \arcsin x$ лежат в первой и четвертой четвертях, а там функция $\cos y$ положительна.

Теорема доказана.

Пример 7.5.9.

Пусть $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Теорема 7.5.10.

Производная функции $y = \arccos x$ находится по формуле

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство.

Функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ связаны соотношением $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, поэтому

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример 7.5.10.

Пусть $f(x) = \arccos x^3$. Тогда

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\left(x^3\right)' = -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Теорема 7.5.11.

Производная функции $y = \operatorname{arctg} x$ находится по формуле

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство.

Функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$ являются взаимно обратными. Следовательно, применяя теорему 7.4.7, получаем

$$y'_x = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Теорема доказана.

Пример 7.5.11.

Пусть $f(x) = \operatorname{arctg}\cos x$. Тогда

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}.$$

Теорема 7.5.12.

Производная функции $y = \operatorname{arcctg} x$ находится по формуле

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны соотношением $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$, поэтому

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Теорема доказана.

7.6. Производные высших порядков

Определение 7.6.1.

Производной второго порядка дифференцируемой функции $y = f(x)$ в некоторой фиксированной точке x называется производная ее производной.

$$f''(x) = [f'(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}. \qquad (7.6.1)$$

Замечания.

1) Предел, который используется в данном определении, может и не существовать (см. замечания на стр. 80). В этом случае говорят, что в данной точке x вторая производная функции $y = f(x)$ не существует.

2) Для простоты мы опустили в этом определении требование, чтобы функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ были определены на некотором интервале (a, b), содержащем точку x.

3) Для второй производной нередко используются и другие обозначения:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \ddot{f}(x).$$

Аналогично вводится понятие третьей производной (это производная второй производной), четвертой производной (это производная третьей производной) и т. д.

В общем случае производной n-го порядка функции $f(x)$ называется производная ее производной $(n-1)$-го порядка. Она обозначается следующим образом:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Мы не будем заниматься теорией производных высших порядков, ограничившись рассмотрением некоторого количества простых примеров.

Пример 7.6.1.

Пусть $f(x) = \sin^2 x$. Найдем ее вторую производную. Для этого мы сначала ищем первую производную

$$f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x,$$

а затем, продифференцировав ее, получаем и вторую производную

$$f''(x) = 2\cos 2x.$$

Пример 7.6.2.

Пусть $f(x) = \operatorname{tg} 4x$. Найдем ее вторую производную.

$$f'(x) = \frac{4}{\cos^2 4x};$$

$$f''(x) = -4\cdot 2\cdot \cos^{-3} 4x\cdot(\cos 4x)' = \frac{32\sin 4x}{\cos^3 4x}.$$

Пример 7.6.3.

Пусть $f(x) = \cos^2 x$. Найдем ее третью производную.

$$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x;$$

$$f''(x) = -2\cos 2x; \quad f'''(x) = 4\sin 2x.$$

Пример 7.6.4.

Пусть $f(x) = x\ln x$. Найдем ее третью производную.

$$f'(x) = \ln x + 1; \quad f''(x) = \frac{1}{x}; \quad f'''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

7.7. Примеры

Во всех приведенных ниже примерах требуется найти производную заданной функции. Рассмотрим сначала совсем простые примеры.

Пример 7.7.1.

Пусть $f(x) = \dfrac{4x^2 - 2x + 10}{\sqrt{x}}$. Здесь удобно сначала преобразовать функцию, а затем находить производную.

$$f(x) = 4x^{3/2} - 2x^{1/2} + 10x^{-1/2},$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} - 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} + 10 \cdot (-1/2)x^{-3/2} =$$

$$= \frac{6x^2 - x - 5}{x\sqrt{x}}.$$

Пример 7.7.2.

Пусть $f(x) = x^5 + \sin x$. Тогда

$$f'(x) = (x^5)' + (\sin x)' = 5x^4 + \cos x.$$

Пример 7.7.3.

Пусть $f(x) = x^3 \arccos x$. Тогда

$$f'(x) = (x^3)' \arccos x + x^3 (\arccos x)' =$$

$$= 3x^2 \arccos x - \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример 7.7.4.

Пусть $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$. Тогда

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'x^2 - \cos x(x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4} = -\frac{x \sin x + 2\cos x}{x^3}.$$

Пример 7.7.5.

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Требуется найти $f'(-8)$.

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}; \quad f'(-8) = -\frac{1}{3}.$$

Пример 7.7.6.

Пусть $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$. Требуется вычислить $f'(2)-$ $-f'(-2)$.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^3}; \quad f'(2) = \frac{33}{8}; \quad f'(-2) = -\frac{33}{8};$$

$$f'(2) - f'(-2) = \frac{33}{4}.$$

Рассмотрим теперь несколько более сложные примеры. В них приходится применять формулу для нахождения производной сложной функции.

Пример 7.7.7.

Пусть $f(x) = \ln \cos x$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = -\operatorname{tg} x.$$

Пример 7.7.8.

Пусть $f(x) = e^{x^5}$. Тогда

$$f'(x) = e^{x^5}(x^5)' = 5x^4e^{x^5}.$$

Пример 7.7.9.

Пусть $f(x) = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$. Тогда

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x^2}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 7.7.10.

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{1+\cos^2 x}$. Здесь правило дифференцирования сложной функции приходится применять дважды.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot(1+\cos^2 x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1+\cos^2 x)' =$$

$$= \frac{1}{3}(1+\cos^2 x)^{-\frac{2}{3}}2\cos x(\cos x)' =$$

$$= \frac{1}{3}(1+\cos^2 x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2\cos x(-\sin x) =$$

$$= -\frac{\sin 2x}{3\sqrt[3]{(1+\cos^2 x)^2}}.$$

Пример 7.7.11.

Пусть $f(x) = \log^3_{0,5} x^2$. Тогда

$$f'(x) = 3\log^2_{0,5} x^2\cdot\frac{1}{x^2\ln 0,5}\cdot 2x = \frac{6\log^2_{0,5} x^2}{x\ln 0,5}.$$

Пример 7.7.12.

Пусть $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + c})$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}}(x + \sqrt{x^2 + c})' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + c}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + c}}.$$

Мы уже сталкивались со случаем, когда перед нахождением производной удобно сначала преобразовать функцию. При этом, разумеется, выполняемые преобразования должны быть корректны. Приведем ***пример типичной грубой ошибки***, которую нередко делают студенты, пытаясь упростить функцию перед дифференцированием.

► **Пример 7.7.13.**

Пусть $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}}$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + 2x}{1 - 2x} = \frac{1}{2}\ln(1 + 2x) - \frac{1}{2}\ln(1 - 2x);$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1 + 2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{1 - 2x} = \frac{1}{1 + 2x} + \frac{1}{1 - 2x} = \frac{2}{1 - 4x^2}.$$

Вынесение показателя степени за знак логарифма является здесь вполне корректной операцией. А вот представление логарифма дроби в виде разности логарифмов является ошибкой, поскольку в результате этой операции сужается область допустимых значений независимой переменной: функции $\ln(1 + 2x)$ и $\ln(1 - 2x)$ определены, когда $1 + 2x > 0$ и $1 - 2x > 0$, а исходная функция определена также, когда одновременно выполняются неравенства $1+2x<0$ и $1-2x<0$. Мы предоставляем читателям возможность самостоятельно исправить эту грубую ошибку и получить корректное решение данного примера. Заметим только, что, вопреки сделанной в ходе решения примера ошибке, окончательный ответ получился правильным.

Пример 7.7.14.

Пусть $f(x) = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} = \ln(1+\sqrt{x^2+1}) - \ln x$. Здесь выполненное нами преобразование функции корректно, поскольку оно не сужает область допустимых значений независимой переменной.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 7.7.15.

Пусть $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. Покажем, что

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.$$

$$f'(x) = \frac{2\cos x(-\sin x)(1+\sin^2 x) - \cos^2 x(2\sin x\cos x)}{(1+\sin^2 x)^2} =$$

$$= \frac{-\sin 2x(1+\sin^2 x) - \cos^2 x\sin 2x}{(1+\sin^2 x)^2} = \frac{-2\sin 2x}{(1+\sin^2 x)^2};$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3};\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8}{9};\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'(\frac{\pi}{4}) = 3.$$

Пример 7.7.16.

Пусть $y = \left(x - e^{-x^2}\right)/2x^2$. Покажем, что данная функция удовлетворяет уравнению $xy' + 2y = e^{-x^2} + 1/2x$. Чтобы сделать это, сначала нужно найти производную данной функции.

$$y' = -\frac{1}{2x^2} - \left(-\frac{1}{x^3}e^{-x^2} - \frac{1}{2x^2}e^{-x^2}2x\right) =$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}e^{-x^2} + \frac{1}{x}e^{-x^2}.$$

После этого следует подставить y и y' в уравнение и убедиться, что его левая часть равна правой.

$$xy' + 2y = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2}e^{-x^2} + e^{-x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}e^{-x^2} = e^{-x^2} + \frac{1}{2x}.$$

Следующий пример можно отнести к категории примеров повышенной сложности.

Пример 7.7.17.

Пусть $f(x) = x^x$, $x > 0$. Мы не можем сразу искать производную данной функции, поскольку она является одновременно показательной и степенной. Воспользуемся основным логарифмическим тождеством, чтобы привести $f(x)$ к чисто показательной функции: $f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$. Теперь можно дифференцировать данную функцию как сложную функцию.

$$f'(x) = e^{x\ln x}(x \ln x)' = e^{x \ln x}\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Этот пример можно решить и по-другому. Логарифмируя обе части соотношения $f(x) = x^x$, получаем $\ln f(x) = x \ln x$. Теперь, дифференцируя это равенство, приходим к соотношению

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \ln x + 1.$$

Отсюда легко найти производную

$$f'(x) = f(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

7.8. Упражнения

Найдите производные следующих функций.

7.8.1. $y = 3\sqrt[3]{x} - \dfrac{5}{\sqrt[5]{x}} + \dfrac{2}{3x\sqrt{x}}$.

7.8.2. $y = \log_3 2x$.

7.8.3. $y = \operatorname{tg} \cos x$.

7.8.4. $y = \operatorname{arctg} \sin x$.

7.8.5. $y = \ln \sin x$.

7.8.6. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

7.8.7. $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$.

7.8.8. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.

7.8.9. $y = (x+1)(x+2)^2$.

7.8.10. $y = \lg^3 x^2$.

7.8.11. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

7.8.12. $y = \pi^{3 \sin x}$

Ответы.

7.8.1. $y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{x\sqrt[5]{x}} - \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$.

7.8.2. $y' = \dfrac{1}{x \ln 3}$.

7.8.3. $y' = -\dfrac{\sin x}{\cos^2 \cos x}$.

7.8.4. $y' = \dfrac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

7.8.5. $y' = \operatorname{ctg} x$.

7.8.6. $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

7.8.7. $y' = -\dfrac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$.

7.8.8. $y' = 0$.

7.8.9. $y' = (3x+4)(x+2)$.

7.8.10. $y' = \dfrac{6\lg^2 x^2}{x \ln 10}$.

7.8.11. $y' = \dfrac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$.

7.8.12. $y' = 3(\cos x)\pi^{3\sin x}\ln \pi$.

8. Приложения производных

Применения производных в самых различных разделах математики и многих других науках весьма широки и разнообразны. В этом учебнике мы рассмотрим лишь очень ограниченный круг вопросов, связанных с использованием производных для исследования поведения функций, построения графиков и раскрытия неопределенностей при вычислении пределов.

8.1. Возрастание и убывание функции

Одним из важнейших приложений производной является ее применение к исследованию поведения функции.

Определение 8.1.1. ◄

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой области X. Если в этой области большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то $f(x)$ называется ***возрастающей функцией*** в области X. Если же большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то $f(x)$ называется ***убывающей функцией*** в этой области.

Замечания.

1) Это определение легко формализуется. Пусть x_1 и x_2 — две произвольные точки некоторой области X, причем

$x_2 > x_1$. Функция $f(x)$ называется возрастающей функцией в области X, если

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Если же

$$f(x_2) < f(x_1),$$

то $f(x)$ называется убывающей функцией в этой области.

2) Если здесь строгие неравенства

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \text{и} \quad f(x_2) < f(x_1)$$

заменить нестрогими

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) \quad \text{и} \quad f(x_2) \leqslant f(x_1),$$

то получим соответственно определения ***неубывающей*** и ***невозрастающей*** функций.

► Определение 8.1.2.

Функция $f(x)$ называется ***монотонной*** в области X, если она в этой области является либо возрастающей, либо убывающей.

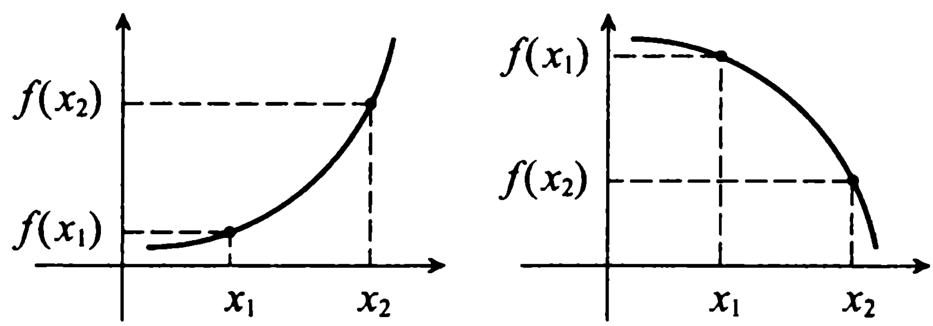


Рис. 8.1.1. Возрастающая (слева) и убывающая (справа) функции.

Рассмотрим теперь четыре теоремы, показывающие связь поведения дифференцируемой функции $f(x)$ со знаком ее производной.

Теорема 8.1.1 (необходимое условие возрастания). ◀

Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает в интервале (a, b), то ее производная $f'(x) \geqslant 0$ в этом интервале.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку $x \in (a, b)$ и настолько маленькое по абсолютной величине значение приращения аргумента Δx, что точки $x \pm \Delta x \in (a, b)$.

Если $\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$. Из возрастания функции $f(x)$ тогда следует, что $f(x+\Delta x) > f(x)$, а значит, приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) > 0$.

Если $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$. Из возрастания функции $f(x)$ тогда следует, что $f(x+\Delta x) < f(x)$, а значит, приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) < 0$.

В обоих случаях получается, что Δf и Δx имеют одинаковые знаки. Но тогда при любом $\Delta x \neq 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, учитывая, что при этом строгое неравенство заменяется нестрогим. Используя определение производной, получаем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

► **Теорема 8.1.2** (достаточное условие возрастания).

Пусть функция $f(x)$ является дифференцируемой в интервале (a, b) и ее производная $f'(x) > 0$ в этом интервале. Тогда функция $f(x)$ возрастает в интервале (a, b).

Доказательство.

Возьмем произвольную точку $x \in (a, b)$. По условию теоремы

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0.$$

Это означает, что при всех достаточно маленьких по абсолютной величине ненулевых значениях приращения аргумента Δx выполняется неравенство

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Отсюда следует, что приращения аргумента Δx и функции Δf имеют одинаковые знаки. Мы вправе считать, что приращение аргумента Δx настолько мало по абсолютной величине, что точка $x + \Delta x \in (a, b)$.

Пусть $\Delta x > 0$, тогда $\Delta f > 0$, следовательно, $f(x+$ $+\Delta x) > f(x)$ при $x + \Delta x > x$.

Пусть $\Delta x < 0$, тогда $\Delta f < 0$, следовательно, $f(x+$ $+\Delta x) < f(x)$ при $x + \Delta x < x$.

Таким образом, мы доказали, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Но это означает, согласно определению 8.1.1, что функция $f(x)$ является возрастающей в интервале (a, b).

Теорема доказана.

Теорема 8.1.3 (необходимое условие убывания). ◀

Если дифференцируемая функция $f(x)$ убывает в интервале (a, b), то ее производная $f'(x) \leqslant 0$ в этом интервале.

Теорема 8.1.4 (достаточное условие убывания). ◀

Пусть функция $f(x)$ является дифференцируемой в интервале (a, b) и ее производная $f'(x) < 0$ в этом интервале. Тогда $f(x)$ убывает в интервале (a, b).

Доказательства теорем 8.1.3 и 8.1.4 почти дословно повторяют соответственно доказательства теорем 8.1.1 и 8.1.2. Мы предлагаем читателям провести их самостоятельно.

Замечания.

1) Обратите внимание на тот факт, что в теоремах 8.1.1 и 8.1.3 неравенства для производных являются нестрогими, а в теоремах 8.1.2 и 8.1.4 — строгими. Это связано с тем, что случай, когда производная в некоторых точках интервала (a, b) обращается в ноль, является особым (критическим). Без дополнительных исследований

о поведении функции в окрестности такой критической точке ничего сказать нельзя.

2) Не следует думать, что исследовать возрастание и убывание можно только в случае, когда функция дифференцируема. В определениях 8.1.1 и 8.1.2 про дифференцируемость ничего не говорится. Просто доказанные нами теоремы применимы только к дифференцируемым функциям, а изучение других методов исследования возрастания и убывания функций выходит за рамки нашего курса.

Пример 8.1.1.

Функция $f(x) = x$ возрастает при любом x, поскольку ее производная $f'(x) = 1$ положительна при любом x. График этой функции — прямая.

Пример 8.1.2.

Функция $f(x) = x^2$ возрастает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$, т. к. ее производная $f'(x) = 2x$. В точке $x = 0$ эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей. График этой функции — парабола.

Пример 8.1.3.

Показательная функция $f(x) = a^x$ определена при любом x. Ее производная $f'(x) = a^x \ln a$. Если $a > 1$, то $\ln a > 0$, значит, $f'(x) > 0$ и функция является возрастающей при любом x. Если же $0 < a < 1$, то $\ln a < 0$, значит, $f'(x) < 0$ и функция является убывающей при любом x.

Пример 8.1.4.

Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ определена при любом $x > 0$. Она имеет производную $f'(x) = 1/x\ln a$. Если $a > 1$, то $\ln a > 0$, значит, $f'(x) > 0$ и функция возрастает при $\forall x > 0$. Если же $0 < a < 1$, то $\ln a < 0$, значит, $f'(x) < 0$ и функция убывает при $\forall x > 0$.

Пример 8.1.5.

Функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $f(x) = \operatorname{ctg} x$ имеют следующие производные

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \quad \text{и} \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

Первая из них возрастает, а вторая убывает всюду в своей области определения.

Пример 8.1.6.

Найдем области возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Ее производная

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Решая неравенство $f'(x) > 0$, приходим к выводу, что эта функция возрастает, когда $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Решая неравенство $f'(x) < 0$, приходим к выводу, что данная функция убывает, когда $x \in (-1, 1)$. Сделать какие-либо выводы о поведении этой функции при $x = 1$

и $x = -1$, опираясь лишь на уже доказанные нами теоремы, мы не можем, поскольку в этих точках ее производная обращается в ноль. Но, забегая несколько вперед, отметим, что в этих двух критических точках рассматриваемая функция имеет экстремумы (см. ниже). График этой функции изображен на рис. 8.1.2.

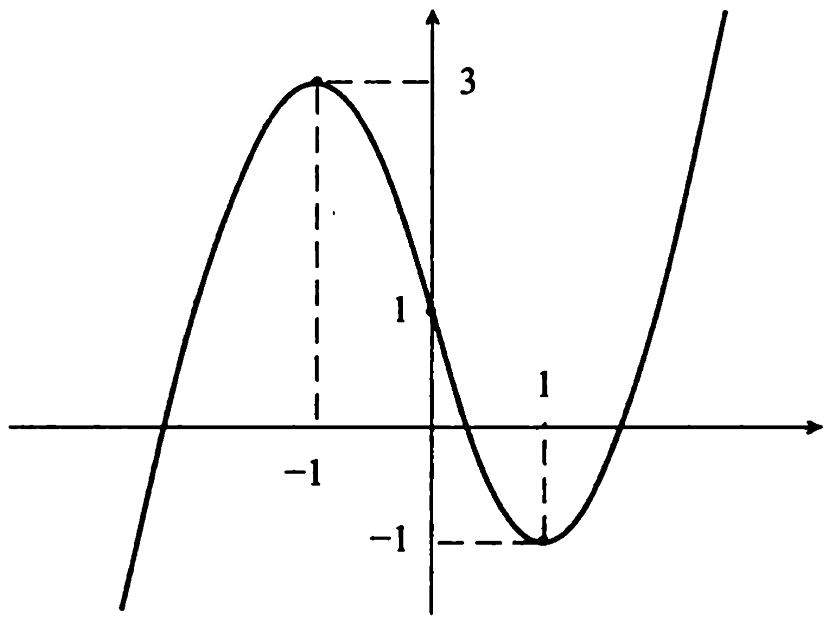


Рис. 8.1.2. График функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

8.2. Экстремумы функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0.

► **Определение 8.2.1.**

Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что выполняется условие $f(x) < f(x_0)$, когда $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ и $x \neq x_0$.

Определение 8.2.2. ◀

Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции $f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что выполняется условие $f(x) > f(x_0)$, когда $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $x \neq x_0$.

Определение 8.2.3. ◀

Точка x_0 называется ***точкой экстремума*** функции $f(x)$, если она является точкой максимума или минимума этой функции.

Определение 8.2.4. ◀

Точка x_0 называется ***критической точкой*** функции $f(x)$, если в ней производная $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Замечания.

1) Определение 8.2.1 означает, что вблизи точки x_0 самым большим значением функции является $f(x_0)$.

2) Определение 8.2.2 означает, что вблизи точки x_0 самым маленьким значением функции является $f(x_0)$.

3) Экстремумы, о которых говорится здесь, часто называются ***локальными***. Этот термин является очень точным: когда мы говорим, что в точке x_0 функция имеет экстремум, мы занимаемся лишь локальным анализом, т. е. изучаем поведение функции только вблизи данной точки. Что происходит вдали от нее, мы при этом не рассматриваем.

4) Функция может иметь один или несколько экстремумов, а может и не иметь их вовсе. Так, например, парабола $y = x^2$ имеет один минимум в точке $x = 0$, а прямая $y = x$ является возрастающей функцией, значит, экстремумов у нее нет. Пример функции, имеющей на отрезке два максимума и два минимума, представлен на рис. 8.2.1. Обратите внимание, что у нее значение $f(x_1)$ в точке локального максимума меньше значения $f(x_2)$ в точке локального минимума.

5) Не следует думать, что максимум и минимум функции всегда являются соответственно ее наибольшим и наименьшим значениями на некотором отрезке. Примером может служить функция, показанная на рис. 8.2.1. У нее значения в точках максимумов не являются самыми большими на отрезке $[a, b]$. Подробнее этот вопрос рассматривается в разделе 8.3.

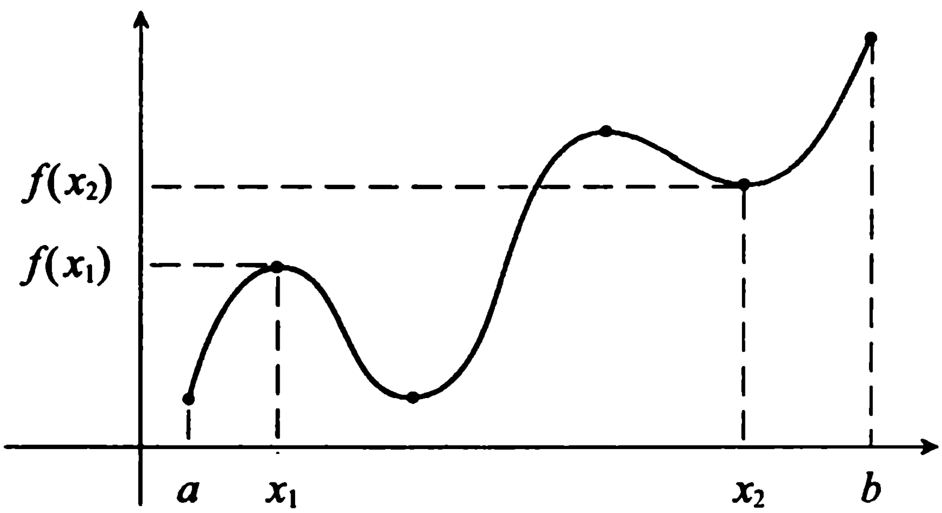


Рис. 8.2.1. Данная функция имеет на отрезке $[a, b]$ два максимума и два минимума, причем значение $f(x_1)$ в точке локального максимума меньше, чем значение $f(x_2)$ в точке локального минимума.

Теорема 8.2.1 (необходимое условие экстремума). ◄

Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то в этой точке ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует, т. е данная точка является критической.

Мы не будем разбирать формальное доказательство этой теоремы, ограничившись ее графической интерпретацией. Возможные варианты поведения непрерывной функции вблизи ее экстремумов показаны на рис. 8.2.2.

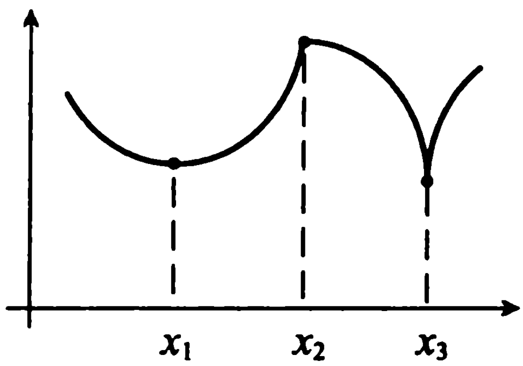


Рис. 8.2.2. Различные варианты поведение непрерывной функции вблизи экстремумов.

Рассматривая геометрический смысл производной, мы установили, что тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в некоторой точке x, совпадает со значением производной данной функции, найденной в этой точке: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$.

На рис. 8.2.2 видно, что вблизи значения $x = x_1$ с ростом x убывание функции $f(x)$ сменяется ее возрастанием. В этой точке функция $f(x)$ достигает своего минимума. При этом производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, а в точке $x = x_1$ она обращается в ноль, поскольку касательная к графику функции $y = f(x)$ в этой точке параллельна оси абсцисс. Угол ее наклона к оси абсцисс равен нулю, следовательно, равен нулю и тангенс данного угла, а значит, и производная $f'(x_1) = 0$.

Вблизи значения $x = x_2$ с ростом x возрастание функции $f(x)$ сменяется ее убыванием. В этой точке функция $f(x)$ достигает своего максимума, но производная $f'(x_2)$ в этой точке не существует. При переходе через точку $x = x_2$ касательная к графику функции $y = f(x)$ скачком меняет свой угол наклона к оси абсцисс, следовательно, при $x = x_2$ производная $f'(x)$ претерпевает разрыв первого рода (скачок).

Вблизи значения $x = x_3$ с ростом x убывание функции $y = f(x)$ сменяется ее возрастанием. В этой точке функция $y = f(x)$ достигает своего минимума, а производная $f'(x)$ претерпевает разрыв второго рода: когда $x \to x_3$, угол наклона α касательная к графику функции $y = f(x)$ стремится к $\pi/2$, а значит, $\operatorname{tg}\alpha \to \infty$ и $f'(x) \to \infty$ при $x \to x_3$.

Замечание.

Условия теоремы 8.2.1 достаточными не являются даже для дифференцируемых функций: обращение производной в ноль в некоторой точке еще не гарантирует, что в этой точке функция имеет экстремум. Примерами здесь служат функции $f(x) = const$ и $f(x) = x^3$. У первой из них $f'(x) = 0$ при любом x, а у второй — производная $f'(x) = 3x^2$ обращается в ноль при $x = 0$, но ни одна, ни другая функция экстремумов не имеют.

Рассмотрим теперь две теоремы, дающие достаточные условия существования экстремума функции $f(x)$ в некоторой точке x_0.

Теорема 8.2.2 (первое достаточное условие экстремума). ◄

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то в данной точке функция имеет экстремум. При этом возможны следующие два случая:

1) Если с ростом значений аргумента x производная меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум.
2) Если с ростом значений аргумента x производная меняет знак с минуса на плюс, то в точке x_0 функция имеет минимум.

Доказательство.

Справедливость этой теоремы вполне очевидна, поскольку смена знака производной с плюса на минус означает переход от возрастания функции к убыванию (это происходит в точке максимума), а смена знака производной с минуса на плюс наоборот — переход от убывания функции к возрастанию (это происходит в точке минимума).

Теорема доказана.

Теорема 8.2.3 (второе достаточное условие экстремума). ◄

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную вторую производную $f''(x_0)$, причем $f'(x_0) = 0$, а вторая производная $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум. При этом возможны следующие два случая:

1) Если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция имеет минимум.
2) Если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция имеет максимум.

Доказательство.

Пусть вторая производная $f''(x_0) > 0$. Тогда первая производная $f'(x)$ возрастает в некоторой окрестности точки x_0. Поскольку по условию теоремы первая производная $f'(x_0) = 0$, получается, что слева от данной точки $f'(x) < 0$, а справа — $f'(x) > 0$. Но тогда слева от точки x_0 функция $f(x)$ убывает, а справа от нее — возрастает. Значит, в точке x_0 функция имеет минимум. Аналогично рассматривается и случай, когда $f''(x_0) < 0$.

Теорема доказана.

Доказанные выше теоремы дают прекрасный инструмент для исследования функций на наличие локальных экстремумов. Это удобно делать, придерживаясь следующей схемы.

1) Найти производную $f'(x)$.
2) Найти критические точки функции, т. е. точки, в которых производная равна нулю или не существует.

3) Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки. Если смены знака производной нет, то нет и экстремума. Если же производная меняет знак при переходе через критическую точку, то экстремум имеется. Во втором случае нужно далее определить вид обнаруженного экстремума, выяснив, является ли он максимумом или минимумом функции. Для этого можно использовать первое достаточное условие экстремума.

4) Найти экстремальные значения функции, т. е. значения функции в точках экстремумов.

Замечание.

Альтернативным вариантом этой схемы является использование на третьем шаге второго достаточного условия экстремума. Для этого нужно найти вторую производную $f''(x)$ и определить ее знак в каждой критической точке.

Рассмотрим серию примеров, демонстрирующих применение этой схемы на практике. В них требуется исследовать функцию на наличие локальных экстремумов.

Пример 8.2.1.

Пусть $f(x) = 2x - 3$. Ее производная $f'(x) = 2$. Функция не имеет критических точек, следовательно, экстремумов у нее нет. Это и неудивительно, ведь графиком данной функции является прямая.

Пример 8.2.2.

Пусть $f(x) = x^2$. Ее производная $f'(x) = 2x$ обращается в ноль при $x = 0$. Применим первое достаточное условие экстремума. Слева от критической точки (при $x < 0$) производная отрицательна $f'(x) < 0$, а справа (при $x > 0$) – положительна $f'(x) > 0$, значит, при $x = 0$ функция $f(x)$ имеет минимум. Применяя второе достаточное условие экстремума, получим, разумеется, тот же самый результат, поскольку вторая производная $f''(x) = 2 > 0$ при любом x, а значит, и в критической точке. Значение исследуемой функции в точке экстремума равно $f_{min} = f(0) = 0$. Графиком этой функции является парабола.

Пример 8.2.3.

Пусть $f(x) = x^3$. Ее производная $f'(x) = 3x^2$. Функция имеет единственную критическую точку $x = 0$, но в ней производная не меняет своего знака, значит, экстремумов у данной функции нет. Графиком этой функции является кубическая парабола.

Пример 8.2.4.

Пусть $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Мы уже провели исследование этой функции на возрастание и убывание в примере 8.1.6. Воспользовавшись его результатами, применим теорему 8.2.2 (первое достаточное условие экстремума). При переходе через критическую точку $x = -1$ производная данной функции меняет знак с плюса на минус (возрастание функции сменяется ее убыванием), значит, в данной точке функция имеет максимум $f_{max} = f(-1) = 3$. При переходе через критическую точку $x = 1$ производная данной функции меняет знак с минуса на плюс (убывание функции сменяется ее возрастанием), значит, в данной точке функция имеет минимум $f_{min} = f(1) = -1$. Легко убедиться, что второе достаточное условие экстремума (теорема 8.2.3) дает тот же самый результат, поскольку вторая производная данной функции равна $f''(x) = 6x$, а значит, $f''(-1) = -6 < 0$ и $f''(1) = = 6 > 0$. График этой функции показан на рис. 8.1.2.

Пример 8.2.5.

Пусть $f(x) = (x-1)^3 + 1$. Производная этой функции $f'(x) = 3(x-1)^2$ обращается в ноль в точке $x = 1$. В ней знак производной не меняется. Следовательно, данная функция не имеет точек экстремума.

Пример 8.2.6.

Пусть $f(x) = |x|$. Эта функция непрерывна при $\forall x$. Ее график показан на рис. 8.2.3. В примере 7.1.3 мы установили, что при $x = 0$ данная функция не является дифференцируемой.

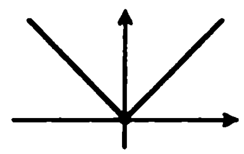


Рис. 8.2.3. $y = |x|$.

При $x = 0$ ее производная претерпевает разрыв первого рода — скачок. Слева от точки разрыва $f'(x) = -1 < 0$, а справа $f'(x) = 1 > 0$. Это дает нам возможность применить первое достаточное условие экстремума (теорему 8.2.2) и заключить, что критическая точка $x = 0$ является точкой минимума данной функции. В ней $f_{min} = = f(0) = 0$. Использовать в этом примере второе достаточное условие экстремума (теорему 8.2.3) мы не можем, поскольку в критической точке рассматриваемая функция дифференцируемой не является.

Пример 8.2.7.

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Эта функция непрерывна при $\forall x$. Ее график показан на рис. 8.2.4. Производная данной функции $f'(x) = 2/3\sqrt[3]{x}$ при $x = 0$ не существует.

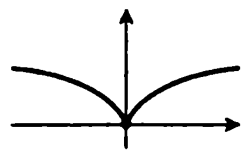


Рис. 8.2.4. $y = \sqrt[3]{x^2}$.

При $x = 0$ ее производная претерпевает разрыв второго рода. Слева от точки разрыва $f'(x) < 0$, а справа $f'(x) > 0$. Применяя первое достаточное условие экстремума (теорему 8.2.2), заключаем, что критическая точка $x = 0$ является точкой минимума данной функции. В ней $f_{min} = f(0) = 0$. Использовать в этом примере второе достаточное условие экстремума (теорему 8.2.3) мы не можем, поскольку в критической точке рассматриваемая функция дифференцируемой не является.

8.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

В общем случае для непрерывной функции справедливы следующие утверждения.

1) Если непрерывная функция $y = f(x)$ задана на замкнутом промежутке $[a, b]$, то она обязательно достигает как своего наименьшего, так и своего наибольшего значений,

причем происходит это либо в точке экстремума, либо на конце промежутка.

2) Если же функция задана на открытом промежутке (a, b), то она может достигать, а может и не достигать своего наименьшего и своего наибольшего значений.

Чтобы прояснить суть рассматриваемой проблемы, решим несколько простых примеров.

Пример 8.3.1.

Пусть функция $f(x) = 2x$ задана на замкнутом промежутке $[1, 3]$. Эта функция является возрастающей, т. к. ее производная $f'(x) = 2$ положительна. Поэтому $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$, значит, данная функция достигает своего наименьшего значения на левом конце промежутка $[1, 3]$, а наибольшего — на его правом конце, т. е. $f_{\text{наим}} = f(1) = 2$, а $f_{\text{наиб}} = f(3) = 6$.

Пример 8.3.2.

Ситуация кардинально меняется, если функция $f(x) = 2x$ задана на открытом промежутке $(1, 3)$. В этом случае для любого значения $x \in (1, 3)$ выполняется неравенство $2 < f(x) < 6$, а значит, ни наименьшего, ни наибольшего значений данная функция на открытом промежутке $(1, 3)$ достичь не может. Ее значения подходят сколь угодно близко к числу 2, когда аргумент x приближается к левому концу промежутка $(1, 3)$, но достичь этого числа они не могут. Точно такая же ситуация имеет место и на правом конце данного промежутка.

Пример 8.3.3.

Пусть функция $f(x) = x^2$ задана на замкнутом промежутке $[-1, 1]$. Легко убедиться, что она достигает своего наименьшего значения в точке минимума: $f_{\text{наим}} = f(0) = 0$. А вот наибольшего значения она достигает на обоих концах отрезка: $f_{\text{наиб}} = f(-1) = f(1) = 1$.

Пример 8.3.4.

Если же функция $f(x) = x^2$ задана на открытом промежутке $(-1, 1)$, то своего наименьшего значения она достигает в точке минимума: $f_{\text{наим}} = f(0) = 0$, но своего наибольшего значения она достичь не может.

Пример 8.3.5.

Пусть функция $f(x) = 2/x$ задана на открытом промежутке $(0, 1)$. Легко проверить, что она там непрерывна и монотонно убывает, но ни наименьшего, ни наибольшего значений на этом промежутке данная функция не достигает. Значения $f(x)$ стремятся к 2, когда x приближается к правому концу промежутка $(0, 1)$, но никогда не достигают двойки. Если же x приближается к левому концу промежутка $(0, 1)$, то значения функции неограниченно растут.

На практике для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на замкнутом промежутке $[a, b]$ удобно придерживаться следующего алгоритма, основанного на том, что мы просто перебираем все значения аргумента, в которых функция может достигать своего наибольшего и своего наименьшего значений.

1) Ищем все критические точки функции $y = f(x)$, т. е. те значения ее аргумента, в которых производная данной функции $f'(x)$ обращается в ноль или не существует.

2) Среди найденных критических точек отбираем только те, которые принадлежат промежутку $[a, b]$. Остальные критические точки отбрасываем.

3) Находим значения функции $f(x)$ во всех отобранных точках, а также ее значения $f(a)$ и $f(b)$ на концах отрезка. Самое большое и самое маленькое из найденных чисел и являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями данной функции на промежутке $[a, b]$.

Пример 8.3.6.

Пусть $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$. Найдем наибольшее и наименьшее значения этой непрерывной функции на отрезке $[-2, 1]$. Сначала ищем критические точки данной функции. Ее производная $f'(x) = 12x^3 + 12x^2$ обращается в ноль в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Обе критические точки принадлежат отрезку $[-2, 1]$. Функция в этих точках имеет следующие значения: $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$. Найдем значения функции на концах отрезка: $f(-2) = 17$, $f(1) = 8$. Выбирая из этих чисел самое большое и самое маленькое, получаем $f_{\text{наиб}} = f(-2) = 17$, $f_{\text{наим}} = f(-1) = 0$.

8.4. График функции

Умение строить графики функций, которые заданы аналитически, является весьма востребованным не только в учебном процессе, но и во многих сферах профессиональной деятельности тех, кто занимается научной или инженерной работой. Построение эскиза графика какой-либо функции нередко позволяет выявить те или иные особенности ее поведения, которые трудно (а иногда и невозможно) обнаружить, изучая лишь формулу, задающую данную функцию в аналитическом виде.

Разумеется, в наше время с этой работой прекрасно справляется компьютер. Существует множество компьютерных программ, позволяющих строить графики, например, популярный пакет программ ***MatLab***, но в вузах обычно требуют от студентов уметь выполнять эту работу и без помощи компьютера.

При рисовании эскиза графика функции соблюдать масштабы обычно не требуется. Нужно лишь, чтобы рисунок правильно отражал все характерные особенности поведения функции.

В простейших случаях для того, чтобы нарисовать график функции, нет необходимости проводить полное исследование ее поведения. Так бывает, например, когда рассматриваемая функция получается с помощью простейших преобразований какой-либо функции, график которой уже известен. Связанные с этим вопросы обычно разъясняются в школьном курсе элементарной математики. Важнейшие из таких преобразований описаны на стр. 463.

В более сложных случаях для построения графика функции $y = f(x)$ приходится проводить ее исследование. Порядок выполнения пунктов такого исследования не слишком важен, но обычно достаточно удобно проводить его в следующей последовательности.

1) Найти область определения функции.
2) Найти точки пересечения графика с осями координат.
3) Найти интервалы знакопостоянства функции — промежутки оси абсцисс, на которых $f(x) > 0$, и промежутки, на которых $f(x) < 0$.
4) Установить наличие симметрии графика относительно оси ординат (она имеется у четной функции) и относительно начала координат (она есть у нечетной функции). Проверить наличие периодичности.
5) Найти интервалы монотонности функции — промежутки возрастания и промежутки убывания функции.
6) Найти экстремумы функции и определить их вид.
7) Исследовать поведение функции в окрестности граничных точек области определения.
8) Найти асимптоты функции.
9) Построить график функции.

Во многих случаях для построения графика совершенно не обязательно проводить полное исследование функции, вполне достаточно ограничиться отдельными его пунктами. Отметим также, что некоторые пункты данного исследования может быть довольно трудно (а иногда и невозможно) реализовать на практике. Так, скажем, отыскание точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью ординат представляет собой очень простую задачу: нужно взять $x = 0$ (если, разумеется, область определения функции содержит ноль) и найти $f(0)$. А вот для отыскания точек пересечения с осью абсцисс нужно решить уравнение $f(x) = 0$, что не всегда возможно.

Мы впервые столкнулись здесь с термином асимптота. Поясним его смысл.

Определение 8.4.1.

> ***Асимптотой*** кривой $y = f(x)$ называется прямая, к которой неограниченно приближается (подходит сколь угодно близко) точка кривой при ее удалении вдоль кривой в бесконечность.

Замечание.

> Асимптоты играют важную роль не только в математическом анализе, но и в различных прикладных научных исследованиях. Тот факт, что кривая, отражающая определенные закономерности в той или иной предметной области, при определенных условиях подходит сколь угодно близко к некоторой прямой, обычно заставляет исследователя задуматься о причинах этого явления. Нередко это свидетельствует об обнаружении нового научного факта, а иногда даже служит толчком, приводящим к открытию.

Асимптоты подразделяются на вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$ существует, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$. Здесь a — конечная величина. В первом случае кривая приближается к асимптоте справа, во втором — слева. Примером такой функции может служить гипербола $y = 1/x$, вертикальной асимптотой которой является ось ординат. Это — типичная ситуация: вертикальные асимптоты нередко обнаруживаются, если рассмотреть значения аргумента, при которых знаменатель функции обращается в ноль. Кривая, вообще говоря, может иметь любое количество вертикальных асимптот. Так, скажем, функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много таких асимптот, пересекающих ось абсцисс в точках $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

Горизонтальная асимптота $y = b$ кривой $y = f(x)$ существует, если хотя бы одно из предельных значений

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b_1 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b_2.$$

Здесь b_1, b_2 — конечные величины. Примером и здесь является гипербола $y = 1/x$, горизонтальной асимптотой которой является ось абсцисс. Отметим, что существование у кривой двух различных горизонтальных асимптот также ничему не противоречит: точка кривой может приближаться к одной из них, когда $x \to +\infty$, а к другой — когда $x \to -\infty$.

Наклонная асимптота $y = kx + b$ кривой $y = f(x)$ существует, если реализуется по крайней мере один из двух следующих случаев.

1) Существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx].$$

2) Существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx].$$

В первом из них точка кривой приближается к асимптоте, когда $x \to +\infty$, во втором — когда $x \to -\infty$. Подчеркнем, что одновременно реализоваться могут и оба этих случая, причем асимптоты, к которым приближаются точки кривой, когда $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут совпадать, а могут оказаться и различными.

Замечания.

1) Нетрудно заметить, что горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты с нулевым угловым коэффициентом k.

2) К наклонной асимптоте кривая может приближаться как с одной стороны, так и с обеих сторон, многократно пересекая асимптоту. Вертикальную асимптоту кривая пересечь не может.

Пример 8.4.1.

Построим график функции $y = |\log_2(x-2)|$. Проводить полное исследование данной функции нет никакой необходимости. Сначала нужно построить график функции $y = \log_2 x$, затем сдвинуть его вправо на две единицы, чтобы получить график $y = \log_2(x-2)$, а затем отразить его часть, лежащую ниже оси абсцисс, относительно этой оси. Отражаемую часть графика нужно удалить. В результате получается график функции

$y = |\log_2(x-2)|$. Все три функции имеют вертикальную асимптоту, к которой график приближается, когда аргумент логарифма стремится к нулю справа.

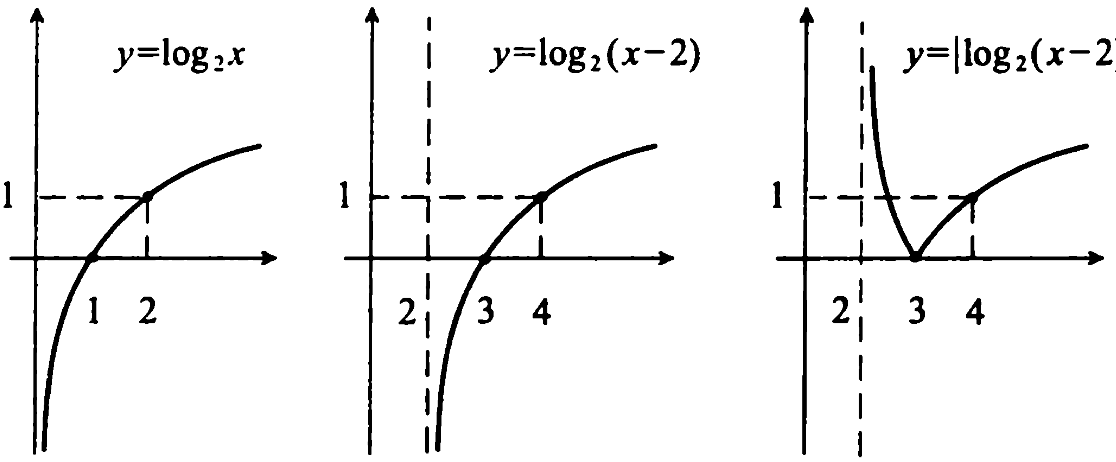


Рис. 8.4.1. Графики функций
$y = \log_2 x$, $y = \log_2(x-2)$ и $y = |\log_2(x-2)|$.

Пример 8.4.2. Построим график функции $y = x^4 - 4x^2$. Проведем сначала полное исследование данной функции.

1) Функция определена при $\forall x \in R$.

2) Полагая $x = 0$, видим, что график пересекает ось ординат в точке $(0, 0)$. Полагая $y = 0$ и решая уравнение $x^4 - 4x^2 = 0$, находим корни $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$. Значит, график пересекает[9] ось абсцисс в точках $(0, 0)$, $(-2, 0)$ и $(2, 0)$.

3) Решая неравенство $x^4 - 4x^2 < 0$, убеждаемся, что $y < 0$, когда $x \in (-2, 2)$. Решая неравенство $x^4 - 4x^2 > 0$, видим, что $y > 0$, когда $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

4) Данная функция является четной: $y(-x) = x^4 - 4x^2 = y(x)$, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат.

[9] Мы увидим далее, что в действительности в точке $(0, 0)$ график не пересекает ось абсцисс, а лишь касается ее.

5) Производная этой функции $y'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2)$. Решая неравенство $x(x^2-2) < 0$, заключаем, что функция убывает, когда $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. Решая неравенство $x(x^2-2) > 0$, заключаем, что функция возрастает, когда $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

6) У данной функции три критические точки. При $x = 0$ возрастание функции сменяется убыванием, значит, в этой точке функция достигает своего максимума, причем $y_{max} = y(0) = 0$. В двух других критических точках $x = \pm\sqrt{2}$ убывание сменяется возрастанием, значит, в этих точках функция достигает своего минимума, причем $y_{min} = y(-\sqrt{2}) = y(\sqrt{2}) = -4$.

7) Данная функция $y(x) \to +\infty$, когда $x \to \pm\infty$, поэтому она неограниченно растет, когда $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

8) Асимптот у данной функции нет, поскольку, как нетрудно убедиться, у многочленов асимптот не бывает.

9) График данной функции изображен на рис. 8.4.2. Обратите внимание на то, что масштабы на координатных осях выбраны разные.

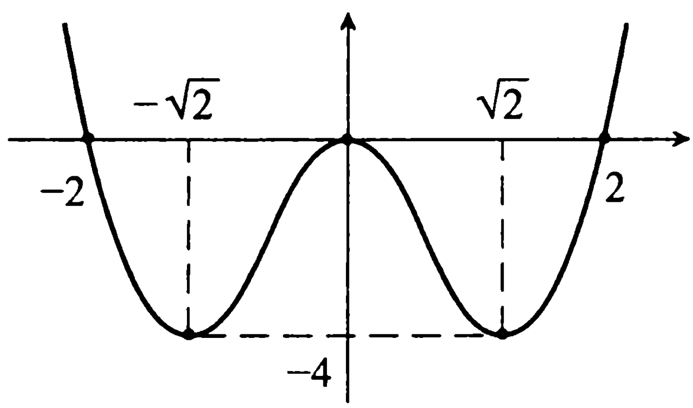


Рис. 8.4.2. График функции $y = x^4 - 4x^2$.

Замечание.

Столь подробный анализ рассматриваемой функции, конечно же, не нужен, если нашей единственной целью является схематическое изображение ее графика. Для построения графика данной функции достаточно найти точки ее экстремумов и заметить, что данный многочлен неограниченно растет, когда $x \to \pm\infty$. После этого, учитывая непрерывность любого многочлена, нужно просто провести гладкую кривую через точки экстремума так, чтобы она уходила на бесконечность при $x \to \pm\infty$.

Пример 8.4.3. Требуется построить график функции $y = x + 1/x$. Проведем полное исследование данной функции.

1) Функция определена при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) С осью ординат график не пересекается, т. к. $x \neq 0$. С осью абсцисс график также не пересекается, поскольку $y = (x^2 + 1)/x \neq 0$.

3) Легко видеть, что $y < 0$, когда $x < 0$, и $y > 0$, когда $x > 0$.

4) Данная функция является нечетной: $y(-x) = -y(x)$, поэтому ее график симметричен относительно начала координат.

5) Производная данной функции $y'(x) = 1 - 1/x^2$. Решая неравенство $y'(x) < 0$, заключаем, что функция убывает, когда $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Решая неравенство $y'(x) > 0$, заключаем, что функция возрастает, когда $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

6) У данной функции две критические точки (точка $x = 0$ критической не является, т. к. в ней функция не определена). При $x = -1$ возрастание сменяется убыванием, значит, в этой точке функция достигает своего максимума, причем $y_{max} = y(-1) = -2$. При $x = 1$ убывание функции сменяется возрастанием, значит, в этой точке функция достигает своего минимума, причем $y_{min} = y(1) = 2$. Отметим, что значение данной функции в точке минимума больше ее значения в точке максимума.

7) Функция $y(x) \to -\infty$, когда $x \to -\infty$, и $y(x) \to +\infty$, когда $x \to +\infty$.

8) Найдем асимптоты данной функции. Ее знаменатель равен нулю, когда $x = 0$. Убеждаясь, что $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = +\infty$, приходим к выводу, что одна ветвь графика данной функции уходит на $-\infty$, когда x приближается к 0 слева, а другая — на $+\infty$, когда x приближается к 0 справа. Это означает, что вертикальной асимптотой данной функции является ось ординат.

Наклонную асимптоту будем искать в виде $y = kx + b$. Вычисляя пределы

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [y(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

замечаем, что прямая $y = x$ (биссектриса первого и третьего координатных углов) является наклонной асимптотой, к которой точки данной кривой неограниченно приближаются, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

9) График данной функции изображен на рис. 8.4.3. Как и в предыдущем примере, построить его можно было и без подробного анализа поведения функции, заметив лишь, что рассматриваемая функция представляет собой сумму двух функций — прямой $y = x$ и гиперболы $y = 1/x$. Пусть $x > 0$. Когда x мало, вклад первого слагаемого мал, и функция ведет себя почти как гипербола: она неограниченно растет, приближаясь к оси ординат при $x \to +0$. Когда x велико, наоборот, вклад второго слагаемого мал, и функция ведет себя почти как прямая $y = x$. Поскольку при $x > 0$ данная функция непрерывна, она должна с ростом x гладко перейти от убывания к возрастанию. Значит, при средних значениях x данная функция должна иметь минимум, найти который помогает производная. Поведение данной функции при $x < 0$ отдельно исследовать нет необходимости, поскольку ее график симметричен относительно начала координат.

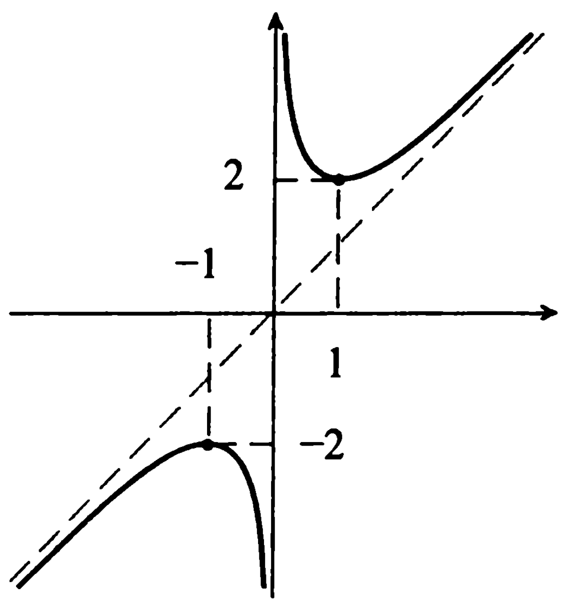


Рис. 8.4.3. График функции $y = x + \dfrac{1}{x}$.

8.5. Уравнение касательной

Рассматривая геометрический смысл производной, мы установили, что тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в некоторой точке x_0, совпадает со значением производной данной функции, найденной в этой точке: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Выведем теперь уравнение касательной. Касательная является прямой, поэтому ее уравнение имеет вид $y = kx+b$. Нужно найти коэффициенты k и b этого уравнения.

Возьмем $y_0 = f(x_0)$. Точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит и кривой $y = f(x)$, и касательной $y = kx+b$. Значит, $y_0 = kx_0+b$, а следовательно, $b = y_0 - kx_0$.

Угловой коэффициент k прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси абсцисс, поэтому $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Но тогда уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$. Это уравнение удобно записать в виде

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0). \tag{8.5.1}$$

В такой форме уравнение касательной ассоциируется с определением производной и распространяется также на вертикальные касательные. Угол наклона вертикальной касательной к оси абсцисс равен $\pi/2$. Поскольку $f'(x_0) = \operatorname{tg}(\pi/2) = \infty$, уравнение вертикальной касательной в этом случае принимает вид $x = x_0$.

Пример 8.5.1.

Напишем уравнения касательных к параболе $y = x^2/4$ в точках с ординатами $y = 1$. По условию примера ордината точек касания $y_0 = 1$. Из уравнения параболы получаем две абсциссы точек касания $x_0 = \pm 2$. Для них $f'(x_0) = x_0/2 = \pm 1$. Значит, уравнения касательных имеют вид

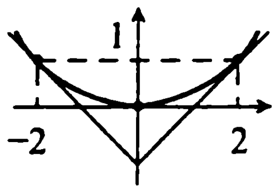


Рис. 8.5.1. Касательные к параболе.

$$\frac{y-1}{x-2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{y-1}{x+2} = -1.$$

Отсюда окончательно получаем уравнения

$$y = x - 1 \quad \text{и} \quad y = -x - 1.$$

8.6. Правила Лопиталя

Правила Лопиталя[10] служат прекрасным инструментом для раскрытия неопределенностей при нахождении некоторых пределов. Мы сформулируем их без доказательства.

Теорема 8.6.1 (первое правило Лопиталя). ◄

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, то под знаком предела отношение функций $f(x)$ и $g(x)$ можно заменить отношением их производных

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

[10] ***Гийом Франсуа Лопиталь*** (1661–1704) — известный математик, автор первого учебника по математическому анализу, опубликованного в 1696 г.

когда предел (конечный или бесконечный), находящийся справа, существует.

► **Теорема 8.6.2** (второе правило Лопиталя).

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то под знаком предела отношение функций $f(x)$ и $g(x)$ можно заменить отношением их производных

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

когда предел (конечный или бесконечный), находящийся справа, существует.

Замечания.

1) В формулировках этих теорем некоторые тонкие моменты опущены.

2) Первое и второе правила Лопиталя часто позволяет раскрывать неопределенности вида $0/0$ и ∞/∞.

3) Правила Лопиталя можно применять и в случае, когда $x_0 = +\infty$ или $x_0 = -\infty$.

4) Иногда приходится применять правило Лопиталя несколько раз. Если условиям теоремы 8.6.1 или 8.6.2 удовлетворяют не только функции $f(x)$ и $g(x)$, но и их производные $f'(x)$ и $g'(x)$, то для вычисления предела отношения производных

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

можно попытаться опять воспользоваться правилом Лопиталя.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

5) Отметим также, что, вообще говоря, если отношение производных не имеет предела, то это еще не означает, что отношение функций также не имеет предела (см. пример 8.6.7).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие применение правил Лопиталя.

Пример 8.6.1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Этот пример дает простое доказательство первого замечательного предела (см. стр. 95).

Пример 8.6.2.

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{2+x}+x}{\ln(2+x)} = \lim_{x \to -1} \frac{[\sqrt{2+x}+x]\,'}{[\ln(2+x)]\,'} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2+x}}+1}{\frac{1}{2+x}} = \frac{3}{2}.$$

Пример 8.6.3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(x-\sin x)\,'}{(x^3)\,'} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)\,'}{(3x^2)\,'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Здесь теорема 8.6.1 была применена дважды.

Пример 8.6.4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^3}=0.$$

Пример 8.6.5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Пример 8.6.6.

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

Пример 8.6.7.

Использование правила Лопиталя без проверки условий его применимости может привести к ошибке. Пусть

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}\quad \text{и}\quad g(x)=x.$$

Используя первое правило Лопиталя, найдем предел отношения этих функций при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\left[2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right].$$

Предел, стоящий справа, не существует (первое слагаемое стремится к нулю, а второе колеблется и ни к чему не стремится, когда $x\to 0$) , но отсюда никак не следует, что не существует и предел, находящийся в левой части данного равенства, поскольку, как легко убедиться,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Следовательно, применять правило Лопиталя в этом примере было нельзя.

8.7. Упражнения

Исследуйте на возрастание и убывание следующие функции.

8.7.1. $f(x)=x^3-12x+12$. **8.7.2.** $f(x)=3-\sqrt[3]{x}$.
8.7.3. $f(x)=3(x-1)-x^3$. **8.7.4.** $f(x)=x^3+3x-4$.

Найдите экстремумы следующих функций.

8.7.5. $f(x)=2x^3-6x^2-18x+3$.

8.7.6. $f(x)=x^4+4x^3-8x^2+7$.

8.7.7. $f(x)=xe^{-3x}$.

8.7.8. $f(x)=x^3/(x^2+3)$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций на указанных промежутках.

8.7.9. $f(x)=-x^3+3x^2+5,\ \ x\in[0,\,3]$.

8.7.10. $f(x)=2x^3-9x^2+12x,\ \ x\in[0,\,3]$.

8.7.11. $f(x)=3x^3-9x^2+2,\ \ x\in[-1,\,1]$.

8.7.12. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+30,\ \ x\in[-3,\,3]$.

Найдите следующие пределы, используя правила Лопиталя.

8.7.13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}.$

8.7.14. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}.$

8.7.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}.$

8.7.16. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-9x^2+15x-7}.$

8.7.17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}.$

8.7.18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}.$

Приложения производной широки и разнообразны.

Постройте графики следующих функций.

8.7.19. $f(x)=\sin|x|$ **8.7.20.** $f(x)=|\sin x|$

8.7.21. $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - x^2$

8.7.22. $f(x) = \dfrac{1}{6}\left(13 + 12x + 3x^2 - 2x^3\right)$

Ответы.

8.7.1. Возрастает, когда $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, и убывает, когда $x \in (-2, 2)$.

8.7.2. Убывает при $\forall x$, но производная $f'(0)$ не существует.

8.7.3. Возрастает, когда $x \in (-1, 1)$, и убывает, когда $x \in (-\infty, -1) \cup$ $\cup (1, +\infty)$.

8.7.4. Возрастает при $\forall x$.

8.7.5. $f_{max} = f(-1) = 13$, $f_{min} = f(3) = -51$.

8.7.6. $f_{max} = f(0) = 7$, $f_{min}^{(1)} = f(-4) = -121$,

$f_{min}^{(2)} = f(1) = 4$.

8.7.7. $f_{max} = f(1/3) = 1/3e$.

8.7.8. Экстремумов нет.

8.7.9. $f_{\text{наиб}} = f(2) = 9$, $f_{\text{наим}} = f(0) = f(3) = 5$.

8.7.10. $f_{\text{наиб}} = f(3) = 9$, $f_{\text{наим}} = f(0) = 0$.

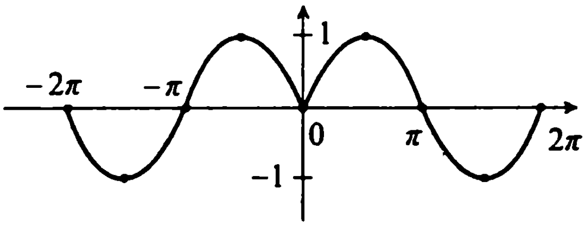
8.7.11. $f_{\text{наиб}} = f(0) = 2$, $f_{\text{наим}} = f(-1) = -10$.

8.7.12. $f_{\text{наиб}} = f(3) = 75$, $f_{\text{наим}} = f(1) = 23$.

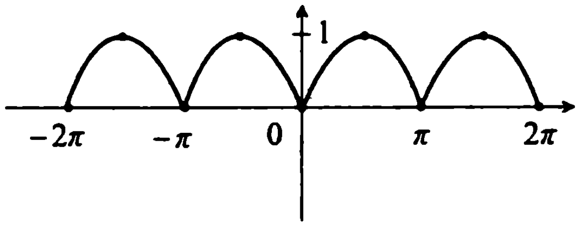
8.7.13. 0. **8.7.14.** -5. **8.7.15.** $\dfrac{2e}{e-1}$.

8.7.16. $-\dfrac{1}{2}$. **8.7.17.** 2. **8.7.18.** 0.

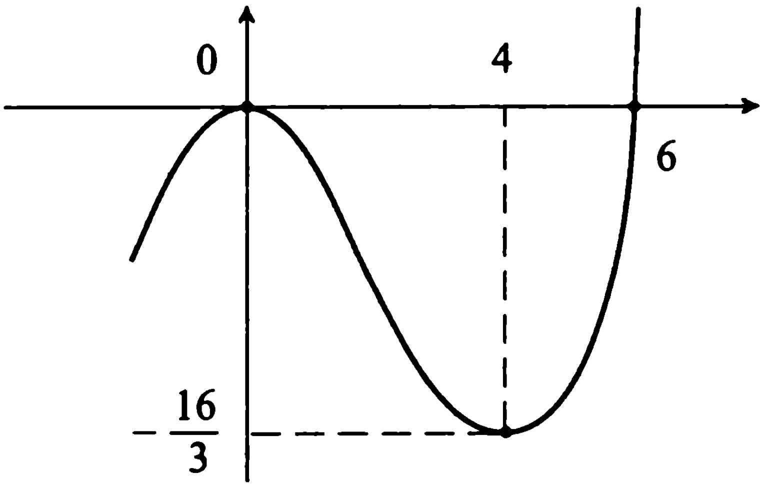
8.7.19. $f(x) = \sin|x|$



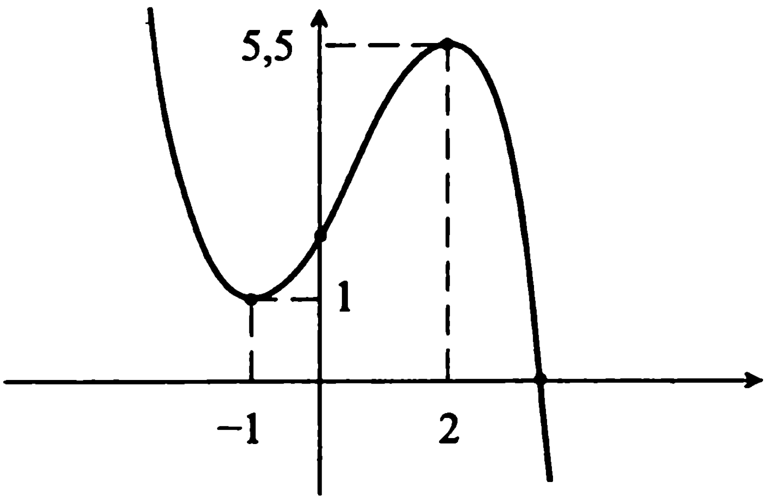
8.7.20. $f(x) = |\sin x|$



8.7.21. $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - x^2$



8.7.22. $f(x) = \dfrac{1}{6}\left(13 + 12x + 3x^2 - 2x^3\right)$



9. Дифференциалы

Уже рассмотренные нами понятия приращения и производной функции тесно связаны с понятием ее дифференциала, к изучению которого мы сейчас приступаем.

9.1. Определение дифференциала

По определению 7.1.1 производная функции $y = f(x)$ в некоторой фиксированной точке x находится по формуле

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Применяя лемму 5.11.1, получаем отсюда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \beta(\Delta x),$$

где $\beta(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Умножая последнее равенство на Δx, получаем формулу для приращения функции

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x.$$

Эта формула показывает, что приращение функции Δf представимо в виде суммы двух слагаемых. Первое из них и называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x.

Определение 9.1.1.

Дифференциалом df функции $y = f(x)$ в некоторой фиксированной точке x называется главная (линейная по Δx) часть приращения этой функции Δf, которая находится по формуле

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Замечания.

1) Приращение аргумента Δx — это просто некоторая переменная величина, имеющая числовые значения. В отличие от определения производной, в определении дифференциала, не требуется, чтобы эта величина стремилась к нулю.

2) Легко видеть, что зависимость дифференциала df от приращения независимой переменной Δx является линейной. А вот зависимость от Δx второго слагаемого $\beta(\Delta x)\Delta x$ в формуле для приращения функции является нелинейной. Используя определение 5.3.2, нетрудно убедиться, что при $\Delta x \to 0$ второе слагаемое является бесконечно малой функцией, порядок которой выше порядка Δx. Именно по этой причине дифференциал называют главной частью приращения функции.

3) Дифференциал функции в точке x существует лишь при условии, что в этой точке существует ее производная $y = f'(x)$ (см. пример 7.1.3).

4) Для простоты мы опустили в этом определении требование, чтобы функция $f(x)$ была определена на некотором интервале (a, b), содержащем точку x. Оно необ-

ходимо, чтобы мы имели право рассматривать значение функции в точке $x + \Delta x$.

Найдем дифференциал функции $f(x) = x$. Применяя определение 9.1.1, получаем значение дифференциала $df = dx = x'\Delta x = \Delta x$. Но это означает, что ***дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением***: $dx = \Delta x$. С учетом этого факта формулу для дифференциала функции можно записать в виде

$$df = f'(x)dx. \tag{9.1.1}$$

Такая форма представления дифференциала функции является наиболее удобной и часто используется в математике. ◀

Отметим еще, что формула (9.1.1) указывает на тесную связь дифференциала функции и ее производной. Это и является причиной того, что термин «дифференцирование» нередко используется и когда требуется найти производную функции, и когда нужно найти ее дифференциал. Раздел математического анализа, в котором изучаются дифференциалы и производные, называется дифференциальным исчислением.

Аналогично тому, как определяются производные высших порядков, вводится понятие ***дифференциалов высших порядков***.

Дифференциалом n-го порядка функции $f(x)$ называется дифференциал ее дифференциала $(n-1)$-го порядка. Для второго дифференциала получаем поэтому

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'\,dx = f''(x)dx^2.$$

Здесь мы учли, что дифференциал независимой переменной dx не зависит от x, а значит, его производная равна нулю. Нетрудно убедиться, что для дифференциала n-го порядка справедлива формула

$$d^n f = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{9.1.2}$$

Замечание.

Формула для первого дифференциала (9.1.1) справедлива и в случае, когда x является не независимой переменной, а некоторой функцией от какой-то другой переменной, например, $x = g(t)$. Тогда $dx = g'(t)dt$.

Этот факт называют обычно ***инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала.***

Для формулы (9.1.2) такой инвариантности нет, поскольку при ее выводе мы считали, что $dx = const$, а значит, применять эту формулу можно только в случае, когда x — независимая переменная.

Рассмотрим простейшие примеры на отыскание дифференциалов.

Пример 9.1.1.

Пусть $f(x) = x^3$. Тогда

$$df = f'(x)dx = 3x^2dx, \quad \text{а} \quad d^2x = 6x\,dx^2.$$

Пример 9.1.2.

Пусть $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. Тогда

$$df = (3x^2 - 6x + 3)dx = 3(x-1)^2 dx.$$

Пример 9.1.3.

Пусть $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Тогда

$$df = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Пример 9.1.4.

Пусть $f(x) = \ln\cos x$. Тогда

$$df = \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\operatorname{tg} x dx, \quad \text{а} \quad d^2 f = -\frac{dx^2}{\cos^2 x}.$$

9.2. Свойства дифференциала

Основные правила вычисления дифференциала функции фактически ничем не отличаются от правил вычисления производной:

1) $dc = 0$, если $c = const$.

2) $d(u \pm v) = du \pm dv$.

3) $d(uv) = vdu + udv$.

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}.$

Доказательства этих правил тривиальны. Так, например, формула для дифференциала произведения доказывается следующим образом.

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx =$$

$$= vu'dx + uv'dx = vdu + udv.$$

9.3. Геометрический смысл дифференциала

Изучая геометрический смысл производной функции (см. рис. 7.2.2 на стр. 128), мы доказали, что тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке с координатами $(x,\ f(x))$, совпадает со значением производной данной функции в этой точке, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$.

Учитывая, что $df = f'(x)\Delta x$, мы можем заключить (см. рис. 9.3.1), что дифференциал функции в точке x равен приращению функции в этой точке, которое получается, если участок кривой $y = f(x)$ на отрезке $[x, x+\Delta x]$ заменить касательной к этой кривой, проведенной в точке с координатами $(x,\ f(x))$.

Отметим, что при такой замене мы допускаем погрешность, которая равна $\beta(\Delta x)\Delta x$. Она будет тем меньше по абсолютной величине, чем меньше будет величина Δx. При $\Delta x \to 0$ эта погрешность является бесконечно малой величиной, порядок которой выше порядка Δx.

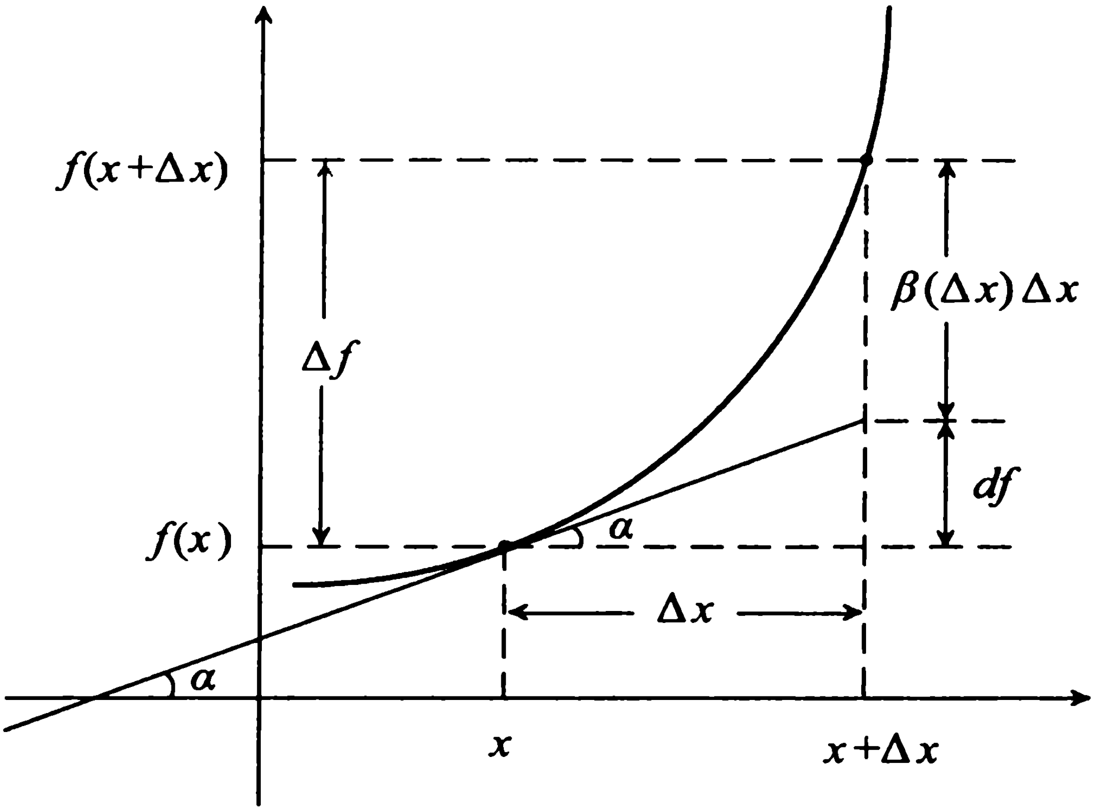


Рис. 9.3.1. Геометрический смысл дифференциала функции.

9.4. Упражнения

Найдите дифференциалы следующих функций.

9.4.1. $f(x) = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$. **9.4.2.** $f(x) = x + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$.

9.4.3. $f(x) = \cos 2x - 2\sin x$. **9.4.4.** $f(x) = e^{-x^3}$.

9.4.5. $f(x) = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. **9.4.6.** $f(x) = \left(2 - 2x + x^2\right) e^x$.

9.4.7. Найдите $d^{18}f(x)$, если $f(x) = \sin x$.

9.4.8. Найдите $d^{18}f(x)$, если $f(x) = \sin^2 e^x + \cos^2 e^x$.

Ответы.

9.4.1. $df = \dfrac{2(1-2x)dx}{(1-x+x^2)^2}$.

9.4.2. $df = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$.

9.4.3. $df = -2\cos x(1 + 2\sin x)dx.$ **9.4.4.** $df = -3x^2 e^{-x^3}\,dx.$

9.4.5. $df = -\dfrac{2\,dx}{\sin^2 x}.$ **9.4.6.** $df = x^2 e^x\,dx.$

9.4.7. $d^{18}f = -\sin x\,dx^{18}.$ **9.4.8.** $d^{18}f = 0.$

10. Интегралы

Изучая операцию дифференцирования, мы научились отыскивать производные и дифференциалы функций, заданных аналитически. Эта операция является весьма востребованной в самых различных разделах науки. Так, скажем, в физике она позволяет находить мгновенную скорость материальной точки $v(t) = S'(t)$, если известен закон, по которому с течением времени t меняется ее путь $S(t)$.

Не менее актуальной является и обратная задача — нахождение такой функции, производная которой равна некоторой заданной функции. Эту задачу позволяет решить операция интегрирования, которая обратна операции дифференцирования. В физике интегрирование дает возможность находить закон, по которому с течением времени меняется путь $S(t)$ материальной точки, если известен закон, по которому меняется ее мгновенная скорость $v(t)$.

В процессе изучения интегрирования мы рассмотрим такие основополагающие понятия, как первообразная, неопределенный интеграл и определенный интеграл, а также изучим некоторые приемы нахождения интегралов.

10.1. Первообразная

Определение 10.1.1. ◄

> ***Первообразной*** для непрерывной на некотором промежутке функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой $F'(x) = f(x)$ на этом промежутке.

Так, например, функции $F_1(x) = x^3/3$ и $F_2(x) = 2 + x^3/3$ являются первообразными для функции $f(x) = x^2$ при $\forall x$. Мы видим на этом примере, что ***первообразная для любой функции определяется неоднозначно.*** Покажем, что этот факт является общим и никак не связан со спецификой рассмотренной нами функции $f(x)$.

Пусть $F_1{}'(x) = f(x)$, т. е. функция $F_1(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда функция $F_2(x) = F_1(x) + c$, где c — некоторая постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$, поскольку

$$F_2{}'(x) = [F_1(x) + c]\,' = F_1{}'(x) = f(x).$$

Пусть функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$. Тогда $F_1{}'(x) = f(x)$ и $F_2{}'(x) = f(x)$, а значит, $F_1{}'(x) = F_2{}'(x)$, следовательно, производная их разности $[F_1(x) - F_2(x)]\,' = 0$ и $F_1(x) - F_2(x) = c$, где c — некоторая постоянная.

► Таким образом, мы доказали, что ***любые две первообразные для некоторой функции отличаются друг от друга на некоторую постоянную.***

10.2. Неопределенный интеграл

► **Определение 10.2.1.**

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad (10.2.1)$$

где $F'(x) = f(x)$, а c — произвольная постоянная. Здесь $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, а величина $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***.

Это определение не зависит от того, какую именно первообразную $F(x)$ мы здесь выберем, ведь все первообразные некоторой функции отличаются друг от друга на постоянную.

Пример 10.2.1.

Легко видеть, что $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3}+c$, т. к. $\left(\dfrac{x^3}{3}+c\right)' = x^2$, а $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$, т. к. $(-\cos x + c)' = \sin x$.

Свойства неопределенных интегралов

1) $\displaystyle\int dF(x) = F(x) + c.$

2) $\displaystyle\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x).$

3) $\displaystyle\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$

4) $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,$ если $a = const.$

Докажем эти четыре формулы, используя тот факт, что сумма и разность двух произвольных постоянных, а также произведение некоторой постоянной на произвольную постоянную являются произвольными постоянными.

1) Пусть $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

2) Пусть $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = [F(x) + c]' = f(x).$$

3) Пусть $F_1'(x) = f_1(x)$ и $F_2'(x) = f_2(x)$. Тогда

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int [F_1'(x) \pm F_2'(x)]\,dx =$$

$$= \int [F_1(x) \pm F_2(x)]'\,dx = \int d\,[F_1(x) \pm F_2(x)] =$$

$$= F_1(x) \pm F_2(x) + c = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

4) Очевидно, что при $a = 0$ формула верна. Пусть $F'(x) = f(x)$ и $a \neq 0$. Тогда

$$\int af(x)\,dx = \int aF'(x)\,dx =$$

$$= \int d[aF(x)] = aF(x) + c_1 = a[F(x) + c] = a\int f(x)\,dx.$$

Сформулированные и доказанные нами свойства неопределенных интегралов не содержат формул для нахождения интегралов от произведения и отношения двух функций. Это объясняется тем, что их просто не существует. Искать такие интегралы подчас приходится с использованием различных сложных технических приемов, и далеко не всегда эти поиски могут привести к успеху. Строго доказано, что некоторые интегралы, которые на первый взгляд не выглядят слишком сложными, невозможно найти аналитически, представив ответ в виде суперпозиций элементарных функций. Таковыми, например, являются интегралы

$$\int e^{x^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Замечание. ◄

Проверить результат нахождения неопределенного интеграла всегда очень легко. Достаточно взять производную результата и убедиться, что она совпадает с подынтегральной функцией.

Простейшие неопределенные интегралы

Поскольку интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, нетрудно получить следующую таблицу.

Таблица простейших неопределенных интегралов		
$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \ (a \neq -1)$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	

Проверить любую из этих формул очень легко, взяв производную от ее правой части и убедившись, что она совпадает с подынтегральной функцией. Так, например, $(\ln|x|)' = 1/x$ при $\forall x \neq 0$. При $x > 0$ это очевидно, а при $x < 0$ получаем

$$(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Пример 10.2.2.

$$\int \left(1 - 2x + \frac{3}{4x} - \frac{5}{x^2}\right) dx =$$

$$= \int x^0\, dx - 2\int x^1\, dx + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} - 5\int x^{-2}\, dx =$$

$$= \frac{x^1}{1} - 2\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}\ln|x| - 5\frac{x^{-1}}{-1} + c = x - x^2 + \frac{3}{4}\ln|x| + \frac{5}{x} + c.$$

Пример 10.2.3.

$$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{10} - \frac{10}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx = \frac{1}{10}\int x^{\frac{1}{3}}\, dx - 10\int x^{-\frac{2}{3}}\, dx =$$

$$= \frac{3}{40}x\sqrt[3]{x} - 30\sqrt[3]{x} + c.$$

Пример 10.2.4.

$$\int 2^{3x}\, dx = \frac{1}{3}\int 2^{3x}\, d(3x) = \frac{1}{3\ln 2}\int d\left(2^{3x}\right) = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c.$$

Пример 10.2.5.

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

Пример 10.2.6.

$$\int (\sin x + \cos x)^2\, dx = \int (1 + \sin 2x)\, dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + c.$$

Пример 10.2.7.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 12} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-6)} =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-2}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\ln|x-6| - \ln|x-2|\right) + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-6}{x-2}\right| + c.$$

Замена переменной

Замена переменной (подстановка) является одним из самых востребованных инструментов решения различных математических задач. Мы уже выполняли замену переменной при вычислении пределов.

При нахождении интегралов подстановка используется очень часто. В простых примерах она позволяет очень быстро получить ответ. В более сложных случаях замена может хотя бы упростить подынтегральное выражение, что, возможно, подскажет дальнейшие действия при решении примера. Иногда для нахождения интеграла приходится пробовать несколько разных подстановок, подбирая нужную подстановку экспериментальным путем.

Общепринятого стандарта для указания сделанной подстановки нет. При вычислении пределов просто давались пояснения о сделанной замене переменной в самом конце. В примерах на интегралы будет продемонстрирована другая форма указания сделанной подстановки, нередко используемая в математических текстах.

Пример 10.2.8.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

В этом примере замена $t = \sin x$ не привела бы к успеху.

Пример 10.2.9.

$$\int \frac{(3x+2)dx}{3x^2+4x+5} = \left| \begin{array}{c} t = 3x^2+4x+5 \\ dt = (6x+4)\, dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln\left|3x^2+4x+5\right| + c.$$

Пример 10.2.10.

$$\int \frac{x\, dx}{4+x^2} = \left| \begin{array}{c} t = 4+x^2 \\ dt = 2x\, dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln(4+x^2) + c.$$

Пример 10.2.11.

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \left| \begin{array}{c} x = 2t \\ dx = 2\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c.$$

Вопреки большой внешней схожести подынтегральных выражений в двух последних примерах для их решения приходится использовать различные замены.

Пример 10.2.12.

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{x+1} \\ x = t^2 - 1,\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= 2\int (t^2-1)t^2\,dt = 2\int t^4\,dt - 2\int t^2\,dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + c = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + c.$$

Интегрирование по частям

Изучая свойства дифференциала, мы установили, что дифференциал произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$ находится следующим образом: $d(uv) = vdu + udv$. Интегрируя это равенство и учитывая, что

$$\int d(uv) = uv + c,$$

получаем формулу

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (10.2.2)$$

Она называется формулой ***интегрирования по частям.*** Произвольную постоянную мы здесь не добавляем, т. к. она появится, когда мы найдем значение неопределенного интеграла, стоящего справа.

Использовать данную формулу имеет смысл лишь в случае, когда интеграл, стоящий в ней справа, оказывается проще того, который находится слева. При этом через u обычно нужно обозначать то, что при дифференцировании упрощается.

Пример 10.2.13.

$$\int x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{c} u = x,\ dv = \sin x\,dx \\ du = dx,\ v = -\cos x \end{array}\right| =$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c.$$

Если в этом примере взять $u = \sin x$ и $dv = x\,dx$, то ничего не получится, поскольку функция $u = \sin x$ при дифференцировании нисколько не упрощается.

Пример 10.2.14.

$$\int \ln x\,dx = \left|\begin{array}{c} u = \ln x,\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x},\ v = x \end{array}\right| =$$
$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$$

Пример 10.2.15.

$$\int x^2e^x\,dx = \left|\begin{array}{c} u = x^2,\ dv = e^x\,dx \\ du = 2x\,dx,\ v = e^x \end{array}\right| =$$
$$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = \left|\begin{array}{c} u = x,\ dv = e^x\,dx \\ du = dx,\ v = e^x \end{array}\right| =$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c =$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

В этом примере интегрирование по частям пришлось выполнить дважды.

10.3. Определенный интеграл

Определение 10.3.1. ◄

Определенным интегралом от непрерывной на отрезке $[a,\ b]$ функции $f(x)$ называется приращение ее первообразной

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (10.3.1)$$

Здесь $F'(x) = f(x)$. Эта формула называется ***формулой Ньютона–Лейбница***. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. Как и для неопределенного интеграла, данное определение не зависит от того, какую именно первообразную $F(x)$ мы выберем, поскольку все первообразные некоторой функции отличаются друг от друга на постоянную. Поэтому любая другая первообразная $F_1(x) = F(x)+c$, значит, $F_1(b)-F_1(a) = F(b)-F(a)$.

Запись $F(x)\Big|_a^b$ является общепринятой для обозначения разности значений первообразной $F(b) - F(a)$.

Если неопределенный интеграл от некоторой функции сам является функцией, то значением определенного интеграла при постоянных значениях пределов интегрирования является число. ◄

Пример 10.3.1.

$$\int_2^5 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_2^5 = \frac{1}{3}(5^3 - 2^3) = \frac{117}{3} = 39.$$

Свойства определенных интегралов

1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

4) $\displaystyle\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$

5) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$ если $c = const.$

Доказательство первых трех формул — тривиально, достаточно просто применить формулу Ньютона–Лейбница. Две последние формулы доказываются также совсем не сложно. В самом деле, пусть $F_1(x)$ — первообразная для $f_1(x)$, а $F_2(x)$ — первообразная для $f_2(x)$. Тогда функция $F(x) = F_1(x)+$ $+F_2(x)$ является первообразной для функции

$f(x) = f_1(x)+f_2(x)$, т. к. $F'(x) = F_1{}'(x)+F_2{}'(x) = f_1(x)+f_2(x)$, следовательно,

$$\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = F(b) - F(a) =$$

$$= F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a) = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

Аналогично доказывается и формула для интеграла от разности двух функций, а также последнее, пятое свойство определенного интеграла.

Замена переменной

Подстановка в определенном интеграле почти не отличается от подстановки в неопределенном интеграле. Нужно лишь не забыть при подстановке изменить пределы интегрирования. Так, скажем, если исходная переменная $x \in [a, b]$ и делается замена переменной $t = 3x$, то $t \in [3a, 3b]$.

Пример 10.3.2.

$$\int\limits_{-1}^{2} 3^{2x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 2x,\ dt = 2\,dx \\ x \in [-1, 2],\ t \in [-2, 4] \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{4} 3^t\,dt = \frac{3^t}{2\ln 3}\,\Bigg|_{-2}^{4} = \frac{3^4 - 3^{-2}}{2\ln 3} = \frac{364}{9\ln 3}.$$

Пример 10.3.3.

$$\int\limits_{-1}^{2} 3^{-2x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = -2x,\ dt = -2\,dx \\ \text{Если } x = -1, \text{ то } t = 2 \\ \text{Если } x = 2, \text{ то } t = -4 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{-4} 3^t\,dt = -\frac{3^t}{2\ln 3}\Bigg|_{2}^{-4} = \frac{364}{81\ln 3}.$$

Пример 10.3.4.

$$\int\limits_{0}^{4\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx = \left|\begin{array}{c} t = \dfrac{x}{2},\ dt = \dfrac{dx}{2} \\ x \in [0,\ 4\pi],\ t \in [0,\ 2\pi] \end{array}\right| =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{2\pi} \sin t\,dt = -2\cos t\,\Bigg|_{0}^{2\pi} = 0.$$

Интегрирование по частям

Выведем формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Она очень мало отличается от аналогичной формулы, полученной нами для неопределенного интеграла.

Интегрируя соотношение $d(uv) = vdu + udv$ для дифференциала произведения функций $u(x)$ и $v(x)$, получаем

$$\int\limits_{a}^{b} d(uv) = \int\limits_{a}^{b} v\,du + \int\limits_{a}^{b} u\,dv.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} vdu.$$

Как и в случае неопределенного интеграла, данная формула во многих случаях позволяет проинтегрировать произведение двух функций.

Пример 10.3.5.

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x,\ dv = e^x\,dx \\ du = dx,\ v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

10.4. Интеграл с переменным верхним пределом

Определение 10.4.1.

Интегралом с переменным верхним пределом от функции $f(x)$ называется функция

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \tag{10.4.1}$$

где $F(x)$ — любая первообразная для $f(x)$.

Замечания.

1) Здесь в подынтегральном выражении аргумент функции обозначен через t просто во избежание путаницы с обозначением верхнего предела в интеграле.

2) Очевидно, что $F_0(a) = 0$, поэтому функция $F_0(x)$ представляет собой ту первообразную для функции $f(x)$, которая обращается в ноль при $x = a$.

3) Мы предполагаем здесь, что функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке $[a, b]$ и $t \in [a, x] \subseteq [a, b]$.

4) Аналогично можно рассмотреть и интеграл с переменным нижним пределом, но это понятие редко оказывается полезным. Такой интеграл представляет собой ту взятую с противоположным знаком первообразную для функции $f(x)$, которая обращается в ноль при $x = b$.

Мы используем интеграл с переменным верхним пределом при нахождении площади криволинейной трапеции в следующем разделе.

Пример 10.4.1.

$$F_0(x) = \int\limits_1^x t^3\,dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_1^x = \frac{x^4-1}{4}.$$

Легко видеть, что $F_0(1) = 0$.

10.5. Нахождение площадей

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная сверху непрерывной кривой $y = f(x)$, снизу — осью абсцисс, а слева и справа — вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

Термин «трапеция» в данном контексте станет понятен, если мысленно повернуть эту фигуру на 90°. Мы увидим трапецию, у которой одна из боковых сторон является кривой линией.

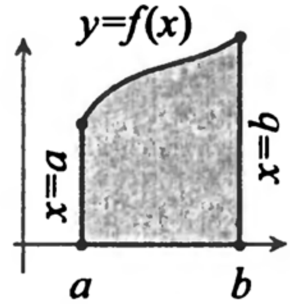


Рис. 10.5.1. Криволинейная трапеция.

Теорема 10.5.1. ◄

Площадь криволинейной трапеции, которая образована непрерывной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс, прямой $x = a$ и прямой $x = b$, при $a \leqslant b$ находится по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{10.5.1}$$

Доказательство.

Возьмем произвольное значение x, лежащее внутри отрезка $[a, b]$ (см. рис. 10.5.2). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, когда аргумент меняется от a до x, обозначим через $S(x)$.

Дадим аргументу x настолько малое приращение Δx, чтобы точка $x + \Delta x$ оставалась внутри отрезка $[a, b]$. Тогда площадь $S(x)$ получит приращение ΔS.

Обозначим через $m(\Delta x)$ и $M(\Delta x)$ соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$. Они, как известно, обязательно достигаются непрерывной функцией на замкнутом отрезке. Так, например, для возрастающей функции, показанной на рис. 10.5.2, $m = f(x)$, а $M = f(x + \Delta x)$.

Легко видеть, что выполняется неравенство

$$m(\Delta x)\Delta x \leqslant \Delta S \leqslant M(\Delta x)\Delta x. \tag{1}$$

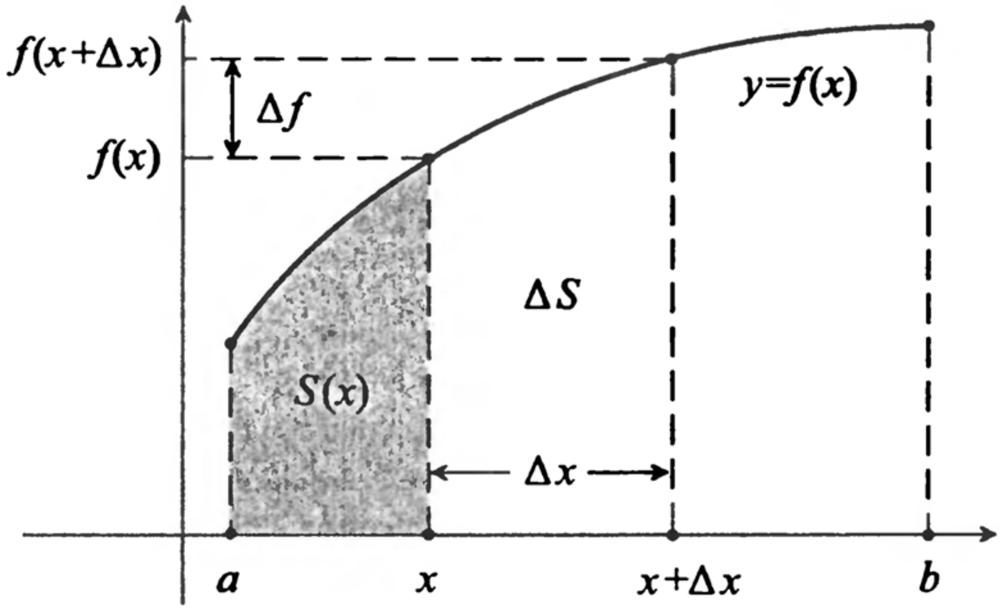


Рис. 10.5.2. Площадь криволинейной трапеции.

В левой части этого неравенства находится площадь прямоугольника со сторонами Δx и $m(\Delta x)$, который целиком располагается внутри трапеции ΔS, а справа — площадь прямоугольника со сторонами Δx и $M(\Delta x)$, внутри которого располагается трапеция ΔS.

Предположим, что $\Delta x > 0$. Разделим обе части неравенства (1) на Δx и перейдем в нем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим неравенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} m(\Delta x) \leqslant \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqslant \lim_{\Delta x \to 0} M(\Delta x). \qquad (2)$$

Поскольку $m(\Delta x) \to f(x)$ и $M(\Delta x) \to f(x)$, когда $\Delta x \to 0$, из неравенства (2) получаем

$$f(x) \leqslant S'(x) \leqslant f(x),$$

а это возможно только при условии, что $S'(x) = f(x)$. Если $\Delta x < 0$, направления неравенств в (2) изменятся на противоположные, но и в этом случае получается, что $S'(x) = f(x)$.

Таким образом, мы доказали, что площадь криволинейной трапеции $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Учитывая, что $S(0) = 0$, заключаем, что искомую площадь можно представить через интеграл с переменным верхним пределом

$$S(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Для нахождения площади криволинейной трапеции, у которой $a \leqslant x \leqslant b$, получаем тогда формулу

$$S = S(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Замечание. ◄

Площадь криволинейной трапеции, которая находится с помощью данной теоремы, называется часто ***алгебраической***.

Значение определенного интеграла может иметь любой знак и может даже оказаться равным нулю (см. пример 10.3.4). Поэтому и алгебраическая площадь может оказаться как положительной, так и отрицательной или нулевой. Легко догадаться, что часть кривой $y = f(x)$, расположенная на отрезке $[a, b]$ выше оси абсцисс, будет давать положительную алгебраическую площадь, а часть кривой, расположенная ниже этой оси, — отрицательную.

Если же нас интересует ***геометрическая*** площадь, которая отрицательной быть не может, то нам приходится разбивать отрезок интегрирования $[a, b]$ на две или более частей так, чтобы на каждой из них функция $f(x)$ не меняла свой знак, подсчитывать площадь каждой такой части отдельно, а затем складывать модули найденных значений этих площадей.

Пример 10.5.1.

Площадь криволинейной трапецией, ограниченной сверху прямой $y = 2$, снизу — осью абсцисс, а слева и справа — вертикальными прямыми $x = 1$ и $x = 4$, равна

$$S = \int_1^4 2\,dx = 2x\Big|_1^4 = 6.$$

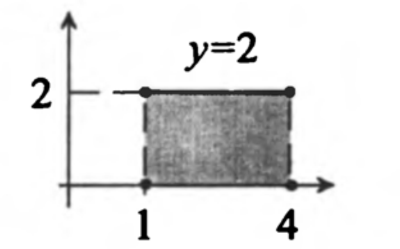


Рис. 10.5.3. Площадь прямоугольника.

Это — как алгебраическая, так и геометрическая площадь, т. к. подынтегральная функция является положительной при $\forall x$. Разумеется, площадь прямоугольника легко находится и без интегралов: $S = 3 \cdot 2 = 6$, что подтверждает правильность наших вычислений.

Пример 10.5.2.

Алгебраическая площадь криволинейной трапецией, ограниченной снизу прямой $y = -2$, сверху — осью абсцисс, а слева и справа — вертикальными прямыми $x = 1$ и $x = 4$, равна

$$S_{\text{алг}} = \int_1^4 (-2)\,dx = -\,2x\Big|_1^4 = -6.$$

Геометрическая площадь $S_{\text{геом}} = |S_{\text{алг}}| = 6$.

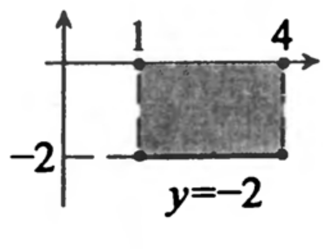


Рис. 10.5.4. Площадь прямоугольника.

Пример 10.5.3.

Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$. Прямая $y = 0$ представляет собой ось абсцисс. Парабола $y = 4 - x^2$ пересекает эту ось при $x = \pm 2$. Поэтому

$$S = \int_{-2}^{2} (4-x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

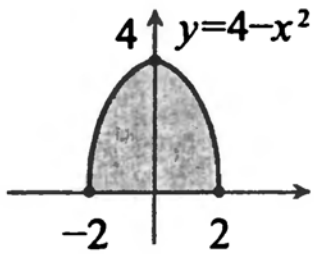


Рис. 10.5.5. Площадь под параболой.

Этот пример можно было решить и по-другому, заметив симметрию параболы относительно оси ординат. Для этого нужно было проинтегрировать функцию $y = 4 - x^2$ в пределах от 0 до 2, а затем удвоить полученный результат.

Интегралы у преподавателей и студентов
нередко вызывают различные ассоциации.

Пример 10.5.4.

Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x - 4$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 3$. Прямая $y = 0$ представляет собой ось абсцисс. Показательная функция $y = 2^x - 4$ пересекает эту ось при $x = 2$. Поэтому фигура разбивается на две криволинейные трапеции.

Одна из них, расположена над осью абсцисс и имеет площадь S_1, другая — под осью абсцисс и имеет алгебраическую площадь S_2.

$$S_1 = \int_2^3 (2^x - 4)dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} - 4x\right]_2^3 = \frac{4}{\ln 2} - 4,$$

$$S_2 = \int_1^2 (2^x - 4)dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} - 4x\right]_1^2 = \frac{2}{\ln 2} - 4.$$

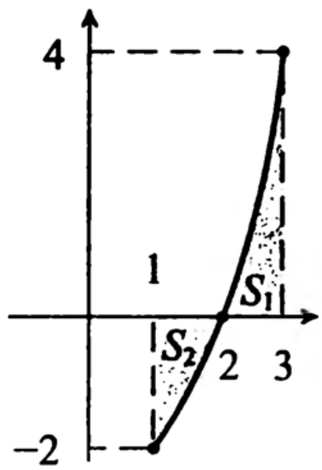


Рис. 10.5.6. Площадь под и над функцией $y = 2^x - 4$.

Алгебраическая и геометрическая площади всей фигуры при этом имеют значения

$$S_{\text{алг}} = S_1 + S_2 = \frac{6}{\ln 2} - 8,$$

$$S_{\text{геом}} = |S_1| + |S_2| = S_1 - S_2 = \frac{2}{\ln 2}.$$

Пример 10.5.5.

Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной параболами $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 4x + 6$. Чтобы найти точки пересечения этих кривых, нужно решить квадратное уравнение $4x - x^2 = x^2 - 4x + 6$. Его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Искомая площадь получается, если на промежутке $[1, 3]$ из площади под кривой $y = 4x - x^2$ вычесть площадь под кривой $y = x^2 - 4x + 6$.

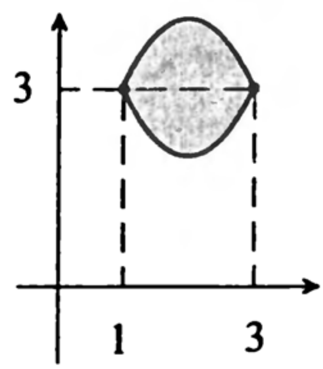


Рис. 10.5.7. Площадь между параболами.

$$S = \int\limits_1^3 \left[(4x - x^2) - (x^2 - 4x + 6)\right]\, dx =$$

$$= -2\int\limits_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = \frac{8}{3}.$$

Нахождение площади криволинейной трапеции — далеко не единственное приложение теории интегралов. Интегралы позволяют находить площади плоских фигур, заданных в полярных координатах или параметрически, длины дуг, площади поверхностей и объемы тел вращения, а также решать самые разнообразные задачи в различных предметных областях. Весь этот материал, однако, останется за рамками нашего учебника.

10.6. Несобственные интегралы

До сих пор мы рассматривали только такие определенные интегралы, у которых пределы интегрирования конечны и подынтегральная функция непрерывна на отрезке интегрирования. Их обычно называют ***собственными***. Если у определенного интеграла хотя бы один из пределов интегрирования равен бесконечности или подынтегральная функция претерпевает разрыв на отрезке интегрирования, то интеграл называется ***несобственным***.

Если несобственный интеграл имеет конечное значение, то он называется ***сходящимся***, иначе — ***расходящимся***. Рассматривать расходящиеся интегралы большого смысла не имеет, поскольку им трудно найти какое-либо применение, а вот сходящиеся несобственные интегралы нередко оказываются весьма полезными. Так, например, они используются в теории вероятностей при изучении непрерывных случайных величин.

Строгое определение несобственного интеграла использует понятие предела. Так, скажем, интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется следующим образом:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то интеграл является сходящимся, иначе — расходящимся. Может показаться, что такой интеграл всегда расходится, ведь его значение равно площади криволинейной трапеции на отрезке интегрирования, который имеет бесконечную длину. Это не так. Здесь все зависит от поведения функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Если ее абсолютная величина при $x \to +\infty$ убывает достаточно быстро, то данный предел может оказаться конечным, а значит, несобственный интеграл может быть сходящимся.

Покажем технику нахождения несобственных интегралов на простейших примерах.

Пример 10.6.1.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = e^x\Big|_{-\infty}^{0} = e^0 - e^{-\infty} = 1.$$

Пример 10.6.2.

$$\int_{0}^{+\infty} e^x\,dx = e^x\Big|_{0}^{+\infty} = e^{+\infty} - e^0 = +\infty.$$

Пример 10.6.3.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} + 1 = 1.$$

Пример 10.6.4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

10.7. Упражнения

Найдите следующие интегралы.

10.7.1. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\, dx.$

10.7.2. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x}.$

10.7.3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$

10.7.4. $\int \frac{dx}{x^2 - 1}.$

10.7.5. $\int \sin^2 x\, dx.$

10.7.6. $\int (5 - 6x)^5\, dx.$

10.7.7. $\int e^{\cos x} \sin x\, dx.$

10.7.8. $\int x^4 e^{x^5}\, dx.$

10.7.9. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}.$

10.7.10. $\int \frac{dx}{x^2 - 4}.$

10.7.11. $\int \frac{4x - 5}{x^2 + 5}\, dx.$

10.7.12. $\int x \cos x\, dx.$

10.7.13. $\int \operatorname{arctg} x\, dx.$

10.7.14. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx.$

10.7.15. $\int x^2 e^{-2x}\, dx.$

10.7.16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

10.7.17. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin \frac{x}{2}\, dx.$

10.7.18. $\int\limits_{0}^{2\pi/3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$

10.7.19. $\int\limits_{1}^{2} \lg x\, dx.$

10.7.20. $\int\limits_{\pi/2}^{0} e^{\sin x} \cos x\, dx$

Найдите площади плоских фигур, заключенных между заданными линиями.

10.7.21. $y = 2x - x^2,\ y = 3/4.$

10.7.22. $y = x^2,\ y = x + 2.$

10.7.23. $y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 9.$

10.7.24. $y = \sqrt[3]{x},\ y = 1/x,\ x = 8.$

Ответы.

10.7.1. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + c.$

10.7.2. $\ln|\sin x| + c.$

10.7.3. $2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c.$

10.7.4. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$

10.7.5. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$

10.7.6. $-\frac{1}{36}(5-6x)^6 + c.$

10.7.7. $-e^{\cos x} + c.$

10.7.8. $\frac{1}{5}e^{x^5} + c.$

10.7.9. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c.$

10.7.10. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c.$

10.7.11. $2\ln(x^2+5) - \sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + c.$

10.7.12. $x\sin x + \cos x + c.$

10.7.13. $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$

10.7.14. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + c.$

10.7.15. $-\frac{1}{4}(2x^2+2x+1)e^{-2x} + c.$

10.7.16. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + c.$

10.7.17. $2.$

10.7.18. $0.$

10.7.19. $(\ln 4 - 1)/\ln 10.$

10.7.20. $1 - e.$

10.7.21. $1/6.$

10.7.22. $9/2.$

10.7.23. $8/3.$

10.7.24. $11,25 - \ln 8.$

11. Функции нескольких переменных

В школьном курсе математики мы не раз сталкивались с функциями нескольких переменных, быть может, даже не отдавая себе в этом отчет. Так, например, разыскивая площадь произвольного треугольника как половину произведения основания на высоту, мы имели дело с функцией двух независимых переменных $S(a, h) = ah/2$, а формулу $V(a, b, c) = abc$ объема прямоугольного параллелепипеда можно трактовать как аналитическое задание функции трех независимых переменных.

В этой главе мы обобщим основные понятия, связанные с функцией одной вещественной переменной, на случай, когда функция зависит от n переменных.

Начнем с рассмотрения простейшего случая, когда функция зависит от двух вещественных независимых переменных.

Пусть имеется множество D упорядоченных пар (x, y) вещественных чисел и задано правило (закон), по которому каждой такой паре ставится в соответствие некоторое вещественное число $z \in E$. Тогда можно считать, что данное правило определяет ***вещественную функцию двух независимых переменных*** $z = f(x, y)$. Множество D называется областью определения данной функции, а множество E — множеством ее значений.

Если область определения функции содержит упорядоченные наборы, содержащие n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то можно говорить про ***вещественную функцию n независимых переменных***

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Сравнивая эти определения[11] с определением функции одной переменной, мы видим, что различия между ними минимальны. Поэтому почти все понятия, связанные с функцией одной переменной, переносятся на случай функции двух и более переменных с минимальными изменениями. Так, например, очевидно, что функция $z(x, y) = x\sqrt{y}$ определена при $y \geqslant 0$, а функция $z(x, y) = \sin(x + y)$ ограничена при $\forall x, y \in R$, т. к. $|\sin(x + y)| \leqslant 1$. Имеются, впрочем, и такие понятия, которые не распространяются на функции нескольких переменных. Примером здесь может служить понятие обратной функции.

Если зафиксировать конечные значения всех независимых переменных, за исключением лишь одной из них, то функция n переменных фактически превращается в функцию одной переменной. Это позволяет без большого труда перенести на такие функции почти все понятия, рассмотренные в предше-

[11] Они допускают дальнейшие обобщения. Можно рассматривать, скажем, многозначные функции нескольких комплексных переменных, но мы этими вопросами заниматься не будем.

ствующих главах. Сосредоточимся поэтому в основном на различиях между функциями одной и нескольких переменных.

11.1. Графическая интерпретация

Важное различие между функциями одной и двух переменных состоит в их графической интерпретации. Если о поведении функции одной переменной мы судим по ее графику, изображенному на плоскости, то ***графическому изображению функции двух переменных соответствует поверхность в трехмерном пространстве.*** Это вносит некоторые коррективы в такие понятия, как возрастание и убывание функции двух переменных и ее экстремумы.

В общем случае ***уравнение поверхности*** в трехмерном пространстве[12] задается уравнением вида $F(x, y, z) = 0$. Если его удается разрешить относительно переменной z, то мы получим уравнение поверхности в виде функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Частным случаем поверхности в трехмерном пространстве является плоскость. Общее ***уравнение плоскости*** в трехмерном пространстве имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$. Здесь A, B, C и D — некоторые постоянные. При $C \neq 0$ данное уравнение определяет ***линейную функцию двух переменных*** $z = ax+by+d$, где $a = -A/C$, $b = -B/C$, $d = -D/C$.

[12] Этими вопросами занимается аналитическая геометрия. Всерьез углубляться в них мы не будем.

Кривая в трехмерном пространстве определяется как линия пересечения двух поверхностей, которые задаются уравнениями $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$. Это приводит к системе

$$F_1(x, y, z) = 0,$$
$$F_2(x, y, z) = 0.$$

Если одна из этих двух поверхностей является плоскостью, то линия их пересечения лежит в этой плоскости, а значит, кривая является плоской. Если же обе поверхности являются плоскостями, то линия их пересечения — прямая.

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ определяет сферу радиуса R с центром в начале координат. Отсюда легко находится двузначная функция двух переменных

$$z = z(x, y) = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

соответствующая верхней и нижней полусферам. Ее графическое представление показано на рис. 11.1.1.

Уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ определяет коническую поверхность[13], ось которой совпадает с координатной осью OZ. В сечении этой поверхности плоскостью, перпендикулярной ее оси, находится окружность радиуса z. Однозначная функция двух переменных

$$z = z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[13] В аналитической геометрии конусом называется тело, состоящее из двух одинаковых частей, неограниченно продолжающихся в пространстве. В школьном курсе стереометрии конусом обычно называют половину такого тела, имеющую конечную высоту.

соответствует верхней половине этой конической поверхности. Ее графическое представление показано на рис. 11.1.1. Нижней половине этой поверхности соответствует функция двух переменных

$$z = z(x,\, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

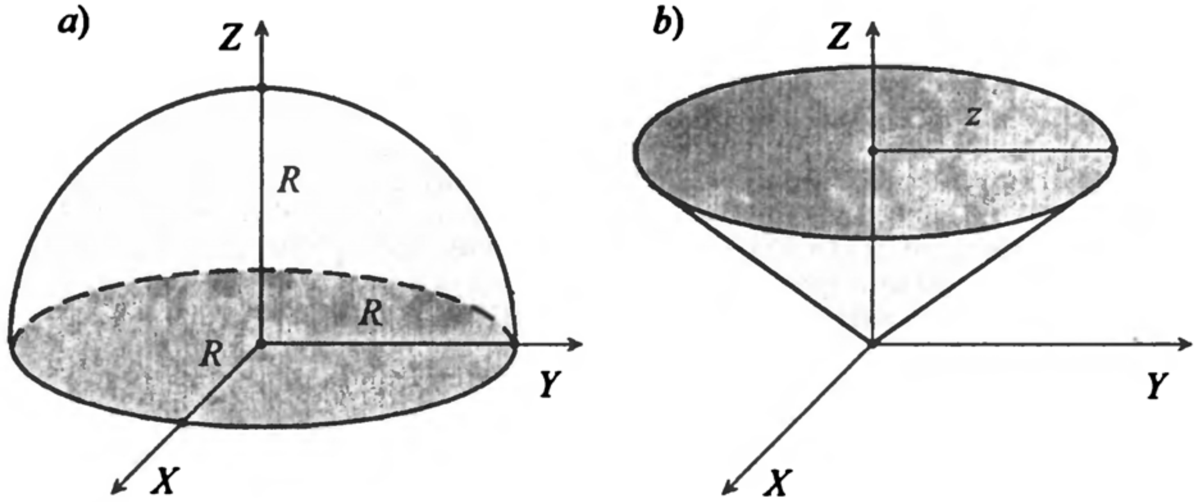


Рис. 11.1.1. Полусфера и половина конической поверхности.

a) Верхняя полусфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

b) Верхняя половина конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Не всякую поверхность в трехмерном пространстве нужно стараться представить в виде функции двух переменных вида $z = f(x,\, y)$. Иногда это не слишком удобно. Например, в случае конической поверхности, ось которой совпадает с координатной осью OX, удобнее рассматривать двузначную функцию

$$x = x(y, z) = \pm\sqrt{y^2 + z^2}.$$

Иногда же поверхность вообще невозможно представить в виде функции $z = f(x,\, y)$. Примером здесь может служить уравнение $x^2 + y^2 = R^2$, которое на плоскости определяет окружность, а в пространстве — цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с координатной осью OZ. Переменная z в это уравнение вообще не входит, поэтому нельзя представить эту поверхность в виде функции $z = f(x, y)$.

Графическое изображение функции трех и более переменных — практически неразрешимая задача: мы живем в трехмерном мире и не можем адекватно воспринимать картинки в пространстве, имеющем более трех измерений. Единственным исключением в этой области является возможность использования анимации, когда, скажем, четвертым измерением является время и на экране компьютера демонстрируется изменение трехмерного объекта во времени.

Минздрав предупреждает: настойчивые попытки представить себе тело в n-мерном пространстве при $n > 3$ опасны для вашего здоровья.

11.2. Дифференцирование

При дифференцировании функции нескольких независимых переменных по какой-то одной из них значения всех остальных переменных считаются фиксированными. Найденные таким образом производные и дифференциалы функции называются частными. Так, например, для функции двух переменных $f(x, y)$ ***частные производные*** определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

Частные производные функции двух переменных характеризуют скорость ее изменения вдоль одной из переменных, когда другая переменная зафиксирована. «Косые» производные используются здесь лишь для того, чтобы подчеркнуть, что речь идет о частных производных.

Частные дифференциалы находятся по следующим формулам:

$$d_x f = f'_x \, dx, \qquad d_y f = f'_y \, dy. \tag{11.2.2}$$

Здесь dx и dy — дифференциалы независимых переменных, совпадающие с их приращениями (см. замечания на стр. 198). Частные дифференциалы представляют собой главные части частных приращений функции двух переменных по одной из них, когда другая переменная зафиксирована.

Правила такого дифференцирования ничем не отличаются от правил дифференцирования функции одной переменной.

Аналогично вводятся понятия частных производных и дифференциалов высших порядков. Так, например, ***частными производными второго порядка*** функции $z = f(x, y)$ называются производные ее первых производных

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{11.2.3}$$

Производные z''_{xx} и z''_{yy} называются ***чистыми***, а производные z''_{yx} и z''_{xy} — ***смешанными***. Можно доказать, что значения смешанных производных второго порядка не зависят от порядка дифференцирования и равны между собой

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

если они непрерывны.

Пример 11.2.1.

Частные производные от функции $z = xy + \dfrac{x}{y}$ имеют следующие значения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 - \frac{1}{y^2}.$$

Рассмотренный нами подход к дифференцированию функций нескольких независимых переменных, связанный с фиксацией всех переменных, кроме одной, не всегда позволяет оценить поведение функций. Мы столкнемся с такой ситуацией, когда будем рассматривать вопрос об экстремумах функций нескольких переменных. В этом случае удобно использовать полные дифференциалы функций.

Полным дифференциалом функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ называется величина, которая находится по формуле

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy. \tag{11.2.4}$$

Он представляет собой главную часть полного приращения функции двух переменных, когда ни одна, ни другая переменная не зафиксированы.

Полным дифференциалом второго порядка функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ называется полный дифференциал ее полного дифференциала. Он находится следующим образом:

$$d^2 f = d(d\,f) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right)dy.$$

Отсюда получаем окончательно формулу

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \tag{11.2.5}$$

До сих пор мы предполагали, что все переменные функции являются независимыми. Рассмотрим теперь весьма важный для приложений случай, когда функция имеет вид

$$z = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{11.2.6}$$

где $x_k = x_k(t)$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. У этой функции только переменная t является независимой, а остальные аргументы зависят от t.

В этом случае формула, аналогичная формуле (11.2.4), для полного дифференциала первого порядка также применима[14], поэтому

$$dz = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n. \tag{11.2.7}$$

Разделив обе части равенства (11.2.7) на dt, получаем формулу для нахождения ***полной производной*** функции (11.2.6)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}. \tag{11.2.8}$$

Заметим, что формулу (11.2.5) для полного дифференциала второго порядка использовать в рассматриваемом случае нельзя, поскольку при ее выводе мы считали dx и dy постоянными.

Пример 11.2.2.

В гидродинамике полная производная температуры $T(t,\,x,\,y,\,z)$ жидкой частицы, которая в момент времени t находится в точке с координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, находится по формуле

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

[14] Мы уже обсуждали вопрос об инвариантности формы первого дифференциала в главе 9.

Пример 11.2.3.

Пусть $z = x^3 e^{y^2}$, где $y = y(x)$. Здесь в роли независимой переменной выступает x, поэтому полный дифференциал функции $z = z(x, y)$ имеет вид

$$dz = d\left(x^3\right) e^{y^2} + x^3 d\left(e^{y^2}\right) = 3x^2 e^{y^2} dx + 2x^3 y e^{y^2} dy =$$

$$= x^2 e^{y^2} (3dx + 2xydy).$$

Полная производная функции $z = z(x, y)$ имеет вид

$$\frac{dz}{dx} = x^2 e^{y^2} \left(3 + 2xy\frac{dy}{dx}\right).$$

11.3. Экстремумы

Фиксируя значения всех переменных функции

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

кроме одной, мы фактически работаем с функцией одной переменной, технику исследования которой на возрастание, убывание и экстремумы мы уже изучили. Если же не прибегать к фиксации переменных, то попытка распространения этих понятий даже на функции двух переменных сталкивается с серьезными проблемами. Сама постановка вопроса о возрастании и убывании функции двух переменных в некоторой области выглядит довольно бессмысленно, если мы не указываем, как в этой области должны меняться значения аргументов функции.

С экстремумами функции двух и более переменных дело обстоит гораздо лучше. Соображений здравого смысла вполне достаточно, чтобы распространить понятия максимума и минимума на функции нескольких переменных.

Сформулируем несколько утверждений, позволяющих разыскивать экстремумы функции нескольких переменных, опуская некоторые тонкие моменты и не давая доказательств.

Критической называется такая точка, в которой каждая частная производная первого порядка функции нескольких переменных равна нулю или не существует.

Экстремумы (максимумы или минимумы) функции нескольких переменных могут достигаться только в критических точках.

Последнее утверждение дает лишь необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума мы сформулируем только для функции двух переменных.

Пусть (x_0, y_0) — критическая точка функции $z = f(x, y)$. Введем следующие обозначения:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ при } x = x_0,\ y = y_0. \tag{11.3.1}$$

Если $B^2 - AC < 0$, то функция $z = f(x,y)$ в критической точке (x_0, y_0) имеет экстремум. Если при этом $A < 0$, то этот экстремум является максимумом, а если $A > 0$, то — минимумом.

Замечания.

1) Можно доказать, что функция $z = f(x, y)$ не имеет экстремума в критической точке (x_0, y_0), если выполня-

ется неравенство $B^2 - AC > 0$. Случай, когда выражение $B^2 - AC = 0$, не позволяет сделать вывод о наличии экстремума и требует дальнейших исследований.

2) Сравнивая формулы (11.2.5) и (11.3.1), можно заметить, что A, B и C являются коэффициентами полного дифференциала второго порядка в точке (x_0, y_0). Не слишком трудно показать, что условие $B^2 - AC < 0$ гарантирует строгую положительность $d^2 f$ в критической точке (x_0, y_0), а последнее обеспечивает наличие в ней экстремума функции $z = f(x, y)$.

3) Укажем еще на аналогию сформулированного здесь достаточного условия экстремума функции двух переменных и второго достаточного условия экстремума функции одной переменной.

Мы ограничились здесь лишь кратким изложением некоторых сведений об отыскании экстремумов функций нескольких переменных, вопреки тому, что они очень востребованы в различных областях науки и практики — экономике, финансовой математике, социологии и т. п. Они нужны всюду, где решаются ***задачи оптимизации***, требующие проводить, например, максимизацию доходов или минимизацию транспортных издержек. К сожалению, на практике такие задачи отнюдь не всегда удается решить аналитически, поэтому специалисты для их исследования часто прибегают к помощи компьютеров, разыскивая решения задач оптимизации с использованием методов приближенных вычислений.

Пример 11.3.1.

Рассмотрим эллиптический параболоид[15]

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (p, q > 0).$$

Найдем частные производные данной функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{p}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{q}.$$

Приравнивая их к нулю, видим, что рассматриваемая функция имеет единственную критическую точку $x_0 = = y_0 = 0$.

Частные производные второго порядка данной функции имеют вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{q}.$$

Они не зависят от x и y, что не мешает воспользоваться достаточным условием экстремума и увидеть, что величина $B^2 - AC = -1/pq < 0$. Значит, в критической точке $(0, 0)$ данная функция имеет экстремум. Поскольку при этом $A > 0$, это — минимум.

Соответствующая этой функции поверхность показана на рис. 11.3.1.

[15] Термины «парабалоид», «гиперболид» и «эллипсоид» в литературе часто подразумевают не только тела в трехмерном пространстве, но и поверхности этих тел.

Пример 11.3.2.

Рассмотрим гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \quad (p, q > 0).$$

Найдем частные производные данной функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{p}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{q}.$$

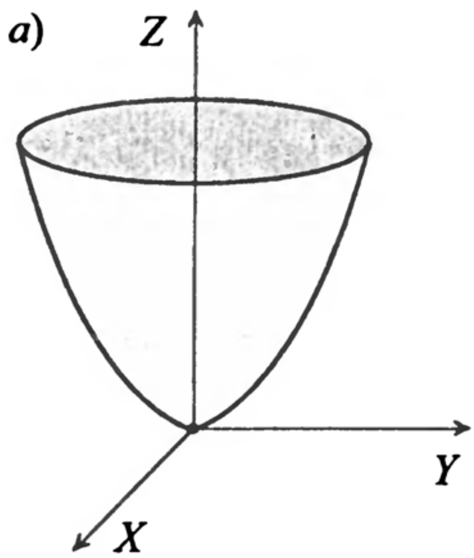
Приравнивая их к нулю, видим, что рассматриваемая функция имеет единственную критическую точку $x_0 = = y_0 = 0$.

Частные производные второго порядка данной функции имеют вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{q}.$$

Величина $B^2 - AC = 1/pq > 0$. Значит, в критической точке (0, 0) данная функция экстремума не имеет.

Соответствующая этой функции поверхность показана на рис. 11.3.1. На нем хорошо видно, что в критической точке данная функция имеет максимум по переменной y при фиксированном x и минимум по переменной x при фиксированном y. Такую критическую точку с седлообразным видом поверхности в ее окрестности считать экстремумом нельзя.



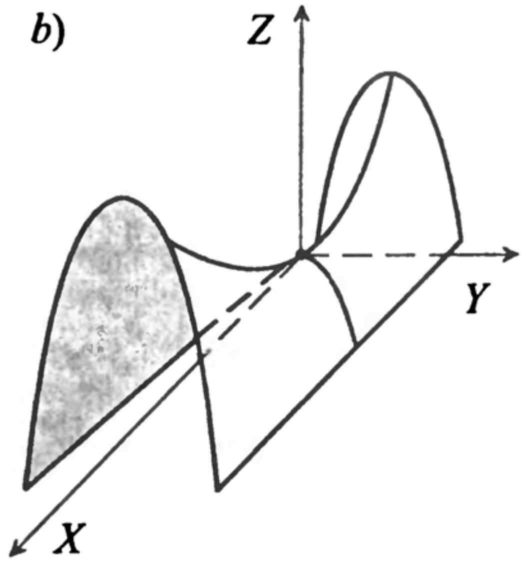


Рис. 11.3.1. Эллиптический и гиперболический параболоиды.

a) Эллиптический параболоид $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q} \quad (p,\, q > 0)$.

b) Гиперболический параболоид $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} \quad (p,\, q > 0)$.

11.4. Интегрирование

Теория кратных (двойных, тройных и т. д.) интегралов от функций нескольких переменных весьма развита, но ее изучение требует достаточно высокой математической квалификации. Мы эту теорию рассматривать не будем.

11.5. Упражнения

Найдите частные производные следующих функций.

11.5.1 $z = x^2 \cos y + y^2$. **11.5.2** $z = x^y$.

11.5.3 $z = x^3 y^2$. **11.5.4** $z = \dfrac{y}{3x - 2y}$.

Найдите полные дифференциалы второго порядка следующих функций.

11.5.5 $z = \dfrac{x^2}{y^2}$. **11.5.6** $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

Ответы.

11.5.1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -x^2 \sin y + 2y$.

11.5.2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

11.5.3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y$.

11.5.4. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{3y}{(3x-2y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3x}{(3x-2y)^2}$.

11.5.5. $d^2 z = \dfrac{2}{y^4}\left(y^2dx^2 - 4xydxdy + 3x^2dy^2\right)$.

11.5.6. $d^2 z = \dfrac{1}{\left(y+x^2\right)^2}\left[2\left(y - x^2\right)dx^2 - 4xdxdy - dy^2\right]$.

12. Ряды

Рядами называются суммы, имеющие бесконечное число слагаемых. Мы впервые сталкиваемся с рядами на уроках алгебры в школе, когда получаем формулу для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Напомним, что геометрическая прогрессия представляет собой последовательность чисел b_n, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной прогрессии число $q \neq 0$, называемое знаменателем прогрессии. Сумма первых n членов геометрической прогрессии находится по формуле

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Бесконечно убывающей называется геометрическая прогрессия, у которой бесконечно много слагаемых и знаменатель прогрессии $|q| < 1$. Переходя в формуле для S_n к пределу при $n \to \infty$, получаем формулу для суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = b_1 + b_2 + \ldots = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Мы видим, что для такой прогрессии сумма ряда конечна. Нетрудно догадаться, что это обеспечивается достаточно быстрым убыванием модулей слагаемых $b_n = b_1 q^{n-1}$ с ростом n при $|q| < 1$. Поэтому при больших n добавление новых слагаемых очень слабо влияет на значение суммы S_n.

Ряды, членами (слагаемыми) которых являются числа, называются ***числовыми***. Наряду с числовыми рядами в теории рядов изучаются ***функциональные ряды***, членами которых являются функции. С точки зрения приложений теории рядов, наибольший интерес представляют степенные функциональные ряды.

Мы будем рассматривать только вещественные ряды, но теория рядов применима и к комплексным рядам.

12.1. Сходимость ряда

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (12.1.1)$$

и так называемые ***частичные суммы*** этого ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \qquad (12.1.2)$$

Обратите внимание на то, что в (12.1.1) сумма содержит бесконечное число слагаемых, а в (12.1.2) — конечное число слагаемых.

► **Определение 12.1.1.**

Если существует конечный предел S последовательности частичных сумм S_n ряда (12.1.1)

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n, \qquad (12.1.3)$$

то этот ряд называется ***сходящимся***, а величина S называется ***суммой данного ряда***. Если же предел S не существует или является бесконечным, то ряд (12.1.1) называется ***расходящимся***.

Примеры 12.1.1.

1) Рассмотренная выше сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии является сходящимся рядом.

2) Ряд, образованный суммой натуральных чисел,
$$1+2+3+\ldots,$$
является расходящимся. В этом легко убедиться, если заметить, что частичная сумма S_n членов этого ряда представляет собой сумму n членов арифметической прогрессии с первым членом и разностью прогрессии, равными единице. Поэтому
$$S_n = \frac{1+n}{2}n \to \infty, \quad \text{когда } n \to \infty.$$

3) Ряд, общий член которого определяется формулой $u_n = (-1)^n$, расходится, т. к. его частичные суммы $S_n = 0$, если n — четное, и $S_n = -1$, если n — нечетное. Значит, последовательность частичных сумм не стремится ни к какому пределу.

Замечания.

1) Если ряд (12.1.1) является функциональным: $u_n = f_n(x)$, то, зафиксировав значение аргумента $x = x_0$, мы можем говорить о сходимости или расходимости ряда в точке $x = x_0$. Множество точек, в которых ряд сходится,

называется ***областью сходимости*** функционального ряда.

2) Нумерация членов ряда не обязательно должна начинаться с единицы. Иногда их удобнее нумеровать, начиная, скажем, с нуля.

Опираясь лишь на свойства пределов, очень просто доказать следующие элементарные свойства рядов.

1) Если все члены ряда умножить на некоторое число, отличное от нуля, то его сходимость не изменится: если он был сходящимся или расходящимся, то таковым и останется.

2) Если отбросить конечное число членов ряда, стоящих в его начале, или добавить в начало ряда конечное число новых членов, то сходимость ряда не изменится.

3) Сумма и разность двух сходящихся рядов образуют сходящиеся ряды.

4) Сумма и разность двух расходящихся рядов могут образовать как расходящийся, так и сходящийся ряд.

Пример 12.1.2.

В результате сложения двух одинаковых расходящихся рядов образуется расходящийся ряд, а в результате их вычитания — ряд, все члены которого равны нулю, т. е. сходящийся ряд.

Предостережение.

Еще со школьных времен мы помним правило: «от перестановки мест слагаемых сумма не меняется». Для конечных сумм это правило, разумеется, всегда выполняется. А вот для бесконечных сумм, каковыми и являются ряды, это правило выполняется не всегда[16]. Замечательный немецкий математик ***Георг Фридрих Бернхард Риман*** (1826–1866) доказал теорему, согласно которой, переставляя слагаемые некоторых рядов, можно изменить сумму ряда, сделав ее равной любому числу.

Теорема 12.1.1 (необходимое условие сходимости ряда).

Если ряд (12.1.1) сходится, то его n-й член стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

Доказательство.

Рассмотрим разность двух частичных сумм (12.1.2) ряда (12.1.1)

$$S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Теорема доказана.

[16] Если ряд, составленный из абсолютных величин членов некоторого ряда, сходится, то исхо́дный ряд называют ***абсолютно сходящимся***. Члены такого ряда менять местами можно. Сумма ряда при этом не меняется.

Следствием этой теоремы является достаточный признак расходимости ряда, который формулируется так: если n-й член ряда u_n не стремится к нулю, когда $n \to \infty$, то ряд расходится. Это утверждение мгновенно доказывается от противного.

Сформулируем без доказательства несколько достаточных признаков сходимости ряда. Они применимы и к функциональным рядам при фиксированном значении независимой переменной.

Теорема 12.1.2 (признак Даламбера).[17]

Предположим, что существует предел модуля отношения членов ряда (12.1.1)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если $q < 1$, то ряд сходится.

2) Если $q > 1$, то ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 12.1.3.

Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \dfrac{n}{3^n}$. Найдем

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n}\right| =$$

[17] *Жан ле Рон Даламбер* (1717–1783) — известный французский философ и математик.

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{3} < 1.$$

Применяя теорему 12.1.2, заключаем, что ряд сходится.

Теорема 12.1.3 (признак Коши).[18]

Предположим, что все члены ряда (12.1.1) неотрицательны $u_n \geqslant 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если $q < 1$, то ряд сходится.

2) Если $q > 1$, то ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример 12.1.4.

Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Найдем

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} < 1.$$

Применяя теорему 12.1.3, заключаем, что ряд сходится.

[18] ***Огюстен Луи Коши*** (1789–1857) — выдающийся французский математик.

Теорема 12.1.4 (первый признак сравнения).

Предположим, что имеются два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

причем их члены удовлетворяют неравенству

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Тогда из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда, а из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда.

Теорема 12.1.5 (второй признак сравнения).

Предположим, что члены ряда (12.1.1) u_n и члены числовой последовательности $v_n = 1/n^p$ являются при $n \to \infty$ бесконечно малыми одного порядка. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если $p > 1$, то ряд сходится.
2) Если $p \leqslant 1$, то ряд расходится.

► **Пример 12.1.5.**

Рассмотрим три ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

Применяя теорему 12.1.5, убеждаемся, что первый ряд расходится (т. к. для него $p = 1/2$), второй — тоже расходится (для него $p = 1$), а третий ряд сходится (для него $p = 2$).

12.2. Степенные ряды

Среди рядов различного вида особое место занимают функциональные ***степенные ряды***. Такие ряды имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (12.2.1)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots \qquad (12.2.2)$$

Здесь a_n — числовые коэффициенты, не зависящие от x, a — заданное число. Заметим, что ряд (12.2.2) заменой переменной $x' = x - a$ сводится к ряду (12.2.1).

Для исследования вопроса о сходимости ряда (12.2.1) нужно использовать один из достаточных признаков сходимости. Так, например, по признаку Даламбера ряд (12.2.1) сходится, если существует предел

$$q = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \text{ причем } q < 1.$$

Обозначив

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (12.2.3)$$

и предположив, что данный предел (конечный или бесконечный) существует, мы можем заключить, что ряд (12.2.1) сходится, когда $|x| < R$, и расходится, когда $|x| > R$.

Нетрудно заметить, что для ряда (12.2.2) формула (12.2.3) не меняется. Этот ряд сходится, когда $|x - a| < R$, и расходится, когда $|x - a| > R$.

Промежуток $(-R, R)$ называется ***интервалом сходимости степенного ряда***, а величина R — его ***радиусом сходимости***. Вопрос о сходимости ряда на концах интервала сходимости приходится для каждого конкретного ряда исследовать отдельно. Если окажется, что формула (12.2.3) дает значение $R = +\infty$, то ряд будет сходиться при любых значениях x. Если же окажется, что $R = 0$, то ряд будет расходиться при всех x, за исключением, быть может, точки $x = a$.

► Нашей основной целью при работе со степенными рядами будет далее такой подбор их коэффициентов a_n, чтобы ряд сходился, а его сумма равнялась некоторой заданной функции $f(x)$ при определенных значениях независимой переменной x. Такое представление $f(x)$ называется ***разложением функции в степенной ряд***.

12.3. Ряды Тейлора и Маклорена

Предположим, что функция $f(x)$ имеет конечную производную любого порядка в некоторой окрестности точки $x = a$.

Будем искать ее разложение в ряд по степеням $x - a$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \\ + a_4(x-a)^4 + a_5(x-a)^5 + \ldots \tag{12.3.1}$$

Дифференцируя обе части равенства (12.3.1), получаем

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \\ + 4a_4(x-a)^3 + 5a_5(x-a)^4 + \ldots \tag{12.3.2}$$

Полагая здесь $x = a$, находим коэффициент

$$a_1 = f'(a).$$

Дифференцируя обе части равенства (12.3.2), получаем

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + 4 \cdot 3a_4(x-a)^2 + \\ + 5 \cdot 4a_5(x-a)^3 + \ldots\ldots \tag{12.3.3}$$

Полагая здесь $x = a$, находим коэффициент

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2}.$$

Дифференцируя обе части равенства (12.3.3), получаем

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x-a) + \\ + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5(x-a)^2 + \ldots \tag{12.3.4}$$

Полагая здесь $x = a$, находим коэффициент

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2}.$$

Дифференцируя обе части равенства (12.3.4), получаем

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2a_5(x-a) + \ldots \tag{12.3.5}$$

Полагая здесь $x = a$, находим коэффициент

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Теперь уже нетрудно увидеть закономерность[19] и заключить, что коэффициент a_n находится по формуле

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$
$$\text{где } n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 \quad (0! = 1), \tag{12.3.6}$$

а разложение (12.3.1) имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{12.3.7}$$

Разложение (12.3.7) называется ***рядом Тейлора***[20].

В частном случае, когда $a = 0$, формула (12.3.7) принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{12.3.8}$$

Разложение (12.3.8) называется ***рядом Маклорена***[21].

Пример 12.3.1.

Построим разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$. Производная любого порядка этой функции равна $f^{(n)}(x) = e^x$, поэтому $f^{(n)}(0) = 1$ при $\forall n$. Отсюда следует, что разложение данной функции в ряд Маклорена (12.3.8) имеет вид

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{12.3.9}$$

---

[19] Ее легко доказать и строго, воспользовавшись методом математической индукции.

[20] ***Брук Тейлор*** (1685–1731) — английский математик.

[21] ***Колин Маклорен*** (1698–1746) — английский математик.

Применяя для отыскания радиуса сходимости этого разложения формулу (12.2.3), получаем

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Это означает, что ряд (12.3.9) сходится при $\forall x$.

Пример 12.3.2.

Построим теперь разложение той же функции $f(x) = e^x$ в ряд Тейлора.

$$e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(x-a)^n}{n!} =$$

$$= e^a \left[1 + (x-a) + \tfrac{(x-a)^2}{2!} + \tfrac{(x-a)^3}{3!} + \ldots\right].$$

Радиус сходимости данного разложения $R = \infty$. Как и следовало ожидать, при $a = 0$ это разложение в ряд Тейлора совпадает с разложением в ряд Маклорена.

Поскольку производные порядка $n+1$ и выше многочлена n-й степени тождественно равны нулю, разложение любого многочлена в ряд Маклорена или Тейлора будет содержать конечное число членов. ◄

Пример 12.3.3.

Построим разложение функции $f(x) = x^3$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$. Для данной функции

$$f(-1) = -1,\ f'(-1) = 3,\ f''(-1) = -6,\ f'''(-1) = 6,$$

а производные более высокого порядка тождественно равны нулю. Поэтому искомое разложение имеет вид

$$x^3 = -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3.$$

12.4. Приближенные формулы

Используя разложения различных функций в ряды Маклорена и сохраняя лишь несколько первых членов рядов, можно получить приближенные формулы, которые применимы при маленьких значениях $|x|$, поскольку отброшенные слагаемые малы по сравнению с теми членами рядов, которые сохраняются.

$e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$	$\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$
$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2$
$\sqrt[3]{1 \pm x} \approx 1 \pm \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9}$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{1 \pm x}} \approx 1 \mp \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{9}x^2$
$\sqrt[4]{1 \pm x} \approx 1 \pm \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{32}x^2$	$\dfrac{1}{\sqrt[4]{1 \pm x}} \approx 1 \mp \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{32}x^2$
$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$
$\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5$	$\operatorname{ctg} x \approx \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45}$
$\arcsin x \approx x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5$	$\operatorname{arctg} x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$

$(1 \pm x)^k \approx 1 \pm kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 \quad (k > 0)$
$(1 \pm x)^{-k} \approx 1 \mp kx + \frac{k(k+1)}{2}x^2 \quad (k > 0)$

Используя эти формулы, легко получить формулы и для некоторых других функций. Так, например, разложения для функций

$$a^x, \quad \log_a(1+x), \quad \arccos x$$

получаются из разложений для функций e^x, $\ln x$, $\arcsin x$ с использованием формул

$$a^x = e^{x \ln a}, \ \log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}, \ \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Эти формулы часто используются для быстрого получения оценок поведения функций не только математиками, но и специалистами в различных областях многих естественнонаучных дисциплин, а также инженерами.

Пример 12.4.1.

$$\text{Функция} \quad f(x) = x + \operatorname{tg} x - 2\sin x \approx \frac{2}{3}x^3 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Большое количество разложений различных функций в ряды можно найти в справочнике [3].

12.5. Упражнения

Выпишите первые три члена разложения в ряд Маклорена следующих функций.

12.5.1. $\dfrac{1}{1-2x}$ **12.5.2.** $\dfrac{1}{1+4x^2}$

12.5.3. 2^{3x} **12.5.4.** $\cos^2 x - \sin^2 x$

Студент ЮФУ Альфред Пузиков собрал все денежные купюры, которые были в доме, разложил их на столе в ряд и начал переставлять члены этого ряда, надеясь, что сумма ряда увеличится. Надежда не сбылась. Студент Пузиков был сильно разочарован. Он потерял веру в математику вообще и в теорему Римана в частности.

Ответы.

12.5.1. $1 + 2x + 4x^2 + \ldots$

12.5.2. $1 - 4x^2 + 16x^4 - \ldots$

12.5.3. $1 + 3x\ln 2 + \dfrac{9}{2}x^2\ln^2 2 + \ldots$

12.5.4. $1 - 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \ldots$

Подсказки: $2^{3x} = e^{3x\ln 2}$, $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

13. Векторная алгебра

Два центральных вопроса высшей алгебры связаны с отысканием корней многочленов и с решением систем линейных[22] алгебраических уравнений. Первый из них мы рассмотрели в главе 3. К изучению второго вопроса мы приступаем в данной главе. Нам понадобятся при этом такие инструменты исследования систем, как векторы, матрицы и определители.

13.1. Векторы

На уроках геометрии в школе вектор определяется как направленный отрезок на плоскости или в пространстве. Векторы, имеющие одинаковое направление и одинаковую длину, рассматриваются как одинаковые. Это позволяет считать, что любой вектор выходит из начала координат, а координаты точки, в которой находится конец вектора, называть координатами самого вектора. На плоскости вектор имеет две координаты, а в пространстве — три. Такой подход весьма нагляден и удобен при решении с помощью векторов различных геометрических задач, но нам сейчас понадобится обобщение понятия вектора, позволяющее работать с векторами, имеющими любое количество координат.

---

[22] В линейном уравнении все слагаемые содержат лишь первые степени неизвестных и не содержат произведений или отношений неизвестных, а также каких-либо функций от неизвестных.

Определение 13.1.1. ◄

Упорядоченная совокупность, содержащая n чисел

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

называется ***n–мерным вектором***. При этом числа

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

называются ***координатами*** или ***компонентами*** данного вектора.

Мы будем выделять векторы прямым полужирным шрифтом. В литературе их иногда выделяют также чертой или стрелкой над символом, представляющим собой векторную величину: $\bar{a}$ или $\vec{a}$.

Векторы $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ считаются ***равными*** тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое количество координат, которые попарно совпадают, т. е. $a_i = b_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, у которого все координаты равны нулю, называется ***нулевым вектором***.

Пусть векторы $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ имеют одинаковую размерность. Тогда для них определены следующие операции.

1) ***Суммой векторов*** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

2) ***Разностью векторов*** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1,\, a_2 - b_2,\, \ldots,\, a_n - b_n).$$

3) ***Произведением вектора*** $\mathbf{a}$ ***на скаляр***[23] k называется вектор

$$k\mathbf{a} = (ka_1,\, ka_2,\, \ldots,\, ka_n).$$

Пример 13.1.1.

Если $\mathbf{a} = (1,\, 2,\, 3,\, 4)$ и $\mathbf{b} = (5,\, -6,\, 7,\, 0)$, то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (6,\, -4,\, 10,\, 4),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-4,\, 8,\, -4,\, 4) \text{ и } 2\mathbf{a} = (2,\, 4,\, 6,\, 8).$$

Множество всех n-мерных векторов с вещественными координатами, для которых определены операции сложения двух векторов и умножения вектора на скаляр, называется ***n-мерным векторным пространством.***

Обратите внимание на то, что в этом определении присутствуют лишь две арифметические операции, допускающие простую геометрическую трактовку: сложение векторов на плоскости или в трехмерном пространстве можно выполнить по правилу параллелограмма, как это обычно делается на уроках геометрии в школе, а умножение вектора на число k можно трактовать как растяжение (при $|k| > 1$) или сжатие (при $|k| < 1$) вектора в k раз с изменением его направления на противоположное, когда $k < 0$.

[23] Скаляром называется величина, которая принимает числовые значения.

Операция вычитания двух векторов $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ в определении векторного пространства отсутствует, т. к. она является результатом умножения вектора $\mathbf{b}$ на минус единицу с последующим сложением $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Нет в этом определении и операций умножения и деления векторов. Конечно же, эти две операции легко определить подобно операции сложения, выполняя их покоординатно, но такие операции умножения и деления не находят хоть сколько-нибудь полезных приложений. Поэтому операция деления для векторов вообще не определена, а произведение векторов определяется совсем иначе, нежели их сложение.

В книгах, адресованных математикам, например, в классическом учебнике по высшей алгебре [11], обычно вводится система аксиом, определяющая понятие скалярного произведения[24] двух векторов. Слово «скалярное» указывает здесь на тот факт, что результатом данной операции является скаляр (число), а не вектор. Такой подход не только позволяет построить строгую теорию, но и готовит читателя к обобщению самих понятий вектора и векторного пространства. Они рассматриваются в весьма абстрактном разделе математики, который называется функциональным анализом. Нам скалярное произведение векторов требуется лишь как вспомогательный инструмент для работы с векторами и матрицами и изучения методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Поэтому мы дадим очень простое и понятное определение скалярного произведения.

[24] В высшей математике рассматриваются также векторные и смешанные произведения векторов, которые весьма полезны в аналитической геометрии, но мы их изучать не будем.

► **Определение 13.1.2.**

Скалярным произведением двух n-мерных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, которое находится по формуле

$$(\mathbf{a},\,\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \\ = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n. \qquad (13.1.1)$$

Пример 13.1.2.

Если $\mathbf{a} = (1,\,2,\,3,\,4)$ и $\mathbf{b} = (5,\,-6,\,7,\,0)$, то

$$(\mathbf{a},\,\mathbf{b}) = 1\cdot 5 + 2\cdot(-6) + 3\cdot 7 + 4\cdot 0 = 14.$$

► **Определение 13.1.3.**

Два n-мерных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю: $(\mathbf{a},\,\mathbf{b}) = 0$.

Мы рассматриваем только вещественные векторы, но отметим, тем не менее, что для комплексных векторов данное определение слегка изменится.

Пример 13.1.3.

Векторы $\mathbf{a} = (1,\,0,\,0,\,0)$ и $\mathbf{b} = (0,\,1,\,0,\,0)$ являются ортогональными.

► **Определение 13.1.4.**

Длиной n-мерного вектора $\mathbf{a}$ называется число, которое находится по следующей формуле:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a},\,\mathbf{a})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}. \qquad (13.1.2)$$

Пример 13.1.4.

Длина вектора $\mathbf{a} = (3,\ 0,\ -4,\ 0)$ равна

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

13.2. Матрицы

Определение 13.2.1. ◄

Упорядоченная совокупность $m \cdot n$ чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы

$$A = ((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая содержит m строк и n столбцов (колонок), называется ***матрицей*** порядка $m \times n$. При этом числа a_{ij} называются ***элементами*** матрицы $((a_{ij}))$.

Индексы i и j указывают номера строк и столбцов, в которых находятся элементы a_{ij}. Первый индекс $i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$ соответствует номеру строки, второй индекс $j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$ — номеру столбца.

Замечание.

Вектор можно рассматривать как частный случай матрицы, содержащей одну строку или один столбец. В первом случае он называется ***вектором-строкой***, во втором — ***вектором-столбцом***.

Две матрицы $((a_{ij}))$ и $((b_{ij}))$ считаются ***равными*** тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые порядки и их элементы попарно совпадают, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$.

Матрица $((a_{ij}))$, у которой все элементы равны нулю, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$, называется ***нулевой***.

Мы рассмотрим лишь те операции с матрицами, которые нам понадобятся при изучении методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Пусть матрицы $((a_{ij}))$ и $((b_{ij}))$ имеют одинаковые порядки. Тогда для них определены следующие операции.

1) ***Суммой матриц*** $((a_{ij}))$ и $((b_{ij}))$ называется матрица
$$((a_{ij})) + ((b_{ij})) = ((a_{ij} + b_{ij})).$$

2) ***Разностью матриц*** $((a_{ij}))$ и $((b_{ij}))$ называется матрица
$$((a_{ij})) - ((b_{ij})) = ((a_{ij} - b_{ij})).$$

3) ***Произведением матрицы*** $((a_{ij}))$ ***на скаляр*** k называется матрица
$$k((a_{ij})) = ((ka_{ij})).$$

4) ***Произведение матрицы на вектор*** определено только, когда количество столбцов матрицы совпадает с количеством координат вектора. Результатом умножения матрицы $((a_{ij}))$ порядка $m \times n$ на n-мерный вектор-столбец $\mathbf{x}$ является m-мерный вектор-столбец $\mathbf{y}$, координаты которого получаются в результате скалярного

умножения каждой строки матрицы $((a_{ij}))$ на вектор $\mathbf{x}$. Матричное уравнение $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ в координатной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}, \qquad (13.2.1)$$

где $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots m)$.

Пример 13.2.1.

В результате умножения матрицы порядка 2×3 на трехмерный вектор-столбец получается двумерный вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot7+2\cdot8+3\cdot9 \\ 4\cdot7+5\cdot8+6\cdot9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}.$$

Определение 13.2.2. ◄

Если у матрицы число строк m равно числу столбцов n, то она называется ***квадратной*** матрицей порядка n.

Определение 13.2.3. ◄

Диагональ квадратной матрицы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, идущая из левого верхнего в правый нижний угол матрицы, называется ее ***главной диагональю***.

► **Определение 13.2.4.**

Квадратная матрица порядка n, у которой на главной диагонали находятся единицы, а вне этой диагонали находятся нули, называется ***единичной матрицей*** порядка n.

Пример 13.2.2.

Единичная матрица третьего порядка имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.3. Определители

С каждой квадратной матрицей n-го порядка

$$A = ((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{13.3.1}$$

связана величина

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{13.3.2}$$

которая называется ***определителем (детерминантом) n-го порядка.*** Определитель записывается как матрица, но вместо круглых скобок заключается в прямые черточки. Принципиальное отличие определителя от матрицы заключается в том, что матрица представляет собой группу чисел, а значением определителя всегда является одно число, которое находится по определенным правилам.

Значением ***определителя первого порядка*** является единственный элемент, который содержит матрица, т. е. $\det A = a_{11}$.

Значение ***определителя второго порядка*** находится по формуле ◄

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (13.3.3)$$

т. е. от произведения его элементов, находящихся на главной диагонали[25], нужно отнять произведение его элементов, находящихся на другой диагонали.

Значение ***определителя третьего порядка*** находится следующим образом: ◄

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

[25] Главная диагональ определителя, как и у квадратной матрицы, идет из его левого верхнего угла в правый нижний угол.

Мы использовали здесь правило, согласно которому определитель третьего порядка можно разложить по элементам первой строки.

Данное правило применимо к определителям любого порядка $n > 1$, причем определитель n-го порядка можно разложить по элементам любой строки или любого столбца, сводя тем самым задачу к нахождению значений n определителей, порядок каждого из которых равен $n-1$. Рассмотрим без доказательства технику такого разложения.

Предположим, что определитель (13.3.2) требуется разложить по элементам i-й строки. Тогда значение этого определителя может быть найдено по формуле

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \qquad (13.3.4)$$

где M_{ij} — определители $(n-1)$-го порядка, которые называются ***минорами***. Они получаются из определителя $\det A$ после вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Суммирование здесь проводится по индексу j.

Если же требуется провести разложение по элементам j-го столбца, то нужно использовать формулу

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \qquad (13.3.5)$$

проводя суммирование по индексу i.

Пример 13.3.1.

Найдем значение определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

раскладывая его по элементам первой строки.

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0.$$

Найдем значение этого определителя еще раз, раскладывая его по элементам второго столбца.

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 5 \cdot (1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = 0.$$

Когда порядок определителя $n > 4$, проводить вычисление его значения без помощи компьютера затруднительно. В этом случае целесообразно прибегнуть к помощи какого-либо современного компьютерного математического пакета.

13.4. Системы линейных уравнений

Начнем с рассмотрения случая, когда система n линейных алгебраических уравнений содержит n неизвестных

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \qquad (13.4.1)$$

Такую систему в матричной форме можно представить в виде

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{13.4.2}$$

где квадратная матрица n-го порядка

$$A = ((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{13.4.3}$$

содержит коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений, а n-мерные векторы-столбцы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ содержат соответственно неизвестные системы и ее свободные члены

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{13.4.4}$$

Когда коэффициенты a_{ij} системы (13.4.1) и ее свободные члены b_i являются числами, а порядок системы $2 \leqslant n \leqslant 4$, решить систему не слишком сложно любым из тех методов, которые излагались в школе на уроках алгебры. Так, например, выражая из какого-либо уравнения системы одно из неизвестных x_j через остальные неизвестные и подставляя его во все другие уравнения системы, мы получим систему, порядок которой уменьшается на единицу. Продолжая этот процесс исключения неизвестных, мы придем в невырожденном случае к одному уравнению с одним неизвестным.

Пример 13.4.1.

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9,\\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6,\\ 2x_1 + x_2 + \ \ x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Из второго уравнения находим $x_1 = 6 + x_2 - 5x_3$. Подставляя это значение x_1 в первое и третье уравнения системы, получаем два уравнения с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} 4x_2 - 17x_3 &= -9,\\ x_2 - \ \ 3x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Из второго уравнения находим $x_2 = 3x_3 - 1$. Подставляя это значение x_2 в первое уравнение системы, получаем одно уравнение с одним неизвестным, которое позволяет найти $x_3 = 1$. Подставляя это значение в формулу для x_2, видим, что $x_2 = 2$. Подставляя найденные значения $x_3 = 1$ и $x_2 = 2$ в формулу для x_1, получаем $x_1 = 3$.

Умение решать конкретные системы линейных алгебраических уравнений не может, разумеется, полностью заменить умение проводить теоретический анализ всех возможных случаев, возникающих при исследовании таких систем. Этот анализ особенно востребован в математическом моделировании, когда коэффициенты системы и ее свободные члены зависят от параметров и требуется выяснить, каким образом параметры задачи влияют на решения системы. Именно таким анализом мы и будем заниматься в данном разделе учебника.

Определение 13.4.1.

Если система (13.4.2) имеет хотя бы одно решение, то она называется ***совместной***, иначе она называется ***несовместной***.

Пример 13.4.2.

Система второго порядка

$$x_1 + x_2 = 3,$$
$$x_1 + x_2 = 4$$

является несовместной, т. к. сумма двух чисел не может одновременно равняться трем и четырем.

Определение 13.4.2.

Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то система (13.4.2) называется ***однородной***, иначе она называется ***неоднородной***.

Очевидно, что у однородной системы всегда есть нулевое решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, которое часто называют ***тривиальным решением***.

Пример 13.4.3.

Система линейных алгебраических уравнений

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$
$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

является однородной. Замечая, что второе уравнение данной системы можно сократить на двойку, заключаем, что эта система имеет бесконечно много решений, у которых $x_1 = -2x_2$, а x_2 — любое число. Среди этих решений, разумеется, находится и тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0$.

Случай $n = 1$

При $n = 1$ система (13.4.1) превращается в одно уравнение с одним неизвестным

$$a_{11}x_1 = b_1. \tag{13.4.5}$$

Возможны три случая.

1) Если $a_{11} \neq 0$, то уравнение (13.4.5) имеет единственное решение $x_1 = b_1/a_{11}$.

2) Если $a_{11} = b_1 = 0$, то уравнение (13.4.5) имеет бесконечно много решений, поскольку любое значение x_1 удовлетворяет уравнению $0 \cdot x_1 = 0$.

3) Если $a_{11} = 0$ и $b_1 \neq 0$, то уравнение (13.4.5) решений не имеет.

Случай $n = 2$

При $n = 2$ система (13.4.1) содержит два уравнения с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{13.4.6}$$

Сведем систему (13.4.6) к двум уравнениям, каждое из которых содержит лишь одно неизвестное. Для этого сначала умножим первое уравнение на a_{22}, а второе — на $-a_{12}$ и сложим полученные равенства. Затем умножим первое уравнение исходной системы на $-a_{21}$, а второе — на a_{11} и сложим полученные равенства. Тогда система (13.4.6) примет вид

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1 a_{22} - a_{12} b_2,\\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.\end{aligned} \tag{13.4.7}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{13.4.8}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,\\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.\end{aligned} \tag{13.4.9}$$

Тогда система (13.4.7) принимает вид

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \Delta_1,\\ \Delta x_2 &= \Delta_2.\end{aligned} \tag{13.4.10}$$

Возможны три случая.

1) Если определитель $\Delta \neq 0$, то система (13.4.6) имеет единственное решение, представимое в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{13.4.11}$$

2) Если все три определителя $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (13.4.6) имеет бесконечно много решений, поскольку любые значения x_1 и x_2 удовлетворяют системе (13.4.10).

3) Если определитель $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$, то система (13.4.6) решений не имеет, поскольку хотя бы одно уравнение системы (13.4.10) не может быть решено.

Представление решения системы (13.4.6) по формулам (13.4.11) называется ***правилом Крамера***[26]. Оно применимо и в случае, когда система (13.4.6) является однородной, т. е. $b_1 = b_2 = 0$. При этом $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, а значит, в случае, когда $\Delta \neq 0$, единственным решением однородной системы является тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0$, а в случае, когда $\Delta = 0$, однородная система, помимо тривиального решения, имеет бесконечно много нетривиальных решений.

Пример 13.4.4.

Решая систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

по правилу Крамера, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 5,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$$

---

[26] ***Габриэль Крамер*** (1704—1752) — швейцарский математик.

Поскольку $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{5}{5} = 1, \quad x_2 = \frac{10}{5} = 2.$$

Пример 13.4.5.

Решая систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 1, \\ 6x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

по правилу Крамера, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, система имеет бесконечно много решений, которые можно представить в следующем виде: x_1 — любое, $x_2 = 3x_1 - 1$. Причина наличия у рассматриваемой системы бесконечного множества решений очевидна: сократив второе уравнение на двойку, мы сразу увидим, что уравнения системы совпадают, т. е. мы фактически имеем одно уравнение с двумя неизвестными.

Пример 13.4.6.

Решая систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 1, \\ 6x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

по правилу Крамера, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

Поскольку $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, рассматриваемая система не имеет решений. Искать значение определителя Δ_2 не нужно, т. к. оно ни на что не влияет. Причину отсутствия у рассматриваемой системы решений легко установить: умножив первое уравнение на двойку, мы увидим, что в данной системе величина $6x_1 - 2x_2$ должна одновременно равняться двойке и тройке, а это невозможно.

Пример 13.4.7.

Определитель однородной системы

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 0, \\ 6x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, помимо тривиального, система имеет бесконечно много нетривиальных решений. Все решения этой системы можно представить в виде $x_2 = 3x_1$, где x_1 — любое. Второе уравнение системы после сокращения на двойку совпадает с первым.

Пример 13.4.8.

Определитель однородной системы

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 0, \\ 6x_1 - \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

зависит от параметра λ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 6 - 3\lambda.$$

Если $\lambda \neq 2$, то $\Delta \neq 0$, и система имеет только тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0$. Если же $\lambda = 2$, то система совпадает с той, которая была рассмотрена в предыдущем примере, а значит, у нее имеется бесконечное множество решений.

Пример 13.4.9.

Как и в предыдущем примере, определитель однородной системы

$$\begin{aligned} \lambda x_1 - x_2 &= 0, \\ 9x_1 - \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

зависит от параметра λ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 9 & -\lambda \end{vmatrix} = 9 - \lambda^2.$$

Если $\lambda \neq \pm 3$, то $\Delta \neq 0$, и система имеет только тривиальное решение. Если $\lambda = 3$, то система имеет бесконечное множество решений, у которых x_1 — любое, а $x_2 = 3x_1$. Если же $\lambda = -3$, то система имеет бесконечное множество решений, у которых x_1 — любое, а $x_2 = -3x_1$.

Пример 13.4.10.

Определитель однородной системы

$$\begin{aligned} \lambda x_1 - x_2 &= 0, \\ 9x_1 + \lambda x_2 &= 0 \end{aligned}$$

зависит от параметра λ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 9 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9,$$

но при любых вещественных λ этот определитель отличен от нуля, и система имеет только тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0$.

Случай $n = 3$

При $n = 3$ система (13.4.1) содержит три уравнения с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{13.4.12}$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{13.4.13}$$

Как и в случае системы второго порядка, систему (13.4.12) можно свести к системе, в которой каждое уравнение содержит лишь одно неизвестное.

Чтобы получить уравнение, содержащее только x_1, нужно первое уравнение этой системы умножить на $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, второе — на $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, а третье — на $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$. После этого полученные уравнения нужно сложить. Вероятно, эта операция выглядит несколько таинственной, но о том, что действовать нужно именно так, можно догадаться, разложив определитель Δ по элементам первого столбца. Мы увидим, что величины, на которые мы умножаем уравнения, с точностью до знака совпадают с минорами, фигурирующими в этом разложении, а поэтому после суммирования уравнений перед x_1 появляется коэффициент Δ. Слагаемые, содержащие x_2 и x_3, как несложно проверить, сокращаются в результате приведения подобных.

Чтобы получить уравнение, содержащее только x_2, нужно первое уравнение системы умножить на $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$, второе — на $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$, а третье — на $a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$. После этого полученные уравнения нужно сложить. Величины, на которые мы умножаем уравнения, с точностью до знака совпадают с минорами, фигурирующими в разложении определителя Δ по элементам второго столбца. После приведения подобных перед x_2 появляется коэффициент Δ, а слагаемые, содержащие x_1 и x_3, сокращаются.

Чтобы получить уравнение, содержащее только x_3, нужно первое уравнение системы умножить на $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$, второе — на $a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$, третье — на $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и сложить полученные уравнения. Величины, на которые мы умножаем уравнения, с точностью до знака совпадают с минорами, фигурирующими в разложении определителя Δ по элементам третьего столбца. После приведения подобных перед x_3 появляется коэффициент Δ, а слагаемые, содержащие x_1 и x_2, сокращаются.

Результатом этих операций является система

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta_1, \\ \Delta x_2 &= \Delta_2, \\ \Delta x_3 &= \Delta_3, \end{aligned} \qquad (13.4.14)$$

где определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3 имеют вид

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Возможны три случая.

1) Если определитель $\Delta \neq 0$, то система (13.4.12) имеет единственное решение, представимое в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (13.4.15)$$

2) Если все четыре определителя $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система (13.4.12) имеет бесконечно много решений, поскольку любые значения x_1, x_2, и x_3 удовлетворяют системе (13.4.14).

3) Если определитель $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей $\Delta_1 \neq$ $\neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$ или $\Delta_3 \neq 0$, то система (13.4.12) решений не имеет, поскольку хотя бы одно уравнение системы (13.4.14) не может быть решено.

Как и в случае системы второго порядка, представление решения системы (13.4.12) по формулам (13.4.15) называется правилом Крамера.

Пример 13.4.11.

Решая систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + \ x_3 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 - \ x_3 &= -5, \\ 3x_1 + \ x_2 + 4x_3 &= \ \ 6 \end{aligned}$$

по правилу Крамера, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 34, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -68,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 102.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

Пример 13.4.12.

Решая неоднородную систему

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5, \\ 3x_1 - \ x_2 \qquad &= -6 \end{aligned}$$

по правилу Крамера, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, система имеет бесконечно много решений, которые можно представить в виде x_1 — любое, $x_2 = 3x_1 + 6$, $x_3 = 7x_1 + 17$. Причиной наличия бесконечного числа решений в данном примере является то, что третье уравнение системы является суммой первого и второго уравнений, т. е. фактически мы имеем два уравнения с тремя неизвестными.

Пример 13.4.13.

Решая неоднородную систему

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5, \\ 3x_1 - \ \ x_2 \qquad &= -7 \end{aligned}$$

по правилу Крамера, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ -7 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Поскольку $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, система решений не имеет. Это можно было установить и без использования правила Крамера, поскольку сумма первого и второго уравнений дает уравнение $3x_1 - x_2 = -6$, что противоречит третьему уравнению системы.

Пример 13.4.14.

Решая однородную систему

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \end{aligned}$$

по правилу Крамера, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\Delta = 0$, а у однородных систем всегда $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, рассматриваемая система имеет бесконечно много решений, которые можно представить в виде x_1 — любое, $x_2 = 3x_1$, $x_3 = 7x_1$.

Общий случай

Правило Крамера, установленное нами для систем второго и третьего порядка, применимо и в случае систем произвольного порядка с квадратными матрицами

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Это правило предписывает найти значение определителя данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и n определителей Δ_j, которые получаются из определителя Δ путем замены его j-го столбца элементами b_i вектора-столбца свободных членов системы.

При этом возможны три случая.

1) Если определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, представимое в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; \dots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

2) Если все определители $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

3) Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей $\Delta_j \neq 0$, то система решений не имеет.

Когда система является однородной (т. е. все свободные члены $b_i = 0$), все определители $\Delta_j = 0$, поэтому остаются лишь две возможности.

1) Если $\Delta \neq 0$, то тривиальное решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

является единственным решением однородной системы.

2) Если $\Delta = 0$, то однородная система имеет бесконечно много решений.

Правило Крамера не позволяет решать системы, у которых количество уравнений отличается от количества неизвестных. От этого недостатка свободен ***метод Гаусса***.

Мы не будем подробно разбирать теоретические основы данного метода (они подробно описаны в учебнике [11]), ограничившись изложением его основной идеи и показав технику использования простейшего варианта метода Гаусса на примерах.

Две системы уравнений называются ***эквивалентными***, если они обладают одними и теми же решениями или обе не имеют решений. В результате следующих преобразований какой-либо системы получается эквивалентная система.

1) Уравнения системы можно менять местами.

2) Любое уравнение системы можно умножить или разделить на число, отличное от нуля.

3) Любое одно из двух уравнений системы можно заменить на их сумму или разность.

Основная идея метода Гаусса состоит в том, чтобы с помощью указанных преобразований системы линейных алгебраических уравнений сначала исключить неизвестное x_1 из всех уравнений системы, кроме первого уравнения. Затем исключить неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго. Потом исключить неизвестное x_3 из всех уравнений системы, кроме первого, второго и третьего, и т. д. Этот процесс называется ***прямым ходом метода Гаусса***. Если при его реализации возникает уравнение вида $0 = 0$, то его нужно просто отбросить и продолжать вычисления. Если же возникает уравнение вида $0 = b$, где $b \neq 0$, то следует сделать вывод, что система решений не имеет. Прямой ход метода Гаусса завершается, когда мы добираемся до последнего уравнения системы.

После этого начинается ***обратный ход метода Гаусса***. Если последнее уравнение системы имеет вид $ax_n = b$, то мы находим из него неизвестное $x_n = b/a$ и подставляем его значение в предпоследнее уравнение преобразованной системы. Затем мы находим из предпоследнего уравнения неизвестное x_{n-1} и подставляем значения x_n и x_{n-1} в предшествующее уравнение и т. д. Этот процесс завершается, когда мы добираемся до первого уравнения и находим из него x_1.

Если же последнее уравнение системы содержит k неизвестных, то любые $k-1$ из них мы будем считать свободными неизвестными, которые могут принимать любые значения. Система в этом случае имеет бесконечное множество решений. Чтобы найти эти решения, нужно выразить из последнего уравнения одно неизвестное, которое не является свободным, через $k-1$ свободных неизвестных и подставить его значение в предпоследнее уравнение системы. Затем из этого уравнения нужно выразить еще одно неизвестное через $k-1$ свободных неизвестных и т. д. Этот процесс завершается, когда мы добираемся до первого уравнения системы. В результате этих действий все остальные неизвестные будут выражены через свободные неизвестные.

Алгоритм метода Гаусса может показаться слишком запутанным, но к нему нужно просто привыкнуть, решив этим методом несколько примеров.

Пример 13.4.15.

Решим методом Гаусса систему линейных алгебраических уравнений, решение которой мы уже нашли в примере 13.4.11 с помощью правила Крамера.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + \ x_3 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 - \ x_3 &= -5, \\ 3x_1 + \ x_2 + 4x_3 &= \ \ 6. \end{aligned}$$

Начинаем прямой ход метода Гаусса. Для его реализации удобно, когда коэффициент a_{11} равен единице. Этого всегда можно добиться, если поменять местами уравнения системы или разделить первое уравнение на a_{11}. В рассматриваемом примере нам достаточно поменять местами первое и второе уравнения системы.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ x_3 &= -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + \ x_3 &= -1, \\ 3x_1 + \ x_2 + 4x_3 &= \ \ 6. \end{aligned}$$

На первом шаге прямого хода метода Гаусса исключаем неизвестное x_1 из второго и третьего уравнений системы. Для этого второе уравнение системы заменим на разность второго уравнения и первого уравнения, умноженного на 2, а третье уравнение системы заменим на разность третьего уравнения и первого уравнения, умноженного на 3.

После этого преобразования система принимает вид

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ x_3 &= -5, \\ - 7x_2 + 3x_3 &= \ \ 9, \\ - 5x_2 + 7x_3 &= \ \ 21. \end{aligned}$$

Разделим третье уравнение на -5 и поменяем местами второе и третье уравнения системы. Получим

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \quad x_3 &= -5, \\ x_2 - 1,4x_3 &= -4,2, \\ -7x_2 + \quad 3x_3 &= \quad 9. \end{aligned}$$

На втором шаге прямого хода метода Гаусса исключаем неизвестное x_2 из третьего уравнения системы. Для этого третье уравнение системы заменим на сумму третьего уравнения и второго уравнения, умноженного на 7. После этого преобразования система принимает вид

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \quad x_3 &= -5, \\ x_2 - 1,4x_3 &= -4,2, \\ -6,8x_3 &= -20,4. \end{aligned}$$

На этом прямой ход метода Гаусса завершается. Начинаем обратный ход метода Гаусса. Из третьего уравнения получаем $x_3 = 3$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $x_2 = 0$. Подставляя найденные значения x_3 и x_2 в первое уравнение, получаем $x_1 = -2$. Система имеет единственное решение.

Пример 13.4.16.

Решим методом Гаусса следующую систему

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \quad 5x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 - \quad x_3 &= 1, \\ 5x_1 - x_2 - 13x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Начинаем прямой ход метода Гаусса. Исключим неизвестное x_1 из второго и третьего уравнений системы.

Для этого второе уравнение системы заменим на разность второго уравнения и первого уравнения, а третье уравнение системы заменим на разность третьего уравнения и первого уравнения, умноженного на 5.

После этого преобразования система принимает вид

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1, \\ -2x_2 + 4x_3 &= 0, \\ -6x_2 + 12x_3 &= 0. \end{aligned}$$

После сокращения на 2 и 6 второе и третье уравнения совпадут. Отбрасывая одно из них, получаем

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1, \\ x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

На этом прямой ход метода Гаусса завершается. Начинаем обратный ход метода Гаусса. Из второго уравнения получаем $x_2 = 2x_3$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем $x_1 = 3x_3 + 1$. Неизвестное x_3 может принимать любые значения, поэтому система имеет бесконечно много решений. Причина этого свойства рассматриваемой системы станет понятной, если заметить, что третье уравнение исходной системы представляет собой сумму первого уравнения, умноженного на 2, и второго уравнения, умноженного на 3, т. е. является следствием первых двух уравнений системы.

Методы Гаусса и Крамера позволяют решать системы любого порядка, но при больших значениях n приходится проводить довольно трудоемкие вычисления.

На практике в этом случае целесообразно воспользоваться компьютером. Любой современный математический пакет позволяет это сделать достаточно легко.

13.5. Комплексный случай

Рассмотренный нами материал данной главы почти без изменений переносится на случай комплексных векторов, матриц, определителей и систем линейных алгебраических уравнений. Мы ограничимся в этом вопросе решением одного примера.

Пример 13.5.1.

Решим методом Гаусса следующую систему

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 - x_2 &= 4i. \end{aligned}$$

Заменяя второе уравнение разностью второго и первого уравнений, получаем

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ -2x_2 &= 4i - 2. \end{aligned}$$

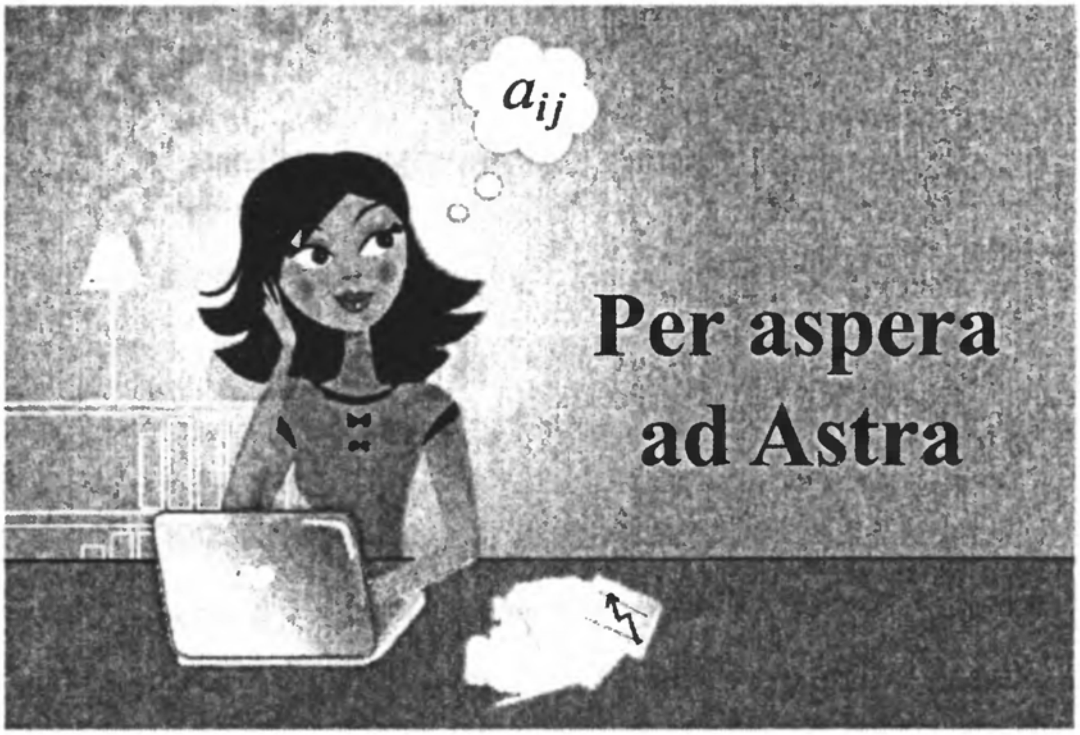
Из второго уравнения получаем $x_2 = 1-2i$. Подставляя это значение в первое уравнение, видим, что $x_1 = 1+2i$. Система имеет единственное решение.

13.6. Упражнения

Решите следующие системы линейных уравнений.

13.6.1.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= -38, \\ 5x_1 - 3x_2 - 7x_3 &= 24, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= -34. \end{aligned}$$

13.6.2.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} &= 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$



Читатели, которые не испугались трудностей, продираясь сквозь дебри определений, присутствующих в данной главе, и добрались до этого места нашего учебника, награждаются званием «***Почетный читатель***».

13.6.3.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - \ \ 2x_3 &= \ \ 1,\\ x_1 + \ \ x_2 - 10x_3 &= 21,\\ x_1 - 4x_2 \qquad\quad &= -4. \end{aligned}$$

13.6.4.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 13,\\ 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 38,\\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 31. \end{aligned}$$

Ответы.

13.6.1. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $x_3 = -7$.

13.6.2. Решений нет.

13.6.3. $x_1 = 8x_3 + 16$, $x_2 = 2x_3 + 5$, x_3 — любое.

13.6.4. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

14. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения связывают между собой функцию, которую требуется найти, и ее производные. Они являются мощной основой для построения математических моделей в самых различных областях науки. Когда неизвестная функция зависит только от одной переменной, дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, иначе оно называется ***уравнением в частных производных***. Мы будем изучать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

14.1. Основные понятия

► **Определение 14.1.1.**

Обыкновенным дифференциальным уравнением n–го порядка называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (14.1.1)$$

Здесь $y = y(x)$ — неизвестная функция, $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ — ее производная n-го порядка, F — заданная функция, непрерывная по всем своим переменным.

Определение 14.1.2.

Решением дифференциального уравнения (14.1.1) называется функция $y(x)$, которая удовлетворяет следующим требованиям.

1) Она определена и дифференцируема n раз в некотором интервале, возможно, бесконечном, $(-\infty, +\infty)$ либо полубесконечном $(-\infty, a)$ или $(a, +\infty)$.
2) Ее производная n-го порядка непрерывна в этом интервале.
3) Она удовлетворяет уравнению (14.1.1) при любых значениях независимой переменной x из области определения данной функции.

Это определение требует пояснения. Во-первых, оно не запрещает рассматривать в качестве решения дифференциального уравнения функцию, которая определена на замкнутом промежутке $[a, b]$, т. к. в этом случае она определена и в интервале (a, b). Во-вторых, если мы нашли функцию $y(x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению, но не определена в некоторой точке x_0 интервала (a, b), то мы просто должны считать, что нашли два решения дифференциального уравнения, одно из которых определено в интервале (a, x_0), а другое — в интервале (x_0, b).

Общее решение уравнения (14.1.1) зависит от n произвольных постоянных. Когда эти постоянные принимают определенные значения, из общего решения обыкновенного дифференциального уравнения получаются все его ***частные решения***. ◄

Пример 14.1.1.

Простейшее уравнение второго порядка $y'' = 0$, как нетрудно убедиться дважды интегрируя обе части этого равенства, имеет общее решение $y = c_1 x + c_2$. Функции $y = 0$ и $y = 2x$ представляют собой частные решения данного уравнения, которые получаются из общего решения соответственно при $c_1 = c_2 = 0$ и при $c_1 = 2$, $c_2 = 0$.

В литературе об отыскании общего решения дифференциального уравнения часто говорят как об ***интегрировании этого уравнения***. В этом нет ничего удивительного, т. к. во многих случаях отыскание решений дифференциальных уравнений сводится к нахождению неопределенных интегралов. Это означает, в частности, что далеко не всегда можно представить решение дифференциального уравнения в аналитическом виде с помощью элементарных функций.

Графики частных решений дифференциального уравнения называются ***интегральными кривыми (интегральными линиями)***. В примере 14.1.1 все интегральные линии — различные прямые.

Чтобы выделить из общего решения дифференциального уравнения n-го порядка (14.1.1) какое-либо частное решение, мы должны рассматривать это уравнение совместно с n дополнительными условиями, задаваемыми обычно в виде равенств, которые могут содержать значения неизвестной функции и некоторого количества ее производных в одной или нескольких точках.

Если эти дополнительные условия заданы в одной точке $x = x_0$, то они называются ***начальными условиями (начальными данными)***, а совокупность дифференциального уравнения и дополнительных условий называется ***задачей Коши***[27] ***(задачей с начальными данными)***. Задачи Коши обычно возникают при исследовании эволюции различных процессов во времени. Начальные условия в этом случае определяют состояние процесса в начальный момент времени.

Пример 14.1.2.

Следующая задача является задачей Коши.

$$y'' = x, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

После интегрирования уравнения получаем

$$y' = x^2/2 + c_1.$$

Интегрируя еще раз, находим общее решение дифференциального уравнения

$$y = x^3/6 + c_1 x + c_2.$$

Начальные условия позволяют получить значения постоянных $c_1 = c_2 = 0$, а значит, решение задачи Коши имеет вид $y = x^3/6$.

Если же дополнительные условия заданы в нескольких точках, то они называются ***краевыми (граничными) условиями***, а совокупность дифференциального уравнения и дополнительных условий называется ***краевой задачей***. Краевые

[27] ***Огюстен Луи Коши*** (1789–1857) — выдающийся французский математик.

задачи часто возникают при исследовании каких-либо стационарных (не зависящих от времени) состояний различных процессов.

Пример 14.1.3.

Следующая задача является краевой задачей.

$$y'' = x, \qquad y(1) = y(2) = 0.$$

Как и в предыдущем примере, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = x^3/6 + c_1 x + c_2$. Из краевых условий получаем линейную алгебраическую систему для определения постоянных c_1 и c_2

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{6},$$
$$2c_1 + c_2 = -\frac{4}{3}.$$

Решая эту систему, находим $c_1 = -7/6$, $c_2 = 1$. Следовательно, искомое решение краевой задачи имеет вид $y = x^3/6 - 7x/6 + 1$.

Заметим, что во многих разделах математической физики нередко возникают начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, для которых задаются и начальные условия (для времени), и граничные условия (для пространственных переменных).

Найти общее решение уравнения (14.1.1) для произвольной функции F невозможно. Мы будем рассматривать далее лишь некоторые методы решения простейших дифференциальных уравнений, общие решения которых можно представить в аналитическом виде с помощью элементарных функций.

14.2. Разделение переменных

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = f_1(x)f_2(y) \tag{14.2.1}$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными***. У него функция $f_1(x)$ зависит только от x, а функция $f_2(y)$ — только от y. Заменяя в этом уравнении производную y' на отношение дифференциалов и умножая обе части уравнения на dx, получим

$$dy = f_1(x)f_2(y)dx.$$

Разделив обе части уравнения на $f_2(y)$, получим уравнение

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,$$

у которого переменные разделились: все величины, зависящие от y, находятся в левой части уравнения, а все величины, зависящие от x, — в его правой части. Беря интегралы от левой и правой частей этого уравнения, получаем окончательно

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx. \tag{14.2.2}$$

Мы свели задачу к отысканию двух неопределенных интегралов.

► **Замечание.**

В процессе решения уравнения (14.2.1) мы делили обе его части на $f_2(y)$. Если при каком-либо значении $y = y_0 = const$ функция $f_2(y)$ обращается в ноль, использованный нами метод приводит к потере решения $y = y_0$, т. к. для такой функции $y' = 0$. Поэтому случай $f_2(y) = 0$ при решении конкретного примера нужно рассматривать отдельно.

Отметим еще, что уравнения вида $y' = f(x)$ и $y' = f(y)$ являются частными случаями уравнения с разделяющимися переменными (14.2.1), причем при разделении переменных во втором из них могут быть потеряны решения.

Пример 14.2.1.

Уравнение $y' = \sqrt{y}$ допускает разделение переменных. Заменим y' на отношение дифференциалов, умножим уравнение на dx и разделим его на $\sqrt{y}$. Уравнение примет вид

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получаем

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(x + c),$$

а значит, искомое решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{4}(x + c)^2.$$

Нетрудно заметить, что при разделении переменных в результате деления на $\sqrt{y}$ было потеряно решение $y = 0$.

Пример 14.2.2.

Уравнение $y' = xy$ является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Заменим y' на отношение дифференциалов, умножим уравнение на dx и разделим его на y. Уравнение примет вид

$$\frac{dy}{y} = xdx.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получаем

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx.$$

Отсюда следует, что

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная. Но тогда

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+c_1} = c_2 e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \text{где} \quad c_2 = e^{c_1} > 0.$$

Следовательно,

$$y = c_3 e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \text{где} \quad c_3 = \pm c_2 \neq 0.$$

Учитывая, что при разделении переменных мы потеряли решение $y = 0$, получаем окончательно

$$y = ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

где c — произвольная постоянная. При $c = 0$ данное решение содержит потерянное ранее решение $y = 0$.

Когда студент Вандерфулов И. И. не смог на экзамене решить уравнение $y' = y$, доцент Солеков В. В. мягко пожурил его, тяжело вздохнул и поставил троечку.

14.3. Уравнения вида $y' = f(y/x)$

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{14.3.1}$$

решается с помощью замены функции $y(x)$ новой неизвестной функцией

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}. \tag{14.3.2}$$

Поскольку при этом $y(x) = xu(x)$, получаем $y'(x) = u(x) + xu'(x)$. Следовательно, уравнение (14.3.1) принимает вид

$$u + xu' = f(u). \tag{14.3.3}$$

Это уравнение допускает разделение переменных.

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x|. \tag{14.3.4}$$

Сумеем ли мы найти значение интеграла, находящегося в этой формуле, зависит от вида функции $f(u)$. Если нам удастся это сделать и мы найдем функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению (14.3.4), то мы сумеем найти и решение $y(x) = xu(x)$ исходного дифференциального уравнения (14.3.1).

Следует учитывать, что при разделении переменных могут быть потеряны решения исходного уравнения.

Пример 14.3.1.

Уравнение $xy' = x+2y$ после деления на x приводится к виду (14.3.1). Полагая $y(x) = xu(x)$, получаем уравнение $xu' = 1 + u$, которое после разделения переменных принимает вид

$$\frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$\ln|1+u| = \ln|x| + \ln c_1,$$

где $c_1 > 0$ — произвольная постоянная. Мы поместили ее под знак логарифма, чтобы окончательный ответ не получился громоздким. Нетрудно видеть, что $|1+u| = c_1|x|$, а значит, $u = c_2x - 1$, где $c_2 \neq 0$ — произвольная постоянная. При разделении переменных мы делили обе части уравнения на $1+u$. Это привело к потере частного решения $u = -1$, но оно содержится в найденном нами общем решении, когда $c_2 = 0$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = cx^2 - x$, где c — произвольная постоянная.

Пример 14.3.2.

Уравнение $x^2y' = y^2 + yx$ после деления на x^2 приводится к виду (14.3.1). Полагая $y(x) = xu(x)$, получаем уравнение $xu' = u^2$, которое после разделения переменных принимает вид

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$u = -\frac{1}{\ln|x| + c},$$

где c — произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$$y = -\frac{x}{\ln|x| + c}.$$

При разделении переменных мы потеряли решение $u = 0$, которому соответствует решение $y = 0$ исходного уравнения.

14.4. Линейные уравнения первого порядка

В общем случае ***линейное дифференциальное уравнение первого порядка*** может быть записано в виде

$$A(x)y' + B(x)y = f(x), \tag{14.4.1}$$

где коэффициенты $A(x)$, $B(x)$ и свободный член $f(x)$ мы будем считать заданными непрерывными функциями. Предполагая, что $A(x) \neq 0$, разделим обе части этого уравнения на $A(x)$. Получим уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{14.4.2}$$

где $P(x) = B(x)/A(x)$, $Q(x) = f(x)/A(x)$.

Наряду с неоднородным уравнением (14.4.2) мы будем рассматривать соответствующее ему однородное уравнение

$$y' + P(x)y = 0. \tag{14.4.3}$$

1) Уравнение (14.4.3) допускает разделение переменных

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная[28]. Отсюда следует, что

$$|y| = c_2 e^{-\int P(x)dx},$$

где $c_2 = e^{c_1} > 0$ — произвольная постоянная. Избавляясь от модуля и учитывая, что при разделении переменных мы потеряли решение $y = 0$, получаем окончательно общее решение однородного уравнения (14.4.3) в виде

$$y = ce^{-\int P(x)dx}, \tag{14.4.4}$$

где c — произвольная постоянная.

[28] Мы могли бы считать, что произвольная постоянная содержится внутри интеграла, но здесь удобнее выделить ее в виде отдельного слагаемого.

2) Решение неоднородного уравнения (14.4.2) мы будем искать в виде

$$y = z(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{14.4.5}$$

где неизвестную функцию $z(x)$ требуется выбрать так, чтобы функция (14.4.5) являлась решением неоднородного уравнения (14.4.2). Данный прием называется ***методом вариации произвольной постоянной.*** Происхождение этого названия нетрудно угадать, сравнив формулы (14.4.4) и (14.4.5). Чтобы из (14.4.4) получить (14.4.5), нужно в (14.4.4) постоянную величину c заменить на переменную величину $z(x)$.

Подставляя (14.4.5) в (14.4.2), получаем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $z(x)$

$$z'e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Отсюда находим производную $z'(x)$

$$z' = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

а затем и функцию $z(x)$

$$z(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c, \tag{14.4.6}$$

где c — произвольная постоянная.

3) Подставляя (14.4.6) в (14.4.5), получаем окончательно общее решение неоднородного уравнения (14.4.2) в виде суммы общего решения $y_1(x)$ однородного уравнения (14.4.3) и частного решения $y_0(x)$ неоднородного уравнения (14.4.2)

$$\begin{gathered} y(x) = y_1(x) + y_0(x), \text{ где } y_1 = ce^{-\int P(x)dx}, \\ y_0 = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \end{gathered} \tag{14.4.7}$$

Формулы (14.4.7), надо признать, выглядят несколько устрашающе. Причиной тому в первую очередь является наличие в них интеграла от функции $P(x)$. Если при решении конкретного примера его удастся найти, то формулы существенно упростятся. Запоминать эти формулы наизусть нет ни малейшей необходимости. Нужно просто запомнить идею использованного нами метода и применять ее при решении примеров.

Пример 14.4.1.

Уравнение $xy' = 3y + x^2$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка.

1) Найдем сначала общее решение соответствующего ему однородного уравнения $xy' = 3y$. Это уравнение допускает разделение переменных

$$\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$\ln|y| = \ln\left|c_1 x^3\right|,$$

где $c_1 \neq 0$ — произвольная постоянная. Отсюда следует, что общее решение однородного уравнения имеет вид $y_1 = cx^3$, где c — произвольная постоянная. Мы учли здесь потерянное при разделении переменных решение $y = 0$.

2) Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = z(x)x^3$. После подстановки этого значения y

в исходное уравнение получаем $x^2 z' = 1$. Отсюда следует, что $z = -1/x$. Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y_0 = -x^2$.

3) Складывая общее решение y_1 однородного уравнения и частное решение y_0 неоднородного уравнения, получаем искомое общее решение неоднородного уравнения в виде $y = cx^3 - x^2$.

14.5. Линейные уравнения второго порядка

В этом разделе мы будем изучать теорию и методику решений линейных уравнений второго порядка, но все наши рассмотрения переносятся с минимальными изменениями на случай линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

В общем случае ***линейное дифференциальное уравнение второго порядка*** может быть записано в виде

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \qquad (14.5.1)$$

где коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и свободный член $f(x)$ мы будем считать заданными непрерывными функциями.

Наряду с неоднородным уравнением (14.5.1) мы будем рассматривать соответствующее ему однородное уравнение

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0. \qquad (14.5.2)$$

Определение 14.5.1. ◄

Выражение $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, где c_1 и c_2 — некоторые постоянные, называется ***линейной комбинацией*** функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Определение 14.5.2. ◄

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, не равные нулю тождественно, называются ***линейно независимыми***, если из того, что их линейная комбинация $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$ при $\forall x$, следует, что $c_1 = c_2 = 0$. Иначе они называются ***линейно зависимыми*** функциями.

Пример линейно независимых функций дают функции $y_1 = e^{k_1x}$ и $y_2 = e^{k_2x}$ при $k_1 \neq k_2$. Если их линейная комбинация $c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} = 0$ при $\forall x$, то $c_1e^{(k_1-k_2)x} = -c_2$ при $\forall x$. При $k_1 \neq k_2$ левая часть этого равенства меняется с изменением x, а правая — остается постоянной. Это возможно только при условии, что $c_1 = c_2 = 0$.

Пример линейно зависимых функций дают функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = ke^x$ при $k \neq 0$. Их линейная комбинация $c_1e^x + c_2ke^x = 0$ при $\forall x$, когда $c_1 + c_2k = 0$, а это возможно, например, при $c_1 = -k$ и $c_2 = 1$.

Теорема 14.5.1. ◄

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (14.5.2) можно представить в виде линейной комбинации

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x). \qquad (14.5.3)$$

Здесь y_1 и y_2 — линейно независимые решения уравнения (14.5.2), а c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

► **Теорема 14.5.2.**

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (14.5.1) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_0(x). \tag{14.5.4}$$

Здесь y_1 и y_2 — линейно независимые решения однородного уравнения (14.5.2), y_0 — частное решение неоднородного уравнения (14.5.1), а c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Доказать, что функции (14.5.3) и (14.5.4) являются решениями соответственно уравнений (14.5.2) и (14.5.1), легко. Для этого достаточно просто подставить эти функции в уравнения и убедиться, что уравнения превращаются в тождества. А вот доказать тот факт, что эти функции содержат все решения уравнений, гораздо сложнее. Мы разбирать это доказательство не будем.

Мы ограничимся далее изучением случая, когда коэффициенты уравнений (14.5.1) и (14.5.2) являются постоянными.

Однородное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (14.5.5)$$

Здесь $a \neq 0$, b и c — заданные постоянные.

Нашей целью является отыскание двух линейно независимых решений этого уравнения. Когда они будут найдены, мы сможем, согласно теореме 14.5.1, записать общее решение уравнения (14.5.5) в виде их линейной комбинации.

Решение уравнения (14.5.5) мы будем искать в виде

$$y = e^{kx}. \qquad (14.5.6)$$

Подставляя функцию (14.5.6) в уравнение (14.5.5), получаем так называемое ***характеристическое уравнение***

$$ak^2 + bk + c = 0, \qquad (14.5.7)$$

решив которое, мы найдем значения k, при которых функция (14.5.6) является решением уравнения (14.5.5).

Возможны три случая.

1) Когда дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$, характеристическое уравнение (14.5.7) имеет два различных вещественных корня k_1 и k_2, которым соответствуют два линейно независимых решения

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad \text{и} \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

однородного уравнения (14.5.5). Их линейная комбинация

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

является общим решением уравнения (14.5.5).

Пример 14.5.1.

Однородному дифференциальному уравнению

$$2y'' - 7y' + 3y = 0$$

соответствует характеристическое уравнение

$$2k^2 - 7k + 3 = 0,$$

имеющее два различных вещественных корня $k_1 = 1/2$ и $k_2 = 3$. Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{3x}$.

2) Когда дискриминант $D = b^2 - 4ac = 0$, характеристическое уравнение (14.5.7) имеет два одинаковых вещественных корня $k = k_1 = k_2 = -b/2a$, которым соответствует одно решение $y_1 = e^{kx}$ однородного уравнения (14.5.5).

Покажем, что функция $y_2 = xe^{kx}$ также является решением уравнения (14.5.5). Для этого найдем $y'_2 = (1+kx)e^{kx}$ и $y''_2 = k(2+kx)e^{kx}$, а затем подставим найденные значения функции y_2 и ее производных в уравнение (14.5.5). После сокращения на e^{kx} получим соотношение $x(ak^2+bk+c)+2ak+b = 0$, которое выполняется, поскольку k является корнем характеристического уравнения и $k = -b/2a$.

Таким образом, мы нашли два решения

$$y_1 = e^{kx} \text{ и } y_2 = xe^{kx}$$

однородного уравнения (14.5.5). Легко проверить, что они являются линейно независимыми, поэтому их линейная комбинация $y = (c_1 + c_2x)e^{kx}$ является общим решением уравнения (14.5.5).

Пример 14.5.2.

Однородному дифференциальному уравнению

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

соответствует характеристическое уравнение

$$k^2 + 10k + 25 = 0,$$

имеющее два одинаковых вещественных корня $k_1 = k_2 = -5$. Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид $y = (c_1 + c_2x)e^{-5x}$.

3) Когда дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$, характеристическое уравнение (14.5.7) имеет два различных комплексно сопряженных корня $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha = -b/2a$, $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/2a$.

В рассматриваемом случае функции

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

являются решениями однородного уравнения (14.5.5). Мы докажем этот факт для функции y_1, предоставив читателю возможность доказать его для функции y_2 и проверить линейную независимость этих двух функций.

Нетрудно видеть, что

$$y_1' = e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x),$$

$$y_1'' = e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2)\cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x].$$

Подставляя значения функции y_1 и ее производных в уравнение (14.5.5), получаем после сокращения на $e^{\alpha x}$ соотношение

$$[a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c]\cos \beta x - \beta(2a\alpha + b)\sin \beta x = 0,$$

которое превращается в тождество, если подставить в него значения α и β.

Таким образом, мы нашли два линейно независимых решения однородного уравнения (14.5.5). Их линейная комбинация

$$y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)e^{\alpha x}$$

является общим решением уравнения (14.5.5).

Пример 14.5.3.

Однородному дифференциальному уравнению

$$18y'' + 12y' + 11y = 0$$

соответствует характеристическое уравнение

$$18k^2 + 12k + 11 = 0,$$

имеющее два комплексно сопряженных корня

$$k_{1,2} = -\tfrac{1}{3} \pm i\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \left(c_1 \cos \tfrac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right) e^{-\frac{x}{3}}.$$

Неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$ay'' + by' + cy = f(x). \tag{14.5.8}$$

Здесь $a \neq 0$, b и c — заданные постоянные, а $f(x)$ — заданная непрерывная функция.

Для отыскания частного решения данного уравнения воспользуемся ***методом вариации произвольных постоянных***. Согласно этому методу мы должны искать частное решение уравнения (14.5.8) в виде[29]

$$y = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x). \tag{14.5.9}$$

Здесь функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ мы должны выбрать так, чтобы (14.5.9) удовлетворяло уравнению (14.5.8).

Легко видеть, что

$$y' = z'_1y_1 + z_1y'_1 + z'_2y_2 + z_2y'_2.$$

Потребуем, чтобы производные функций $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяли уравнению

$$z'_1y_1 + z'_2y_2 = 0, \tag{14.5.10}$$

тогда производная y' принимает вид

$$y' = z_1y'_1 + z_2y'_2. \tag{14.5.11}$$

[29] Сравните (14.5.9) и (14.5.3).

Вторая производная

$$y'' = z_1'y_1' + z_1y_1'' + z_2'y_2' + z_2y_2''.$$

Потребуем, чтобы производные функций $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяли уравнению

$$z_1'y_1' + z_2'y_2' = \frac{f(x)}{a}, \tag{14.5.12}$$

тогда вторая производная y'' принимает вид

$$y'' = z_1y_1'' + z_2y_2'' + \frac{f(x)}{a}. \tag{14.5.13}$$

Подставляя (14.5.9), (14.5.11) и (14.5.13) в уравнение (14.5.8), получаем соотношение

$$z_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + z_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + f(x) = f(x),$$

которое является тождеством, поскольку функции y_1 и y_2 удовлетворяют однородному уравнению (14.5.5).

Таким образом, решая линейную систему (14.5.10), (14.5.12), мы находим функции $z_1'(x)$ и $z_2'(x)$. Затем путем интегрирования (если это возможно) находим функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$, причем возникающие при этом две произвольные постоянные можно взять равными нулю, поскольку мы ищем частное решение неоднородного уравнения. После этого частное решение неоднородного уравнения (14.5.8) записывается в виде

$$y_0 = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x). \tag{14.5.14}$$

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (14.5.8), согласно теореме 14.5.2, находится по формуле (14.5.4).

Пример 14.5.4.

Неоднородному уравнению $y'' - 3y' - 10y = 7$ соответствует характеристическое уравнение $k^2 - 3k - 10 = 0$, имеющее два различных вещественных корня $k_1 = 5$ и $k_2 = -2$. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-2x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = z_1(x)e^{5x} + z_2(x)e^{-2x},$$

где функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ мы в соответствии с формулами (14.5.10) и (14.5.12) должны выбрать так, чтобы они удовлетворяли системе

$$\begin{aligned} e^{5x}z_1' + \ e^{-2x}z_2' &= 0, \\ 5e^{5x}z_1' - 2e^{-2x}z_2' &= 7. \end{aligned}$$

Решая эту линейную алгебраическую систему, например, по правилу Крамера, получаем $z_1' = e^{-5x}$ и $z_2' = -e^{2x}$, а тогда

$$z_1 = -e^{-5x}/5 \ \text{ и } \ z_2 = -e^{2x}/2,$$

поэтому частное решение неоднородного уравнения представимо в виде $y_0 = -7/10$, а общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-2x} - 7/10$.

Замечание.

В этом примере свободный член $f(x) = const = 7$. Если попытаться искать частное решение неоднородного уравнения в виде $y_0 = const$, то сразу получается, что $y_0 = -7/10$, поскольку в этом случае $y_0' = y_0'' = 0$.

Пример 14.5.5.

Неоднородному дифференциальному уравнению

$$y'' - 6y' + 58y = 7e^{3x}$$

соответствует характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 58 = 0,$$

имеющее два комплексно сопряженных корня

$$k_1 = 3 + 7i,\ k_2 = 3 - 7i.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид $y = e^{3x}(c_1 \cos 7x + c_2 \sin 7x)$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = e^{3x}[z_1(x) \cos 7x + z_2(x) \sin 7x],$$

где функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ мы, в соответствии с формулами (14.5.10) и (14.5.12), должны выбрать так, чтобы они удовлетворяли системе

$$z_1' e^{3x} \cos 7x + z_2' e^{3x} \sin 7x = 0,$$
$$z_1' e^{3x}(3 \cos 7x - 7 \sin 7x) + z_2' e^{3x}(3 \sin 7x + 7 \cos 7x) = 7e^{3x}$$

Решая эту линейную алгебраическую систему, например, по правилу Крамера, получаем

$$z_1' = -\sin 7x \ \text{ и } \ z_2' = \cos 7x,$$

а тогда

$$z_1 = \frac{1}{7} \cos 7x \ \text{ и } \ z_2 = \frac{1}{7} \sin 7x,$$

поэтому частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y_0 = e^{3x}/7$, а общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 7x + c_2 \sin 7x + 1/7).$$

14.6. Упражнения

Решите следующие дифференциальные уравнения.

14.6.1. $xy' - y = 0.$

14.6.2. $(1 + x^2)\, y' = 1.$

14.6.3. $\sqrt[3]{x}y' = \sqrt[3]{y}.$

14.6.4. $xy' + y = 0.$

14.6.5. $yy' - x = 0.$

14.6.6. $x^2y' + y = 0.$

14.6.7. $2y'\sqrt{x} - y = 0.$

14.6.8. $x^2y' + y^2 = 0.$

14.6.9. $y'x^3 - 2y = 0.$

14.6.10. $x^3y' - \sqrt{y} = 0.$

14.6.11. $xy' = x + y.$

14.6.12. $xy' + x + y = 0.$

14.6.13. $y' + xy - x = 0.$

14.6.14. $y'' - y' = 6y.$

14.6.15. $y'' + 4y' - 5y = 0.$

14.6.16. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

14.6.17. $y'' + 5y' + 4y = 0.$

14.6.18. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

14.6.19. $y'' - 6y' + 9y = 0.$

14.6.20. $y'' - 2y' - 3y = 0.$

14.6.21. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

14.6.22. $y'' + 4y = 0.$

14.6.23. $y'' + 25y = 21 \sin 2x.$

14.6.24. $y'' - 2y' + y + 1 - 2x = 0.$

Ответы.

14.6.1. $y = cx.$

14.6.2. $y = \operatorname{arctg} x + c.$

14.6.3. $y = \pm\left(x^{\frac{2}{3}} + c\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y = 0.$

14.6.4. $y = c/x.$

14.6.5. $y = \pm\sqrt{x^2 + c}.$

14.6.6. $y = ce^{1/x}.$

14.6.7. $y = ce^{\sqrt{x}}.$

14.6.8. $y = x/(cx - 1), \quad y = 0.$

14.6.9. $y = ce^{-1/x^2}.$

14.6.10. $y = (c - 1/4x^2)^2, \quad y = 0.$

14.6.11. $y = x\ln|x| + cx.$

14.6.12. $y = c/x - x/2.$

14.6.13. $y = ce^{-x^2/2} + 1.$

14.6.14. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}.$

14.6.15. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-5x}.$

14.6.16. $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}.$

14.6.17. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-4x}.$

14.6.18. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{4x}.$

14.6.19. $y = (c_1 + c_2x)e^{3x}.$

14.6.20. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}.$

14.6.21. $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x).$

14.6.22. $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x.$

14.6.23. $y = c_1\cos 5x + c_2\sin 5x + \sin 2x.$

14.6.24. $y = (c_1 + c_2x)e^{x} + 2x + 3.$

15. Математические модели

Моделирование заключается в замене изучаемого реального объекта, процесса или явления его образом (моделью), который проще, чем изучаемая реальность, но сохраняет некоторые ее важные свойства. Когда исследование модели осуществляется математическими методами, говорят о ***математическом моделировании.***

Примерами моделей могут служить фигурки людей и животных, которые дети лепят из пластилина. Эти модели, разумеется, математическими не являются, но они помогают детям изучать реальность. А вот, скажем, системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие движения жидкости, являются прекрасным инструментом для математического моделирования реальных гидродинамических течений, что многократно подтверждалось натурными наблюдениями и экспериментами.

Математическое моделирование зародилось давно, вероятно, почти одновременно с возникновением математики. Долгое время сферой его применения являлись в основном различные разделы физики. Положение кардинально изменилось в середине XX века, когда появились первые компьютеры. Быстрое развитие кибернетики и информационных технологий дало ученым и инженерам возможность хранить и обрабатывать огромные объемы информации в самых различных областях человеческой деятельности. Немаловажную роль сыграли здесь и потребности специалистов, работающих в военной сфере: возможность предварительной компьютерной «обкатки» математических моделей ядерных взрывов и полетов баллистических ракет не только сэкономила колоссальные средства и материальные ресурсы, но и избавила человечество от весьма обширных негативных экологических последствий большого количества ядерных испытаний.

Математическая физика, механика сплошных сред, механика систем с конечным числом степеней свободы, электродинамика, радиофизика, теория катастроф, биология, экология, химия, экономика, социология — вот далеко не полный перечень научных дисциплин, в которых математическое моделирование позволило ученым существенно продвинуться в изучении природы и общества.

Среди огромного разнообразия методов, которые применяются для математического моделирования, выделяются методы, использующие дифференциальные уравнения. Их особая роль связана прежде всего с возможностью изучать с их помощью различные эволюционные процессы. Основным математическим аппаратом при этом являются динамические системы — системы обыкновенных[30] дифференциальных уравнений первого порядка с переменными или постоянными коэффициентами.

В этой главе мы рассмотрим ряд основополагающих понятий теории динамических систем и несколько примеров их исполь-

[30] Нередко и системы уравнений в частных производных можно рассматривать как динамические системы в некоторых функциональных пространствах.

зования для математического моделирования некоторых природных процессов.

15.1. Динамические системы

Определение 15.1.1. ◀

Динамической системой n–го порядка называется система дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \tag{15.1.1}$$

Здесь t — время (независимая переменная), $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ — n-мерная вектор-функция (вектор, координатами которого являются функции), которую мы будем предполагать непрерывной.

Точка над переменной здесь и далее используется для обозначения производной этой переменной по времени.

Решение $\mathbf{x}(t)$ системы (15.1.1) зависит от n произвольных постоянных, найти которые можно, если задать n начальных условий, определяющих значение вектора неизвестных $\mathbf{x}$ в начальный момент времени $t = t_0$, в виде

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \tag{15.1.2}$$

В координатной форме задача Коши (15.1.1)–(15.1.2) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\\
\dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).
\end{aligned} \tag{15.1.3}$$

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \ldots,\ x_n(t_0) = x_n^0. \tag{15.1.4}$$

Любое обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной,

$$x^{(n)} = \varphi\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right) \tag{15.1.5}$$

сводится к динамической системе n-го порядка

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = x_3,\\
&\ldots\\
&\dot{x}_{n-1} = x_n,\\
&\dot{x}_n = \varphi(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}),
\end{aligned}$$

где

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}_1 = x',\ x_3 = \dot{x}_2 = x'',\ \ldots,\ x_n = \dot{x}_{n-1} = x^{(n-1)}.$$

Отсюда следует, что все результаты, полученные для динамической системы (15.1.1), переносятся на дифференциальное уравнение (15.1.5).

В книгах по дифференциальным уравнениям обычно немало внимания уделяется теоремам существования и единственности решения задачи Коши (15.1.1)–(15.1.2). Эти вопросы являются весьма тонкими и сложными, мы ими заниматься не будем.

► **Определение 15.1.2.**

Динамическая система (15.1.1) называется ***автономной***, если ее правая часть не зависит от времени t

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{15.1.6}$$

► В дальнейшем мы будем иметь дело только с автономными динамическими системами. При работе с ними за начало отсчета времени можно принимать $t_0 = 0$, поскольку замена $t' = t - t_0$ не меняет вид системы (15.1.6). Мы далее иногда будем пользоваться такой возможностью.

Пример 15.1.1.

Дифференциальное уравнение $y'' - \omega^2 y = 0$ сводится к автономной динамической системе

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \omega^2 x_1,$$

где $x_1 = y$, $x_2 = y'$.

В § 1 замечательной книги В. И. Арнольда [1] (она адресована тем, для кого математика — профессия) приводится следующее определение: множество всевозможных состояний процесса называется его ***фазовым пространством***. Там же имеется прекрасный пример использования надлежащим образом выбранного фазового пространства для получения элементарного решения любопытной задачи о двух экипажах.

Для динамической системы n-го порядка простейший вариант выбора фазового пространства — использование n-мерного евклидова пространства, в котором на координатных осях откладываются значения координат n-мерного вектора $\mathbf{x}$. В этом случае при $n = 1$ фазовое пространство — прямая, при $n = 2$ — плоскость и т. д. Вообще же подходящий выбор фазового пространства может в некоторых случаях значительно упростить интерпретацию результатов математического моделирования.

Отдельные точки фазового пространства называются ***фазовыми точками.*** Они определяют положение решения $x(t)$ динамической системы в фазовом пространстве в фиксированный момент времени t. Когда время t меняется, фазовая точка, вообще говоря, перемещается в фазовом пространстве вдоль некоторой кривой, которая называется ***фазовой траекторией.***

Графическое изображение всех случаев типичного поведения фазовых траекторий при различных начальных условиях называется ***фазовым портретом динамической системы.*** Нередко на фазовых портретах рисуются стрелки, указывающие направления движения фазовых точек по фазовым траекториям с ростом времени t. Человек в состоянии адекватно воспринимать графические изображения лишь в двумерном (на плоскости) или трехмерном пространстве. Поэтому фазовые портреты динамических систем, порядок которых больше трех, обычно строятся в виде проекций фазовых траекторий на координатные плоскости.

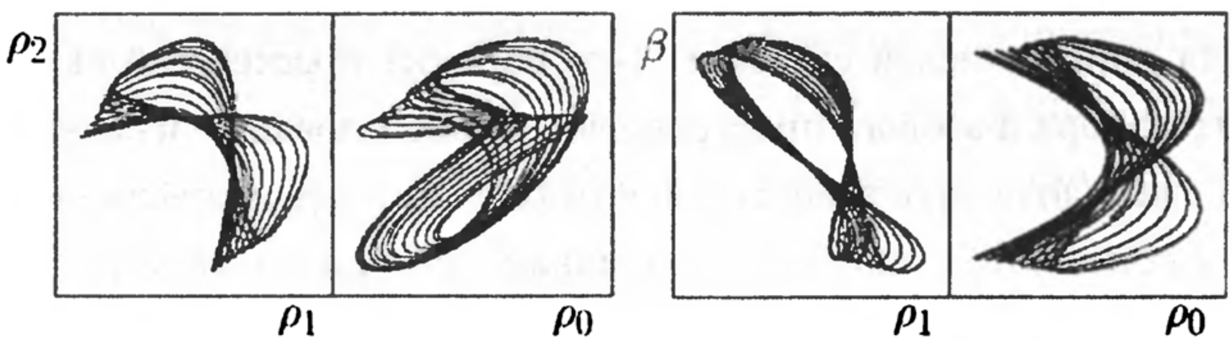


Рис. 15.1.1. Пример проекций фазовых траекторий на координатные плоскости для четырехмерной динамической системы.

Определение 15.1.3. ◄

> ***Равновесием*** автономной динамической системы (15.1.6) называется такое ее решение $\mathbf{x}$, которое удовлетворяет уравнению $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Поскольку в равновесии правая часть системы (15.1.6) обращается в ноль, производная $\dot{\mathbf{x}}$ этого решения системы (15.1.6) также равна нулю. Это означает, что ***равновесие автономной динамической системы от времени t не зависит.*** Отсюда вытекает, что ***фазовая траектория, которая соответствует равновесию, состоит из одной точки.*** ◄

Заметим, что равновесия нередко называют положениями равновесия, точками покоя, стационарными точками, особыми точками и т. п.

В теории динамических систем очень важную роль играет понятие устойчивости.

Определение 15.1.4. ◄

> Равновесие автономной динамической системы (15.1.6) называется ***устойчивым*** (точнее, устойчивым по Ляпунову[31] в малом), если любое другое решение $\mathbf{x}(t)$ системы (15.1.6), которое в начальный момент времени t_0 находится достаточно близко к этому равновесию, остается близким к нему при всех $t \geqslant t_0$. Если к тому же $\mathbf{x}(t)$ стремится к данному равновесию, когда $t \to +\infty$, то равновесие называется ***асимптотически устойчивым.*** Если равновесие не является устойчивым, то оно называется ***неустойчивым.***

---

[31] ***Александр Михайлович Ляпунов*** (1857–1918) — крупный русский математик.

Уловить смысл понятий, использованных в этом определении, совсем нетрудно, если, например, представить себе карандаш, поставленный на плоскости вертикально (см. рис. 15.1.2). У такого карандаша теоретически существуют два положения равновесия: когда он стоит острием вверх и когда он стоит острием вниз. Первое из них асимптотически устойчиво по Ляпунову в малом, поскольку незначительное отклонение карандаша от вертикали приведет к тому, что карандаш некоторое время будет качаться, а затем вернется в вертикальное положение (сопротивление воздуха не даст ему качаться вечно). Это — устойчивость именно в малом, т. к. в случае, когда отклонение карандаша от вертикали в начальный момент времени будет значительным, карандаш просто упадет. Второе положение равновесия очевидно неустойчиво: установить карандаш острием вниз так, чтобы он не упал, может только волшебник, наличие которого в математическом моделировании обычно не предполагается.

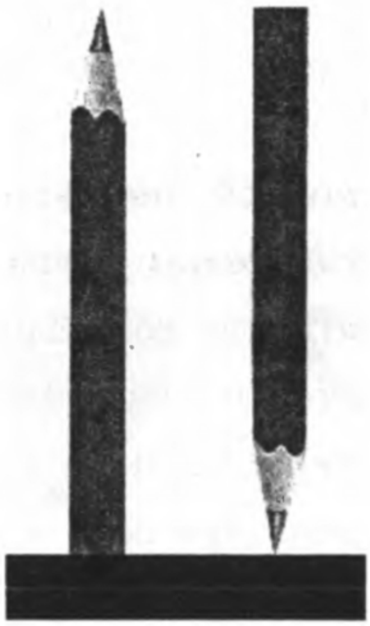


Рис. 15.1.2. Равновесие, асимптотически устойчивое в малом (слева), и неустойчивое равновесие (справа).

► Отметим еще, что приведенный нами пример служит хорошим подтверждением правильности одного из важнейших принципов математического моделирования эволюционных процессов, согласно которому ***тем явлениям природы, которые удается наблюдать достаточно долго, могут соответствовать только устойчивые решения уравнений, моделирующих данные явления.***

Рассмотрим простейший случай линейной однородной невырожденной динамической системы на плоскости (двумерной системы)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2. \end{aligned} \tag{15.1.7}$$

Когда $ad - bc \neq 0$, у системы (15.1.7) существует, как легко убедиться, единственное равновесие[32]

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0. \tag{15.1.8}$$

Его в невырожденном случае можно отнести к одному из следующих шести типов равновесий.

- Центр — устойчивое (но не асимптотически) равновесие с эллиптическими фазовыми траекториями в его окрестности.

- Асимптотически устойчивый узел.

- Неустойчивый узел.

- Асимптотически устойчивый фокус.

- Неустойчивый фокус.

[32] У нелинейной системы может существовать сколько угодно равновесий.

- Седло — неустойчивое равновесие, которое называют также гиперболической особой точкой.

Возможные варианты поведения фазовых траекторий динамической системы (15.1.7) в окрестности равновесия (15.1.8) в невырожденном случае показаны на рис. 15.1.3.

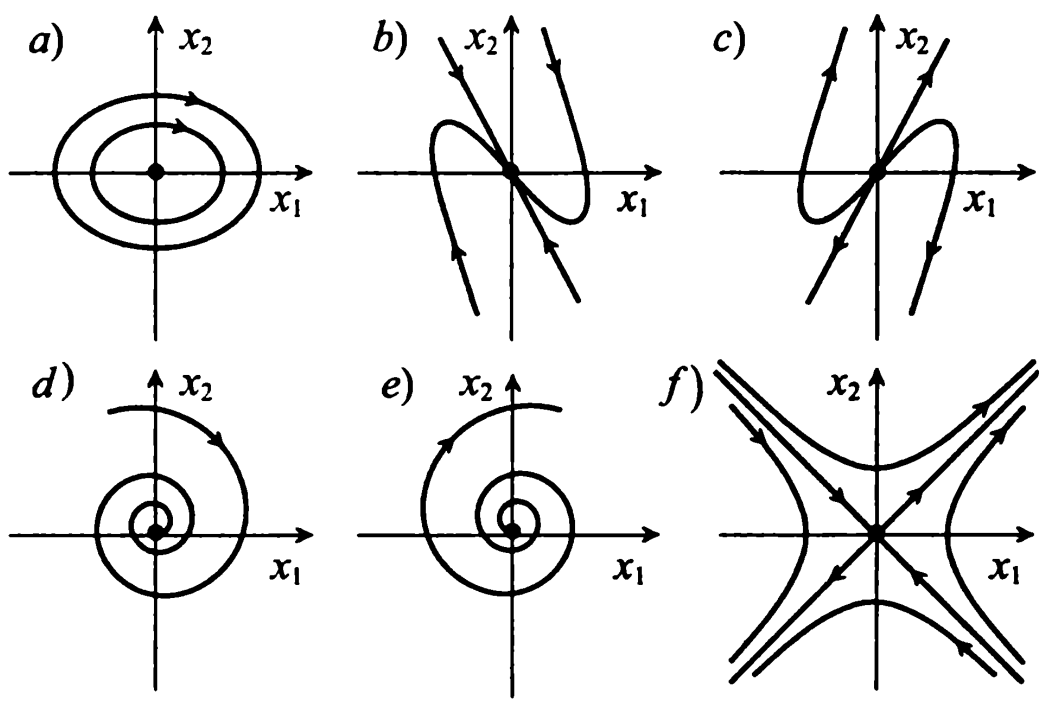


Рис. 15.1.3. Фазовые портреты динамической системы (15.1.7) при различных значениях ее коэффициентов:
a) центр, *b*) устойчивый узел, *c*) неустойчивый узел,
d) устойчивый фокус, *e*) неустойчивый фокус, *f*) седло.

Заметим, что вблизи седла имеются четыре особые траектории (см. рис. 15.1.3, f), которые называются ***сепаратрисами***, или ***усами*** (два входящих и два выходящих уса). Сепаратрисы выглядят как две прямые, пересекающиеся в седле, но их нужно рассматривать как четыре луча, причем ни одна из сепаратрис само седло не содержит. Если в начальный момент времени фазовая точка находится на одном из входящих усов, то с ростом времени она будет по нему двигаться к неустойчивому равновесию (седлу), замедляя скорость своего движения так, что достичь равновесия она сможет лишь за бесконечное время. Если же в начальный момент времени фазовая точка находится прямо в седле, то она будет оставаться там всегда, поэтому выйти из седла по выходящему усу она не сможет. Отметим также, что у нелинейных динамических систем на плоскости сепаратрисы седел обычно бывают кривыми, но вблизи седел они практически не изгибаются и выглядят как прямые.

Определение 15.1.5. ◀

> Замкнутая фазовая траектория динамической системы называется ***циклом***. Если в достаточно малой окрестности цикла нет других замкнутых траекторий динамической системы, то он называется ***предельным циклом***.

Периодическому по времени решению автономной динамической системы соответствует цикл. В самом деле, если при некотором $T > 0$ решение динамической системы является периодическим, т. е. $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$ при любом t, то координаты фазовых точек, соответствующих значениям $\mathbf{x}(t+T)$ и $\mathbf{x}(t)$, совпадают, а значит, отвечающая этому решению фазовая траектория является замкнутой.

Примерами циклов, которые не являются предельными, могут служить эллиптические траектории вблизи центра, показанные на рис. 15.1.3, а. Пример многооборотного предельного цикла четырехмерной динамической системы с достаточно сложным поведением траекторий дан на рис. 15.1.1.

Рассмотрим теперь случай линейной ***неоднородной*** невырожденной динамической системы на плоскости

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 + r_1, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 + r_2. \end{aligned} \tag{15.1.9}$$

Когда $ad - bc \neq 0$, у системы (15.1.9) существует, как легко убедиться, единственное равновесие

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2,$$

которое можно найти, например, по правилу Крамера. Оно располагается в некоторой точке фазовой плоскости, отличной от начала координат. Разыскивая решение неоднородной системы (15.1.9) в виде

$$x_1(t) = \alpha_1 + y_1(t), \quad x_2(t) = \alpha_2 + y_2(t),$$

мы получаем однородную систему для отыскания новых неизвестных $y_1(t)$ и $y_2(t)$ (они называются ***возмущениями***), аналогичную системе (15.1.7).

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= ay_1 + by_2, \\ \dot{y}_2 &= cy_1 + dy_2. \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к уже рассмотренному нами случаю однородной динамической системы.

Исследование нелинейных динамических систем нередко представляет собой весьма непростую задачу. Во многих случаях для таких исследований приходится привлекать компьютер. Существует много компьютерных программ, позволяющих изображать фазовые траектории на компьютерных дисплеях, причем пользоваться такими программами нередко могут и люди, имеющие не слишком большой опыт в области программирования и компьютерных расчетов.

15.2. Модель Мальтуса

Мы рассмотрим сейчас одну из самых простых моделей, существующих в математическом моделировании эволюционных процессов. Для ее исследования требуется лишь уметь решать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и обладать здравым смыслом при трактовке полученных результатов.

В конце XVIII века Томас Мальтус[33] опубликовал работу, в которой утверждал, что рост населения Земли значительно опережает рост средств существования людей, а поэтому неконтролируемый рост народонаселения должен привести к голоду на Земле. В современной терминологии закон Мальтуса называют обычно законом роста популяции без конкуренции. Фактически Мальтус предположил, что скорость роста человеческой популяции пропорциональна количеству живущих на Земле людей. Это приводит к линейной динамической системе первого порядка

$$\dot{x} = kx \tag{15.2.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x^0. \tag{15.2.2}$$

Здесь $x(t)$ — объем популяции, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, $x^0 \geqslant 0$ — объем популяции в начальный момент времени $t = 0$. То, что мы ведем отсчет времени от нуля, ничему не противоречит и не снижает общности наших

[33] ***Томас Роберт Мальтус*** (1766—1834) — английский священник и учёный.

рассуждений, но слегка упрощает математические выкладки.

Уравнение (15.2.1) имеет единственное равновесие $x = 0$, которое удовлетворяет начальному условию (15.2.2) лишь при $x^0 = 0$: если в начальный момент времени на Земле не было ни одного жителя, то с ростом времени появиться им будет неоткуда. Поэтому далее мы будем считать, что $x^0 > 0$.

Уравнение (15.2.1) допускает разделение переменных. Заменим производную $\dot{x}$ на отношение дифференциалов, умножим уравнение на dt, разделим его на x и проинтегрируем обе части. Получим

$$\ln|x| = kt + c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$$|x| = c_2 e^{kt}, \qquad c_2 = e^{c_1} > 0.$$

Тогда

$$x = \pm c_2 e^{kt}.$$

Учитывая еще решение $x(t) = 0$, потерянное при разделении переменных, получаем общее решение уравнения (15.2.1) в виде

$$x = ce^{kt}, \tag{15.2.3}$$

где c — произвольная постоянная. Начальное условие (15.2.2) позволяет найти значение постоянной $c = x^0$ и записать решение задачи Коши (15.2.1)–(15.2.2) в виде

$$x(t) = x^0 e^{kt}. \tag{15.2.4}$$

Формула (15.2.4) показывает, что объем человеческой популяции $x(t)$ с ростом времени t будет очень быстро (экспоненциально) расти при любом положительном значении коэффициента пропорциональности k и любом положительном начальном значении численности популяции x^0.

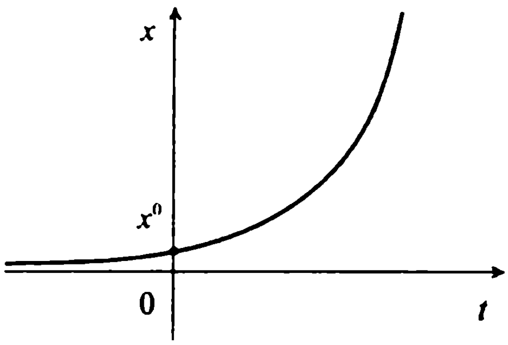


Рис. 15.2.1. Экспоненциальный рост численности популяции.

Вульгарная трактовка закона Мальтуса (этот закон недоброжелатели Мальтуса даже называли человеконенавистническим) приводит к весьма печальным выводам о скорой гибели человечества от перенаселения нашей планеты. Конечно же, это — совершенно необоснованный вывод. ***Любая математическая модель всегда имеет ограниченную область применения.*** Модель Мальтуса (15.2.1)–(15.2.2) никак не учитывает естественные процессы, которые тормозят рост объема человеческой популяции, например, неизбежную смерть любого человека при достижении определенного возраста, гибель людей в результате войн, болезней и т. п. Применять модель Мальтуса можно лишь на небольших отрезках времени, значительно меньших, чем средняя продолжительность человеческой жизни. На таких временах рост объема популяции не приводит к катастрофическим последствиям.

15.3. Модель взрыва

В рассмотренной выше модели Мальтуса объем популяции $x(t)$ с ростом времени t экспоненциально возрастает, но остается ограниченным в любой фиксированный момент времени. Так получается, когда скорость роста объема популяции $\dot{x}$ зависит от x линейно. Возникает естественный вопрос: что будет происходить, когда $\dot{x}$ растет быстрее, чем линейная функция? Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = x^2 \tag{15.3.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x^0. \tag{15.3.2}$$

Здесь производная $\dot{x}(t)$ пропорциональна $x^2(t)$ с коэффициентом пропорциональности, который для простоты мы считаем равным единице. Динамическую систему (15.3.1) можно рассматривать (со множеством оговорок) как весьма грубую модель процесса цепной реакции, возникающей при расщеплении атомных ядер в атомной бомбе. Тогда $x(t)$ — количество ядер в момент времени t. Применяя метод разделения переменных, получаем решение задачи Коши (15.3.1)–(15.3.2) в виде

$$x(t) = x^0/(1 - x^0 t). \tag{15.3.3}$$

График этой функции показан на рис. 15.3.1. Это — гипербола. Ее нижняя ветвь к рассматриваемой модели отношения не имеет, т. к. в данной модели $x(t)$ не может быть отрицательной величиной.

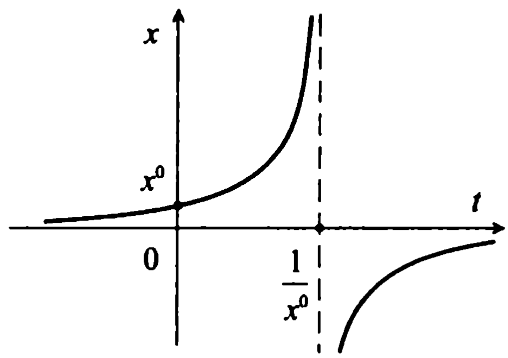


Рис. 15.3.1. Взрыв в динамической системе.

Верхняя ветвь гиперболы с ростом времени возрастает и уходит на бесконечность при $t \to 1/x^0$. Мы можем трактовать это как очень быстрый рост количества атомных ядер, возникающих в процессе цепной реакции, что приводит к выделению огромного количества энергии и взрыву.

Важно подчеркнуть, что ***решение динамической системы уходит в данном примере на бесконечность за конечное время***. В таких случаях принято говорить, что в системе происходит ***взрыв***.

15.4. Модели маятников

Рассмотрим маятник, представляющий собой грузик единичной массы, подвешенный на нерастяжимой нити. При различных упрощающих предположениях, важнейшим из которых является отсутствие сопротивления окружающей среды, колебания такого маятника под действием силы тяжести вблизи нижнего положения равновесия согласно второму закону Ньютона описываются линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \tag{15.4.1}$$

Здесь $x(t)$ — смещение грузика относительно положения равновесия (оно предполагается небольшим), ω — заданная постоянная, характеризующая частоту колебаний.

Умножая обе части этого уравнения на $\dot{x}$, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2\right) + \frac{\omega^2}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2\right) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = c, \tag{15.4.2}$$

где $c \geqslant 0$ — произвольная постоянная.

Соотношение (15.4.2), как нетрудно догадаться, представляет собой ***закон сохранения энергии*** при колебаниях маятника. Первое слагаемое в (15.4.2) — кинетическая энергия маятника, второе — его потенциальная энергия.

Заметим, что уравнение (15.4.1) сводится к линейной динамической системе второго порядка заменой $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Это позволяет нам говорить об уравнении (15.4.1) как о динамической системе.

Соотношение (15.4.2) при этом подсказывает, что в рассматриваемой задаче удобно строить фазовый портрет динамической системы на плоскости, откладывая на оси абсцисс $x(t)$, а на оси ординат — $\dot{x}(t)$. В этом случае фазовые кривые, определяемые законом сохранения энергии (15.4.2), при $c > 0$ представляют собой эллипсы, а при $c = 0$ они определяют точку на фазовой плоскости $x = \dot{x} = 0$, соответствующую нижнему положению равновесия маятника.

Согласно введенной нами терминологии это равновесие является центром. Фазовый портрет колебаний маятника показан на рис. 15.4.1. Напомним, что стрелки на фазовых траекториях указывают направление движения по ним фазовых точек. В верхней полуплоскости $\dot{x} > 0$, поэтому $x(t)$ должно возрастать с ростом t. Это означает, что в рассматриваемом случае фазовые точки должны обходить равновесие по часовой стрелке.

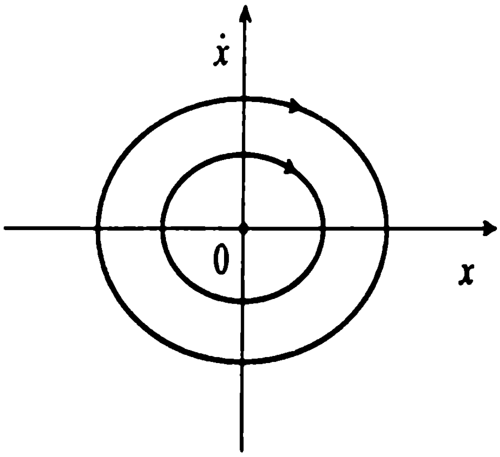


Рис. 15.4.1. Фазовый портрет колебаний маятника.

Замечания.

1) Для построения фазового портрета колебаний маятника, которые описываются уравнением (15.4.1), нам не потребовалось разыскивать общее решение этого уравнения в явном виде. Разумеется, найти такое решение в данном примере совсем не трудно. Читатель легко сделает это самостоятельно.

2) Использованный нами метод построения фазового портрета применим далеко не всегда. В данном примере успех обеспечила возможность понизить порядок исследуемого линейного дифференциального уравнения (15.4.1) сведением его к нелинейному уравнению первого порядка (15.4.2). При исследовании других уравнений эта задача может оказаться невыполнимой.

3) Уравнение (15.4.1) часто называют уравнением ***гармонического осциллятора***. Оно применимо к описанию самых различных колебательных процессов в условиях

отсутствия диссипации (рассеяния) энергии. Примерами здесь могут служить вертикальные колебания грузика, подвешенного на пружинке, либо колебательные движения шара, помещенного в ямку вблизи ее дна. Задачи, учитывающие наличие диссипации энергии, которая всегда имеется в реальных условиях, конечно же, гораздо труднее исследовать, но в некоторых простых случаях ответ на вопрос о влиянии рассеивания энергии можно получить очень просто, опираясь лишь на здравый смысл. Так, скажем, в рассматриваемой нами задаче учет сопротивления воздуха приведет к тому, что центр превратится в асимптотически устойчивый фокус, а значит, колебания маятника с течением времени будут затухать.

15.5. Модель «хищник–жертва»

В начале XX века появилась динамическая система, описывающая сосуществование в одном ареале двух популяций. Эта система называется моделью «хищник–жертва» или моделью Лотки–Вольтерра[34].

В ней предполагается, что жертвы (например, зайцы) имеют достаточное количество питания. Когда хищников нет, численность популяции жертв $x_1(t)$ экспоненциально возрастает, подчиняясь закону Мальтуса $\dot{x}_1 = k_1 x_1$ с коэффициентом пропорциональности $k_1 > 0$.

[34] ***Альфред Джеймс Лотка*** (1880–1949) — американский математик, физик, химик, статистик. ***Вито Вольтерра*** (1860–1940) — итальянский математик, физик.

Хищники (например, волки) питаются жертвами. Когда жертвы отсутствуют, численность популяции хищников $x_2(t)$ экспоненциально убывает, также подчиняясь закону Мальтуса $\dot{x}_2 = -k_2 x_1$, но с отрицательным коэффициентом пропорциональности $-k_2 < 0$.

Одновременное присутствие в одном ареале хищников и жертв приводит к тому, что численности их популяций становятся взаимосвязанными. Это приводит к автономной динамической системе Лотки–Вольтерра

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \quad (k_1 - \alpha x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= -(k_2 - \beta x_1)x_2. \end{aligned} \tag{15.5.1}$$

Здесь коэффициенты системы $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ мы будем считать заданными.

Система (15.5.1) имеет два равновесия.

Тривиальное равновесие $x_1 = x_2 = 0$, с формальной точки зрения, является седлом, расположенным на плоскости (x_1, x_2) в начале координат, но те фазовые траектории, которые соответствуют отрицательным значениям численностей популяций, мы должны отбросить, поскольку в рассматриваемой задаче они не имеют смысла.

Нетривиальное равновесие системы (15.5.1) находится путем решения системы

$$\begin{aligned} k_1 - \alpha x_2 &= 0, \\ k_2 - \beta x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{k_2}{\beta}, \qquad x_2 = \frac{k_1}{\alpha}. \tag{15.5.2}$$

Чтобы исследовать устойчивость этого равновесия и выяснить характер поведения фазовых траекторий вблизи него, наложим на равновесие (15.5.2) бесконечно малые возмущения $y_1(t)$ и $y_2(t)$, т. е. будем искать решение системы (15.5.1) в виде

$$x_1 = \frac{k_2}{\beta} + y_1, \qquad x_2 = \frac{k_1}{\alpha} + y_2. \tag{15.5.3}$$

Подставляя (15.5.3) в (15.5.1) и отбрасывая нелинейные слагаемые, содержащие $y_1 y_2$ (они малы по сравнению с остальными слагаемыми, т. к. возмущения мы предполагаем бесконечно малыми), получаем линейную однородную систему для возмущений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\frac{\alpha k_2}{\beta} y_2, \\ \dot{y}_2 &= \frac{\beta k_1}{\alpha} y_1. \end{aligned} \tag{15.5.4}$$

Дифференцируя второе уравнение этой системы и подставляя в него значение $\dot{y}_1$ из первого уравнения, получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{y}_2 = -k_1 k_2 y_2, \tag{15.5.5}$$

которое совпадает с уравнением колебаний маятника (15.4.1). Это позволяет нам заключить, что нетривиальное равновесие (15.5.2) является центром. Оно устойчиво (но не асимптотически), а расположенные вблизи него фазовые траектории являются эллиптическими. При удалении от этого равновесия эллиптический характер траекторий исчезает, поскольку на их форму начинают влиять отброшенные в нашем анализе устойчивости нелинейные слагаемые.

На рис. 15.5.1 показан фазовый портрет модели «хищник–жертва», рассчитанный на компьютере. Его анализ позволяет прийти к следующим выводам.

В системе «хищник–жертва» возможны два равновесных состояния. Одно из них является неустойчивым тривиальным равновесием, седлом, соответствующим случаю, когда в системе нет ни жертв, ни хищников

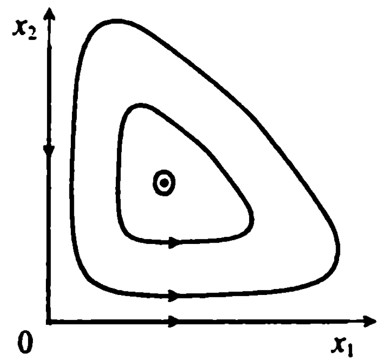


Рис. 15.5.1. **Фазовый портрет модели «хищник–жертва».**

$$x_1(t) = x_2(t) = 0$$

при всех t. Это равновесие порождает две особые траектории, лежащие на координатных осях. Входящий ус, расположенный на оси ординат, соответствует случаю, когда в начальный момент времени нет ни одной жертвы: $x_1(0) = 0$. У хищников при этом нет пищи, значит, численность популяции хищников будет экспоненциально убывать по закону Мальтуса. Выходящий ус, расположенный на оси абсцисс, соответствует случаю, когда в начальный момент времени нет ни одного хищника: $x_2(0) = 0$. У жертв при этом нет врагов, значит, численность популяции жертв будет экспоненциально возрастать по закону Мальтуса. Естественные причины торможения этого роста данная модель не учитывает.

Второе равновесие является устойчивым (но не асимптотически) нетривиальным равновесием, центром, которое соответствует случаю, когда количество жертв и хищников определяется формулами (15.5.2). Небольшое отклонение начальных условий от значений $x_1(0)$ и $x_2(0)$, задаваемых этими формулами, приведет к тому, что изменение численности популяций хищников и жертв будет определяться замкнутой фазовой траекторией, т. е. будет иметь периодический характер.

Необходимо отметить, что модель «хищник–жертва» очень хорошо отражает главные закономерности изменения численностей популяций хищников и жертв в замкнутых ареалах. Эти закономерности ученые часто наблюдают в природе. Когда в жизнь такого сообщества не вмешиваются внешние силы (например, катастрофические изменения климата или необдуманные действия людей), в нем реализуется самоподдерживающийся колебательный режим, обычно не приводящий к экологической катастрофе, связанной с гибелью жертв, а затем и хищников, лишенных пищи.

15.6. Модель Лоренца

В 1963 году американский математик и метеоролог ***Эдвард Лоренц*** опубликовал статью, в которой изложил результаты своего исследования одной гидродинамической проблемы. Этой задачей ученые занимаются с XIX века и получили множество весьма интересных результатов, но, пожалуй, ни одна научная публикация в данной области не вызывала такого ажиотажа, как статья Лоренца. В работе Лоренца приводилась нелинейная однородная динамическая система третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1(r - x_3) - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - b x_3, \end{aligned} \tag{15.6.1}$$

которая является простейшей и весьма грубой моделью возникновения различных течений в плоском слое жидкости, расположенном горизонтально и подогреваемом снизу. Здесь b, σ и r — параметры задачи, причем параметр r, который называется числом Рэлея, играет самую важную роль, характеризуя интенсивность подогрева слоя жидкости.

Лоренц изучал данную систему численно (с помощью компьютера) и обнаружил, что при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$ ее фазовые траектории ведут себя хаотически.

Именно этот факт вызвал небывалый интерес к системе Лоренца, поскольку он давал надежду выяснить природу возникновения турбулентности (хаотических режимов движения жидкости) в гидродинамических течениях, которую ученые наблюдают в реальной жизни и экспериментах, но до сих пор не умеют адекватно моделировать математически.

Исследованием системы Лоренца сразу после публикации его знаменитой статьи занялись крупнейшие математики, физики и гидродинамики. На эту тему были опубликованы тысячи работ, содержащих прекрасные результаты, которые нашли массу приложений в самых различных разделах науки, но приходится признать, что на сегодняшний день адекватной и строгой с точки зрения математики модели турбулентности все еще не существует. Модель Лоренца не может всерьез претендовать на эту роль, поскольку она описывает поведение жидкости весьма грубо и неточно. Тем не менее интерес к системе Лоренца хоть и заметно ослаб, но продолжает увлекать многих ученых.

В этом учебнике мы не можем излагать методы и результаты аналитического исследования модели Лоренца, поскольку это потребовало бы от читателя профессиональных знаний многих разделов современной математики. Мы лишь предлагаем читателям полюбоваться на удивительную картину хаотического поведения фазовых траекторий на ***аттракторе Лоренца*** — притягивающем множестве, которое возникает в фазовом пространстве модели Лоренца, когда число Рэлея r достаточно велико. Ролики, демонстрирующие это явление, при желании можно найти в интернете.

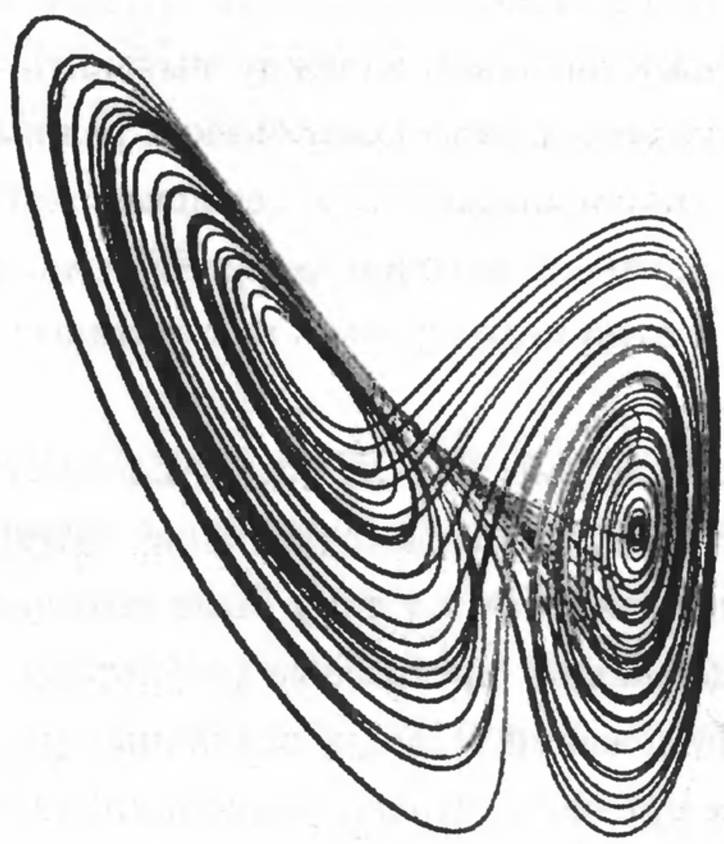


Рис. 15.6.1. Аттрактор Лоренца.

15.7. Упражнения

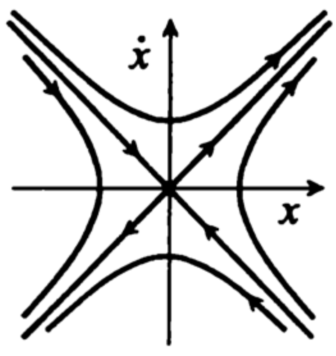
15.7.1. Постройте фазовый портрет динамической системы $\ddot{x} = \omega^2 x$.

15.7.2. Найдите равновесия системы Лоренца в случае, когда $\sigma > 0$ и $b > 0$.

Задание для самопроверки. Используйте модель «хищник–жертва» для исследования взаимодействия популяций преподавателей и студентов на экзамене.

Ответы.

15.7.1.



15.7.2.

1) При $\forall r$ существует тривиальное равновесие
$x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
2) При $r > 1$ существует еще и пара равновесий
$x_1 = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $x_2 = x_1$ и $x_3 = r - 1$.

16. Теория вероятностей

В повседневной жизни мы, принимая те или иные решения, постоянно сталкиваемся с необходимостью оценить вероятность реализации какого-либо события. Так, например, перед выходом из дома мы сознательно или бессознательно оцениваем вероятность того, что пойдет дождь. Эта оценка влияет на наше решение брать или не брать с собой зонт. Такого рода оценки, разумеется, обычно очень далеки от математических, и ошибочная оценка вероятности некоторого события, как правило, не приводит к серьезным негативным последствиям. Совершенно иначе обстоит дело в производстве, бизнесе, политике, медицине и т. п., где нередко требуются гораздо большая надежность и точность оценки вероятности, поскольку ошибочно принятое решение, базирующееся на неправильной оценке вероятности, может принести значительный вред.

В этой главе мы рассмотрим некоторые важнейшие понятия и подходы теории вероятностей, сосредоточившись в первую очередь на тех ее аспектах, которые наиболее востребованы практикой.

16.1. События

► **Определение 16.1.1.**

Если некоторое событие A может реализоваться (произойти, наступить) или не реализоваться в результате проведения какого-либо испытания или серии таких испытаний, оно называется ***случайным событием***. Если случайное событие A реализуется всегда, то оно называется ***достоверным событием***. Если же оно реализоваться не может, то оно называется ***невозможным событием***.

Пример 16.1.1.

Предположим, что мы достаем один карандаш из коробки, в которой находится 10 красных и 40 синих карандашей. Тогда извлечение красного карандаша — случайное событие, извлечение красного или синего карандаша — достоверное событие, а вот извлечение зеленого карандаша — невозможное событие (ведь такие карандаши в коробке отсутствуют).

Несколько событий называются ***совместными***, если они могут произойти одновременно, иначе они называются ***несовместными***. ◄

Пример 16.1.2.

Два события, одно из которых заключается в том, что яблоко является красным, а другое — в том, что яблоко является вкусным, представляют собой совместные события. А вот события, состоящие в том, что конкретное яблоко является одновременно и красным, и зеленым, несовместны.

► Несколько событий называются ***зависимыми***, если реализация хотя бы одного из них зависит от реализации остальных событий, иначе они называются ***независимыми***.

► Событие $\bar{A}$ называется ***противоположным*** событию A, если оно заключается в том, что событие A не произойдет.

Пример 16.1.3.

Выпадение орла и выпадение решки при подбрасывании монетки — взаимно противоположные события.

Для событий определены две арифметические операции: сложение событий и умножение событий.

► **Определение 16.1.2.**

Суммой событий A и B называется такое событие $C = A + B$, которое заключается в том, что произойдет или событие A, или событие B, или произойдут оба эти события. Для несовместных событий последняя возможность, разумеется, исключается.

► **Определение 16.1.3.**

Произведением событий A и B называется такое событие $C = AB$, которое заключается в том, что произойдет и событие A, и событие B.

Пример 16.1.4.

Пусть событие A состоит в том, что Маша пошла в кино, а событие B — в том, что Маша купила пирожок. Тогда сумма этих событий $A + B$ заключается в том, что

Маша пошла в кино или купила пирожок, или сделала и то, и другое. Произведение этих событий AB состоит в том, что Маша пошла в кино и купила пирожок.

Приведем несколько простых утверждений, убедиться в справедливости которых читатели могут самостоятельно. Пусть A — некоторое событие. Тогда

- $A + A = A$,
- $AA = A^2 = A$,
- $A + \bar{A}$ — достоверное событие,
- $A\bar{A}$ — невозможное событие.

16.2. Вероятность реализации события

Современная теория вероятностей строится на абстрактном определении вероятности реализации некоторого события как величины, удовлетворяющей определенной системе аксиом. Такой подход очень хорош в теоретических исследованиях, но он не указывает конкретного способа подсчета вероятности. Поэтому на практике для применения этой теории приходится конкретизировать данное определение применительно к той области, в которой изучаются вероятности тех или иных событий. Это приводит к тому, что имеется несколько различных определений вероятности и исследователь должен определить, какое из них лучше всего применить при изучении той или иной проблемы.

Мы рассмотрим несколько определений вероятности, которые часто используются в различных предметных областях.

► **Определение 16.2.1.**

Предположим, что проводится испытание, которое имеет N равновозможных исходов. Пусть n из них благоприятствуют некоторому событию A (событие реализуется), а $N-n$ исходов не благоприятствуют ему (событие не реализуется). Тогда ***вероятностью*** $P(A)$ события A называется отношение

$$P(A) = \frac{n}{N}. \tag{16.2.1}$$

Это определение называется ***классическим определением вероятности.***

Здесь и всюду в дальнейшем под вероятностью некоторого события A подразумевается вероятность реализации данного события в одном испытании.

► Надо понимать, что ***закономерности реализации любого случайного события проявляются лишь при многократных повторениях испытаний.*** Классическое определение вероятности позволяет легко найти вероятность выпадения орла при подбрасывании монетки. Обозначим это событие через A. Общее количество исходов равно двум (выпадет орел или решка), из них один исход (выпадение орла) благоприятствует событию A, поэтому $P(A) = 0,5$. Это означает, что при многократном подбрасывании монетки примерно в половине случаев выпадет орел, но совершенно не должен вызывать удивление случай, когда при трехкратном подбрасывании монетки орел не выпадет ни разу.

Поскольку $N > 0$ и $0 \leqslant n \leqslant N$, нетрудно убедиться, что вероятность события A обладает следующими свойствами: ◄

1) Для любого события A выполняется неравенство $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2) Если A — невозможное событие, то $P(A) = 0$.
3) Если A — достоверное событие, то $P(A) = 1$.

Заметим, что этими свойствами, согласно аксиоматическому определению вероятности, обязательно должна обладать вероятность любого события, независимо от того, какое определение вероятности будет использоваться.

Пример 16.2.1.

Если организаторы лотереи выпустили 1000 билетов и на 200 из них приходятся какие-либо выигрыши, а 800 билетов — без выигрыша, то вероятность того, что на один купленный билет упадет выигрыш, составляет $P(A) = 200/1000 = 0,2$.

Иногда вероятность подсчитывают в процентах. В этом случае числовое значение вероятности нужно просто умножить на 100%. В последнем примере это даст вероятность, равную 20%.

При всех достоинствах классического определения вероятности его практическое применение часто нецелесообразно, а иногда и невозможно. Как быть, если общее количество исходов бесконечно? Как отдел технического контроля тракторного завода может установить вероятность того, что отдельный трактор из партии тракторов, изготовленных в текущем месяце, окажется бракованным? Разобрать все тракторы и проверить их на наличие брака? Вряд ли такой способ контроля качества продукции может считаться разумным. Обычно в подобных случаях применяется статистическое определение вероятности события, основанное на выборочном исследовании объектов.

Генеральной совокупностью называется множество всех объектов, о которых исследователь собирается судить, изучая некоторую проблему.

Выборкой называется та часть генеральной совокупности, по которой исследователь будет делать выводы о тех или иных свойствах генеральной совокупности. Количество объектов, которые содержатся в выборке, называется ***объемом выборки*** или ее ***размером***.

► **Определение 16.2.2.**

Предположим, что из генеральной совокупности взята выборка объемом N_0. Пусть событие A реализуется в этой выборке n_0 раз и не реализуется $N_0 - n_0$ раз. Тогда ***статистической вероятностью***, ***частотой*** или ***относительной частотой*** $P^*(A)$ события A называется отношение

$$P^*(A) = \frac{n_0}{N_0}. \qquad (16.2.2)$$

Это определение называется ***статистическим определением вероятности***.

Сравнивая классическое и статистическое определения вероятности события A, мы замечаем, что они очень похожи, но статистическое определение куда чаще можно применить на практике. С другой стороны, статистическое определение, вообще говоря, дает разные значения вероятности $P^*(A)$ для разных выборок. К счастью, при достаточно больших объемах выборок значение $P^*(A)$ меняется обычно весьма незначительно. В этом нетрудно убедиться экспериментально, много раз подбросив монетку и заметив, что частота выпадения орла будет весьма мало меняться, если повторять этот опыт достаточно большое количество раз. Это является следствием ***закона больших чисел***, который гласит, что всегда найдется такое количество испытаний, при котором с любой заданной наперед вероятностью частота появления некоторого события будет сколь угодно мало отличаться от вероятности его появления, найденной по классическому определению вероятности.

Отметим еще, что в случае, когда объем выборки совпадает с объемом генеральной совокупности, классическое и статистическое определения вероятности дают одинаковый результат.

Пример 16.2.2.

Предположим, что из генеральной совокупности, содержащей $N = 1000$ объектов, взята выборка, содержащая $N_0 = 300$ объектов. Пусть некоторое событие A в выборке реализовалось $n_0 = 20$ раз. Тогда частота данного события равна $P^*(A) = n_0/N_0 = 20/300 = 1/15$. Считая, что вероятность события A совпадает с его частотой, заключаем, что в генеральной совокупности данное событие реализуется $n = P^*(A)N \approx 67$ раз. Мы округлили полученный результат до ближайшего целого, поскольку количество реализаций должно быть целым числом.

Возможность достаточно надежно судить о вероятности реализации некоторого события в генеральной совокупности по частоте его реализации в выборке привела к очень широкому распространению методов выборочного исследования генеральных совокупностей в самых различных сферах человеческой деятельности. Статистические оценки вероятностей применяются в производстве, бизнесе, медицине, образовании, политике и практически во всех экспериментальных науках. Приведем лишь один пример. Изучая распространенность определенных типов почв в некотором ареале, почвоведы в качестве генеральной совокупности должны рассматривать совокупность всех типов почв, встречающихся в данном ареале. Совершенно очевидно, что досконально изучить весь ареал, если он достаточно велик, невозможно. Поэтому почвоведы берут пробы почвы в различных местах изучаемого ареала, исследуют эти пробы и по ним судят обо всем ареале. Совокупность всех взятых проб образует выборку, подлежащую исследованию.

Отметим еще, что для обоснованности выводов о тех или иных свойствах генеральной совокупности, сделанных при анализе выборки, необходимо, чтобы выборка была ***репрезентативной*** (представительной), т. е. отражала все основные характеристики тех свойств генеральной совокупности, которые изучаются исследователем. Сильным средством увеличения репрезентативности выборки является ее ***рандомизация*** — все объекты для выборки должны браться случайным образом.

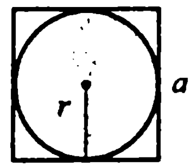


Рис. 16.2.1. Вписанный в квадрат круг.

Продемонстрируем на примере еще один способ определения вероятности некоторого события. Предположим, что имеется квадрат со стороной a. Требуется найти вероятность того, что произвольная точка, находящаяся в квадрате, будет находиться и в круге, вписанном в этот квадрат. В данном случае естественным представляется считать, что искомая вероятность равна отношению площади круга $S_1 = \pi r^2 = \pi a^2/4$ к площади квадрата $S_2 = a^2$. Поэтому $P(A) = \pi/4 \approx 0,7854$. Вероятность, найденная этим способом, называется ***геометрической***. Такой метод подсчета вероятности широко используется в военном деле для расчета минимально необходимого количества снарядов, которые требуется израсходовать, чтобы вероятность поражения цели, точное местоположение которой в некоторой области неизвестно, была высока.

16.3. Вероятность суммы событий

Теорема 16.3.1. ◄

Вероятность суммы событий A и B находится по формуле

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (16.3.1)$$

Доказательство.

Воспользуемся классическим определением вероятности. Пусть общее количество равновозможных исходов испытаний равно N, причем n_1 исходов благоприятствуют событию A, n_2 исходов — событию B и n_3 исходов — событию AB. Тогда событию $A+B$ благоприятствует $n_1+n_2-n_3$ исходов[35]. Значит,

$$P(A+B) = \frac{n_1+n_2-n_3}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} - \frac{n_3}{N} =$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема доказана.

► **Следствие 16.3.1.**

Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \qquad (16.3.2)$$

поскольку несовместные события реализоваться одновременно не могут, а поэтому для них $P(AB) = 0$.

Пример 16.3.1.

Предположим, что в коробке находится 5 красных, 7 зеленых и 8 синих шаров. Извлечение красного шара обозначим через A, зеленого шара — через B. Тогда вероятности $P(A) = 5/20$, $P(B) = 7/20$, а вероятность извлечения красного или зеленого шара, согласно формуле (16.3.2), составляет $P(A+B) = P(A)+P(B) = 0,6$.

---

[35] Если бы мы взяли здесь лишь сумму n_1+n_2, получилась бы ошибка, поскольку исходы, соответствующие одновременной реализации событий A и B, были бы учтены дважды.

Заметим, что этот пример легко решается и без привлечения формулы для вероятности суммы несовместных событий. Для этого достаточно увидеть, что количество исходов, благоприятствующих извлечению красного или зеленого шара, равно $5 + 7 = 12$, а значит, $P(A + B) = 12/20 = 0,6$.

Определение 16.3.1.

Совокупность несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется ***полной группой событий*** для некоторого испытания, если она содержит все возможные исходы данного испытания и не содержит никаких других событий.

Нетрудно заметить, что сумма событий, образующих полную группу, является достоверным событием, вероятность которого всегда равна единице. Применяя следствие 16.3.1, заключаем поэтому, что сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \tag{16.3.3}$$

Простейший пример полной группы событий дает пара событий A и $\bar{A}$, поэтому

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{16.3.4}$$

Формула (16.3.4) подсказывает еще один способ решения примера 16.3.1. Нас интересует в этом примере вероятность извлечения красного или зеленого шара. Противоположное событие (извлечение синего шара) имеет вероятность $8/20 = 0,4$. Поэтому интересующая нас вероятность равна $1 - 0,4 = 0,6$.

16.4. Вероятность произведения событий

Определение 16.4.1.

Вероятность события A при условии, что событие B уже произошло, называется ***условной вероятностью*** события A и обозначается так: $P(A|B)$.

► **Теорема 16.4.1.**

Вероятность произведения событий A и B находится по формуле

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{16.4.1}$$

Доказательство.

Воспользуемся классическим определением вероятности. Пусть общее количество равновозможных исходов испытаний равно N, причем n исходов благоприятствуют событию A и k исходов благоприятствуют событию AB. Тогда вероятности $P(A) = n/N$ и $P(AB) = k/N$. Вероятность $P(B|A)$ должна подсчитываться с учетом того, что событие A уже реализовалось, поэтому общее число исходов для этой вероятности равно n, а количество благоприятствующих исходов равно k. Следовательно, $P(B|A) = k/n$. Теперь уже нетрудно видеть, что

$$P(AB) = \frac{k}{N} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n}{N} = P(A)P(B|A).$$

Поскольку $AB = BA$, получаем отсюда и вторую часть формулы (16.4.1):

$$P(AB) = P(BA) = P(B)P(A|B).$$

Теорема доказана.

Следствие 16.4.1. ◀

Вероятность произведения независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий, т. е.

$$P(AB) = P(A)P(B), \tag{16.4.2}$$

поскольку для независимых событий $P(B|A) = P(B)$.

Пример 16.4.1.

Найдем вероятность того, что при подбрасывании монетки мы увидим, что орел выпадет семь раз подряд. Обозначим через A событие, состоящее в том, что при одном подбрасывании монетки выпадет орел. Тогда $P(A) = 0,5$. При многократных подбрасываниях результаты испытаний независимы, значит, мы можем воспользоваться формулой (16.4.2). Тогда искомая вероятность равна

$$P\left(A^7\right) = (P(A))^7 = \frac{1}{128} \approx 0,0078.$$

Это означает, что, подбросив монетку 1000 раз, мы, скорее всего, 7–8 раз увидим, что орел выпал семь раз подряд.

Пример 16.4.2.

Предположим, что в коробке находится 5 красных, 7 зеленых и 8 синих шаров. Найдем вероятность того, что из двух извлеченных шаров один окажется красным, а другой синим. Обозначим через A извлечение красного шара, а через B — синего. Возможны два варианта.

1) Если после извлечения первого шара испытатель запоминает его цвет, возвращает шар в коробку, перемешивает шары и только после этого извлекает второй шар, то результат второго извлечения никак не зависит от результата первого извлечения. Значит, можно воспользоваться формулой (16.4.2), следовательно,

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{5}{20} \cdot \frac{8}{20} = 0,1.$$

2) Если же сразу после извлечения первого шара испытатель извлекает второй шар, то результат второго извлечения зависит от первого, т. к. перед извлечением второго шара количество шаров в коробке уменьшилось на единицу. Значит, нужно воспользоваться формулой (16.4.1), следовательно,

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{20} \cdot \frac{8}{19} \approx 0,105.$$

Мы видим, что во втором случае вероятность несколько выросла.

16.5. Дискретная случайная величина

Если некоторая переменная величина в ходе испытаний принимает различные значения случайным образом, то она называется ***случайной величиной***.

Если все возможные значения случайной величины можно занумеровать натуральными числами $1, 2, 3, \ldots$, то она называется ***дискретной***. ◄

Примерами дискретных случайных величин могут служить количество очков, выпадающих при бросании игральной кости, сумма денег в кошельке покупателя в супермаркете, количество волков в Тамбовской области.

В любой экспериментальной науке исследователь обычно выносит суждение о поведении случайных величин, обрабатывая некоторые выборочные данные. Объемы таких выборок всегда конечны, поэтому далее мы будем рассматривать лишь случай, когда количество значений дискретной случайной величины конечно.

Если указаны все возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дискретной случайной величины x и соответствующие им значения $p_k = P(x = x_k)$ вероятностей того, что $x = x_k$, то говорят, что задано ***распределение дискретной случайной величины***. При этом сумма всех значений вероятностей p_k должна равняться единице, т. к. события x_k при $k = 1, 2, \ldots, n$ образуют полную группу событий.

Такие распределения удобно задавать в виде таблиц

x_k	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Если значения вероятностей p_k неизвестны, то их заменяют частотами, рассчитанными по выборочным данным.

Имея распределение дискретной случайной величины, можно рассчитать большое количество ее характеристик, которые позволяют судить о различных свойствах этой случайной величины. Важнейшими из таких характеристик являются математическое ожидание и дисперсия.

► **Определение 16.5.1.**

Математическим ожиданием дискретной случайной величины x, или ее ***средним значением***, называется постоянная, которая находится по формуле

$$Mx = \bar{x} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \qquad (16.5.1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все возможные значения дискретной случайной величины x, а $p_k = P(x = x_k)$ — вероятности того, что $x = x_k$.

Пример 16.5.1.

Пусть в денежной лотерее продано 1000 билетов, из которых на 10 билетов падает выигрыш 1000 руб., на 20 билетов — 100 руб., на 100 билетов — 10 руб., а 870 билетов — без выигрыша. Здесь случайная величина x представляет собой выигрыш, приходящийся на один билет. Ее закон распределения имеет вид

x_k	1000 руб.	100 руб.	10 руб.	0 руб.
p_k	$\frac{10}{1000}$	$\frac{20}{1000}$	$\frac{100}{1000}$	$\frac{870}{1000}$

Теперь уже легко видеть, что

$$Mx = \frac{10}{1000} \cdot 1000 + \frac{20}{1000} \cdot 100 + \frac{100}{1000} \cdot 10 + \frac{870}{1000} \cdot 0 = 13 \text{ руб.}$$

Таким образом, в этой лотерее на один билет в среднем приходится выигрыш в 13 руб. Подчеркнем, что это — именно средний выигрыш, но отнюдь не самый вероятный выигрыш при покупке одного билета. Последний составляет ноль рублей, поскольку билетов без выигрыша больше всего.

Пример 16.5.2.

Пусть при изучении гранулометрического состава некоторой суглинистой почвы взятие шести проб последовательно выявило следующие данные о содержании в них гумуса: 9%, 8%, 10%, 8%, 8%, 9%. Здесь случайная величина x представляет собой процент содержания гумуса в одной пробе. Ее закон распределения, рассчитанный по выборочным данным, имеет вид

x_k	8%	9%	10%
p_k^*	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Теперь уже легко видеть, что

$$Mx = \frac{3}{6} \cdot 8 + \frac{2}{6} \cdot 9 + \frac{1}{6} \cdot 10 \approx 8,67\%.$$

Таким образом, считая данную выборку репрезентативной, мы можем заключить, что среднее значение содержания гумуса в исследуемой почве составляет 8,67%.

Сформулируем без доказательств важнейшие свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

Пусть x и y — случайные величины, а $c = const$, тогда

- $Mc = c$,
- $M(cx) = cMx$,
- $M(c + x) = c + Mx$,
- $M(x \pm y) = Mx \pm My$,
- $M(xy) = MxMy$, если x и y — независимые случайные величины.

Математическое ожидание является самой важной из всех числовых характеристик дискретной случайной величины, но оно не позволяет судить о степени разброса значений случайной величины около ее среднего значения. Для этих целей можно использовать дисперсию.

► **Определение 16.5.2.**

Дисперсией дискретной случайной величины x называется постоянная, которая находится по формуле

$$Dx = M\left(x - Mx\right)^2. \tag{16.5.2}$$

Дисперсия представляет собой среднее значение квадрата отклонения значений дискретной случайной величины x от ее среднего значения, даваемого математическим ожиданием Mx. Использование квадрата обусловлено здесь тем, что нас не интересует, в какую сторону значения x отклоняются от Mx, в большую или в меньшую.

Для практического расчета дисперсии нужно учитывать, что Mx — постоянная, а значит, $y = x - Mx$ и $z = (x - Mx)^2 = y^2$ являются новыми случайными величинами и $Dx = Mz$. При этом вероятности (и частоты) событий $x = x_k$, $y = y_k$ и $z = z_k$ одинаковы.

Пример 16.5.3.

Для условий примера 16.5.2 с учетом того, что $Mx = 8,67\%$, расчет дисперсии дает следующие результаты

x_k	8	9	10
$y_k = x_k - Mx$	$-0,67$	$0,33$	$1,33$
$z_k = (x_k - Mx)^2 = y_k^2$	$0,4489$	$0,1089$	$1,7689$
p_k^*	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Теперь уже легко видеть, что

$$Dx = Mz = \frac{3}{6} \cdot 0,4489 + \frac{2}{6} \cdot 0,1089 + \frac{1}{6} \cdot 1,7689 \approx 0,56.$$

Отсюда следует, что разброс значений случайной величины около ее среднего значения является небольшим.

Мы сознательно не указали здесь размерность значения дисперсии Dx, поскольку проценты в квадрате выглядят достаточно нелепо. Если этот факт смущает читателя, мы можем рекомендовать ему вместо дисперсии использовать какую-нибудь другую величину, характеризующую отклонение случайной величины от ее среднего значения, например, ***средне-квадратичное отклонение***, которое находится по формуле

$$\sigma = \sqrt{Dx}.$$

Сформулируем без доказательств важнейшие свойства дисперсии дискретной случайной величины. Пусть x и y — случайные величины, а $c = const$, тогда

- $Dc = 0$,
- $D(cx) = c^2 Dx$,
- $D(c + x) = Dx$,
- $D(x + y) = Dx + Dy$, если x и y — независимые случайные величины,
- $Dx = M(x^2) - (Mx)^2$.

16.6. Непрерывная случайная величина

Если все возможные значения случайной величины заполняют некоторый промежуток или объединение любого числа промежутков[36], то она называется ***непрерывной***.

Примерами непрерывных случайных величин могут служить глубина нефтяной скважины, продолжительность жизни человека или его вес. Значения ни одной из этих величин не

[36] Они могут быть конечными, полубесконечными или бесконечными, открытыми или замкнутыми.

могут быть занумерованы натуральными числами, если не задавать ограничений точности их нахождения.

Работа с непрерывными случайными величинами требует значительно более высокой математической квалификации, нежели работа с дискретными случайными величинами. Поэтому на практике нередко производится ***дискретизация*** непрерывных случайных величин путем преобразования их в дискретные. Для этого множество значений непрерывной случайной величины разбивается на некоторое количество непересекающихся интервалов, и все значения внутри каждого такого интервала отождествляются. Так, например, сортировка картошки обычно проводится по максимальному размеру клубней (по всем измерениям). Этот размер является непрерывной случайной величиной, но мы можем сделать ее дискретной, определив три возможных интервала значений: средней считается картошка с размером клубней от 10 до 12 см. Картошка с клубнями, размер которых меньше 10 см, считается мелкой, а с клубнями, размер которых больше 12 см, — крупной. При этом объективного ответа на вопрос о том, почему картошку размером 10 см следует считать средней, а не мелкой, не существует.

Определение 16.6.1.

Функцией распределения непрерывной случайной величины x называется следующая функция:

$$\Phi(\beta) = P(x < \beta), \tag{16.6.1}$$

где $P(x < \beta)$ — вероятность того, что $x < \beta$.

Поскольку функция распределения любой непрерывной случайной величины x является вероятностью некоторого события, легко видеть, что она обладает следующими свойствами:

- $0 \leqslant \Phi(\beta) \leqslant 1$,
- $\Phi(-\infty) = 0$,
- $\Phi(+\infty) = 1$.
- $P(\alpha \leqslant x < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$.

Справедливость последнего свойства следует из того, что суммой событий $x < \alpha$ и $\alpha \leqslant x < \beta$ является событие $x < \beta$, а вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Мы будем предполагать далее, что функция распределения $\Phi(\beta)$ является непрерывной функцией переменной β и имеет непрерывную производную $\Phi'(\beta)$.

► Сформулируем без доказательства одно очень важное свойство непрерывной случайной величины x, имеющей непрерывную функцию распределения. Вероятность того, что она принимает некоторое конкретное значение x_0, равна нулю

$$P(x = x_0) = 0. \tag{16.6.2}$$

Подчеркнем, что событие $x = x_0$ является событием с нулевой вероятностью, но отнюдь не невозможным событием[37].

[37] Не исключено, что этот факт вызовет недоумение читателя. Поясним его, используя рассуждения «на пальцах». Предположим, что случайной величиной x является рост человека. С теоретической точки зрения, событие $x = 1,74$ м не является невозможным, но как мы можем

Следствием (16.6.2) являются формулы

$$P(\alpha \leqslant x \leqslant \beta) = P(\alpha < x < \beta) = P(\alpha < x \leqslant \beta) =$$
$$= P(\alpha \leqslant x < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Определение 16.6.2.

Плотностью вероятности для функции распределения $\Phi(\beta)$ непрерывной случайной величины x называется следующая функция:

$$\Phi'(\beta) = \varphi(\beta). \tag{16.6.3}$$

Используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем отсюда

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a),$$

а затем и формулу

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b \varphi(t)dt, \tag{16.6.4}$$

выражающую вероятность через ее плотность.

Формула (16.6.4) позволяет дать геометрическую трактовку плотности вероятности функции распределения непрерывной

установить этот факт на практике? Любое измерение роста ограничено точностью прибора, который мы используем для измерения, поэтому полученный с помощью измерения результат никогда нельзя считать абсолютно точным. Мы можем считать лишь, что $1,74 - \varepsilon \leqslant x \leqslant 1,74 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое маленькое число, значение которого нам не известно. Именно поэтому мы должны считать, что вероятность события $x = 1,74$ м равна нулю.

случайной величины. Вероятность $P(a \leqslant x \leqslant b)$ того, что случайная величина $x \in [a, b]$, равна площади криволинейной трапеции, образованной кривой $\varphi(t)$, осью абсцисс и прямыми $t = a$ и $t = b$.

Заметим еще, что из (16.6.4) следует формула

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1, \tag{16.6.5}$$

т. к. событие $x \in (-\infty, +\infty)$ является достоверным, а значит, его вероятность равна единице.

► Таким образом, зная функцию распределения (16.6.1) непрерывной случайной величины x, мы путем дифференцирования можем найти плотность вероятности для этой функции (16.6.3), а затем использовать формулу (16.6.4) для отыскания вероятности $P(a \leqslant x \leqslant b)$ того, что переменная $x \in [a, b]$.

Самыми важными характеристиками, позволяющими судить о различных свойствах непрерывной случайной величины, как и в случае дискретной случайной величины, являются математическое ожидание и дисперсия.

► **Определение 16.6.3.**

Математическим ожиданием, или ***средним значением*** непрерывной случайной величины x, имеющей плотностью вероятности $\varphi(t)$, называется постоянная, которая находится по формуле

$$Mx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt. \tag{16.6.6}$$

Заметим, что интеграл (16.6.6) может оказаться и расходящимся. В этом случае среднее значение непрерывной случайной величины не существует.

Дисперсия непрерывной случайной величины, как и дисперсия дискретной случайной величины, находится по формуле (16.5.2).

Свойства математического ожидания и дисперсии для непрерывной и дискретной случайных величин совпадают. Они перечислены на стр. 374 и 376.

В теории вероятностей изучаются различные законы распределения непрерывных случайных величин, имеющие разнообразные практические приложения. Среди них особое положение занимает ***нормальное распределение***, которое часто используется в экспериментальных науках, технике, социологии, экономике, теории ошибок, военном деле и многих других сферах человеческой деятельности. Плотность вероятности нормального распределения подчиняется ***закону Гаусса***[38]

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (16.6.7)$$

Здесь $t_0 = Mx$ — среднее значение непрерывной случайной величины x, $\sigma = \sqrt{Dx}$ — ее среднеквадратичное отклонение. График этой функции показан на рис. 16.6.1.

Закон Гаусса применим к таким непрерывным случайным величинам, для которых характерна группировка самых больших значений плотности вероятности $\varphi(t)$ вблизи единствен-

[38] ***Карл Фридрих Гаусс*** (1777–1855) — великий математик.

ного максимума этой функции, соответствующего среднему значению Mx случайной величины x. Отклонение возможных значений x от ее среднего значения Mx характеризуется параметром $\sigma = \sqrt{Dx}$. Чем больше значение σ, тем больше этот разброс. На практике значения $t_0 = Mx$ и σ часто вычисляются путем анализа выборочных данных.

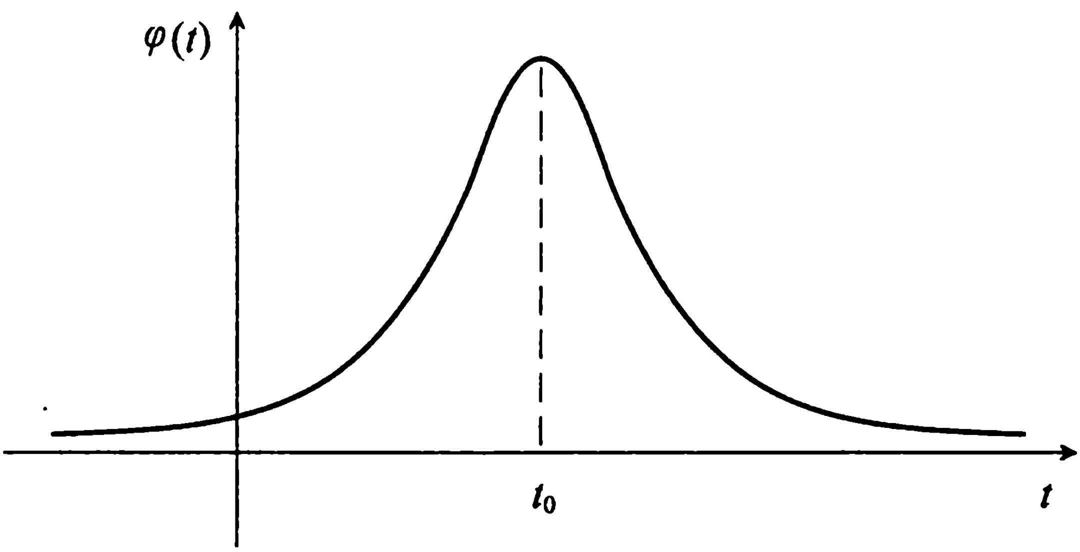


Рис. 16.6.1. Плотность вероятности нормального распределения.

16.7. Упражнения

16.7.1. Найти вероятность извлечения дамы или короля из колоды, содержащей 36 карт.

16.7.2. Найти вероятность извлечения синего или зеленого шара из ящика, содержащего 20 красных, 30 синих и 50 зеленых шаров.

16.7.3. Найти вероятность выпадения 2 или 5 очков при подбрасывании игральной кости, на гранях которой имеются соответственно 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков.

16.7.4. Найти вероятность извлечения синего и зеленого шаров из ящика, содержащего 20 красных, 30 синих и 50 зеленых шаров, если сначала извлекается один шар, выясняется его цвет, затем шар кладется на место, шары перемешиваются, а затем извлекается второй шар.

16.7.5. Найти вероятность того, что из вазы будет вынута гвоздика или роза, если в вазе находятся 1 ромашка, 2 розы, 3 фиалки и 4 гвоздики.

16.7.6. Найти вероятность извлечения сначала синего, а затем зеленого шара из ящика, который содержит 2 красных, 3 синих и 5 зеленых шаров, если сначала извлекается один шар, а затем второй шар, при этом первый шар на место не возвращается.

16.7.7. Найти вероятность того, что с полки будет взята книга по биологии или по математике, если на полке находятся 2 книги по истории, 3 книги по биологии, 4 книги по математике и 1 книга по химии.

16.7.8. Найти вероятность извлечения дамы и короля из колоды, содержащей 36 карт, если первая извлеченная карта возвращается на место, колода тасуется, а затем извлекается вторая карта.

На многотрудном пути изучения теории вероятностей вас могут подстерегать неожиданности, которые эта теория не учитывает.

Ответы.

16.7.1. 2/9. **16.7.2.** 4/5. **16.7.3.** 1/3. **16.7.4.** 3/20.

16.7.5. 3/5. **16.7.6.** 1/6. **16.7.7.** 7/10. **16.7.8.** 1/81.

17. Аналитическая геометрия

В аналитической геометрии различные геометрические объекты изучаются аналитическими методами с использованием средств алгебры и математического анализа. Мы ограничимся рассмотрением основных вопросов аналитической геометрии на плоскости. Некоторые аспекты аналитической геометрии в пространстве были слегка затронуты в разделах 11.1 и 11.3.

17.1. Прямая линия на плоскости

Общее уравнение прямой линии на плоскости (см. рис. 17.1.1) имеет вид ◄

$$Ax + By + C = 0, \tag{17.1.1}$$

где A, B и C — числовые коэффициенты, причем A и B не равны нулю одновременно.

Если $A \neq 0$, то прямая (17.1.1) пересекает ось абсцисс в точке $(-C/A, 0)$. Если же $A = 0$, то уравнение (17.1.1) принимает вид $y = b$, где $b = -C/B$. Такая прямая параллельна оси абсцисс (когда $b \neq 0$) или совпадает с этой осью (когда $b = 0$).

Если $B \neq 0$, то прямая (17.1.1) пересекает ось ординат в точке $(0, -C/B)$. Если же $B = 0$, то уравнение (17.1.1) принимает вид $x = a$, где $a = -C/A$. Такая прямая параллельна оси ординат (когда $a \neq 0$) или совпадает с этой осью (когда $a = 0$).

► При $B \neq 0$ из (17.1.1) получается привычное нам по школьному курсу алгебры ***уравнение прямой с угловым коэффициентом*** (см. рис. 17.1.1, c)

$$y = kx + b. \tag{17.1.2}$$

Здесь угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный данной прямой и осью абсцисс. Напомним, что этот угол отсчитывается от положительной полуоси абсцисс против часовой стрелки. Это уравнение получается из общего уравнения прямой (17.1.1), если разделить последнее на B и взять $k = -A/B$ и $b = -C/B$.

Пожалуй, единственным недостатком уравнения (17.1.2) является то, что оно не описывает прямых, которые параллельны оси ординат, поскольку у них $\alpha = \pi/2$, а значит, $k = \operatorname{tg}\alpha$ не существует. Общее уравнение прямой от этого недостатка свободно.

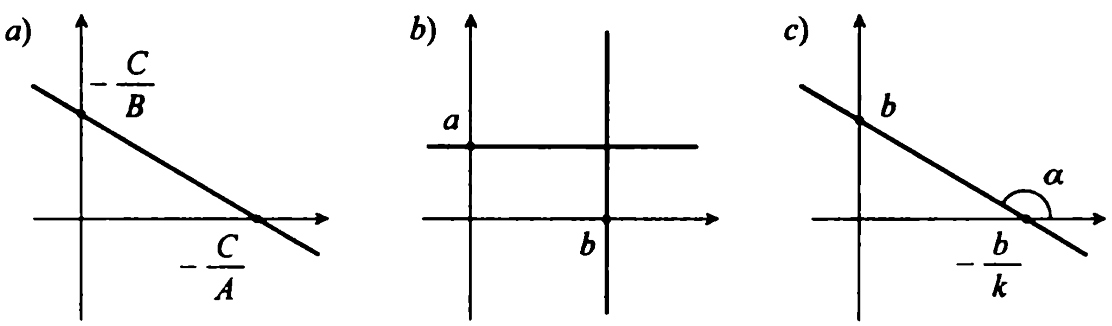


Рис. 17.1.1. Прямые линии на плоскости:
$a)$ $Ax + By + C = 0$, $b)$ $y = a$ и $x = b$, $c)$ $y = kx + b$.

Если прямая (17.1.2) проходит через некоторую заданную точку $M_1(x_1, y_1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (17.1.2), значит, $y_1 = kx_1 + b$. Подставляя значение $b = y_1 - kx_1$ в уравнение (17.1.2), получаем ***уравнение пучка прямых, проходящих через заданную точку*** $M_1(x_1, y_1)$ (см. рис. 17.1.2, a).

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{17.1.3}$$

Из этого уравнения при различных значениях углового коэффициента k получаются уравнения всех прямых, проходящих через точку M_1, за единственным исключением: прямая $x = x_1$, которая параллельна оси ординат, тоже проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, но из (17.1.3) ее получить нельзя.

Выделим из пучка прямых, проходящих через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$, такую прямую, которая проходит также и через точку $M_2(x_2, y_2)$. Подставляя координаты этой точки в уравнение (17.1.3), получаем значение коэффициента

$$k = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1).$$

Это позволяет получить из уравнения (17.1.3) ***уравнение прямой, проходящей через две заданные точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ (см. рис. 17.1.2, b).

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{17.1.4}$$

Нетрудно убедиться, что в случае, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 \neq y_2$, искомая прямая параллельна оси ординат, а ее уравнение имеет вид $x = x_1$. Если $y_1 = y_2$ и $x_1 \neq x_2$, то искомая прямая параллельна оси абсцисс, а ее уравнение имеет вид $y = y_1$. Если же $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то точки M_1 и M_2 совпадают. В этом случае задача сводится к уже рассмотренному нами случаю отыскания пучка прямых, проходящих через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$.

Найдем угол α между двумя прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Поскольку $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ (см. рис. 17.1.2, c), угол $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Но тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}. \tag{17.1.5}$$

Отсюда следует, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ ***параллельны или совпадают*** тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$, и ***перпендикулярны*** тогда и только тогда, когда $1 + k_1k_2 = 0$.

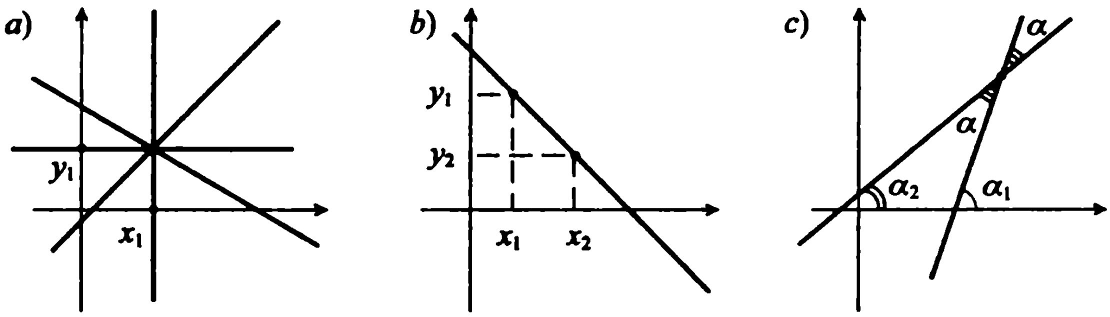


Рис. 17.1.2. *a*) пучок прямых, *b*) прямая, проходящая через две точки, *c*) угол между двумя прямыми.

Если прямые заданы в виде

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то тангенс угла α между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}. \tag{17.1.6}$$

Эти прямые параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда $A_1B_2 = A_2B_1$, и перпендикулярны тогда и только тогда, когда $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Пример 17.1.1.

Напишем уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1, 3)$ и параллельна прямой $y - 2x - 3 = 0$. Согласно (17.1.3), уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(1, 3)$, имеет вид $y - 3 = k(x - 1)$. Из требования параллельности искомой прямой и прямой $y - 2x - 3 = 0$ следует, что $k = 2$. Поэтому искомое уравнение имеет вид $y = 2x + 1$.

Пример 17.1.2.

Найдем угол α между прямыми $y = 1 - 3x$ и $y = 2x + 5$. Их угловые коэффициенты $k_1 = -3$ и $k_2 = 2$. По формуле (17.1.5) получаем $\operatorname{tg} \alpha = 1$, поэтому угол $\alpha = \pi/4$.

17.2. Кривые второго порядка

Рассмотрим уравнение вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{17.2.1}$$

где A, B, C, D, E и F — заданные постоянные коэффициенты, причем A, B и C не равны нулю одновременно. При заданных значениях коэффициентов это уравнение определяет линии на плоскости, которые называются ***кривыми второго порядка***.

Замечание.

Уравнение (17.2.1) может и не иметь вещественных решений, а значит, и не определять никаких линий. Такая ситуация имеет место, например, в случае уравнения $x^2+y^2+1=0$. При определенных значениях коэффициентов кривые второго порядка могут вырождаться в прямые или даже точки. Примером здесь может служить уравнение $x^2+y^2=0$, имеющее единственное решение $x=y=0$, которому на плоскости отвечает точка, расположенная в начале координат.

Простейшим примером кривой второго порядка является окружность $x^2+y^2=R^2$. Мы рассмотрим далее несколько более сложные кривые второго порядка — эллипс, гиперболу и параболу.

Предположим, что $A \neq 0$, $C \neq 0$, а $B=0$. Выделяя в (17.2.1) полные квадраты, получаем

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right)=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$$

Отсюда следует, что

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F. \qquad (17.2.2)$$

Введем следующие обозначения:

$$x_0=-\frac{D}{2A}, \quad y_0=-\frac{E}{2C}, \quad \Delta=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F. \qquad (17.2.3)$$

Тогда уравнение (17.2.2) принимает вид

$$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=\Delta. \qquad (17.2.4)$$

Для упрощения выкладок мы будем далее вместо уравнения (17.2.4) рассматривать уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 = \Delta, \tag{17.2.5}$$

которое получается, если в уравнении (17.2.4) сделать замену переменных $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ и опустить штрихи у новых переменных x' и y'. Эта замена соответствует сдвигу системы координат, при котором начало координат перемещается в точку (x_0, y_0).

Уравнение (17.2.5) инвариантно (сохраняет свой вид) относительно замены x на $-x$ и замены y на $-y$. Это означает, что кривая второго порядка (если она существует), порожденная уравнением (17.2.5), симметрична относительно осей ординат и абсцисс, а также относительно начала координат.

17.3. Эллипс

Рассмотрим случай, когда коэффициенты A и C уравнения (17.2.5) имеют одинаковые знаки. Для определенности мы будем считать, что $A > 0$ и $C > 0$. В противном случае мы можем умножить обе части уравнения (17.2.5) на минус единицу и заменить A на $-A$, C на $-C$ и Δ на $-\Delta$.

Возможны три случая.

1) Если $\Delta > 0$, то уравнение (17.2.5) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{17.3.1}$$

где $a = \sqrt{\Delta/A}$, $b = \sqrt{\Delta/C}$.

Уравнение (17.3.1) порождает кривую второго порядка (см. рис. 17.3.1), которая называется ***эллипсом***, а само это уравнение называется ***каноническим уравнением эллипса***. Числа a и b называются ***полуосями эллипса***, а точки $(\pm a,\, 0)$ и $(0,\, \pm b)$ — ***вершинами эллипса***.

Если $a = b$, то уравнение (17.3.1) определяет окружность с центром в начале координат и радиусом a. Поэтому окружность является частным случаем эллипса. С другой стороны, эллипс можно рассматривать как окружность единичного радиуса, равномерно сжатую или растянутую вдоль координатных осей, поскольку замена $x' = x/a$ и $y' = y/b$ переводит уравнение (17.3.1) в уравнение окружности $(x')^2 + (y')^2 = 1$.

Отметим также, что из (17.3.1) вытекают неравенства $|x| \leqslant a$ и $|y| \leqslant b$.

Предположим для определенности, что $a \geqslant b$.

На большей оси эллипса располагаются две точки: $F_1(-c,\, 0)$ и $F_2(c,\, 0)$, которые называются ***фокусами эллипса***. Здесь $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Можно доказать, что для любой точки $M(x,\, y)$, лежащей на эллипсе, сумма расстояний r_1 и r_2 от этой точки до фокусов является постоянной величиной и удовлетворяет равенству $r_1 + r_2 = 2a$. Это свойство нередко используют в качестве определения эллипса.

2) Если свободный член уравнения (17.2.5) $\Delta < 0$, то данное уравнение вещественных решений не имеет и кривую второго порядка не порождает.

3) Если же $\Delta = 0$, то уравнение (17.2.5) имеет единственное решение $x = y = 0$, которому соответствует случай, когда кривая второго порядка вырождается в точку.

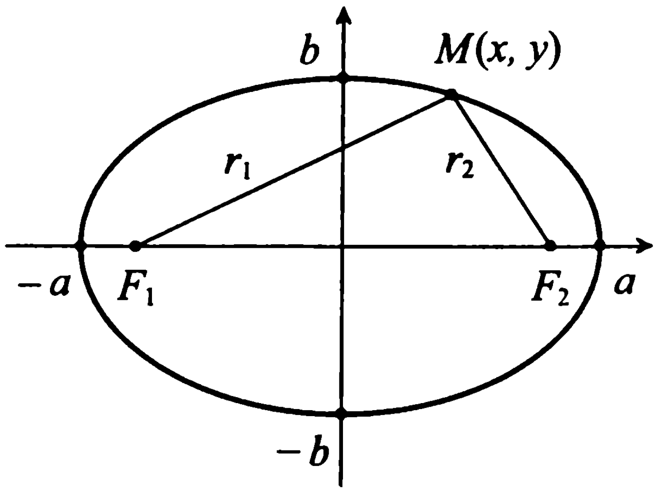


Рис. 17.3.1. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Пример 17.3.1.

Выясним тип кривой, порожденной уравнением

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 40y + 73 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, получаем

$$9(x-1)^2 + 4(y+5)^2 = 36,$$

а затем

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1.$$

Это — уравнение эллипса с центром в точке $(1, -5)$.

17.4. Гипербола

Рассмотрим случай, когда коэффициенты A и C уравнения (17.2.5) имеют разные знаки. Для определенности мы будем считать, что $A > 0$ и $C < 0$.

Возможны три случая.

1) Если $\Delta > 0$, то уравнение (17.2.5) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{17.4.1}$$

где $a = \sqrt{\Delta/A}$, $b = \sqrt{\Delta/(-C)}$.

Уравнение (17.4.1) порождает кривую второго порядка (см. рис. 17.4.1), которая называется ***гиперболой***, а само это уравнение называется ***каноническим уравнением гиперболы***. Числа a и b называются ***полуосями гиперболы***, а точки $(\pm a, 0)$ — ***вершинами гиперболы***.

Гипербола (17.4.1) имеет две ветви, одна из которых существует при $x \leqslant -a$, а другая — при $x \geqslant a$.

На горизонтальной оси гиперболы (17.4.1) располагаются точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, которые называются ***фокусами гиперболы***. Здесь постоянная $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Можно доказать, что для любой точки $M(x, y)$, лежащей на гиперболе, разность расстояний r_1 и r_2 от этой точки до фокусов является постоянной величиной и удовлетворяет равенству $r_1 - r_2 = 2a$.

Из (17.4.1) следует, что $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Значит, при $x \to \pm\infty$ ветви гиперболы стремятся к ***наклонным асимптотам*** $y = \pm\frac{b}{a}x$.

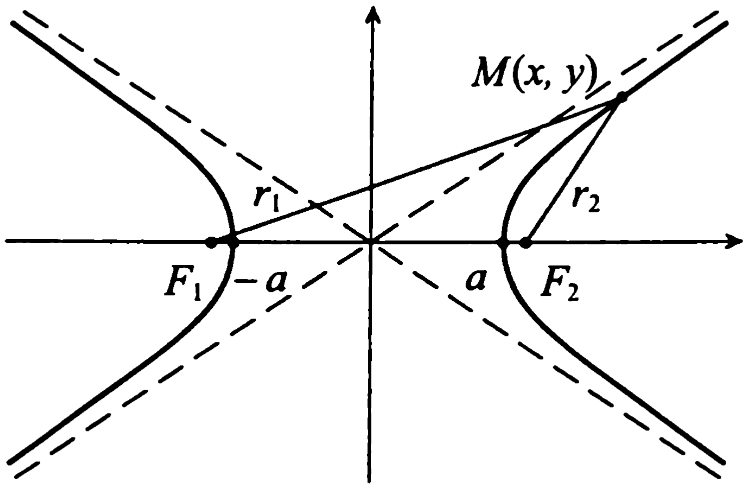


Рис. 17.4.1. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $a > b$.

2) Если свободный член уравнения (17.2.5) $\Delta < 0$, то уравнение (17.2.5) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = -1, \tag{17.4.2}$$

где $a_1 = \sqrt{-\Delta/A}$, $b_1 = \sqrt{\Delta/C}$.

Уравнение (17.4.2) также порождает ***гиперболу***, которая имеет две ветви. Одна из них существует при $y \leqslant -b$, другая — при $y \geqslant b$. Точки $(0, -b)$ и $(0, b)$ называются вершинами этой гиперболы.

При $x \to \pm\infty$ ветви этой гиперболы стремятся к наклонным асимптотам $y = \pm b_1 x/a_1$.

3) Если же $\Delta = 0$, то уравнение (17.2.5) распадается на два уравнения, которые порождают две прямые $\sqrt{A}x \pm \sqrt{-C}y = 0$.

Отметим, что при $b = a$ уравнение (17.4.1) принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Можно доказать, что с помощью замены переменных, соответствующей повороту координатных осей на угол $\pi/4$, в новых переменных получится уравнение $xy = k$.

Это означает, что графиком обратно пропорциональной зависимости, хорошо нам известным по школьному курсу алгебры, также является гипербола.

Пример 17.4.1.

Выясним тип кривой, порожденной уравнением

$$3x^2 - 2y^2 + 6x + 8y - 11 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, получаем

$$3(x+1)^2 - 2(y-2)^2 = 6,$$

а затем

$$\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1.$$

Это — уравнение гиперболы с центром в точке $(-1,\ 2)$.

17.5. Парабола

Уравнение (17.2.1) при $A = B = 0$, $C \neq 0$ и $D \neq 0$ имеет вид

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Выделяя здесь полный квадрат, получаем

$$C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -Dx + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Это уравнение приводится к виду

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \tag{17.5.1}$$

где $y_0 = -\dfrac{E}{2C}$, $x_0 = \dfrac{E^2}{4DC} - \dfrac{F}{D}$, $p = -\dfrac{D}{2C}$.

Для простоты мы будем далее считать, что $p > 0$, и вместо уравнения (17.5.1) будем рассматривать уравнение

$$y^2 = 2px, \tag{17.5.2}$$

которое получается, если в (17.5.1) сделать замену $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ и опустить штрихи у новых переменных x' и y'. Эта замена соответствует сдвигу системы координат, при котором начало координат перемещается в точку (x_0, y_0).

Уравнение (17.5.2) порождает кривую второго порядка (см. рис. 17.5.1), которая называется ***параболой***, а само это уравнение называется ***каноническим уравнением параболы***. Эта парабола симметрична относительно оси абсцисс, ее ветви вытянуты вдоль этой оси, а вершина располагается в начале координат.

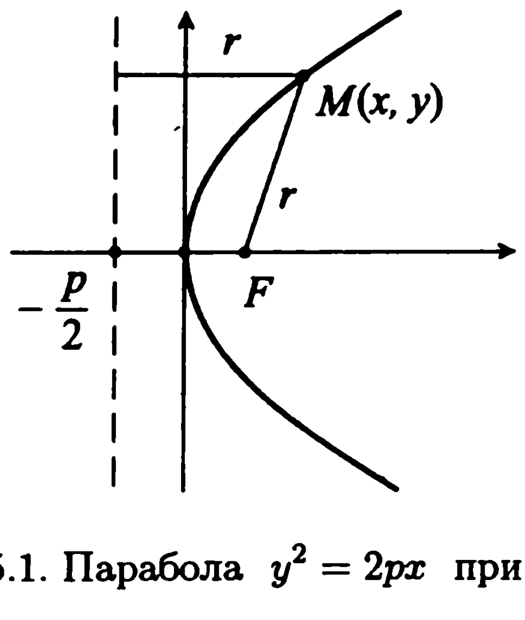


Рис. 17.5.1. Парабола $y^2 = 2px$ при $p > 0$.

На оси абсцисс находится точка $F(p/2, 0)$, которая называется ***фокусом параболы***. Вертикальная прямая $x = -p/2$

называется ***директрисой параболы***. Можно доказать, что для любой точки $M(x, y)$, лежащей на параболе, расстояние r от этой точки до фокуса равно расстоянию от этой точки до директрисы.

Если заменить обозначения $x \Rightarrow y$ и $y \Rightarrow x$, то каноническое уравнение параболы примет вид $x^2 = 2py$. Это — парабола, ветви которой вытянуты вдоль оси ординат.

Пример 17.5.1.

Выясним тип кривой, порожденной уравнением

$$y^2 - 6x + 4y + 22 = 0.$$

Выделяя полный квадрат, получаем

$$(y + 2)^2 = 6(x - 3).$$

Это — уравнение параболы с вершиной в точке $(3, -2)$.

17.6. Упражнения

17.6.1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 3)$ и параллельной прямой $y - 2x + 3 = 0$.

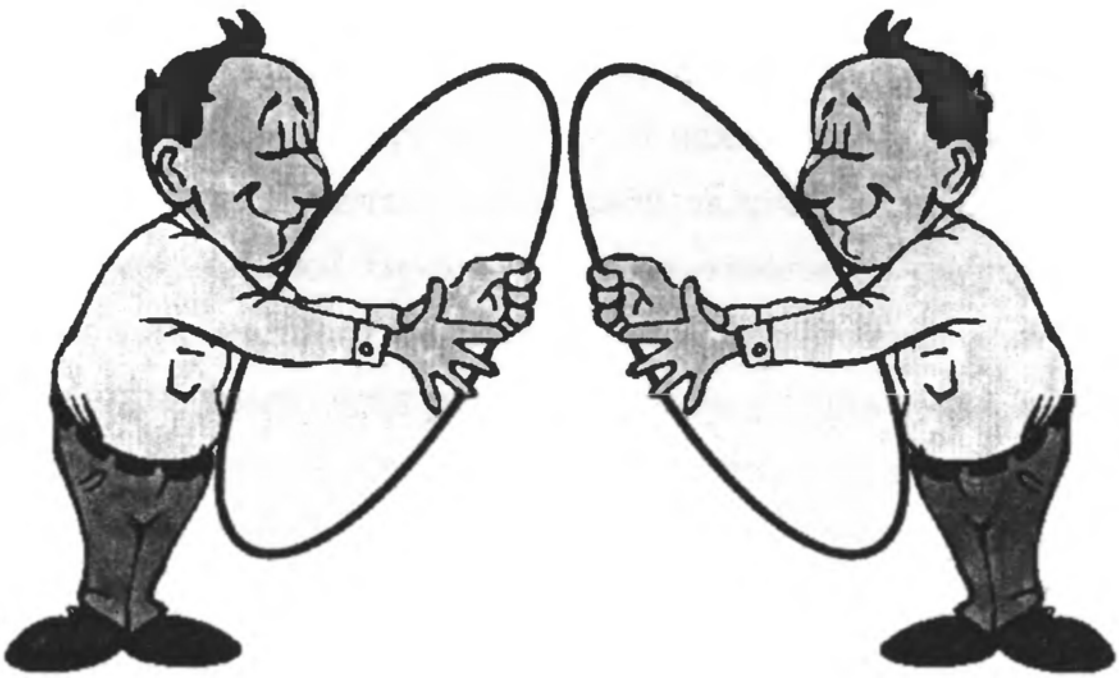
17.6.2. Найти угол α между прямыми $4y - 3x + 12 = 0$ и $7y + x - 14 = 0$.

17.6.3. Найти угол α между прямыми $7y + x - 14 = 0$ и $7y + x + 14 = 0$.

17.6.4. Найти угол α между прямыми $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{3}$.

Выяснить тип кривых второго порядка, порожденных следующими уравнениями.

17.6.5. $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$.
17.6.6. $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$.
17.6.7. $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0$.
17.6.8. $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$.



Братья близнецы Иван Петров и Петр Иванов заслужили уважение однокурсников виртуозной техникой превращения окружности в эллипс путем равномерного сжатия.

Ответы.

17.6.1. $y = 2x + 1$. **17.6.2.** $\alpha = \pi/4$.

17.6.3. $\alpha = 0$. **17.6.4.** $\alpha = 0$.

17.6.5. Парабола $(y-1)^2 = 2(x+3)$.

17.6.6. Эллипс $\dfrac{(x+2)^2}{5} + \dfrac{(y-3)^2}{3} = 1$.

17.6.7. Гипербола $\dfrac{(y-3)^2}{2} - x^2 = 1$.

17.6.8. Гипербола $\dfrac{(x-7)^2}{3} - \dfrac{(y+7)^2}{2} = 1$.

18. Численные методы

Численные методы[39] используются для отыскания приближенных решений задач, которые невозможно или нецелесообразно решать аналитическими методами.

В современном мире потребность в использовании численных методов очень высока, поскольку во многих случаях ответ нужно получить достаточно быстро, т. к. в противном случае от него не будет никакой пользы. Зачем может понадобиться прогноз погоды на завтра, который находится путем решения весьма сложной начально-краевой задачи, если он будет получен через неделю? Время, которое отводится на коррекцию траектории баллистической ракеты, измеряется минутами, а время для изменения режима работы станка с автоматическим управлением — секундами. Выполнять такие вычисления достаточно быстро могут только компьютеры, имеющие необходимые программные комплексы, реализующие различные численные методы.

Типичной является ситуация, когда решение сложной задачи разбивается на несколько этапов, на каждом из которых требуется решить некоторую стандартную задачу вычислительной математики. Рассмотрением некоторых из таких стандартных задач мы и будем заниматься в данной главе.

[39] Их часто называют также методами приближенных вычислений и вычислительными методами.

Для каждой из этих задач существует множество различных методов численного решения, но по большей части преимущества тех или иных методов над другими не являются значительными. Мы рассмотрим лишь такие методы, которые представляются достаточно простыми и эффективными, сосредоточившись прежде всего на рассмотрении идей, которые лежат в основе метода, а не на способах его реализации в вычислениях на калькуляторе или компьютере.

18.1. Оценка точности вычислений

При решении приближенными методами практически любой математической задачи, связанной с некоторой математической моделью, имеются четыре основных источника погрешности, которую будет иметь результат:

1) сама модель, которая никогда не бывает абсолютно точным отражением действительности;

2) исходные данные для модели, источником которых часто являются эксперименты или натурные наблюдения;

3) используемый метод приближенных вычислений;

4) невозможность проводить абсолютно точные расчеты на компьютере, когда программа работает с числами, которые не являются целыми. Любые арифметические операции с такими числами имеют некоторую погрешность, причем в процессе вычислений эти погрешности могут накапливаться.

Перечисленные выше источники погрешностей являются объективными, но нельзя забывать и о субъективном источнике ошибок — человеческом факторе.

Среди программистов популярна следующая шутка: «в любой сколь угодно маленькой программе имеется сколь угодно много ошибок». Как и положено, эта шутка содержит лишь долю шутки. Ошибки в компьютерных программах были, есть и будут всегда. Не учитывать этот факт человек, занимающийся компьютерными расчетами, не может.

Конечно же, речь здесь не идет о грубых программных ошибках, приводящих к неправильной работе программы в стандартной ситуации. Такие программы не заслуживают даже обсуждения, их следует просто выкидывать, но даже программы, которые в типичной ситуации работают абсолютно правильно. в исключительных ситуациях могут функционировать неправильно. Примером тому служит операционная система Windows Vista, ошибки которой иногда приводили даже к «зависанию» компьютера. Не свободны от ощибок и программы, проводящие те или иные вычисления. Вычислитель всегда должен ожидать, что для каких-то значений параметров задачи используемая им программа может дать неправильный ответ.

Мы не можем в этом учебнике подробно обсуждать многочисленные и порой весьма непростые аспекты исследования возникновения погрешностей при практической реализации различных численных методов. Эти вопросы рассматриваются в специальной литературе. Мы же ограничимся лишь оценкой погрешности, порождаемой численными методами, которые мы будем изучать.

Для оценки точности вычислений используются понятия допустимой абсолютной и относительной погрешности. Предположим, что в результате приближенных вычислений было получено значение некоторой величины, равное x, а точное значение этой величины равно x_*.

► **Определение 18.1.1.**

Если известно, что выполняется неравенство

$$|x_* - x| < \varepsilon, \tag{18.1.1}$$

то величина $\varepsilon > 0$ называется ***допустимой абсолютной погрешностью вычислений.***

Неравенство (18.1.1) равносильно двойному неравенству

$$x - \varepsilon < x_* < x + \varepsilon.$$

Иногда его записывают в виде $x_* = x \pm \varepsilon$.

► **Определение 18.1.2.**

Если известно, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{x_* - x}{x}\right| < \delta, \tag{18.1.2}$$

то величина $\delta > 0$ называется ***допустимой относительной погрешностью вычислений.***

Неравенство (18.1.2) равносильно двойному неравенству

$$1-\delta < \frac{x_*}{x} < 1+\delta.$$

Проиллюстрируем сказанное на классическом примере, который нередко приводится в различных книгах по методам приближенных вычислений.

Пример 18.1.1.

Предположим, что каким-либо численным методом мы нашли приближенное значение $x = 3,14$ числа $x_* = \pi = 3,1415926\ldots$ Тогда абсолютная погрешность наших вычислений примерно равна $0,00159$. Если такая точность нас устраивает, то в качестве допустимой абсолютной погрешности вычислений можно брать значение $\varepsilon = 0,0016$, а в качестве допустимой относительной погрешности — значение $\delta = \varepsilon/3,14 \approx 0,00051$.

Относительную погрешность иногда задают в процентах, умножая значение δ на 100%. В данном примере в этом случае можно было бы говорить о допустимой относительной погрешности в 0,051%.

Какую из двух погрешностей лучше использовать в вычислениях? Дать ответ на этот вопрос невозможно. Все зависит от специфики решаемой задачи, целей проведения расчетов и выбранного численного метода. Идеальным, вероятно, следует считать вариант, когда оценивается как абсолютная, так и относительная погрешность. При этом, однако, следует иметь в виду, что для больших по модулю значений x_* и маленьких значений допустимой абсолютной погрешности ε добиться выполнения неравенства (18.1.1), возможно, не удастся, а для маленьких по модулю значений x_* и маленьких значений допустимой относительной погрешности δ недостижимой целью может оказаться выполнение неравенства (18.1.2).

Прямое использование неравенств (18.1.1) и (18.1.2) в вычислениях, как правило, невозможно, поскольку точное значение x_* нам бывает заранее известно лишь при проведении тестовых расчетов. Поэтому на практике приходится использовать какие-то косвенные признаки правильности полученных результатов. Так, например, часто проводят расчет x_* двумя различными методами. Если полученные при этом значения x и x' оказываются близкими, то считается, что результату данного расчета можно доверять. Строго обосновать такой подход невозможно, т. к. из близости x и x' не следует близость этих значений к x_*, но вероятность того, что близость x и x' является просто случайностью, крайне мала.

18.2. Аппроксимация функций

Аппроксимация (приближение) некоторой функции $y = f(x)$, заданной обычно в виде таблицы, заключается в подборе такой функции $y = \varphi(x)$, значения которой в некотором смысле близки к значениям $f(x)$. Необходимость в этом нередко возникает, например, когда требуется найти $f(x_*)$, но значение x_* в таблице отсутствует.

Мы будем предполагать, что функция $y = f(x)$ задана в виде таблицы

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_1)$	$\ldots$	$y_n = f(x_n)$

содержащей $n+1$ значение аргумента x_k (эти значения называются ***узлами***) и $n+1$ значение функции $y_k = f(x_k)$.

Если значение аргумента x, для которого требуется провести аппроксимацию, находится внутри интервала (x_0, x_n), то говорят, что требуется выполнить ***интерполяцию*** функции $y = f(x)$, иначе говорят, что требуется выполнить ***экстраполяцию*** данной функции. Нетрудно догадаться, что задача экстраполяции труднее задачи интерполяции. Если значение x далеко отстоит от концов интервала (x_0, x_n), то ошибка экстраполяции может быть весьма велика[40].

Чаще всего для аппроксимации функций используются полиномы (многочлены). Способы их построения различны. Мы рассмотрим лишь один из них.

Можно доказать, что существует единственный многочлен не выше n-й степени $\varphi(x)$, значения которого в узлах x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ совпадают с известными значениями $y_k = f(x_k)$ функции $y = f(x)$. Такой полином называется ***многочленом Лагранжа***[41]. Он имеет вид

$$\varphi(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n),$$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$$

Формула Лагранжа привлекает в первую очередь своей универсальностью. Она может использоваться как для интерполяции, так и для экстраполяции, и формально не предъявляют

[40] Именно это является основной причиной того, что долгосрочные прогнозы погоды не часто сбываются.

[41] ***Жозеф Луи Лагранж*** (1736–1813) — великий французский математик.

никаких требований к аппроксимируемой функции и к расположению узлов аппроксимации. Этот факт, впрочем, не стоит слишком преувеличивать, поскольку трудно себе представить, что полином, который всегда представляет собой непрерывную функцию, сможет хорошо приближать при всех x, например, функцию, имеющую разрывы.

Оценка погрешности различных формул интерполяции и экстраполяции представляет собой трудную задачу. Мы ее рассматривать не будем.

Заметим еще, что приближенные формулы, полученные в разделе 12.4, также можно использовать для аппроксимации функций.

Пример 18.2.1.

Построим многочлен Лагранжа третьей степени для функции $f(x) = 2^x$, заданной в виде таблицы.

$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
$y_0 = 1$	$y_1 = 2$	$y_2 = 4$	$y_3 = 8$

Сначала получаем коэффициенты многочлена Лагранжа

$$L_0(x) = -\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6), \quad L_1(x) = \frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x),$$

$$L_2(x) = -\frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x), \quad L_3(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x),$$

а затем строим и сам многочлен Лагранжа

$$\varphi(x) = \frac{1}{6}(x^3 + 5x + 6).$$

Убедиться в правильности выполненных нами вычислений несложно, подставив в $\varphi(x)$ значения x_k, имеющиеся в таблице, и увидев, что в узлах $\varphi(x_k) = y_k$. Чтобы оценить результаты аппроксимации, найдем $\varphi(1,5) = 135/48 = 2,8125$. Поскольку $f(1,5) = 2^{1,5} \approx 2,8284$, результат интерполяции в точке $x = 1,5$ можно считать вполне приемлемым. Таковым является и результат экстраполяции в точке $x = -0,1$, т. к. $\varphi(-0,1) = 0,9165$, а значение $f(-0,1) \approx 0,933$. А вот результат экстраполяции в точке $x = -1$ дает уже значительную ошибку, поскольку $\varphi(-1) = 0$, а точное значение $f(-1) = 0,5$. Это и неудивительно, т. к. точка $x = -1$ находится слишком далеко от отрезка [1, 3], на котором строился полином Лагранжа.

18.3. Численное дифференцирование

Если функция $f(x)$, которую требуется продифференцировать, задана в виде таблицы, то можно сначала аппроксимировать ее, например, полиномом Лагранжа $\varphi(x)$, а затем считать, что $f'(x) \approx \varphi'(x)$. Главным преимуществом этого метода является возможность получить приближенную аналитическую формулу для производной, но это достоинство далеко не всегда может компенсировать трудности, связанные с оценкой погрешности такой аппроксимации.

В тех случаях, когда значения функции $f(x)$ можно находить при любых значениях аргумента, близких к точке, в которой нужно продифференцировать эту функцию, более эффективными могут оказаться методы, основанные на разложении $f(x)$ в ряд Тейлора (12.3.7).

Предположим, что $x \to a$. Сохраняя в (12.3.7) лишь первые три члена, получаем

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2. \tag{18.3.1}$$

Здесь отброшенные слагаемые малы по сравнению с теми, которые мы сохранили.

Возьмем $h = x - a$. Эта величина называется ***шагом дифференцирования.*** Мы будем считать, что абсолютная величина шага $|h|$ мала.

Формула (18.3.1) приводится к виду

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2. \tag{18.3.2}$$

Отбрасывая в (18.3.2) последнее слагаемое, получаем простейшую формулу для аппроксимации производной

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{18.3.3}$$

Заменяя в формуле (18.3.2) h на $-h$, получаем

$$f(a-h) \approx f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2. \tag{18.3.4}$$

Вычитая (18.3.4) из (18.3.2), получаем формулу для аппроксимации производной

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}, \tag{18.3.5}$$

которая является более точной, чем формула (18.3.3).

Графическая интерпретация аппроксимации производной с помощью полученных нами формул показана на рис. 18.3.1. Поскольку производная в точке $x = a$ равна тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс, аппроксимация производной состоит в замене касательной секущей. В формуле (18.3.3) касательная заменяется секущей AC, а в формуле (18.3.5) — секущей BC.

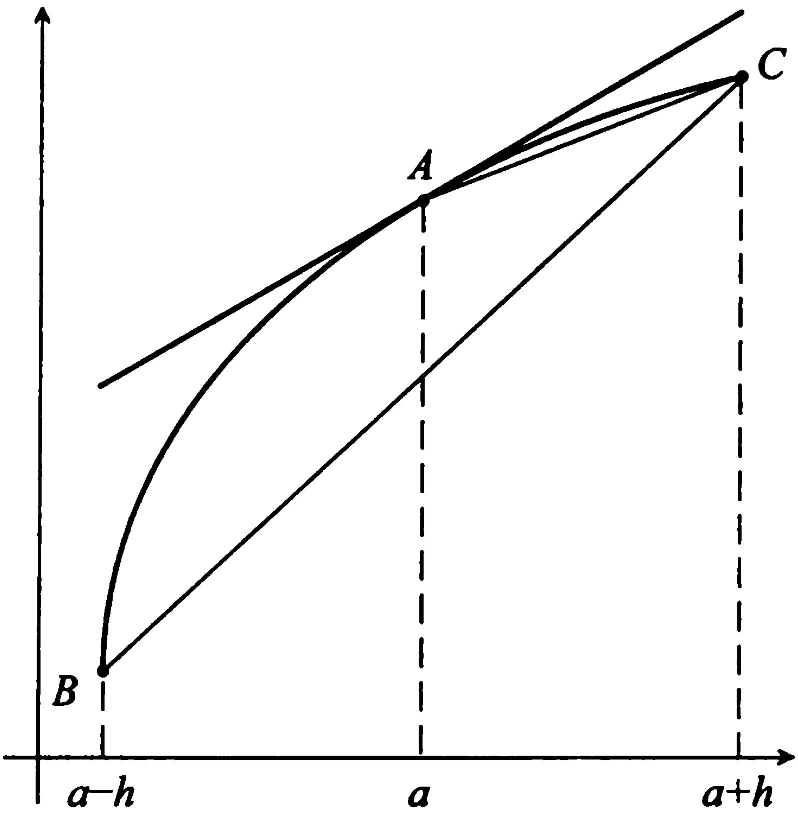


Рис. 18.3.1. Аппроксимация производной.

Складывая (18.3.2) и (18.3.4), получаем простейшую формулу для аппроксимации второй производной

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}. \tag{18.3.6}$$

Аналогично можно получить формулы для аппроксимации производных более высокого порядка.

Пример 18.3.1.

Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $f'(x) = \cos x$ и $f'(0) = \cos 0 = 1$. Возьмем $h = 0,01$. Тогда по формуле (18.3.3) получаем $f'(0) \approx \approx 0,999983$. Эту аппроксимацию производной в точке $x = 0$ можно считать очень хорошей.

Замечание.

С теоретической точки зрения, погрешности полученных нами формул приближенного дифференцирования уменьшаются, когда уменьшается абсолютная величина шага дифференцирования h. На практике, однако, нас подстерегает ловушка, связанная с тем, что во всех этих формулах при маленьких $|h|$ приходится вычислять разности близких чисел, а это может привести к потере точности расчетов. Подходящее значение шага дифференцирования h обычно подбирается экспериментально, путем проведения дополнительных вычислений со значениями шага $2h$ и $h/2$ и последующим анализом полученных результатов. Полезно также сопоставлять результаты расчетов, выполненных по различным формулам.

18.4. Численное интегрирование

Для отыскания неопределенного и определенного интегралов можно, как и в случае численного дифференцирования, применить предварительную численную аппроксимацию функции, которую нужно проинтегрировать. Результат получается в виде аналитической формулы для первообразной или в виде численного значения определенного интеграла. Оценить погрешность такой аппроксимации трудно.

Альтернативу этому методу порождает тот факт, что отыскание интеграла легко сводится к решению задачи Коши, для которой имеется много весьма удобных и надежных методов численного решения, в том числе и таких, которые позволяют легко контролировать точность вычислений.

Легко видеть, что интеграл с переменным верхним пределом

$$y(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{18.4.1}$$

является решением задачи Коши

$$y'(t) = f(t), \qquad y(a) = 0 \tag{18.4.2}$$

на отрезке $[a, x]$. Решая эту задачу численно (см. раздел 18.6), мы получим приближенное значение интеграла (18.4.1), т. е. значение той первообразной, которая обращается в ноль при $x = a$.

Для вычисления определенных интегралов разработано немало приближенных методов, основанных на том, что значение определенного интеграла можно трактовать как площадь криволинейной трапеции. Простейшим из них является ***метод прямоугольников***.

Предположим, что требуется найти определенный интеграл

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{18.4.3}$$

Значение интеграла S равно площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу — осью абсцисс, слева — прямой $x = a$, а справа — прямой $x = b$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n одинаковых частей точками

$$x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + nh = b,$$

где ***шаг интегрирования*** $h = (b - a)/n$.

Примем за приближенное значение площади S сумму площадей прямоугольников, показанных на рис. 18.4.1. Тогда

$$S \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \tag{18.4.4}$$

т. к. основания у всех этих прямоугольников равны h, а высоты определяются значениями $f(x_k)$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

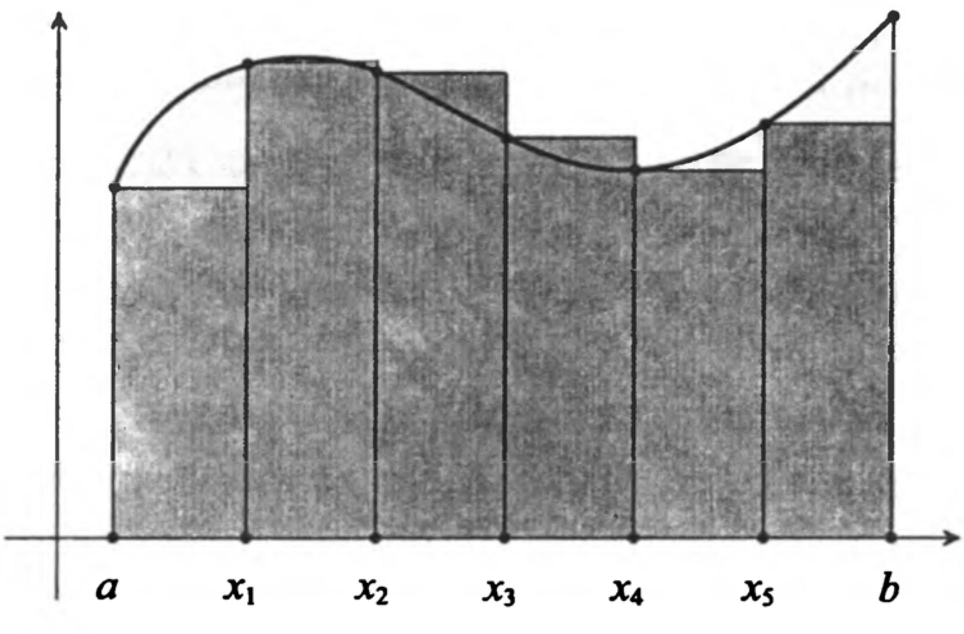


Рис. 18.4.1. Метод прямоугольников при $n = 6$.

Поскольку значение b в формуле прямоугольников (18.4.4) может быть выбрано любым, данный метод позволяет рассчитать и таблицу значений той первообразной, которая обращается в ноль при $x = a$.

Для контроля точности вычислений методом прямоугольников обычно применяется следующая схема. Вычисление значения интеграла (18.4.3) проводится для некоторого фиксированного значения n и удвоенного значения $2n$ количества отрезков, на которые разбивается промежуток $[a, b]$. При этом шаг интегрирования автоматически уменьшается в два раза, что, вообще говоря, увеличивает точность аппроксимации. Если полученные значения интеграла оказываются достаточно близкими, то вычисления прекращаются, иначе количество отрезков интегрирования опять удваивается и вычисления повторяются и т. д. Если данная схема расчетов не приводит к успеху, то это, скорее всего, свидетельствует о том, что для расчета интеграла требуется применять другие методы численного интегрирования, которые дают большую точность, нежели метод прямоугольников.

18.5. Отыскание корней уравнений

Рассмотрим задачу отыскания вещественных корней уравнения $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Предположим, что на концах этого отрезка функция имеет разные знаки, т. е. $f(a)f(b) < 0$. Из непрерывности функции $f(x)$ на $[a, b]$ вытекает тогда, что существует такое $x_* \in [a, b]$, что $f(x_*) = 0$. Это и есть искомый корень уравнения $f(x) = 0$. Мы будем предполагать, что других корней на этом отрезке нет.

Самым простым и самым безотказным методом решения данной задачи является ***метод половинного деления***, который нередко называют еще ***методом дихотомии*** (см. рис. 18.5.1).

Найдем середину $c = (a+b)/2$ отрезка $[a, b]$ и вычислим $f(c)$. Возможны три случая.

1) Если $f(c) = 0$, то работа закончена, т. к. $x_* = c$.

2) Если $f(c)f(a) < 0$, то искомый корень находится на отрезке $[a, c]$. Мы вернулись в исходную ситуацию, когда имеется отрезок, содержащий искомый корень, но длина этого отрезка уменьшилась в два раза. В этом случае, полагая $b = c$, мы можем продолжить поиск корня, деля пополам новый отрезок $[a, b]$.

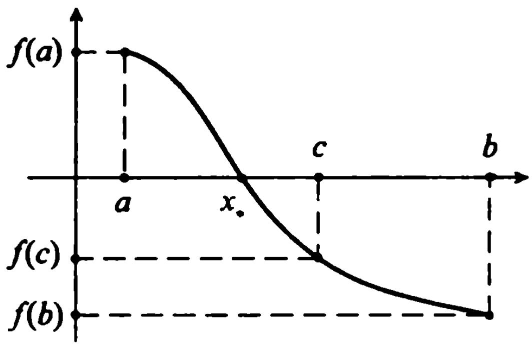


Рис. 18.5.1. Метод дихотомии.

3) Если $f(c)f(b) < 0$, то искомый корень находится на отрезке $[c, b]$. В этом случае мы также возвращаемся в исходную ситуацию, когда имеется отрезок, содержащий искомый корень, но длина этого отрезка уменьшилась в два раза. Полагая $a = c$, мы можем продолжить поиск корня, деля пополам новый отрезок $[a, b]$.

Таким образом, на каждом шаге метода половинного деления длина отрезка $[a, b]$, содержащего искомый корень, уменьшается в два раза. Процесс прекращается, когда длина этого отрезка становится меньше заданного числа $2\varepsilon > 0$, определяющего необходимую точность вычислений. После этого обычно полагают $x_* = (a+b)/2$. Это гарантирует, что абсолютная погрешность результата вычислений не превосходит ε.

Замечание.

> Перед использованием данного метода рекомендуется нарисовать график функции $y = f(x)$ и убедиться, что на отрезке $[a, b]$ имеется лишь один корень изучаемой функции. Случай наличия у функции кратных корней (нескольких корней, значения которых совпадают) мы рассматривать не будем.

При отыскании корней уравнения $f(x) = 0$ серьезную конкуренцию методу половинного деления составляет ***метод Ньютона***, который часто называют ***методом касательных***. Он применим в случае, когда функция $f(x)$ является не только непрерывной, но и дифференцируемой в некоторой окрестности искомого корня x_*.

Пусть у нас имеется некоторое значение x_0, лежащее не очень далеко от интересующего нас корня $x = x_*$ уравнения $f(x) = 0$ (см. рис. 18.5.2).

Построим касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $A_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Как было показано в разделе 8.5, ее уравнение имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{18.5.1}$$

Эта касательная пересекает ось абсцисс в некоторой точке $(x_1, 0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению касательной. Подставляя $x = x_1$ и $y = 0$ в уравнение (18.5.1), получаем

$$-y_0 = f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

откуда следует, что

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{18.5.2}$$

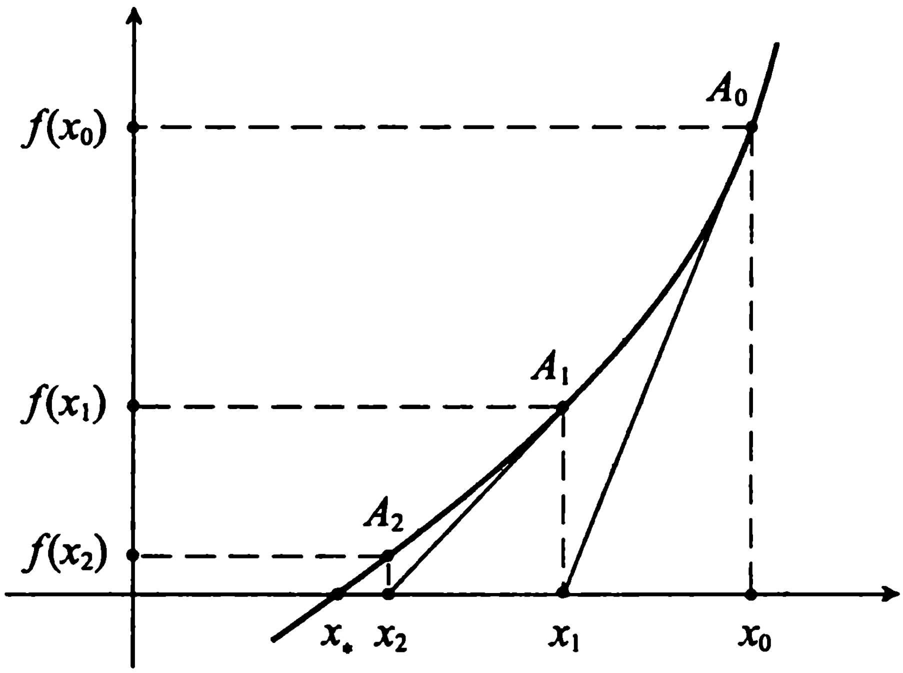


Рис. 18.5.2. Метод Ньютона.

На следующем шаге строим касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $A_1(x_1, y_1)$, где $y_1 = f(x_1)$. Ее уравнение имеет вид

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1). \tag{18.5.3}$$

Эта касательная пересекает ось абсцисс в некоторой точке $(x_2, 0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению касательной. Подставляя $x = x_2$ и $y = 0$ в уравнение (18.5.3), получаем

$$-y_1 = f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

откуда следует, что

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{18.5.4}$$

Продолжая этот процесс, получаем последовательность значений x_n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots), \tag{18.5.5}$$

дающую координаты точек, в которых построенные нами касательные пересекают ось абсцисс. Можно доказать, что при определенных условиях эта последовательность сходится к искомому корню x_* уравнения $f(x) = 0$.

Замечания.

1) Процедура построения последовательности значений x_n называется ***итерационным процессом***.

2) Легко видеть, что реализация итерационного процесса не всегда приводит к успеху. Так, скажем, в случае, когда на какой-либо итерации окажется, что производная $f'(x_n)$ очень близка к нулю, мы, быть может, не сумеем найти x_{n+1}.

3) Чтобы начать вычисления корня уравнения $f(x) = 0$ методом Ньютона, нужно иметь некоторое ***начальное приближение*** x_0 для искомого корня x_*. Какая-либо строгая теория, позволяющая найти x_0, отсутствует. На практике обычно такое начальное приближение x_0 может быть найдено графически.

4) Если итерационный процесс Ньютона сходится, то он, как правило, сходится достаточно быстро. На практике обычно уже после 5–7 итераций получаются значения x_n, достаточно близкие к корню. Признаком того, что это уже произошло, служит малость разницы между значениями x_n, полученными на двух последовательных итерациях, т. е. малость величины $|x_{n+1}-x_n|$. В этом случае итерационный процесс прекращают и принимают за приближенное значение искомого корня величину x_{n+1}. Верным признаком отсутствия сходимости итерационного процесса служит возрастание величины $|x_{n+1} - x_n|$ с ростом n. В этом случае рекомендуется попытаться найти более точное начальное приближение x_0.

5) Если уравнение $f(x) = 0$ имеет несколько корней, то для каждого из них метод Ньютона нужно применять отдельно.

6) Метод Ньютона применим и в случае, когда производную $f'(x)$ нельзя найти аналитически. Такая ситуация имеет место, например, когда значения $f(x)$ вычисляет некоторая компьютерная программа. В этом случае значение производной нужно находить по какой-либо формуле приближенного дифференцирования, скажем, по формуле (18.3.3). Скорость сходимости итерационного процесса при этом обычно несколько уменьшается.

7) Метод Ньютона пригоден и для отыскания комплексных корней.

Пример 18.5.1

Найдем методом Ньютона один из корней уравнения $x^2 - 9 = 0$. Точный ответ нам известен: корнями этого уравнения являются числа $x_* = \pm 3$. Производная функции $f(x) = x^2 - 9$ равна $f'(x) = 2x$. Поэтому для итерационного процесса мы должны использовать формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 9}{2x_n}.$$

В качестве начального приближения выберем $x_0 = 4$. Тогда на первом шаге метода Ньютона получаем

$$x_1 = 4 - \frac{7}{8} = 3,125.$$

На втором шаге метода Ньютона получаем

$$x_2 = 3,125 - \frac{3,125^2 - 9}{6,25} = 3,0025.$$

На третьем шаге метода Ньютона получаем

$$x_3 = 3,0025 - \frac{3,0025^2 - 9}{6,005} = 3,000001.$$

Разница между x_2 и x_3 мала. Значит, мы можем считать, что $x_* \approx$ $\approx 3,000001$, и прекращать итерационный процесс. Сравнивая это значение с точным значением корня, видим, что погрешность, которую мы допускаем при отыскании корня методом Ньютона, очень мала уже после трех итераций.

18.6. Решение задач Коши

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y^0. \tag{18.6.1}$$

Здесь $y = y(x)$ — неизвестная функция, а x_0 и y^0 — заданные числа.

Одним из самых популярных методов решения задачи (18.6.1) является ***метод Рунге–Кутта***[42], согласно которому решение этой задачи в точке $x + h$ ищется по формулам

$$\begin{gathered} y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \\ k_1 = hf(x, y), \qquad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \ k_4 = hf(x+h, y+k_3), \end{gathered} \tag{18.6.2}$$

где значение ***шага интегрирования*** h должно быть задано достаточно маленьким.

Формулы (18.6.2) дают возможность найти решение $y(x_0 + h)$ задачи Коши в точке $x = x_0 + h$. Приняв полученное значение за новое начальное условие, можно опять применить формулы (18.6.2) и получить решение $y(x_0 + 2h)$ в точке $x = x_0 + 2h$. Продолжая этот процесс, мы доберемся до конца отрезка, на котором требуется провести интегрирование задачи Коши (18.6.1).

---

[42] ***Карл Давид Тольме Рунге*** (1856–1927), ***Мартин Вильгельм Кутта*** (1867–1944) — немецкие математики.

Формулы (18.6.2) позволяют менять значение шага интегрирования h по ходу решения задачи Коши. Это обстоятельство можно использовать для оценки ***локальной погрешности*** метода Рунге–Кутта, возникающей на каждом шаге интегрирования конкретной задачи. Проводя интегрирование задачи Коши на отрезке $[x, x+h]$ с некоторым фиксированным значением шага h, а затем еще раз решая эту задачу Коши на отрезке $[x, x+h]$, но уже с половинным шагом интегрирования, мы получаем возможность сопоставить найденные значения $y(x+h)$ и оценить возникшую локальную погрешность. Если погрешность оказалась слишком большой, следует продолжить процесс дробления шага h.

Возможен и другой подход к выяснению величины погрешности метода Рунге–Кутта, базирующийся на оценке ***глобальной погрешности***. Предположим, требуется решить задачу Коши (18.6.1) на отрезке $[a, b]$. Тогда эта задача решается с некоторым фиксированным значением шага h, а затем вычисления повторяются, но уже с половинным шагом интегрирования $h/2$. Полученные значения $f(b)$ сопоставляются, и на основе этого сопоставления принимается решение о необходимости продолжать дробление шага интегрирования.

Отметим еще одно очень важное свойство формул (18.6.2). ◄ Они применимы и для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В этом случае величины y, y^0, k_1, k_2, k_3 и k_4 являются векторами одной размерности. Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка часто сводится (см. раздел 15.1) к такой системе. Если в надлежащем виде можно представить и начальные условия полученной задачи Коши, то ее также можно решать методом Рунге–Кутта.

Еще одним достоинством метода Рунге–Кутта и подобных ему методов является то, что они с одинаковым успехом применимы как к линейным, так и к нелинейным задачам.

Заметим также, что численное решение задачи Коши (18.6.1) представляет собой достаточно трудоемкий процесс, попытки реализации которого без помощи компьютера вряд ли целесообразны.

18.7. Решение краевых задач

Решать краевые задачи гораздо труднее, чем задачи Коши. Одним из самых распространенных методов решения краевых задач является ***метод конечных разностей***. Мы рассмотрим его на достаточно простом примере линейной краевой задачи второго порядка

$$\begin{gathered} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(a) = A, \quad y(b) = B. \end{gathered} \tag{18.7.1}$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — заданные функции, a, b, A и B — заданные числа, $y(x)$ — неизвестная функция.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n одинаковых частей точками, которые называются ***узлами***:

$$x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + nh = b.$$

Здесь $h = (b - a)/n$ — ***шаг интегрирования.***

Введем следующие обозначения:

$$y_k = y(x_k),\ y'_k = y'(x_k),\ y''_k = y''(x_k),$$

$$p_k = p(x_k),\ q_k = q(x_k),\ f_k = f(x_k) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, n).$$

Во внутренних узлах $x_k \in (a,\ b)$ аппроксимируем в (18.7.1) производные $y'(x)$ и $y''(x)$ конечно-разностными отношениями, которые соответствуют формулам приближенного дифференцирования (18.3.5) и (18.3.6), полагая

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h},\ y''_k = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots, n-1). \tag{18.7.2}$$

Подставляя (18.7.2) в дифференциальное уравнение (18.7.1), получаем $n - 1$ уравнение

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q_k y_k = f_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots, n-1). \tag{18.7.3}$$

Дополняя эти уравнения двумя уравнениями, порождаемыми краевыми условиями,

$$y_0 = A, \quad y_n = B, \tag{18.7.4}$$

видим, что система (18.7.3)–(18.7.4) содержит $n+1$ уравнение и $n + 1$ неизвестное $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Таким образом, решение краевой задачи (18.7.1) сводится к решению системы алгебраических уравнений. Поскольку рассматриваемая краевая задача является линейной, для нее система (18.7.3)–(18.7.4) также является линейной, а значит, ее решение не представляет собой особенно сложную проблему. Для нелинейной краевой задачи система конечно-разностных уравнений оказывается нелинейной. Решать такие системы нередко бывает весьма непросто даже при наличии мощного компьютера.

Контроль точности вычислений методом конечных разностей проводится обычно путем повторения расчета с удвоенным количеством узлов, если, разумеется, мощности компьютера хватает для выполнения таких расчетов.

Отметим еще, что метод конечных разностей является одним из немногих методов вычислительной математики, позволяющих решать на компьютере краевые задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных.

18.8. Подбор эмпирических формул

Предположим, что имеется таблица значений $y_k = f(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ некоторой функции $y = f(x)$, содержащая экспериментальные данные или результаты каких-либо наблюдений, причем аналитический вид этой функции нам неизвестен. Требуется подобрать такую заданную в аналитическом виде функцию $y = \varphi(x)$, которая как можно меньше отличается от функции $y = f(x)$.

Функция $y = \varphi(x)$ должна зависеть от одного или нескольких параметров, значения которых нужно выбрать так, чтобы $\varphi(x)$ и $f(x)$ были близки. Подчеркнем, что нам не требуется совпадения значений $f(x)$ и $\varphi(x)$ в узлах x_k, т. к. нам нужна близость этих функций «в целом», а не в отдельных точках. Именно это принципиально отличает рассматриваемую задачу от задачи аппроксимации функций полиномами и позволяет надеяться на получение правильных результатов и в том случае, когда значения $y_k = f(x_k)$ содержат небольшие случайные погрешности.

В зависимости от того, что мы будем принимать за критерий близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, мы получим разные методы подбора эмпирических формул. Одним из самых популярных методов этого типа является ***метод наименьших квадратов***, согласно которому мы должны выбрать параметры функции $\varphi(x)$ так, чтобы минимизировать величину

$$F = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - \varphi(x_k)\right]^2 . \qquad (18.8.1)$$

Очевидно, что $F \geqslant 0$, причем $F = 0$, когда все значения $\varphi(x_k)$ и $f(x_k)$ в узлах x_k совпадают. Когда значения $f(x_k)$ и $\varphi(x_k)$ близки, квадраты отклонений $f(x_k)-\varphi(x_k)$ окажутся маленькими, а значит, маленькой окажется и их сумма F. В этой формуле складываются квадраты отклонений, чтобы не учитывать знаки отклонений.

Рассмотрим сначала случай, когда значения функции $y_k = f(x_k)$ таковы, что точки (x_k, y_k) на координатной плоскости располагаются вблизи некоторой прямой. Эмпирическую зависимость, соответствующую данной функции, будем искать в виде $\varphi(x) = ax + b$, где параметры a и b мы должны подобрать так, чтобы функция $y = \varphi(x)$ как можно меньше отличалась от функции $y = f(x)$. Согласно методу наименьших квадратов значения этих параметров должны доставлять минимум функции двух переменных

$$F(a,\, b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2 . \tag{18.8.2}$$

Частные производные этой функции имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= -2 \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)\, x_k, \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= -2 \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b) . \end{aligned} \tag{18.8.3}$$

Приравнивая их к нулю (см. раздел 11.3), получаем линейную алгебраическую систему для определения значений параметров a и b

$$\begin{aligned} c_1 a + c_2 b &= d_1, \\ c_2 a + nb &= d_2. \end{aligned} \tag{18.8.4}$$

Коэффициенты этой системы находятся по формулам

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad & c_2 &= \sum_{k=1}^{n} x_k, \\ d_1 &= \sum_{k=1}^{n} y_k x_k, \quad & d_2 &= \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{aligned} \tag{18.8.5}$$

Мы учли здесь, что $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

Решая систему (18.8.4) по правилу Крамера, получаем

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{18.8.6}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & n \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & c_2 \\ d_2 & n \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Можно доказать, что в невырожденном случае в найденной нами критической точке (a, b) функция $F(a, b)$ достигает своего минимума.

Пример 18.8.1.

Предположим, что функция $y = f(x)$ задана таблицей

$x_1 = 1$	$x_2 = 4$	$x_3 = 6$	$x_4 = 7$	$x_5 = 10$
$y_1 = 1,3$	$y_2 = 3,1$	$y_3 = 4,0$	$y_4 = 4,4$	$y_5 = 5,8$

Нанесем значения $y_k = f(x_k)$ этой функции на координатную плоскость (см. рис. 18.8.1). Эти значения группируются вблизи прямой, поэтому эмпирическую зависимость, соответствующую данной функции, ищем в виде $\varphi(x) = ax + b$. Для определения параметров a и b служит система (18.8.4), коэффициенты которой находятся по формулам (18.8.5). В рассматриваемом примере они имеют следующие значения:

$$c_1 = 202, \quad c_2 = 28, \quad d_1 = 126,5, \quad d_2 = 18,6.$$

Решая систему (18.8.4), получаем $a = 0,494$ и $b = 0,952$, следовательно, искомая эмпирическая формула имеет вид $y = 0,494x + 0,952$.

Случай, когда эмпирическая зависимость ищется в виде линейной комбинации

$$\varphi(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)$$

заданных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, а ее параметры $a_1, a_2, \ldots, a_m$ нужно найти методом наименьших квадратов, ничем принципиально не отличается от того, который мы рассмотрели. Объем работы при этом увеличивается с ростом m, но никаких существенных затруднений при реализации метода наименьших квадратов не возникает.

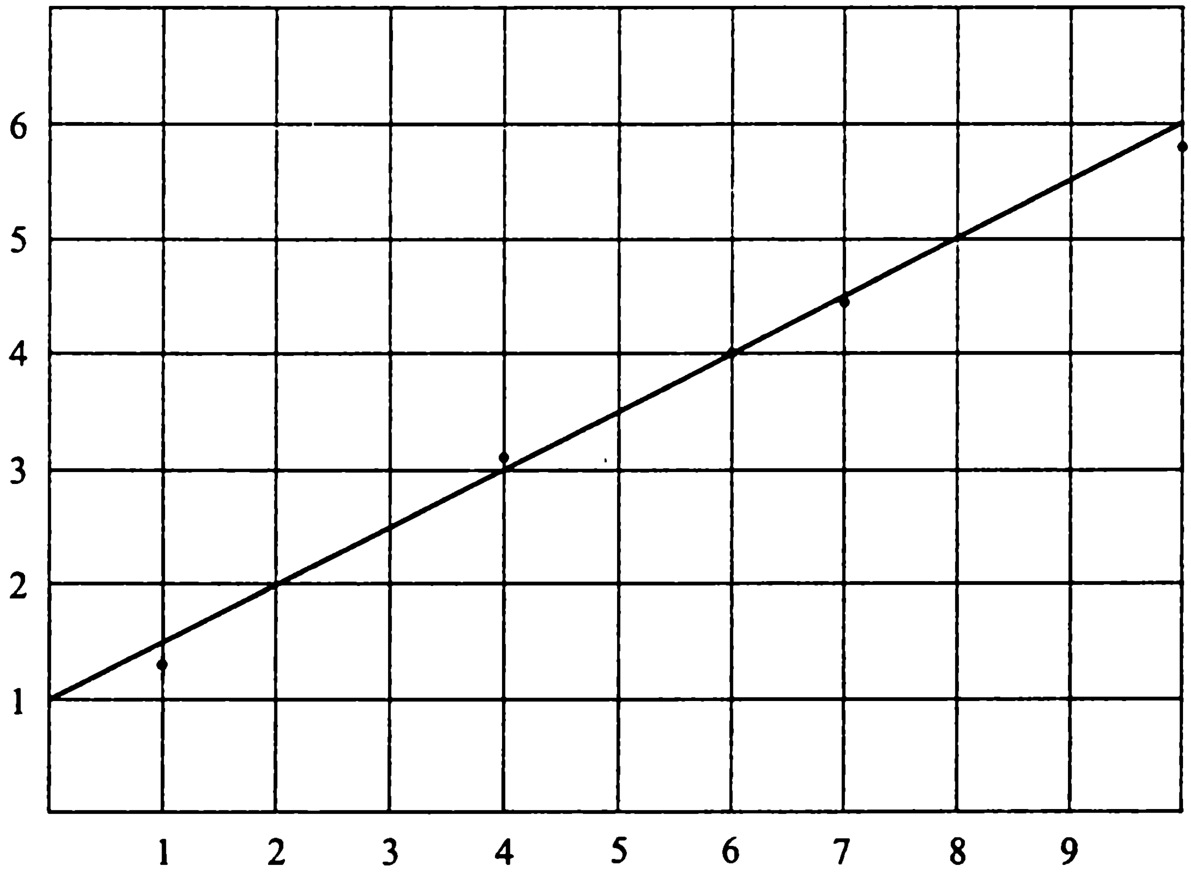


Рис. 18.8.1. Эмпирическая формула $y = 0,494x + 0,952$ для примера 18.8.1.

Иначе обстоит дело, когда эмпирическая зависимость $\varphi(x)$ является нелинейной функцией своих параметров. В этом случае задача минимизации функции (18.8.1) может оказаться слишком трудной.

18.9. Упражнения

18.9.1. Найти приближенное значение производной функции $f(x) = \ln x$ в точке $x = 2$, используя формулу (18.3.5) с шагом дифференцирования $h = 0,01$.

18.9.2. Найти методом Ньютона корень уравнения $x^2 = 7$, используя начальное приближение $x_0 = -3$.

18.9.3. Подобрать параметры a и b эмпирической формулы $y = ax + b$ для функции $y = f(x)$, которая задана таблицей

$x_1 = -2$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$
$y_1 = -6,9$	$y_2 = -2,9$	$y_3 = -1,0$

$x_4 = 2$	$x_5 = 3$	$x_6 = 5$
$y_4 = 1,2$	$y_5 = 2,9$	$y_6 = 7,2$

Ответы.

18.9.1. $f'(2) \approx 0,5.$ **18.9.2.** $x_* \approx -2,64575.$

18.9.3. $y = 2,005x - 2,924.$

Жизнь первокурсника легка и безоблачна.

19. Справочник

В этой главе собраны важнейшие формулы, которые изучаются в школьном курсе математики. Они широко используются и в нашем учебнике. В качестве дополнительной литературы можно порекомендовать классический справочник [2].

19.1. Латинский и греческий алфавиты

Латинский алфавит	
$A\ a$ — а	$N\ n$ — эн
$B\ b$ — бэ	$O\ o$ — о
$C\ c$ — цэ	$P\ p$ — пэ
$D\ d$ — дэ	$Q\ q$ — ку
$E\ e$ — е	$R\ r$ — эр
$F\ f$ — эф	$S\ s$ — эс
$G\ g$ — жэ	$T\ t$ — тэ
$H\ h$ — аш	$U\ u$ — у
$I\ i$ — и	$V\ v$ — вэ
$J\ j$ — жи	$W\ w$ — дубль-вэ
$K\ k$ — ка	$X\ x$ — икс
$L\ l$ — эль	$Y\ y$ — игрек
$M\ m$ — эм	$Z\ z$ — зэт

Греческий алфавит	
A α — альфа	N ν — ню
B β — бета	Ξ ξ — кси
Γ γ — гамма	O o — омикрон
Δ δ — дельта	Π π — пи
E $\varepsilon(\epsilon)$ — эпсилон	R $\rho(\varrho)$ — ро
Z ζ — дзэта	Σ σ — сигма
H η — эта	T τ — тау
θ $\theta(\vartheta)$ — тэта	Φ ϕ — фи
I ι — йота	X χ — хи
K $\varkappa(\kappa)$ — каппа	Υ υ — ипсилон
Λ λ — лямбда	Ψ ψ — пси
M μ — мю	Ω ω — омега

19.2. Римские числа

В римской системе счета используются семь цифр, которые обозначаются латинскими буквами:

$$\mathrm{I} = 1,\ \mathrm{V} = 5,\ \mathrm{X} = 10,\ \mathrm{L} = 50,\ \mathrm{C} = 100,\ \mathrm{D} = 500,\ \mathrm{M} = 1000.$$

Другие натуральные числа образуются путем повторения цифр (II=2) и прибавления к ним цифр слева $(\mathrm{IX} = 10-1 = 9)$ или справа $(\mathrm{XI} = 10+1 = 11)$.

Приведем еще несколько примеров. III=3, IV=4, VI=6, VII=7, VIII=8, XX=20, XXX=30, CC=200, CCC=300.

19.3. Математические обозначения

$\pi = 3,14159...$
$e = 2,71828...$
$\equiv$ — тождественно равно
$\approx$ — приблизительно равно
$\sim$ — эквивалентно, подобно
$\Longrightarrow$ — следует
$\Longleftrightarrow$ — равносильно
$\lvert x\rvert$ — абсолютная величина (модуль) x
$n!$ — факториал. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$
$\log_a x$ — логарифм x по основанию a
$\ln x = \log_e x$ — натуральный логарифм
$\lg x = \log_{10} x$ — десятичный логарифм
R — множество вещественных чисел
Z — множество целых чисел
N — множество натуральных чисел
$\in$ — принадлежит множеству
$\varnothing$ — пустое множество
$\forall$ — любой, каждый
$\exists$ — существует, некоторый
$\to$ — стремится
∞ — бесконечность
$\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ — сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_N$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ — предел $f(x)$ при $x \to a$
$f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = f'_x(x)$ — производная
$\int f(x)\,dx$ — неопределенный интеграл
$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — определенный интеграл

19.4. Алгебраические формулы

Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0)$ — квадратное уравнение.

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ — его корни, $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант.

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ — разложение на множители.

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ — теорема Виета.

Свойства степени

$$a^0 = 1, \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p}, \qquad a^{p+q} = a^p \cdot a^q, \qquad a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q},$$
$$(a^p)^q = a^{pq}, \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Здесь $a > 0$, $b > 0$; n, m — натуральные числа.

Свойства логарифмов

$$y = \log_a x \iff x = a^y, \qquad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a},$$
$$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \qquad \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2,$$
$$\log_a x^b = b \log_a x, \qquad \log_a z^{2n} = 2n \log_a |z|,$$

$x = a^{\log_a x}$ — основное логарифмическое тождество.

Здесь $x > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, $z \neq 0$, n — целое.

Прогрессии

Арифметическая:

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n, \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая:

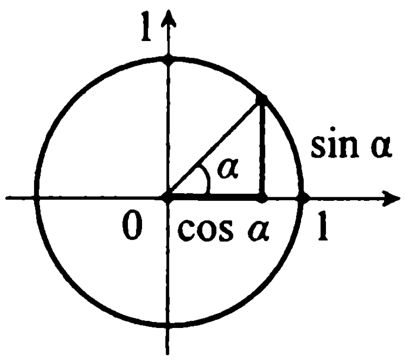
$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, \qquad b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad S = \frac{b_1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

19.5. Тригонометрические формулы

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
Углы измеряются в градусах или радианах. $180° \sim \pi$



$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\sin\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$
$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\cos\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

α	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

Дополнительные формулы

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$	$\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3)$
$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$	$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3)$

Формулы, связывающие между собой $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$, здесь не приводятся. Их легко получить делением основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$ или $\sin^2\alpha$. Формулы для учетверенного аргумента $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$ и $\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$ запоминать не нужно, поскольку они легко выводятся.

Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа b называется угол, синус которого равен b.

$$\sin x = b \implies x = (-1)^n \arcsin b + \pi n \quad (n \in Z)$$

$\lvert b\rvert \leqslant 1$	$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin b \leqslant \dfrac{\pi}{2}$	$\arcsin(-b) = -\arcsin b$

$\sin(\arcsin b) = b$, если $\lvert b\rvert \leqslant 1$	$\arcsin(\sin x) = x$, если $\lvert x\rvert \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Арккосинусом числа b называется угол, косинус которого равен b.

$$\cos x = b \implies x = \pm \arccos b + 2\pi n \quad (n \in Z)$$

$\lvert b\rvert \leqslant 1$	$0 \leqslant \arccos b \leqslant \pi$	$\arccos(-b) = \pi - \arccos b$

$\cos(\arccos b) = b$, если $\lvert b\rvert \leqslant 1$	$\arccos(\cos x) = x$, если $0 \leqslant x \leqslant \pi$

Арктангенсом числа b называется угол, тангенс которого равен b.

$$\operatorname{tg} x = b \implies x = \operatorname{arctg} b + \pi n \quad (n \in Z)$$

b — любое	$-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} b < \dfrac{\pi}{2}$	$\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b) = b$ при $\forall\, b$	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, если $\lvert x\rvert < \dfrac{\pi}{2}$

Арккотангенсом числа b называется угол, котангенс которого равен b.

$$\operatorname{ctg} x = b \quad \Longrightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} b + \pi n \quad (n \in Z)$$

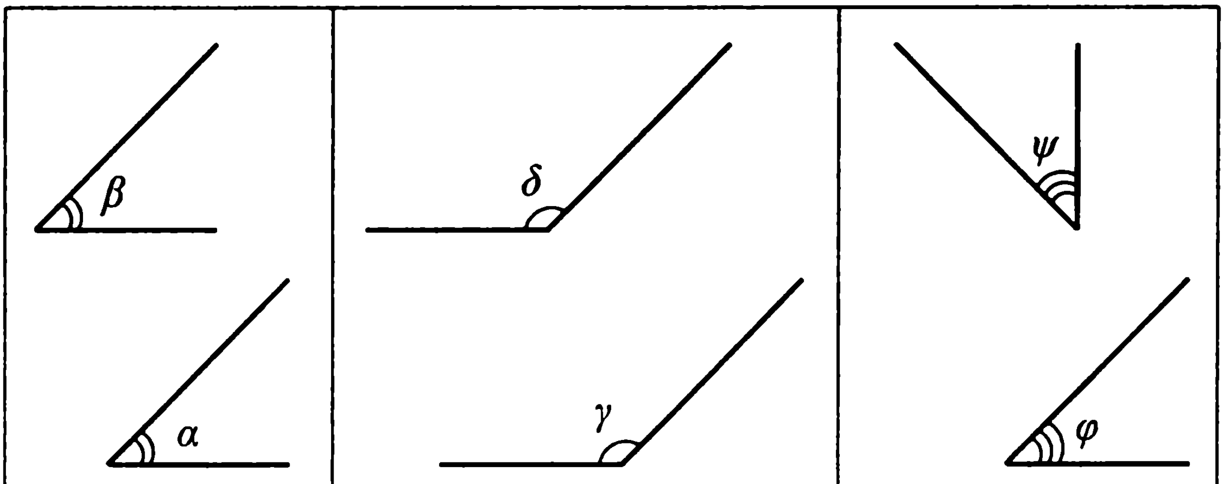
b — любое	$0 < \operatorname{arcctg} b < \pi$	$\operatorname{arcctg}(-b) = \pi - \operatorname{arcctg} b$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} b) = b$ при $\forall\, b$	$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, если $0 < x < \pi$

$$\arcsin b + \arccos b = \frac{\pi}{2} \text{ при } |b| \leqslant 1$$

$$\operatorname{arctg} b + \operatorname{arcctg} b = \frac{\pi}{2} \text{ при } \forall\, b$$

19.6. Геометрические формулы



$\alpha = \beta$	$\gamma = \delta$	$\varphi = \psi$

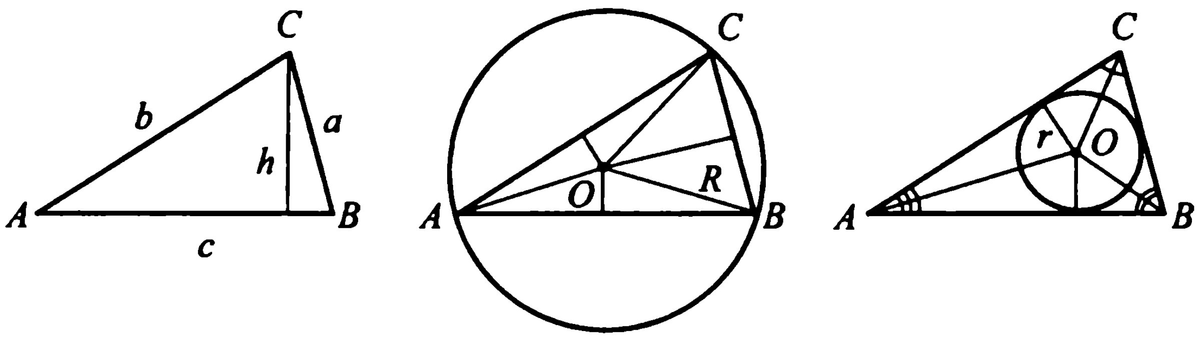
Углы со взаимно параллельными или перпендикулярными сторонами

- Два угла со взаимно параллельными сторонами равны, когда они оба острые или оба тупые.

- Два угла со взаимно перпендикулярными сторонами равны, когда они оба острые или оба тупые.

- Расстояние между двумя точками плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Произвольный треугольник

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ab\sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{4R} =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp,$$

где $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр.

- Сумма внутренних углов треугольника $A + B + C = 180°$.

- Сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.

- ***Медианой*** треугольника называется отрезок прямой, соединяющий вершину угла с серединой противоположной стороны. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке (центре тяжести треугольника). В этой точке каждая медиана делится в отношении 2:1, считая от вершины угла.

- ***Биссектрисой*** угла треугольника называется отрезок прямой, который делит этот угол пополам. Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной в треугольник окружности[43] радиуса r.

- Все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной около треугольника окружности[44] радиуса R.

- ***Высотой*** называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону. Все три высоты пересекаются в одной точке.

- ***Средней линией*** называется отрезок прямой, соединяющий середины двух сторон треугольника. Она параллельна третьей стороне и равна ее половине.

- ***Равнобедренным*** называется треугольник, у которого равны между собой две боковые стороны.

- ***Правильным*** называется треугольник, у которого равны между собой все три стороны и все три угла.

[43] Биссектриса — геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

[44] Серединный перпендикуляр — геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка.

Центр ***описанной окружности*** лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Ее радиус $R = \dfrac{a}{2\sin A}$

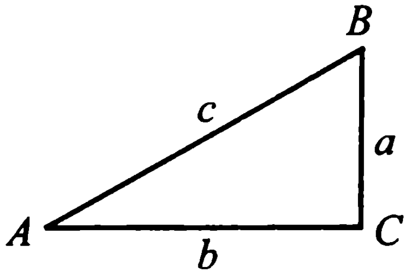
Центр ***вписанной окружности*** лежит на пересечении биссектрис треугольника.

Ее радиус $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Теорема тангенсов: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}$

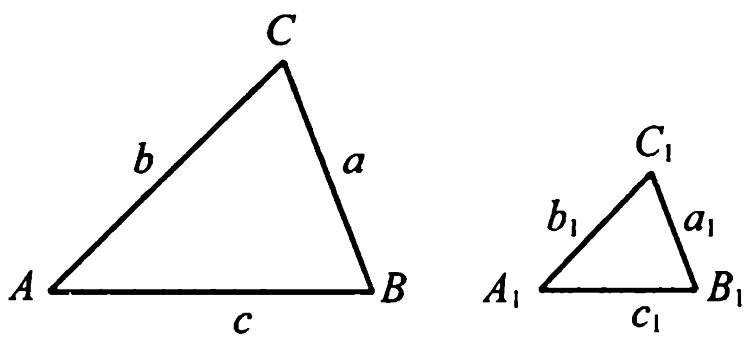


Прямоугольный треугольник

$c^2 = a^2 + b^2$ — теорема Пифагора

$a = c\sin A \qquad b = c\cos A$

- В прямоугольном треугольнике медиана, опущенная на гипотенузу, равна половине гипотенузы.



Подобные треугольники

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

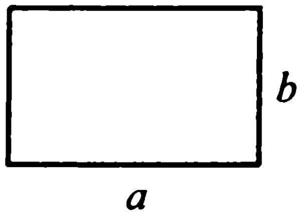
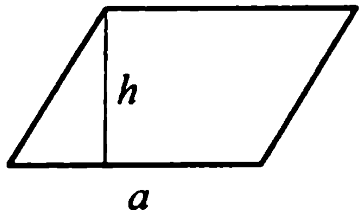
$$A = A_1 \quad B = B_1 \quad C = C_1$$

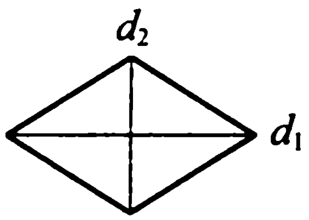
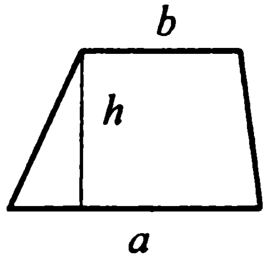
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

- ***Подобными*** называются треугольники, у которых соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. Это определение справедливо и для многоугольников с одинаковым числом сторон.

- Треугольники являются подобными при выполнении хотя бы одного из следующих трех условий: 1) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого; 2) два угла одного треугольника равны двум углам другого; 3) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между ними, равны.

- Отношение площадей подобных фигур равно отношению квадратов их линейных элементов (сторон, периметров, высот и т. п.).

	
Прямоугольник $S = ab$	***Параллелограмм*** $S = ah$

	
Ромб $S = \frac{1}{2}d_1d_2$	***Трапеция*** $S = \frac{1}{2}(a+b)h$

- Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника $A + B + C + D = 360°$.

- Сумма любых трех сторон выпуклого четырехугольника больше четвертой стороны.

- ***Прямоугольником*** называется четырехугольник, у которого все углы прямые. У прямоугольника противоположные стороны равны и параллельны. Диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам.

- ***Параллелограммом*** называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны.

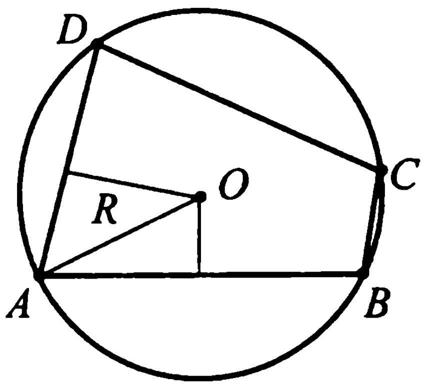
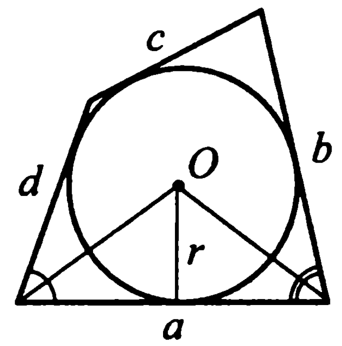
Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

- ***Ромбом*** называется параллелограмм, у которого все стороны равны. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы пополам.

- ***Трапецией*** называется четырехугольник, две стороны которого параллельны (они называются основаниями), а две другие не параллельны (они называются боковыми сторонами).

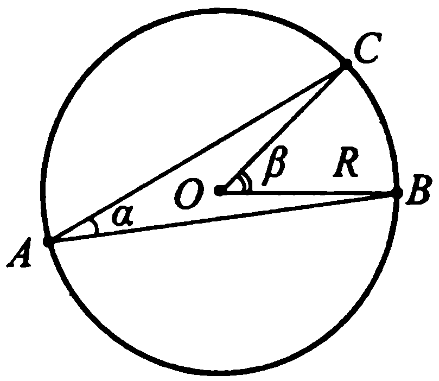
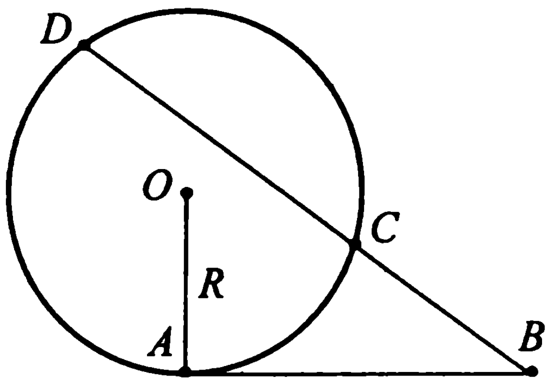
- Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

- ***Правильным*** называется многоугольник, все стороны и все углы которого равны между собой.

	
Вписанный четырехугольник $A+C=B+D=180°$	***Описанный четырехугольник*** $a+c=b+d$

- Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны $180°$: $A+C=B+D=180°$. При этом все четыре серединных перпендикуляра к сторонам четырехугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной около четырехугольника окружности.

- В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны: $a+c = b+d$. В этом случае все четыре биссектрисы пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной в четырехугольник окружности.

	
Окружность и круг	***Секущая и касательная***
$S = \pi R^2 \qquad l = 2\pi R$	$AB \perp OA$
$\alpha = \frac{1}{2}\breve{BC} \qquad \beta = \breve{BC}$	$(AB)^2 = BC \cdot BD$

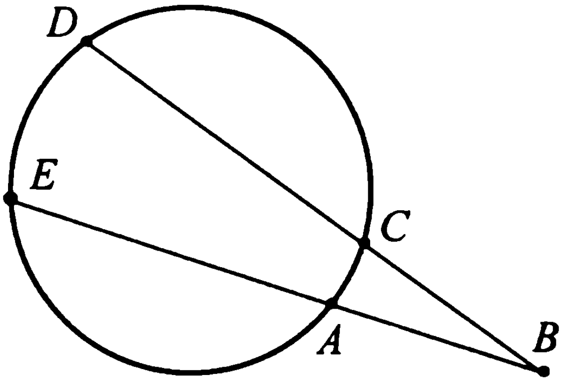
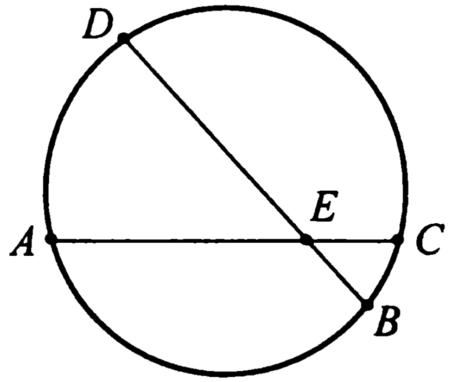
- ***Окружность*** — геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной точки, которая называется центром окружности.

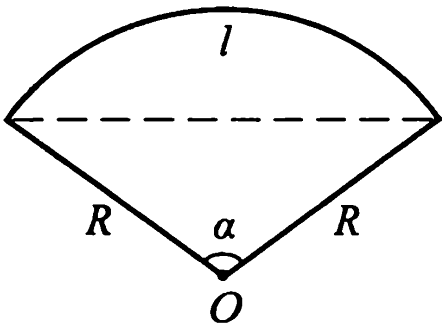
- ***Вписанный угол*** измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

- ***Центральный угол*** измеряется дугой, на которую он опирается.

- ***Касательной*** называется прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.

- ***Секущей*** называется прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

	
Две секущие $BA \cdot BE = BC \cdot BD$	***Две хорды*** $ED \cdot EB = EA \cdot EC$

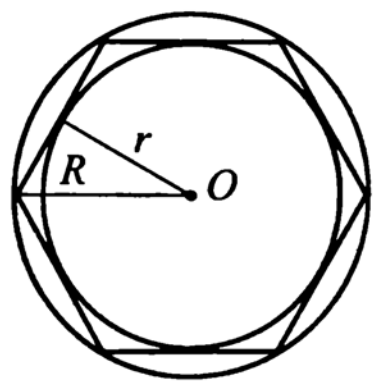


Круговой сектор

$$S \cdot 360^\circ = \pi R^2 \cdot \alpha^\circ$$

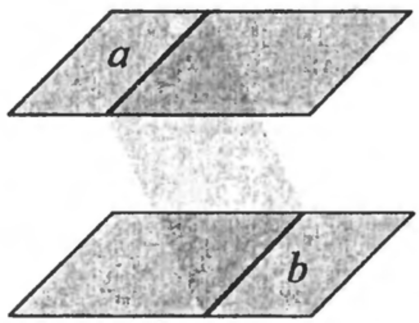
- ***Хордой*** называется отрезок прямой, концы которого лежат на окружности.

- ***Круговой сегмент*** — это верхняя часть кругового сектора, которая остается, если из сектора удалить треугольник.

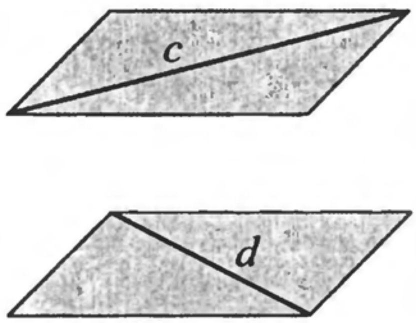


Правильный шестиугольник

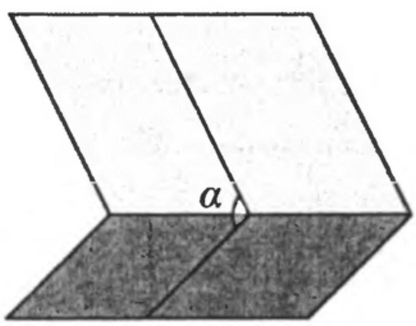
$$S = 6S_{\triangle}$$



Параллельные прямые



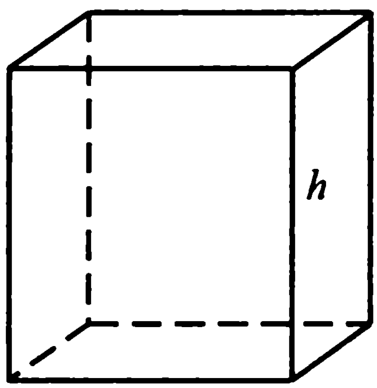
Скрещивающиеся прямые



Двугранный угол

- Две параллельные прямые в пространстве не пересекаются. Две скрещивающиеся прямые тоже не пересекаются. Различие между ними состоит в том, что существует такая плоскость, в которой лежат обе параллельные прямые, а вот скрещивающиеся прямые этим свойством не обладают.

- ***Двугранный угол*** образуется двумя непараллельными плоскостями. Он измеряется своим линейным углом. Линейный угол строится следующим образом. Из одной точки линии пересечения плоскостей проводятся два перпендикуляра к ней. Один перпендикуляр должен лежать в одной из пересекающихся плоскостей, другой перпендикуляр — в другой плоскости. Эти два перпендикуляра и образуют линейный угол двугранного угла.



Призма

$$V = S_{\text{осн}} h$$

- ***Многогранником*** называется тело, ограниченное плоскостями.

- ***Призмой*** называется многогранник, у которого основаниями являются одинаковые многоугольники, а боковые грани являются параллелограммами.

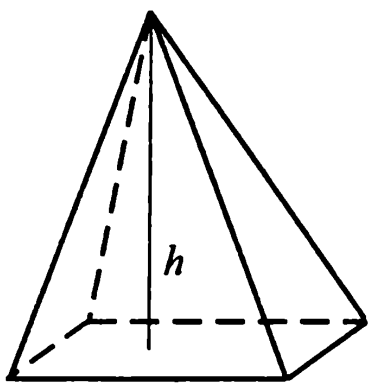
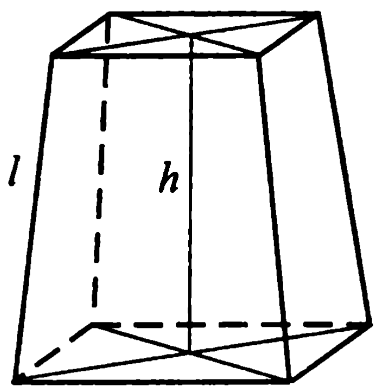
- ***Прямой призмой*** называется призма, у которой боковые ребра перпендикулярны основаниям.

- ***Наклонной призмой*** называется призма, у которой боковые ребра не перпендикулярны основаниям.

- ***Правильной призмой*** называется прямая призма, у которой основания являются правильными многоугольниками.

- ***Параллелепипедом*** называется призма, у которой основания являются параллелограммами. В параллелепипеде все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

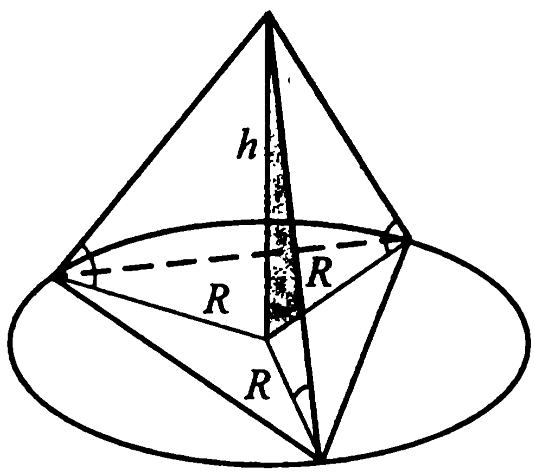
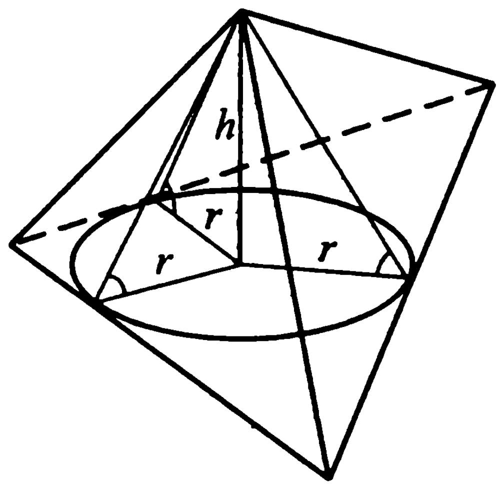
- ***Прямоугольным параллелепипедом*** называется параллелепипед, у которого все грани являются прямоугольниками.

	
Пирамида $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$	***Усеченная пирамида*** $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)h$

- ***Пирамидой*** называется многогранник, у которого в основании лежит многоугольник, а боковые грани являются треугольниками, которые имеют одну общую вершину.

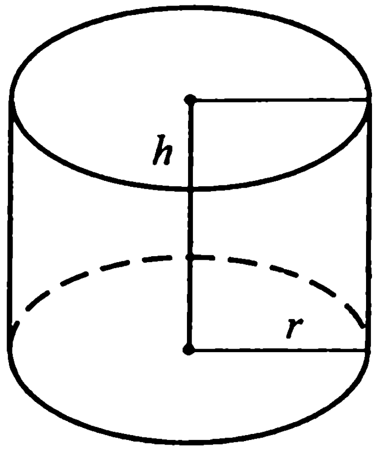
- ***Тетраэдром*** называется треугольная пирамида (у нее четыре грани).

- ***Правильным тетраэдром*** называется тетраэдр, у которого все четыре грани являются равными правильными треугольниками. Иногда, впрочем, такое тело называют просто тетраэдром.

	
Ребра наклонены к основанию под одинаковыми углами	***Грани*** наклонены к основанию под одинаковыми углами

- Если все ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами, то высота пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

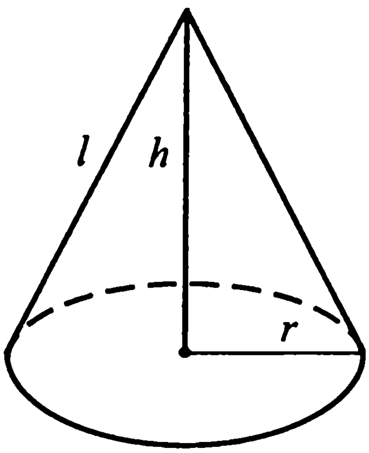
- Если все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами, то высота пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.



Цилиндр

$$V = \pi r^2 h$$

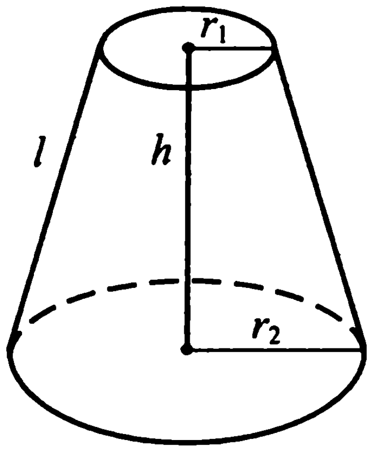
$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h$$



Конус

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = \pi r l$$

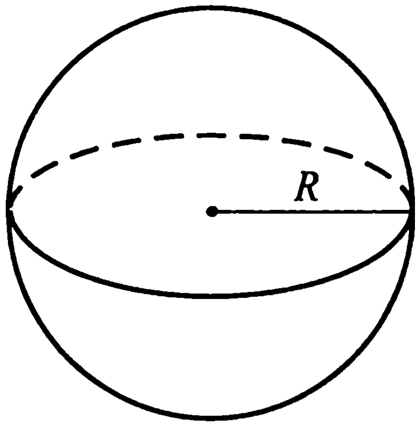


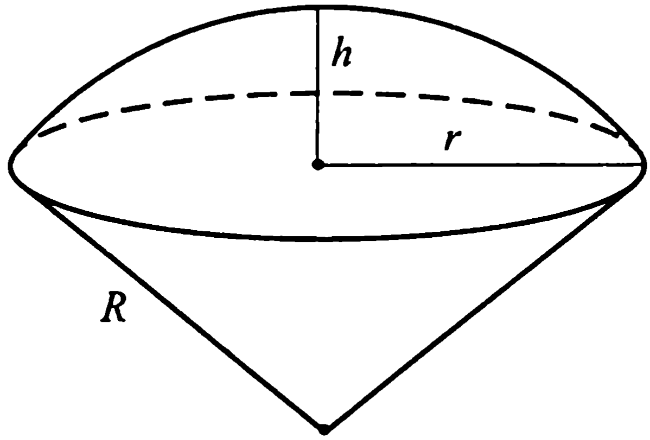
Усеченный конус

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)h$$

$$S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l$$

Строгие определения ***цилиндра*** и ***конуса*** являются довольно абстрактными и сложными для восприятия. Мы их рассматривать не будем, считая, что читателям эти понятия знакомы по школьному курсу стереометрии.





Шар	***Шаровой сектор***
$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad S = 4\pi R^2$	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h \qquad S = \pi R(2h + r)$

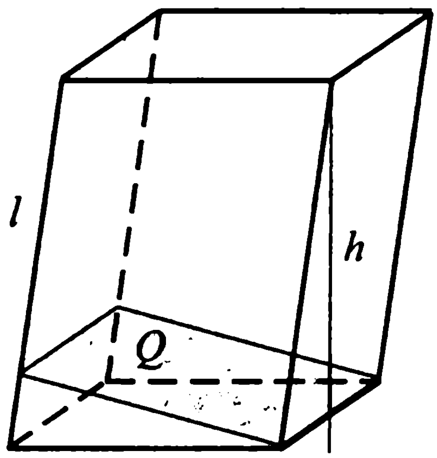
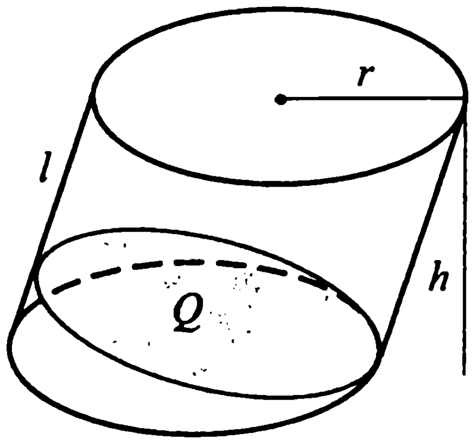
- ***Шар*** образуется вращением полукруга около его диаметра.
- ***Сфера*** — поверхность шара. Она является геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от одной точки, которая называется центром сферы или шара.
- ***Шаровой сегмент*** — это верхняя часть шарового сектора, которая остается, если из сектора удалить конус.

Дополнительные формулы и свойства

- В произвольном треугольнике
  $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ — медиана к стороне a.
  $l_A = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ — биссектриса угла A.
- Биссектриса делит сторону треугольника, к которой она проведена, на части, пропорциональные двум другим сторонам.

- Если взять на окружности любую точку и провести через нее касательную и хорду, то образуется угол, который измеряется половиной дуги, заключенной между сторонами угла.

- Если внутри правильного треугольника взять любую точку и опустить из нее перпендикуляры на стороны треугольника, то их сумма будет равна высоте треугольника.

	
Наклонная призма $V = S_{\text{осн}}h = Ql$ Q — площадь сечения, перпендикулярного боковой грани	***Наклонный цилиндр*** $V = \pi r^2 h = Ql$ Q — площадь сечения, перпендикулярного образующей

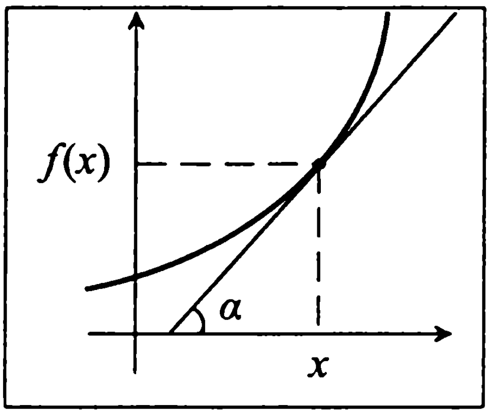
19.7. Формулы анализа

Функции

Строгие определения, разъяснения и примеры даны в предшествующих главах. Здесь же мы ограничимся лишь кратким напоминанием некоторых важных понятий, известных по школьному курсу математики.

- ***Функция***: $y = f(x)$,
  $x \in D(f)$ (область определения), $y \in E(f)$ (множество значений).
- ***Четная***: $f(-x) = f(x)$ при $\forall x \in D(f)$.
- ***Нечетная***: $f(-x) = -f(x)$ при $\forall x \in D(f)$.
- ***Периодическая***: $f(x+T) = f(x)$ при $\forall x \in D(f)$.
- ***Ограниченная на множестве*** D_0 : $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при $\forall x \in \ \in D_0 \subseteq D(f)$.
- ***Суперпозиция***: $y = f(g(x))$ — суперпозиция функций $y = f(z)$ и $z = g(x)$.

Производные и дифференциалы



$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$	$(cf(x))' = cf'(x)$
$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$	$(uv)' = u'v + uv'$
$df = f'(x)dx$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

- ***Производная сложной функции***: $y'_x = y'_z z'_x$.

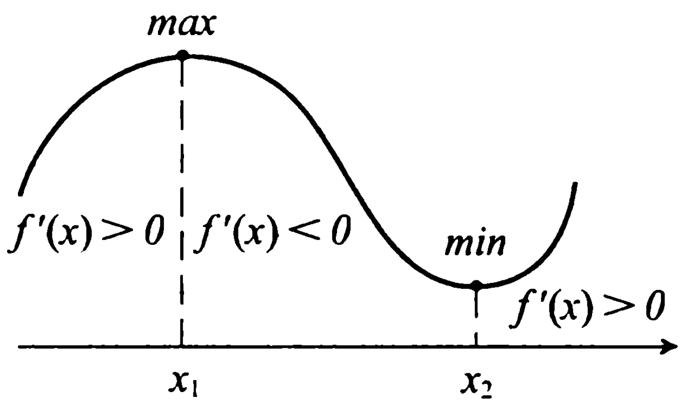
- ***Производная обратной функции***: $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

- ***Производная*** $f'(x)$ ***равна тангенсу угла наклона касательной*** к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке с абсциссой x. Угол отсчитывается от положительной части оси абсцисс против часовой стрелки.

- Если $S(t)$ — путь, пройденный телом к моменту времени t, то $S'(t)$ — ***скорость*** этого тела в момент времени t, а $S''(t)$ — ***ускорение***.

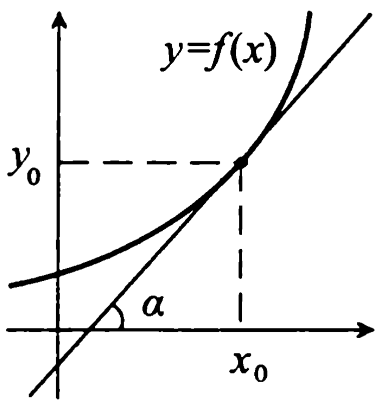
Производные элементарных функций		
$(const)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Примеры. $x' = 1$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(2^x)' = 2^x \ln 2$, $(\sin 5x)' = 5 \cos 5x$.



Если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ ***возрастает***

Если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ ***убывает***



Уравнение касательной:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Первообразные и интегралы

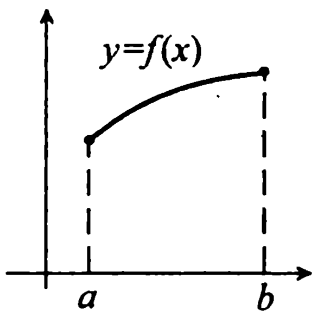
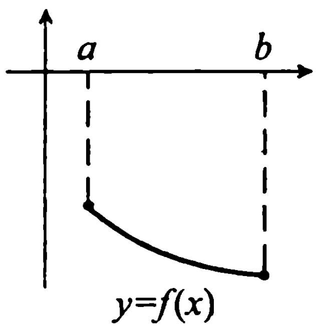
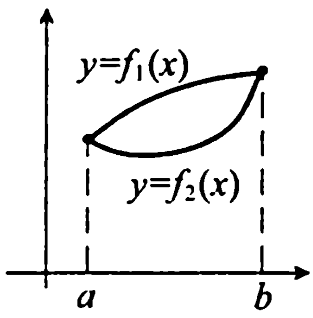
- ***Первообразная*** $F(x)$ для функции $f(x)$: $F'(x) = f(x)$.
- ***Неопределенный интеграл***: $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.
- ***Определенный интеграл***: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Свойства неопределенных интегралов		
$\int df = f(x) + c$	$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$	$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$
$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$		

Таблица простейших неопределенных интегралов		
$\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c\ (a \neq -1)$	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	

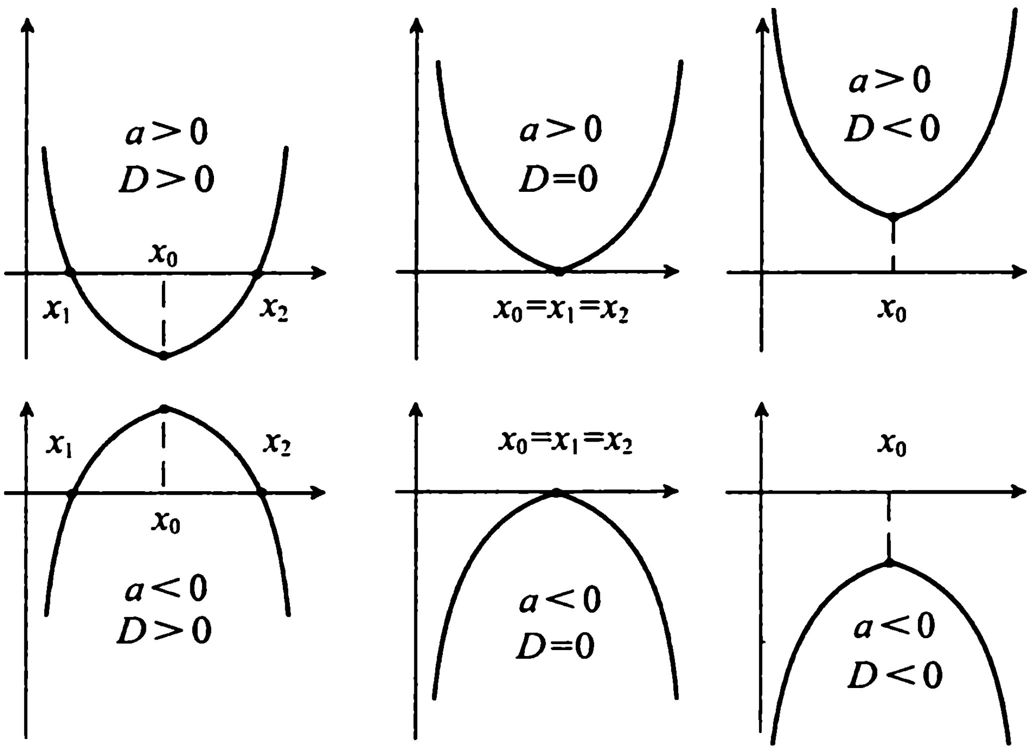
Свойства определенных интегралов		
$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$	$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$	$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

$\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx$	$\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx$

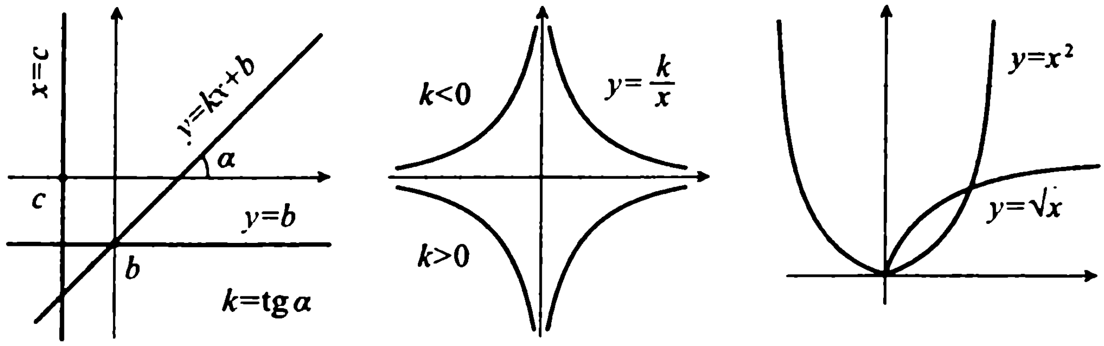
Площадь криволинейной трапеции		
		
$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$	$S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$	$S = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$

19.8. Графики

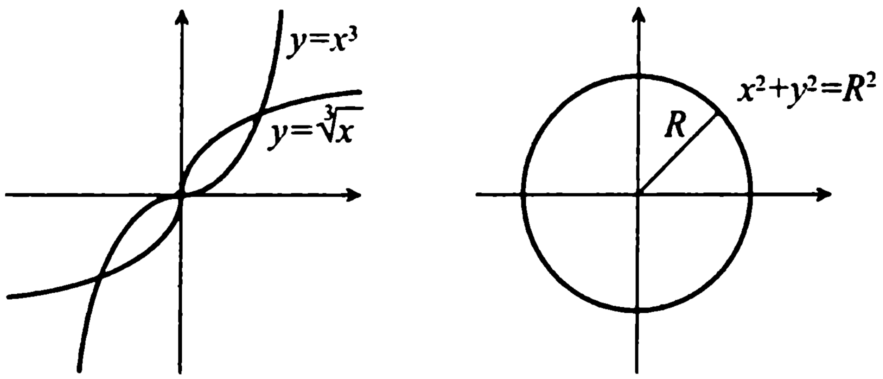
При рисовании графиков соблюдать масштабы обычно не требуется. Нужно лишь, чтобы рисунок правильно отражал все характерные особенности поведения функции.



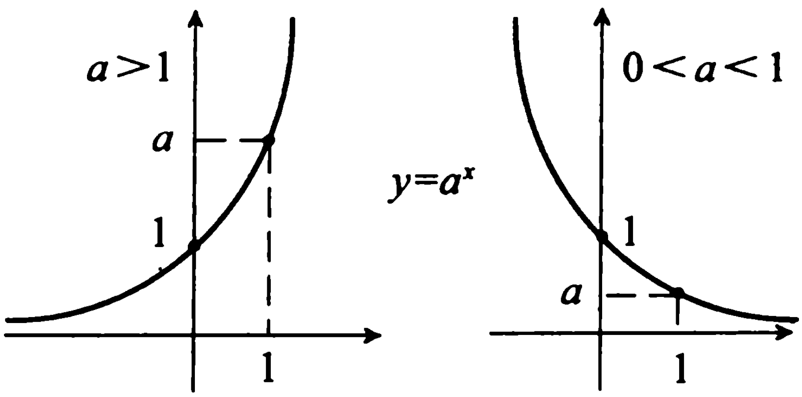
Парабола $y = ax^2 + bx + c, \quad D = b^2 - 4ac.$



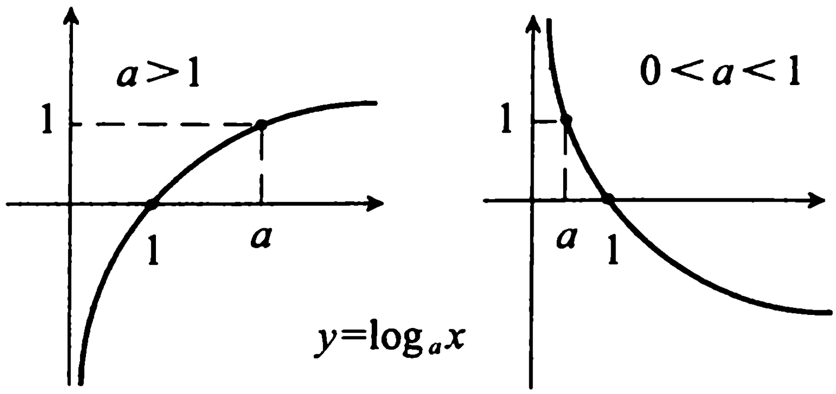
Прямая, гипербола, парабола (слева направо)



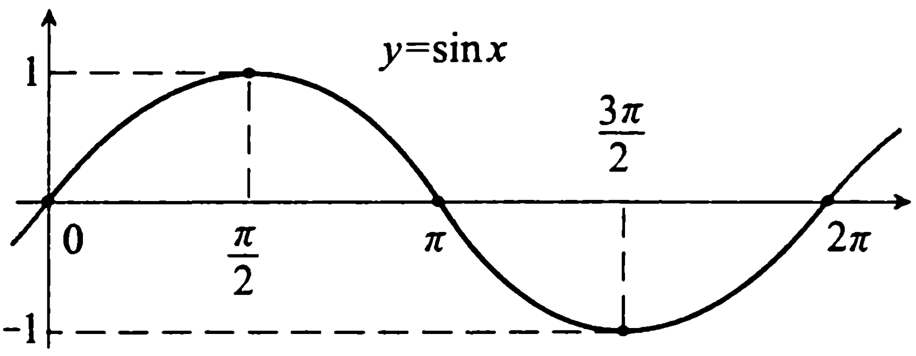
Кубическая парабола, корень кубический
и ***окружность***



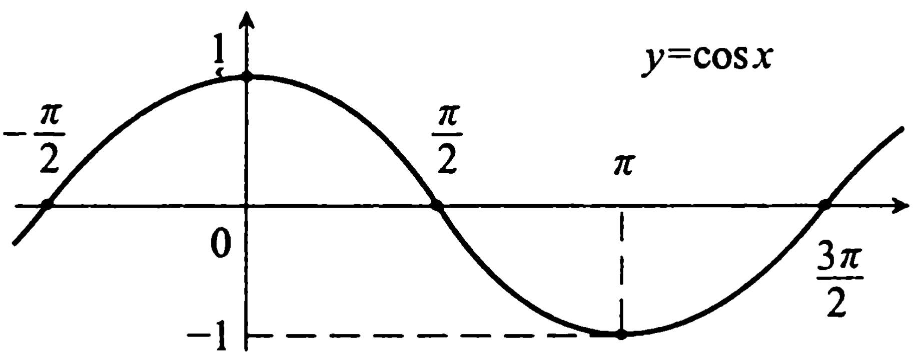
Показательная функция



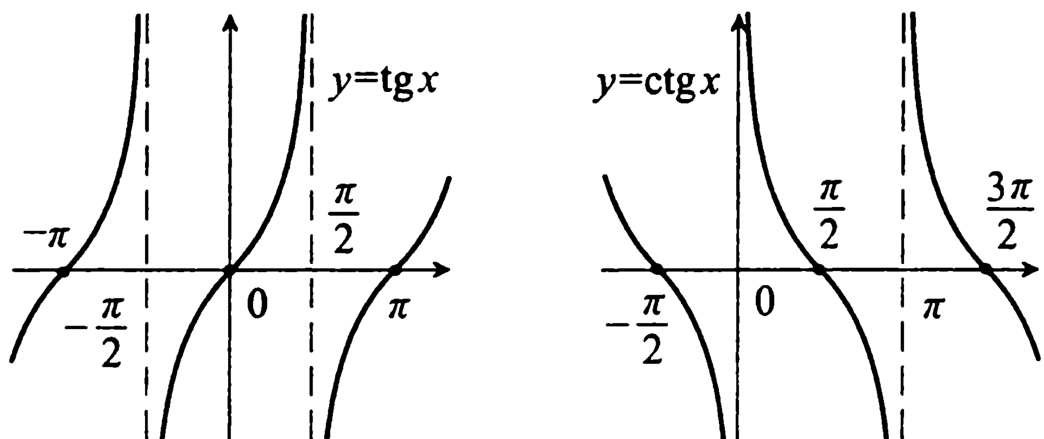
Логарифмическая функция



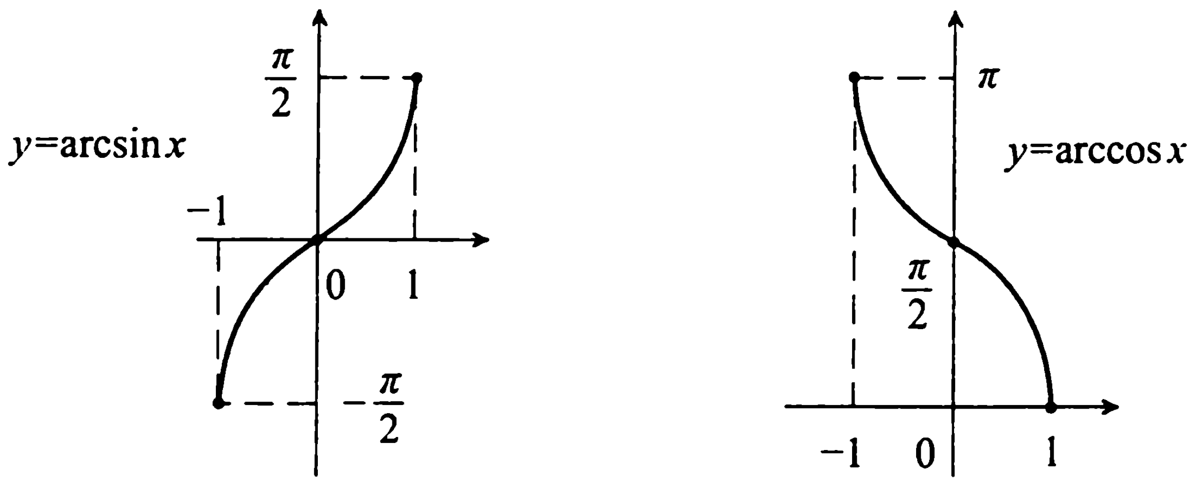
Синусоида. Период $T = 2\pi$



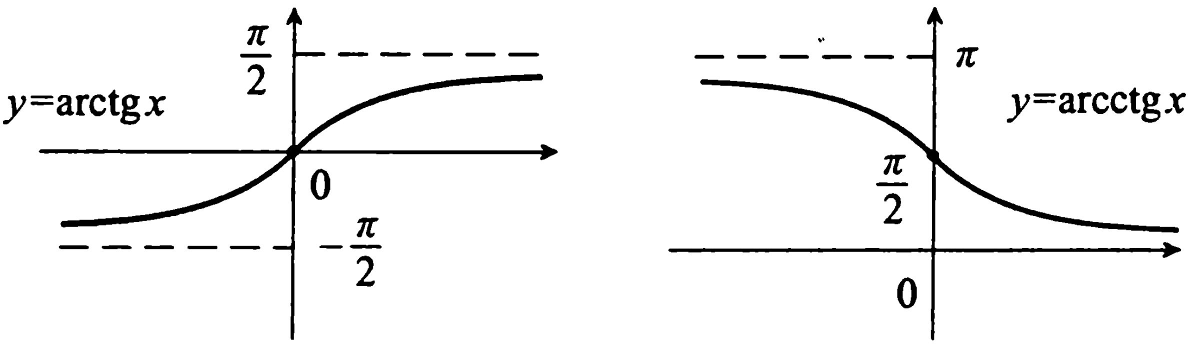
Косинусоида. Период $T = 2\pi$



Тангенсоида и ***котангенсоида.*** Период $T = \pi$



Обратные тригонометрические функции



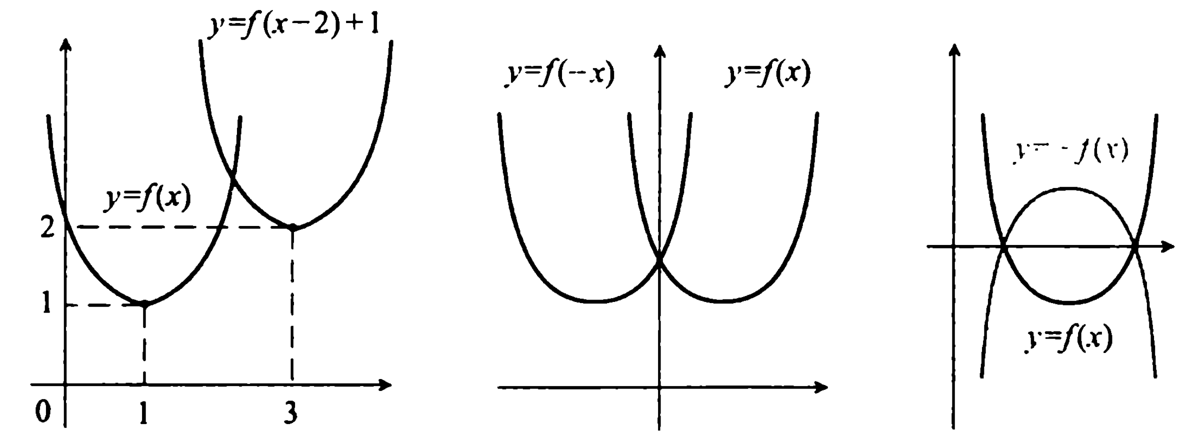
Обратные тригонометрические функции

Преобразования графиков

- График функции $y = f(x+a)+b$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом на a единиц вдоль оси абсцисс и на b единиц вдоль оси ординат. Если $a > 0$, то график сдвигается влево, иначе — вправо. Если $b > 0$, то график сдвигается вверх, иначе — вниз.

- График функции $y = f(-x)$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси ординат.

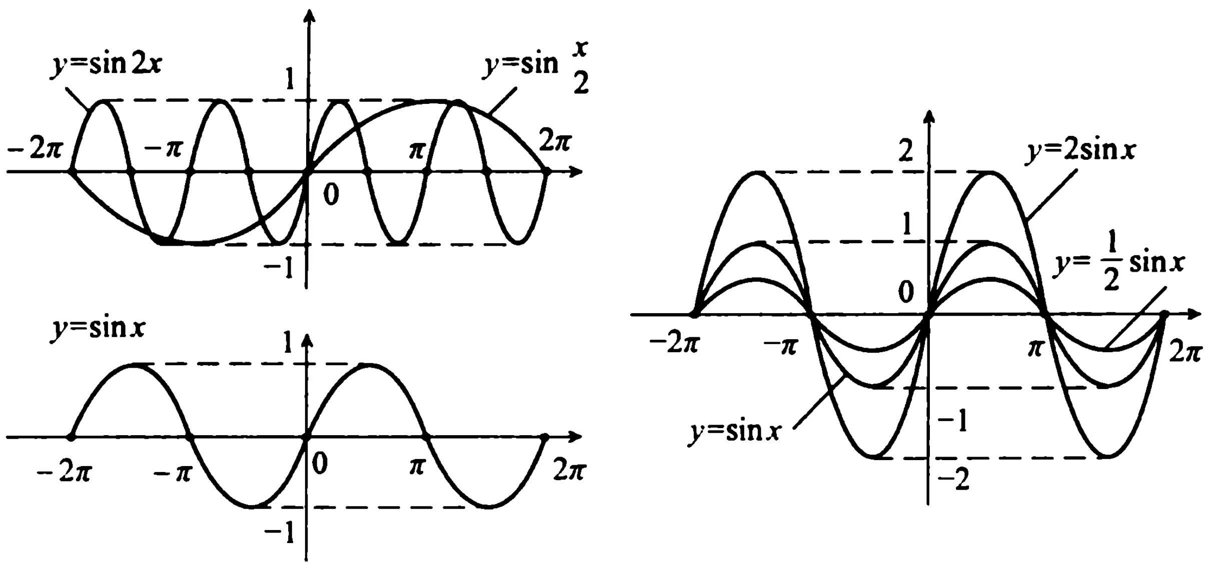
- График функции $y = -f(x)$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси абсцисс.



Сдвиги и отражения графиков относительно координатных осей

- График функции $y = f(kx)$ получается из графика $y = f(x)$ сжатием (когда $k > 1$) или растяжением (когда $0 < k < 1$) в k раз вдоль оси абсцисс.

- График функции $y = kf(x)$ получается из графика $y = f(x)$ растяжением (когда $k > 1$) или сжатием (когда $0 < k < 1$) в k раз вдоль оси ординат.

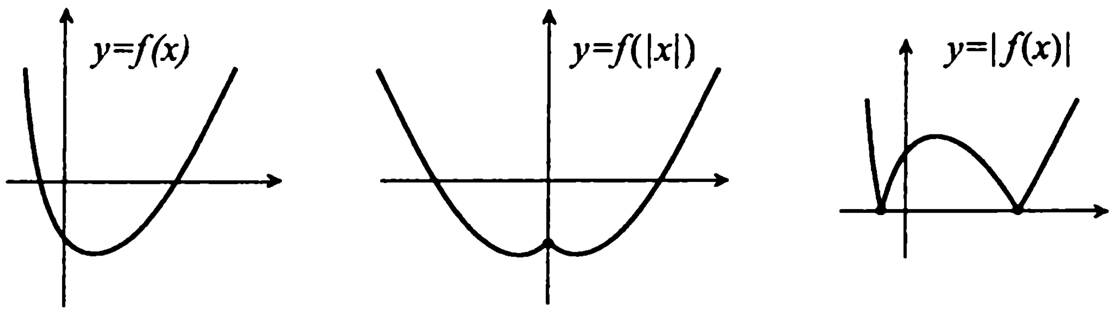


Сжатия и растяжения графиков вдоль координатных осей

- Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, нужно сначала построить график функции $y = f(x)$ при

$x \geqslant 0$, а затем отразить его относительно оси ординат. Отражаемая часть графика при этом сохраняется.

- Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, нужно сначала построить график функции $y = f(x)$, а затем отразить его часть, лежащую ниже оси абсцисс, относительно этой оси. Отражаемая часть графика при этом удаляется.



Графики функций с ***модулями***

20. Литература

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: РХД, 2000. 368 с.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1981. 720 с.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
4. *Демидович Б. П., Кудрявцев В. А.* Краткий курс высшей математики. — М.: АСТ, Астрель, 2001. 656 с.
5. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Часть I. — М.: Наука; Физматлит, 2005. 648 с.
6. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Часть II. — М.: Наука; Физматлит, 2002. 464 с.
7. *Инфельд Л.* Эварист Галуа. Избранник богов. — М.: Молодая гвардия, 1965. 352 с. — (ЖЗЛ).
8. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука; Физматлит, 1978. 512 с.
9. *Калиткин Н. Н. и др.* Математические модели природы и общества. — М.: Наука; Физматлит, 2005. 360 с.
10. *Колесов В. В., Моршнева И. В., Норкин М. В.* Высшая математика. Часть I. Функции, пределы, производные, 2007. Электронный учебник. Номер гос. регистрации: 50200802347 от 09.12.2008. 172 с.
11. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука; Физматлит, 1965. 432 с.

12. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике. — М.: Наука, 1987. 352 с.

13. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1984. 256 с.

При работе с данным учебником в качестве вспомогательной литературы рекомендуется использовать книгу [4]. Прекрасный набор примеров можно найти в задачнике [12]. Тем, кто захочет расширить и углубить свои математические знания, можно посоветовать обратиться к двухтомнику [5, 6].

21. Предметный указатель

Серия «Высшее образование»

КОЛЕСОВ Вадим Владимирович,
РОМАНОВ Максим Николаевич

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ
Учебное пособие

Ответственный редактор	*А. Боровиков*
Выпускающий редактор	*Г. Логвинова*
Компьютерная верстка	*В. Колесов, М. Романов*

Книга сверстана в издательской системе LaTeX2e

Сдано в набор 26.10.2012
Подписано в печать 10.02.2013
Формат 84 × 108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Тираж 2500 экз. Заказ № 71.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону,
пер. Халтуринский, 80
Тел. (863)261-89-59, тел./факс 261-89-50
Сайт издательства: http://www.fenixrostov.ru
Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru
E-mail: phoenix_borovikov@mail.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга».
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам

Издательство
Феникс

344082, г. Ростов-на-Дону,
пер. Халтуринский, 80
Тел.: (863) 261-89-50
www.phoenixrostov.ru

Региональные представительства

Начальник отдела по работе с представительствами
Цукерман Марк Валерьевич (доб. 186) mark_fenix@mail.ru

МОСКВА

Моисеенко Сергей Николаевич
г. Москва, ул. Новодмитровская, д. 5а, стр. 3
(м. «Дмитровская»)
Тел.: (499) 558-03-09, (499) 558-03-11
E-mail: fenix-m@yandex.ru; fenix-mos@mail.ru

Мячин Виталий Васильевич
г. Москва, Шоссе Фрезер, 17 (м. «Авиамоторная»)
Тел.: (495) 517-32-95, (495) 789-83-17.
E-mail: mosfen@pochta.ru, mosfen@bk.ru

ЕКАТЕРИНБУРГ

Швидков Александр Владимирович
Тел.: (343) 382-43-01, 8-922-154-01-81
E-mail: fenix-ekb@mail.ru
ICQ 396-869-385

САМАРА (НИЖНЕЕ ПОВОЛЖЬЕ)

Митрохин Андрей Михайлович
Самара, ул. Товарная, 7«Е» (территория базы «Учебник»)
Тел.: (846) 951-24-76, 8-917-112-96-85.
E-mail: fenixma@mail.ru

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Орлов Дмитрий Сергеевич
г. Санкт-Петербург, ул. Стрельбищенская, д. 15, к. 2
Тел.: 8-812-600-47-41, 8-952-248-49-38
E-mail: orlov@fx-spb.ru